

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UM ESTUDO DE ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

por

Daiane Pioli dos Santos

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenharia Mecânica.

Porto Alegre, junho de 2015



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

UM ESTUDO DE ANÁLISE DE FADIGA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
por

Daiane Pioli dos Santos

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRA MECÂNICA
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Juan Pablo Quintas Raggio
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Jun S. O. Fonseca

Prof. Letícia F. F. Miguel

Prof. Juan P. R. Quintas

Porto Alegre, 29, junho de 2015.

“A utilidade é um dos maiores combustíveis do ser humano, investi-la em vantagens próprias não é ser útil”.

Autor desconhecido

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela perfeição nos caminhos traçados.

A minha mãe, por sempre me acolher com um forte abraço e muito bom ânimo.

Às minhas irmãs Michelle e Daniele por serem minha referência.

Ao professor e orientador, Rogério Marczak, por tornar o curso de Engenharia Mecânica mais interessante, e por ser este grande mestre que és.

Ao professor Jun Fonseca, pelas boas conversas no GMAp e por toda ajuda.

A todos aqueles que muito ou pouco fizeram parte dessa história.

E ao André Weijh, pelos momentos vividos, por todas as horas de estudo, paciência, companhia, diversão e ensinamento, e por ser um exemplo de como viver a vida com alegria.

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Curva S-N para aço estrutural A36.	6
Figura 5.1 – Fluxograma: Metodologia para o estudo de fadiga no domínio da frequência.	7
Figura 5.2 – Estrutura de estudo com carregamento e condições de contorno impostas.	8
Figura 5.3 – Elemento Finito LST.	8
Figura 5.4 – Figura esquemática dos modelos global (a), e local (b).	9
Figura 5.5 – Resposta em tensão equivalente de Von Mises para o ponto crítico.	10
Figura 5.6 – PSD das tensões para o ponto crítico.	10
Figura 5.7 – Sinal de Tensão espectral para faixa de frequência de 10 a 100 Hz.	11
Figura 5.8 – Curva de Dirlik para estimativa de ciclos por uma PSD de tensão.	11

LISTA DE TABELAS

Tabela A.1 – Constantes do AÇO A36.....	14
Tabela A.2 – Autovetores e Autovalores para os primeiros cinco modos de vibração, levando em conta os oito nós da interface global/local.....	14
Tabela A.3 – Autovetores e Autovalores do sexto ao décimo modo de vibração, levando em conta os oito nós da interface global/local	14
Tabela A.4 – Matriz B , que relaciona deslocamento unitário e tensões no ponto crítico para os primeiros 4 nós.....	15
Tabela A.5 – Matriz B , que relaciona deslocamento unitário e tensões no ponto crítico do nó 5 ao nó 8	15

Santos, D.P. **Um Estudo de Fadiga no domínio da Frequência**. 2015. 27 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem para determinação do histórico de tensões em peças submetidas a carregamentos transientes. Ao contrário do tradicional método de análise baseado no tempo, aqui se emprega uma metodologia onde a análise é realizada no domínio da frequência. Escrevendo as equações dinâmicas na base modal, o desacoplamento dos graus de liberdade permite o uso da superposição modal para reconstrução da resposta da estrutura. Utilizando um modelo adequado de análise de tensões, obtém-se o espectro de tensões correspondentes, que, se desejado, pode ser recuperado no domínio do tempo. Adota-se o modelo de Dirlik para estimar o dano acumulado durante a vida útil. Resultados de dano e vida em fadiga são calculados para um exemplo.

PALAVRAS-CHAVE: Análise modal, Domínio da frequência, Fadiga.

Santos, D.P. **A Fatigue Study in the Frequency Domain**. 2015. 27 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

ABSTRACT

This paper presents an approach to determining the stress range in components submitted to transient loads. Different of traditional time-based method of analysis here is employed a method where the analysis is performed in the frequency domain. Writing dynamic equations in modal base, the uncoupling of the degrees of freedom allows the use of modal superposition to reconstruct the structure response. Using a proper model for analysis of stress range, the corresponding spectrum can be obtained, which, if desired, can be recovered in the time domain. The Dirlik's formulation is adopted to estimate the accumulated damage over the lifetime. Fatigue damage and lifetime results are calculated for an example.

KEYWORDS: Modal analysis, Frequency domain, Fatigue.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	1
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	2
4.1. ANÁLISE MODAL.....	2
4.2. MODELO DE DIRLIK PARA ESTIMAR A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE CICLOS DE TENSÃO ESPECTRAL.....	4
4.3. A CURVA DE WÖHLER PARA PREVER FALHA POR FADIGA E A REGRA DE PALMGREN-MINER PARA ESTIMAR O DANO ACUMULADO DURANTE A VIDA ÚTIL.....	6
5. METODOLOGIA	7
5.1. PREMISSAS.....	7
5.2. FLUXOGRAMA	7
5.2.1. ESTRUTURA DE ESTUDO	8
5.2.2. ANÁLISE MODAL E MODELO GLOBAL-LOCAL.....	8
5.2.3. ANÁLISE DE VIDA E DANO EM FADIGA NO DOMÍNIO ESPECTRAL.....	9
6. RESULTADOS.....	10
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	12
APÊNDICE A.....	14
APÊNDICE B.....	15

1. INTRODUÇÃO

Em problemas de engenharia as análises por simulação computacional são, na maioria das vezes, indispensáveis. Prever como um sistema ou componente mecânico irá se comportar devido às condições impostas antes de tê-lo construído potencializa a eficácia do processo de fabricação e qualidade do produto final. Neste cenário, análises dinâmicas computacionais são comumente utilizadas para obtenção de resultados os mais próximos do real. Para tanto, o emprego de uma malha que seja capaz de extrair informações precisas de deslocamento e tensão exige o refinamento adequado.

Análises dinâmicas transientes são as que simulam com maior realidade o problema, no entanto, são as mais custosas computacionalmente, a ponto de se tornarem inviáveis. O estudo por uma metodologia alternativa, que simule igualmente a situação transiente, sem, no entanto, demandar tamanha memória e tempo de processamento é proposto neste trabalho. Alternativamente às análises usuais no domínio do tempo, este trabalho aborda o problema dinâmico transiente no domínio da frequência, lançando mão do modelo proposto por Dirlik para estimativa de dano e vida e fadiga.

A modelagem espectral se torna principalmente vantajosa quando a resposta desejada depende de muitos dados de entrada tais como restrições e carregamento diversos.

2. OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma metodologia e o desenvolvimento de um algoritmo com base na análise modal para o cálculo de fadiga no domínio da frequência, uma vez que o tempo de processamento computacional e memória requerida para análises dinâmicas transientes no domínio temporal tornam o processo de simulação, muitas vezes, inviável.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na década de 1960 Bendat publicou o método por ele desenvolvido para determinar vida em fadiga através da função densidade de potência espectral, PSD, do histórico de tensões. Esta publicação foi considerada a primeira produção significativa neste tema. Bendat demonstrou que a probabilidade da PSD de um sinal de banda estreita tende à distribuição de Rayleigh, e estimou o número de ciclos esperados empregando o momento de área abaixo da função PSD. No entanto, o método se mostrou extremamente conservativo para faixas de bandas mais largas.

Em 1985 Dirlik propôs um método empírico seguindo a técnica de Monte Carlo para se determinar com certa precisão a vida em fadiga utilizando a resposta extraída de PSDs, não restringindo o método à banda estreita. Dirlik, semelhante a Bendat, estimou o número de ciclos por meio dos momentos de área abaixo da curva PSD.

Bishop (1988) afirma que para análise de estruturas com muitos dados de entrada/saída (função de transferência) a resposta é obtida de forma mais eficiente no domínio da frequência. Bishop ressalta o campo de pesquisa por um método de obter a contagem de ciclos de um sinal na sua forma PSD.

Em 1998 foi publicado o estudo realizado por Kareem, Hsieh e Tognarelli sobre a análise em fadiga de uma plataforma de óleo de uma indústria petrolífera, que ficou conhecido por desenvolver resultados de dinâmica transiente no domínio da frequência, o qual no domínio do tempo seria custoso devido à complexidade da estrutura e do carregamento imposto a ela, implicando em alta exigência de processamento computacional.

Halfpenny, em 1999 traz resultados obtidos para vida em fadiga de um componente com metodologias espectrais (Narrow Band, Dirlik, Wisching, Bishop, Chaudhury, Hancock) e para métodos temporais. O resultado final apresenta uma discrepância de 4% quando Dirlik e a análise no tempo são comparadas.

Segundo Halfpenny (1999), Quiang e Hongyan (2011), o método proposto por Bishop demanda maior capacidade computacional e os resultados obtidos são pouco superiores aos resultados obtidos pelo modelo de Dirlik em termos de precisão, o que torna o modelo de Bishop pouco utilizado.

De acordo com Ariduru (2004), o cálculo para estimativa de dano acumulado durante a vida útil em fadiga foi elaborado através de uma formulação linear por Palmgren em 1924, e o método foi aprimorado por Miner, em 1945. Apesar das restrições do método (ver mais em Ariduru, 2004; Collins, 1981), este ainda é largamente empregado. Ariduru (2004) também afirma que na década de 1867 o engenheiro Wöhler descreveu a curva S-N, amplamente utilizada, desde então, para prever falha por fadiga.

Os métodos de Wöhler e de Palmgren-Miner serão utilizados para desenvolvimento teórico deste trabalho juntamente com a análise modal (Meirovitch, 1975; Rajasekaran, 2009, Marczak, 2015) e o método de Dirlik para estimar a função densidade de probabilidade de ciclos de amplitudes de tensão.

4. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1. ANÁLISE MODAL

O emprego da análise modal permite o desenvolvimento do método de superposição de equações, e a reconstrução do problema em modos individuais, ou seja, desacoplados, de vibração.

Partindo-se da equação dinâmica do movimento para n graus de liberdade, e admitindo que a matriz amortecimento seja proporcional à matriz massa e rigidez:

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [c]\{\dot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.1)$$

onde, m , c , k , são, respectivamente, matrizes $n \times n$ simétricas de massa, amortecimento e rigidez, $\{u\}$ é o vetor de deslocamento e $\{\dot{u}\}$, $\{\ddot{u}\}$, as correspondentes derivadas de primeira e segunda ordem, f é o vetor de forças externas.

A equação 4.1 constitui um sistema de equações lineares acoplado com n equações diferenciais ordinárias resolvidas de maneira simultânea. A solução para essa equação pode ser obtida por Transformada de Laplace, no entanto, esse se torna um meio mais trabalhoso em comparação ao método da análise modal, principalmente quando o problema envolve vários graus de liberdade [Meirovitch, 1975]. Assim, para obter-se a resposta em frequência, a dinâmica da estrutura passa a ser estudada de acordo com seus modos e frequências naturais.

As variáveis da equação do movimento, como apresentada na equação 4.1, estão em coordenadas físicas. Para que seja aplicada a análise modal, e o sistema seja resolvido de forma independente, é necessário, além de introduzir um novo sistema de coordenadas, denominado como sistema de coordenadas normais [Meirovitch, 1975; Rajasekaran, 2009], também resolver o problema de autovalor associado às matrizes da equação.

Seja ψ a matriz modal referente aos i modos de vibração, e Λ a matriz diagonal das i frequências naturais (ω_{n_i}) ao quadrado:

$$[\psi] = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n] \quad (4.2)$$

$$[\Lambda] = \text{diag}[\omega_{n_1}^2 \ \omega_{n_2}^2 \ \dots \ \omega_{n_n}^2] \quad (4.3)$$

$$\{u\} = [\psi_i]\{q_i\} \quad (4.4)$$

onde $i = (1, 2, \dots, n)$, e q é o vetor de coordenadas normais. Como ψ é uma matriz constante, a transformação também é válida para as derivadas de u .

As equações originais acopladas de movimento são, através do novo sistema de coordenadas, transformadas para um mesmo número de equações desacopladas, onde cada equação representa um sistema com um grau de liberdade, escrito em coordenadas normais.

Substituindo o sistema de coordenadas físicas para o de coordenadas normais, e ainda pré multiplicando por ψ^T a equação 4.1 fica:

$$[\psi^T][m][\psi]\{\ddot{q}(t)\} + [\psi^T][c][\psi]\{\dot{q}(t)\} + [\psi^T][k][\psi]\{q(t)\} = [\psi^T]\{f(t)\} \quad (4.5)$$

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{p(t)\} \quad (4.6)$$

onde M , C , K , são as matrizes modais massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e p é o vetor força modal. Como consequência da ortogonalidade das matrizes m , c , k ; as matrizes M, C, K são matrizes diagonais, o que permite o desacoplamento do sistema [Gupta, 1992; Rajasekaran, 2009]

No caso de amortecimento não proporcional, a matriz C não é mais uma matriz diagonal, porém pode ser decomposta em duas matrizes, uma contendo os termos da diagonal e outra os termos fora da diagonal [Pravia, 2007].

Normalizando ψ em relação à matriz massa modal, obtém-se a matriz modal massa-normalizada ϕ , a qual introduz as seguintes relações algébricas:

$$[\phi^T][M][\phi] = [I]$$

$$[\phi^T][C][\phi] = \text{diag}[2\xi_i\omega_{n_i}]$$

$$[\phi^T][K][\phi] = \text{diag}[\omega_{n_i}^2]$$

onde I é a matriz identidade e ξ_i é o fator de amortecimento relativo ao i -ésimo modo de vibração.

Reescrevendo a equação do movimento em base modal:

$$\{\ddot{q}_i(t)\} + [2\xi_i\omega_{n_i}]\{\dot{q}_i(t)\} + [\omega_{n_i}^2]\{q_i(t)\} = \{p_i(t)\} \quad (4.7)$$

onde q e p correspondem às amplitudes normais da resposta e da excitação no domínio tempo.

Aplicando a transformada de Fourier à equação 4.7, obtém-se a sua equivalente no domínio frequência.

$$[(i\omega)^2]\{Q_i(\omega)\} + [2(i\omega)\xi_i\omega_{n_i}]\{Q_i(\omega)\} + [\omega_{n_i}^2]\{Q_i(\omega)\} = \{P_i(\omega)\} \quad (4.8)$$

Dividindo a equação 4.8 por $\omega_{n_i}^2$, e isolando a amplitude da resposta:

$$\{Q_i(\omega)\} = \frac{\{P_i(\omega)\}}{[\omega_{n_i}^2][1 + 2i\xi_i r_i - r_i^2]} \quad (4.9)$$

ou

$$\{Q_i(\omega)\} = \frac{\{P_i(\omega)\}[T_i(\omega)]}{[\omega_{n_i}^2]} \quad (4.10)$$

onde T_i é a função resposta em frequência do sistema, e é definida:

$$[T_i(\omega)] = \frac{1}{[1 + 2i\xi_i r_i - r_i^2]} \quad (4.11)$$

r_i é definido como relação de frequência:

$$[r_i] = \{\omega\}/[\omega n_i]$$

e o carregamento P_i é extraído da função PSD de forças:

$$\{P_i(\omega)\} = \{\sqrt{C\omega^w\omega}\} \quad (4.12)$$

onde C e w são constantes do carregamento referentes à energia envolvida e a sensibilidade de variação dessa energia respectivamente.

Em situações onde a excitação é proveniente de um deslocamento imposto $y(t)$, $f(t)$ é dada por:

$$\{f(t)\} = [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} \quad (4.13)$$

onde y pode ser reescrito de acordo com o novo sistema de coordenadas v :

$$\{y\} = [\Phi]\{v\} \quad (4.14)$$

De maneira similar ao demonstrado até o momento, tem-se que T_i , para esse caso fica:

$$\{T_i(\omega)\} = \frac{1 + \{2i\xi_i r_i\}}{1 + \{2i\xi_i r_i - r_i^2\}} \quad (4.15)$$

e a resposta de deslocamento no domínio da frequência fica:

$$\{Q_i(\omega)\} = \{V_i(\omega)\}\{T_i(\omega)\} \quad (4.16)$$

Como as tensões são obtidas através de derivação dos deslocamentos, chega-se a:

$$\{\sigma_i(\omega)\} = [B]\{U(\omega)\} \quad (4.17)$$

ou

$$\{\sigma_i(\omega)\} = [B]\{\phi_i\}\{Q_i(\omega)\} \quad (4.18)$$

Onde B pode implicar em elementos finitos, e é a matriz que armazena o valor da tensão dado um deslocamento.

4.2. MODELO DE DIRLIK PARA ESTIMAR A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE CICLOS DE TENSÃO ESPECTRAL

O modelo empírico de Dirlik, aqui empregado, tem sido considerado um dentre os melhores para se aproximar a distribuição de ciclos de amplitude no domínio da frequência [Mrsnik et al, 2013].

A função PSD *versus* frequência é utilizada para encontrar quatro momentos de área (m_0, m_1, m_2, m_4), onde m_0 é o momento de área zero, ou seja, é a área abaixo da curva, m_1, m_2 e m_4 são o primeiro, segundo e quarto momento de área da PSD respectivamente. Estes momentos, por sua vez, são utilizados para estimar a função densidade de probabilidade, que será a determinante da vida em fadiga do sistema.

$$m_n = \int \omega^n G(\omega) d\omega \quad (4.19)$$

onde m_n é o n-ésimo momento de área da função PSD, representada nesta equação por G.

A função densidade de probabilidade $p(S)$ para faixas de tensão (S) de Dirlik é baseada na soma ponderada da distribuição de probabilidade exponencial e de Rayleigh.

$$p(S) = \frac{\frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}}}{2\sqrt{m_0}} \quad (4.20)$$

$$D_1 = \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2} \quad (4.21)$$

$$D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}{1 - R} \quad (4.22)$$

$$D_3 = 1 - D_1 - D_2 \quad (4.23)$$

$$Z = \frac{S}{2\sqrt{m_0}} \quad (4.24)$$

$$Q = 1,25 \left(\frac{\gamma - D_3 - D_2 R}{D_1} \right) \quad (4.25)$$

$$R = \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2} \quad (4.26)$$

$$\gamma = \frac{E[0]}{E[P]} = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \quad (4.27)$$

$$x_m = \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad (4.28)$$

onde D_1 , D_2 , D_3 , Q , e R são funções dos momentos de área. Z refere-se à amplitude normalizada do sinal de tensão, e γ é o fator de irregularidade. Ainda:

$$E[0] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (4.29)$$

$$E[P] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (4.30)$$

onde $E[0]$ é o número de cruzamentos no valor zero em tensão que possuem declividade positiva, e $E[P]$ é o número de picos por segundo. O fator de irregularidade varia de 0 a 1, quando este valor tende a um, o sinal é considerado de banda estreita.

A equação de Dirlik para contagem de ciclos de Tensões é definida por:

$$N(S) = E[P] T p(S) \quad (4.31)$$

onde T é o tempo esperado em segundos.

4.3. A CURVA DE WÖHLER PARA PREVER FALHA POR FADIGA E A REGRA DE PALMGREN-MINER PARA ESTIMAR O DANO ACUMULADO DURANTE A VIDA ÚTIL

A vida em fadiga de um material pode ser estimada através da curva de Wöhler (curva S-N), para um determinado material. A curva S-N, ilustrada na Figura 4.1 em um gráfico bi logarítmico relaciona linearmente a amplitude de tensão alternada (S) com o número de ciclos que provocam a falha (N_f).

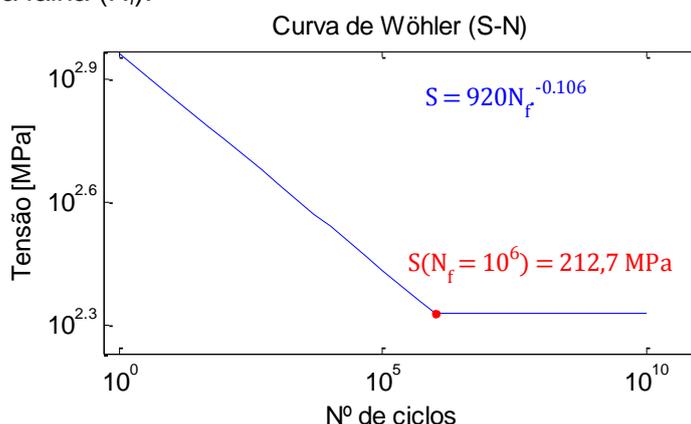


Figura 4.1 – Curva S-N para aço estrutural A36.

A equação que rege a curva de Wöhler é dada:

$$S = S_f N_f^b \quad (4.32)$$

onde S_f e b são constantes estatísticas do material.

A Figura 4.1 indica o comportamento característico para o aço estrutural A36. Quanto maior a magnitude da tensão, menor é o número de ciclos que o material é capaz de suportar. A parte da curva que se torna horizontal, representada por $10E+06$ ciclos na Figura 4.1, descreve um nível de tensão denominado de “Limite de Fadiga”, em que, abaixo dela, o material não falhará por fadiga, ou seja, terá vida infinita. Este limite não existe para a maioria das ligas não ferrosas (Morawsk, 2013).

De acordo com a regra de Palmgren-Miner a estimativa do dano acumulado durante a vida útil pode ser calculada com o emprego de contagem de ciclos de tensão e da curva S-N. O método de Palmgren-Miner assume que a fração de dano para qualquer nível de Tensão (S_i) é linearmente proporcional à razão do número de ciclos em operação (N_i) pelo número de ciclos correspondente à falha (N_{f_i}) no nível S_i de Tensão, [Ariduru, 2004]. O dano acumulado (D) é, então, dado pelo somatório de todas as frações de dano estimadas:

$$D = \sum \frac{N_i}{N_{f_i}} \quad (4.33)$$

O evento de falha ocorre quando $D \geq 1$. Apesar de ser comumente adotado o valor superior à unidade para identificar falha através do dano acumulado, o evento pode ser encontrado no intervalo de valores de 0,7 a 2 (Shigley, 1984).

De acordo com Halfpenny (1998), a vida em fadiga (V_f) para o componente pode ser calculada com o valor de dano acumulado e o tempo total (t) transcorrido:

$$V_f = \frac{t}{D} \quad (4.34)$$

5. METODOLOGIA

5.1. PREMISSAS

Com o objetivo de simplificar a modelagem matemática que envolve o problema, este trabalho desenvolve o estudo de fadiga no domínio da frequência para um sistema dinâmico linear não amortecido.

As premissas para o desenvolvimento do trabalho são de um processo estacionário, ergódico, Gaussiano e randômico.

Um processo randômico é dito estacionário se as estatísticas não são afetadas por uma mudança no tempo, isto é, as estatísticas para um conjunto $X(t)$ são as mesmas para $X(t+\tau)$ para qualquer valor de τ . Em adição a ser estacionário o processo pode ser ergódico se as estatísticas tomadas para uma amostra são as mesmas que as obtidas para o conjunto. Com um processo estacionário ergódico e randômico, se pode efetivamente tomar uma amostra suficientemente longa, porém única, do histórico de tempo e assumir que esta contém todas as propriedades estatísticas do processo, Halfpenny (1999). Em termos gerais, toda variável randômica que segue uma distribuição Gaussiana segue o Teorema do Princípio Central, ou seja, toda a soma das variáveis randômicas independentes de média finita e variância limitada será aproximadamente normal desde que o número de termos da soma seja suficientemente grande [Barros, 2007].

5.2. FLUXOGRAMA

O fluxograma apresentado na Figura 5.1 ilustra a sequência a ser desenvolvida para a obtenção da resposta em tensão, e para definição de dano e vida em fadiga, ambos no domínio da frequência.

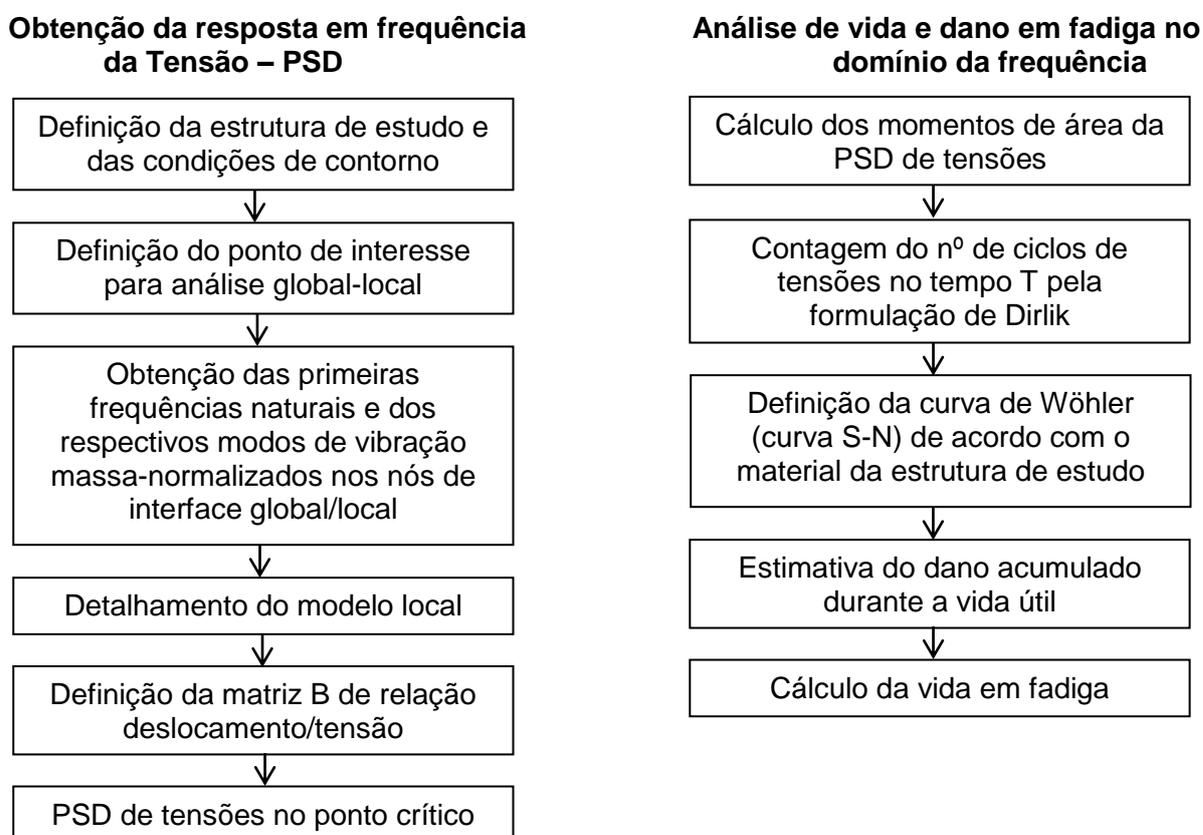


Figura 5.1 – Fluxograma: Metodologia para o estudo de fadiga no domínio da frequência.

5.2.1. ESTRUTURA DE ESTUDO

A estrutura definida como objeto de estudo foi escolhida pela simplicidade de sua geometria a fim de ser sobre ela aplicado o embasamento teórico aqui proposto. O problema estudado envolve elasticidade 2D de uma chapa de aço A36, de dimensões (430x295x10)mm, com um furo concentrador de tensão de raio 40mm, engastada em uma de suas extremidades, e com o carregamento aplicado em toda a estrutura, na direção x e na direção y . A Figura 5.2 ilustra a estrutura de estudo.

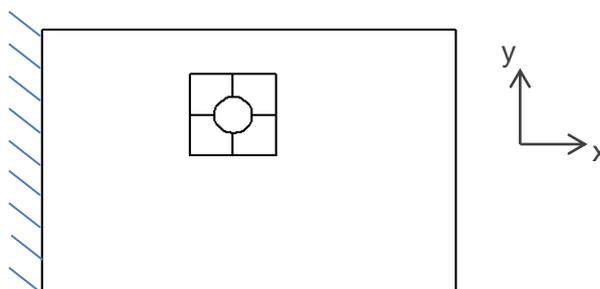


Figura 5.2 – Estrutura de estudo com carregamento e condições de contorno impostas.

5.2.2. ANÁLISE MODAL E MODELO GLOBAL-LOCAL

A primeira parte do trabalho, onde são obtidas as frequências naturais do sistema, os respectivos modos de vibração e as tensões componentes da matriz B , é desenvolvida no software ANSYS®.

Para a análise computacional via elementos finitos adota-se uma malha com elementos LST (*Linear Strain Triangle*), cuja função que rege o deslocamento dos nós é de ordem quadrática. O elemento LST possui três nós nos vértices do triângulo e mais três no meio de cada aresta, conforme a Figura 5.3. Cada nó do elemento possui 2 graus de liberdade o que viabiliza o estudo de problemas em elasticidade 2D.

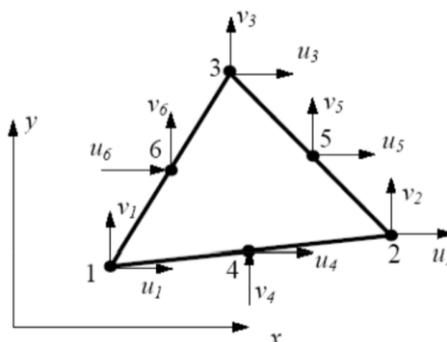


Figura 5.3 – Elemento Finito LST.

Para evitar que o tempo de processamento seja excessivamente elevado na análise modal devido ao emprego de uma malha adequada para extrair respostas com maior precisão, um modelo local da região de interesse é definido com detalhes da geometria e do material do modelo global, e ainda incorpora os modos de vibração nos pontos (nós) de influência global/local. Assim, o número de graus de liberdade do problema é reduzido aos graus de liberdade referentes aos nós da interface local/global.

A região definida como a de interesse é a região do furo, por ser esta uma região concentradora de tensões. No modelo global esta região é composta por 8 nós, estabelecendo 16 graus de liberdade de acordo com a elasticidade 2D, estes mesmos nós são tomados por referência no modelo de detalhes local, conforme a Figura 5.4.

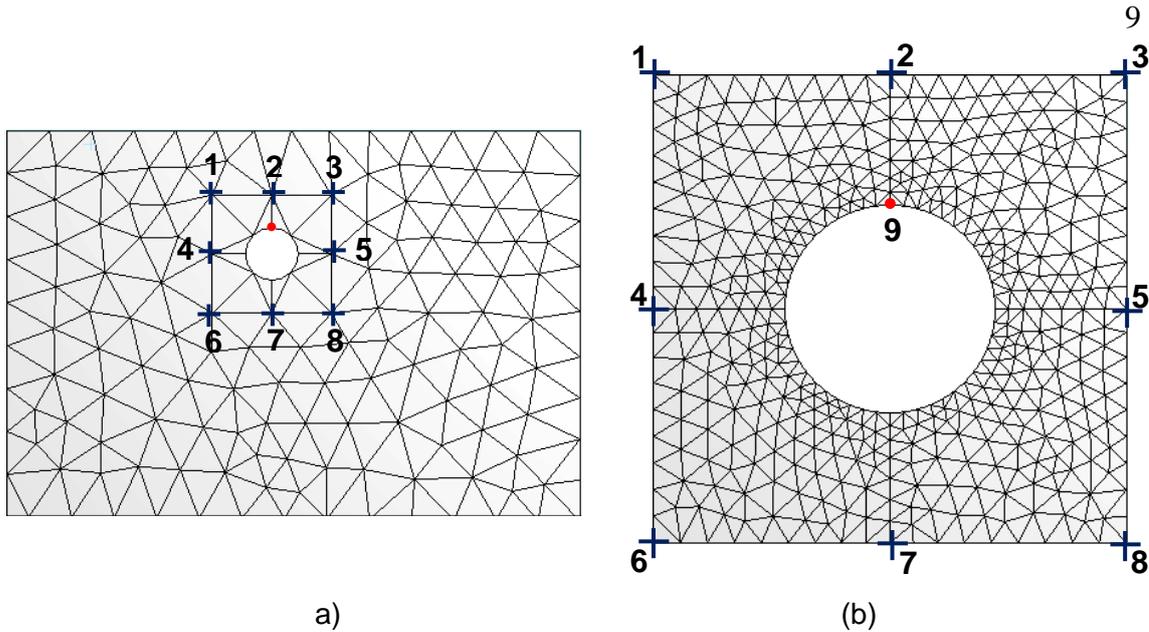


Figura 5.4 – Figura esquemática dos modelos global (a), e local (b).

Também para enxugar a análise, são mantidas apenas as primeiras 10 frequências naturais do sistema. Dessa forma, a matriz modal fica definida por $\bar{\phi}_{L \times M}$, sendo composta por L graus de liberdade e M frequências naturais.

A equação 4.18 é reescrita para o modelo local:

$$\{\sigma^k(\omega)\} = [B]\{\bar{\phi}_i\}\{\bar{Q}_i(\omega)\} \quad (5.1)$$

Para a definição da matriz B , que relaciona tensão e deslocamento, é imposto ao modelo local um deslocamento unitário a cada grau de liberdade de referência mantendo os demais nulos, ou seja, quando $u_1 = 1$, os demais graus de liberdade de referência ($v_1, u_2, v_2, \dots, v_{16}$) são nulos. Onde u , aqui, significa deslocamento na direção x , e v deslocamento na direção y . As tensões que este deslocamento unitário provocam no ponto crítico (nó 9) fornecem a primeira coluna da matriz B . A segunda coluna é obtida impondo $u_2 = 1$ e demais graus de liberdade de referência nulos, e assim sucessivamente até *que* $v_{16} = 1$.

Assim, a matriz B^k é obtida pela superposição das componentes de deslocamento que afetam as tensões no ponto crítico, sendo composta por 3 linhas onde as tensões $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ estão contidas, e, para o caso de estudo, por 16 colunas correspondentes ao número de graus de liberdade de referência. Ou seja:

$$B^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{eq} \end{array} \right\}_{L_1=1} & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{eq} \end{array} \right\}_{L_2=1} & \dots & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{eq} \end{array} \right\}_{L_{16}=1} \end{array} \right] \quad (5.2)$$

onde σ_{xx} é a tensão normal na direção x , σ_{yy} é a tensão normal na direção y , τ_{xy} é a tensão cisalhante no plano xy , e σ_{eq} é a tensão equivalente de Von Mises.

5.2.3. ANÁLISE DE VIDA E DANO EM FADIGA NO DOMÍNIO ESPECTRAL

Uma vez obtida a matriz B , a tensão no domínio da frequência é calculada através da equação 5.1 com o auxílio de um algoritmo desenvolvido no Matlab®. Este algoritmo contém a programação necessária para a obtenção da PSD de tensões, para a obtenção da função densidade de probabilidade pela metodologia de Dirlik, e para a estimativa

de dano acumulado e vida em fadiga no domínio da frequência. O código desenvolvido neste trabalho se encontra no Apêndice B.

6. RESULTADOS

Os resultados obtidos na fase de análise modal estão contidos no Apêndice A, bem como o valor das constantes para o aço A36.

Devido à definição do problema em elasticidade 2d, os modos como a estrutura vibram tornam-se restritos, fato que justifica a ordem de grandeza superior a $1e+03$ Hz encontrada para as primeiras frequências naturais.

A resposta em tensão para o ponto crítico é obtida diretamente no domínio da frequência (Figura 5.5), e na forma PSD de tensões (Figura 5.6), para uma faixa que engloba as 10 primeiras frequências naturais da estrutura.

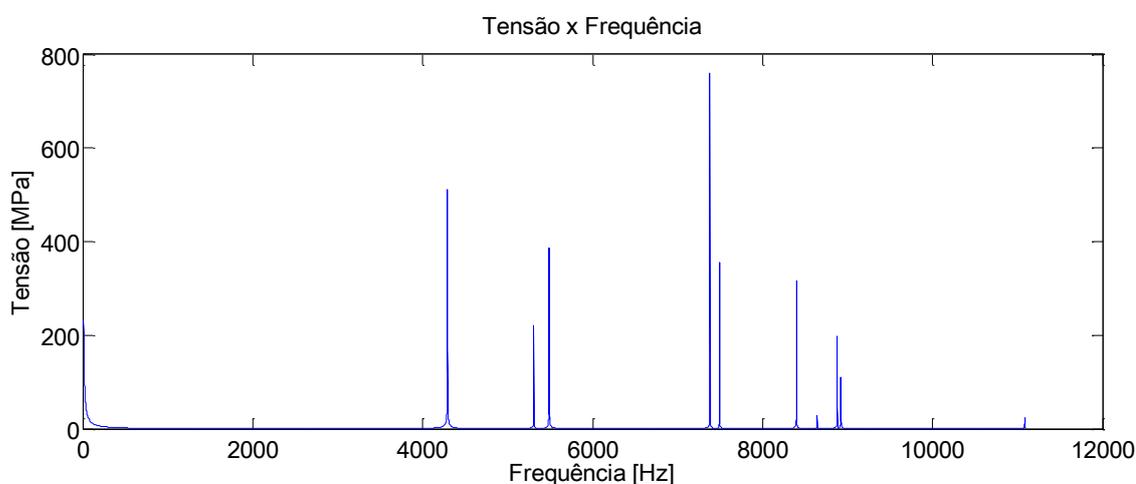


Figura 5.5 – Resposta em tensão equivalente de Von Mises para o ponto crítico.

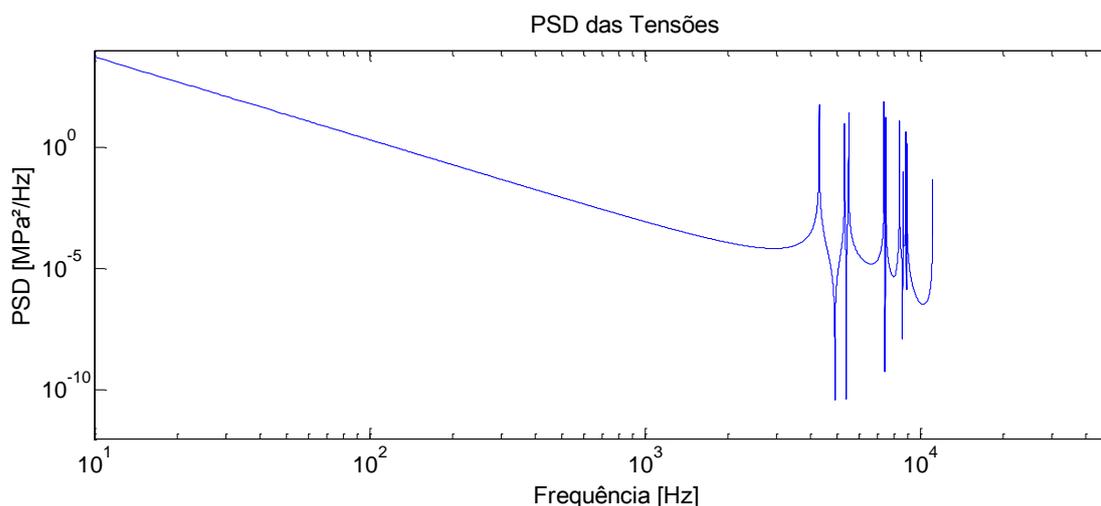


Figura 5.6 – PSD das tensões para o ponto crítico.

De acordo com a curva de Wöhler, o limite de fadiga (S_e) para o aço A36 é de 212,7 MPa. Conforme consta na Figura 5.7, valores superiores ao S_e são encontrados a frequências relativamente baixas para o carregamento imposto. Dessa forma, o estudo de fadiga é desenvolvido na faixa de 10 a 100 Hz.

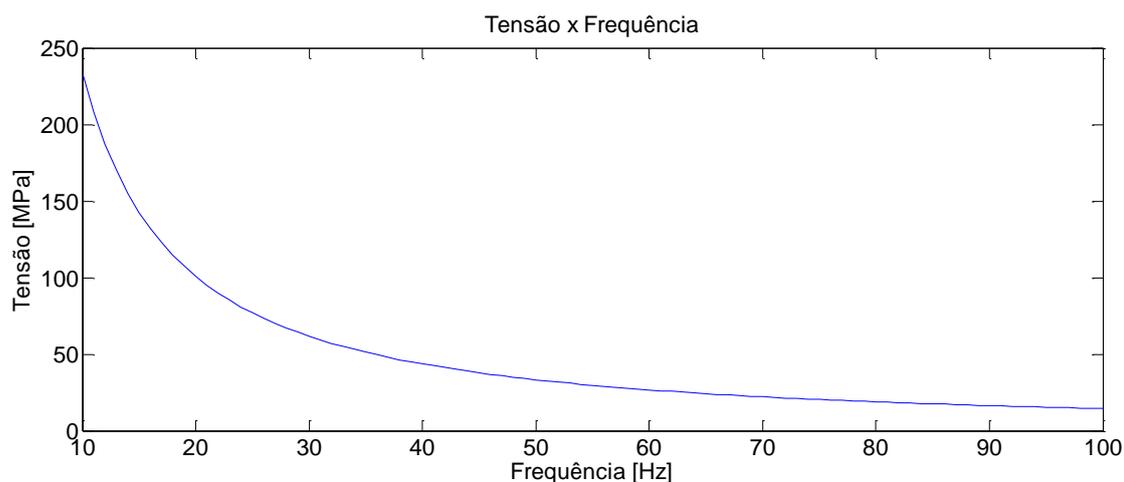


Figura 5.7 – Sinal de Tensão espectral para faixa de frequência de 10 a 100 Hz.

A Figura 5.8 consta a curva encontrada pela formulação de Dirlik, para o tempo total de uma hora de carregamento. Os pontos em vermelho indicam maior densidade de tensão de baixa amplitude ao longo do histórico de frequência. A curva de Dirlik mostra que o número de ciclos de tensão de alta amplitude ocorre poucas vezes em comparação as tensões de menor amplitude.

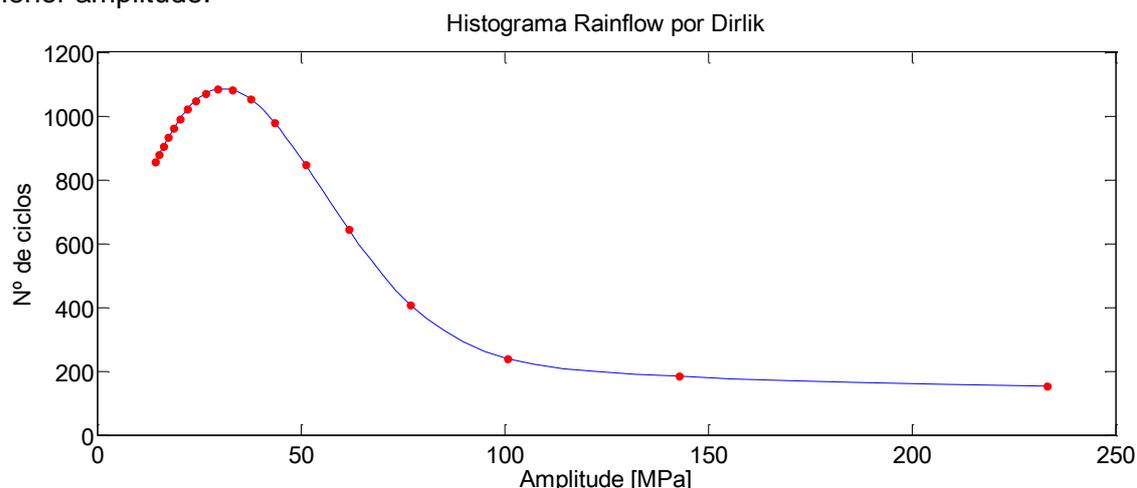


Figura 5.8 – Curva de Dirlik para estimativa de ciclos por uma PSD de tensão.

Para o exemplo apresentado, o dano estimado durante 1 hora de aplicação da força é de $3,62E-05$, e a vida é de aproximadamente 3,8 meses.

7. CONCLUSÕES

A formulação do problema transiente pelo domínio da frequência através da análise modal se mostrou um método viável de ser desenvolvido.

O emprego de análise no domínio da frequência em problemas transientes se torna mais econômico em memória e tempo de processamento quando comparado aos métodos desenvolvidos no domínio do tempo, uma vez que estes exigem um passo de tempo muito pequeno para uma boa simulação.

Como sugestão para trabalhos futuros, propõem-se, além do equacionamento aqui desenvolvido, a comparação de resultados com metodologias alternativas, com casos existentes na literatura, com dados experimentais, e com resultados de análises temporais,

apesar de esta última ser de mais difícil comparação, uma vez que a simulação exige uma máquina com alta capacidade de processamento para tornar a simulação transiente viável.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ariduru, S. **“Fatigue Life Calculation by Rainflow Cycle Counting Method”**, Dissertação, Middle East Technical University, Ankara, 2004.

Barros, M. **“Métodos Estatísticos de Apoio à Decisão”**, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Bendat JS. **“Probability functions for random responses”**, NASA report on contract NAS-5-4590, 1964.

Bishop, N.W.M. **“The use of frequency domain parameters to predict structural fatigue”**, Tese, University of Warwick, Coventry, 1998.

Callister, W. D; Rethwisch, D.G. **“Material science and engineering: An Introduction”**. Sétima ed., Editora John Wiley and Sons, Nova York, 2007.

Collins, J. A. **“Failure of materials in mechanical design”**, Editora John Wiley & Sons, Nova York, 1981.

Dirlik, T. **“Application of Computers in Fatigue Analysis”**, Tese, University of Warwick, Coventry, 1985.

Gupta, A.K. **“Response Spectrum Method in Seismic Analysis and Design of Structures”**, Editora CRC Press, 1992.

Halfpenny, A. **“A Frequency Domain Approach for Fatigue Life Estimation from Finite Element Analysis”**, International Conference on Damage Assessment of Structures, Sheffield, 1999.

Kareem, A.; Hsieh, C.C.; Tognarelli, M.A. **“Frequency-Domain Analysis of Offshore Platform in Non-Gaussian Seas”**, Journal of Engineering Mechanics, 1998.

Marczak, R.J. **“Tópicos em Dinâmica Estrutural – Superposição Modal”**, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

Meirovitch, L. **“Elements of Vibration Analysis”**, Editora McGraw-Hill, New York, 1975.

Mrsnik, M.; Slavic, J.; Boltezar, M. **“Frequency Domain Methods for a Vibration Fatigue Life Estimation – Application to Real data”**, Faculty of Mechanical Engineering, University of Ljubljana, Ljubljana, 2013.

Pravia, Z.M.C. **“Sistemas com amortecimento não proporcional no domínio da frequência”**, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2007.

Qiang, R.; Hongyan W. **“Frequency Domain Fatigue Assessment of Vehicle Component under Random Load Spectrum”**, 9th International Conference on Damage Assessment of Structures, Huajiang Ouyang, 2011.

Rajasekaran, S. **“Structural dynamics of earthquake engineering. Theory and application using Mathematica and Matlab”**, Editora CRC Press, Cambridge, 2009.

Shigley, J. E. **“Elementos de Máquinas”**. Tradução de Edival Ponciano Carvalho. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, Volume 1, 1984.

APÊNDICE A

Tabela A.1 – Constantes do AÇO A36.

Tensão de Escoamento	250 MPa
Tensão de Ruptura	460 MPa

Tabela A.2 – Autovetores e Autovalores para os primeiros cinco modos de vibração, levando em conta os oito nós da interface global/local.

MODOS DE VIBRAÇÃO – PRIMEIRAS 5 FREQUÊNCIAS NATURAIS										
MODO 1		MODO 2		MODO 3		MODO 4		MODO 5		
$\omega_{n1} = 4292,5 \text{ Hz}$		$\omega_{n2} = 5308,7 \text{ Hz}$		$\omega_{n3} = 5488,3 \text{ Hz}$		$\omega_{n4} = 7381,1 \text{ Hz}$		$\omega_{n5} = 7492,9 \text{ Hz}$		
GDL/ NÓ	x1	y1	x2	y2	x3	y3	x4	y4	x5	y5
1	4,680	5,989	9,934	-7,710	5,178	6,128	1,976	-9,306	3,091	-1,794
2	-1,031	8,503	8,931	-1,790	1,002	8,271	0,246	-13,079	0,884	-3,163
3	2,796	8,848	8,800	4,625	-3,295	6,267	-1,704	-10,461	1,288	-2,591
4	-3,287	6,658	5,891	-7,298	8,061	3,876	-1,538	-5,887	-5,790	-1,170
5	2,282	9,449	4,973	4,067	-5,419	3,905	3,697	-6,702	-4,419	-1,552
6	-0,966	6,999	-0,135	-7,348	6,925	1,260	-1,276	-0,663	-10,113	-0,346
7	-0,198	10,349	-0,125	-2,072	1,757	-0,028	1,593	0,904	-8,842	0,593
8	0,538	9,791	-0,550	4,008	-3,545	1,125	4,686	-1,054	-8,117	0,442

Tabela A.3 – Autovetores e Autovalores do sexto ao décimo modo de vibração, levando em conta os oito nós da interface global/local.

MODOS DE VIBRAÇÃO – 6ª À 10ª FREQUÊNCIA NATURAL										
MODO 6		MODO 7		MODO 8		MODO 9		MODO 10		
$\omega_{n6} = 8399,2 \text{ Hz}$		$\omega_{n7} = 8642,6 \text{ Hz}$		$\omega_{n8} = 8880,2 \text{ Hz}$		$\omega_{n9} = 8920,5 \text{ Hz}$		$\omega_{n10} = 11085 \text{ Hz}$		
GDL/ NÓ	x6	y6	x7	y7	x8	y8	x9	y9	x10	y10
1	4,957	4,416	-1,582	15,065	3,414	-9,252	-7,364	-10,740	4,065	6,683
2	0,760	12,226	-2,200	5,858	1,902	-10,515	-9,134	-5,543	1,866	21,496
3	-3,223	11,598	-2,583	-7,717	-0,091	-10,807	-8,756	2,905	-0,815	14,963
4	5,270	2,469	-0,818	9,981	3,812	-4,759	-5,020	-9,818	6,278	2,313
5	-3,943	8,569	-5,008	-5,430	-0,769	-6,591	-6,254	3,615	-6,277	7,048
6	0,437	1,543	-2,023	3,663	3,616	1,235	-1,213	-9,706	1,381	-1,586
7	0,052	5,526	-5,798	0,233	1,321	0,720	-2,460	-3,766	-0,031	-5,161
8	-0,597	7,095	-4,989	-2,384	-1,378	-1,221	-2,902	5,002	-3,511	-0,857

Tabela A.4 – Matriz B , que relaciona deslocamento unitário e tensões no ponto crítico para os primeiros 4 nós.

MATRIZ B								
	NÓ 1		NÓ 2		NÓ 3		NÓ 4	
	x1 = 1	y1 = 1	x2 = 1	y2 = 1	x3 = 1	y3 = 1	x4 = 1	y4 = 1
Txx [Mpa]	-832,76	976,66	-37,62	-2638,90	889,07	1002,10	-1395,20	-108,78
Tyy [Mpa]	-6,69	4,02	1,82	-5,67	-2,18	0,61	-0,38	1,01
Cxy [Mpa]	47,97	-25,37	-31,35	35,32	23,02	-2,95	5,79	-4,08
Te [Mpa]	833,58	975,64	66,60	2636,80	891,05	1001,80	1395,10	109,52

Tabela A.5 – Matriz B , que relaciona deslocamento unitário e tensões no ponto crítico do nó 5 ao nó 8.

MATRIZ B								
	NÓ 5		NÓ 6		NÓ 7		NÓ 8	
	x5 = 1	y5 = 1	x6 = 1	y6 = 1	x7 = 1	y7 = 1	x8 = 1	y8 = 1
Txx [Mpa]	1350,40	-117,90	133,88	118,74	-2,33	673,07	-105,47	94,98
Tyy [Mpa]	5,61	-1,89	1,17	1,53	0,08	1,44	0,58	-1,05
Cxy [Mpa]	-34,69	9,30	-6,85	-8,64	-0,62	-9,48	-3,26	5,91
Te [Mpa]	1349,00	118,07	133,83	118,93	2,60	672,55	105,91	96,06

APÊNDICE B

Algoritmo desenvolvido:

Parte I – Análise Modal

```
% Este algoritmo tem como entrada de dados as frequências naturais de uma
% estrutura, os modos de vibração dos pontos de interface global/local e as
% tensões armazenadas na matriz B. O deslocamento em frequência e a
% respectiva
% tensão no ponto de interesse são obtidos via análise modal.
% Daiane P. Santos. Maio/2015

clear;
clc;
format long

%%Leitura do arquivo de dados modais:
extarq = '*.xls'; [arquivo,pasta] = uigetfile(extarq,'Escolha o arquivo .xls
de dados:'); cd(pasta); A=xlsread(arquivo);

phi = A(:,1:10);           % Autovetores massa-normalizados
wn = A(1:10,11) ;         % Autovalores
B = A(1:4,12:27);        % Matriz relação de tensão-deslocamento unitário,
                          % Linhas: Txx,Tyy,Cxy,T_VM

r = length(wn);          % Tamanho do vetor de frequências naturais

%%PSD de forças
w1 = 10;                  % primeira frequência do espectro. [hz]
ki = 11100;               % última frequência do espectro. [hz]
```

```

for i = w1:ki
    w(i) = i;
end
w = w(:,w1:ki); % excluindo os primeiros zeros, pois i não
                % começa em 01, aí até chegar no primeiro
                % valor (w1) declarado, o matlab enche de zeros.
k = length(w); % tamanho do vetor w qdo descontado os zeros
iniciais.
nPSD = -1.21; % inclinação
S1 = 800^2/w(1); % definição da Fmax em 800N à uma dada
                % frequência inicial
C = S1/(w(1)^nPSD); % cte de intensidade

for i = 1:k;
    S(i) = C*w(i).^nPSD; % PSD
    Fi(i) = (S(i)*w(i))^0.5; % dividindo a PSD em faixas dicretas, e
                            % retirando os valores de força
                            % correspondente à frequência declarada
end

%%Deslocamento em frequência
for i = 1:k;
    for j = 1:r;
        Q(i,j) = C*w(i).^nPSD * 1 / ((wn(j)).^2*(1-(w(i)/wn(j)).^2));
    end
end

%%Tensão equivalente em frequência
Tw = abs(B*phi*Q');
Te = Tw(4,:); % Tensão equivalente de Von Misses [MPa]
figure(1)
plot(w,Te); % [MPa x Hz]
xlabel('Frequência [Hz]'); ylabel('Tensão [MPa]');
title('Tensão x Frequência');

%%PSD de Tensões (Von Mises)
for i = 1:k
    PSD_Tw(i) = Te(i).^2/w(i); % [MPa^2/Hz]
end

figure (2)
loglog(w, PSD_Tw); % [Hz x MPa^2/Hz]
xlabel('Frequência [Hz]'); ylabel('PSD [MPa^2/Hz]');
title('PSD das Tensões');

```

Parte II – Estimativa de Dano e Vida em fadiga pelo modelo de Dirlik e pela definição de Wöhler

%Este algoritmo tem como entrada de dados a frequência do sinal, amplitude da
 %tensão e amplitude da PSD de Tensões. Através de Dirlik o n° de picos é
 %estimado e o dano acumulado é calculado por Palmgren Miner.
 % Daiane P. Santos. Maio/2015

```
format long;
```

```
%Leitura do arquivo de dados modais:
extarq = '*.xls'; [arquivo,pasta]=uigetfile(extarq,'Escolha o arquivo .xls de
dados:'); cd(pasta); THF=xlsread(arquivo);
```

```

size(THF);
f = THF(:,1);
a = THF(:,2);

disp(' ');
T = input(' Entrar com a duração em segundos (s) ');

n = length(f);
m0 = 0; %mo a m4 são momentos de área da função PSD
m1 = 0;
m2 = 0;
m4 = 0;
df = 1;
for i = 1:n
    m0 = m0 + a(i)*df;
    m1 = m1 + a(i)*f(i)*df;
    m2 = m2 + a(i)*f(i)^2*df;
    m4 = m4 + a(i)*f(i)^4*df;
end

EP = (m4/m2)^0.5; %n° de picos esperados
gamma = m2/(m0*m4)^0.5; %fator de irregularidade

Xm = (m1/m0)*(m2/m4)^0.5; % Xm a Q são parâmetros estatísticos em
    função dos momentos de área

D1= 2*(Xm-gamma^2)/(1+gamma^2);
R = (gamma-Xm-D1^2)/(1-gamma-D1+D1^2);
D2 = (1-gamma-D1+D1^2)/(1-R);
D3 = 1-D1-D2;
Q = 5*(gamma-D3-D2*R)/(4*D1);

for i = 1:n
    Sm(i) = THF(i,3); %sinal de tensão espectral [MPa]
    Z = Sm(i)/(2*(m0)^0.5);
    t1 = (D1/Q)*exp(-Z/Q);
    t2 = (D2*Z/R^2)*exp((-Z^2)/(2*R^2));
    t3 = D3*Z*exp(-Z^2/2);

    P = (t1+t2+t3)/(2*(m0)^0.5); %densidade de probabilidade de Dirlik
    p(i) = P;
end

Nm = EP*T*p; %n° de ciclos de tensão espectral

figure(1); %plot tensão [MPa] x ciclos esperados
plot(Sm(1, 1:n),Nm(1,1:n));
title('Histograma por Dirlik');
xlabel('Tensão pico-vale [MPa]');
ylabel('N° de ciclos');

%Cálculo de dano acumulado por Palmgren-Miner
Sf = 920 ; % cte p/ aço A36
b = -0.106; % cte p/ aço A36

Nf = [1 10 50 10e1 50e1 10e2 50e2 10e3 50e3 10e4 50e4 10e5 50e9 ];
Sn = Sf*Nf.^b;
Sn(13) = Sn(12); % para Nf > 10e6 a vida é infinita

```

```

figure(2) % plot [MPa] x [ciclos para atingir a falha]
loglog(Nf,Sn);
axis([0.5 10^11 170 930]);
title('Cuva de Wöhler (S-N)');
xlabel('N° de ciclos');
ylabel('Tensão [MPa]');
hold on
text(1.6e5, 10^2.9,[' \color{blue}', 'S = 920N_f.^-^0.^1^0^6']);
plot(Nf(12),Sn(12),'.g');
text(1.6e5, 185,[' \color{red}', 'S(N_f = 10^6) = 212,7 [MPa]']);
hold off

SmPOS = find(Sm>212.7); %identifica a posição de tensão acima do Limite
                        %de Fadiga (Se). Se(açoA36) = 212,7MPa
xhist = Sm(SmPOS); %lê apenas os as tensões que entram no cálculo
                  %de fadiga
xcount = Nm(SmPOS); %descarta a respectiva amplitude para de ciclo
                   %de vida infinita.

% Sn = Sf*Nf.^b; (isolando Nf):
Nfm = (xhist/Sf).^(1/b); %n° de ciclos em dada tensão necessários para
                        %a falha do componente, segundo o material e a
                        %curva de Wöhler .

num = length(xhist);
for i = 1:num
    D(i) = xcount(i)/Nfm(i); %fração de dano
end
Dano = sum(D) %dano acumulado

hold on %plot dos pontos do sinal de tensão x ciclos
        %na curva SN
plot (xcount,xhist,'.r')
hold off

% Vida em fadiga
Vf = T/Dano %vida em segundos

```