

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DE MODELOS CONSTITUTIVOS ANISOTRÓPICOS PARA SIMULAÇÃO DO  
COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TENDÕES SUBMETIDOS A GRANDES  
DEFORMAÇÕES E DANO MECÂNICO

por

Gabriel Paiva Alves

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, 08 de Junho de 2015.

ESTUDO DE MODELOS CONSTITUTIVOS ANISOTRÓPICOS PARA SIMULAÇÃO DO  
COMPORTAMENTO MECÂNICO DE TENDÕES SUBMETIDOS A GRANDES  
DEFORMAÇÕES E DANO MECÂNICO

por

Gabriel Paiva Alves

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Thamy Cristina Hayashi  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Prof. Dr. Edson Hikaro Aseka

Porto Alegre, 08 de Junho de 2015.

ALVES, G.P. **Estudo de Modelos Constitutivos Anisotrópicos para Simulação do Comportamento Mecânico de Tendões Submetidos a Grandes Deformações e Dano Mecânico**. 2015. 19 p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## **RESUMO**

A engenharia biomecânica vem dando especial atenção ao estudo e simulação de tecidos biológicos a fim de prever numericamente o comportamento de sistemas biomecânicos quando submetido a diferentes solicitações. Modelos capazes de representar adequadamente as respostas mecânicas desses materiais podem contribuir com profissionais da área da saúde no aprimoramento de técnicas para prevenção e tratamento de lesões, além de auxiliar no desenvolvimento de dispositivos médicos e procedimentos cirúrgicos. Este trabalho, portanto, tem como foco o estudo de modelos constitutivos adequados para simular tendões, visto que esses tecidos são fortemente solicitados mecanicamente. Eles podem apresentar comportamento mecânico complexo de ser representado matematicamente, envolvendo grandes deformações, resposta mecânica não linear, anisotropia, dano mecânico e sensibilidade a velocidade de deformação. Neste trabalho é apresentado um estudo e implementação de modelos hiperelásticos anisotrópicos com danificação mecânica a fim de contornar as dificuldades de simulação da resposta de um tendão quando submetido a grandes deformações sob baixas velocidades de carregamento. Para tanto, foram realizados ajustes de parâmetros para diferentes combinações de leis hiperelásticas e de evolução de dano encontradas na literatura, de forma a encontrar a melhor combinação para o resultado experimental de um ensaio de tração uniaxial monotônico quase-estático. Dessa forma, foi obtido um modelo constitutivo capaz de reproduzir de forma adequada o comportamento observado. Além disto, são apresentados testes numéricos demonstrando a capacidade do modelo implementado em representar a resposta esperada para carregamentos cíclicos de carga e descarga com tensões trativas e compressivas.

**PALAVRAS-CHAVE:** tendões, modelos constitutivos, anisotropia, dano mecânico.

ALVES, G.P. **Study of Anisotropic Constitutive Models for Mechanical Behavior Simulation of Tendons Submitted to Large Deformations and Mechanical Damage.** 2015. 20 p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

## **ABSTRACT**

The biomechanical engineering has been giving special attention to the study and simulation of biological tissues in order to numerically foresee the behaviour of biomechanical systems when submitted to different solicitations. Models able of properly represent the mechanical answers of these materials can contribute with health professionals on the improvement of techniques to prevent and treat injuries, besides helping on the development of medical devices and surgical procedures. This paper, therefore, focus on the study of adequate constitutive models to simulate tendons, considering that these tissues are strongly solicited. They can have a complex mechanical behaviour to be mathematically represented, once large deformations, nonlinear mechanical answers, anisotropy, mechanical damage and sensibility to deformation speed are involved. This paper presents a study and an implementation of anisotropic hyperelastic models with mechanical damage in order to overcome the simulation difficulties of the tendon answer when submitted to large deformations under low loading speeds. For that, parameters adjustments were applied to different combinations of hyperelastic laws and damage evolution found on literature, in order to find the best combination to the experimental result of an quasi-static monotonic uniaxial tensile test. Thus, it was obtained a constitutive model capable of properly reproduce the observed behaviour. Moreover, numerical tests that show the capacity of the implemented model to represent the expected answer to cyclic loading and unloading with tractive and compressive tension are presented.

**KEYWORDS:** tendons, constitutive models, anisotropy, mechanical damage.

## ÍNDICE

	Pág
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Objetivos.....	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
2.1 Tendões.....	1
2.2 Trabalhos realizados em literatura.....	3
2.3 Mecânica do Contínuo.....	4
2.3.1 Descrição do movimento e medidas de deformação.....	4
2.3.2 Medida de Tensão.....	5
2.3.3 Hiperelasticidade transversalmente isotrópica para materiais fibrosos.....	5
2.3.4 Dano mecânico.....	6
2.3.5 Variáveis para leis de dano.....	7
2.3.6 Modelos de Material.....	8
3. METODOLOGIA.....	10
4. RESULTADOS E EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	11
4.1 Evolução do dano.....	11
4.2 Ajuste.....	12
4.3 Exemplos Numéricos.....	13
5. CONCLUSÕES.....	13
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	14
APÊNDICE A.....	16

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Motivação

Nas últimas décadas a engenharia biomecânica tem dado particular atenção à simulação numérica de sistemas biomecânicos complexos, como grupos musculares, ossos e sistema circulatório, onde tem-se buscado considerar respostas mecânicas dos tecidos que os formam.

Nesse contexto, existe uma necessidade de entender o comportamento mecânico de tecidos biológicos, quando submetidos a diferentes estímulos, para que seja possível representá-los matematicamente mediante o uso de modelos que levam em consideração suas características. Normalmente, esses modelos matemáticos, denominados modelos constitutivos, precisam ser capazes de levar em consideração grandes deformações e outros fenômenos inelásticos.

O entendimento da resposta mecânica desses tecidos, bem como o uso de um modelo constitutivo adequado para representá-la, pode gerar uma ferramenta útil com a finalidade de auxiliar profissionais da área da saúde em diversos aspectos, como no desenvolvimento de dispositivos médicos, implantes e técnicas cirúrgicas, bem como, no tratamento e prevenção de lesões.

Dentre todos os tecidos biológicos, destacam-se os tendões, que são estruturas fortemente solicitadas mecanicamente devido a sua função de transmitir as cargas do músculo para o osso e, portanto, são sujeitos aos mais variados tipos de lesões. Além disso, eles possuem algumas características mecânicas complexas, tais como: grandes deformações, resposta mecânica não linear, anisotropia, dano mecânico e sensibilidade a velocidade de deformação [Fung, 1993; Holzapfel, 2004]. Além disso, a compreensão do seu comportamento pode auxiliar na caracterização mecânica de outros tecidos biológicos formados por moléculas semelhantes e com similar arranjo interno.

### 1.2. Objetivos

O principal objetivo desse trabalho é estudar, implementar e escolher modelos capazes de representar o comportamento mecânico de tendões submetidos a grandes deformações e baixas velocidades de carregamento. Neste sentido, pretende-se dar ênfase ao modelamento constitutivo de dano mecânico a fim de tentar contornar os desafios encontrados na modelagem deste fenômeno, nestes tecidos. Para isto, serão estudadas diferentes funções para modelos de dano encontradas na literatura, onde estas serão implementadas em software científico a fim de encontrar um modelo constitutivo que represente adequadamente a resposta mecânica de um tendão, observada experimentalmente.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. Tendões

Tendões são tecidos biológicos moles constituídos principalmente por fibras de colágeno inseridas em uma matriz extracelular. O colágeno é uma proteína de grande estabilidade que se organiza em fibras, Figura 2.1, proporcionando força e integridade mecânica aos tendões e ligamentos [Fung, 1993]. Ele representa de 65 a 80 por cento da massa seca de tendões, enquanto células, glicoproteínas e outras matrizes de proteínas constituem o restante [Liu et al, 1995]. Esses componentes restantes, juntamente com água, formam a matriz extracelular e executam funções de tecido [Junqueira e Carneiro, 2008].

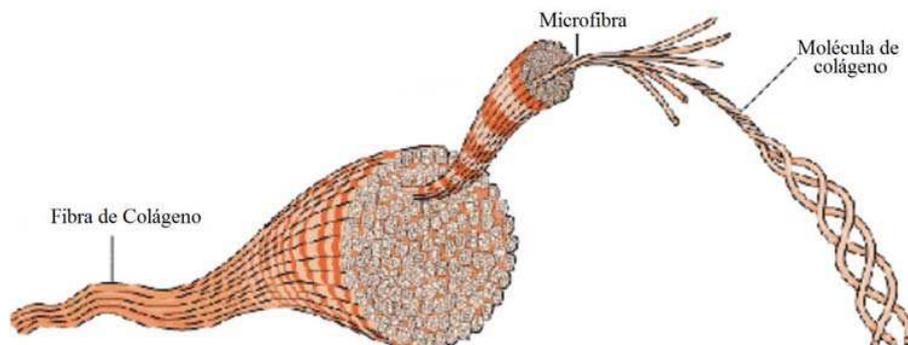


Figura 2.1 - Estrutura hierárquica de uma fibra de colágeno. [Vita,2005]

A arquitetura do tecido de tendões é caracterizada pela disposição densa e paralela das fibras de colágeno do tipo I entre si [Williams et al, 1989]. Dessa maneira, do ponto de vista mecânico, tendões podem ser estudados considerando-os como compósitos feitos de fibras incorporadas em uma matriz isotrópica. A presença de uma única família de fibras justifica considerá-los materiais transversalmente isotrópicos, com a orientação das fibras sendo preferencialmente paralela com o eixo do tendão [Limbert e Taylor, 2002].

Já do ponto de vista fisiológico, a função de um tendão é de fixar o músculo ao osso e transmitir cargas entre os mesmos, permitindo dessa forma o movimento das articulações ou a manutenção da postura do corpo. Eles atuam de modo com que as forças atuantes não induzam carregamentos bruscos entre os vários componentes do sistema músculo esquelético. [Fung, 1993]

Como principal característica, esses corpos são capazes de suportar grandes esforços mecânicos, e apresentam uma curva característica quando tracionados a velocidades baixas em ensaios monotônicos [Carlstedt, 1987]. A relação tensão-deformação de uma resposta típica pode ser visualizada na Figura 2.2, onde o material é tracionado até o momento de rompimento das fibras.

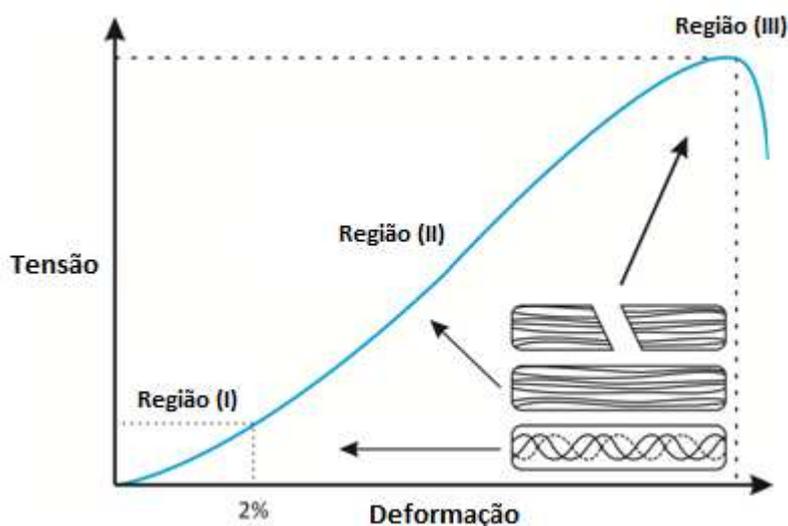


Figura 2.2 - Ensaio monotônico, curva de resposta típica de tendões [Rubi et al, 2013]

Esse comportamento característico pode ser interpretado como a resposta microestrutural de tendões a cargas progressivas. Na região (I), entende-se que a carga cresce exponencialmente com o alongamento, visto que a força externa aplicada faz com que as fibras, antes enrugadas, se estiquem gradualmente, fazendo com que suas conexões sejam tensionadas progressivamente. Desse modo, as fibras se aproximam umas às outras levando ao aumento da rigidez do tecido, que vem a apresentar um valor aproximadamente constante para deformações fisiológicas, observado na região (II). Por

fim, a região (III) caracteriza a perda de rigidez do material e o início da região de danificação, ou lesão, visto que qualquer incremento na deformação causa a falha progressiva no feixe de fibras, podendo levar a ruptura do tecido. [Fung, 1993; Natali et al, 2005].

O comportamento apresentado na Figura 2.2, até grandes deformações, é característico de tecidos biológicos e mais pronunciado naqueles anisotrópicos (fibras com direções preferenciais), onde observa-se de forma pronunciada a danificação mecânica em grandes deformações, que leva a ruptura do tecido. Cabe ressaltar que além dos comportamentos evidenciados anteriormente, tendões também são consideradas estruturas viscoelásticas [Holzapfel, 2004], onde ainda pode-se observar um fenômeno similar ao Efeito Mullins, observado por Mullins, 1947, em borrachas [Peña et al, 2009]. Esse fenômeno está relacionado com uma perda de rigidez do material dependente do histórico de deformações e pode ser melhor exemplificado pela Figura 2.3 abaixo.

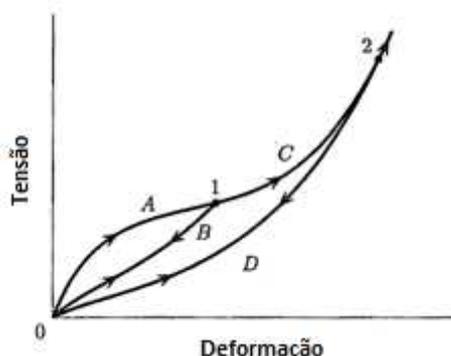


Figura 2.3 - Efeito Mullins em teste cíclico de tensões [Holzapfel, 2000]

Na Figura 2.3, observa-se que o material após passar por uma elevada deformação, sofre um processo irreversível e tende a apresentar uma perda de rigidez, de forma que no descarregamento e próximos ciclos de carga, esse material apresente uma curva de tensão abaixo das anteriores. Entretanto, a resposta tende voltar a seguir a curva de resposta monotônica após superado o valor máximo de deformação atingido anteriormente.

Neste trabalho é dada ênfase ao comportamento elástico anisotrópico não linear, com danificação mecânica, para pequenas velocidades de deformações (fenômenos viscosos desconsiderados).

## 2.2. Trabalhos realizados em literatura

Uma grande variedade de modelos analíticos para tecidos biológicos pode ser encontrada em literatura. Frequentemente, este tem sido modelado através da mecânica do contínuo, desde Spencer, 1954, que utilizou uma função de energia de deformação, expressa em termo de invariantes, para representar seu modelo. Ainda, segundo Holzapfel, 2000, a descrição do comportamento constitutivo de tecidos biológicos moles depende da identificação de uma função de energia de deformação adequada, de onde relações tensão-deformação podem ser derivadas.

Acredita-se que seja necessário, ao definir uma função de energia de deformação, levar em consideração a grande variabilidade de estrutura e composição dos tecidos biológicos moles. Por esse motivo, Holzapfel, 2001, desenvolveu um modelo capaz de prever a resposta elástica anisotrópica de tecidos moles sob grandes deformações considerando que o arranjo estrutural dos constituintes dos tecidos pode ser representado como compósitos reforçados por famílias de fibras. Obteve-se grande precisão ao testar o modelo para descrever o comportamento tridimensional de artérias jovens e saudáveis sob cargas de níveis fisiológicos.

Entretanto, a maioria das aplicações ainda limitam-se em analisar apenas a resposta do material em regiões lineares, sendo que poucos modelos se propuseram a avaliar o comportamento mecânico dos tecidos moles nas regiões de falha. Todavia, tem-se

aumentado o interesse nas regiões de danificação de tecidos visando contribuir para o estudo de situações não fisiológicas durante cirurgias ou traumas.

Alguns modelos vêm abordando o tema utilizando teoria de hiperelasticidade juntamente com o fenômeno de dano. Dentre esses modelos de danificação estrutural, Natali et al, 2005, destacam-se por desenvolver um modelo constitutivo transversalmente isotrópico que leva em consideração as características anisotrópicas de tecidos biológicos moles. No entanto, considera-se que a danificação das fibras governa a resposta do material, sendo desconsiderada as contribuições do dano na matriz.

Já, Rodríguez et al, 2006, desenvolveram um modelo constitutivo considerando a participação independente de matrizes e fibras, incluindo a danificação da matriz, que teve seu comportamento descrito por um modelo de dano isotrópico simples baseado na mecânica do contínuo. Por outro lado, a danificação das fibras foi incorporada através de uma distribuição estatística da deformação no comprimento total dos feixes de fibras de colágeno. No entanto, esse modelo precisa ser calibrado de duas maneiras diferentes o que deixa o modelo muito trabalhoso e com grande custo computacional.

Finalmente, Calvo et al, 2007, propuseram um modelo de dano tridimensional para deformações finitas que considera evoluções de dano independentes para a matriz e para as diferentes famílias de fibras, utilizando uma mesma metodologia. Para isso, o modelo estrutural foi formulado usando o conceito de variáveis internas que proporciona uma descrição geral para materiais envolvendo efeitos irreversíveis. Foi considerado as variáveis internas associadas com a danificação para que as matrizes e fibras pudessem ter contribuições separadamente. Este é utilizado em outros trabalhos que fazem uso de diferentes funções de elasticidade e danificação [Peña et al, 2008; Peña et al 2009; Peña, 2011].

### 2.3. Mecânica do Contínuo

Neste trabalho é apresentada uma revisão sobre os conceitos de mecânica do contínuo. Essa introdução faz-se necessária para a modelagem de tecidos biológicos moles em estudo.

#### 2.3.1 Descrição do movimento e medidas de deformação

Para objetivo de análise, considera-se um corpo contínuo. A fim de auxiliar a especificação da posição das partículas ao longo do tempo utiliza-se uma configuração de referência  $\Omega_0$ , para referência inicial no tempo  $t = 0$ . Sendo assim, a configuração  $\Omega_t$  é definida como configuração instantânea para cada tempo  $t$ .

Portanto, pode-se considerar que o ponto  $X \in \Omega_0$  se transforme no ponto  $x \in \Omega_t$ , onde  $X$  e  $x$  são definidos como as posições das partículas nas posições de referência e instantânea relativa à eixos fixos. Então, o movimento do corpo pode ser descrito pela função de movimento, que representa um mapeamento entre corpo indeformado e deformado:

$$x = \chi(X, t) \quad (2.1)$$

Dessa forma, define-se o gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  por:

$$\mathbf{F} = \frac{dx}{dX} \quad (2.2)$$

onde o Jacobiano  $J$  é dado por  $J = \det(\mathbf{F})$ .

No entanto, uma grande desvantagem da utilização do tensor gradiente de deformação é sua falta de simetria. E, por isso, no presente trabalho foi utilizado outra medida de deformação:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.3)$$

que é definida como tensor de Cauchy-Green à direita e representa uma medida Lagrangeana de deformação.

### 2.3.2. Medida de Tensão

Para efeito de cálculo, neste trabalho será utilizado como medida de tensão no corpo indeformado o 2º tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ . Esse tensor relaciona forças e áreas sobre a configuração inicial não deformada e, portanto, representa a tensão como uma medida Lagrangeana. Ele pode ser definido em função do tensor tensão de Cauchy da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{-1})^T \quad (2.4)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  representa o tensor tensão de Cauchy.

### 2.3.3. Hiperelasticidade transversalmente isotrópica para materiais fibrosos

Tecidos biológicos moles, como os tendões, podem ser considerados como materiais reforçados por uma única família de fibras, ou seja, todas as fibras são consideradas longas e têm uma única direção preferencial. Assim sendo, nesta seção é apresentada apenas uma revisão do comportamento constitutivo de materiais fibrosos, visto que o problema foi abordado pela hipótese de hiperelasticidade transversalmente isotrópica, considerando as fibras paralelas ao eixo do tendão.

Segundo Holzapfel e Gasser, 2000, a direção da família das fibras no ponto  $\mathbf{X}$  pode ser definida por um vetor unitário  $\mathbf{m}_0(\mathbf{X})$ . Assume-se, também, que as fibras se movem com os pontos do material do corpo contínuo, então o alongamento  $\lambda$  das fibras, definido como a razão entre seus comprimentos na configuração deformada e de referências, pode ser expressado da seguinte forma:

$$\lambda\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{m}_0(\mathbf{X}) \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{m}$  é o vetor unitário da fibra na configuração deformada. Ainda, tem-se que:

$$\lambda^2 = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{m}_0 = \mathbf{C} : (\mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0) \quad (2.6)$$

Além disso, uma decomposição multiplicativa de  $\mathbf{F}$  em partes ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}^v \bar{\mathbf{F}}$ ), com variação de volume  $\mathbf{F}^v$  e com preservação de volume  $\bar{\mathbf{F}}$  (distorcional), é usualmente estabelecida como em Flory, 1961, tal que:

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{C} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}} \quad (2.7)$$

onde  $\bar{\mathbf{C}}$  é o tensor deformação modificado de Cauchy-Green à direita.

Ainda, para processos isotérmicos e reversíveis, é postulado a existência de uma única representação desacoplada para a função de energia de deformação  $W$  [Simo e Taylor, 1985]. Além disso, devido ao comportamento do material depender da direção, é necessário que  $W$  seja função tanto do tensor deformação de Cauchy-Green à direita  $\mathbf{C}$  como da direção das fibras  $\mathbf{m}_0$  na configuração de referência. Assim, a energia de deformação pode ser expressa por  $W = W(\mathbf{C}, \mathbf{M})$  onde  $\mathbf{M} = \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0$  é um tensor estrutural [Weiss, 1996].

Tendo isso definido, é possível escrever a equação constitutiva para materiais hiperelásticos compressíveis em sua forma padrão:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C}, \mathbf{M})}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.8)$$

Agora, com o intuito de obter uma resposta adequada para a tensão do material, a energia de deformação pode ser escrita, baseado na descrição cinemática, de maneira desacoplada:

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{M}) = W_{\text{vol}}(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{M}) \quad (2.9)$$

onde  $W_{\text{vol}}(J)$  descreve a resposta volumétrica em função apenas do Jacobiano  $J$ , enquanto que  $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{M})$  representa a resposta isocórica do material em função de  $\bar{\mathbf{C}}$  e  $\mathbf{M}$  [Holzapfel, 2000].

Ainda, com o objetivo de particularizar as contribuições de fibras e matriz no comportamento do material, é sugerido uma nova divisão da função de energia de deformação isocórica  $\bar{W}$  em duas partes [Holzapfel, 2000]:

$$\bar{W}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{M}) = \bar{W}_m(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{W}_f(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{M}) \quad (2.10)$$

onde  $\bar{W}_m$  é energia de deformação isotrópica associada a contribuição da matriz e  $\bar{W}_f$  é a energia de deformação anisotrópica associada as fibras.

A equação (2.10) pode ser melhor empregada quando definida em função dos invariantes de  $\bar{\mathbf{C}}$ :

$$\bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3, \bar{I}_4, \bar{I}_5) = \bar{W}_m(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3) + \bar{W}_f(\bar{I}_4, \bar{I}_5) \quad (2.11)$$

onde:

$$\bar{I}_1(\bar{\mathbf{C}}) = \text{tr}\bar{\mathbf{C}}; \quad \bar{I}_2(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2}[(\text{tr}\bar{\mathbf{C}})^2 - \text{tr}\bar{\mathbf{C}}^2]; \quad \bar{I}_4(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0) = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{M} = \lambda^2; \quad \bar{I}_5(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0) = \bar{\mathbf{C}}^2 : \mathbf{M} \quad (2.12)$$

A dependência de  $\bar{I}_3 = \det(\bar{\mathbf{C}}) = 1$ , pode ser omitida da contribuição isocórica, uma vez que sua dependência encontra-se na parcela volumétrica  $W_{\text{vol}}(J)$ . Além disso, Holzapfel e Gasser, 2000, sugerem, por simplicidade e para reduzir o número de parâmetros do material, que seja considerado que a energia de deformação anisotrópica  $\bar{W}_f$  dependa somente de  $\bar{I}_4$ , devido ao seu significado físico, já que esse invariante representa o quadrado do alongamento das fibras de colágeno na direção  $\mathbf{m}_0$ . Assim sendo, a equação para energia isocórica do material pode ser reescrita da forma:

$$\bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4) = \bar{W}_m(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \bar{W}_f(\bar{I}_4) \quad (2.13)$$

Mesmo a anisotropia do material sendo representada apenas por  $\bar{I}_4$ , esse invariante pode ser suficiente para capturar as características típicas da resposta de um tendão, já que grande parte dos efeitos governados por  $\bar{I}_5$  podem ser introduzidos em função de  $\bar{I}_4$  [Weiss et al, 1996].

Esse modelo de energia, no entanto, se restringe a análise da região elástica do material, visto que permite o aumento ilimitado da energia de deformação sob o alongamento do material. É evidente que nenhum material real poderia suportar deformações crescentes indefinidamente sem romper. Por esse motivo, e com intuito de considerar a falha do material, foi desenvolvida uma abordagem fenomenológica de mecânica do dano. Esta será abordada na próxima seção.

#### 2.3.4. Dano Mecânico

A ideia básica da mecânica do dano é introduzir um parâmetro de danificação que descreva a degradação das propriedades do material durante carregamentos mecânicos. Kachanov, 1958, introduziu esse conceito ao definir uma variável escalar de dano  $D$ , que varia entre 0 e 1, onde  $D = 0$  representa um material isento de defeito e  $D = 1$  corresponde

a um estado de completa perda de integridade na estrutura interna do material, ou seja, o equivalente a completa ruptura do mesmo.

Lemaitre e Chaboche, 1985, aprimoraram o conceito anterior e, baseado em efeitos termodinâmicos, definiram uma tensão dita efetiva para o material danificado levando em conta somente a parte íntegra do material. Para isso, foi considerado que o conjunto de defeitos é totalmente incapaz de transferir tensões, e dessa forma, a tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$  pode ser representada por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (2.14)$$

onde a variável de dano  $D$  pode ser representada pela razão entre a área íntegra e a área total da seção do material.

Baseado nos estudos anteriores, Simo, 1987, propôs uma metodologia que leva em consideração a perda de rigidez observada alguns materiais quando sujeitos a níveis de deformação abaixo da máxima deformação atingida anteriormente, usando energia de deformação do material não danificado. Assumindo que o fenômeno de dano afeta somente a parte isocórica elástica da deformação, pode-se incorporar parâmetro de dano na energia de deformação isocórica:

$$\bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, D_m, D_f) = \sum_{k=m,f} (1 - D_k) \bar{W}_k^0 \quad (2.15)$$

onde  $\bar{W}_k^0$  é a energia isocórica para um material perfeitamente elástico, ou seja, sem danificação. Além disso,  $D_m$  e  $D_f$  são as variáveis de dano para matrizes e fibras, que representam, respectivamente, a danificação da parte isotrópica e anisotrópica do material.

Dessa maneira, fica exposto a influência da variável de dano na energia de deformação do material, necessitando apenas de lei para governar sua evolução. Para efeitos de cálculo, pode-se reescrever o 2º tensor tensão de Piola-Kirchhoff como:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(J, \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, D_m, D_f)}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left[ \frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial C} + \frac{\partial \bar{W}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4, D_m, D_f)}{\partial \mathbf{C}} \right] = 2 \left[ \frac{\partial W_{\text{vol}}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + \sum_{n \neq 3}^4 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{I}_n} \frac{\partial \bar{I}_n}{\partial \mathbf{C}} \right] \quad (2.16)$$

A expressão final é obtida em função das derivadas da energia de deformação do material:

$$\mathbf{S} = Jp\mathbf{C}^{-1} + 2(1 - D_m) \left[ \left( \frac{\partial \bar{W}_m^0}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \bar{W}_m^0}{\partial \bar{I}_2} \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \bar{W}_m^0}{\partial \bar{I}_2} \mathbf{C}^2 \right] + 2(1 - D_f) \left[ \bar{I}_4 \frac{\partial \bar{W}_f^0}{\partial \bar{I}_4} (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{m}_0) \right] \quad (2.17)$$

onde  $p$  é a pressão hidrostática e  $\mathbf{1}$  é o tensor identidade de segunda ordem. Dessa forma, fica evidente a necessidade da definição de funções de dano, bem como, modelos de energia para fibras e matrizes, para a representação do comportamento mecânico do material.

### 2.3.5. Variáveis para leis de dano

De uma maneira geral, é observada uma perda de rigidez em tecidos biológicos moles quando sujeitos a níveis de deformação abaixo da máxima deformação (não fisiológica) atingida anteriormente. Tipicamente, as curvas de tensão-deformação uniaxiais continuam insensíveis a deformações a cima do máximo anterior, mas apresentam substancial decréscimo na rigidez, devido a danificação, abaixo desse máximo. Quanto maior o máximo atingido anteriormente, maior será a subsequente perda de rigidez.

Simo, 1987, definiu matematicamente essa questão fazendo uso de parâmetros para a evolução do dano. Primeiramente, assume-se a hipótese de que a deformação máxima obtida pelo espécime até o momento presente controla completamente o processo de dano.

E, portanto, caracteriza-se a evolução dos parâmetros de dano  $D_m$  e  $D_f$  por uma equação de evolução irreversível. Para tanto, é necessário definir uma variável  $H_{k_s}$ , tal que:

$$H_{k_s} = \sqrt{2\bar{W}_k^0(\bar{\mathcal{C}}(s))} \quad (2.18)$$

onde  $\bar{\mathcal{C}}(s)$  é o tensor deformação modificado de Cauchy-Green à direita no tempo  $s$ , e  $k = f, m$ . Com isto, considera-se  $H_{m_t}$  e  $H_{f_t}$  os valores máximos de  $H_{m_s}$  e  $H_{f_s}$  até o tempo atual  $t$ , isto é [Simo, 1987]:

$$H_{k_t} = \max_{s \in (-\infty, t)} \sqrt{2\bar{W}_k^0(\bar{\mathcal{C}}(s))} \quad (2.19)$$

Então, como condição de danificação, fica definido que a seguinte equação, precisa ser cumprida em qualquer tempo  $t$  [Simo, 1987]:

$$\sqrt{2\bar{W}_k^0(\bar{\mathcal{C}}(t))} - H_{k_t} \leq 0 \quad (2.20)$$

Além disso, como critério de evolução do dano, considera-se que o dano só irá aumentar quando o valor de energia de deformação atual for maior que o máximo anterior. Dessa forma, quando a equação (2.20) resultar em zero haverá aumento da danificação do material.

### 2.3.6. Modelos de Material

#### *Modelos Hiperelásticos para Materiais Isotrópicos Incompressíveis (Matriz)*

No presente trabalho é utilizado para representação da matriz o Modelo de Ogden, proposto por Ogden, 1972, onde a função de energia de deformação é apresentada em termos dos alongamentos relativos principais:

$$\bar{W}_m^0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\beta_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (2.21)$$

onde  $N$  é o número total de termos da série e  $\beta_p$  e  $\alpha_p$  são constantes do material.

Foi utilizado esse modelo devido a sua forma geral e outros dois modelos que podem ser obtidos por simplificação do anterior. No primeiro caso particular, pode-se obter o Modelo Neo-Hookeano utilizando-se  $N = 1$  e  $\alpha_1 = 2$ , o que resulta em:

$$\bar{W}_m^0 = c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = c_1(\bar{I}_1 - 3) \quad (2.22)$$

onde  $c_1 = \beta_1/2$ . A utilização desse modelo se deve pela sua grande simplicidade de aplicação.

Além disso, é utilizado o Modelo de Mooney-Rivlin, obtido para  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = 2$  e  $\alpha_2 = -2$ , o que resulta em:

$$\bar{W}_m^0 = c_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + c_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) = c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_2 - 3) \quad (2.23)$$

onde  $c_2 = -\beta_2/2$ . O Modelo de Mooney-Rivlin é um dos mais conhecidos e utilizados modelos hiperelásticos e foi implementado, nesse trabalho, por sua simplicidade matemática.

### Modelos Hiperelásticos para Materiais Anisotrópicos Incompressíveis (Fibras)

Foram analisadas duas diferentes funções para a representação da energia de deformação das fibras de colágeno dos tecidos biológicos moles. A primeira foi proposta por Holzapfel e Gasser, 2000, e é definida por:

$$\bar{W}_f^0 = \frac{C_3}{2C_4} (\exp^{C_4(\bar{I}_4-1)^2} - 1) \quad (2.24)$$

onde  $C_3$  e  $C_4$  são parâmetros de deformação.

A outra função utilizada foi proposta por Calvo et al, 2009, a partir de uma modificação da equação de Weiss et al, 1996, para obter o seguinte:

$$\bar{W}_f^0 = \frac{C_3}{C_4} (\exp^{C_4(\bar{I}_4 - \bar{I}_{4_0})} - C_4(\bar{I}_4 - \bar{I}_{4_0}) - 1) \quad (2.25)$$

onde  $\bar{I}_{4_0}$  caracteriza o alongamento no qual as fibras de colágeno começam a deformar.

### Funções de evolução de dano

Algumas funções de dano encontradas na literatura surgem como alternativa para representar a evolução da danificação, tanto para fibras quanto matrizes. Calvo et al, 2007, propuseram uma função do tipo exponencial, como pode ser vista a seguir:

$$D_k(H_{k_t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } H_{k_t} \leq H_{min_k} \\ 1 - \frac{1 - \exp(\mu_k[H_{k_t} - H_{max_k}])}{1 - \exp(\mu_k[H_{min_k} - H_{max_k}])} & \text{se } H_{min_k} \leq H_{k_t} \leq H_{max_k} \\ 1 & \text{se } H_{k_t} > H_{max_k} \end{cases} \quad (2.26)$$

onde  $H_{min_k}$  e  $H_{max_k}$  são variáveis associadas com a energia de deformação que definem o início e o fim da danificação e  $\mu_k$  é um parâmetro do material.

Peña et al, 2008, utilizaram uma função do tipo polinomial para representação de dano.

$$D_k(H_{k_t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } H_{k_t} \leq H_{min_k} \\ D_k(H_{k_t}) = \Lambda_k^2 [1 - \eta_k(\Lambda_k^2 - 1)] & \text{se } H_{min_k} \leq H_{k_t} \leq H_{max_k} \\ 1 & \text{se } H_{k_t} > H_{max_k} \end{cases} \quad (2.27)$$

onde,

$$\Lambda_k = \frac{H_{k_t} - H_{min_k}}{H_{max_k} - H_{min_k}} \quad (2.28)$$

sendo  $\Lambda_k$  uma variável adimensional e  $\eta_k$  um parâmetro do modelo com valores entre -1 e 1.

Peña et al, 2009, propuseram uma função de dano do tipo sigmoideal. Essa função teve o conceito baseado no modelo de Rodríguez et al, 2008, e com alguns ajustes para controle de início de danificação, resultou na seguinte equação:

$$D_k(H_{k_t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } H_{k_t} \leq H_{min_k} \\ D_k(H_{k_t}) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2\delta_k \Lambda_k \exp(2\delta_k[2\Lambda_k - 1]) - 1}{2\delta_k \Lambda_k \exp(2\delta_k[2\Lambda_k - 1]) + 1} \right] & \text{se } H_{min_k} \leq H_{k_t} \leq H_{max_k} \\ 1 & \text{se } H_{k_t} > H_{max_k} \end{cases} \quad (2.29)$$

Peña, 2011, também propôs uma função do tipo sigmoial. No entanto, para esse caso não é necessário definir parâmetros para início e fim da danificação, já que a mesma possui assíntotas horizontais em 0 e 1. A função é definida por:

$$D_k(H_{k_t}) = \frac{1}{1 + \exp(-\omega_k[H_{k_t} - \gamma_k])} \quad (2.30)$$

onde o parâmetro  $\omega_k$  controla a curvatura e  $\gamma_k$  define o valor  $H_{k_t}$  para qual  $D_k(H_{k_t}) = 0,5$ .

Todas estas expressões fornecem a estrutura matemática necessária para realizar o estudo de modelos para danificação de tendões em grandes deformações.

### 3. METODOLOGIA

Como este trabalho está focado nas dificuldades envolvidas na simulação numérica, do ponto de vista do comportamento mecânico de um tendão, foram realizadas várias análises com as diferentes funções encontradas em literatura a fim de encontrar um conjunto que represente adequadamente o comportamento mecânico desse tecido biológico. Para isto, implementou-se os modelos encontrados e buscou-se conhecer suas características representativas. Uma vez implementados, buscou-se dados experimentais úteis para a realização da identificação do melhor conjunto de funções e seus parâmetros.

A metodologia numérico-experimental adotada propõe a identificação dos parâmetros representativos do modelo constitutivo transversalmente isotrópicos com dano mecânico utilizando dados experimentais obtidos de literatura. Para este estudo foram considerados os dados experimentais apresentados na Figura 3.1, obtido de Schechtman e Bader, 1987. Estes dados são referentes a um ensaio de tração uniaxial monotônico sob baixa velocidade de deformação para um tendão extensor longo de dedos. Vale ressaltar que devido a característica física do tendão, normalmente são disponíveis em literatura apenas dados de ensaios de tração.

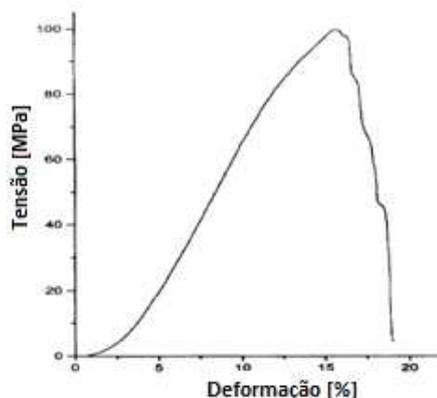


Figura 3.1 - Típica curva tensão-deformação de um tendão extensor longo dos dedos [Schechtman e Bader, 1987]

Para o procedimento de identificação de parâmetros foi usada a função objetivo *lsqcurvefit* (MATLAB) que é baseada em mínimos quadráticos. O diagrama esquemático do procedimento de identificação de parâmetros é apresentado na Figura 3.2. Usando esta técnica é possível encontrar qual conjunto obteve melhor resposta quando comparado com o resultado experimental. O melhor resultado foi escolhido segundo a medida de erro da soma de quadrados total (SQT):

$$SQT = \sum_{i=1}^r (S_i^{num} - S_i^{exp})^2 \quad (3.1)$$

onde  $S_i^{num}$  e  $S_i^{exp}$  são respectivamente os valores de tensão obtidos numericamente e os medidos experimentalmente. O parâmetro  $r$  indica a quantidade de pontos utilizados na identificação dos parâmetros.

Nesta metodologia, foram implementados diferentes modelos para representação das energias de deformação da fibra, da matriz e das diferentes funções para representação do fenômeno de dano, resultando em um total de 24 combinações. Os resultados da identificação dos parâmetros, bem como os testes numéricos para mostrar sua resposta mecânica, são apresentados a seguir.

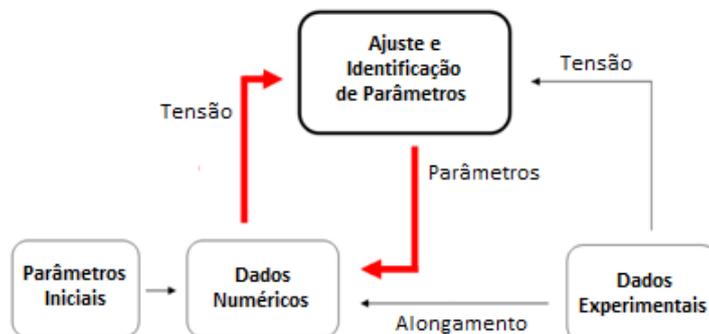


Figura 3.2 - Rotina computacional para ajuste de parâmetros

## 4. RESULTADOS E EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 4.1. Evolução do dano

A evolução do dano pode ser compreendida segundo curvas ponderadas da energia de deformação não danificada do material. Assim, apresenta-se um exemplo demonstrando a típica evolução destas leis baseadas em funções de energia.

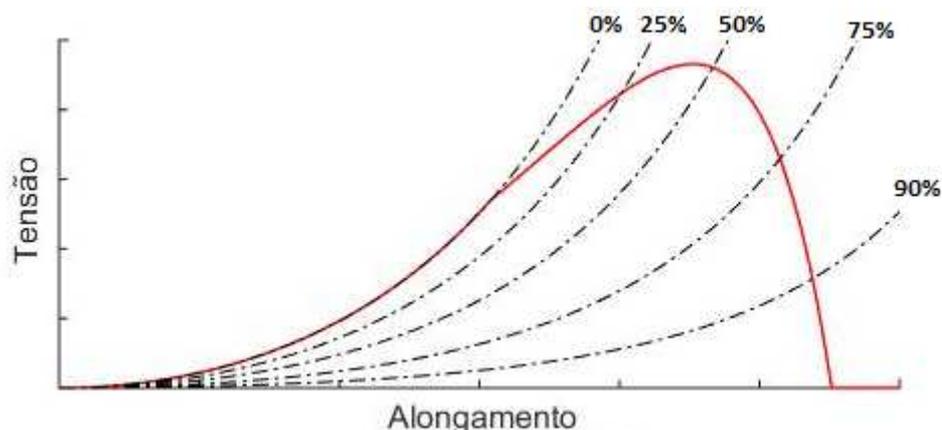


Figura 4.1 - Evolução do dano

Na Figura 4.1 a curva em vermelho representa a resposta do material sujeito a danificação mecânica, que evolui conforme aumenta-se o valor de máxima deformação que o corpo é submetido. Esta curva representa a resposta de um carregamento monotônico sobre o material em estudo. As curvas tracejadas, por sua vez, representam a evolução de tensão segundo valores de danificação constantes de: 0%, 25%, 50%, 75% e 90%. Estas curvas representam o percurso de carregamento e descarregamento do material, para as danificações estipuladas. Assim, se o corpo sujeito até então a um carregamento monotônico atingir uma danificação de 25%, este terá como percurso de descarregamento e novo carregamento a curva correspondente a 25%. Entretanto, ao ultrapassar a deformação máxima alcançada até então, seu percurso voltará a ser mesmo que para o ensaio monotônico (linha vermelha), até que seja descarregado novamente.

Se este continuar a deformar até alcançar a danificação de 50%, a curva de 50% de danificação será a resposta do material para deformações inferiores à máxima atingida neste processo. A lógica se repete até a ruptura do material (100% de danificação). Este comportamento é o mesmo observado no fenômeno de Mullins, demonstrando que estes

modelos de evolução de dano podem representá-lo. Além disto, estas informações poderiam ser usadas na estimativa *a priori* da evolução do dano segundo o histórico de deformações.

#### 4.2. Ajuste

Nesta seção é apresentado o resultado da identificação de parâmetros do modelo constitutivo para o tendão, composto de modelos hiperelásticos (para matriz e fibra) e leis de evolução de dano, para a representação do comportamento observado experimentalmente na Figura 3.1.

Foram analisadas um total de 24 combinações e seus resultados com parâmetros e erro, para cada caso, são apresentados nas Tabelas A.1, A.2, A.3 e A.4, encontradas no Apêndice A. Os três conjuntos que melhor representam o comportamento mecânico estudado, são os que se utilizam da função de dano exponencial (2.26), e modelo anisotrópico para fibras de Calvo (2.25), indicando que estas são as melhores funções para este tendão.

Observa-se também, como era de se esperar, que para o modelo de energia para matriz, o modelo que obteve melhor resultado foi o de Ogden de três termos (6 parâmetros), seguido do modelo de Mooney-Rivlin (2 parâmetros) e Neo-Hookeano (1 parâmetro), respectivamente. Entretanto, deve-se notar que estes não possuem entre eles variações de erro significativas, podendo-se obter bons resultados com qualquer um destes. Naturalmente, pode-se optar pelo modelo Neo-Hookeano (2.22), que possui apenas um parâmetro de material.

Os parâmetros de material obtidos para a combinação das funções Neo-Hookeano/Calvo/Exponencial são apresentadas na Tabela 4.2 e seu comportamento mecânico na Figura 4.2.

Tabela 4.2 - Ajuste de parâmetros do conjunto escolhido utilizando função de dano exponencial (2.26), modelo hiperelástico isotrópico Neo-Hookeano (2.22) e modelo hiperelástico anisotrópico de Calvo (2.25)

$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
85,7976	2	-	-	-	-	9,5664	7,6389
$\bar{I}_{4_0}$	$\mu_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\mu_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	SQT
1,0642	0,01444	0,7201	4,7813	40,3331	0,2597	2,8747	753,2134

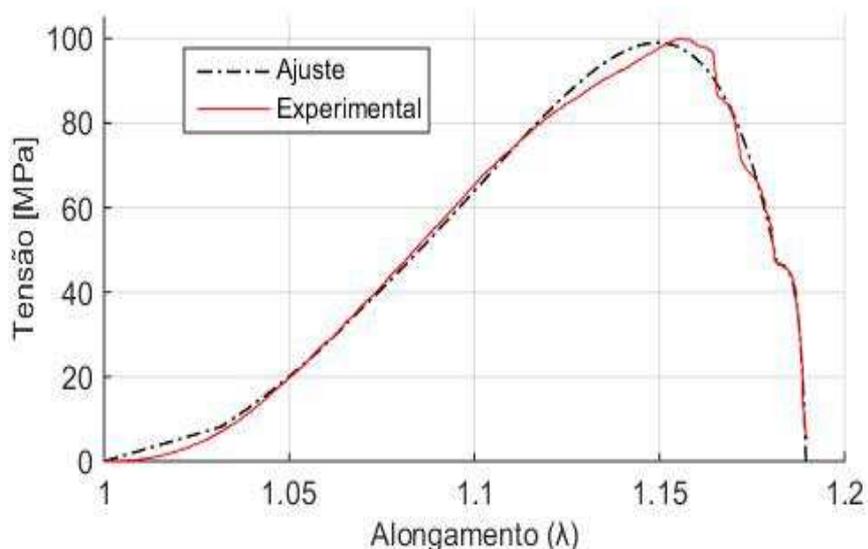


Figura 4.2 - Ajuste de parâmetros utilizando função de dano exponencial (2.26), modelo hiperelástico isotrópico (2.22) e modelo hiperelástico anisotrópico de Calvo (2.25)

### 4.3. Exemplos Numéricos

Com os parâmetros de material apresentados na Tabela 4.2 foram executados mais dois testes com o intuito de avaliar a resposta matemática do modelo constitutivo em diferentes situações de carregamento. O primeiro exemplo trata-se de um teste cíclico de carga e descarga com tensões apenas trativas e o segundo exemplo de um teste cíclico de carga e descarga com tensões trativas e compressivas. O deslocamento aplicado, para o primeiro caso, representa uma carga cíclica crescente aplicada até que o tendão seja levado à ruptura. Já para o segundo caso, é aplicado um ciclo de carga tratativa e um ciclo de carga compressiva. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.3.

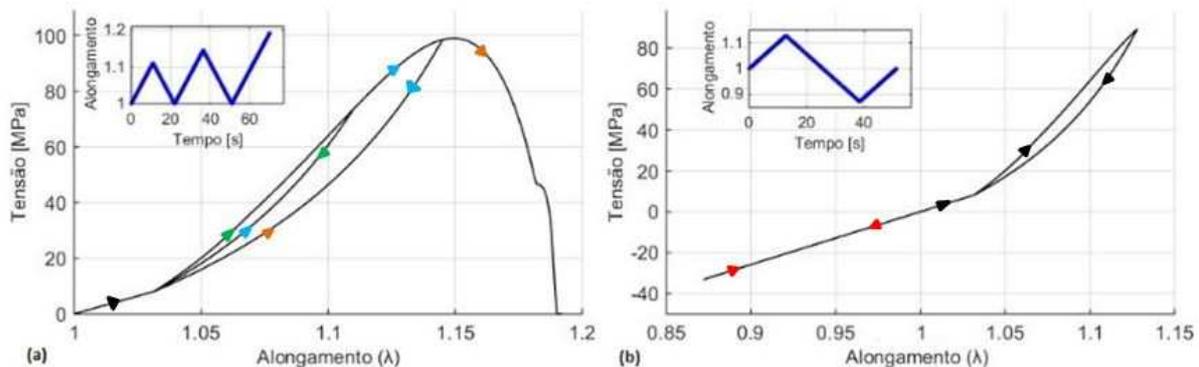


Figura 4.3 - (a) Resposta do modelo à aplicação cíclica de carga e descarga com tensões trativas (b) Resposta do modelo à aplicação de carga e descarga com tensões tratativa e compressiva

Pode-se notar, como esperado, que os ciclos de carga e descarga trativos apresentados na Figura 4.3 (a) demonstram a influência de um fenômeno similar ao Mullins no comportamento do tecido biológico, de forma que o mesmo sofre uma perda de rigidez durante a danificação (evolução do parâmetro de dano). Na Figura 4.3 (b), percebe-se que as fibras não apresentam qualquer contribuição para cargas de compressão, sendo a matriz o único componente a apresentar resposta de tensão. Sendo assim, a matriz fica responsável por suportar toda a força compressiva atuante.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre modelos constitutivos para representar o comportamento de tendões submetidos a grandes deformações e dano mecânico, sem incorporar efeitos viscosos no material. Foi possível representar as típicas respostas mecânicas de tendões, usando formulações para material não-linear anisotrópico.

Foram implementadas diferentes combinações de leis hiperelásticas e de evolução de dano encontradas na literatura, totalizando 24 casos, que permitiram encontrar as melhores combinações destes para o resultado experimental estudado, obtido por Schechtman e Bader, 1987, em um ensaio de tração uniaxial quase-estático. Os resultados do ajuste de curvas demonstrou que a função de dano exponencial de Calvo et al, 2007, equação (2.26), e o modelo de Calvo et al, 2009, equação (2.25) para energia de deformação da fibra, são as melhores funções para este tendão. A energia de deformação da matriz apresentou bons resultados com todos os modelos estudados, possuindo menor erro para o modelo de Ogden de três termos, porém apontando que o modelo Neo Hookeano é uma boa escolha devido ao seu número de parâmetros.

Os resultados e testes numéricos apontaram que a combinação obtida reproduz de forma adequada o comportamento experimental monotônico do tendão. Além disto, mostrou que o modelo apresenta a resposta qualitativa esperada para carregamentos cíclicos de carga e descarga com tensões trativas e compressivas, que necessita de dados experimentais para verificar quantitativamente o seu andamento.

Enfim, este estudo obteve resultados satisfatórios, mostrando que os modelos disponíveis em literatura permitem representar adequadamente a resposta observada experimentalmente para tendões, dentro das condições estudadas.

Como trabalhos futuros sugere-se aplicar a metodologia proposta nesse trabalho a outros dados experimentais (cíclicos trativos e compressivos), visto que os ajustes de parâmetros realizados ficaram restritos a um só tendão, em apenas um carregamento monotônico. Ainda, sugere-se a implementação de contribuições viscoelásticas, juntamente com os modelos de danificação estudados, com a finalidade de capturar a sensibilidade do material em relação ao tempo, em aplicações com diferentes velocidades de deformação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Calvo, B., Peña, E., Martinez, M. A., & Doblaré, M.; **“An uncoupled directional damage model for fibred biological soft tissues. Formulation and computational aspects”**, Int. J. Numer. Meth. Engng, 69, pp 2036-2057, 2007.

Calvo, B., Peña, E., Martins, P., Doblaré, T., Jorge, R. N., & Ferreira, A.; **“On modelling damage process in vaginal tissue”**, Journal of Biomechanics, 42, pp 642-651, 2009.

Carlstedt, C. A.; **“Mechanical and chemical factors in tendon healing. Effects of indomethacin and surgery in the rabbit”**, pp 1–75, ISSN 0300-8827, ISBN 8716063961, 1987.

Flory, P. J.; **“Thermodynamic relations for High Elastic Materials”**, Trans. Faraday Soc., 57, pp 829-838, 1961.

Fung, Y. C.; **“Biomechanics, mechanical properties of living tissues”**, New York: Springer, 1993.

Holzapfel, G.; **“Biomechanics of soft tissue”**, In: J. Lemaitre, Handbook of Materials Behavior Models, vol. III, pp 1057-1073, New York: Academic Press, 2001.

Holzapfel, G. A., & Gasser, T. C.; **“A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models”**, Journal of Elasticity, 61, pp 1-48, 2000.

Holzapfel, G.; **Nonlinear Solid Mechanics”**, New York: Wiley, 2000.

Holzapfel, G.; **“Chapter 18, Computational Biomechanics of Soft Biological Tissue”** v.2, pp 605-635, 2004.

Hurschler, C.; Loitz-Ramage, B.; Vanderby, R.; **“A structurally based stress-strech relationship for tendon and ligament”**, ASME J. Biomech. Eng., 119, pp 392-399, 1997.

Rodríguez, J.F.; Cacho, F.; Bea, J.A.; Doblaré, M.; **“A stochastic-structurally based three dimensional finite-strain damage model for fibrous soft tissue”**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 54, pp 864–886, 2006.

Junqueira, L. C.; Carneiro, J.; **“Histologia Básica”**, 11 Ed. Rio de Janeiro - RJ: Guanabara Koogan, 2008.

Kachanov, L. M.; **“Time of the rupture process under creep conditions”**, Izv. Akad. Nauk SSR Otd. Tech. Nauk, pp 26-31, 1958.

Robi, K.; Jakob, N.; Matevz, K.; Matjaz, V; **“The Physiology of Sports Injuries and Repair Processes, Current Issues in Sports and Exercise Medicine”**, Associate Prof. Michael Hamlin (Ed.), ISBN: 978-953-51-1031-6, InTech, DOI: 10.5772/54234. <http://www.intechopen.com/books/current-issues-in-sports-and-exercise-medicine/the-physiology-of-sports-injuries-and-repair-processes>. Acessado em 05/06/2015.

Lemaitre, J.; Chaboche, J.; **“Mécanique des matériaux solides”**, Paris: Dunod, 1985.

Limbirt, G.; Taylor, M.; **“On the constitutive modeling of biological soft connective tissues. A general theoretical framework and explicit forms of the tensors of elasticity for strongly anisotropic continuum fibre-reinforced composites at finite strains”**, *Int J Solids Struct*, 39, pp 2343–2358, 2002.

Liu, S.; Yang, R.; Shaikh, R.; Lane, J.; **“Collagen in tendon, ligament and bone healing”**, *Clin. Orthop. Relat. Res.*, 318, pp 265-78, 1995.

Mullins, L.; **“Effect of stretching on the properties of rubber”**, *Rubber res.*, n. 16, pp 257-289, 1947.

Natali, A.; Pavan, P.; Carniel, E.; Lucisano, M.; Tagliavero, G.; **“Anisotropic elasto-damage constitutive model for the biomechanical analysis of tendons”**, *Medical Engineering & Physics* 27, pp 209-214, 2005.

Ogden, R. W.; **“Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids”**, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 328, pp 567-583, 1972.

Peña, E.; **“Damage functions of the internal variables for soft biological fibred tissues”**, *Mechanics Research Communications*, 38, pp 610-615, 2011.

Peña, E., Calvo, B., Martínez, M., & Doblaré, M.; **“On finite strain damage of viscoelastic fibred materials, Application to soft biological tissues”**, *Int. J. Numer Methods Eng.*, 74, pp 1198-1218, 2008.

Peña, E., Peña, J., & Doblaré, M.; **“On the Mullins effect and hysteresis of fibered biological materials: A comparison between continuous and discontinuous damage models”**, *International Journal of Solids and Structures*, 46, pp 1727–1735, 2009.

Rodríguez, J. F., Alastrue, V., & Doblaré, M.; **“Finite element implementation of a stochastic three dimensional finite-strain damage model for fibrous soft tissue”**, *Comput. Methods Appl. Mech Eng.*, 197, pp 946-958, 2008.

Rodríguez, J.F.; Cacho, F.; Bea, J.A.; Doblaré, M.; **“A stochastic-structurally based three dimensional finite-strain damage model for fibrous soft tissue”**, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54, pp 864–886, 2006.

Schechtman, H., & Bader, D. L.; **“In vitro fatigue of human tendons”**, *J. Biomechanics*. Vol. 30. No. 8, pp 829-835, 1997.

Simo, J.; **“On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects”**, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 60, pp 153-173, 1987.

Simo, J. C., & Taylor, R. L.; **“Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity”**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, pp 101-118, 1985.

Spencer, A.; **“Theory of Invariants”**, In: *Continuum Physics*. Academic Press, New York, pp 239-253, 1954.

Vita, R. D.; **“Structural Constitutive Models for Knee Ligaments”**, *Dissertação (Doutorado em Engenharia Mecânica): University of Pittsburgh - School of Engineering*, 2005.

Weiss, J. A., Maker, B. N., & Govindjee, S.; **“Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity”**, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 135, pp 107-128, 1996.

Williams, P.L.; Warwick, R; Dyson, M; Banmister, L.H.; **“GRAY's Anatomy”**, 37 ed. London: Churchill Livingstone, 1989.

## APÊNDICE A

Tabela A.1 - Parâmetros utilizando função de dano exponencial, equação (2.26)

Modelos	Parâmetros							
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	110,9844	2	-	-	-	-	30,7927	13,4444
<b>Holzappel, 2000</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\mu_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\mu_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	0,2928e-	1,4062	3,7430	13,9833	3,0543	3,2808	2207,7278
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	108,5904	2	-8,6800e-	-2	-	-	32,2903	12,9148
<b>Holzappel, 2000</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\mu_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\mu_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	6,1180e-	1,4648	3,7698	15,7066	3,0300	3,2435	2185,045
<b>Ogden 3 termos</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	55,2055	3,5537	-3,9529e-	-	2,3106e-	0,6316	35,8964	12,2394
<b>Holzappel</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\mu_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\mu_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	2,4557e-	1,4999	3,8778	16,0829	2,9637	3,1737	2046,8505
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	85,7976	2	-	-	-	-	9,5664	7,6389
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\mu_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\mu_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,0642	0,01444	0,7201	4,7813	40,3331	0,2597	2,8747	753,2134
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	84,3776	2	-2,6678e-	-2	-	-	37,7976	2,6644
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\mu_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\mu_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,0705	0,9057	0,8532	3,8251	42,5476	0,3000	2,8506	728,6380
<b>Ogden 3 termos</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	839029	2,0083	-1,6507e-	-	1,3644e-	1,0000	4,4320	2,3299
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\mu_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\mu_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,0710	0,9856	0,8675	3,7860	42,6168	0,3000	2,8489	727,096

Tabela A.2 - Parâmetros utilizando função de dano polinomial, equação (2.27)

Modelos	Parâmetros							
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	22,8326	2	-	-	-	-	84,0293	5,8693
<b>Holzapfel</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\eta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\eta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	0,2442	1,6173	5,1602	-0,9999	1,1826	1,3456	2372,7795
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	21,5450	2	-	-2	-	-	4,2716e-	84,2938
<b>Holzapfel</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\eta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\eta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	0,3131	1,4271	5,3133	-1,0000	1,1537	1,3076	2355,5424
<b>Ogden 3 termos</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	19,3158	1,8286	-6,6313e-3	-	1,3219e-	-1,2567	86,4008	6,2994
<b>Holzapfel</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\eta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\eta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	0,3541	1,5033	5,3668	-1,0000	1,0596	1,1802	2344,9337
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	89,0038	2	-	-	-	-	7,0951	8,8317
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\eta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\eta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,0639	0,9088	9,7652e-3	5,9966	0,5946	0,9463	2,9325	2129,3943
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	76,7814	2	-16,3930e-	-2	-	-	8,4288	7,8067
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\eta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\eta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,0535	0,53882	5,1764e-5	5,4906	0,6664	0,9832	3,0339	1936,4478
<b>Ogden 3 termos</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	70,5205	2,1761	-1,1101e-4	-	1,1346	3,1628	25,7802	3,8190
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\eta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\eta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,0664	0,06894	0,01471	4,6541	0,1466	2,1775	2,7663	1710,5818

Tabela A.3 - Parâmetros utilizando função de dano sigmoidal de Peña, 2009, equação (2.29)

Modelos	Parâmetros							
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	144,6444	2	-	-	-	-	8,9110	25,2514
<b>Holzapfel</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\delta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\delta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	1,4289	0,1009	5,0145	0,9436	2,0522	4,2343	3461,0352
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	144,8608	2	-8,432e-3	-2	-	-	8,9307	2,5249
<b>Holzapfel</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\delta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\delta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	1,4296	0,1000	5,0192	0,9498	2,0304	4,2426	3448,8564
<b>Ogden 3 termos</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	<b>145,3495</b>	2,0706	-0,09674	-	1,0530e-	1,3793	10,8014	24,1798
<b>Holzapfel, 2000</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\delta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\delta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	-	<b>1,3605</b>	0,09426	5,1777	0,6953	2,1299	3,8087	2622,6462
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	89,0038	2	-	-	-	-	7,0951	8,8317
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\delta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\delta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,0639	0,6906	0,1234	1,9617	13,8933	0,5945	8,1791	4165,7879
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	165,6384	2	-0,06914	-2	-	-	6,7949	5,9512
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\delta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\delta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,1096	0,8853	0,7064	2,7158	12,5582	0,5973	7,6608	2957,5169
<b>Ogden 3 termos</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	165,6300	2,0000	-	-	1,0000e-	1,0000	6,7983	5,9537
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\delta_f$	$H_{min_f}$	$H_{max_f}$	$\delta_m$	$H_{min_m}$	$H_{max_m}$	<b>ERRO</b>
	1,1100	0,08876	0,7000	2,7160	12,5600	0,6000	7,6599	2912,4552

Tabela A.4 - Parâmetros utilizando função de dano sigmoidal de Peña, 2011, equação (2.30)

<b>Modelos</b>	<b>Parâmetros</b>							
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	58,5868	2	-	-	-	-	119,6203	24,0048
<b>Holzapfel, 2000</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\omega_f$	$\gamma_f$	$\omega_m$	$\gamma_m$			<b>ERRO</b>
	-	0,3681	3,7773e-	24,2904	2,3266			3257,2794
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	58,4874	2	-	-2	-	-	119,6099	24,0450
<b>Holzapfel, 2000</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\omega_f$	$\gamma_f$	$\omega_m$	$\gamma_m$			<b>ERRO</b>
	-	0,36786	1,2045e-	24,6656	2,3257			3256,8991
<b>Ogden 3</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	<b>54,0908</b>	1,9432	-	-0,5527	7,9546e-	1,5671	125,5005	23,9057
<b>Holzapfel, 2000</b> Eq. (2.24)	$\bar{I}_{4_0}$	$\omega_f$	$\gamma_f$	$\omega_m$	$\gamma_m$			<b>ERRO</b>
	-	<b>0,3601</b>	4,7253e-	31,6782	2,2078			3248,7597
<b>Neo-Hookeano</b> Eq. (2.22)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	142,7486	2	-	-	-	-	105,9389	0,5750
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\omega_f$	$\gamma_f$	$\omega_m$	$\gamma_m$			<b>ERRO</b>
	1,0909	9,1232	2,1213	9,6678	3,6078			2892,6009
<b>Mooney-Rivlin</b> Eq. (2.23)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	43,0222	2	-14,687	-2	-	-	830,4389	0,1375
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\omega_f$	$\gamma_f$	$\omega_m$	$\gamma_m$			<b>ERRO</b>
	1,0514	4,9626	3,4201	156,4853	2,3069			860,7560
<b>Ogden 3</b> Eq. (2.21)	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_3$	$\alpha_3$	$C_3$	$C_4$
	<b>42,0436</b>	1,9944	-15,1490	-2,0096	1,9841E-	0,4786	249,2130	0,004644
<b>Calvo, 2009</b> Eq. (2.25)	$\bar{I}_{4_0}$	$\omega_f$	$\gamma_f$	$\omega_m$	$\gamma_m$			<b>ERRO</b>
	<b>1,0514</b>	4,9687	3,4310	161,3769	2,2939			841,5596