Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

UM TEOREMA DE EXISTÊNCIA PARA O PROBLEMA EXTERIOR DE DIRICHLET PARA EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

por

IVAN RICARDO TOSMANN

Porto Alegre, janeiro de 1999

Dissertação submetida por IVAN RICARDO TOSMANN* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:
Dr. Artur Oscar Lopes
Dra. Elizabeth Ferreira da Costa Gomes
Dr. Leonardo Bonorino

Data de Defesa: 29 de janeiro de 1999.

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, André e Maria, por terem me dado condições e incentivos para eu estudar.

A meus irmãos pela motivação.

Ao meu orientador Jaime Rippol pela paciência na orientação do trabalho de dissertação.

Aos colegas do CPGMAT pelo companheirismo.

A Izabel pela solicitude.

A Simone, Andréia, Giovanni, Italo e Pedro pela amizade.

Índice

0. Introdução

O problema geral de Dirichlet para equação das superfícies mínimas consiste em determinar $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Domínio do plano) tal que

$$\begin{aligned} &Q(u) := \mathrm{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0. \\ &u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{aligned}$$

Tal problema foi inicialmente resolvido para o caso em que Ω é convexo e limitado (provado por T. Radó como conseqüência de seus resultados sobre o problema de Plateau na década de 30). Caso Ω seja convexo e ilimitado ou para alguns casos especiais de domínios não convexos e ilimitados, R. Earp e H. Rosenberg ([ER]) provaram que tal problema tem solução para qualquer função contínua φ limitada em $\partial\Omega$ desde que Ω não seja um semiplano. O caso do semiplano foi tratado por P. Collin e R. Krust em ([CK]). Resultados de existência de solução em domínios não convexos e ilimitados começaram a ser tratados com Nitsche ([N]) e mais recentemente em ([ET]), ([KT]), e ([RT]) apenas no caso em que Ω é um domínio exterior finito, isto é,

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash (\text{número finito de domínios fechados})$$

e com valor zero no bordo.

Neste trabalho de dissertação, tratamos do problema exterior geral de Dirichlet, ou simplesmente do chamado problema exterior de Dirichlet. Neste caso, Ω é o exterior de um conjunto enumerável (finito ou infinito) de domínios compactos $F_1, ..., F_m, ...$com $F_i \cap F_j = \emptyset$ se $i \neq j$, sendo ∂F_i uma curva de Jordan.

No caso do exterior de um conjunto infinito de domínios $F_1, ..., F_m, ...$, precisamos supor que estes domínios estejam dispostos periodicamente no plano, ou seja, sejam obtidos a partir de um número finito de domínios através da ação de um subgrupo de isometrias do $\mathbb{R}^2$.

Além disso, como acontece em trabalho anterior, tratamos apenas do caso em que $\varphi = 0$. A Condição $\varphi = 0$ é necessária pelo resultado provado por N. Kutev e F. Tomi em [KT], estabelecendo que dado o domínio exterior Ω de um domínio convexo e limitado qualquer, e dado $\varepsilon > 0$, existe $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ com $|\varphi| < \varepsilon$ para o qual o problema de Dirichlet não tem solução.

1. Preliminares

O operador

$$Q : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

definido por

$$u \longmapsto Q(u) := \mathrm{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

ou, equivalentemente, por

$$Q(u) = \frac{(1+u_y^2)}{\sqrt{(1+|\nabla u|^2)^3}}u_{xx} - \frac{2u_x u_y}{\sqrt{(1+|\nabla u|^2)^3}}u_{xy} + \frac{(1+u_x^2)}{\sqrt{(1+|\nabla u|^2)^3}}u_{yy}$$

é chamado operador curvatura média nula. O gráfico de uma solução $u \in C^2(\Omega)$ de $Q = 0$ é uma superfície mínima.

No que se segue, estabelecemos um teorema de existência de soluções de $Q = 0$ em certos domínios do plano a seguir descritos. Faremos uso dos seguintes resultados de análise, referentes ao operador Q:

O Teorema A trata dos princípios do máximo para solução e do gradiente da solução da equação $Q = 0$ em Ω.

O Teorema B trata da compacidade de famílias de soluções de $Q = 0$ uniformemente limitadas na norma C^1.

Finalmente, o Teorema C é o teorema da função implícita. Ver ([GT]).

Teorema A. *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluções de $Q = 0$ em um aberto limitado Ω. Então $u - v$ satisfaz o princípio forte do máximo e do mínimo em Ω, ou seja, se existe $x_0 \in \Omega$ tal que*

$$(u - v)(x_0) = \max_{\Omega}(u - v)$$

ou

$$(u - v)(x_0) = \min_{\Omega}(u - v),$$

então $u - v = cte$. Além disso, se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, então u satisfaz o princípio do máximo para o gradiente, ou seja

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u| .$$

Teorema B. *Seja Ω um domínio de classe C^∞ e $\{u_n\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ uma* *seqüência de soluções de* $Q = 0$ *em* Ω *tal que*

$$|u_n|_{1;\Omega} := \max_{\Omega} |u_n| + \max_{\Omega} |\nabla u_n| \leq M,$$

para uma certa constante M e $\forall n \in \mathbb{N}$. *Então* $\{u_n\}$ *contém uma subseqüência convergindo uniformemente em* $\overline{\Omega}$, *na norma* C^k *a uma solução* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *de* $Q = 0$ *em* Ω, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Teorema C. *Seja* Ω *domínio limitado* C^∞ *do plano e suponha que* $\rho : \mathbb{R} \times C_0^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ *dada por* $\rho(t, v) = v + \Phi_t$ *é continuamente diferenciável, onde* $\Phi_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Seja* $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *tal que* $Q(u_0) = 0$ *em* Ω *e* $t_0 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$u_0|_{\partial\Omega} = \Phi_{t_0}|_{\partial\Omega}.$$

Então existe $\delta > 0$ *tal que para todo* $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, *existe* $u_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *tal que* $Q(u_t) = 0$ *em* Ω,

$$u_t|_{\partial\Omega} = \Phi_t|_{\partial\Omega}$$

e

$$\lim_{t \to t_0} |u_0 - u_t|_{k;\Omega} = 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para descrição dos domínios que consideraremos no resultado principal, é conveniente relembrar algumas noções relativas ao grupo de isometrias do $\mathbb{R}^2$. Uma aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria se

a) Φ é um difeomorfismo;

b) $\langle d\Phi_x u, d\Phi_x v\rangle = \langle u, v\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall u, v \in \mathbb{R}^2$, onde $<,>$ denota o produto interno usual do $\mathbb{R}^2$.

É fácil de ver que o conjunto das isometrias do $\mathbb{R}^2$ forma um grupo com a operação de composição de funções que denotaremos por $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$. Assim

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2) := \Big\{\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \Phi \text{ é isometria}\Big\}.$$

Subgrupos que agem propriamente descontinuamente em $\mathbb{R}^2$.

Dizemos que o subgrupo Γ do grupo de isometrias age propriamente descontinuamente em $\mathbb{R}^2$ se, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe $U_p \subset \mathbb{R}^2$ vizinhança de p tal que $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$, para todo $g \in \Gamma$, $g \neq id$. Dizemos que D é um domínio fundamental do $\mathbb{R}^2$ contendo p se D é um aberto conexo do $\mathbb{R}^2$ com $p \in D$ tal que $g(D) \cap D = \emptyset$ para todo $g \in \Gamma$, $g \neq id$, e tal que, dado um aberto V do $\mathbb{R}^2$ com $D \subset V$, se $g(V) \cap V = \emptyset$ para todo $g \in \Gamma$, $g \neq id$, então $V = D$.

Usando o lema de Zorn, prova-se que para todo $p \in \mathbb{R}^2$ existe D domínio fundamental de Γ tal que $p \in D$.

A menos de conjugação, os subgrupos de $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ agindo propriamente descontinuamente em $\mathbb{R}^2$ são descritos no Teorema a seguir:

Teorema D. *Seja Γ' um subgrupo de isometrias do $\mathbb{R}^2$ agindo propriamente descontinuamente em $\mathbb{R}^2$. Então existem vetores linearmente independentes $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que Γ' é conjugado a algum dos seguintes grupos*

1) $\Gamma := \{T_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *onde*

$$T_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_n(p) = p + nu,$$

2) $\Gamma := \{T_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ *onde*

$$T_{n,m} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T_{n,m}(p) = p + nu + mv,$$

3) $\Gamma := \{S_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *onde*

$$S_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ S_n(p) = p + nu + (-1)^n u^*,$$

4) $\Gamma := \{S_{n,m} : n, m \in \mathbb{Z}\}$ *onde*

$$S_{n,m} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ S_{n,m}(p) = p + nu + (-1)^n u^* + mv,$$

onde u^* *é ortogonal a* u *com* $|u^*| = |u|$. *Notemos que a superfcie quociente* $\mathbb{R}^2/\Gamma'$ *é homeomorfa a um cilindro no caso* 1), *a um toro no caso* 2), *a uma faixa de Möbius infinita no caso* 3), *e a uma garrafa de Klein no caso* 4).

(Ref. John Stillwell, Geometry of Surfaces Springer-Verlag 1992)

Corforme observamos após o final da prova do teorema abaixo, pode ser dada uma "prova experimental" ao mesmo. Veja página 29.

2. Teorema. *Seja Γ um subgrupo do grupo de isometrias do $\mathbb{R}^2$ atuando propriamente descontinuamente em $\mathbb{R}^2$ e seja D um domínio fundamental de Γ. Sejam $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ curvas de Jordan limitando domínios fechados $G_i \subset D$, $i = 1, ..., m$, tais que $G_i \cap G_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Seja*

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{\Phi \in \Gamma} \Phi(G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_m)$$

e seja $s \geq 0$ dado. Então existe uma função não negativa $w_s \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ solução de $Q = 0$ em Ω com $w_s \mid_{\partial\Omega} = 0$ tal que

$$\sup_{\Omega} |\nabla w_s| = s.$$

Além disso,

$$\lim_{R \to \infty} \sup \frac{\max\limits_{C_R \cap \overline{\Omega}} w_s}{R} < \infty,$$

onde C_R é o círculo de raio R centrado na origem.

Prova: Se $s = 0$ então basta tomar $w_0 \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$ e o teorema tem demonstração imediata neste caso. Suponhamos agora que $s > 0$, e admitamos inicialmente que Ω é C^∞. Dado $n \in \mathbb{N}$ seja D_n o disco aberto centrado na origem com raio n, $C_n = \partial D_n$, e assuma que n é tal que

$$D_n \supset G, \ (G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_m).$$

Sejam E_1, E_2,..., $E_{K(n)}$ os domínios fechados de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ contidos em D_n. Sejam $a_i = \partial E_i$, $1 \leq i \leq K(n)$ e $\alpha_n = \bigcup_{i=1}^{K(n)} a_i$. Seja L_n o catenóide tangente ao cilindro $H := C_n \times \mathbb{R}$, ao longo do círculo C_n. Observe que $L_n \cap \{z \geq 0\}$ é gráfico da função

$$v_n = v_n(x,y) = n \operatorname{arccos} h \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{n^2}} \right) \tag{1}$$

em $\mathbb{R}^2 \setminus D_n$. Alguns cálculos mostram que se

$$R_n = \max \left\{ 3n, \ n\sqrt{1+\frac{4}{s^2}} \right\} \tag{2}$$

então

$$|\nabla v_n| \leq \frac{s}{2} \text{ em } C_{R_n}, \tag{3}$$

onde C_{R_n} é o círculo centrado na origem e de raio R_n. É importante observar aqui que R_n poderia ser escolhido qualquer valor maior ou igual a $n\sqrt{1+\frac{4}{s^2}}$ desde que satisfaça (3) e que $3n$ só aparece na definição de R_n por motivo que ficará claro posteriormente (ver página 20). Seja D_{R_n} o disco limitado por C_{R_n}. Sejam

$$\Omega_{R_n} = D_{R_n} \backslash (E_1 \cup ... \cup E_{K(n)}),$$

e

$$T_n := \left\{ \begin{array}{c} t \geq 0 : \exists u_t \in C^\infty(\overline{\Omega}_{R_n}) \text{ tal que } Q(u_t) = 0, \\ \\ \sup\limits_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_t| \leq s,\, u_t|_{\alpha_n} = 0,\, u_t|_{C_{R_n}} = t \end{array} \right\}.$$

Para $t = 0$, existe $u_0 \equiv 0 \in C^\infty(\overline{\Omega}_{R_n})$ tal que

$$Q(u_0) = Q(0) = 0, \;\; \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_0| = 0 \leq s, \;\; u_0|_{\alpha_n} = 0, \;\; u_0|_{C_{R_n}} = 0.$$

Então $0 \in T_n$ implicando que $T_n \neq \emptyset$. Mostremos que $\sup T_n$ é finito. Suponhamos que não. Então existe uma sequência $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset T_n$ tal que $t_m \to \infty$ quando $m \to \infty$.Tome $p_0 \in \alpha_n$ e seja $\gamma : [0, l] \to \overline{\Omega}_{R_n}$ uma curva tal que

$$\gamma(0) = p_0, \;\; \gamma(l) = p \in C_{R_n}, \;\; |\gamma'(t)| = 1$$

e para cada m considere, pela definição de T_n, a função u_{t_m}. Então

$$u_{t_m}(p) - u_{t_m}(p_0) = u_{t_m}(\gamma(l)) - u_{t_m}(\gamma(0)) = \int_0^l \frac{d}{dt} u_{t_m}(\gamma(t)) dt. \tag{4}$$

Por ser γ uma curva no plano, podemos representar $\gamma(t)$ em coordenadas como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Então

$$\frac{d}{dt}u_{t_m}(\gamma(t))dt = u_{t_m x}x'(t) + u_{t_m y}y'(t) = \langle \nabla u_{t_m}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle . \tag{5}$$

De (4) e da propriedade de integrais temos

$$|u_{t_m}(p) - u_{t_m}(p_0)| = \left| \int_0^l \frac{d}{dt}u_{t_m}(\gamma(t))dt \right| \leq \int_0^l \left| \frac{d}{dt}u_{t_m}(\gamma(t)) \right| dt. \tag{6}$$

De (5) e usando $|< u, v >| \leq |u| \, |v|$ temos

$$\left| \frac{d}{dt}u_{t_m}(\gamma(t)) \right| = |< \nabla u_{t_m}(\gamma(t)), \gamma'(t) >| \leq |\nabla u_{t_m}(\gamma(t))| \, . \, |\gamma'(t)| \, . \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6) temos

$$\int_0^l \left| \frac{d}{dt}u_{t_m}(\gamma(t)) \right| dt \leq \int_0^l |\nabla u_{t_m}(\gamma(t))| \, . \, |\gamma'(t)| \, dt.$$

Mas $|\gamma'(t)| = 1$ então

$$\int_0^l \left| \frac{d}{dt}u_{t_m}(\gamma(t)) \right| dt \leq \int_0^l |\nabla u_{t_m}(\gamma(t))| \, dt.$$

Como $\sup\limits_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_m}| \leq s$ temos

$$|u_{t_m}(p) - u_{t_m}(p_0)| \leq \int_0^l |\nabla u_{t_m}(\gamma(t))|\, dt \leq sl.$$

Da propriedade dos módulos temos

$$|u_{t_m}(p)| - |u_{t_m}(p_0)| \leq |u_{t_m}(p) - u_{t_m}(p_0)| \leq sl$$

ou ainda

$$|u_{t_m}(p)| \leq sl + |u_{t_m}(p_0)|\,.$$

Sabendo que

$$u_{t_m}(p_0) = 0 \;\; (u_{t_m}|_{\alpha_n} = 0),\; u_{t_m}(p) = t_m \;\; (u_{t_m}|_{C_{R_n}} = t_m)$$

temos

$$t_m \leq sl$$

para todo m o que é absurdo pois $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = \infty$. Logo, $\sup T_n < \infty$. Seja $t_n = \sup T_n$. Provemos que $t_n \in T_n$ e $\sup\limits_{\alpha_n} |\nabla u_{t_n}| = s$. Dado $t \in T_n$ provemos primeiro que

$$\sup_{C_{R_n}} |\nabla u_t| \leq \frac{s}{2}. \tag{8}$$

Dado $t \in T_n$ existe $u_t \in C^{\infty}(\overline{\Omega}_{R_n})$ tal que $Q(u_t) = 0$, $\sup\limits_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_t| \leq s$, $u_t|_{\alpha_n} = 0$, $u_t\,|_{C_{R_n}} = t$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, seja $v_n^r := v_n + re_3$. Como $u_t \in C^{\infty}(\overline{\Omega}_{R_n})$, é claro que $|u_t|$ está limitado. Portanto, $u_t(x,y) - v_n^r(x,y) \geq 0$ se r é suficientemente pequeno, para todo (x,y) no anel $\overline{\Omega}_{R_n} \backslash D_n$. Da mesma forma, $u_t(x,y) - v_n^r(x,y) \leq 0$, para todo (x,y) no anel $\overline{\Omega}_{R_n} \backslash D_n$ se r é suficientemente grande. Segue-se então que está bem definido

$$r_0 = \inf R$$

onde $R = \left\{ r : r \in \mathbb{R} \text{ e existe } x \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n \text{ tal que } u_t(x) = v_n^r(x) \right\}$. Observe que $R \neq \emptyset$ pois tanto u_t como v_n^r são contínuas em $\overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n$, para qualquer $r \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $r_0 \in R$. De fato, considere uma sequência (r_m) com $r_m \in \mathbb{R}$, $r_m > r_0$ e $r_m \to r_0$. A partir de um certo m_0, se $m \geq m_0$ então existe $x_m \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n$ tal que $v_n^{r_m}(x_m) = u_t(x_m)$. Como $\overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n \subset \overline{\Omega}_{R_n} \backslash D_n$ e $\overline{\Omega}_{R_n} \backslash D_n$ é fechado e limitado, isto é, compacto, (r_m) contém uma subsequência, que também denotamos por (r_m), convergindo a $x \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash D_n$. Por continuidade, tem-se $v_n^{r_0}(x) = u_t(x)$. Se $x \in \partial D_n$ então o gráfico G_t de u_t e o catenóide $L_n^{r_0}$ tangente ao cilindro $H = C_n \times \mathbb{R}$ ao longo do círculo $C_n^{r_0}$ (o transladado de C_n no plano $z = r_0$) têm um ponto de tangência em um ponto interior, estando $L_n^{r_0}$ localmente abaixo de G_t, o que contradiz o princípio de tangência. Logo, $x \notin \partial D_n$, ou seja, $x \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n$, provando que $r_0 \in R$.

Afirmo que

$$v_n^{r_0}(x) = u_t(x) \text{ se e só se } x \in C_{R_n}.$$

De fato, caso contrário, suponha que ocorra (A) ou (B) abaixo:

(A) $\exists x \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n$ tal que $v_n^{r_0}(x) = u_t(x)$ e $x \notin C_{R_n}$. Isto é falso, pois se existe $x_0 \in \Omega_{R_n} \backslash \overline{D}_n$ tal que $v_n^{r_0}(x_0) = u_t(x_0)$ então $(u_t - v_n^{r_0})(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega_{R_n} \backslash \overline{D}_n$, pela definição de r_0. Logo

$$\min_{\Omega_{R_n} \backslash \overline{D}_n} (u_t - v_n^{r_0}) = 0$$

o que é absurdo pelo Teorema A, pois $u_t(x_0) - v_n^{r_0}(x_0) = 0$ e $x_0 \in \Omega_{R_n} \backslash \overline{D}_n$.

(B) $\exists x \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n$ tal que $v_n^{r_0}(x) \neq u_t(x)$ e $x \in C_{R_n}$. Isto implica que $\forall z \in C_{R_n}$, $v_n^{r_0}(z) \neq u_t(z)$, pois $v_n^{r_0}(z) = v_n^{r_0}(x) \neq u_t(x) = u_t(z)$. Por outro lado, $r_0 \in R$, ou seja, $\exists x_0 \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n$ tal que $v_n^{r_0}(x_0) = u_t(x_0)$, o que está em contradição com (A), pois $x_0 \notin C_{R_n}$.

Concluimos então que existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $v_n^{r_0}(x) \leq u_t(x)$, para todo

$x \in \overline{\Omega}_{R_n} \backslash \overline{D}_n$ e $v_n^{ro}(x) = u_t(x)$ se e só se $x \in C_{R_n}$. Como consequencia temos que

$$|\nabla u_t(x)| \leq |\nabla v_n^{ro}(x)|$$

para todo $x \in C_{R_n}$. De fato, seja η o vetor unitário normal a C_{R_n} apontando para dentro e denote também por η sua extensão para $\mathbb{R}^3 \backslash \{\text{eixo-}z\}$ por translação radial em cada plano $z = c$. Sendo C_{R_n} uma curva de nível tanto para u_t como para v_n^{ro} e $x \in C_{R_n}$ temos

$$\nabla u_t(x) = -|\nabla u_t(x)|\,\eta(x),\ \nabla v_n^{ro}(x) = -|\nabla v_n^{ro}(x)|\,\eta(x).$$

Então

$$\langle \nabla u_t(x), \eta(x) \rangle = -|\nabla u_t(x)|$$

e, como

$$\langle \nabla u_t(x), \eta(x) \rangle = du_t(x)(\eta(x)) = \lim_{b \to 0^+} \frac{u_t(x + b\eta(x)) - u_t(x)}{b},$$

sabendo que $v_n^{ro}(x) = u_t(x)$ para $x \in C_{R_n}$ e $-u_t(x + b\eta(x)) \leq -v_n^{ro}(x + b\eta(x))$, temos

$$|\nabla u_t(x)| = -\lim_{b\to 0^+} \frac{u_t(x+b\eta(x)) - u_t(x)}{b} = \lim_{b\to 0^+} \frac{u_t(x) - u_t(x+b\eta(x))}{b}$$

$$\leq \lim_{b\to 0^+} \frac{v_n^{r_0}(x) - v_n^{r_0}(x+b\eta(x))}{b} = |\nabla v_n^{r_0}(x)|\,.$$

Observando que

$$|\nabla v_n^r(x)| = |\nabla v_n(x)| \leq \frac{s}{2},\ \forall r \in \mathbb{R},\ \forall x \in C_{R_n}$$

temos

$$|\nabla u_t(x)| \leq |\nabla v_n^{r_0}(x)| \leq \frac{s}{2},\ \forall x \in C_{R_n}.$$

o que prova (7).

Sendo $t_n = \sup T_n$, mostremos que $t_n \in T_n$. De fato, seja $\{s_m\} \subset T_n$ uma seqüência convergindo para t_n quando $m \to +\infty$. Como Ω é C^∞, Ω_{R_n} é C^∞. Seja $\{u_{s_m}\}$ a seqüência de soluções não negativas de $Q = 0$ em Ω_{R_n} (que existe pela definição de T_n). Podemos supor, usando resultados da Análise, que $u_{s_m}|_{\partial\Omega_{R_n}}$ se estende a $\Phi_m \in C^\infty(\overline{\Omega}_{R_n})$ com $|\Phi_m|_{2;\Omega_{R_n}} \leq M$. Como $\sup\limits_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{s_m}| \leq s$ temos, pelo

Teorema B, que existe uma subseqüência de $\{u_{s_m}\}$ convergindo uniformemente na norma C^2 em $\overline{\Omega}_{R_n}$ a $w \in C^\infty(\overline{\Omega}_{R_n})$ tal que $Q(w) = 0$, $w|_{\alpha_n} = 0$, $w|_{C_{R_n}} = t_n$ (pois $s_m \to t_n$ e $u_{s_m} \to w$) e $\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla w| \leq s$ (pois $|u_{s_m} - w|_{2;\overline{\Omega}_{R_n}} \to 0$). Então, pela definição de T_n, temos $t_n \in T_n$. Defina $u_{t_n} := w$.

Mostremos agora que $\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| = s$: Suponha que $\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| < s$, ou que, $\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| \leq s - \beta$ para algum $\beta > 0$. Apliquemos o teorema das funções implícitas, Teorema C. Para tal, verifiquemos que as hipóteses deste teorema são satisfeitas: Ω_{R_n} é limitado. Além disso, sabemos da Análise que para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $\Phi_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\rho : \mathbb{R} \times C_0^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ dada por $\rho(t, v) = v + \Phi_t$ é continuamente diferenciável e $\Phi_t|_{\alpha_n} = 0, \Phi_t|_{C_{R_n}} = t$. Também do parágrafo anterior temos que $Q(u_{t_n}) = 0$ em Ω_{R_n} e $u_{t_n}|_{\partial\Omega_{R_n}} = \Phi_{t_n}|_{\partial\Omega_{R_n}}$, o que então garante que as hipóteses do Teorema C são satisfeitas. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (t_n - \delta, t_n + \delta)$ existe $u_t \in C^\infty(\overline{\Omega}_{R_n})$ tal que $Q(u_t) = 0$ em Ω_{R_n}, $u_t|_{\partial\Omega_{R_n}} = \Phi_t|_{\partial\Omega_{R_n}}$, ou seja, $u_t|_{\alpha_n} = 0$ e $u_t|_{C_{R_n}} = t$, bem como $\lim_{t \to t_n} |u_{t_n} - u_t|_{k;\Omega_{R_n}} = 0$, $k = 0, 1, 2$. Sabendo que para quaisquer $u, v \in C^1(\overline{\Delta})$, onde Δ é um domínio limitado do $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$|\nabla u| \leq \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$$

obtemos

$$\sup_{\Delta} |\nabla u| \leq \sup_{\Delta} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \sup_{\Delta} \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| = [u]_{1;\Delta} \leq |u|_{1;\Delta}$$

e, portanto,

$$\sup_{\Delta} |\nabla u - \nabla v| \leq \sup_{\Delta} \left|\frac{\partial (u-v)}{\partial x}\right| + \sup_{\Delta} \left|\frac{\partial (u-v)}{\partial y}\right| = [u-v]_{1;\Delta} \leq |u-v|_{1;\Delta}\,.$$

Então para o nosso problema temos

$$\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n} - \nabla u_t| \leq |u_{t_n} - u_t|_{1;\Omega_{R_n}}$$

e como

$$\lim_{t \to t_n} |u_{t_n} - u_t|_{1;\Omega_{R_n}} = 0,$$

temos

$$\lim_{t \to t_n} \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n} - \nabla u_t| = 0.$$

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta' < \delta$ tal que $|t - t_n| < \delta'$ implica

$$\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n} - \nabla u_t| < \varepsilon.$$

Como

$$|\nabla u_t| = |\nabla u_t - \nabla u_{t_n} + \nabla u_{t_n}| \leq |\nabla u_{t_n}| + |\nabla u_t - \nabla u_{t_n}|,$$

temos

$$\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_t| \leq \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_t - \nabla u_{t_n} + \nabla u_{t_n}| \leq \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| + \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_t - \nabla u_{t_n}|.$$

Assim, escolhendo $0 < \delta'' < \delta'$, $t = t_n + \delta''$ e $\varepsilon < \beta$ temos

$$\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_t| \leq \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| + \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_t - \nabla u_{t_n}| \leq s - \beta + \varepsilon < s.$$

Segue-se que $t = t_n + \delta'' \in T_n$, o que é absurdo já que $t_n = \sup T_n$. Portanto,

$$\sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| = s.$$

Como $\sup_{C_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| \leq s/2$, obtemos peloTeorema A, $\sup_{\alpha_n} |\nabla u_{t_n}| = s$. Portanto,

$$\sup_{\alpha_n} |\nabla u_{t_n}| = s = \sup_{\Omega_{R_n}} |\nabla u_{t_n}| \qquad (\partial\Omega_{R_n} = \alpha_n \cup C_{R_n}).$$

Nós definimos agora uma sequência $\{u_n\}$ de soluções não negativas para $Q = 0$

no domínio $\overline{\Lambda_n}$, onde

$$\Lambda_n := D_n \backslash (E_1 \cup ... \cup E_{K(n)})$$

tal que

$$u_n|_{\alpha_n} = 0, \ \sup_{\alpha_n \cap \partial G} |\nabla u_n| = \sup_{\Lambda_n} |\nabla u_n| = s, \tag{9}$$

da maneira que se segue. Como

$$\sup_{\alpha_n} |\nabla u_{t_n}| = s,$$

existe $p_n \in \alpha_n$ tal que $|\nabla u_{t_n}(p_n)| = s$. Se $p_n \in \partial G$, então defina

$$u_n := u_{t_n} |_{\overline{\Lambda}_n} .$$

Se

$$p_n \notin \partial G$$

então

$$p_n \in \Phi(G)$$

para algum $\Phi \in \Gamma$. Definimos $u_n(p) = u_{t_n}(\Phi(p))$, para $p \in \overline{\Lambda}_n$.

Observemos que se $p \in \overline{\Lambda_n}$ então $|p| \leq n$ e, desde que $R_n \geq 3n$, temos

$\Phi(p) \in \overline{\Omega}_{R_n}$, explicando a razão da escolha de R_n feita em (2). Segue-se que u_n está bem definida e satisfaz as condições (9). Temos como decorrência da análise: $\{u_n\}$ é uma seqüência de soluções não negativas de $Q = 0$ em Λ_n tal que $u_n|_{\partial\Lambda_n}$ se estende a $\Phi_n \in C^\infty(\overline{\Lambda}_n)$ com $|\Phi_n|_{2;\Lambda_n} \leq M$, $u_n \in C^\infty(\overline{\Lambda}_n)$, $\sup\limits_{\Lambda_n} |\nabla u_n| = s < \infty$, $u_n|_{\alpha_n} = 0$, para todo n. Também, $\overline{\Lambda}_n \subset \Lambda_{n+1}$, $n \geq n_0$; $\Omega = \cup_n \Lambda_n$.

Afirmação: Dado $m \geq n_0$ existe uma subseqüência $\left\{u_j^m\right\}$ da seqüência $\{u_n\}_{n \geq m}$ que converge uniformemente em $\overline{\Lambda}_m$ a uma solução $v_m \in C^\infty(\overline{\Lambda}_m)$ de $Q = 0$ em Λ_m, e vale $v_{m+1}|_{\Lambda_m} = v_m$. Para mostrar isto, usamos indução em $m \geq n_0$. Para $m = n_0$ aplicamos o Teorema B a seqüência $\left\{u_n|_{\overline{\Lambda}_{n_0}}\right\}_{n \geq n_0}$ para obter a existência de uma subseqüência $\left\{u_j^{n_0}\right\}$ convergindo uniformemente em $\overline{\Lambda}_{n_0}$, na norma C^2, a uma solução $v_{n_0} \in C^\infty(\overline{\Lambda}_{n_0})$ de $Q = 0$ em Λ_{n_0}. Suponhamos agora que $\left\{u_j^m\right\}$ está bem definida. $\left\{u_j^m\right\}$ é uma subseqüência de $\left\{u_n|_{\overline{\Lambda}_m}\right\}_{n \geq m}$ de modo que podemos tomar j_0 tal que $u_j^m = u_{n_j}|_{\overline{\Lambda_m}}$ e tendo-se $n_j \geq m + 1$ para $j > j_0$. Então $\left\{u_{n_j}|_{\overline{\Lambda}_{m+1}}\right\}_{j \geq j_0}$ é uma subseqüência da sequência $\left\{u_n|_{\overline{\Lambda}_{m+1}}\right\}_{n \geq m+1}$. Podemos aplicar novamente o Teorema B a seqüência $\left\{u_{n_j}|_{\overline{\Lambda}_{m+1}}\right\}_{j > j_0}$ para obter a existência de uma subseqüência $\left\{u_j^{m+1}\right\}_j$ convergindo uniformemente em $\overline{\Lambda}_{m+1}$, na norma C^2, a uma solução $v_{m+1} \in C^\infty(\overline{\Lambda}_{m+1})$ de $Q = 0$ em Λ_{m+1}. Para todo k, existe então j_k tal que

$$u_k^{m+1}|_{\overline{\Lambda}_{m+1}} = u_{n_{j_k}}|_{\overline{\Lambda}_{m+1}}$$

de modo que

$$u_k^{m+1}|_{\overline{\Lambda}_m} = u_{n_{j_k}}|_{\overline{\Lambda}_m} = u_{j_k}^m$$

o que mostra que

$$v_{m+1}|_{\overline{\Lambda}_m} = \lim_k \, (u_k^{m+1}|_{\overline{\Lambda}_m}) = \lim_k \, u_{j_k}^m = v_m,$$

concluindo a afirmação. Defino então $v_s \in C^\infty(\overline{\Omega})$ por $v_s(x) = v_m(x)$ onde m é qualquer natural tal que $x \in \Lambda_m$. Isto prova a primeira parte do teorema no caso em que Ω é C^∞. Provemos agora que v_s satisfaz

$$\lim_{R\to\infty} \sup \frac{\max\limits_{C_R \cap \overline{\Omega}} v_s}{R} < \infty. \tag{10}$$

Para tal, consideremos o cone reto dado como o gráfico da função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(p) = s|p - p_1|,$$

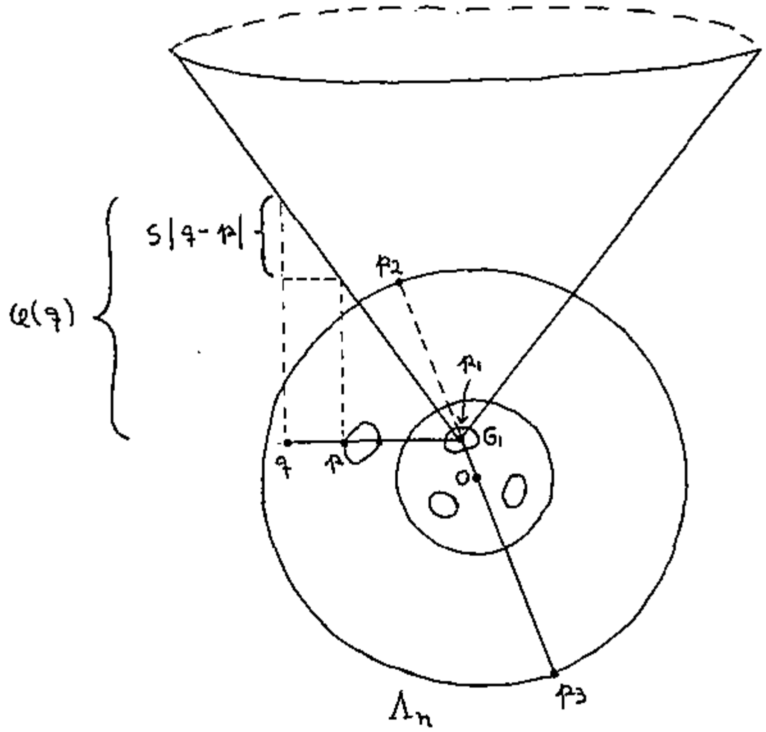
cujo vértice p_1 é um ponto qualquer de $int(G)$, onde

$$G = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_m.$$

Mostremos que v_s está abaixo de $\varphi|_{\overline{\Omega}} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e que

$$\lim_{R \to \infty} \sup \frac{\max_{C_R} \varphi}{R} < \infty.$$

Seja $q \in \overline{\Omega}$. Então $v_s(q) = v_n(q)$ onde n é qualquer natural tal que $q \in \Lambda_n$,sendo v_n definida como antes. A figura abaixo esclarece as construções que faremos a seguir:



Seja

$$A = \overline{p_1 q} \cap \alpha_n$$

e seja $p \in A$ tal que $\overline{pq} \cap \alpha_n = \emptyset$, onde

$$\overline{pq} = \{rq + (1-r)p : 0 < r < 1\}.$$

Então, fazendo

$$\gamma(r) = (x(r), y(r)) = rq + (1-r)p,$$

temos

$$\frac{d}{dr} v_s(\gamma(r)) dr = \frac{d}{dx} v_s x'(r) + \frac{d}{dy} v_s y'(r) = \langle \nabla v_s(\gamma(r)), \gamma'(r) \rangle$$

de modo que

$$v_s(q) - v_s(p) = \int_0^1 \frac{d}{dr}(v_s(\gamma(r)) dr = \int_0^1 \langle \nabla v_s, \gamma'(r) \rangle \, dr.$$

Usando $|< u, v >| \leq |u| \, |v|$ temos

$$\int_0^1 \langle \nabla v_s, \gamma'(r) \rangle \, dr \leq \int_0^1 |\langle \nabla v_s, \gamma'(r) \rangle| \, dr = \int_0^1 |\langle \nabla v_s, q - p \rangle| \, dr$$

$$\leq \int_0^1 |\nabla v_s|\,|q-p|\,dr \leq s\,|q-p| \leq \varphi(q).$$

Como $v_s(p) = 0$ segue-se que

$$v_s(q) \leq \varphi(q).$$

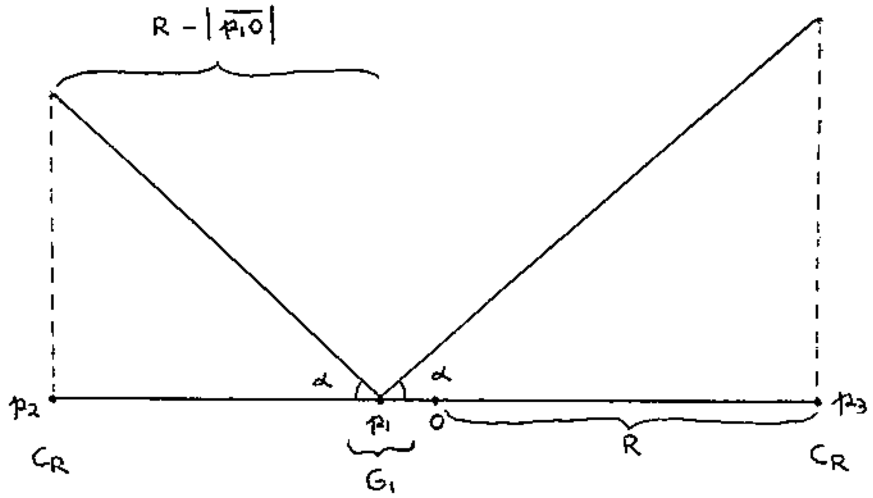
Assim, dado qualquer $R > 0$ temos

$$\max_{C_R \cap \overline{\Omega}} v_s \leq \max_{C_R \cap \overline{\Omega}} \varphi$$

donde

$$\lim_{R\to\infty} \sup \frac{\max_{C_R\cap\overline{\Omega}} v_s}{R} \leq \lim_{R\to\infty} \sup \frac{\max_{C_R\cap\overline{\Omega}} \varphi}{R}. \qquad (11)$$

Mostremos agora que o lado direito da última desigualdade é igual a s.



Como $p_2 \in \overrightarrow{op_1} \cap C_R$ e $p_3 \in \overrightarrow{p_1o} \cap C_R$, onde $\overrightarrow{op_1}$ e $\overrightarrow{p_1o}$ são semi-retas, temos

$$s = \frac{\varphi(p_3)}{|\overline{p_1p_3}|} = \frac{\varphi(p_2)}{|\overline{p_1p_2}|}$$

e sendo

$$\varphi(p_3) = \max_{C_R} \varphi, \text{ e } |\overline{p_1p_3}| = R + |\overline{p_1o}|,$$

obtemos

$$s = \frac{\max\limits_{C_R} \varphi}{|\overline{p_1p_3}|} = \frac{\max\limits_{C_R} \varphi}{R + |\overline{p_1o}|},$$

mas, pela figura acima,

$$sR + s\,|\overline{p_1o}| = \max_{C_R} \varphi$$

e dividindo toda esta expressão por R, temos

$$\frac{sR}{R} + \frac{s\,|\overline{p_1o}|}{R} = \frac{\max\limits_{C_R} \varphi}{R}$$

e tomando o supremo e aplicando limite, fica

$$\lim_{R\to\infty} \sup \frac{\max\limits_{C_R} \varphi}{R} = s,$$

o que, junto com (11), prova (10).

Suponhamos agora que Ω é C^0. Usando resultados de Análise, podemos garantir a existência de uma sequência Ω_n de domínios C^∞ tal que $\Omega \subset \Omega_n$ e que

$$\Omega_n \subset \left\{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, \partial\Omega) \leq \frac{1}{n}\right\} \cup \Omega$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo resultado já feito, para todo n existe $v_{n,s} \in C^\infty(\overline{\Omega_n})$ com $\sup\limits_{\Omega_n} |\nabla v_{n,s}| = s$ solução de $Q = 0$ em Ω_n. Usando a mesma técnica utilizada acima, podemos garantir que $\{v_{n,s}\}$ contém uma subseqüência convergindo uniformemente em compactos de $\overline{\Omega}$ a uma solução

$$w_s \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

de $Q = 0$ em Ω. Pelos mesmos argumentos anteriores, tem-se $\sup\limits_{\Omega_n} |\nabla w_s| = s$ e

$$\lim_{R\to\infty} \sup \frac{\max\limits_{C_R\cap\overline{\Omega}} w_s}{R} < \infty,$$

concluindo a prova do teorema.

Observacão (Interpretação Física). Podemos obter experimentalmente a solução u_{t_n} de $Q = 0$ em Ω_{R_n} da seguinte forma: representamos as curvas ∂E_i e a circunferência C_{R_n} por aros e as mergulhamos em água com sabão, tomando o cuidado de mantê-las no mesmo plano. Então retirando-as da água e furando as partes circundadas pelos aros ∂E_i, obtém-se a solução zero em Ω_{R_n}. Agora, dado $s > 0$, nós elevamos a circunferência C_{R_n} até que a película de sabão formada atinja gradiente igual a s em alguma curva ∂E_i. A película de sabão resultante é o gráfico de u_{t_n}.

Bibliografia

[ER] R. S. Earp, H. Rosenberg, "The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains", Journal des Math. Pures et Apliquées, T. 68, 1989, 163 - 183

[CK] P. Collin, R. Krust, "Le probléme de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur de domaines non bornés", Bull. Soc. Math. de France, 119, 443-462, 1991

[ET] R. S. Earp, E. Toubiana, "Some applications of maximum principle to hipersurface theory in euclidean and hyperbolic space", preprint

[KT] N. Kutev, F. Tomi, "Existence and Nonexistence in the Exterior Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in the Plane", To appear in the Journal of Differential and Integral Equations

[RT] J. Ripoll, F. Tomi, "Some existence theorems for minimal graphs over non convex planar domains", preprint

[N] J. C. C. Nitsche, "Lectures on Minimal Surface", Vol I, Cambridge University Press, 1989

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", last edition, Springer-Verlag, 1983