

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**CÁLCULO DO FATOR DE UTILIZAÇÃO TÉRMICA DE UM
REATOR NUCLEAR ATRAVÉS DO MÉTODO LTS_N**

por

FÁBIO KRUSE
Especialista em Matemática

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Professora Orientadora
Dra. Cynthia Feijó Segatto

Porto Alegre, 15 dezembro de 1998

“Um descobrimento matemático sempre se produz no momento oportuno, para tornar possível cada novo progresso no estudo dos fenômenos do mundo real.”

Hermite

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido dons que me permitiram alcançar este objetivo.

À Professora Cynthia Feijó Segatto, pela orientação na elaboração deste trabalho e, principalmente, pela amizade e incentivo sempre presentes.

Ao Professor Rudnei Dias da Cunha, pelo apoio, incentivo e amizade desde o início deste curso.

Ao Professor Marco Túlio Menna Barreto Vilhena pela sugestão do trabalho e pela ajuda na solução do mesmo.

Aos meus pais e meus irmãos que sempre me deram força nos momentos difíceis, acreditando em mim e vibrando com cada conquista.

A Lane, pelo carinho, paciência, compreensão, amor e, principalmente, por tornar meus dias cada vez mais felizes e belos.

Às amigas e colegas Ana Paula Bernardi, Maria Gomes e Sandra Renz pelos bons momentos que compartilhamos juntos e pela bonita amizade que cultivamos.

Aos colegas do Pós-Graduação, pela amizade, carinho, ajuda e pelos maravilhosos momentos compartilhados.

À minha grande amiga Elena, que sempre me desafiou e incentivou a ir em frente, acreditando no meu potencial.

A CAPES, pelo suporte financeiro sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

A todos meus amigos e ex-alunos, que sempre vibraram com minhas conquistas e torceram para que este sonho se tornasse realidade.

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é calcular o fator de utilização térmica através da aplicação do método LTS_N . Inicialmente definimos o fator de utilização térmica f para reatores heterogêneos e homogêneos, salientando que o problema fundamental do cálculo desse fator para sistemas heterogêneos consiste em determinar os valores dos fluxos médios nas regiões do combustível e do moderador. A seguir procedemos a análise do método LTS_N e a sua aplicação no cálculo do fator de desvantagem ρ , bem como na determinação do fator de utilização térmica.

ABSTRACT

The objective of this work is to calculate the thermal utilization factor f applying the LTS_N method. First, we define the thermal utilization factor f to heterogeneous and homogeneous reactors, observing that the main problem to calculate f to heterogeneous systems consists in calculating the average flux in the fuel and in the moderator. Afterwards, we apply the LTS_N method to obtain the disadvantage factor ρ and the thermal utilization factor f .

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz de ordem N
B(x)	Matriz transformada inversa de $(sI + A)^{-1}$ de ordem N
C	Região do combustível (combustível = urânio)
D	Matriz diagonal
D_C	Coefficiente de difusão da região do combustível
D_M	Coefficiente de difusão da região do moderador
E	Absorção adicional no moderador
F	Razão entre o fluxo na superfície do combustível e o fluxo médio no interior do combustível.
f	Fator de utilização térmica
f^{het}	Fator de utilização térmica em reatores heterogêneos
f^{hom}	Fator de utilização térmica em reatores homogêneos
$f(\mu_m)$	Fluxo angular incidente em $x = 0$, na direção positiva μ_m
$g(\mu_m)$	Fluxo angular incidente em $x = x_0$, na direção negativa μ_m
$\underline{H(x)}$	Vetor definido pela convolução de B(x) com $\underline{S(x)}$ ou $\underline{Q(x)}$

H	Probabilidade de captura no moderador por um nêutron que nasce uniforme e isotropicamente
I	Matriz Identidade
$J_-(c)$	Corrente de nêutrons que saem do moderador em $r = c$
$J_+(c)$	Corrente de nêutrons que entram no moderador em $r = c$
$J_-(a)$	Corrente de nêutrons que entram no urânio em $r = a$
$J(x)$	Densidade de corrente de nêutrons
K_C	Razão entre a secção de choque macroscópica e o coeficiente de difusão no combustível.
K_M	Razão entre a secção de choque macroscópica e o coeficiente de difusão no moderador.
L^{-1}	Transformada inversa de Laplace
M	Região do moderador (moderador = água)
N	Ordem do método
N_C^{hom}	Densidade nuclear na região do combustível
N_M^{hom}	Densidade nuclear na região do moderador
P	Matriz permutação
P	Probabilidade de fuga de nêutrons
$P_l(\mu)$	Polinômios de Legendre

$\underline{Q}(x)$	Vetor fonte; densidade de moderação
R_C	Espessura da região do combustível
R_M	Espessura da célula de uma placa plana
$S_m(x)$	Fonte em x na direção μ_m
$\tilde{S}_m(s)$	Vetor fonte transformado
s_i	Autovalores da matriz A
V_C	Volume de combustível
V_M	Volume do moderador
w	Pesos da quadratura de Gauss
X	Matriz de autovalores
x_0	Espessura da placa
β_l	Coefficientes da expansão em polinômios de Legendre
$\phi_m(x)$	Fluxo angular em x na direção μ_m $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}} \right)$
$\bar{\phi}_i(x)$	Fluxo angular médio na região i
$\phi_C(x)$	Fluxo angular em x na região do combustível $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}} \right)$

$\phi_M(x)$	Fluxo angular em x na região do moderador $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}} \right)$
$\Gamma'U$	Probabilidade dos nêutrons serem capturados pelo urânio por nêutrons entrando na célula em $r = c$
λ	Distância de extrapolação
μ	Direção de propagação do nêutron, $\mu = \cos\Theta$
μ_m	Direções discretas, raízes do polinômio de Legendre de grau N
ρ	Fator de desvantagem
σ_t	Secção de choque total (cm^{-1})
σ_s	Secção de choque de espalhamento (cm^{-1})
σ_a	Secção de choque de absorção (cm^{-1})
\sum_a^C	Secção de choque macroscópica na região do combustível
\sum_a^M	Secção de choque macroscópica na região do moderador
$\psi_m(x)$	Fluxo angular em x na direção μ_m $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}} \right)$
$\psi(x, \mu)$	Fluxo angular em x na direção μ $\left(\frac{\text{partículas}}{\text{cm}^2 \text{ s esferoradiano}} \right)$
$\vec{\psi}(s)$	Vetor do fluxo angular transformado

$\underline{\psi}(0)$	Vetor do fluxo angular em $x = 0$
$\underline{\psi}_m(0)$	Vetor fluxo angular em $x = 0$ na direção μ_m
$\underline{\psi}_1^R(x)$	Vetor de ordem $N/2$ dos fluxos angulares nas direções positivas na região R
$\underline{\psi}_2^R(x)$	Vetor de ordem $N/2$ dos fluxos angulares nas direções negativas na região R
$\psi_m^C(x)$	Fluxo angular em x , na direção μ_m , na região do combustível
$\psi_m^M(x)$	Fluxo angular em x , na direção μ_m , na região do moderador

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
LISTA DE SÍMBOLOS	v
1. INTRODUÇÃO	1
2. O FATOR DE UTILIZAÇÃO TÉRMICO	5
3. MÉTODOS PARA O CÁLCULO DO FATOR DE UTILIZAÇÃO TÉRMICO EM FORMA ANALÍTICA	12
3.1 Método da Difusão	12
3.2 Método ABH	23
4. O MÉTODO LTS_N	27
4.1 A Formulação LTS_N	27
4.2 Cálculo do Fator de Utilização Térmico	32
4.3 Equivalência entre a Equação da Difusão e a Equação de Transporte S_2	43
5. CONCLUSÃO	47
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48

1. INTRODUÇÃO

Recentemente, uma nova formulação foi desenvolvida visando à obtenção de soluções analíticas para a aproximação S_N (método das ordenadas discretas), da equação de transporte de partículas neutras. Esse método, chamado de LTS_N [1,2,17], baseia-se na aplicação da transformada de Laplace sobre o sistema de equações S_N , com o objetivo de converter o sistema original de equações diferenciais ordinárias em um sistema algébrico, cuja solução e a posterior aplicação da transformada inversa, por via analítica, fornece a solução exata do problema. Com o método LTS_N já foram obtidas soluções analíticas para problemas considerando espalhamento isotrópico e anisotrópico [9,10,15,20], meios homogêneos e heterogêneos [1,2], modelos de um grupo e multigrupo[18], bem como problemas inversos [3], problemas sem simetria azimutal [12,13], problemas de autovalores [4,5] e multidimensionais [21,22,23].

A aproximação S_N da teoria de transporte calcula o fluxo de partículas e, dessa forma, tem sido aplicada em engenharia de reatores nucleares, tanto no cálculo de blindagem como de criticalidade. O fator de utilização térmica é um dos importantes parâmetros a ser considerado no projeto neutrônico de um reator nuclear. Vários métodos já foram utilizados para calcular o fator de utilização térmica f . Esses métodos podem ser classificados em duas categorias: os probabilísticos e os determinísticos. Os probabilísticos

são capazes de executar uma simulação real do problema e, entre eles, destaca-se o método de Monte Carlo [6,8] . Já os determinísticos resolvem os problemas de forma aproximada, porém, em geral, são mais rápidos. Entre eles, os que já foram utilizados para o cálculo do fator f são: método da difusão e o método proposto por Amouyal, Benoist e Horowitz, também conhecido por método ABH. Além disso, outros métodos foram utilizados para a determinação do fluxo de nêutrons nas regiões do combustível e do moderador de um reator, importante no cálculo do fator de utilização térmica, tais como: o método de Honeck, método P_N , método S_N e o método Double P_1 [8, 19].

No método Monte Carlo [6,8], os históricos das posições e velocidades de um determinado número de partículas são geradas através de simulações de eventos discretos, sendo utilizados para estimar o comportamento das partículas (no caso, nêutrons) ao longo de sua trajetória. Esse método é geralmente usado para determinar o fator de multiplicação K e não seus parâmetros específicos (p, f, ε, n) .

O método da difusão [8,19] baseia-se na aplicação da teoria da difusão para determinar a distribuição do fluxo de nêutrons no combustível e no moderador. Considera-se nesse método que a densidade de moderação térmica q , no combustível, é nula, o que é bastante aceitável, uma vez que o nêutron no combustível perde energia por espalhamento elástico, não atingindo nunca energia térmica, ou seja, nunca termalizando-se. Por outro lado, considera-se a densidade de moderação térmica, no moderador, constante e

independente de posição. Divide-se a estrutura combustível-moderador em células unitárias, cada uma contendo em seu centro um elemento de combustível.

O método proposto por Amouyal, Benoist e Horowitz - método ABH [8,19] combina aspectos da teoria do transporte, métodos de probabilidade de colisões e a teoria da difusão e é bastante usado por apresentar bons resultados e por ser um dos métodos mais simples. Esse método calcula o fator de desvantagem característico de uma célula unitária de combustível.

O método de Honeck , que originou o código Thermos [8,19], utiliza uma forma integral da equação de transporte para calcular a dependência espacial do espectro de nêutrons térmicos na célula, caracterizada por uma simetria unidimensional, geralmente cilíndrica.

Na formulação P_N [6,8], os fluxos angulares e o termo de fonte são expandidos em polinômios de Legendre. Usando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Legendre obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias que é resolvido para os coeficientes da expansão do fluxo angular.

A idéia básica do método S_N [6,8], também conhecido por método das ordenadas discretas, aproxima o termo integral da equação de transporte por quadratura de Gauss de ordem N e pela aplicação do método de colocação na variável angular da equação, considerando como função teste a Delta de Dirac e usando como pontos de

2. O FATOR DE UTILIZAÇÃO TÉRMICA

Neste capítulo, definimos o fator de utilização térmica para reatores homogêneos e heterogêneos [8,19], para uma dada composição de combustível - moderador, observando que, para reatores heterogêneos, precisamos conhecer as expressões do fluxo médio de nêutrons nas regiões do combustível e do moderador.

O fator de utilização térmica f é importante no projeto neutrônico de um reator nuclear e é um dos quatro fatores que constituem o fator de multiplicação K_{∞} , que é definido por

$$K_{\infty} = f \cdot \eta \cdot \epsilon \cdot p ,$$

e fornece o número de nêutrons térmicos absorvidos numa geração por cada nêutron absorvido na geração precedente.

O fator f é a probabilidade de que um nêutron térmico seja absorvido no combustível. O termo η é definido pelo produto da probabilidade de que um nêutron absorvido produza fissão, pelo número de nêutrons produzidos em cada uma delas, ν , ou seja,

$$\eta = \nu \cdot \frac{\sum_f^c}{\sum_a^c} ,$$

onde \sum_f^c representa a secção macroscópica de fissão térmica no combustível. O fator de fissão rápida, ϵ , é o número que precisamos multiplicar a quantidade de nêutrons produzidos pela fissão para que o fenômeno (nascimento dos nêutrons por fissão) continue. A probabilidade, p , que um nêutron não seja absorvido pela região energética onde se encontram as ressonâncias é chamada de probabilidade de escape de ressonância.

Para um sistema finito definimos por fator efetivo de multiplicação, K_{ef} , a relação

$$K_{ef} = K_{\infty} \cdot P,$$

onde P é a probabilidade de permanência dos nêutrons no sistema, sendo determinada por

$P = \frac{1}{1 + L^2 B^2}$, sendo L^2 a razão entre o coeficiente de difusão e a secção macroscópica de absorção e B^2 (buckling) o laplaciano geométrico do sistema em questão.

Para que um sistema seja crítico é necessário que $\frac{K_{\infty} \cdot e^{-B^2 \tau}}{1 + L^2 B^2} = 1$, onde $e^{-B^2 \tau}$ é a probabilidade para que um nêutron permaneça no sistema durante o processo de moderação.

Um reator é dito homogêneo quando o núcleo é constituído de uma mistura homogênea de combustível e moderador. Um reator será heterogêneo quando o livre caminho médio dos nêutrons, em qualquer energia, é menor ou da ordem de grandeza da espessura do elemento de combustível. Com isso existirá uma diferença substancial do

fluxo no combustível e no moderador, decorrente da separação física do combustível e moderador.

Nos reatores heterogêneos, a estrutura combustível-moderador está dividida em células unitárias, com geometria adequada, contendo no seu centro, o elemento de combustível. Se o combustível e o moderador estão uniformemente distribuídos no núcleo do reator, então ambos estarão expostos a um mesmo fluxo de nêutrons em todas as regiões. Por outro lado, se combustível e moderador estão fisicamente separados, haverá um fluxo diferente nos dois meios, à mesma energia. No caso de fluxo térmico, haverá uma depressão no fluxo na região do combustível.

O fator de utilização térmica é extremamente sensível à diferença de fluxo nos dois meios, combustível e moderador. Para calcular esse fator, precisamos determinar o fluxo médio no combustível e no moderador.

Para reatores heterogêneos, definimos o fator de utilização térmica como sendo a fração de nêutrons térmicos absorvidos no combustível em uma estrutura infinita de combustível e moderador.

$$f^{het} = \frac{\int_{V_C} \sum_a^C \phi(r) dr}{\int_{V_C} \sum_a^C \phi(r) dr + \int_{V_M} \sum_a^M \phi(r) dr}, \text{ onde} \quad (2.1)$$

V_C : volume de combustível

V_M : volume do moderador

ϕ_C : fluxo na região do combustível

ϕ_M : fluxo na região do moderador

Σ_a^C : secção de choque macroscópica na região do combustível

Σ_a^M : secção de choque macroscópica na região do moderador

Como o combustível(C) e o moderador(M) estão homogeneamente separados, as secções de choque Σ_a^C e Σ_a^M são constantes, podendo ser colocados fora do símbolo de integração, ou seja:

$$f^{het} = \frac{\sum_a^C \int_{V_C} \phi(r) dr}{\sum_a^C \int_{V_C} \phi(r) dr + \sum_a^M \int_{V_M} \phi(r) dr} \quad (2.2)$$

Sendo o fluxo médio em cada região $i = C, M$, definido por

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \phi_i(r) dr, \text{ obtém-se:}$$

$$f^{het} = \frac{\sum_a^C V_C \cdot \bar{\phi}_C}{\sum_a^C V_C \bar{\phi}_C + \sum_a^M V_M \cdot \bar{\phi}_M} \quad (2.3)$$

Dividindo numerador e denominador pelo fluxo médio na região do combustível $\bar{\phi}_C$, tem-se que:

$$f^{het} = \frac{\sum_a^C V_C}{\sum_a^C V_C + \sum_a^M V_M \cdot \left(\frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_C} \right)} \quad (2.4)$$

O fator de desvantagem ρ é definido como sendo a razão entre os fluxos médios na região do moderador e na região do combustível, ou seja:

$$\rho = \frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_C}, \quad \rho \geq 1 \quad (2.5)$$

Substituindo esta definição na expressão (2.4), a mesma reduz-se a:

$$f^{het} = \frac{\sum_a^C V_C}{\sum_a^C V_C + \sum_a^M V_M \cdot \rho} \quad (2.6)$$

O fato pelo qual o fator de desvantagem é sempre maior ou igual a um, pode ser interpretado da seguinte forma: em uma estrutura heterogênea, os nêutrons são termalizados no moderador, passando então para o combustível. A depressão no fluxo na região do combustível é causada pela absorção de alguns nêutrons moderados pelos núcleos do combustível próximo a superfície do mesmo. Esse fenômeno é de grande importância no cálculo da probabilidade de escape da ressonância em reatores

heterogêneos, chamado de auto-blindagem. O fator de desvantagem ρ é função da secção transversal da região de combustível e moderador, bem como das dimensões da célula unitária. Quando as dimensões de heterogeneidade diminuem, aproxima-se do caso homogêneo. No limite, quando essa dimensão é tornada nula, o fluxo na região do combustível iguala-se ao valor do fluxo na região do moderador, ou seja, $\rho = 1$.

Para uma dada relação $\frac{V_M}{V_C}$, o fator de utilização térmica diminui com o aumento da dimensão da célula, uma vez que o fator de desvantagem ρ aumenta.

O fator de utilização térmica para sistemas homogêneos é definido como

$$f^{\text{hom}} = \frac{\sum_a^{C \text{ hom}}}{\sum_a^{C \text{ hom}} + \sum_a^{M \text{ hom}}}, \quad (2.7)$$

se considerarmos o sistema constituído de células unitárias de mesmo volume de combustível e moderador, agora uniformemente distribuídos na célula. Assim, podemos obter a densidade nuclear do material, combustível (C) e moderador (M), na célula homogênea como sendo:

$$N_C^{\text{hom}} = \frac{N_C V_C}{V} \quad \text{e} \quad N_M^{\text{hom}} = \frac{N_M V_M}{V}, \quad \text{onde } V = V_C + V_M \quad (2.8)$$

Para células homogêneas as secções de choque macroscópicas são:

$$\sum_a^{C \text{ hom}} = N_C^{\text{hom}} \cdot \sigma_a^C \quad \text{e} \quad \sum_a^{M \text{ hom}} = N_M^{\text{hom}} \cdot \sigma_a^M \quad (2.9)$$

Assim, a equação (2.7) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f^{\text{hom}} = \frac{\sum_a^C}{\sum_a^C + \sum_a^M (V_M / V_C)} \quad (2.10)$$

Comparando as expressões do fator de utilização térmica (2.6) e (2.10), para sistemas heterogêneos e homogêneos respectivamente, concluímos que $f^{\text{het}} \leq f^{\text{hom}}$, pois ρ é sempre maior ou igual do que a unidade, uma vez que $\bar{\phi}_M \geq \bar{\phi}_C$, devido à depressão do fluxo no combustível. Dividindo-se a equação (2.6) pela equação (2.10), obtemos a seguinte relação:

$$\frac{f^{\text{het}}}{f^{\text{hom}}} = \frac{\sum_a^C + \sum_a^M (V_M / V_C)}{\sum_a^C + \sum_a^M (V_M / V_C) \cdot \rho} \quad (2.11)$$

As secções de choque constantes na expressão acima referem-se a materiais puros.

Portanto, para determinar o valor do fator de utilização térmica, para uma dada composição de combustível - moderador, é necessário conhecer as expressões do fluxo médio nas regiões do combustível e moderador, residindo nesta determinação, o problema fundamental do cálculo de f , que será tratado no capítulo 4.2.

3. MÉTODOS PARA O CÁLCULO DO FATOR DE UTILIZAÇÃO TÉRMICA EM FORMA FECHADA

Neste capítulo analisamos dois métodos que possuem solução analítica para o cálculo do fator de utilização térmica: método da difusão e método proposto por Amouyal, Benoist e Horowitz, também conhecido por método ABH.

3.1 Método da Difusão

Através da teoria da difusão [8,20], este método determina uma expressão analítica para o fator de utilização térmica. Considera-se neste método que a densidade de moderação térmica q , no combustível, é nula, o que é bastante aceitável uma vez que o nêutron no combustível perde energia por espalhamento elástico, não atingindo nunca energia térmica.

Por outro lado, considera-se a densidade de moderação térmica no moderador constante e independente de posição, o que é justificado da seguinte maneira: cada barra de combustível é fonte de nêutrons rápidos que são moderados no moderador

vizinho. A distribuição da densidade de moderação térmica na vizinhança de cada barra de combustível é uma Gaussiana. Se a distância entre os centros das barras é pequena comparada com a distância de moderação, então estas Gaussianas se sobrepõem dando origem a um valor de q , no moderador, aproximadamente constante.

Finalmente dividimos a estrutura combustível-moderador em células unitárias, cada uma contendo em seu centro um elemento de combustível. Desde que todas as células sejam idênticas, na estrutura infinita não existe fluxo de nêutrons de uma célula para outra. Portanto, a densidade de corrente é nula ao longo da fronteira da célula.

Seja um elemento de combustível de uma placa plana de espessura R_c em uma célula de uma placa plana de espessura R_M , conforme figura abaixo.

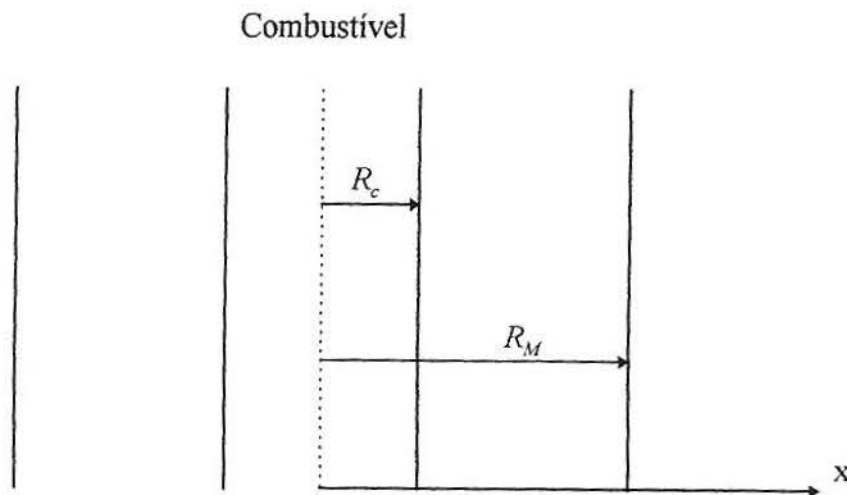


Figura 1. Célula de uma placa plana

A equação da difusão no combustível e moderador será:

$$\nabla^2 \phi_c - \frac{\sum_a^c}{D_c} \phi_c = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq R_c \quad (3.1.1)$$

e

$$\nabla^2 \phi_M - \frac{\sum_a^M}{D_M} \phi + \frac{q}{D_M} = 0 \quad , \quad R_c \leq x \leq R_M \quad (3.1.2)$$

ou

$$\frac{d^2 \phi_c}{dx^2} - K_c^2 \phi_c = 0 \quad (3.1.3)$$

e

$$\frac{d^2 \phi_M}{dx^2} - K_M^2 \phi_M + \frac{q}{D_M} = 0 \quad , \quad (3.1.4)$$

onde

$$K_c^2 = \frac{\sum_a^c}{D_c} \quad e \quad K_M^2 = \frac{\sum_a^M}{D_M} \quad (3.1.5)$$

e D_c e D_M são os coeficientes de difusão nas regiões do combustível e do moderador, respectivamente.

As soluções das equações diferenciais (3.1.3) e (3.1.4) são, respectivamente:

$$\phi_c = A_1 \cosh K_c x + C_1 \sinh K_c x \quad (3.1.6)$$

e

$$\phi_M = A_2 \cosh K_M x + C_2 \sinh K_M x + \frac{q}{\sum_a} \quad (3.1.7)$$

Devido à simetria do fluxo em relação ao eixo do elemento de combustível, tem-se que $C_1 = 0$. Desta forma, podemos reescrever a solução dada pela equação (3.1.6) como:

$$\phi_c = A_1 \cosh K_c x \quad (3.1.8)$$

As condições de fronteira são:

1. $\frac{d\phi_M}{dx} = 0$ em $x = R_M$, ou seja, a densidade de corrente líquida na fronteira da célula é nula, isto é: $-D_{grad}\phi_M = 0$.
2. $\phi_c = \phi_M$ em $x = R_c$ Condição de continuidade na interface
3. $-D_c \frac{d\phi_c}{dx} = -D_M \frac{d\phi_M}{dx}$ em $x = R_c$

Aplicando essas condições de fronteira nas equações (3.1.6) e (3.1.7), obtemos:

$$C_2 = -A_2 \tanh K_M R_M \quad (3.1.9)$$

$$\phi_M = A_2 (\cosh K_M x - \tanh K_M R_M \sinh K_M x) + \frac{q}{\sum_a} \quad (3.1.10)$$

$$\phi_M = A_2 \left(\cosh K_M x - \frac{\sinh K_M R_M}{\cosh K_M R_M} \sinh K_M x \right) + \frac{q}{\sum_a} \quad (3.1.11)$$

$$\phi_M = \frac{A_2}{\cosh K_M R_M} (\cosh K_M x \cosh K_M R_M - \sinh K_M R_M \sinh K_M x) + \frac{q}{\sum_a^M} \quad (3.1.12)$$

$$\text{Fazendo } C = \frac{A_2}{\cosh K_M R_M} \quad (3.1.13)$$

e sendo

$$\cosh(a - b) = \cosh(a) \cdot \cosh(b) - \sinh(a) \sinh(b)$$

podemos escrever a equação (3.1.12) da seguinte maneira:

$$\phi_M = C \cdot \cosh K_M (R_M - x) + \frac{q}{\sum_a^M} \quad (3.1.14)$$

Da condição de fronteira (2), podemos escrever que

$$A_1 \cosh K_c R_c = C \cdot \cosh K_M (R_M - R_c) + \frac{q}{\sum_a^M} \quad (3.1.15)$$

Da condição de fronteira (3), obtemos:

$$A_1 D_c K_c \sinh K_c R_c = -C \cdot D_M K_M \sinh K_M (R_M - R_c) \quad (3.1.16)$$

Dividindo as equações (3.1.15) e (3.1.16), membro a membro, encontramos:

$$\frac{\text{ctgh } K_c R_c}{D_c K_c} = -\frac{\text{ctgh } K_M (R_M - R_c)}{D_M K_M} - \frac{q}{C \sum_a^M D_M K_M \sinh K_M (R_M - R_c)} \quad (3.1.17)$$

Isolando C na equação acima, temos que:

$$C = -\frac{\frac{q}{\sum_a^M D_M K_M \sinh K_M (R_M - R_c)}}{\frac{\text{ctgh } K_c R_c}{D_c K_c} + \frac{\text{ctgh } K_M (R_M - R_c)}{D_M K_M}} \quad (3.1.18)$$

Chamando

$$\psi = \frac{\operatorname{ctgh} K_c R_c}{D_c K_c} + \frac{\operatorname{ctgh} K_M (R_M - R_c)}{D_M K_M}, \quad (3.1.19)$$

a expressão (3.1.18) pode ser escrita como:

$$C = \frac{-q}{\psi \cdot \sum_a^M D_M K_M \operatorname{senh} K_M (R_M - R_c)} \quad (3.1.20)$$

Da equação (3.1.16), substituindo o valor de C, acima obtido, obtemos a seguinte expressão para A_1 :

$$A_1 = - \frac{C \cdot D_M K_M \operatorname{senh} K_M (R_M - R_c)}{D_c K_c \operatorname{senh} K_c R_c} \quad (3.1.21)$$

ou

$$A_1 = \frac{q}{\psi \cdot \sum_a^M D_c K_c \operatorname{senh} K_c R_c} \quad (3.1.22)$$

Substituindo os valores das constantes obtidas com as equações (3.1.20) e (3.1.22), nas expressões do fluxo angular nas regiões do moderador e do combustível, obtemos:

$$\phi_M = \frac{q}{\sum_a^M} \left(1 - \frac{\operatorname{cosh} K_M (R_M - x)}{\psi D_M K_M \operatorname{senh} K_M (R_M - R_c)} \right) \quad (3.1.23)$$

e

$$\phi_c = \frac{q \cdot \operatorname{cosh} K_c x}{\psi \cdot \sum_a^M D_c K_c \operatorname{senh} K_c R_c} \quad (3.1.24)$$

O fator de desvantagem ρ foi definido como:

$$\rho = \frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_c} = \frac{\frac{\int_{R_c}^{R_M} \phi_M(x) dx}{R_c}}{\frac{\int_0^{R_c} \phi_c(x) dx}{R_c}}, \quad (3.1.25)$$

ou seja,

$$\rho = \frac{R_c}{R_M - R_c} \frac{\int_{R_c}^{R_M} \phi_M(x) dx}{\int_0^{R_c} \phi_c(x) dx} \quad (3.1.26)$$

Substituindo as expressões dos fluxos no moderador (equação 3.1.23) e no combustível (equação 3.1.24) na expressão (3.1.26), obtemos:

$$\int_{R_c}^{R_M} \phi_M(x) dx = \frac{q}{\sum_a^M} \int_{R_c}^{R_M} \left(1 - \frac{\cosh K_M (R_M - x)}{\psi \cdot D_M K_M \sinh K_M (R_M - R_c)} \right) dx \quad (3.1.27)$$

Resolvendo a integral do segundo membro da equação acima, podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\int_{R_c}^{R_M} \phi_M(x) dx = \frac{q}{\sum_a^M} \left(R_M - R_c - \frac{1}{\psi \cdot D_M K_M^2} \right) \quad (3.1.28)$$

Usando a expressão (3.1.5) na equação acima, encontramos

$$\int_{R_c}^{R_M} \phi_M(x) dx = \frac{q}{\sum_a^M} \left(R_M - R_c - \frac{1}{\psi \cdot D_M \frac{\sum_a^M}{D_M}} \right) \quad (3.1.29)$$

que, simplificado, transforma-se em:

$$\int_{R_c}^{R_M} \phi_M(x) dx = \frac{q}{\sum_a^M} \left(R_M - R_c - \frac{1}{\psi \cdot \sum_a^M} \right) \quad (3.1.30)$$

Integrando a equação (3.1.24) em ambos os lados, achamos uma expressão que, posteriormente, será substituída no denominador da equação (3.1.26), ou seja:

$$\int_0^{R_c} \phi_c(x) dx = \int_0^{R_c} \frac{q \cdot \cosh K_c x}{\psi \cdot \sum_a^M D_c K_c \sinh K_c R_c} dx \quad (3.1.31)$$

Resolvendo a integral do segundo membro da equação acima, obtemos a expressão

$$\int_0^{R_c} \phi_c(x) dx = \frac{q}{\psi \cdot \sum_a^M D_c K_c^2} \quad (3.1.32)$$

Substituindo a expressão (3.1.5) na equação acima, resulta:

$$\int_0^{R_c} \phi_c(x) dx = \frac{q}{\psi \cdot \sum_a^M D_c \frac{\sum_a^c}{D_c}} = \frac{q}{\psi \cdot \sum_a^M \sum_a^c} \quad (3.1.33)$$

Assim, a equação (3.1.26) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\rho = \frac{R_c}{R_M - R_c} \frac{\frac{q}{\sum_a^M} \left(R_M - R_c - \frac{1}{\psi \cdot \sum_a^M} \right)}{\frac{q}{\sum_a^M \sum_a^c}} \quad (3.1.34)$$

$$\rho = R_c \cdot \psi \cdot \sum_a^c \left(1 - \frac{1}{(R_M - R_c) \cdot \psi \cdot \sum_a^M} \right) \quad (3.1.35)$$

$$\rho = \frac{R_c \sum_a^c}{(R_M - R_c) \cdot \sum_a^M} \left((R_M - R_c) \cdot \psi \cdot \sum_a^M - 1 \right) \quad (3.1.36)$$

Substituindo a expressão (3.1.19) na expressão acima, encontramos a seguinte relação para o fator de desvantagem:

$$\rho = \frac{R_c \sum_a^c}{(R_M - R_c) \cdot \sum_a^M} \left(\frac{(R_M - R_c) \cdot \sum_a^M \coth K_c R_c}{D_c K_c} + \frac{(R_M - R_c) \cdot \sum_a^M \coth K_M (R_M - R_c)}{D_M K_M} - 1 \right) \quad (3.1.37)$$

A relação entre o volume do combustível e moderador é dada pela seguinte razão:

$$\frac{V_c}{V_M} = \frac{R_c}{R_M - R_c} \quad (3.1.38)$$

Deste modo, podemos reescrever a expressão para o fator de desvantagem (3.1.37) como:

$$\rho = \frac{V_c \sum_a^c}{V_M \sum_a^M} \left(\frac{V_M \sum_a^M K_c R_c \coth K_c R_c}{V_c \sum_a^c} + (R_M - R_c) \cdot K_M \coth K_M \cdot (R_M - R_c) - 1 \right) \quad (3.1.39)$$

Chamando-se

$$E = K_M \cdot (R_M - R_c) \cdot \coth K_M (R_M - R_c) \quad (3.1.40)$$

e

$$F = R_c K_c \cdot \coth K_c R_c \quad , \quad (3.1.41)$$

o fator de desvantagem será dado por

$$\rho = \frac{V_c \sum_a^c}{V_M \sum_a^M} \left(\frac{V_M \sum_a^M}{V_c \sum_a^c} \cdot F + E - 1 \right) \quad (3.1.42)$$

Do capítulo 2 temos que o fator de utilização térmico é definido pela seguinte expressão:

$$f = \frac{\sum_a^c V_c}{\sum_a^c V_c + \sum_a^M V_M \cdot \rho} \quad (3.1.43)$$

Substituindo a expressão de ρ (equação 3.1.42) na equação acima, obtemos:

$$\frac{1}{f} = \frac{V_M \sum_a^M}{V_c \sum_a^c} \cdot F + E \quad (3.1.44)$$

A função F pode ser interpretada como sendo a razão entre o fluxo na superfície do combustível e o fluxo médio no interior do combustível, ou seja:

$$F(K_M, R_M) = \frac{\phi_c(R_c)}{\bar{\phi}_c}$$

O termo E representa a absorção adicional no moderador, devido ao aumento do fluxo térmico no moderador acima do valor da interface combustível-moderador.

Portanto, o fator de utilização térmica expresso através do método da difusão é dado pela equação (3.1.44), onde as funções F e E são tabeladas [19].

3.2 Método de Amouyal, Benoist e Horowitz

O método proposto por Amouyal, Benoist e Horowitz [8,19], também conhecido por método ABH, apresenta uma expressão analítica para o cálculo do fator de utilização térmica f de uma célula cilíndrica, contendo em seu interior uma barra de urânio de raio a , colocada em um anel de espessura $c-a$ e de moderador de raio externo b . Esse método consiste na aplicação da aproximação da difusão na região do moderador e pela teoria de colisões múltiplas na região do combustível.

Neste método são feitas as seguintes hipóteses:

- Todos os nêutrons nascem com uma mesma velocidade, ou seja, são monoenergéticos;
- A difusão é isotrópica;
- As fontes são uniformes, isotrópicas e de densidade Q nêutrons/cm³/segundo no moderador, sendo nulas fora deste;
- A densidade de nêutrons por unidade de ângulo sólido (densidade de fase) na fronteira da célula é nula.

A determinação de f , a partir da captura no urânio e no moderador, resulta da relação:

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{\text{Captura no Moderador}}{\text{Captura no Urânio}} \quad (3.2.1)$$

Chamando de $J_{-}(c)$ a corrente de nêutrons saindo do moderador em $r = c$, $J_{+}(c)$ a corrente de nêutrons entrando no moderador em $r = c$ e $J_{-}(a)$ a corrente de nêutrons entrando no urânio em $r = a$, a captura de nêutrons na barra de urânio por unidade de tempo e por unidade de comprimento da barra será, por definição, $2\pi c \cdot J_{-}(c) \Gamma'U$, onde $\Gamma'U$ é a probabilidade de nêutrons serem capturados pelo urânio na célula por nêutrons entrando na célula em $r = c$. Sendo assim, $\Gamma'U$ depende da distribuição angular dos nêutrons que saem do moderador.

A captura do moderador é devido a dois tipos de nêutrons:

- aqueles que depois de serem emitidos pela fonte Q no moderador, jamais deixam o moderador. O número desses nêutrons capturados no moderador por unidade de tempo e de comprimento de célula é

$$\pi(b^2 - c^2) \cdot HQ \quad ,$$

onde H representa a probabilidade de captura no moderador por um nêutron que nasce uniforme e isotropicamente;

- aqueles que penetram no moderador em $r = c$. O número desses nêutrons capturados no moderador por unidade de tempo e de comprimento da célula é:

$$2\pi c J_{-}(c) \Gamma m$$

Pelo princípio da conservação de nêutrons e determinando-se $J_{\pm}(c)$, chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{1}{1-H} \left(H + \frac{\Gamma m (1 - \Gamma' U)}{\Gamma' U} \right) \quad (3.2.2)$$

Devido à hipótese de isotropia dos nêutrons saindo do moderador em $r = c$ e dos nêutrons entrando no urânio em $r = a$, podemos escrever que:

$$c\Gamma'U = a\Gamma U \quad (3.2.3)$$

Isso significa que o número de nêutrons que saem do moderador é igual ao número de nêutrons que entram no combustível.

As expressões para $\Gamma'U$, ΓU e Γm são as seguintes

$$\Gamma'U = \frac{2a^2 \sum uc.P}{c} \quad (3.2.4)$$

$$\Gamma U = 2a \sum uc.P \quad (3.2.5)$$

$$\Gamma m = \frac{2(b^2 - c^2)}{c} \sum mc.(1-H) \quad (3.2.6)$$

onde P é uma probabilidade de fuga de nêutrons e H é definido pela expressão

$$H = 1 - \frac{1}{1 + K_m^2 b^2 C + \frac{b^2 - c^2}{2c} \cdot \frac{\lambda}{\sum mt} K_m^2} \quad (3.2.7)$$

onde:

$$K_m^2 = 3 \sum mt \sum mc \quad (3.2.8)$$

e

$$C = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{b^2}{c^2}}{\frac{b^2}{c^2} - 1} \log\left(\frac{b}{c}\right) - \frac{3}{4} + \frac{1}{\frac{4b^2}{c^2}} \right] \quad (3.2.9)$$

sendo:

\sum_{uc} = secção eficaz macroscópica de captura de urânio

\sum_{us} = secção eficaz macroscópica de difusão de urânio

\sum_{ut} = secção eficaz macroscópica total de urânio

\sum_{mc} = secção eficaz macroscópica de captura no moderador

\sum_{mt} = secção eficaz macroscópica total no moderador

Substituindo na fórmula (3.2.2) as expressões (3.2.5), (3.2.6) e (3.2.7), encontramos a seguinte relação para o fator de utilização térmico

$$\frac{1}{f} - 1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \frac{\sum_{mc}}{\sum_{uc}} \frac{1}{P} + K_m^2 b^2 C + \frac{b^2 - c^2}{c} \sum_{mc} \left(\frac{3\lambda}{2} - 2 \right) \quad (3.2.10)$$

onde λ denota a distância de extrapolação. A determinação de P e λ podem ser obtidos a partir de resultados encontrados na bibliografia [19].

4. MÉTODO LTS_N

Neste capítulo, inicialmente apresentamos o método LTS_N , recentemente desenvolvido [1,2,3,4,8,13,20], que fornece uma expressão analítica para o fluxo de nêutrons da equação de transporte unidimensional numa placa plana e caracteriza-se pela aplicação da transformada de Laplace nas equações de ordenadas discretas S_N . Através desta formulação, desenvolvemos uma outra forma fechada para o cálculo do fator de utilização térmica.

4.1 A Formulação LTS_N

Consideremos o seguinte problema unidimensional S_N em uma placa plana

$$\frac{d}{dx} \psi_m(x) + \frac{\sigma_t}{\mu_m} \psi_m(x) = \frac{1}{\mu_m} \sum_{k=1}^N \sigma^{mk} \omega_k \psi_k(x) + S_m(x), \quad m = 1:N \quad (4.1.1)$$

com $x \in [0, x_0]$ e sujeito às condições de contorno abaixo:

$$\psi_m(0) = f(\mu_m) \quad , \quad \mu_m > 0 \quad (4.1.2)$$

e

$$\psi_m(x_0) = g(\mu_m) \quad , \quad \mu_m < 0, \quad (4.1.3)$$

onde $\psi_m(x)$ é o fluxo angular na direção μ_m ,

$$\sigma^{mk} = \frac{\sigma^s}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_k) P_l(\mu_m) \quad (4.1.4)$$

e a fonte

$$S_m(x) = \frac{Q(x, \mu_m)}{\mu_m} \quad (4.1.5)$$

A equação (4.1.1) pode ser escrita matricialmente como

$$\frac{d}{dx} \underline{\psi}(x) + \mathbf{A} \underline{\psi}(x) = \underline{S}(x) \quad , \quad (4.1.6)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz $N \times N$ definida por

$$a(i,j) = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{\mu_i} - \frac{\sigma^{ij} w_j}{\mu_i} , & \text{se } i = j \\ -\frac{\sigma^{ij} w_j}{\mu_i} , & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad , \quad (4.1.7)$$

$\underline{S}(x)$ é um vetor conhecido e $\underline{\psi}(x)$ é um vetor desconhecido.

Assim, aplicando a transformada de Laplace na equação (4.1.1) obtemos:

$$s \underline{\bar{\psi}}(s) + \frac{\sigma_i}{\mu_m} \underline{\bar{\psi}}(s) - \frac{1}{\mu_m} \sum_{k=1}^N \sigma^{mk} w_k \underline{\bar{\psi}}(s) = \psi_m(0) + \underline{\bar{S}}_m(s), \quad m = 1:N \quad (4.1.8)$$

que pode ser escrito matricialmente como

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{A}) \cdot \underline{\bar{\psi}}(s) = \underline{\psi}(0) + \underline{\bar{S}}(s) \quad (4.1.9)$$

Logo,

$$\underline{\psi}(x) = L^{-1}[(s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}].\underline{\psi}(0) + \underline{H}(x) \quad (4.1.10)$$

onde o vetor $\underline{\psi}(x)$ é

$$\underline{\psi}(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{bmatrix}, \quad (4.1.11)$$

e o vetor $\underline{H}(x)$ é definido pela convolução [20]

$$\underline{H}(x) = \mathbf{B}(x) * \underline{S}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x - \eta). \underline{S}(\eta) d\eta \quad (4.1.12)$$

sendo

$$\mathbf{B}(x) = L^{-1}[(s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}] \quad (4.1.13)$$

Segundo Segatto et all [15], vamos decompor a matriz \mathbf{A} na forma diagonal como $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}$, onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal, cujos elementos são os autovalores da matriz \mathbf{A} e \mathbf{X} é uma matriz de autovetores correspondentes. Portanto, a inversa da matriz $(s\mathbf{I} + \mathbf{A})$, através do método da diagonalização, é dado por

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} = [(s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})]^{-1} = [\mathbf{X}(s\mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{X}^{-1}]^{-1} = \mathbf{X}(s\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1} \quad (4.1.14)$$

Sendo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & s_N \end{bmatrix} \quad (4.1.15)$$

onde s_i , $i = 1 : N$ são os autovalores da matriz \mathbf{A} , então

$$s\mathbf{I} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} s + s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s + s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & s + s_3 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s + s_N \end{bmatrix} \quad (4.1.16)$$

A inversa da matriz acima é dada por

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + s_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + s_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s + s_N} \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na expressão (4.1.17),
obtemos

$$L^{-1}[s\mathbf{I} + \mathbf{D}]^{-1} = e^{-\mathbf{D}x} = \begin{bmatrix} e^{-s_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-s_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-s_N x} \end{bmatrix} \quad (4.1.18)$$

Desta forma, podemos reescrever a expressão (4.1.10) como

$$\underline{\psi}(x) = (\mathbf{X} \cdot e^{-\mathbf{D}x} \cdot \mathbf{X}^{-1}) \cdot \underline{\psi}(0) + \underline{H}(x) \quad , \quad (4.1.19)$$

que nos fornece o vetor fluxo angular de nêutrons.

4.2 Fator de Utilização Térmica

Consideremos o seguinte problema idealizado unidimensional S_N em uma placa plana heterogênea, composta por duas regiões e um grupo térmico de energia: a região do combustível (C), e a região do moderador (M). A figura 2 abaixo representa a placa com as duas regiões, respectivamente.

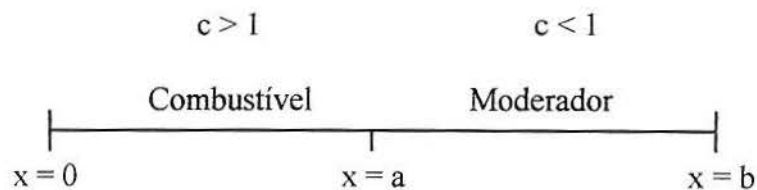


Figura 2. Placa Heterogênea

onde $c = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_t}$.

As equações do fluxo de nêutrons nas duas regiões são, respectivamente:

$$\mu_m \frac{d\psi_m^C}{dx} + \psi_m^C = \frac{c_C}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i^C w_i, \quad 0 < x < a, \quad c > 1 \quad (4.2.1)$$

com condição de contorno reflexiva em $x = 0$ e $x = b$, e

$$\mu_m \frac{d\psi_m^M}{dx^*} + \psi_m^M = \frac{c_M}{2} \sum_{i=1}^N \psi_i^M w_i + \frac{q}{2}, \quad a < x^* < b \quad \text{e} \quad c < 1 \quad (4.2.2)$$

Para aplicar o método LTS_N , fazemos uma mudança de variável na equação (4.2.2), isto é, $0 < x < L$, onde $x = x^* - a$ e $L = b - a$, sendo que $m = 1: N$, $\frac{q}{2}$ é a densidade de moderação [8] e sujeita à condição de contorno reflexiva em $x = L$.

Dividindo as equações dos fluxos angulares por μ_m obtemos os seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$\frac{d\psi_m^C}{dx} + \frac{\psi_m^C}{\mu_m} = \frac{c_C}{2\mu_m} \sum_{i=1}^N \psi_i^C w_i$$

para a região do combustível e

$$\frac{d\psi_m^M}{dx} + \frac{\psi_m^M}{\mu_m} = \frac{c_M}{2\mu_m} \sum_{i=1}^N \psi_i^M w_i + \frac{q(x)}{2\mu_m}$$

para a região do moderador. Desta forma, os sistemas acima podem ser escritos matricialmente como:

$$\frac{d}{dx} \underline{\psi}_m^C + \mathbf{A}^C \underline{\psi}_m^C = 0 \quad (4.2.3)$$

e

$$\frac{d}{dx} \underline{\psi}_m^M + \mathbf{A}^M \underline{\psi}_m^M = \underline{Q} \quad (4.2.4)$$

sendo que a matriz \mathbf{A} em cada região é definida por

$$a_{ij}^C = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} - \frac{c_C \cdot w_j}{2\mu_i}, & \text{se } i = j \\ -\frac{c_C \cdot w_j}{2\mu_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e

$$a_{ij}^M = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} - \frac{c_M \cdot w_j}{2\mu_i}, & \text{se } i = j \\ -\frac{c_M \cdot w_j}{2\mu_i}, & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

e a densidade de moderação Q dada pelo vetor

$$\underline{Q} = \frac{q(x)}{2} \begin{bmatrix} 1/\mu_1 \\ 1/\mu_2 \\ \vdots \\ 1/\mu_N \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformada de Laplace nas equações (4.2.3) e (4.2.4) obtemos, respectivamente:

$$s \underline{\psi}^C + \mathbf{A}^C \underline{\psi}^C = \underline{\psi}^C(0) \quad (4.2.5)$$

e

$$s\bar{\psi}^M + \mathbf{A}^M \bar{\psi}^M = \bar{\psi}^M(0) + \bar{Q}, \quad (4.2.6)$$

ou seja,

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{A}^C) \bar{\psi}^C = \bar{\psi}^C(0) \quad (4.2.7)$$

e

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{A}^M) \bar{\psi}^M = \bar{\psi}^M(0) + \bar{Q} \quad (4.2.8)$$

Assim, o fluxo angular $\bar{\psi}(x)$ em ambas as regiões será obtido através da transformada inversa de Laplace, isto é:

$$\bar{\psi}^C(x) = L^{-1}\left((s\mathbf{I} + \mathbf{A}^C)^{-1}\right) \bar{\psi}^C(0) \quad (4.2.9)$$

e

$$\bar{\psi}^M(x) = L^{-1}\left((s\mathbf{I} + \mathbf{A}^M)^{-1}\right) \bar{\psi}^M(0) + L^{-1}\left((s\mathbf{I} + \mathbf{A}^M)^{-1}\right) * \bar{Q}, \quad (4.2.10)$$

onde * denota convolução.

Conforme foi descrito na formulação LTS_N no item 4.1.13 deste trabalho, temos que

$$\mathbf{B}(x) = L^{-1}((s\mathbf{I} + \mathbf{A}^R)^{-1}) , \quad (4.2.11)$$

onde R denota a região: combustível (C) e moderador (M).

Segundo Segatto *et al.* [15], essa transformada inversa pode ser escrita como $\mathbf{X}.e^{-Dx}.\mathbf{X}^{-1}$, onde **D** é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz **A** e **X** é uma matriz dos autovetores correspondentes. Assim, podemos escrever que

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}.e^{-Dx}.\mathbf{X}^{-1} , \quad (4.2.12)$$

o que nos permite escrever a equação do fluxo angular de nêutrons como:

$$\underline{\psi}^C(x) = \mathbf{B}^C(x).\underline{\psi}^C(0) , \quad 0 < x < a \quad (4.2.13)$$

na região do combustível, e

$$\underline{\psi}^M(x) = \mathbf{B}^M(x).\underline{\psi}^M(0) + \mathbf{B}^M(x)*\underline{Q}(x) , \quad (4.2.14)$$

na região do moderador.

Escrevendo o fluxo angular em forma de matriz bloco, obtemos para cada região a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} \underline{\psi}_1^C(x) \\ \underline{\psi}_2^C(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^C(x) & \mathbf{B}_{12}^C(x) \\ \mathbf{B}_{21}^C(x) & \mathbf{B}_{22}^C(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\psi}_1^C(0) \\ \underline{\psi}_2^C(0) \end{bmatrix} , \quad (4.2.15)$$

e

$$\begin{bmatrix} \psi_1^M(x) \\ \psi_2^M(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^M(x) & \mathbf{B}_{12}^M(x) \\ \mathbf{B}_{21}^M(x) & \mathbf{B}_{22}^M(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\sim 1}^M(0) \\ \psi_{\sim 2}^M(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(x) \\ \mathbf{H}_2(x) \end{bmatrix} \quad (4.2.16)$$

onde

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{B}(x) * \underline{Q}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x-\tau) \cdot Q(\tau) d\tau, \quad (4.2.17)$$

$$\psi_{\sim 1}^R(x) = \begin{bmatrix} \psi_1^R(x) \\ \psi_2^R(x) \\ \vdots \\ \psi_{N/2}^R(x) \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

e

$$\psi_{\sim 2}^R(x) = \begin{bmatrix} \psi_{N/2+1}^R(x) \\ \psi_{N/2+2}^R(x) \\ \vdots \\ \psi_N^R(x) \end{bmatrix}, \quad (4.2.19)$$

onde $\psi_{\sim 1}^R(x)$ é o vetor de ordem N/2 dos fluxos angulares nas direções positivas, $\psi_{\sim 2}^R(x)$ é o vetor de ordem N/2 dos fluxos nas direções negativas e $\mathbf{B}_{ij}^R(x)$ são matrizes de ordem N/2, onde R representa a região considerada.

Os sistemas expressos pelas equações (4.2.15) e (4.2.16) podem ser escritos, respectivamente, como:

$$\psi_i^C(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij}^C(x) \cdot \psi_j^C(0) \quad (4.2.20)$$

e

$$\psi_i^M(x) = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{ij}^M(x) \cdot \psi_j^M(0) + \mathbf{H}_i(x) \quad , \quad i = 1 : N \quad (4.2.21)$$

Para a obtenção do fluxo angular nas duas regiões, necessitamos utilizar as condições de contorno estabelecidas no início do problema (reflexão em ambas as fronteiras), bem como a condição de continuidade na interface em $x = a$.

Aplicando a condição de continuidade na interface combustível-moderador, ou seja, $\psi_i^C(a) = \psi_i^M(0)$ e fazendo mudança de variável na região do moderador, obtemos

$$\begin{bmatrix} \psi_1^C(a) \\ \psi_2^C(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^C(a) & \mathbf{B}_{12}^C(a) \\ \mathbf{B}_{21}^C(a) & \mathbf{B}_{22}^C(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^C(0) \\ \psi_2^C(0) \end{bmatrix} \quad (4.2.22)$$

e

$$\begin{bmatrix} \psi_1^M(0) \\ \psi_2^M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^M(0) & \mathbf{B}_{12}^M(0) \\ \mathbf{B}_{21}^M(0) & \mathbf{B}_{22}^M(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^M(0) \\ \psi_2^M(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1^M(0) \\ H_2^M(0) \end{bmatrix} \quad (4.2.23)$$

Do sistema (4.2.22) podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\underline{\psi}_1^C(a) = \mathbf{B}_{11}^C(a) \cdot \underline{\psi}_1^C(0) + \mathbf{B}_{12}^C(a) \cdot \underline{\psi}_2^C(0) \quad (4.2.24)$$

e

$$\underline{\psi}_2^C(a) = \mathbf{B}_{21}^C(a) \cdot \underline{\psi}_1^C(0) + \mathbf{B}_{22}^C(a) \cdot \underline{\psi}_2^C(0) \quad (4.2.25)$$

Usando a condição de reflexão em $x = 0$, isto é, $\underline{\psi}_2^C(0) = \mathbf{P} \cdot \underline{\psi}_1^C(0)$, onde \mathbf{P}

é a matriz permutação, nas equações (4.2.24) e (4.2.25), obtemos

$$\underline{\psi}_1^C(a) = [\mathbf{B}_{11}^C(a) + \mathbf{B}_{12}^C(a) \cdot \mathbf{P}] \cdot \underline{\psi}_1^C(0) \quad (4.2.26)$$

e

$$\underline{\psi}_2^C(a) = [\mathbf{B}_{21}^C(a) + \mathbf{B}_{22}^C(a) \cdot \mathbf{P}] \cdot \underline{\psi}_1^C(0) \quad (4.2.27)$$

Da equação matricial (4.2.23) obtemos

$$\underline{\psi}_1^M(0) = \mathbf{B}_{11}^M(0) \cdot \underline{\psi}_1^M(0) + \mathbf{B}_{12}^M(0) \cdot \underline{\psi}_2^M(0) + H_1^M(0) \quad (4.2.28)$$

e

$$\underline{\psi}_2^M(0) = \mathbf{B}_{21}^M(0) \cdot \underline{\psi}_1^M(0) + \mathbf{B}_{22}^M(0) \cdot \underline{\psi}_2^M(0) + H_2^M(0) \quad (4.2.29)$$

Usando a condição de continuidade, obtemos as seguintes equações:

$$[\mathbf{B}_{11}^C(a) + \mathbf{B}_{12}^C(a) \cdot \mathbf{P}] \cdot \underline{\psi}_1^C(0) - \mathbf{B}_{11}^M(0) \cdot \underline{\psi}_1^M(0) - \mathbf{B}_{12}^M(0) \cdot \underline{\psi}_2^M(0) = H_1^M(0) \quad (4.2.30)$$

e

$$[\mathbf{B}_{21}^C(a) + \mathbf{B}_{22}^C(a) \cdot \mathbf{P}] \cdot \underline{\psi}_1^C(0) - \mathbf{B}_{21}^M(0) \cdot \underline{\psi}_1^M(0) - \mathbf{B}_{22}^M(0) \cdot \underline{\psi}_2^M(0) = H_2^M(0) \quad (4.2.31)$$

Aplicando a condição de reflexão em $x = L$, ou seja, $\psi_1^M(L) = \mathbf{P} \cdot \psi_2^M(L)$,

podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \psi_1^M(L) \\ \psi_2^M(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^M(L) & \mathbf{B}_{12}^M(L) \\ \mathbf{B}_{21}^M(L) & \mathbf{B}_{22}^M(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^M(0) \\ \psi_2^M(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1^M(L) \\ H_2^M(L) \end{bmatrix} \quad (4.2.32)$$

Do sistema acima podemos escrever as seguintes equações:

$$\psi_1^M(L) = \mathbf{B}_{11}^M(L) \cdot \psi_1^M(0) + \mathbf{B}_{12}^M(L) \cdot \psi_2^M(0) + H_1^M(L) \quad (4.2.33)$$

e

$$\psi_2^M(L) = \mathbf{B}_{21}^M(L) \cdot \psi_1^M(0) + \mathbf{B}_{22}^M(L) \cdot \psi_2^M(0) + H_2^M(L) \quad (4.2.34)$$

Usando a condição de reflexão em $x = L$, obtemos a seguinte equação:

$$\left[\mathbf{B}_{11}^M(L) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_{21}^M(L) \right] \psi_1^M(0) + \left[\mathbf{B}_{12}^M(L) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_{22}^M(L) \right] \psi_2^M(0) = \mathbf{P} \cdot H_2^M(L) - H_1^M(L) \quad (4.2.35)$$

As equações (4.2.30), (4.2.31) e (4.2.35) formam o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^C(a) + \mathbf{B}_{12}^C(a) \cdot \mathbf{P} & -\mathbf{B}_{11}^M(0) & -\mathbf{B}_{12}^M(0) \\ \mathbf{B}_{21}^C(a) + \mathbf{B}_{22}^C(a) \cdot \mathbf{P} & -\mathbf{B}_{21}^M(0) & -\mathbf{B}_{22}^M(0) \\ 0 & \mathbf{B}_{11}^M(L) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_{21}^M(L) & \mathbf{B}_{12}^M(L) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}_{22}^M(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1^C(0) \\ \psi_1^M(0) \\ \psi_2^M(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^M(0) \\ H_2^M(0) \\ \mathbf{P} \cdot H_2^M(L) - H_1^M(L) \end{bmatrix} \quad (4.2.36)$$

A solução do sistema (4.2.36), através da eliminação Gaussiana, nos fornece os fluxos angulares $\bar{\psi}_1^C(0)$, $\bar{\psi}_1^M(0)$ e $\bar{\psi}_2^M(0)$. Dessa forma, o fluxo angular está bem definido pelas equações (4.2.13) e (4.2.14).

Para calcular o fator de utilização térmica precisamos do fluxo escalar que é dado por

$$\phi_R(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu = \sum_{i=1}^N w_i \cdot \psi_i^R(x),$$

onde R denota região (combustível e moderador). Assim podemos escrever que o fluxo médio em cada região será expresso por

$$\bar{\phi}_C = \int_0^L \sum_{i=1}^N w_i \left(\sum_{j=1}^N b_{ij}^C(x) \cdot \psi_j^C(0) \right) dx \quad (4.2.37)$$

e

$$\bar{\phi}_M = \int_0^L \sum_{i=1}^N w_i \left(\sum_{j=1}^N b_{ij}^M(x) \cdot \psi_j^M(0) + H_i^M(x) \right) dx \quad (4.2.38)$$

onde $b_{ij}(x)$ é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $\mathbf{B}(x)$.

Assim, podemos calcular o fator de desvantagem ρ , que é a razão entre os fluxos escalares nas regiões do moderador e combustível, ou seja

$$\rho = \frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_C} = \frac{\int_0^L \sum_{i=1}^N w_i \left(\sum_{j=1}^N b_{ij}^M(x) \cdot \psi_j^M(0) + H_i^M(x) \right) dx}{\int_0^L \sum_{i=1}^N w_i \left(\sum_{j=1}^N b_{ij}^C(x) \cdot \psi_j^C(0) \right) dx} \quad (4.2.39)$$

onde $H_i^M(x)$ é definido pela expressão (4.2.17).

Dessa forma, substituindo a expressão (4.2.39) na definição dada pela equação (2.6), apresentamos uma expressão analítica para o fator de utilização térmica através da formulação LTS_N . Além disso, a convergência do método LTS_N garante que, quando N é aumentado, a solução aproxima-se da solução exata da equação de transporte.

4.3 Equivalência entre a Equação da Difusão e a Equação de Transporte S_2

Com o objetivo de demonstrar que o método LTS_N pode ser aplicado na solução da equação da difusão, mostramos, a seguir, que a equação da difusão é equivalente à aproximação S_2 da equação de transporte linear isotrópica. Para isso, consideramos a equação de transporte S_2 para uma placa plana unidimensional com fonte, expressa por

$$\mu_m \frac{d\psi_m}{dx} + \psi_m = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^2 \psi_i w_i + Q, \quad m = 1:2 \quad (4.3.1)$$

onde $Q = \frac{q}{2}$ é a densidade de moderação.

A expressão acima resulta no seguinte sistema de equações

$$\mu_1 \frac{d\psi_1}{dx} + \psi_1 = \frac{c}{2} (\psi_1 w_1 + \psi_2 w_2) + \frac{q}{2} \quad (4.3.2)$$

e

$$\mu_2 \frac{d\psi_2}{dx} + \psi_2 = \frac{c}{2} (\psi_1 w_1 + \psi_2 w_2) + \frac{q}{2} \quad (4.3.3)$$

Somando-se as equações (4.3.2) e (4.3.3), obtemos a seguinte relação:

$$\mu_1 \frac{d\psi_1}{dx} + \mu_2 \frac{d\psi_2}{dx} + (\psi_1 + \psi_2) = c(\psi_1 w_1 + \psi_2 w_2) + q \quad (4.3.4)$$

Sabendo que $\mu_1 = -\mu_2$ e que $w_1 = w_2 = 1$, podemos escrever a equação (4.3.4) como

$$\frac{dJ(x)}{dx} + (\psi_1 + \psi_2) - c(\psi_1 + \psi_2) = q$$

ou seja,

$$\frac{dJ(x)}{dx} + (1-c)\phi(x) = q \quad (4.3.5)$$

onde

$$\phi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

e

$$J(x) = \mu_1(\psi_1(x) - \psi_2(x))$$

Comparando a equação (4.3.5) com a equação da difusão (3.1.2), podemos observar que $\sum_a = 1 - c$.

Subtraindo as equações (4.3.2) e (4.3.3) entre si, temos

$$\mu_1 \frac{d\psi_1}{dx} - \mu_2 \frac{d\psi_2}{dx} + (\psi_1 - \psi_2) = 0$$

Lembrando que $\mu_1 = -\mu_2$, então a equação acima pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mu_1 \frac{d\psi_1}{dx} + \mu_1 \frac{d\psi_2}{dx} + (\psi_1 - \psi_2) = 0$$

$$\mu_1 \left(\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{d\psi_2}{dx} \right) + (\psi_1 + \psi_2) = 0$$

$$\mu_1 \frac{d}{dx} (\psi_1 + \psi_2) + (\psi_1 - \psi_2) = 0$$

$$\mu_1 \frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{J(x)}{\mu_1} = 0$$

$$\mu_1^2 \frac{d\phi}{dx} + J(x) = 0$$

$$J(x) = -\mu_1^2 \frac{d\phi}{dx} \quad (4.3.6)$$

Definindo o coeficiente de difusão como $D = \mu_1^2$, podemos escrever a equação (4.3.6), conhecida como Lei de Fick [8], como:

$$J(x) = -D \frac{d\phi}{dx}$$

Combinando a Lei de Fick com a equação (4.3.5), obtemos a equação da continuidade que é expressa por

$$-D \frac{d\phi}{dx} + (1-c) \cdot \phi = q \quad (4.3.7)$$

Este resultado indica que a solução S_2 da equação de transporte linear, dada pelo método LTS_2 , é equivalente ao problema de difusão unidimensional. Sendo assim, o

fator de utilização térmica pode ser calculado pela aproximação S_2 do mesmo modo como foi determinado pelo método da difusão, ou seja:

$$\frac{1}{f} = \frac{V_M \sum_a^M}{V_C \sum_a^C} \cdot F + E \quad ,$$

onde

$$E = K_M (R_M - R_C) \cdot ctgh K_M (R_M - R_C) \quad ,$$

$$F = K_C R_C \cdot ctgh K_C R_C \quad ,$$

e K_C^2 e K_M^2 são definidos pela equação (3.1.5).

Portanto, o fator de utilização térmica pode ser calculado pela teoria da difusão pela fórmula (4.2.39), fazendo $N = 2$.

5. CONCLUSÃO

Através deste trabalho, mostramos que o método LTS_N pode ser utilizado para o cálculo do fator de utilização térmica, fator este importante no projeto neutrônico de um reator nuclear. Utilizando esse método conseguimos uma expressão analítica para f , o que é vantajoso em relação aos métodos numéricos. Além disso, como foi provada a convergência do método LTS_N [11], é possível controlar a precisão dos resultados para os fatores de desvantagem e de utilização térmica pela formulação proposta através do aumento da ordem de quadratura N .

Em termos de custo computacional, o método LTS_N já está bastante aperfeiçoado e apresenta solução para o fluxo de nêutrons num intervalo de tempo muito pequeno, mesmo para ordem de quadraturas elevadas ($N = 1500$) [15].

Acreditamos que, a partir de agora, a formulação LTS_N possa ser estendida ao cálculo do fator de utilização térmica em problemas multidimensionais utilizando a formulação nodal [21,22,23] e pseudo-espectral (em desenvolvimento). Portanto, sugerimos como trabalho futuro a investigação das referidas generalizações.

Finalmente, concluímos que nosso objetivo neste trabalho foi atingido porque mostramos a viabilidade do método LTS_N para calcular, em forma analítica, os fatores de desvantagem e de utilização térmica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARICHELO, L. B.; **Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- [2] BARICHELO, L. B. E VILHENA, M., T.; A General Approach to One Group One Dimensional Transport Equation. **Kerntechnik**, v. 58, n.3, p. 182-184, 1993.
- [3] BARICHELO, L. B.; VILHENA, M. T.; Um problema inverso em Transporte de Nêutrons e Radiação, **Anais do IX Encontro Nacional de Física dos Reatores e Termo-Hidráulica (IX ENFIR)**, Caxambu - MG, pp 90, 1993.
- [4] BATISTELA, C. H.; **Estudo da Criticalidade pelo Método LTS_N** . Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1997.
- [5] BATISTELA, C. H., VILHENA, M. T. E BORGES, V.; Criticality by the LTS_N Method. **Journal of Nuclear Science and Technology**, v. 34, nº 6, pp. 603-606, 1997.
- [6] BELL, G. E GLASSTONE, S.; **Nuclear Reactor Theory**, Litton Educational Publishing Company, Inc., 1983.

- [7] CASE, K., M. E ZWEIFEL, P., F.; **Linear Transport Theory**, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.
- [8] DUDERSTADT, J., J. E MARTIN, W., R.; **Transport Theory**, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [9] OLIVEIRA, J.V. P.; **Formulação LTS_N para o Problema de Ordenada Discreta com Anisotropia**. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação de Matemática Aplicada da UFRGS, Porto Alegre, 1993.
- [10] OLIVEIRA, J.V. P. E BARICHELLO, L. B.; Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional de Transporte de Nêutrons com Espalhamento Anisotrópico, **Anais do IX ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica**, Caxambú, MG, p. 72-77, 1993.
- [11] PAZOS, R. P.; **Equação de Transporte de Nêutrons: Enfoque de Semi-Grupo**. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação de Matemática Aplicada da UFRGS, Porto Alegre, 1995.
- [12] SEGATTO, C. F. E VILHENA, M. T.; Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem Without Azimuthal Symmetry. **Annals of Nuclear Energy**, v. 21, n. 11, p. 701-710, 1994.
- [13] SEGATTO, C. F.; **Extensão da Formulação LTS_N para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PROMEC- UFRGS, Porto Alegre, 1995.

- [14] SEGATTO, C. F., VILHENA, M. T. E BARICHELLO, L. B.; Estudo Comparativo de Métodos de Solução da Aproximação S_N da Equação de Transporte Linear. **Anais do XVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Vitória E.S., 1994.
- [15] SEGATTO, C. F., VILHENA, M. T. E GOMES, M. G.; **The One-Dimensional LTS_N Solution in a Slab With High Degree of Quadrature**; in press.
- [16] STAM, E.; **Física de Reatores - Apostila -**, Departamento de Engenharia Nuclear da Universidade da Carolina do Norte, USA, 1974.
- [17] VILHENA, M. T. E BARICHELLO, L. B.; A New Analytical Approach to Solve the Neutron Transport Equation. **Kerntechnik**, v. 56, n.5, p. 334-336, 1991.
- [18] VILHENA, M. T. E BARICHELLO, L. B.; An Analytical Solution for the Multigroup Slab Geometry Discrete Ordinate Problem, **J. Transport Theory and Statistical Physics**, v. 24, p. 1337, 1995.
- [19] VILHENA, M. T.; **Cálculo do Fator de Utilização Térmica**, Monografia do Curso de Especialização de Engenharia Nuclear, IME, 1969.

- [20] VILHENA, M. T. , BARICHELO, L. B., ZABADAL, J., SEGATTO, C. F. E CARDONA, A. V.; General Solution of One-Dimensional Approximations to the Transport Equation, **Progress in Nuclear Energy**, v. 33, n° ½, pp 99-115, 1998
- [21] ZABADAL, J., VILHENA, M. T. E BARICHELO, L. B.; Solução da Equação de Ordenadas Discretas em Duas Dimensões pelo método LTS_N , **Anais do IX ENFIR Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Caxambú, MG, p. 90-92, 1993.
- [22] ZABADAL, J.; **Solução Analítica da Equação de Ordenadas Discreta Multidimensional**. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.
- [23] ZABADAL, J., VILHENA, M. T. E BARICHELO, L. B.; Solution of the Three - Dimensional One Group Discrete Ordinate Problem in a Convex Domain. **Progress in Nuclear Energy**, v. 31, p. 225, 1997.