



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
TRABALHO DE CONCLUSÃO EM ENGENHARIA DE CONTROLE
E AUTOMAÇÃO

Simulação de manipuladores robóticos hidráulicos incluindo dinâmica dos atuadores

Autor: Robson Nunes de Oliveira

Orientador: Mário Roland Sobczyk Sobrinho

Porto Alegre, julho de 2015.

Sumário

Sumário	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vi
Lista de Símbolos	vii
Lista de Abreviaturas e Siglas	x
1. Introdução	1
1.1. Objetivos	2
2. Revisão Bibliográfica	3
2.1. Manipuladores robóticos	3
2.2. Atuadores hidráulicos em manipuladores robóticos	3
2.3. Cinemática de manipuladores robóticos	4
2.4. Dinâmica de manipuladores robóticos	6
2.5. Robotics toolbox	6
3. Desenvolvimento	9
3.1. Modelo dinâmico de um atuador hidráulico	9
3.2. Modelo dinâmico linear de um atuador hidráulico	11
3.3. Modelo dinâmico do manipulador com atuadores	12
3.4. Parâmetros do sistema	15
3.4.1. Parâmetros do manipulador	15
3.4.2. Parâmetros dos sistemas hidráulicos	16
3.4.3. Relação de transmissão	17
3.5. Simulação: Robotics Toolbox + MATLAB/Simulink	18
4. Resultados	20
4.1. Modelo linear e modelo não linear do cilindro hidráulico	20
4.2. Modelo completo em malha aberta	21
4.3. Subsistema mecânico	23
4.4. Modelo completo	26
5. Conclusões	30
6. Referências	31
Apêndices	33

Resumo

No presente trabalho é obtido um modelo para a dinâmica direta de um manipulador robótico acionado hidraulicamente. O modelo obtido é composto por um subsistema mecânico e um subsistema hidráulico. O subsistema mecânico é composto pelo modelo dinâmico de um manipulador serial e a parcela mecânica correspondente aos atuadores. Para o subsistema hidráulico é obtido um modelo não linear de 4ª ordem, posteriormente esse modelo é linearizado. A relação entre os dois subsistemas é dada por uma matriz que considera os parâmetros geométricos da transmissão mecânica. As simulações são realizadas em ambiente Matlab/Simulink com o auxílio do Robotics toolbox desenvolvido pelo Prof. Peter Corke, uma ferramenta muito difundida no ensino de Robótica em todo o mundo. O modelo linearizado do subsistema hidráulico apresentou resultados satisfatórios em conjunto com o subsistema mecânico.

PALAVRAS-CHAVE: Simulação, Manipuladores seriais, Atuadores hidráulicos.

Abstract

In this paper, the direct dynamics of a robotic manipulator with hydraulic drives is modeled. The obtained model is composed by a mechanical subsystem and a hydraulic subsystem. The mechanical subsystem is given by the dynamic model of a serial manipulator and the mechanical portion of the actuators. In the case of the hydraulic subsystem, a non-linear model of 4th order is obtained and then this model linearized. The relationship between the two subsystems is given by a matrix based on geometric parameters of the mechanical transmission. The simulations are performed in Matlab/Simulink with support of the Robotics toolbox developed by Prof. Peter Corke, which is a worldwide-known didactic tool for teaching robotics. The model composed by the mechanical subsystem and the linearized model of the hydraulic subsystem presented satisfactory results.

KEYWORDS: Simulation, Serial Robot, Hydraulic Actuators.

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Manipulador robótico com 6 graus de liberdade (Wernholt e Ostring, 2003) ..	3
Figura 2.2 - Custo x capacidade de carga para atuadores (Carrara, 2009).	4
Figura 3.1 - Atuador hidráulico com válvula direcional proporcional (Dos Santos et al., 2002).	10
Figura 3.2 - Cilindro hidráulico tipo pinhão cremalheira (Alves, 2015).....	13
Figura 3.3 - Manipulador PUMA 560 (Corke, 1994).	16
Figura 4.1 - Resposta ao degrau cilindro hidráulico linear x não linear.	20
Figura 4.2 - Detalhe resposta ao degrau cilindro hidráulico linear x não linear.	21
Figura 4.3 - Deslocamento das juntas na simulação do modelo completo.	21
Figura 4.4 - Torques de acionamento das juntas na simulação do modelo completo.	22
Figura 4.5 - Deslocamento das juntas na simulação do modelo completo e equação da vazão alterada.	22
Figura 4.6 - Diagrama de blocos utilizado nas simulações do modelo MIM.....	23
Figura 4.7 - Diagrama de blocos utilizado nas simulações do modelo MIT.	23
Figura 4.8 - Deslocamentos na junta q1 (modelos MIM e MIT).	24
Figura 4.9 - Deslocamentos na junta q2 (modelos MIM e MIT).	24
Figura 4.10 - Deslocamentos na junta q3 (modelos MIM e MIT).	24
Figura 4.11 - Torques na junta q1 (modelos MIM e MIT).	25
Figura 4.12 - Torques na junta q2 (modelos MIM e MIT).	25
Figura 4.13 - Torques na junta q3 (modelos MIM e MIT).	26
Figura 4.14 - Diagrama de blocos utilizado nas simulações do MIA.	26
Figura 4.15 - Controle de torque utilizado nas simulações do modelo MIA.....	26
Figura 4.16 - Deslocamentos na junta q1 (modelos MIA e MIT).	27
Figura 4.17 - Deslocamentos na junta q2 (modelos MIA e MIT).	27
Figura 4.18 - Deslocamentos na junta q3 (modelos MIA e MIT).	28
Figura 4.19 - Torques na junta q1 (modelos MIA e MIT).	28
Figura 4.20 - Torques na junta q2 (modelos MIA e MIT).	29
Figura 4.21 - Torques na junta q3 (modelos MIA e MIT).	29

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Densidade de potência e densidade de torque em atuadores robóticos (Hunter et al., 1991).....	4
Tabela 2 - Parâmetros para inserção de um manipulador.....	7
Tabela 3 - Funções do Robotics Toolbox.	8
Tabela 4 - Torques máximos nos atuadores do robô PUMA 560.....	17
Tabela 5 - Funções do Robotics toolbox utilizadas na simulação dinâmica.....	18

Lista de Símbolos

α_i	Ângulo de torção da junta i.	[rad]
β	Módulo de elasticidade do fluido.	[Pa]
θ_i	Ângulo de rotação da junta i.	[rad]
$\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$	Variáveis genéricas do jacobiano.	
σ_i	Tipo de junta.	
τ	Vetor de torques de acionamento do manipulador.	[Nm]
$\tau_{\max 1}$	Torque máximo do atuador 1.	[Nm]
$\tau_{\max 2}$	Torque máximo do atuador 2.	[Nm]
$\tau_{\max 3}$	Torque máximo do atuador 3.	[Nm]
A_1	Área do êmbolo na câmara 1.	[m ²]
A_2	Área do êmbolo na câmara 2.	[m ²]
A_{1i}	Área do embolo 1 do cilindro i.	[m ²]
A_{2i}	Área do embolo 2 do cilindro i.	[m ²]
a_i	Distância de offset do elo.	[m]
A_i^{i-1}	Matriz de transformação homogênea.	
B	Coeficiente de atrito viscoso.	[Ns/m]
$C(q, \dot{q})$	Vetor de efeitos centrífugos e de coríolis do manipulador.	
D^*	Vetor dos atritos viscosos.	
d_i	Comprimento do elo.	[m]
F_{av}	Força de avanço do cilindro.	[N]
F_{av_i}	Força de avanço do cilindro i.	[N]
F_H	Vetor de forças hidráulicas.	[N]
F_{Hi}	Força hidráulica do atuador i.	[N]
F_L	Vetor de forças externas.	[N]
F_{\max_i}	Força “máxima” do cilindro i	[N]
F_n	Função genérica do jacobiano.	
F_{rec}	Força de recuo do cilindro.	[N]
F_{rec_i}	Força de recuo do cilindro i.	[N]
$G(q)$	Vetor dos efeitos da gravidade no manipulador.	
$H(q)$	Matriz de inércia do manipulador.	
$H^*(q)$	Matriz de inercia modificada.	
J_θ^0	Matriz Jacobiana em relação ao sistema da base.	
J_θ^{tn}	Matriz Jacobiana em relação ao sistema do efetuador.	
$J(\theta)$	Matriz Jacobiana.	
$\kappa(q)$	Matriz de transformação da cinemática direta.	
$\kappa^{-1}(T)$	Matriz de transformação da cinemática inversa.	
K_a	Constante de vazão na câmara a com ganho de tensão.	[m ⁴ s ⁻¹ V ⁻¹ N ^{-$\frac{1}{2}$}]
K_b	Constante de vazão na câmara b com ganho de tensão.	[m ⁴ s ⁻¹ V ⁻¹ N ^{-$\frac{1}{2}$}]
k_{ai}	Constante de vazão para câmara a da válvula i.	[m ⁴ s ⁻¹ V ⁻¹ N ^{-$\frac{1}{2}$}]
k_{bi}	Constante de vazão para câmara b da válvula i.	[m ⁴ s ⁻¹ V ⁻¹ N ^{-$\frac{1}{2}$}]

K_C	Ganho de vazão-pressão.	$[m^3s^{-1}Pa^{-\frac{1}{2}}]$
K_{C1}	Ganho de vazão-pressão para a câmara 1.	$[m^3s^{-1}Pa^{-\frac{1}{2}}]$
K_{C2}	Ganho de vazão-pressão para a câmara 2.	$[m^3s^{-1}Pa^{-\frac{1}{2}}]$
K_{C1i}	Ganho de vazão-pressão na câmara 1 da válvula i.	$[m^3s^{-1}Pa^{-\frac{1}{2}}]$
K_{C2i}	Ganho de vazão-pressão na câmara 2 da válvula i.	$[m^3s^{-1}Pa^{-\frac{1}{2}}]$
K_Q	Ganho de vazão.	$[m^2s^{-1}]$
k_{q1}	Ganho de vazão para a câmara 1.	$[m^3s^{-1}V^{-1}]$
k_{q2}	Ganho de vazão para a câmara 2.	$[m^3s^{-1}V^{-1}]$
k_{qu1i}	Ganho de vazão na câmara 1 da válvula i.	$[m^3s^{-1}V^{-1}]$
k_{qu2i}	Ganho de vazão na câmara 2 da válvula i.	$[m^3s^{-1}V^{-1}]$
k_{sa}	Constante hidráulica para vazão na câmara a.	$[m^3s^{-1}N^{-\frac{1}{2}}]$
k_{sb}	Constante hidráulica para vazão na câmara b.	$[m^3s^{-1}N^{-\frac{1}{2}}]$
M	Massa total deslocada pelo cilindro.	$[kg]$
p_a	Pressão na câmara a.	$[Pa]$
\dot{p}_a	Derivada da pressão na câmara a.	$[Pa/s]$
\dot{p}_b	Derivada da pressão na câmara b.	$[Pa/s]$
\dot{p}_{a1}	Derivada da pressão na câmara a do atuador i.	$[Pa/s]$
\dot{p}_{b1}	Derivada da pressão na câmara b do atuador i.	$[Pa/s]$
p_b	Pressão na câmara b.	$[Pa]$
$P_L _1$	Ponto de operação para a pressão diferencial.	$[Pa]$
p_r	Pressão de retorno.	$[Pa]$
p_s	Pressão de suprimento.	$[Pa]$
q	Vetor de coordenadas generalizadas das juntas.	$[rad]$
\underline{q}	Vetor das variáveis de junta.	$[rad]$
$\dot{\underline{q}}$	Vetor com as velocidades das juntas.	$[rad/s]$
\dot{q}	Velocidades das juntas.	$[rad/s]$
\ddot{q}	Acelerações das juntas.	$[rad/s^2]$
Q_a	Vazão pelo orifício de controle da câmara a.	$[m^3/s]$
Q_b	Vazão pelo orifício de controle da câmara b.	$[m^3/s]$
Q_L	Vazão de um fluido.	$[m^3/s]$
Q_{L1}	Ponto de equilíbrio para a vazão de um fluido.	$[m^3/s]$
\bar{R}	Matriz de relações de transmissão.	
R_1	Relação de transmissão da junta 1.	$[m]$
R_2	Relação de transmissão da junta 2.	$[m]$
R_3	Relação de transmissão da junta 3.	$[m]$
\bar{R}_i	Relação de transmissão.	
sign	Função sinal.	
T_i^0	Transformação homogênea.	
u	Vetor tensão de entrada na válvula.	$[V]$
u_i	Sinal de controle da válvula i.	$[V]$

V_1	Volume da câmara 1.	$[m^3]$
V_2	Volume da câmara 2.	$[m^3]$
V_{10}	Volume inicial da câmara 1.	$[m^3]$
V_{20}	Volume inicial da câmara 2.	$[m^3]$
V_{10i}	Volume inicial câmara2 do cilindro i.	$[m^3]$
V_{20i}	Volume inicial câmara2 do cilindro i.	$[m^3]$
$\dot{\underline{x}}_n^0$	Vetor relação velocidades ao sistema da base.	
$\dot{\underline{x}}_n^{tn}$	Vetor relação velocidades ao sistema do efetuador.	
X_n	Variável genérica do jacobiano.	
x_v	Deslocamento do carretel.	$[m]$
$x_v _1$	Ponto de operação para o deslocamento do carretel.	$[m]$
y	Deslocamento linear da haste do cilindro.	$[m]$
\dot{y}	Velocidade linear da haste do cilindro.	$[m/s]$
\ddot{y}	Aceleração linear da haste do cilindro.	$[m/s^2]$
y_i	Deslocamento da haste do cilindro i.	$[m]$
\dot{y}_i	Velocidade da haste do cilindro i.	$[m/s]$

Lista de Abreviaturas e Siglas

SCARA - Selective Compliance Articulated Robot Arm.

CA - Corrente Alternada.

DH - Denavit e Hartenberg.

MIA - Modelo com influencia dos atuadores.

MIM - Modelo com imperfeições mecânicas.

MIT - Modelo ideal do toolbox.

1. Introdução

A robótica é um campo das ciências e tecnologias que estuda a construção mecânica, projeto, controle, instrumentação, aplicações e manutenção de robôs. Robôs são amplamente utilizados em pesquisas científicas, tecnologia de manufatura, engenharia civil, transporte e agricultura, bem como na medicina, investigação subaquática e investigação espacial. A teoria e tecnologia de robôs e manipuladores é um campo interdisciplinar de estudo que requer a cooperação de especialistas em várias disciplinas científicas diferentes (Morecki e Knapczyk, 2014).

Métodos de simulação confiáveis abrem uma ampla gama de opções para resolver muitos problemas de forma criativa, permitindo a investigação, projeto, visualização e teste de objetos. Uma grande quantidade de softwares de simulação está disponível para os sistemas robóticos, e já vem sendo usados extensivamente. À medida que a complexidade do sistema investigado aumenta, o papel da simulação torna-se mais importante. Sistemas robóticos avançados são sistemas muito complexos, de modo que as ferramentas de simulação podem certamente melhorar o projeto, desenvolvimento, e até mesmo o funcionamento dos sistemas robóticos (Žlajpah, 2006).

As simulações baseadas no modelo do manipulador permitem testar as estratégias de controle, prevendo problemas de projeto do controlador e/ou do manipulador, sem o perigo de acidentes decorrentes de instabilidade ou falhas no projeto. No projeto e construção de manipuladores, as simulações e a análise do modelo fornecem informações e estimativas de variáveis do sistema (como por exemplo: as velocidades, acelerações, torques e forças), as quais são úteis na análise da estrutura mecânica do robô e no projeto e especificação de seus componentes, tais como, juntas, transmissões e atuadores (Valdiero, 2005). Neste contexto, o software Matlab é uma das plataformas mais utilizadas para a modelagem e simulação de sistemas, inclusive a simulação de sistemas robóticos. Entre outras, as principais razões para a sua utilização são a capacidade de resolver os problemas com formulação matricial e de fácil extensibilidade, assim como a extensão Matlab/Simulink, que adiciona vários recursos para simulação de sistemas dinâmicos, com modelo gráfico de equacionamento e a possibilidade de simulação em tempo real (Žlajpah, 2006).

No presente trabalho é utilizada a ferramenta para simulação de manipuladores Robotics Toolbox para Matlab. O Robotics Toolbox fornece muitas funções que são necessárias na área da robótica, abordando áreas como a cinemática, dinâmica e geração de trajetória. O Toolbox é útil para simulação, bem como resultados de análise e experimentos com robôs reais, e pode ser uma ferramenta poderosa para a área acadêmica (Corke, 1995). Através do Robotics Toolbox podem-se inserir parâmetros referentes ao manipulador em geral, porém a modelagem não considera os efeitos dinâmicos dos atuadores nas simulações realizadas, não considerando assim, os esforços necessários para realizar os deslocamentos.

Com base nas necessidades de projeto e análise de manipuladores robóticos, juntamente com a ferramenta de simulação Robotics Toolbox, verifica-se que a simulação de manipuladores robóticos é um tema o qual pode ser explorado a fim de evidenciar as diferenças entre os modelos ideais, que não consideram os esforços dos atuadores, e um modelo mais completo, ou seja, levando em conta a dinâmica dos atuadores.

Devido às suas características, principalmente a relação força/dimensão, os atuadores hidráulicos encontram aplicações em diversos setores, tais como: agricultura, aviação, automotivo, construção, lazer, manufatura, manuseio de materiais, naval, robótica e transporte. Em robótica, os atuadores hidráulicos são utilizados no acionamento das juntas dos manipuladores (Franco et al., 2002).

Os manipuladores industriais com atuadores elétricos tradicionais têm sido utilizados em todos os tipos de aplicações industriais. Eles já possuem tecnologia avançada e com alta precisão. Mas eles não são adequados para diversas tarefas em ambientes severos devido ao seu modo de acionamento elétrico e a baixa relação potência/massa, como debaixo d'água, construção, manutenção linhas de energia elétrica, etc. A fim de suprir essas insuficiências, manipuladores acionados hidráulicamente vêm sendo aplicados em várias áreas de estudo (Rong et al., 2014).

1.1. Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é incorporar a dinâmica de atuadores hidráulicos em um modelo dinâmico de manipulador robótico, a fim de simular a resposta desse tipo de conjunto. Pretende-se obter um modelo que possibilite o estudo do comportamento desse tipo de manipulador e permita relacionar a sua resposta dinâmica com a variação de determinados parâmetros, e que também proporcione um meio para a elaboração e teste de estratégias de controle de manipuladores robóticos acionados hidráulicamente.

Como objetivos secundários, podem ser citados, a obtenção de modelos para os atuadores hidráulicos e a obtenção de uma relação entre o modelo dinâmico dos cilindros e o modelo dinâmico do manipulador. Podendo ainda ser citada a implementação do modelo em ambiente Matlab/Simulink com o auxílio do Robotics toolbox.

2. Revisão Bibliográfica

2.1. Manipuladores robóticos

Mecanicamente, os robôs manipuladores são formados por base, braço e punho, sendo que os movimentos entre estas partes são realizados por juntas (Groover, 1989). O braço é formado por elos e juntas que ligam a base ao punho, no qual é fixado o efetuator. As juntas podem ser classificadas quanto ao tipo de movimento que executam. Juntas prismáticas executam movimentos translacionais, juntas rotacionais, executam movimentos em torno de uma linha imaginária estacionária e as juntas esféricas combinam os movimentos de três juntas rotacionais. A Figura 2.1 mostra um manipulador com 6 graus de liberdade, sendo que o número de graus de liberdade de um robô depende diretamente do número de juntas do mesmo.

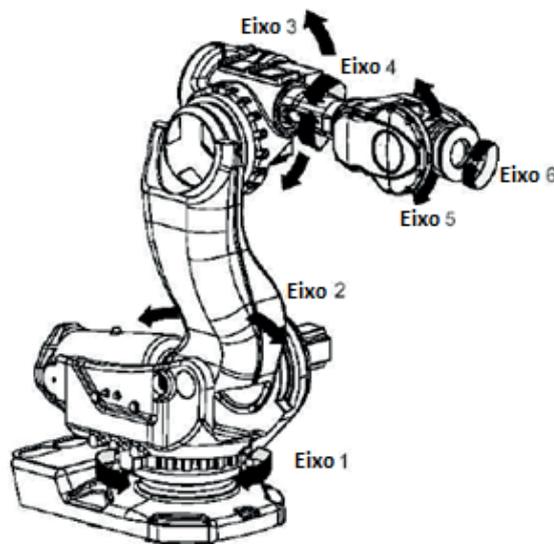


Figura 2.1 - Manipulador robótico com 6 graus de liberdade (Wernholt e Ostring, 2003)

Um robô de cadeia cinemática aberta é aquele no qual, ao partir da base, chega-se ao punho por meio de um único caminho numa sequência que intercala elos e juntas. Já em um robô de cadeia fechada, não existe um caminho único para se chegar ao punho. A configuração física dos robôs de cadeia aberta está relacionada com os tipos de juntas que ele possui (Groover, 1988). Dentre as configurações típicas de manipuladores seriais estão os cartesianos, os cilíndricos, revolutos, esféricos e SCARA.

2.2. Atuadores hidráulicos em manipuladores robóticos

Os principais tipos de atuadores utilizados em sistemas robotizados são os hidráulicos, pneumáticos e elétricos. A principal vantagem dos atuadores hidráulicos é que estes podem proporcionar uma grande quantidade de energia comparada com a sua inércia. Outro aspecto favorável é a baixa compressibilidade dos fluidos hidráulicos e a alta rigidez que levam a uma alta frequência natural, associando a eles uma resposta rápida. Como desvantagem tem-se a preocupação com a contenção de fluido no interior do sistema, por ser o fluido hidráulico inflamável e pressurizado, além disso, um vazamento pode eventualmente, conduzir a danos das superfícies interiores (Mavroidis et al., 2000).

Segundo Tanaka et al. (2013), a escolha entre usar sistemas de acionamento elétricos, hidráulicos ou pneumáticos é uma decisão fundamental que afeta o desempenho, custo,

manutenção, segurança, facilidade de uso, flexibilidade e confiabilidade. A Figura 2.2 mostra uma comparação entre o custo e a capacidade de carga em atuadores hidráulicos e elétricos.

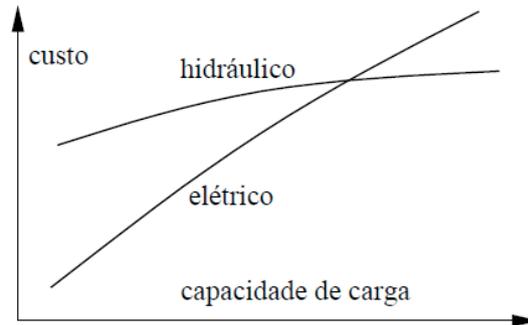


Figura 2.2 - Custo x capacidade de carga para atuadores (Carrara, 2009).

Hunter et al. (1991) relacionam as densidades de potências e de torques para atuadores utilizados em sistemas robóticos, entre eles, os atuadores listados na Tabela 1, o motor elétrico síncrono desenvolvido pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts, o atuador hidráulico rotativo utilizado em um braço robótico desenvolvido pela empresa Sarcos e o atuador eletropneumático utilizado em uma mão robótica estudada pela Universidade de Utah em conjunto com o Instituto de Tecnologia de Massachusetts. Tanaka et al. (2013) descrevem que a densidade de potência em motores hidráulicos é 10 vezes maior que nos motores elétricos e pneumáticos.

Tabela 1 - Densidade de potência e densidade de torque em atuadores robóticos (Hunter et al., 1991).

Atuador	Torque/massa	Potência/massa
McGill/MIT EM Motor	15 N.m/kg	200W/kg
Sarcos Dexterous Arm electro hydraulic rotary actuator	120 N.m/kg	600W/kg
Utah/MIT Dexterous Hand electropneumatic servovalve	20 N.m/kg	200W/kg

2.3. Cinemática de manipuladores robóticos

Cinemática é o estudo do movimento sem levar em conta as forças que os causam. A cinemática de manipuladores envolve o estudo das propriedades geométricas e temporais do movimento, em particular a forma como os elos se movem um em relação ao outro e em relação ao tempo (Corke, 1994).

Para tratar dos movimentos dos manipuladores é necessário desenvolver técnicas para representar a posição de determinado ponto do manipulador em relação ao tempo. Esta representação depende da posição das juntas e dos elos, sendo que é interessante ter a base do robô como ponto de referência. Para facilitar a descrição da localização de cada elo em relação ao sistema de coordenadas da base, Denavit e Hartenberg (1955) propuseram um método matricial de atribuição sistemática dos sistemas de coordenadas para cada elo em uma cadeia articulada.

A representação através dos parâmetros de Denavit e Hartenberg (1955) resulta em uma matriz de transformação homogênea 4x4, na forma:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

representando o sistema de coordenadas de cada elo em relação ao sistema de coordenadas do elo anterior, isto é,

$$\mathbf{T}_i^0 = \mathbf{T}_{i-1}^0 \mathbf{A}_i^{i-1} \quad (2.2)$$

onde \mathbf{T}_i^0 é a transformação homogênea que descreve a pose do sistema de coordenadas i em relação ao sistema de coordenadas da base.

Considerando um manipulador rígido, ou seja, com rigidez estrutural suficiente para que não haja oscilações durante os movimentos, com n elos, a cinemática direta fornece o sistema de coordenadas, ou pose, do último elo. Este é obtido pela aplicação repetida da Equação (2.2),

$$\mathbf{T}_n^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \mathbf{T}_{i-1}^0 \mathbf{A}_i^{i-1} = \boldsymbol{\kappa}(\underline{\mathbf{q}}) \quad (2.3)$$

onde $\underline{\mathbf{q}}$ representa as variáveis de junta e $\boldsymbol{\kappa}$ a matriz de transformação. Segundo Corke (1994), a solução da cinemática direta pode ser obtida para qualquer manipulador, independentemente do número de articulações ou estrutura cinemática.

De maior utilidade no planejamento da trajetória do manipulador é a solução da cinemática inversa

$$\underline{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{T}) \quad (2.4)$$

que fornece os ângulos das juntas necessários para atingir a posição final desejada para o efetuador. Em geral, esta solução não é única, e, para algumas classes de manipuladores, não existe uma solução de forma fechada (Corke, 1994).

Segundo Craig (2005), no campo da robótica, geralmente são utilizadas matrizes Jacobianas para relacionar as velocidades das juntas às velocidades do efetuador no plano cartesiano. O Jacobiano é uma forma multidimensional da derivada. Suponhamos, por exemplo, que temos n funções, cada uma das quais é uma função de n variáveis independentes:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n) \\ X_2 &= F_2(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n) \\ &\dots \\ X_n &= F_n(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Através das derivadas parciais, a matriz Jacobiana é definida como:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \theta_1} & \frac{\partial F_n}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Através dessa matriz, para um manipulador com n elos, a velocidade do efetuador no plano cartesiano pode ser calculada pelas equações (2.7) e (2.8),

$$\dot{\mathbf{x}}_n^0 = \mathbf{J}_\theta^0 \dot{\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_n^{tn} = \mathbf{J}_\theta^{tn} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.8)$$

onde \mathbf{J}_θ^0 e \mathbf{J}_θ^{tn} são as matrizes Jacobianas em relação ao sistema de coordenadas da base e do efetuador, respectivamente, $\dot{\mathbf{x}}_n^0$ e $\dot{\mathbf{x}}_n^{tn}$ são vetores com as velocidades cartesianas em relação ao sistema de coordenadas da base e do efetuador, respectivamente, e $\dot{\mathbf{q}}$ é o vetor com as velocidades das juntas.

Segundo Valdiero (2005), as matrizes Jacobianas são muito importantes nos aspectos de planejamento e execução de trajetórias, na determinação de configurações singulares dos atuadores, na dedução das equações dinâmicas do movimento do manipulador e na transformação das forças do atuador para os torques nas juntas dos robôs.

2.4. Dinâmica de manipuladores robóticos

O conjunto de equações matriciais que relacionam o torque gerado pelos atuadores com os movimentos da estrutura do manipulador é chamado de modelo dinâmico do manipulador. Na literatura, a análise da dinâmica de manipuladores robóticos segue duas principais abordagens, a formulação de Newton-Euler e a formulação de Lagrange. O modelo mostrado na Equação (2.9) pode ser obtido através de ambas as formulações, sendo utilizado em Lewis et al. (2003), Craig (2005), Valdiero (2005) e Spong et al. (2006). Considerando a ausência de forças externas no efetuador e desprezando o atrito na estrutura, tem-se:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.9)$$

onde $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia simétrica, positiva definida, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor que representa os efeitos centrífugos e de coriolis, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor que representa os torques gerados em cada eixo de junta devido à força da gravidade, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor dos torques gerados pelos atuadores. $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de coordenadas generalizadas das juntas.

2.5. Robotics toolbox

Segundo Corke (1995), o Robotics Toolbox é baseado em um método generalizado para representar a cinemática e dinâmica dos manipuladores robóticos através de matrizes de descrição. Tais matrizes fornecem uma maneira concisa de descrever um modelo de robô e podem facilitar o compartilhamento de modelos de robôs em toda a

comunidade de pesquisa. Esse Toolbox também fornece funções para manipular dados como os vetores, matrizes de transformações homogêneas e quaternions, que são necessários para representar a posição tridimensional e orientação.

Essas características justificam a intensa utilização do toolbox no meio acadêmico, principalmente em cursos universitários onde a robótica faz parte do currículo, assim como a utilização do toolbox como ferramenta auxiliar em livros texto acerca de robótica. Alguns exemplos são Craig (2005), Kurfess (2004) e Corke (2005).

Conforme já comentado, a estrutura cinemática de um manipulador serial pode ser sucintamente descrita em termos dos parâmetros de Denavit e Hartenberg (1955). Dentro do toolbox, a cinemática de manipuladores é representada de uma forma geral por uma matriz DH (Denavit e Hartenberg) que é dada como primeiro argumento na declaração de um manipulador. A matriz DH descreve a cinemática de um manipulador utilizando as convenções padrão de Denavit-Hartenberg (1955), onde cada linha representa um elo do manipulador e as colunas são atribuídas de acordo com a Tabela 2:

Tabela 2 - Parâmetros para inserção de um manipulador.

Coluna _i	Símbolo	Descrição
1	α_i (rad)	Ângulo de torção da junta
2	a_i (m)	Distância de offset do elo
3	θ_i (rad)	Ângulo de rotação da junta
4	d_i (m)	Comprimento do elo
5	σ_i	Tipo de junta (opcional): 0 para rotacional e diferente de 0 para prismática

Quando não especificado o tipo de junta na Tabela 2, é admitida uma junta rotacional.

Conforme descrito em Corke (2015), a função link, mostrada na Equação (2.10), é utilizada para declarar um elo da seguinte maneira:

$$L = \text{link}([\theta_i d_i a_i \alpha_i], \sigma_i) \quad (2.10)$$

Um manipulador genérico ROBOT, com n elos, pode ser definido através da função seriallink, conforme sintaxe mostrada na Equação (2.11).

$$\text{ROBOT} = \text{seriallink}([\text{link1 link2 ... linkn}]) \quad (2.11)$$

Diversas funções podem ser utilizadas sobre um elemento do tipo seriallink. A Tabela 3 descreve algumas das funções mais úteis em simulações de manipuladores seriais. Os modelos de alguns manipuladores comuns estão inclusos no Robotics Toolbox, como o PUMA 560 e o Stanford. Esses modelos são bastante completos, com os parâmetros baseados nos manipuladores reais.

O pacote de simulação também inclui alguns blocos para utilização no Simulink, esses blocos podem ser utilizados em simulações da dinâmica dos manipuladores e também para simulações de estratégias de controle. Além disso, o toolbox possui diversas funções implementadas em forma de S-functions (systems functions), que são funções escritas em linguagem de programação e podem ser utilizadas tanto no ambiente Matlab como no

ambiente Simulink. No Simulink, a utilização de S-functions se dá através de blocos, para os quais os parâmetros são os argumentos das funções. Algumas funções utilizadas através dessa metodologia são descritas na seção 3.5.

Tabela 3 - Funções do Robotics Toolbox.

Função	Descrição
fkine	Calcula a cinemática direta
ikine	Calcula a cinemática inversa
jacob0	Calcula o jacobiano no sistema de coordenadas da base
jacobn	Calcula o jacobiano no sistema de coordenadas do efetuador
plot	Mostra a representação gráfica do robô
accel	Calcula a dinâmica direta
rne	Calcula a dinâmica inversa
ctrj	Calcula uma trajetória no plano cartesiano
jtraj	Calcula uma trajetória no espaço das juntas

3. Desenvolvimento

O Robotics toolbox permite simular a cinemática direta e inversa de manipuladores, assim como a dinâmica direta e inversa. Para utilizar esses recursos é necessário conhecimento dos parâmetros do manipulador. Para simular a dinâmica são necessários parâmetros extras, como por exemplo, a massa e o momento de inércia dos elos. Apesar de todos os recursos, o toolbox não considera a dinâmica dos atuadores, ou seja, não é levada em conta a dinâmica associada à geração dos torques. Desse modo, a seguir é elaborado um modelo para a dinâmica direta de um manipulador hidráulico, o qual inclui a dinâmica dos atuadores.

A seguir será obtido um modelo não linear de 4ª ordem para um atuador hidráulico acionado por uma válvula tipo carretel de 4 vias e centro crítico. Em seguida, é obtido um modelo linearizado a fim de comparar os resultados obtidos com o modelo não linear. A modelagem é baseada na bibliografia citada e seu desenvolvimento detalhado se encontra nos apêndices 4, 5 e 6.

O modelo dinâmico do manipulador é obtido na bibliografia citada (Lewis, 2003; Craig, 2005 e Spong et al., 2006). Esse modelo é utilizado como base para a obtenção do modelo completo, que inclui a dinâmica dos atuadores. A inclusão da dinâmica dos atuadores hidráulicos é realizada através da matriz Jacobiana dos atuadores. Sua obtenção é descrita em função das relações geométricas entre os atuadores e as juntas.

A implementação dos modelos é realizada no ambiente Simulink. Além dos blocos nativos do Simulink são utilizados blocos do Robotics Toolbox, os quais são utilizados no cálculo da dinâmica direta do manipulador, e, cada vez que são executados, utilizam S-functions do Matlab para calcular parâmetros dos modelos de manipuladores utilizados.

O manipulador utilizado nas simulações corresponde ao braço do PUMA 560. Os parâmetros que o descrevem estão presentes no toolbox e também nas bibliografias descritas. Já os parâmetros utilizados para o sistema hidráulico são obtidos diretamente em bibliografias a respeito (Dos Santos et al., 2002; Valdiero, 2005).

3.1. Modelo dinâmico de um atuador hidráulico

A Figura 3.1 mostra um atuador hidráulico diferencial, acionado por uma válvula proporcional do tipo carretel de 4 vias e centro crítico. A modelagem desse sistema consiste em descrever o deslocamento y , a velocidade \dot{y} e a aceleração \ddot{y} da haste do cilindro em função do deslocamento xv do carretel da válvula.

As equações (3.1) e (3.2) (Bu e Yao, 2001; Dos Santos et al., 2002; Valdiero, 2005; Mohanty e Yao, 2007) relacionam as vazões nos orifícios da válvula com o deslocamento do carretel.

$$Q_a = k_{sa} g_1(p_a, \text{sgn}(xv)) xv \quad (3.1)$$

$$Q_b = k_{sb} g_2(p_b, \text{sgn}(xv)) xv \quad (3.2)$$

onde Q_a e Q_b são as vazões pelos orifícios de controle da válvula, k_{sa} e k_{sb} são constantes hidráulicas da válvula p_a e p_b são as pressões nas câmaras do cilindro. As funções g_1 e g_2 são dadas pelas equações (3.3) e (3.4).

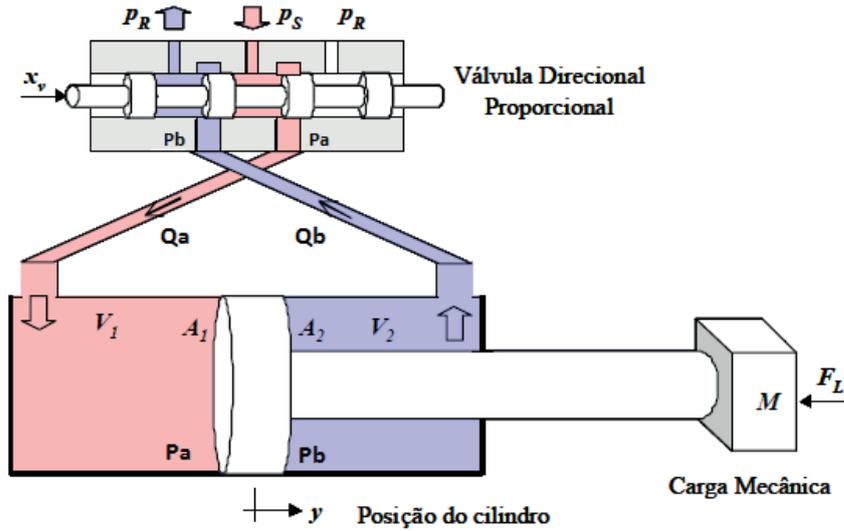


Figura 3.1 - Atuador hidráulico com válvula direcional proporcional (Dos Santos et al., 2002).

$$g_1(p_a, \text{sign}(xv)) = \begin{cases} \sqrt{|p_s - p_a|}, & xv \geq 0 \\ \sqrt{|p_a - p_r|}, & xv < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$g_2(p_b, \text{sign}(xv)) = \begin{cases} \sqrt{|p_b - p_r|}, & xv \geq 0 \\ \sqrt{|p_s - p_b|}, & xv < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

onde p_s e p_r são as pressões de suprimento e de retorno do sistema, em aplicações comuns $p_s \gg p_r$.

Aplicando a Equação da continuidade nas câmaras do cilindro, segundo Valdiero (2001) e De Negri (2001), obtêm-se as expressões para as variações das pressões nas câmaras cilindro, dadas pelas equações (3.5) e (3.6),

$$\frac{dp_a}{dt} = f_1(y)(Q_a(xv, p_a) - A_1\dot{y}), \quad (3.5)$$

$$\frac{dp_b}{dt} = f_2(y)(Q_b(xv, p_b) + A_2\dot{y}), \quad (3.6)$$

onde A_1 e A_2 são as áreas do êmbolo do cilindro e as funções $f_1(y)$ e $f_2(y)$ são dadas pelas equações (3.7) e (3.8),

$$f_1(y) = \frac{\beta}{V_1(y)} = \frac{\beta}{V_{10} + A_1y}, \quad (3.7)$$

$$f_2(y) = \frac{\beta}{V_2(y)} = \frac{\beta}{V_{20} - A_2y}, \quad (3.8)$$

sendo β o módulo de elasticidade do fluido. Os volumes das câmaras do cilindro $V_1(y)$ e $V_2(y)$ podem ser expressos em função das áreas e do deslocamento do êmbolo, assim como uma parcela constante que inclui o volume inicial considerando as tubulações, V_{10} para a câmara 1 e V_{20} para a câmara 2.

Aplicando-se a Equação do movimento à haste do cilindro, considerando como entrada a força gerada pela diferença de pressões nas câmaras $F_H = p_a A_1 - p_b A_2$, considerando um atiro viscoso entre o êmbolo e a camisa dado por um fator B , e uma força externa F_L agindo externamente, obtém-se a Equação (3.9),

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + F_L = p_a A_1 - p_b A_2 = F_H, \quad (3.9)$$

Quando a válvula utilizada possui uma frequência natural muito maior que a do sistema do cilindro e o sistema mecânico acoplado a ele, significa que a sua dinâmica é muito rápida. Segundo Valdiero (2005), nesse caso pode-se desprezar as equações da dinâmica da válvula, reescrevendo as equações (3.1) e (3.2) em função do sinal de entrada u . Nesse caso, os coeficientes hidráulicos da válvula k_{sa} e k_{sb} são substituídos pelos coeficientes K_a e K_b , que incluem um ganho de tensão.

O modelo de 4ª ordem não linear para o cilindro hidráulico é dado pelas equações (3.10), (3.11) e (3.12), sendo que, esse modelo não inclui a dinâmica da válvula.

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} (A_1 p_a - A_2 p_b - B\dot{y} - F_L), \quad (3.10)$$

$$\dot{p}_a = f_1(y) k_a g_1(p_a, \text{sgn}(u)) u - A_1 \dot{y}, \quad (3.11)$$

$$\dot{p}_b = -f_2(y) k_b g_2(p_b, \text{sgn}(u)) u + A_2 \dot{y}. \quad (3.12)$$

3.2. Modelo dinâmico linear de um atuador hidráulico

As equações (3.1) e (3.2) apresentam uma relação não linear entre a vazão dos orifícios de controle e o deslocamento do carretel e as pressões nas câmaras. Segundo Merritt (1967), pode-se obter uma relação linear para a vazão em torno de um ponto de operação $Q_L = Q_{L1}$. Utilizando uma série de Taylor tem-se,

$$Q_L = Q_{L1} + \left. \frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \right|_1 (x_v - x_v|_1) + \left. \frac{\partial Q_L}{\partial P_L} \right|_1 (P_L - P_L|_1) + \dots \quad (3.13)$$

Assumindo que os demais termos da série de Taylor podem ser negligenciados e considerando o ponto de operação próximo de zero, tem-se $x_v|_1 = 0$ e $P_L|_1 = 0$. Assim, pode ser escrita a Equação (3.14), que relaciona a vazão ΔQ_L com a pressão na câmara do cilindro e o deslocamento do carretel.

$$\Delta Q_L = \left. \frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \right|_1 x_v + \left. \frac{\partial Q_L}{\partial P_L} \right|_1 P_L \quad (3.14)$$

Merritt (1967) classifica os coeficientes K_Q (ganho de vazão) e K_C (ganho de vazão-pressão) dados pelas equações (3.15) e (3.16), respectivamente, como os parâmetros mais importantes de uma válvula.

$$K_Q = \left. \frac{\partial Q_L}{\partial x_v} \right|_1 \quad (3.15)$$

$$K_C = - \left. \frac{\partial Q_L}{\partial P_L} \right|_1 \quad (3.16)$$

Utilizando essa metodologia de linearização, podem ser obtidas as equações para as vazões nos orifícios da válvula da seguinte maneira:

$$Q_a = k_{q1}x_v - K_{C1}p_a, \quad (3.17)$$

$$Q_b = -k_{q2}x_v - K_{C2}p_b. \quad (3.18)$$

Utilizando as equações (3.17) e (3.18) para descrever as vazões e considerando pequenos deslocamentos em torno do ponto de operação $y \approx 0$, chega-se ao modelo linear de 4ª ordem descrito pelas equações (3.19), (3.20) e (3.21).

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} (A_1 p_a - A_2 p_b - B \dot{y} - F_L), \quad (3.19)$$

$$\dot{p}_a = \frac{\beta}{V_{10}} (k_{qu1} u - K_{C1} p_a - A_1 \dot{y}), \quad (3.20)$$

$$\dot{p}_b = \frac{\beta}{V_{20}} (-k_{qu2} u - K_{C2} p_b + A_2 \dot{y}), \quad (3.21)$$

onde os ganhos de vazão da válvula k_{qu1} e k_{qu2} incluem um ganho de tensão, uma vez que a entrada é considerada diretamente como um sinal de controle diferentemente dos parâmetros k_{q1} e k_{q2} , que relacionavam a vazão da válvula com o deslocamento do carretel.

3.3. Modelo dinâmico do manipulador com atuadores

O modelo do manipulador robótico dado pela Equação (2.7) foi desenvolvido no espaço das juntas, tendo como entrada um vetor de torques e como saídas o vetor dos deslocamentos angulares \mathbf{q} , das velocidades angulares $\dot{\mathbf{q}}$ e das acelerações das juntas $\ddot{\mathbf{q}}$. Por outro lado, os modelos de atuadores hidráulicos, desenvolvidos nas seções 3.1 e 3.2, relacionam o sinal de entrada com as variáveis lineares \mathbf{y} , $\dot{\mathbf{y}}$ e $\ddot{\mathbf{y}}$, que representam o vetor dos deslocamentos, velocidades e acelerações das hastes dos cilindros. Considerando atuadores hidráulicos do tipo pinhão cremalheira, como o mostrado na Figura 3.2, o deslocamento angular das juntas pode ser relacionado com o deslocamento linear do êmbolo, através de uma constante \bar{R}_i , que depende do raio do pinhão i , como pode ser visualizado na Equação (3.22):

$$y_i = \bar{R}_i q_i, \quad (3.22)$$

onde y_i é o deslocamento linear da haste do atuador i na direção da haste do manipulador, e q_i é o deslocamento angular da junta i . Tomando a derivada parcial em relação a q_i em (3.22), pode ser obtida a Equação (3.23),

$$\frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \bar{R}_i, \quad (3.23)$$

que relaciona a velocidade angular da junta e a velocidade linear do atuador. Desse modo, para um manipulador com n juntas, a matriz dada pela Equação (3.24) relaciona as velocidades angulares das n juntas com as velocidades lineares dos n atuadores. Valdiero (2005) define essa matriz como matriz Jacobiana do atuador.

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{R}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{R}_n \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

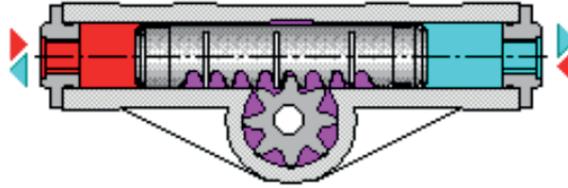


Figura 3.2 - Cilindro hidráulico tipo pinhão cremalheira (Alves, 2015).

A partir das equações (3.23) e (3.24), os vetores de velocidades e acelerações dos atuadores podem ser escritos em relação às velocidades e acelerações das juntas no espaço das juntas, conforme as equações (3.25) e (3.26),

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.25)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{R}}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{R}}}\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.26)$$

onde $\dot{\mathbf{y}}$ e $\ddot{\mathbf{y}}$ são vetores com as velocidades e acelerações, respectivamente, dos atuadores lineares, $\dot{\mathbf{q}}$ e $\ddot{\mathbf{q}}$ são vetores com as velocidades e acelerações, respectivamente, no espaço das juntas, $\bar{\mathbf{R}}$ é a matriz Jacobiana dos atuadores, dada por (3.24). Para o caso em que as relações dadas por $\bar{\mathbf{R}}$ são constantes, o segundo termo da soma na Equação (3.26) é nulo.

A Equação (3.27) descreve a relação entre o torque de acionamento das juntas $\boldsymbol{\tau}$ e a força de carga nos atuadores lineares \mathbf{F}_L , de forma matricial, conforme a Equação (3.27),

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}_L. \quad (3.27)$$

A partir da Equação (3.9), a força de carga \mathbf{F}_L pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{p}_a \mathbf{A}_1 - \mathbf{p}_b \mathbf{A}_2 - \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} \quad (3.28)$$

e, a partir das equações (3.27) e (3.28), o vetor de torques $\boldsymbol{\tau}$ pode ser descrito através da Equação matricial (3.29),

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{R}}^T [\mathbf{p}_a \mathbf{A}_1 - \mathbf{p}_b \mathbf{A}_2] - \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}}, \quad (3.29)$$

onde, \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b são vetores com as pressões nas respectivas câmaras 1 e 2 de cada atuador, \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 são as áreas dos êmbolos nas respectivas câmaras 1 e 2 de cada cilindro, \mathbf{M} é uma matriz diagonal representando as massas deslocadas por cada atuador e \mathbf{B} é uma matriz diagonal com os coeficientes de atrito viscoso de cada atuador.

Substituindo as equações (3.25) e (3.26) em (3.29) tem-se,

$$\boldsymbol{\tau} = \bar{\mathbf{R}}^T [\mathbf{p}_a \mathbf{A}_1 - \mathbf{p}_b \mathbf{A}_2] - [\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{R}}] \ddot{\mathbf{q}} - [\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{R}}] \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.30)$$

que relaciona o torque de acionamento das juntas $\boldsymbol{\tau}$ com o modelo dinâmico dos manipuladores. Desse modo, pode ser obtido um modelo dinâmico para a parte mecânica

do sistema (atuadores + manipuladores). Substituindo a Equação (3.30) na Equação (2.7), obtém-se,

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{R}}^T[\mathbf{p}_a\mathbf{A}_1 - \mathbf{p}_b\mathbf{A}_2] - [\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{R}}]\ddot{\mathbf{q}} - [\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{B}\bar{\mathbf{R}}]\dot{\mathbf{q}} \quad (3.31)$$

e, reescrevendo (3.31), chega-se a Equação (3.32).

$$[\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{R}}]\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\dot{\mathbf{q}} + [\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{B}\bar{\mathbf{R}}]\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{R}}^T[\mathbf{p}_a\mathbf{A}_1 - \mathbf{p}_b\mathbf{A}_2] \quad (3.32)$$

Definindo $\mathbf{H}^* = [\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{M}\bar{\mathbf{R}}]$, $\mathbf{D}^* = [\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{B}\bar{\mathbf{R}}]$ e $\mathbf{F}_H = \mathbf{p}_a\mathbf{A}_1 - \mathbf{p}_b\mathbf{A}_2$, (3.32) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}^*\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{F}_H \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{H}^*(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ resulta em um vetor de torques inerciais nas juntas incluindo a parcela de inércia dos atuadores, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ resulta em um vetor de torques oriundos das forças centrífugas e de Coriolis atuando nos elos do manipulador, $\mathbf{D}^*\dot{\mathbf{q}}$ representa o torque gerado pelo atrito viscoso nos atuadores e $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ representa o torque gerado pelo efeito da gravidade nos elos do manipulador.

Explicitando a aceleração das juntas $\ddot{\mathbf{q}}$ na Equação (3.33), tem-se:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^*(\mathbf{q})^{-1}[\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{F}_H - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}^*\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})]. \quad (3.34)$$

A Equação matricial (3.34) pode ser utilizada para simular o manipulador robótico acionado por cilindros hidráulicos. Esse modelo corresponde ao subsistema mecânico do manipulador, tendo como entrada o vetor de forças hidráulicas \mathbf{F}_H provenientes de atuadores hidráulicos.

As equações (3.35), (3.36) e (3.37) formam o modelo para o subsistema hidráulico. Considerando o modelo não linear de um atuador hidráulico, para cada atuador i :

$$\dot{p}_{ai} = f_{1i}(y_i)k_{ai}g_{1i}(p_{ai}, \text{sgn}(u_i))u_i - A_{1i}\dot{y}_i, \quad (3.35)$$

$$\dot{p}_{bi} = -f_{2i}(y_i)k_{bi}g_{2i}(p_{bi}, \text{sgn}(u_i))u_i + A_{2i}\dot{y}_i, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{F}_{Hi} = p_{ai}\mathbf{A}_{1i} - p_{bi}\mathbf{A}_{2i}, \quad (3.37)$$

onde, \mathbf{F}_{Hi} é a força hidráulica resultante da diferença de pressões nas câmaras do cilindro i , p_{ai} e p_{bi} são as pressões nas câmaras a e b respectivamente do cilindro i , \dot{p}_{ai} e \dot{p}_{bi} são as derivadas temporais dessas pressões, k_{ai} e k_{bi} são as constantes hidráulicas de vazão para as câmaras a e b respectivamente da válvula que comanda o cilindro i , u_i é o sinal de controle da válvula que comanda o cilindro i , y_i e \dot{y}_i são respectivamente o deslocamento e velocidade da haste do cilindro i , A_{1i} e A_{2i} são as áreas do embolo do cilindro i , f_{1i} e f_{2i} são as equações (3.7) e (3.8) aplicadas ao cilindro i e g_{1i} e g_{2i} são as equações (3.3) e (3.4) aplicadas ao cilindro i .

Considerando o modelo linear para os atuadores, tem-se o subsistema hidráulico linearizado, dado pelas equações (3.38), (3.39) e (3.40).

$$\dot{p}_{ai} = \frac{\beta}{V_{10i}}(k_{qu1i}u_i - K_{C1i}p_{ai} - A_{1i}\dot{y}_i), \quad (3.38)$$

$$\dot{p}_{bi} = \frac{\beta}{V_{20i}} (-k_{qu2i}u_i - K_{C2i}p_{bi} + A_{2i}\dot{y}_1), \quad (3.39)$$

$$F_{Hi} = p_{ai}A_{1i} - p_{bi}A_{2i}, \quad (3.40)$$

onde, V_{10i} e V_{20i} são os volumes iniciais das respectivas câmaras 1 e 2 do cilindro i , k_{qu1i} e k_{qu2i} são os ganhos de vazão da válvula que comanda o cilindro i , K_{C1i} e K_{C2i} são os ganhos de vazão-pressão da válvula que comanda o cilindro i e β é o módulo de elasticidade volumétrica para o fluido.

Os modelos matemáticos não lineares para manipuladores robóticos com juntas de revolução acionadas por atuadores hidráulicos são compostos por equações matriciais, que representam os n graus de liberdade do manipulador. Esses modelos são genéricos e, para cada caso específico, é preciso obter $\mathbf{H}^*(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, \mathbf{D}^* , e $\mathbf{G}(\mathbf{q})$, as quais dependem da estrutura do manipulador em questão e dos parâmetros referentes aos atuadores além da matriz $\bar{\mathbf{R}}$, que relaciona o sistema de coordenadas das juntas e com o espaço cartesiano.

3.4. Parâmetros do sistema

A partir dos dois subsistemas obtidos (hidráulico e mecânico), é possível simular a dinâmica do manipulador com atuadores hidráulicos. Para tanto, é necessário fornecer os valores dos parâmetros referentes aos cilindros hidráulicos e ao manipulador.

3.4.1. Parâmetros do manipulador

O subsistema mecânico dado pela Equação (3.34) corresponde a um manipulador genérico. No presente trabalho, optou-se por utilizar o manipulador PUMA 560. Estudos sobre o manipulador PUMA 560 podem ser encontrados nos trabalhos de Armstrong et al. (1986) e Corke (1994, 1995, 2015), trabalhos dos quais foram retirados os parâmetros utilizados no presente trabalho para representar o manipulador.

O manipulador PUMA 560, mostrado na Figura 3.3, possui 6 graus de liberdade associados as 6 juntas rotacionais, onde 3 graus de liberdade são referentes ao braço do manipulador, responsável pelo posicionamento do efetuador, os outros 3 graus de liberdade são referentes ao punho, que é responsável pela orientação do efetuador. No presente trabalho, por simplificação, optou-se por utilizar um modelo correspondente ao braço do PUMA 560, ou seja, um modelo com 3 graus de liberdade. Essa escolha se justifica, uma vez que Armstrong et al. (1986) verificaram que os torques nos atuadores do punho são até 5 vezes menores que os torques nos atuadores do braço. Desse modo, a diferença entre a resposta do modelo sem a dinâmica dos atuadores e com a dinâmica dos atuadores deve apresentar maiores diferenças nas três primeiras juntas.

A Inserção do modelo de manipulador no ambiente de simulação é realizada através do Robotics Toolbox. No Apêndice 1 pode ser verificado o código (mdl_560), o qual quando, executado gera o modelo de um manipulador com os parâmetros inseridos. Esse modelo, por sua vez, é utilizado nas simulações. Os parâmetros utilizados podem ser visualizados nas tabelas A1 e A2 de Apêndice 1.

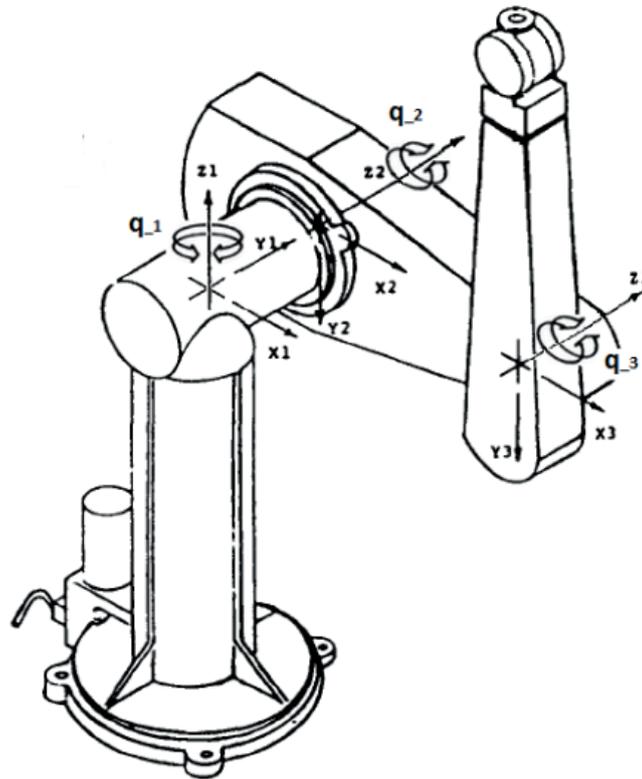


Figura 3.3 - Manipulador PUMA 560 (Corke, 1994).

3.4.2. Parâmetros dos sistemas hidráulicos

Os sistemas hidráulicos descritos nas seções 3.1 e 3.2 são compostos por cilindros e válvulas de controle, cujos modelos matemáticos apresentam dependência de diversos parâmetros. De fato, os modelos apresentados consideram um cilindro diferencial e uma válvula diferencial. Desse modo, o número de parâmetros aumenta significativamente. Em contrapartida, os modelos são genéricos e, no caso de uma simulação com cilindros e/ou válvulas simétricas, basta utilizar valores repetidos para os parâmetros.

Parâmetros de cilindros hidráulicos e válvulas de controle, em geral podem ser obtidos experimentalmente, em catálogos de fabricantes ou em bibliografias acerca do assunto. No presente trabalho, optou-se por buscar esses parâmetros em referências bibliográficas. Como, por exemplo, o trabalho descrito por Valdiero (2005) sobre um manipulador robótico acionado por cilindros hidráulicos. Além disso, são descritos com detalhes os métodos utilizados para obter os parâmetros, o que os torna mais confiáveis.

Em seu trabalho, Valdiero (2005) realiza ensaios segundo a norma ISO10770-1 (1998) para obter os parâmetros da válvula. O ganho de vazão K_{qu} é obtido a partir da curva da vazão versus tensão da válvula. O coeficiente de vazão K_{su} foi isolado na Equação da vazão não linear e, através de ensaios, mediram-se as pressões de suprimento e de carga, a vazão de controle e o sinal de controle. Com base nesses valores foi calculado K_{su} . Enquanto que K_{pu} é obtido através de ensaio da válvula com portas de controle bloqueadas e o ganho de vazão-pressão K_c é obtido a partir de K_{qu} e K_{pu} . Os parâmetros dos cilindros foram calculados a partir do catálogo do fabricante, exceto o coeficiente de atrito viscoso B , que foi obtido experimentalmente.

No apêndice A2 pode ser visualizada a Tabela A3, onde se encontram os parâmetros utilizados para os componentes hidráulicos. Pode ainda, ser encontrado o script executado em Matlab para declarar os parâmetros. Foram utilizados parâmetros idênticos para os 3 cilindros que acionam as juntas. Essa escolha sugere que os cilindros têm capacidade de gerar as mesmas forças nas três juntas, enquanto que os torques gerados nas juntas dependem dos parâmetros da matriz $\bar{\mathbf{R}}^T$.

3.4.3. Relação de transmissão

A escolha da matriz $\bar{\mathbf{R}}^T$ se deu através dos torques máximos de cada atuador, dados por Armstrong et al. (1986) para o atuador PUMA 560, que podem ser verificados na Tabela 3.1, e das forças geradas pelos atuadores hidráulicos. Em função da pressão de suprimento P_s e das áreas do embolo A_1 e A_2 , no caso mais crítico, o recuo de um cilindro diferencial, a força de recuo é dada por $F_{rec} = P_s A_2$, e no caso de avanço do cilindro, a força de avanço $F_{av} = P_s A_1$. Desse modo, considerando o caso mais crítico, a força $F_{rec,i}$ pode ser utilizada como parâmetro para determinar as relações de transmissão entre um atuador i e a junta i do manipulador,

$$F_{\max,i} = F_{rec,i} \quad (3.41)$$

Tabela 4 - Torques máximos nos atuadores do robô PUMA 560.

Atuador	1	2	3
$\tau_{\max}(\text{Nm})$	97,60	186,40	89,40

A partir de 3.27, tem-se

$$\begin{bmatrix} \tau_{\max 1} \\ \tau_{\max 2} \\ \tau_{\max 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\max 1} \\ F_{\max 2} \\ F_{\max 3} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde, $\tau_{\max 1}$, $\tau_{\max 2}$ e $\tau_{\max 3}$ são dados pela Tabela 3, $F_{\max 1}$, $F_{\max 2}$ e $F_{\max 3}$ são as forças calculadas pela Equação (3.41) para os cilindros 1, 2 e 3, respectivamente, e R_1 , R_2 e R_3 são as relações de transmissão para as juntas 1, 2 e 3, respectivamente.

Assim, pode ser definida a matriz de relação de transmissão,

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

onde. $R_1 = \frac{\tau_{\max 1}}{F_{\max 1}}$, $R_2 = \frac{\tau_{\max 2}}{F_{\max 2}}$ e $R_3 = \frac{\tau_{\max 3}}{F_{\max 3}}$.

Considerando os cilindros simétricos, com a área do êmbolo de $7,6576 \times 10^{-4} \text{m}^2$ e uma pressão de suprimento de $100 \times 10^5 \text{Pa}$, podem ser obtidos os valores para os parâmetros $R_1 = 0,0127 \text{m}$, $R_2 = 0,0243 \text{m}$ e $R_3 = 0,0116 \text{m}$. Esses valores representam os raios dos pinhões utilizados nas transmissões. Durante as simulações, verificou-se que a relação deveria ser um pouco maior. O motivo é que a inércia dos três cilindros foi inserida no modelo do manipulador, aumentando consideravelmente a inércia total do sistema.

3.5. Simulação: Robotics Toolbox + MATLAB/Simulink

Uma vez inserido um modelo de manipulador, através dos seus parâmetros, conforme citado em 3.4.1, e inseridos os parâmetros dos atuadores hidráulicos utilizados, conforme 3.4.2, assim como definidas as relações de transmissão entre as juntas e os atuadores, tem-se todos os parâmetros necessários para simular a dinâmica do conjunto. A Figura 3.5 mostra o fluxo de operações utilizadas nas simulações do modelo dinâmico. Como pode ser verificado nessa figura, existe um acoplamento entre os subsistemas mecânico e hidráulico, devido a utilização das velocidades das juntas nas equações da vazão, dentro do subsistema hidráulico.

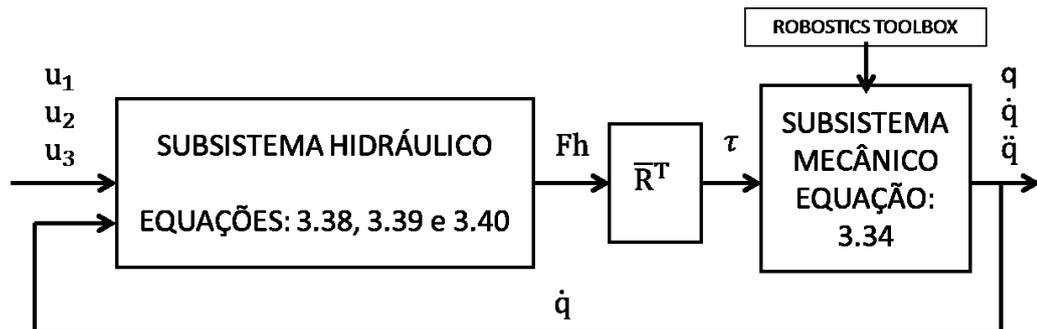


Figura 3.4 - Fluxo de operações utilizadas.

As entradas do subsistema hidráulico são os sinais de entrada das válvulas de controle, enquanto que as forças hidráulicas geradas pela diferença de pressões dos atuadores são multiplicadas pela matriz de relações de transmissão para gerar os torques de entrada para o subsistema mecânico. Segundo a Equação (3.34), o subsistema mecânico do manipulador acionado hidraulicamente é composto por parcelas referentes à dinâmica dos cilindros e parcelas referentes à dinâmica do manipulador. A parcela referente ao manipulador é composta por termos que utilizam as matrizes $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ e $\mathbf{G}(\mathbf{q})$, as quais dependem das próprias variáveis das juntas. Portanto, precisam ser calculadas novamente a cada passo de integração. Para calcular essas matrizes no ambiente Simulink, são utilizadas funções do Robotics Toolbox através do recurso de S-functions. A Tabela 5 descreve as funções utilizadas.

Tabela 5 - Funções do Robotics toolbox utilizadas na simulação dinâmica.

Função	Descrição	Parâmetros
Inertia	Retorna a matriz simétrica de inércia para a posição atual do manipulador	\mathbf{q}
Coriolis	Retorna a matriz dos efeitos centrífugos e de coriólis para a posição e velocidades do manipulador	\mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$
Gravload	Retorna o torque gerado pela gravidade nas juntas do manipulador	\mathbf{q}

A parcela inercial dos atuadores é somada à matriz $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ para formar a matriz $\mathbf{H}^*(\mathbf{q})$, que, posteriormente, precisa ser invertida para o cálculo da aceleração nas juntas. Conforme Equação (3.34), $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{D}^*\dot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ resultam nos torques que devem ser subtraídos dos torques de entrada, gerados pelas forças hidráulicas provenientes dos atuadores. A Figura 3.5 mostra essa sequência de operações.

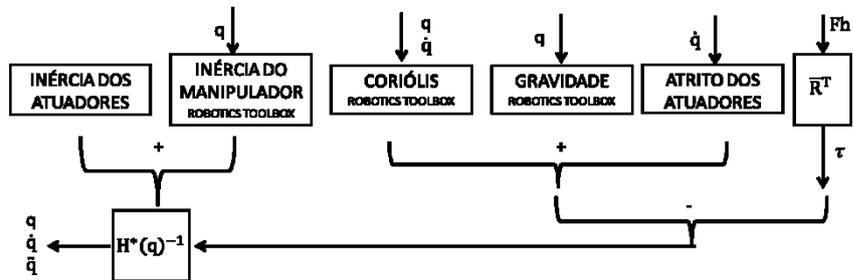


Figura 3.5 – Operações realizadas no subsistema mecânico.

4. Resultados

A seguir são mostrados alguns resultados obtidos através de simulações. Os modelos utilizados são os descritos na Seção 3, sendo que a obtenção dos parâmetros utilizados está descrita na Seção 4. O método de integração utilizado no Simulink é o Dormand-Prince e o passo de integração utilizado foi de 0,001 segundos.

Inicialmente, na Seção 4.1, são mostradas as respostas ao degrau dos modelos não linear e linear, obtidos para um cilindro hidráulico acionado por uma válvula do tipo carretel. Na Seção 4.2, é realizada uma simulação com o sistema em malha aberta, onde são aplicados sinais de controle diretamente nas válvulas.

Na Seção 4.3 é realizada uma comparação entre a resposta do subsistema mecânico modelado, que considera as componentes inerciais e de atrito do manipulador, e a resposta de um modelo do manipulador sem a dinâmica dos atuadores, gerado pelo Robotics toolbox.

Posteriormente, na Seção 4.4 é realizada uma simulação do modelo completo, incluindo o subsistema hidráulico durante a execução de uma trajetória. A resposta desse modelo é novamente comparada com a resposta do modelo sem a dinâmica dos atuadores, gerado pelo Robotics toolbox.

4.1. Modelo linear e modelo não linear do cilindro hidráulico

A Figura 4.1 mostra a resposta ao degrau do modelo não linear de 4ª ordem obtido para o cilindro hidráulico e do modelo linearizado, que utiliza relações lineares para as expressões da vazão e da dinâmica das pressões.

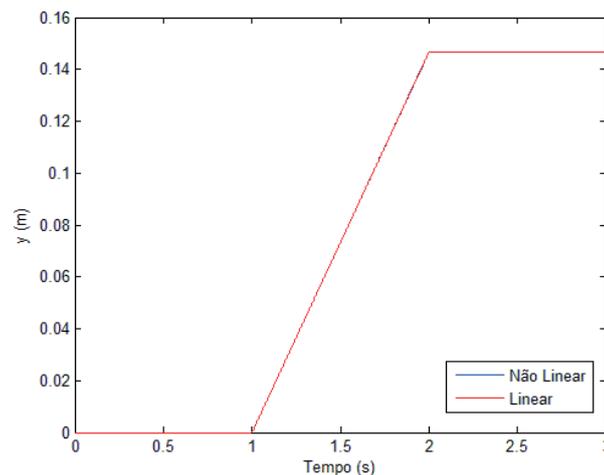


Figura 4.1 - Resposta ao degrau cilindro hidráulico linear x não linear.

Como entrada para a simulação acima, no tempo de 1 segundo foi aplicado um degrau unitário com duração de 1 segundo. As respostas dos dois sistemas são bastante similares, exceto por uma pequena diferença que ocorre quando a entrada retorna ao valor nulo, no instante de 2 segundos. Na Figura 4.2 pode ser verificado que o modelo não linear apresenta uma pequena diferença em regime permanente e as oscilações são sustentadas por mais tempo. Contudo considera-se a resposta de ambos os modelos satisfatória, uma vez que a diferença em regime permanente é muito pequena, e as

oscilações são amortecidas e tendem a desaparecer em regime permanente em ambos os casos.

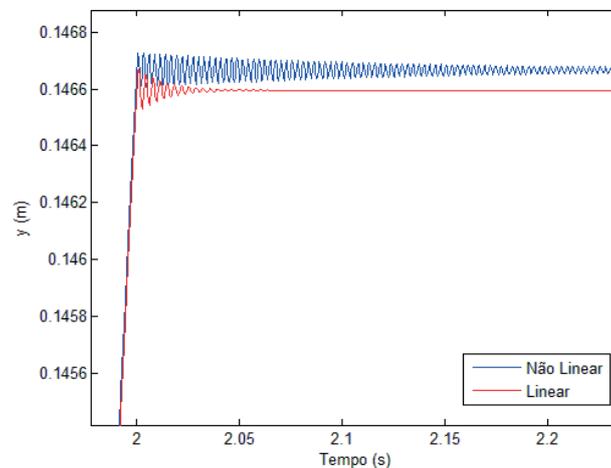


Figura 4.2 - Detalhe resposta ao degrau cilindro hidráulico linear x não linear.

4.2. Modelo completo em malha aberta

Essa simulação é realizada em malha aberta, aplicando uma entrada idêntica nas válvulas dos atuadores 1, 2 e 3, sendo esta um degrau com amplitude de 1V, iniciando no tempo de 1s e cessando em 2s, assim são obtidos os deslocamentos das juntas do manipulador.

Como pode ser visualizado na Figura 4.3, nas juntas 2 e 3, ocorre deslocamento mesmo quando a válvula está fechada. Fisicamente, esse deslocamento não deve ocorrer, porém a equação da vazão linearizada permite que seja gerada uma diferença de pressão nas câmaras mesmo com a válvula fechada, devido à ação gravidade, que age externamente. A junta 1, por outro lado, não sofre ação direta da gravidade.

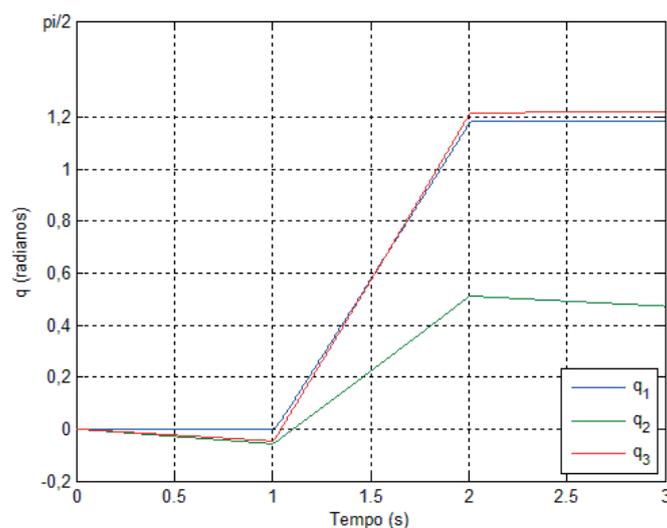


Figura 4.3 - Deslocamento das juntas na simulação do modelo completo.

A Figura 4.4 mostra os torques aplicados nas juntas durante a simulação.

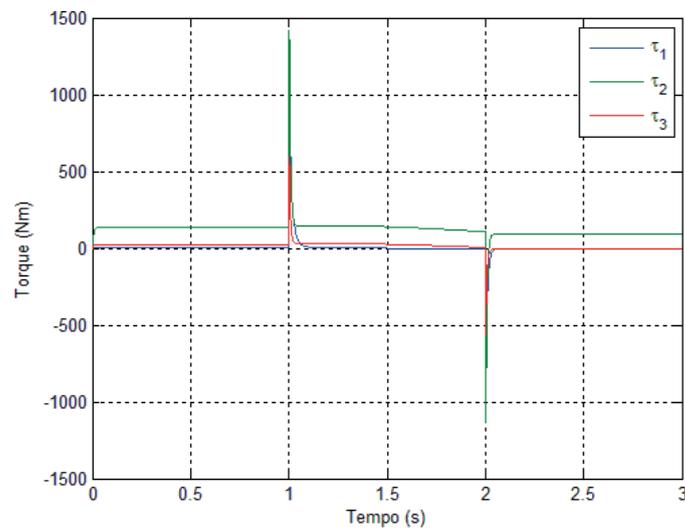


Figura 4.4 - Torques de acionamento das juntas na simulação do modelo completo.

A fim de solucionar o problema causado pela equação da vazão nas juntas sob a ação da gravidade, foi implementado um bloco no Simulink para realizar uma comparação e tornar a vazão nula quando a válvula está fechada, compensando a variação de pressão estabelecida por forças externas. A Figura 4.5 mostra a resposta do sistema alterado, para o mesmo experimento descrito anteriormente.

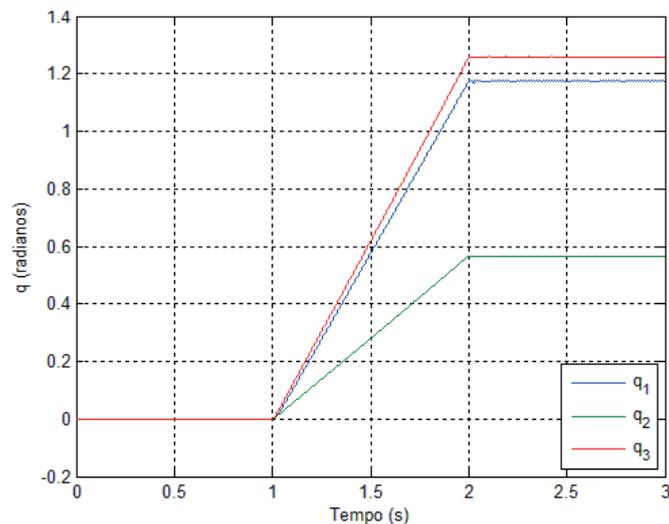


Figura 4.5 - Deslocamento das juntas na simulação do modelo completo e equação da vazão alterada.

A alteração realizada na equação da vazão soluciona o problema mencionado, como pode ser visualizado na Figura 4.5, na qual os deslocamentos são nulos quando as válvulas se encontram fechadas. Cabe salientar que com essa alteração foi adicionada uma não linearidade ao modelo, sendo esta associada ao fechamento e abertura da válvula.

4.3. Subsistema mecânico

Essa simulação é realizada com o auxílio do Robotics Toolbox, que gera uma trajetória a partir da posição inicial, definida como $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0 \ 0]$, até a posição final $\mathbf{q}_f = [\pi/4 \ \pi/2 \ -\pi/2]$. A partir dessa trajetória são calculados os torques a serem aplicados nas juntas, sendo esses torques, calculados também pelo toolbox. Para a mesma trajetória, os torques calculados pela dinâmica inversa são aplicados em dois modelos distintos, a fim de calcular a dinâmica direta. O primeiro modelo, chamado de MIM (Modelo com “imperfeições mecânicas”), considera a contribuição da inércia e do atrito dos atuadores, o segundo modelo, chamado de MIT (Modelo ideal do toolbox), é o modelo do toolbox, que considera a resposta ideal, sem contribuição dos atuadores.

O objetivo aqui é evidenciar a influência da parcela mecânica dos atuadores, presente no modelo MIM, em comparação com o modelo idealizado MIT, na resposta dinâmica do sistema. Desse modo são realizadas simulações utilizando os diagramas de blocos mostrados nas figuras 4.6, para o modelo MIM, e 4.7 para o modelo MIT. Sendo que, em ambas as simulações a trajetória a ser desenvolvida deve ser a igual.

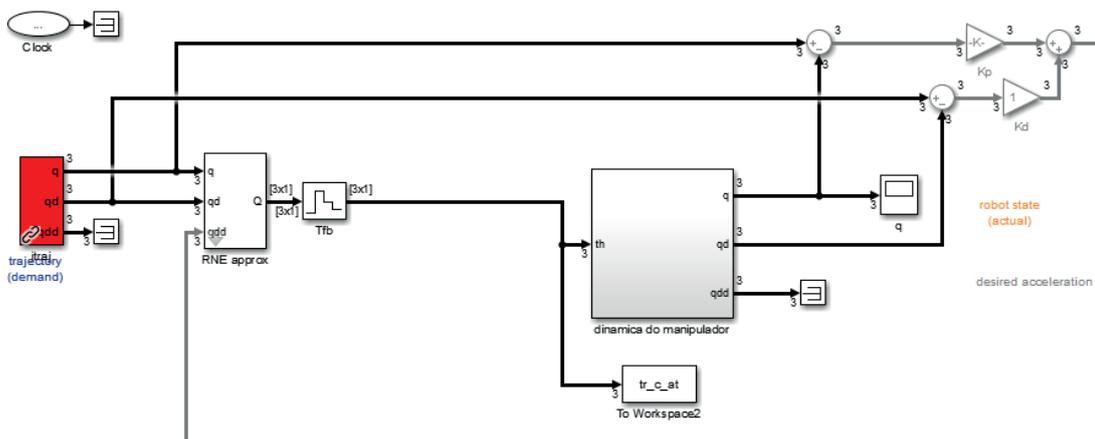


Figura 4.6 - Diagrama de blocos utilizado nas simulações do modelo MIM.

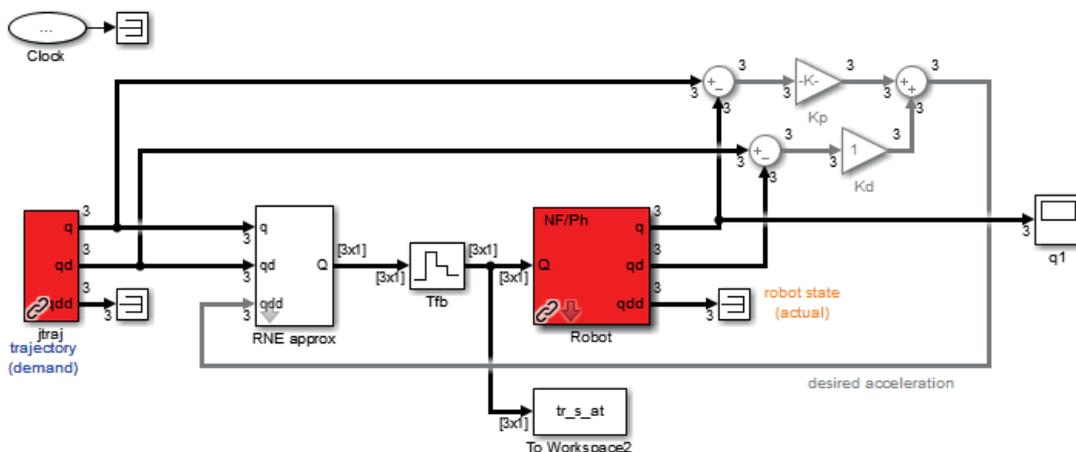
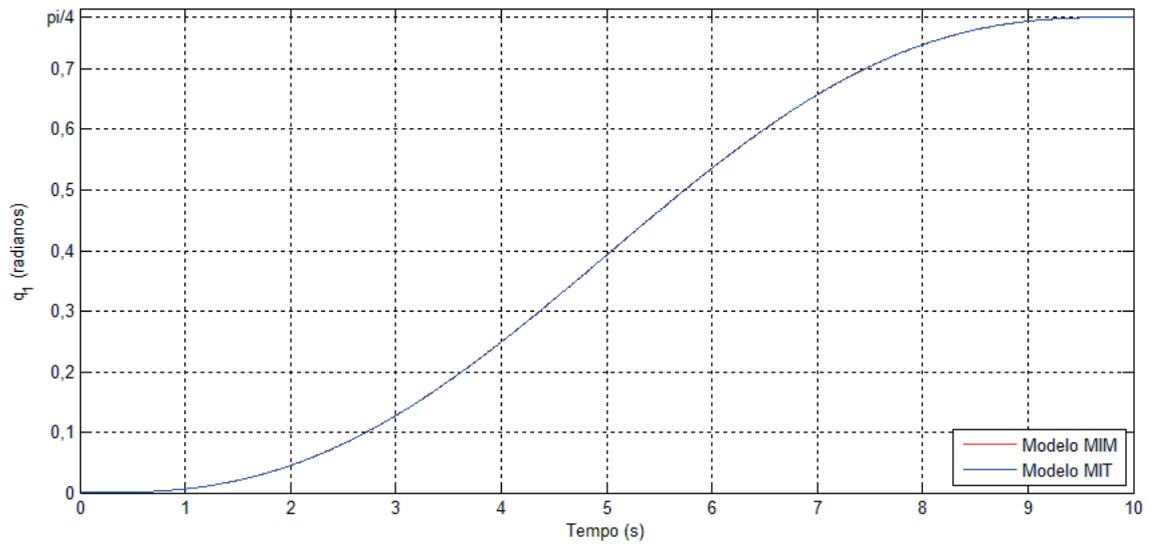
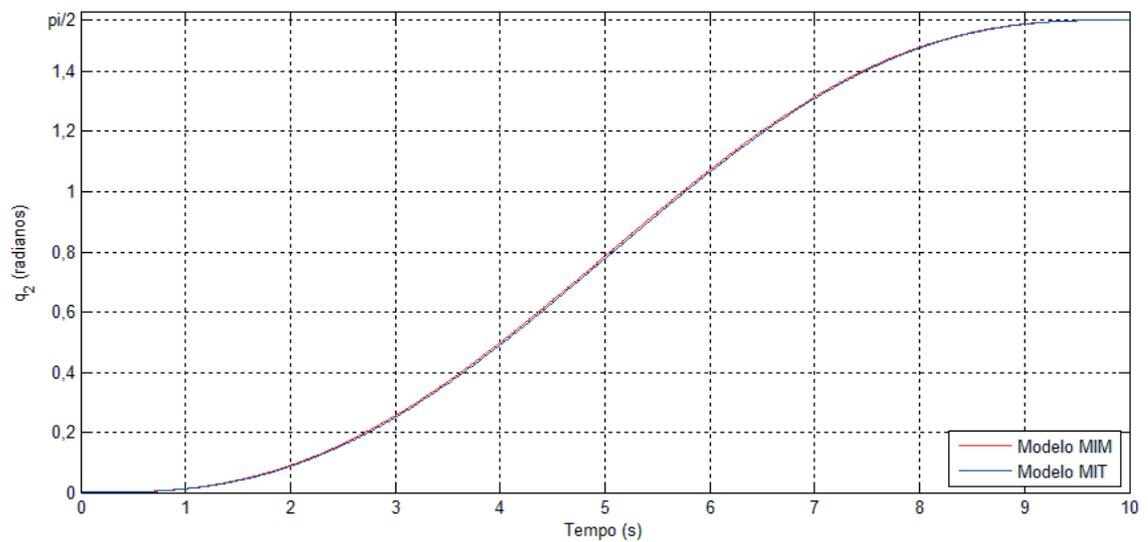
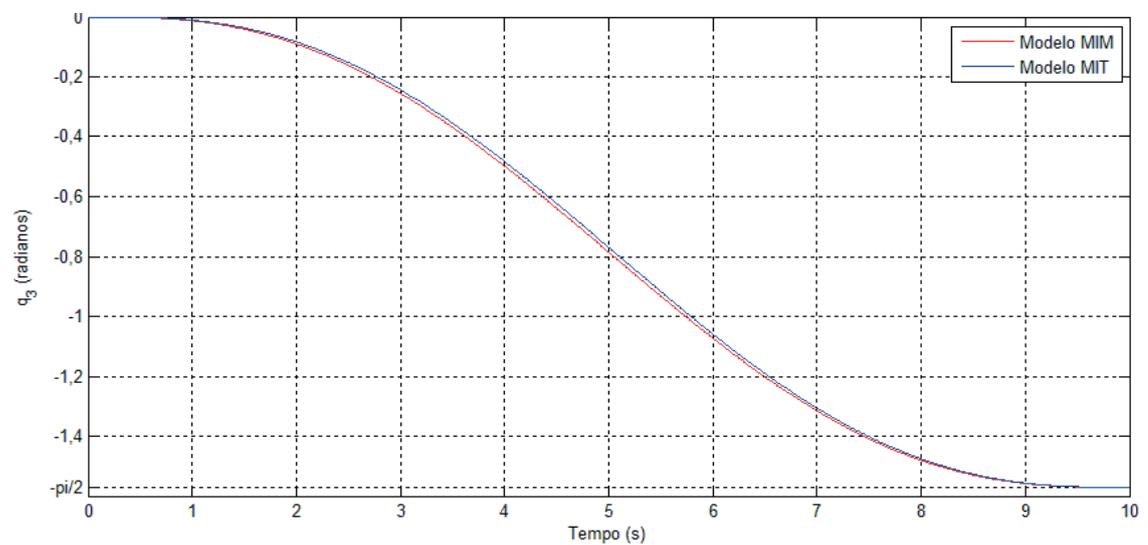


Figura 4.7 - Diagrama de blocos utilizado nas simulações do modelo MIT.

Para a trajetória partindo da posição $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0 \ 0]$ até a posição $\mathbf{q}_f = [\pi/4 \ \pi/2 \ -\pi/2]$, as figuras 4.8, 4.9 e 4.10 mostram os deslocamentos nas juntas q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente, ao longo do tempo em ambos os modelos.

Figura 4.8 - Deslocamentos na junta q_1 (modelos MIM e MIT).Figura 4.9 - Deslocamentos na junta q_2 (modelos MIM e MIT).Figura 4.10 - Deslocamentos na junta q_3 (modelos MIM e MIT).

Nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10 pode ser verificado que os deslocamentos nas juntas seguem as mesmas trajetórias durante os ensaios com os dois modelos. O seguimento de trajetória ocorre devido ao desempenho do controlador implementado pelo Robotics toolbox. Os ganhos desse controlador não foram alterados durante os ensaios.

As figuras 4.11, 4.12 e 4.13 mostram os torques aplicados nas juntas ao longo do tempo durante as simulações. Nessas figuras pode ser verificado que os torques necessários para realizar as trajetórias apresentam valores diferentes nos modelos comparados, porém as trajetórias, descritas nas figuras anteriores, são aproximadamente as mesmas.

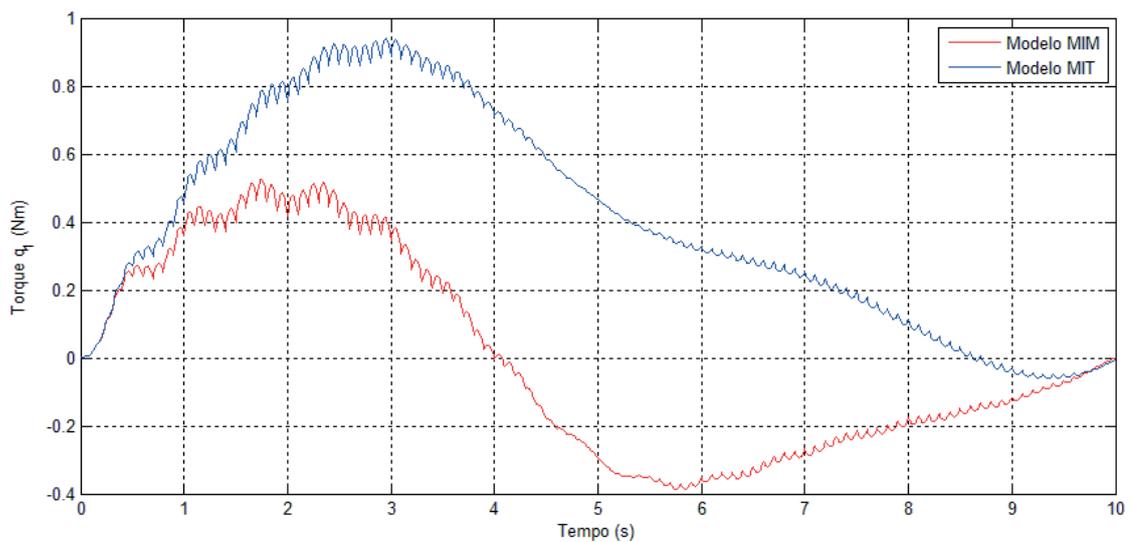


Figura 4.11 - Torques na junta q_1 (modelos MIM e MIT).

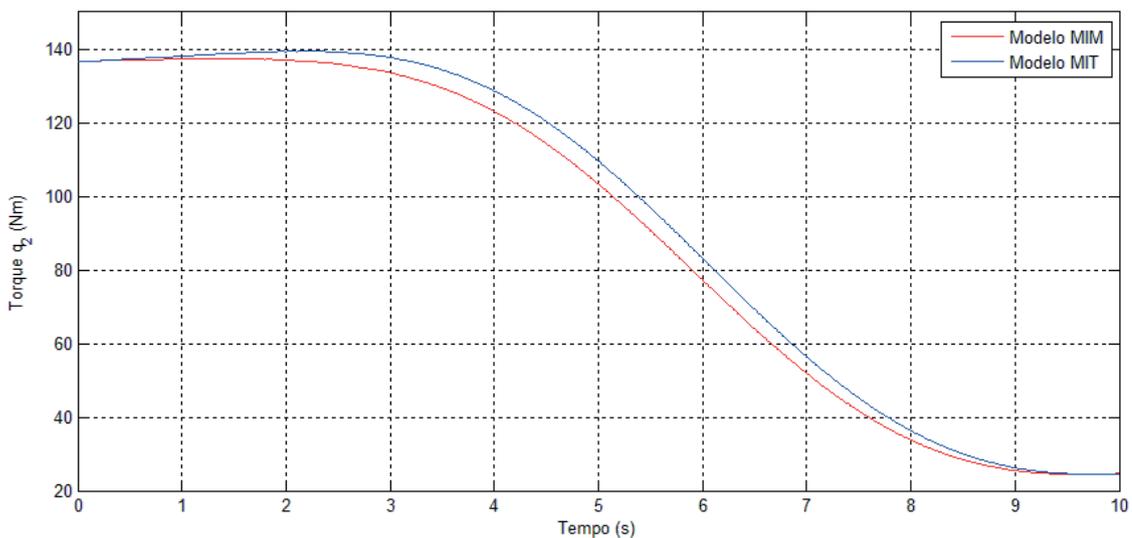


Figura 4.12 - Torques na junta q_2 (modelos MIM e MIT).

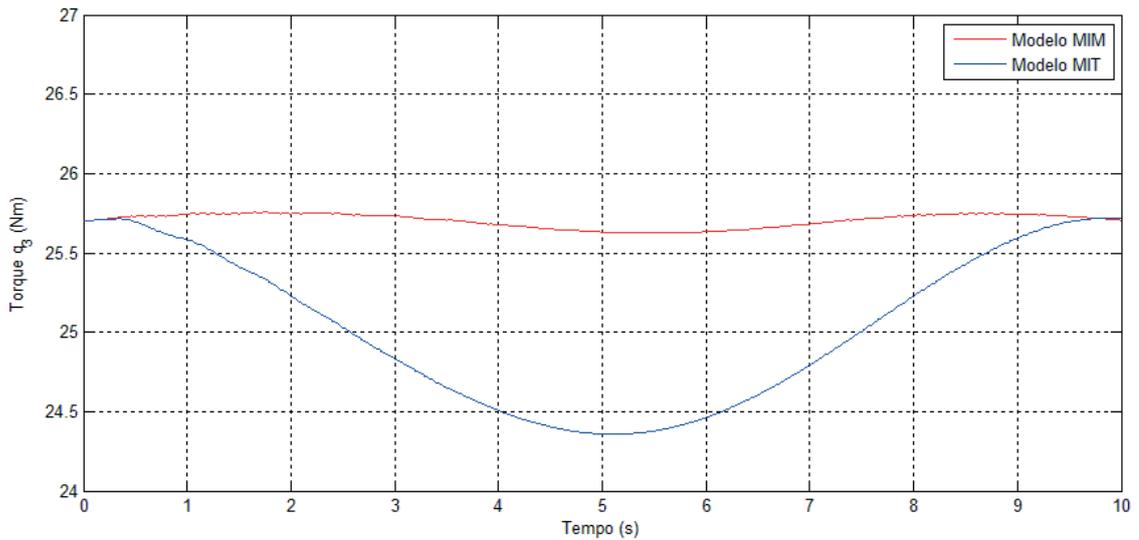


Figura 4.13 - Torques na junta q_3 (modelos MIM e MIT).

4.4. Modelo completo

Essa simulação é similar à realizada na Seção 4.3, porém dessa vez o modelo completo é utilizado, incluindo as equações do subsistema hidráulico, chamado de MIA (Modelo com influência dos atuadores). Na Figura 4.14, pode ser visualizado o diagrama de blocos utilizado nas simulações com o modelo MIA.

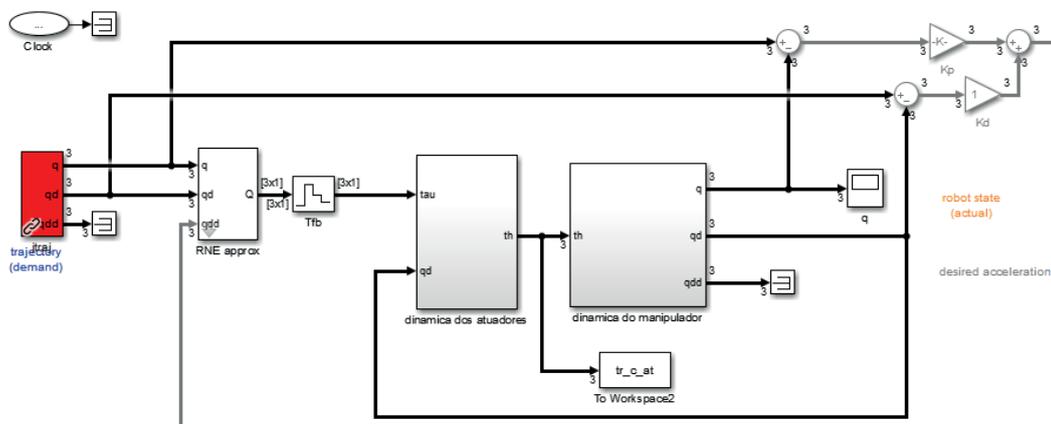


Figura 4.14 - Diagrama de blocos utilizado nas simulações do MIA.

Para garantir o seguimento da referência, foi incluído um controlador para o torque das juntas, de modo que os torques calculados pela dinâmica inversa do Robotics toolbox sejam gerados na saída do subsistema hidráulico. Para garantir a rejeição de perturbações foi utilizado um controlador proporcional-integral, segundo o diagrama de blocos mostrado na Figura 4.15.

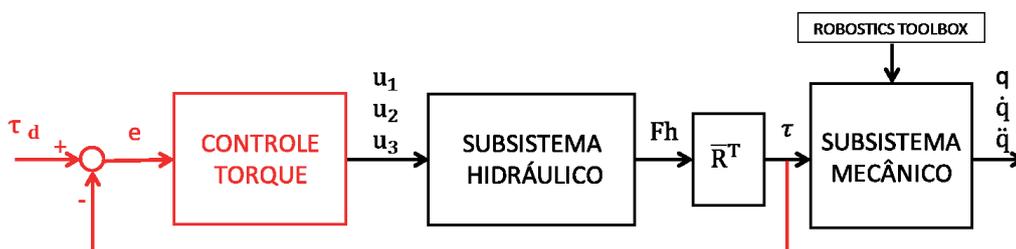


Figura 4.15 - Controle de torque utilizado nas simulações do modelo MIA.

A trajetória utilizada nessa simulação é definida a partir da posição inicial $\mathbf{q}_0 = [0 \ 0 \ 0]$, até a posição final $\mathbf{q}_f = [\pi/4 \ \pi/2 \ -\pi/2]$. A partir dessa trajetória são calculados os torques a serem aplicados nas juntas, sendo esses calculados também pelo toolbox. Para essa mesma trajetória, os torques calculados pela dinâmica inversa são aplicados no modelo MIA, conforme diagrama mostrado na figura 4.14, e no modelo MIT, conforme mostrado na Figura 4.7.

As figuras 4.16, 4.17 e 4.18 mostram os deslocamentos nas juntas durante as simulações com os dois modelos, nas quais pode ser verificado que as trajetórias desenvolvidas por ambos os modelos são aproximadamente iguais.

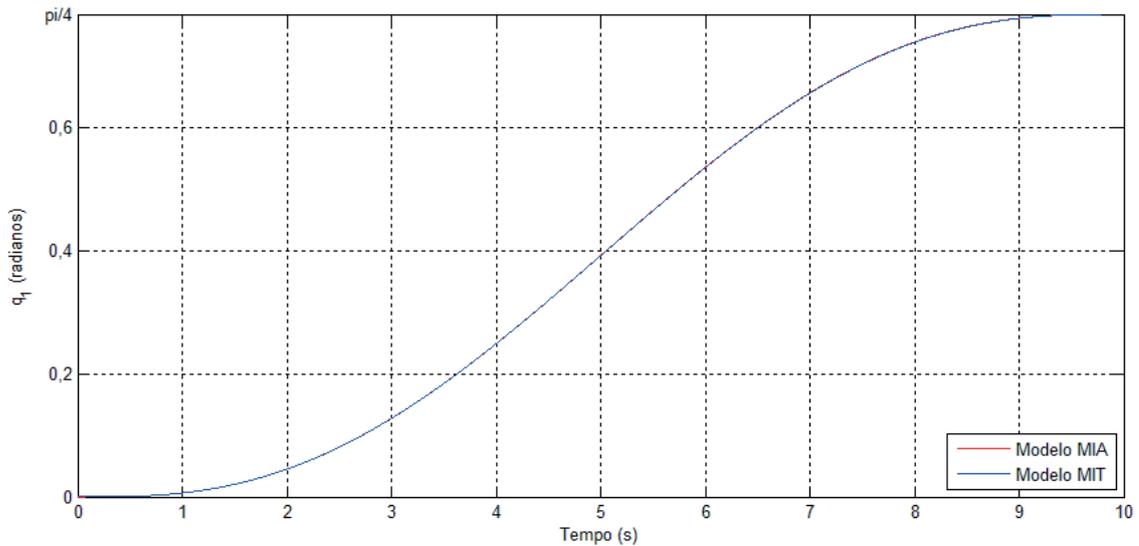


Figura 4.16 - Deslocamentos na junta q_1 (modelos MIA e MIT).

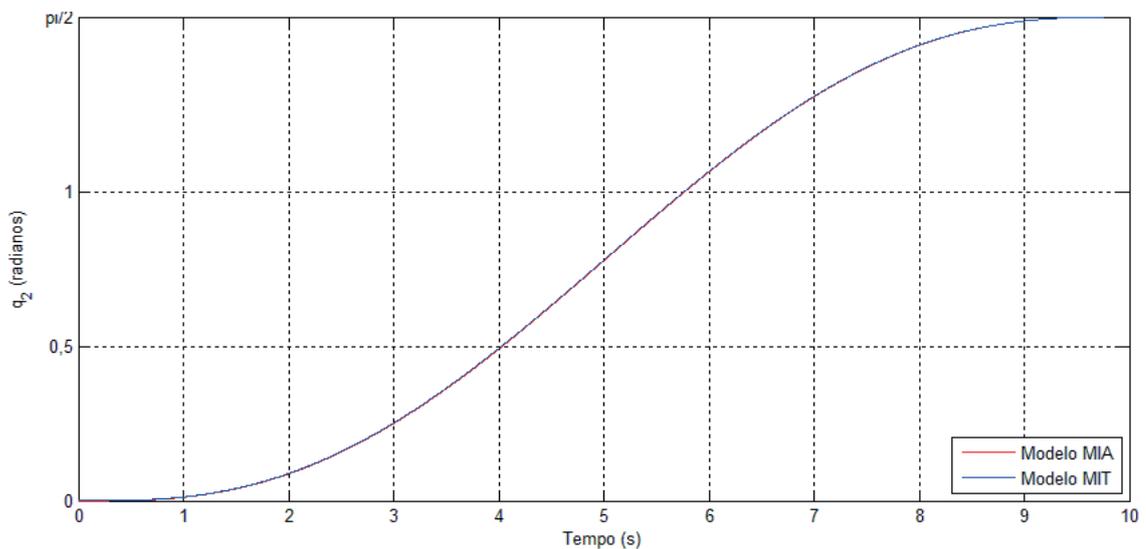


Figura 4.17 - Deslocamentos na junta q_2 (modelos MIA e MIT).

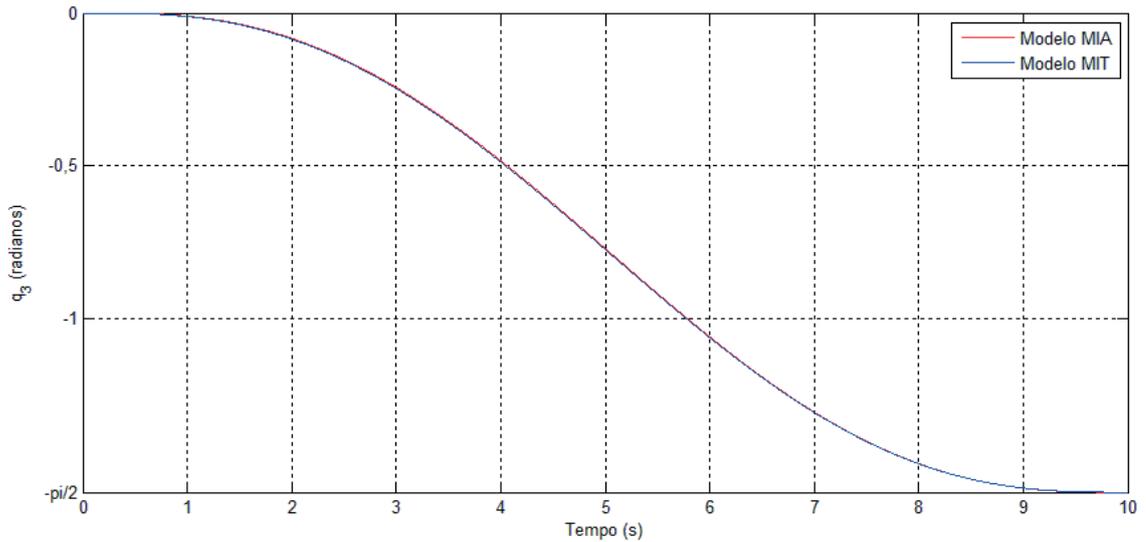


Figura 4.18 - Deslocamentos na junta q_3 (modelos MIA e MIT).

As figuras 4.16, 4.17 e 4.18 mostram que os deslocamentos nas juntas seguem as mesmas trajetórias durante as simulações para ambos os modelos. Do mesmo modo que ocorre nas simulações somente com o subsistema mecânico, mostradas na Seção 4.3. O seguimento de trajetória ocorre devido ao desempenho do controlador implementado pelo Robotics toolbox, juntamente com o controlador utilizado para o seguimento do torque.

As figuras 4.19, 4.20 e 4.21 mostram os torques aplicados nas juntas ao longo do tempo durante as simulações. Nessas figuras podem ser visualizados os torques ao longo das trajetórias realizadas. Pode ser verificado que os torques apresentam valores diferentes ao longo do tempo, quando comparados o modelo completo (MIA) e o modelo sem a dinâmica dos atuadores (MIT).

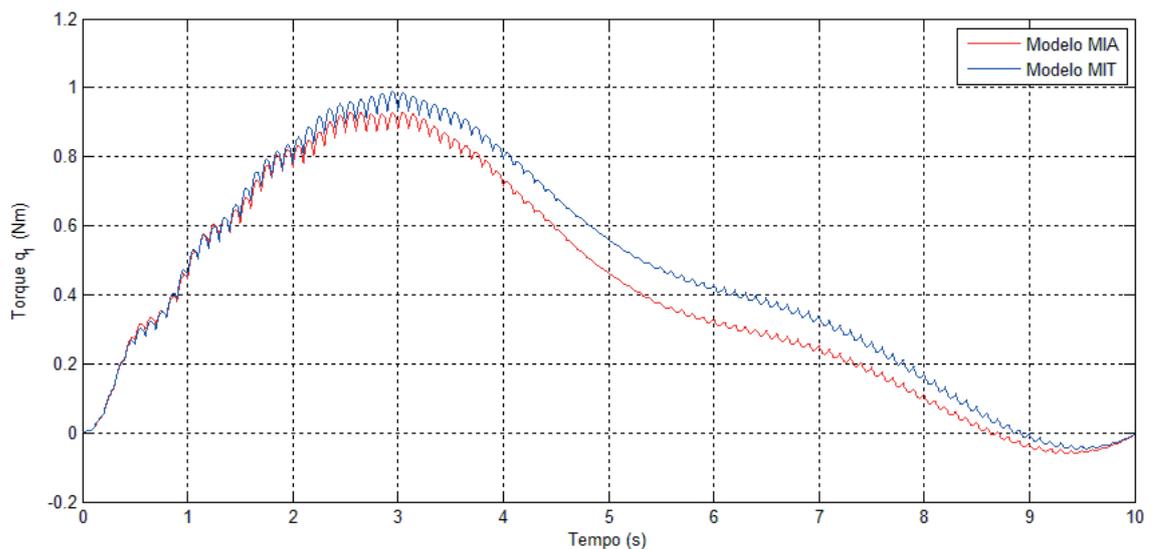
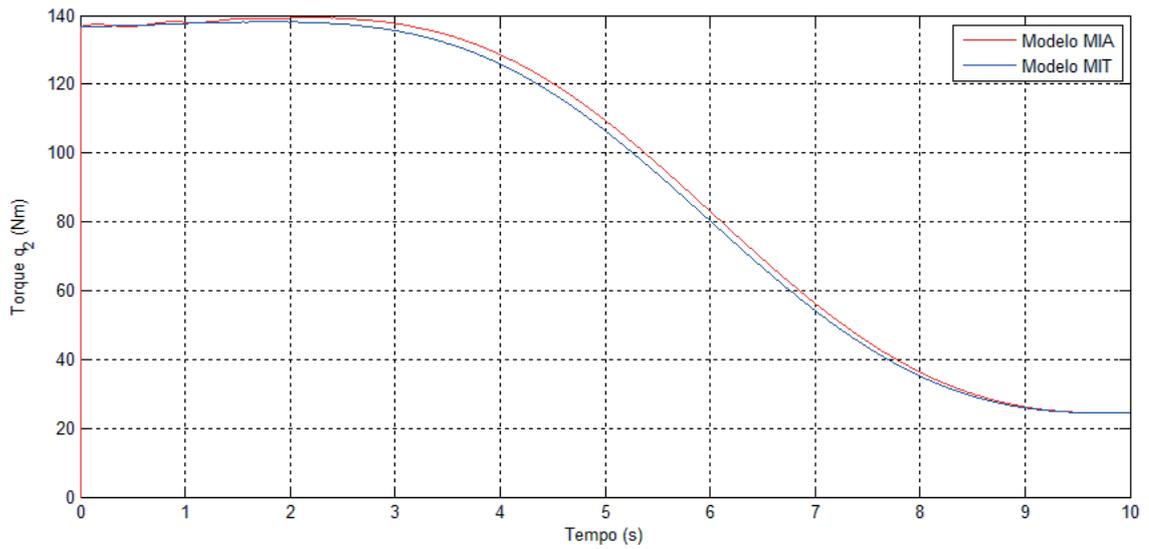
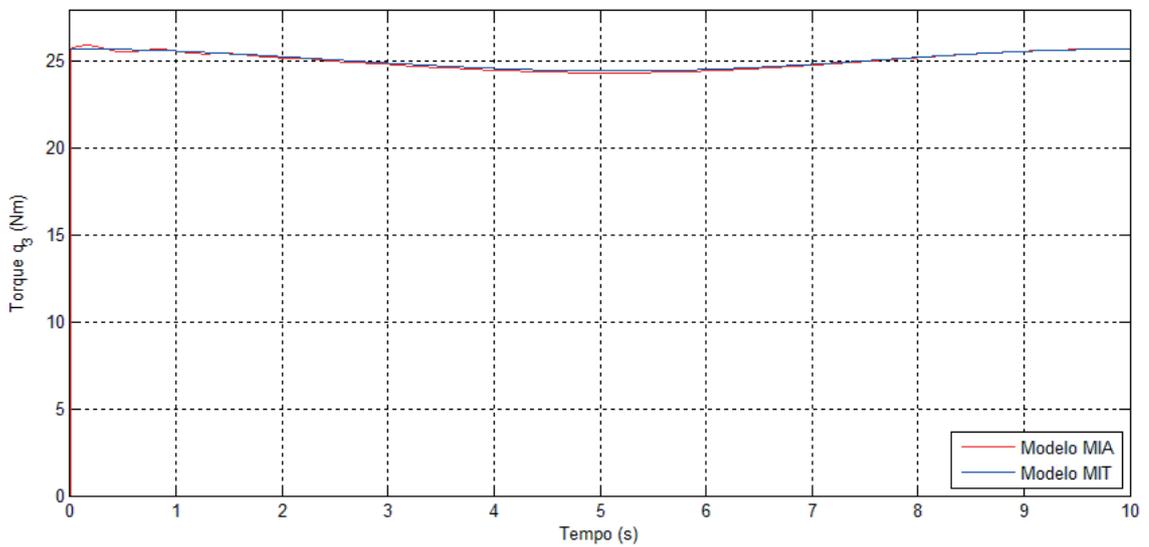


Figura 4.19 - Torques na junta q_1 (modelos MIA e MIT).

Figura 4.20 - Torques na junta q_2 (modelos MIA e MIT).Figura 4.21 - Torques na junta q_3 (modelos MIA e MIT).

5. Conclusões

A partir das simulações realizadas, pode ser concluído que a consideração da dinâmica dos atuadores no modelo do manipulador robótico pode fornecer detalhes importantes a respeito do comportamento do sistema acionado hidráulicamente. Foi verificado que a inserção do modelo mecânico dos atuadores, sem a dinâmica das pressões, reflete no torque de acionamento necessário para realizar uma trajetória, porém, essa influência é pequena. O mesmo ocorre quando é considerado o modelo completo, incluindo o subsistema hidráulico.

A partir dos resultados, conclui-se que a utilização do modelo completo pode ser importante em aplicações como projeto de sistemas de controle e determinação de parâmetros construtivos para manipuladores robóticos. Porém, a influência na resposta do sistema completo é pequena. Tal fato sugere que a utilização de um modelo completo torna-se relevante em casos onde se deseja a otimização do sistema, buscando assim, resultados os mais próximos possíveis da resposta real do sistema. Já em casos onde não são necessários resultados tão precisos, a inclusão da dinâmica dos atuadores pode não ser necessária.

O modelo proposto para um manipulador robótico acionado por hidráulicamente, o qual utiliza equações lineares para a vazão os cilindros, permitiu obter resultados positivos. Esse modelo apresentou uma discrepância quando realizado ensaio em malha aberta com forças externas atuando no sistema. A solução proposta para o problema apresentado foi inserir um bloco para comparar se o sinal de entrada da válvula assumira um valor nulo, e, nesse caso cessar a vazão, independentemente da variação das pressões nas câmaras. No entanto, cabe ressaltar que essa solução adiciona uma não linearidade para o subsistema hidráulico.

Para dar continuidade ao presente trabalho, sugere-se explorar os tópicos a seguir:

- Obtenção do modelo dinâmico inverso;
- Desenvolvimento de uma estratégia para o controle do manipulador baseada no torque computado;
- Obtenção do modelo dinâmico direto sem utilização do Robotics toolbox, para realizar comparações;

6. Referências

- ALVES, Edir dos Santos. **Introdução à hidráulica**. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Apostila de hidráulica, p. 26, 2015.
- ARMSTRONG, Brian; KHATIB, Oussama; BURDICK, Joel. **The explicit dynamic model and inertial parameters of the PUMA 560 arm**. In: Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference on. IEEE, 1986. p. 510-518.
- BU, Fanping; YAO, Bin. **Nonlinear model based coordinated adaptive robust control of electro-hydraulic robotic arms via overparametrizing method**. In: Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on. IEEE, 2001. p. 3459-3464.
- CARRARA, Valdemir. **Apostila de robótica**. Universidade Braz Cubas, Área de Ciências Exatas Engenharia Mecânica, Engenharia de Controle e Automação, p. 13-27, 2009.
- CORKE, Peter I. **High-performance visual closed-loop robot control**. Diss. University of Melbourne, 1994.
- CORKE, Peter et al. **A search for consensus among model parameters reported for the PUMA 560 robot**. In: Robotics and Automation, 1994. Proceedings., 1994 IEEE International Conference on. IEEE, 1994. p. 1608-1613.
- CORKE, Peter I. **A computer tool for simulation and analysis: the Robotics Toolbox for MATLAB**. In: Proc. National Conf. Australian Robot Association. 1995. p. 319-330.
- CORKE, Peter et al. **The Machine Vision Toolbox: a MATLAB toolbox for vision and vision-based control**. Robotics & Automation Magazine, IEEE, v. 12, n. 4, p. 16-25, 2005.
- CORKE, Peter I. **Robotics Toolbox**. 2015.
- CRAIG, John J. **Introduction to robotics: mechanics and control**. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2005.
- DENAVIT, Jacques. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. **Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics**, v. 22, p. 215-221, 1955.
- DE NEGRI, Victor Juliano. **Sistemas hidráulicos e pneumáticos para automação e controle**. UFSC, Brazil, 2001.
- DOS SANTOS, C. H., VALDIERO, A. C., GUENTHER, R., & DE PIERI, E. R. **Modelagem, simulação e controle em cascata de um robô manipulador hidráulico**. 2002.
- FRANCO, Ana Lúcia Driemeyer et al. **Controle avançado de atuadores hidráulicos: aspectos teóricos e experimentais e aplicações em robótica**. 2002.
- GROOVER, M. P. **Robótica: tecnologia e programação**. McGraw-Hill, 1989.
- HUNTER, Ian W.; HOLLERBACH, John M.; BALLANTYNE, John. **A comparative analysis of actuator technologies for robotics**. Robotics Review, v. 2, 1991.

KELLY, Rafael; DAVILA, Victor Santibáñez; PEREZ, Julio Antonio Loría. **Control of robot manipulators in joint space**. Springer Science & Business Media, 2006.

KURFESS, Thomas R. (Ed.). **Robotics and automation handbook**. CRC press, 2004.

LEWIS, Frank L.; DAWSON, Darren M.; ABDALLAH, Chaouki T. **Robot manipulator control: theory and practice**. CRC Press, 2003.

MAVROIDIS, Constantinos; PFEIFFER, Charles; MOSLEY, Michael. **Conventional actuators, shape memory alloys, and electrorheological fluids**. Automation, miniature robotics and sensors for nondestructive testing and evaluation, v. 4, p. 189, 2000.

MERRITT, Herbert E. **Hydraulic control systems**. John Wiley & Sons, 1967.

MOHANTY, Amit; YAO, Bin. **Integrated direct/indirect adaptive robust control of multi-dof hydraulic robotic arms**. In: ASME 2007 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers, 2007. p. 841-852.

MORECKI, Adam; KNAPCZYK, Józef (Ed.). **Basics of robotics: theory and components of manipulators and robots**. Springer, 2014.

PERONDI, Eduardo André. **Introdução ao Controle de Sistemas Mecânicos**. Caderno Técnico de Engenharia Mecânica, 3ª Edição, DEMEC, UFRGS, 2010.

RONG, Xuewen et al. **Mechanical Design and Kinematics Analysis of a Hydraulically Actuated Manipulator**. Open Mechanical Engineering Journal, v. 8, p. 457-461, 2014.

SPONG, Mark W.; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, Mathukumalli. **Robot modeling and control**. New York: Wiley, 2006.

TANAKA, Yutaka et al. **Comparative Study on Dynamic Characteristics of Hydraulic, Pneumatic and Electric Motors**. In: ASME/BATH 2013 Symposium on Fluid Power and Motion Control. American Society of Mechanical Engineers, 2013. p. V001T01A037-V001T01A037.

VALDIERO, A. C. **Projeto e Implementação de Controladores para Atuadores Hidráulicos**. EMC6601 Tópicos Especiais em Projetos de Sistemas Mecânicos, 2001.

VALDIERO, Antônio C. **Controle de robôs hidráulicos com compensação de atrito**. 2005.

WERNHOLT, Erik; OSTRING, Mans. **Modeling and control of a bending backwards industrial robot**. Technical Report LiTH-ISY, 2003.

ŽLAJPAH, Leon. **Simulation of Robotic Manipulators**. 2006.

Apêndices

Apêndice 1: Parâmetros utilizados para o manipulador

O manipulador é definido pelos parâmetros cinemáticos (Denavit-Hartenberg), massas dos elos, centro de gravidade dos elos e momento de inércia dos elos. As Tabelas A1 e A2 mostram os parâmetros utilizados para o manipulador simulado.

Tabela A1- Parâmetros de Denavit-Hartenberg.

Junta _i	d _i (m)	a _i (m)	α _i	θ _i
1	0	0	pi/2	q ₁
2	0	0.4318	0	q ₂
3	0	0.4331	pi/2	q ₃

Tabela A2 – Parâmetros dos elos.

		elo 1	elo 2	elo 3 + punho completo
Centro de gravidade (m)	Massa (kg)	m	0	17.400
	rx	0	0.068	0
	ry	0	0.006	-0.070
Momento de inércia (kgm ²)	rz	0	-0.016	-0.143
	lxx	0	0.1300	0.1920
	lyy	0.35	0.5390	0.2120
	lzz	0	0.5240	0.0154

Segue abaixo o código utilizado para declarar um manipulador, os parâmetros utilizados para as simulações são os descritos acima, porém como pode ser visualizado abaixo, alterar parâmetros do modelo é uma tarefa fácil que pode ser realizada conforme necessidade.

```
% mdl_h560 cria no workspace uma variável com o modelo de manipulador
% baseado no Puma 560
% unidades no SI.
```

```
clear L
```

```
L(1) = Revolute('d', 0, 'a', 0, 'alpha', pi/2, ...
    'I', [0, 0.35, 0, 0, 0, 0], ...
    'r', [0, 0, 0], ...
    'm', 0)
L(2) = Revolute('d', 0, 'a', 0.4318, 'alpha', 0, ...
    'I', [0.13, 0.539, 0.524, 0, 0, 0], ...
    'r', [0.068, 0.006, -0.016], ...
    'm', 17.4)
L(3) = Revolute('d', 0, 'a', 0.4331, 'alpha', pi/2, ...
    'I', [0.192, 0.212, 0.0154, 0, 0, 0], ...
    'r', [0, -0.143, 0.014], ...
    'm', 6.05)
```

```
ph = SerialLink(L, 'name', 'Ph');
```

```
% algumas poses
qz = [0 0 0];
qr = [0 pi/2 0];
qs = [0 0 -pi/2];
```

```
qn=[0 pi/4 pi];
clear L
```

Apêndice 2: Parâmetros utilizados para os atuadores

A Tabela A3 mostra os parâmetros utilizados para os cilindros hidráulicos e para as válvulas de controle nas simulações. Esses parâmetros foram obtidos na bibliografia citada.

Tabela A3 – Parâmetros dos componentes hidráulicos.

Parâmetros	Atuador 1	Atuador 2	Atuador 3	Unidades
A1	7.6576e-4	7.6576e-4	7.6576e-4	m ²
A2	7.6576e-4	7.6576e-4	7.6576e-4	m ²
V10	1.75e-4	1.75e-4	1.75e-4	m ³
V20	1.75e-4	1.75e-4	1.75e-4	m ³
M	20.66	20.66	20.66	kg
B	316	316	316	Ns/ m
Ksa	4e-8	4e-8	4e-8	m ³ /s/V/ $\sqrt{P_a}$
Ksb	4e-8	4e-8	4e-8	m ³ /s/V/ $\sqrt{P_a}$
Kc	1.46e-11	1.46e-11	1.46e-11	m ³ /s/P _a
Kqu1	1.167e-4	1.167e-4	1.167e-4	m ³ /s/V
Kqu2	1.167e-4	1.167e-4	1.167e-4	m ³ /s/V
R	0.0127	0.0243	0.0117	m
β	10e9	10e9	10e9	N/m ²
Ps	100e5	100e5	100e5	Pa
Pr	0	0	0	Pa

Geralmente, temos $Pr \ll Ps$, portanto a pressão de retorno é considerada nula. Os volumes iniciais dos cilindros V10 e V20 consideram os volumes de fluido nas câmaras dos cilindros e nas tubulações entre as válvulas e essas câmaras. Os ganhos Kqu1 e Kqu2, assim como Kc são utilizados no modelo linearizado da Equação da vazão. Os ganhos Ksa e Ksb são utilizados no modelo não linear da Equação da vazão.

Segue abaixo o código utilizado para inserir os parâmetros referentes aos componentes hidráulicos no MATLAB, para posteriormente serem utilizados nas simulações.

```
%Parâmetros
```

```
beta=10e9;
Ps=100e5;
Pr=0;
B=316;
```

```
%atuador 1
```

```
A11=7.6576e-4;
A21=7.6576e-4;
V101=1.75e-4;
V201=1.75e-4;
M1=20.66;
B1=B;
Ksa1=4e-8;
Ksb1=4e-8;
```

```

Kc1=1.46e-11;
Kqu11=1.167e-4;
Kqu21=1.167e-4;
R1=0.0127;

%atuador 2
A12=7.6576e-4;
A22=7.6576e-4;
V102=1.75e-4;
V202=1.75e-4;
M2=20.66;
B2=B;
Ksa2=4e-8;
Ksb2=4e-8;
Kc2=1.46e-11;
Kqu12=1.167e-4;
Kqu22=1.167e-4;
R2=0.0243;

%atuador 3
A13=7.6576e-4;
A23=7.6576e-4;
V103=1.75e-4;
V203=1.75e-4;
M3=20.66;
B3=B;
Ksa3=4e-8;
Ksb3=4e-8;
Kc3=1.46e-11;
Kqu13=1.167e-4;
Kqu23=1.167e-4;
R3=0.0117;

%Matriz relação de transmissão
Jbar=[R1 0 0;
      0 R2 0;
      0 0 R3];

%Matriz inercia
Mcil=[M1 0 0
      0 M2 0
      0 0 M3];

%Matriz atrito viscoso
Bcil=[B1 0 0
      0 B2 0
      0 0 B3];

```

Apêndice 3: Blocos utilizados no Simulink

A seguir são mostrados os blocos utilizados no ambiente Simulink para obter as simulações dinâmicas do modelo de manipulador acionado por atuadores hidráulicos. Uma visão geral do modelo completo é mostrada na Figura A1, ele é composto por dois blocos, um para o subsistema hidráulico e outro para o subsistema mecânico. A Figura A2 mostra em detalhe o bloco do subsistema mecânico e a Figura A3 mostra detalhes do bloco com a dinâmica dos atuadores.

Foram utilizados dois modelos para a dinâmica dos atuadores, um primeiro modelo incluindo as equações não lineares da vazão para as válvulas, o outro modelo

considerando as equações linearizadas da vazão nas válvulas, esses modelos são mostrados em detalhe nas Figuras A4, A5, A6, A7 e A8.

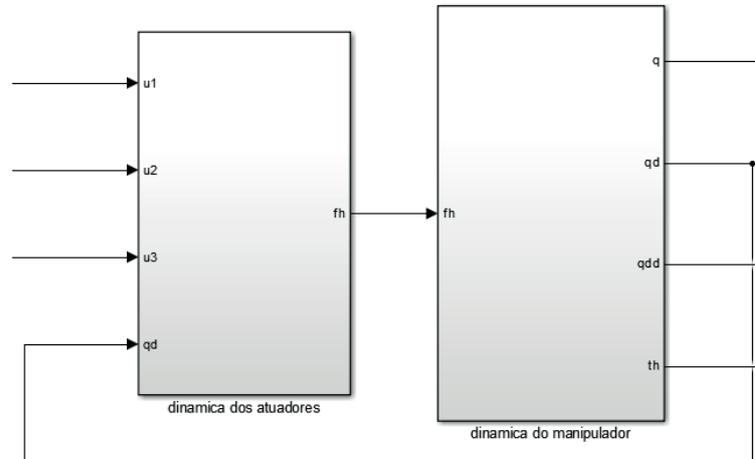


Figura A1 – visão geral do modelo completo.

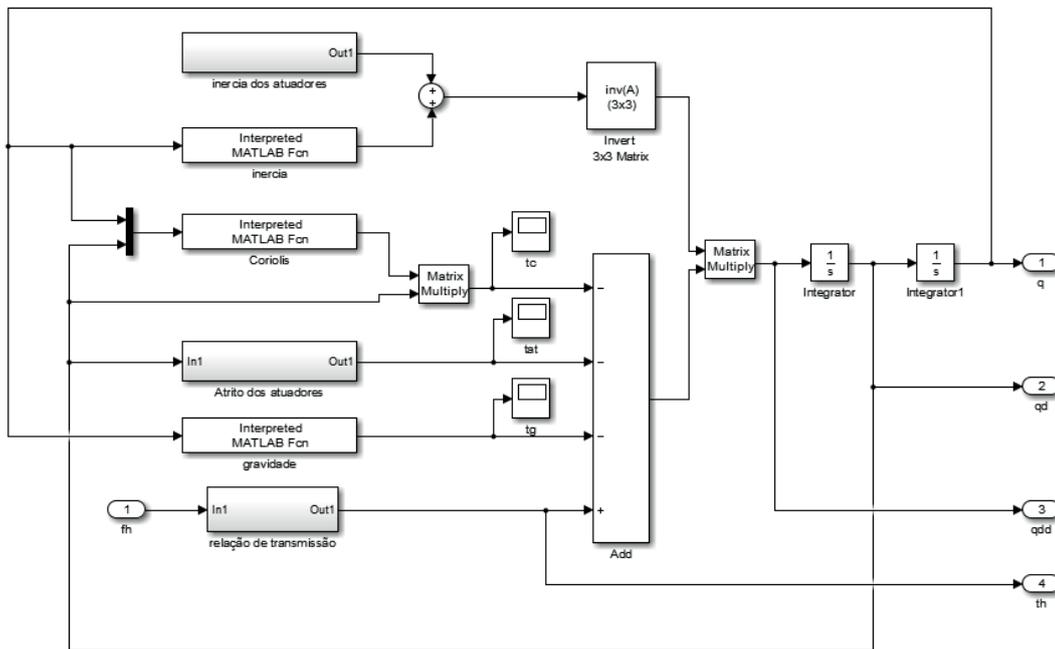


Figura A2 – Subsistema mecânico.

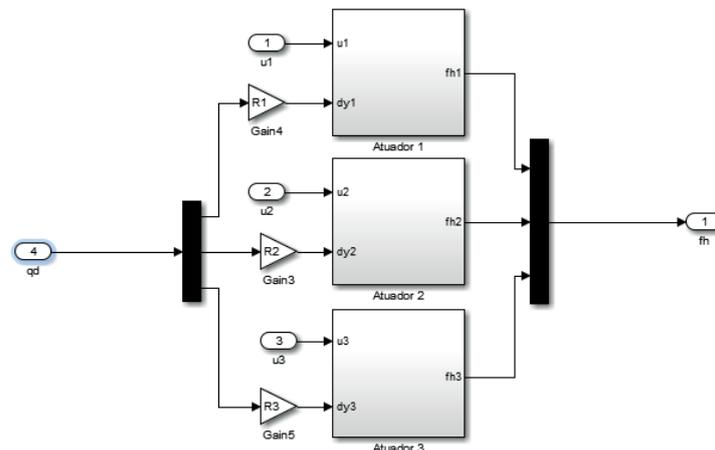


Figura A3 – Subsistema hidráulico.

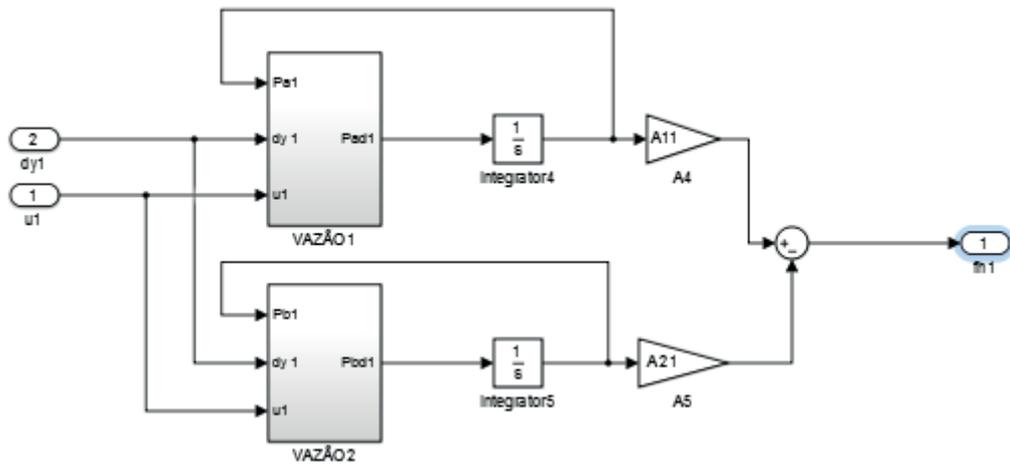


Figura A4 – Detalhe no sistema do atuador 1 (modelo linear).

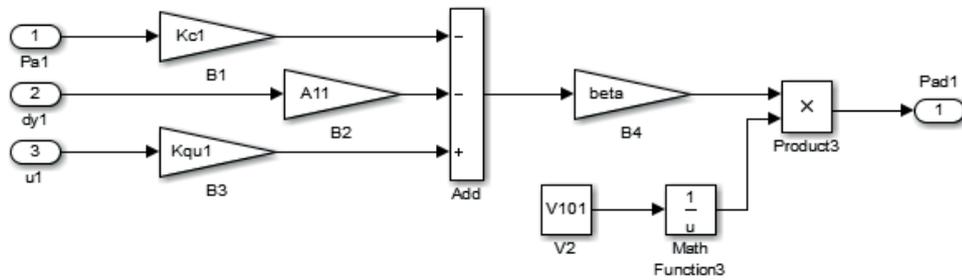


Figura A5 – Equação da vazão (modelo linear).

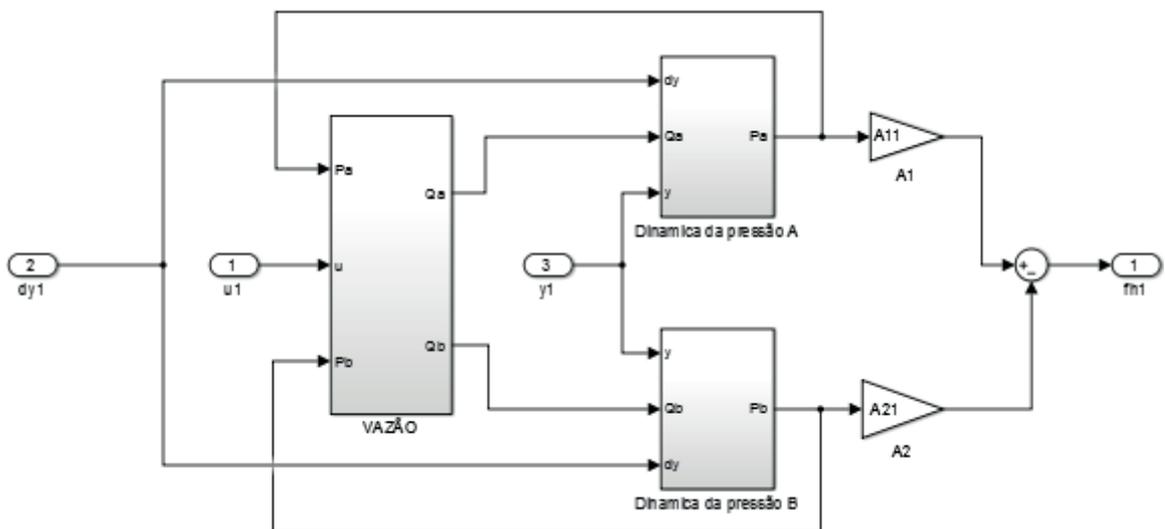


Figura A6 - Detalhe no sistema do atuador 1 (modelo não linear).

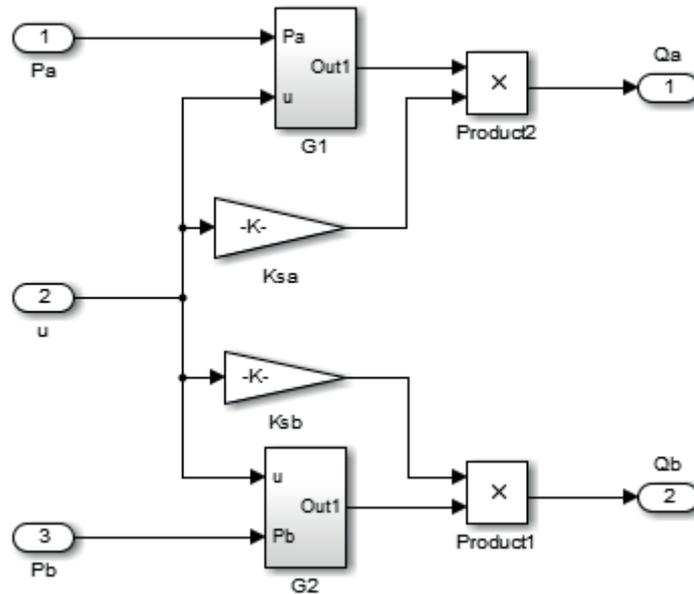


Figura A7 - Equação da vazão (modelo não linear).

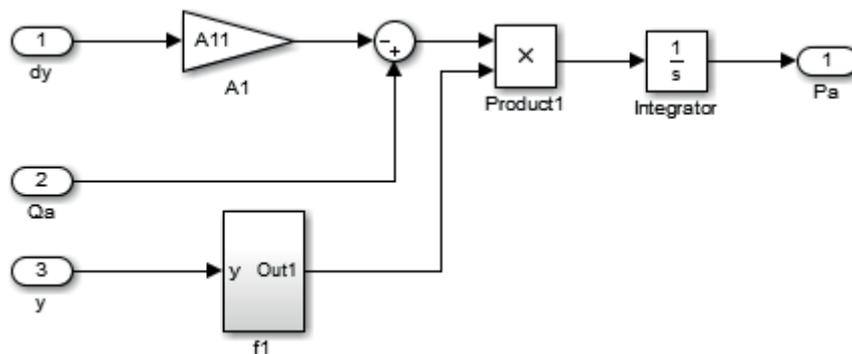


Figura A8 – Dinâmica da pressão na câmara A (modelo não linear).

Apêndice 4: Equação de dinâmica do carretel

Para uma válvula do tipo carretel, temos o diagrama de corpo livre mostrado na Figura A9, aplicando a segunda lei de Newton ao sistema de forças, obtemos a Equação (A1).

$$M_v \ddot{x}_v + B_v \dot{x}_v + K_v x_v = F_v \quad (A1)$$

onde M_v é a massa do carretel, B_v é o amortecimento viscoso do carretel, K_v é a constante elástica da mola central da válvula, x_v é o deslocamento do carretel e F_v é a força magnética exercida sobre o solenoide.

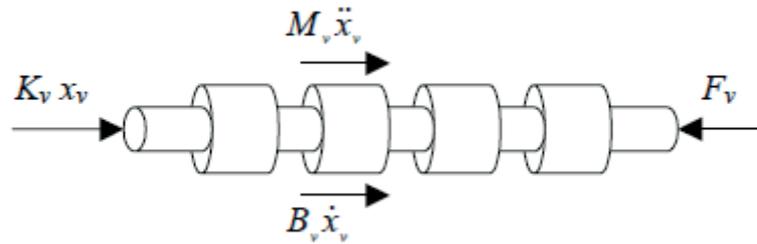


Figura A9 – Diagrama de corpo livre da válvula tipo carretel (Valdiero, 2005).

Podemos descrever a força F_v em termos da corrente que passa nas bobinas do solenoide i_m e de um ganho de tensão K_f .

$$F_v = K_f i_m \quad (A2)$$

Segundo De Negri (2001), a Equação da tensão em um solenoide é dada por (A3),

$$V_m = L_b \frac{di_m}{dt} + R_b i_m \quad (A3)$$

onde L_b é a indutância do solenoide, R_b é resistência do solenoide, i_m é a corrente elétrica que passa pelas bobinas do solenoide e v_m é a tensão elétrica aplicada nos terminais do solenoide. Sendo a constante de tempo desse sistema dada por L_b/R_b , é comum considerá-la muito rápida e tomar como instantânea a resposta do sistema elétrico, desse modo podemos escrever a Equação (A4), que relaciona a corrente e a tensão aplicada ao solenoide de forma linear.

$$i_m \cong \frac{v_m}{R_b} \quad (A4)$$

Segundo Merritt (1967), é uma simplificação válida, considerar a dinâmica da válvula muito rápida quando comparada com a dinâmica do sistema acionado. Segundo Valdiero (2005), sua massa e seu coeficiente de amortecimento são muito pequenos quando comparados aos parâmetros de sistema mecânico acionado, tornando a sua dinâmica muito mais rápida. Nesse caso será feita essa consideração, assim eliminando os termos que dependem do tempo na Equação (A1) e considerando as equações (A2) e (A4) temos uma relação linear entre o deslocamento do carretel e a tensão aplicada ao solenoide, dada por (A5).

$$x_v \cong v_m \frac{k_f}{k_v R_b} \quad (A5)$$

Desse modo o modelo do carretel corresponde a um ganho de tensão para deslocamento, sendo desconsideradas as dinâmicas rápidas da válvula.

Apêndice 5: Equação da vazão em um orifício.

A Equação da vazão em regime permanente de um fluido incompressível através da seção de um estrangulamento pode ser obtida com a aplicação da Equação de Bernoulli. Esta Equação estabelece o princípio de conservação de energia para o escoamento em regime permanente, unidimensional de um fluido incompressível (Perondi, 2010).

Considerando o volume da Figura A10, sob a ação de uma pressão p_1 a montante e uma pressão p_2 a jusante. Desprezando o efeito da gravidade, podemos escrever o balanço energético para o fluido sob pressão.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (\text{A6})$$

onde v_1 é a velocidade de escoamento do fluido a montante e v_2 a jusante, ρ é a densidade volumétrica do fluido.

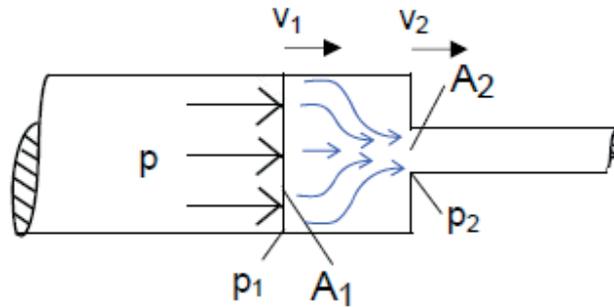


Figura A10 – Escoamento em um orifício (Perondi, 2010).

Se considerarmos a área a montante muito maior que a área do orifício, $A_1 \gg A_2$, temos que $v_2 \gg v_1$, podendo assim considerar $v_1 \cong 0$. Através dessa simplificação temos a Equação (A7).

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (\text{A7})$$

Considerando que a vazão volumétrica em um trecho com área constante é dada por $Q_2 = v_2 A_2$, e isolando v_2 na Equação (A7), podemos escrever a Equação (A8).

$$Q_2 = A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)} \quad (\text{A8})$$

ou, definindo $A_0 \equiv A_2$, e definindo a variação pressão no orifício $\Delta p = p_1 - p_2$.

$$Q_2 = A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p} \quad (\text{A9})$$

Podemos ainda inserir o coeficiente de descarga C_d que modela efeitos ligados à contração da área efetiva de passagem do fluido e depende de valores como densidade, geometria do bocal e viscosidade do fluido. Se considerarmos ainda que a área de passagem do fluido A_0 tem uma dimensão variável, $x_v(t)$, e outra fixa, L , podemos finalmente escrever a Equação da vazão em função de um deslocamento linear $x_v(t)$.

$$Q_2 = C_d L x_v(t) \sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p} \quad (\text{A10})$$

Apêndice 6: Equação da continuidade.

Segundo De Negri (2001), o entendimento dos fenômenos físicos que ocorrem em um atuador parte da aplicação da Equação da conservação de massa (Equação da continuidade) para um volume de controle (VC), definido no interior de uma câmara, conforme Figura A11.

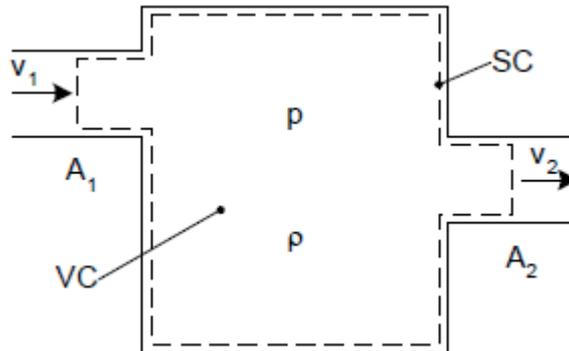


Figura A11 – Volume de controle genérico (De Negri, 2001).

A Equação da continuidade estabelece que o fluxo líquido de massa através da superfície de controle é igual à variação de massa no interior do volume de controle, e pode ser expressa como:

$$\int_{SC} \rho \vec{v} d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = 0 \quad (A11)$$

onde a massa específica ρ é considerada constante, \vec{v} é a velocidade do fluido através de uma área infinitesimal $d\vec{A}$ e dV é a variação do volume na câmara. Segundo De Negri (2001), aplicando-se a Equação (A11) a um volume de controle genérico, podemos obter a seguinte relação,

$$Q = Q_e - Q_s = \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\beta} \frac{dp}{dt} \quad (A12)$$

onde Q_e é a vazão de fluido que entra no cilindro, e Q_s é a vazão de saída, β é o módulo de elasticidade do fluido, considerado constante. Isolando o termo com a derivada da pressão temos:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\beta}{V} \left(Q - \frac{dV}{dt} \right) \quad (A13)$$

Para o caso de um cilindro hidráulico, podemos escrever o volume V em função de uma área constante e de uma variável $y(t)$ no sentido do deslocamento da haste, obtendo a Equação (A14).

$$\dot{p} = \frac{\beta}{V_0 + Ay(t)} \left(Q - A \frac{dy(t)}{dt} \right) \quad (A.14)$$

onde V_0 é o volume inicial do fluido no interior do cilindro e A é a área do êmbolo do cilindro.