

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Extração em Modelos
Populacionais com
Recrutamento Não Linear**

por

Karine Faverzani Magnago

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Jacques Aveline Loureiro da Silva
Orientador

Porto Alegre, Agosto de 1998.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Magnago, Karine Faverzani

Extração em Modelos Populacionais com Recrutamento Não Linear / Karine Faverzani Magnago.—Porto Alegre: CPGMAP da UFRGS, 1998.

125 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 1998. Orientador: Silva, Jacques Aveline Loureiro da

Dissertação: Matemática
Modelos Populacionais, Extração, Recrutamento Não Linear

Para meus pais

AGRADECIMENTO

Eu agradeço a todos que colaboraram na concepção desta dissertação.

Agradeço ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, à UFRGS e à CAPES pela estrutura e suporte financeiro.

Agradeço aos professores da Graduação e da Pós-Graduação; em especial aos Professores Rudnei Dias da Cunha e Vilmar Trevisan pela amizade e atenção.

Agradeço ao Professor Jacques Aveline Loureiro da Silva por sua orientação e confiança durante a realização deste trabalho.

Agradeço aos funcionários dos Recursos Computacionais por seu trabalho.

Agradeço aos colegas da Graduação e da Pós-Graduação pela amizade e colaboração.

Agradeço aos meus amigos que pacientemente compreenderam as minhas ausências e respeitaram o meu trabalho: em particular à Débora, à Eliane e à Regina.

Agradeço às minhas irmãs e aos meus pais pelo carinho e amor.

Agradeço ao Márcio por tudo.

Agradeço a Deus...

RESUMO

Neste trabalho, observamos a influência da remoção de indivíduos de uma população no seu processo de evolução. Consideramos que esta população depende continuamente do tempo e da idade de seus indivíduos. Primeiramente, apresentamos um modelo de crescimento populacional linearmente dependente da idade baseado na Equação de McKendrick-Von Foerster, que não estabelece nenhuma relação de dependência com a densidade populacional. Num segundo momento, discutimos resultados analíticos obtidos quando acoplamos a extração ao modelo linear. Finalmente, apresentamos um modelo dependente da densidade que nos conduz a um modelo não linear, no qual introduzimos a extração de uma fração da população. Considerando perfis reprodutivos que simulam processos reprodutivos naturais, obtemos resultados analíticos e numéricos que nos auxiliam na compreensão dos efeitos da extração na dinâmica populacional.

ABSTRACT

In this study we observe the influence of harvesting in a population in its process of evolution in time. We assume that the population depends on time and age in a continuous fashion. First we present a linear model based in the McKendrick-Von Foerster equation in which no dependence on population density is assumed. We then discuss some analitical results obtained when we add harvesting to the linear model. Finally we include density dependence in our model which leads to a nonlinear model in which we couple the effects of harvesting a fraction of the population. We considered reproductive schedules that mimic natural reproductive processes and obtained numerical and analitical results that help us to the understand the effects of the harvesting in the population dynamics.

SUMÁRIO

RESUMO	ii
ABSTRACT	iii
LISTA DE FIGURAS	vi
1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELO LINEAR COM ESTRUTURA ETÁRIA	4
2.1 Equação de McKendrick-Von Foerster	4
2.2 Solução da Equação de McKendrick-Von Foerster	8
2.3 Equação Integral de Lotka	12
2.4 O Comportamento Assintótico da Natalidade	14
2.5 Solução por Transformada de Laplace	20
3 EXTRAÇÃO NO MODELO LINEAR	24
3.1 Extração Dependente Somente da Idade	24
3.2 Extração Dependente da Idade e do Tempo	32

4	EXTRAÇÃO EM MODELOS COM RECRUTAMENTO DEPENDENTE DA DENSIDADE	40
4.1	Modelo Não Linear	40
4.2	Extração	49
4.3	Resultados: <u>Extração 1</u>	52
4.3.1	Maternidade Constante	53
4.3.2	Maternidade Densidade Gamma Deslocada	62
4.4	Resultados: <u>Extração 2</u>	68
4.4.1	Maternidade Constante	68
4.4.2	Maternidade Densidade Gamma Deslocada	81
4.5	Resultados: <u>Extração 3</u>	91
4.5.1	Maternidade Constante	91
4.5.2	Maternidade Densidade Gamma Deslocada	101
5	CONCLUSÕES	116
	BIBLIOGRAFIA	120

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 2.1 Representação das Curvas Características no quadrante positivo do plano $x-t$. Elas interceptam a taxa de natalidade $u(0, t) = B(t)$ para $t > x$ e a densidade populacional inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ para $t < x$.</p>	9
<p>Figura 2.2 Esboço do gráfico da função $\varphi(\lambda)$, onde λ_1 denota a única solução real de $\varphi(\lambda) - 1 = 0$, isto é, a única solução real da Equação Característica.</p>	16
<p>Figura 2.3 No Quadro A, λ_1 ocorre exatamente quando $\lambda = 0$ pois $R_0 = \varphi(0) = 1$. No Quadro B, como $R_0 > 1$ então $\lambda_1 > 0$ e no Quadro C, como $R_0 < 1$, segue que $\lambda_1 < 0$.</p>	17
<p>Figura 3.1 Apresentação esquemática das estações de extração, onde T' representa um dado período de tempo e h, o intervalo de duração de uma estação de extração.</p>	33
<p>Figura 4.1 Ilustração do modelo dependente da densidade populacional. Observe que $g[B(t)]$ é a probabilidade de um indivíduo passar a fazer parte da população, $B(t)$ é a natalidade e R é a população de recrutas.</p>	40

Figura 4.2	Neste esboço, podemos observar as propriedades da função g bem como o equilíbrio B^* , que satisfaz $g[B^*] = 1/R_0$	41
Figura 4.3	Esboço da única solução real da equação característica quando $0 < \gamma < 1$ (i).	46
Figura 4.4	Não existe soluções reais para a equação característica quando $1 < \gamma < 2$ (ii).	47
Figura 4.5	Comportamento de $\bar{\gamma}$ quando movemos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade.	56
Figura 4.6	Efeito desestabilizador de T	56
Figura 4.7	Efeito estabilizador de k	57
Figura 4.8	Comportamento de $\bar{\gamma}$ quando T é significativamente menor que k	57
Figura 4.9	Gráfico da fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ em função da taxa de extração δ , para $T = 20$. Podemos observar que δ é um parâmetro desestabilizador.	61
Figura 4.10	Gráfico da função $g_s(x - T, \tau)$ para $T = 10$, $\tau = 0.5$ e $s = 5$	63
Figura 4.11	Gráfico da fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ em função da taxa de extração δ , para $T = 10$, $s = 5$ e $\tau = 0.5$. Podemos novamente observar que δ é um parâmetro desestabilizador.	67

Figura 4.12	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	71
Figura 4.13	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	71
Figura 4.14	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	72
Figura 4.15	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .	72
Figura 4.16	Comportamento de $\bar{\gamma}$ quando movemos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade.	73
Figura 4.17	Comportamento de $\bar{\gamma}$ quando movemos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade.	73
Figura 4.18	Efeito desestabilizador de T	74
Figura 4.19	Efeito estabilizador de k	74
Figura 4.20	$f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$	76
Figura 4.21	$f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$	76
Figura 4.22	$f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$	77
Figura 4.23	Efeito desestabilizador de T	79
Figura 4.24	Efeito estabilizador de c e desestabilizador de δ	79
Figura 4.25	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ quando c está entre 40 e 50.	80
Figura 4.26	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .	80

Figura 4.27	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	83
Figura 4.28	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	84
Figura 4.29	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	84
Figura 4.30	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .	85
Figura 4.31	Efeito desestabilizador de T	85
Figura 4.32	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	87
Figura 4.33	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	88
Figura 4.34	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	88
Figura 4.35	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .	89
Figura 4.36	Efeito desestabilizador de T	89
Figura 4.37	$f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$	91
Figura 4.38	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .	94
Figura 4.39	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .	95
Figura 4.40	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para valores diferentes de δ .	95
Figura 4.41	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de n .	96
Figura 4.42	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .	96

Figura 4.43	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .	97
Figura 4.44	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .	97
Figura 4.45	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ quando movemos o intervalo $[T, k]$ no sentido crescente da idade, movendo também c e mantendo n constante.	98
Figura 4.46	Efeito desestabilizador de T	98
Figura 4.47	Efeito estabilizador de k	99
Figura 4.48	$f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$	100
Figura 4.49	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	103
Figura 4.50	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .	104
Figura 4.51	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de n .	104
Figura 4.52	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para diferentes valores de δ .	105
Figura 4.53	Efeito desestabilizador de T	105
Figura 4.54	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .	107
Figura 4.55	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .	107
Figura 4.56	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de n .	108
Figura 4.57	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para diferentes valores de δ .	108

Figura 4.58	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de T .	109
Figura 4.59	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .	111
Figura 4.60	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .	112
Figura 4.61	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para valores diferentes de δ .	112
Figura 4.62	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de n .	113
Figura 4.63	Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .	113
Figura 4.64	Efeito desestabilizador de T .	114
Figura 4.65	$f(\omega)$ apresenta um única raiz $\omega = 0$.	115

1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de explicar a dinâmica de populações naturais, foram desenvolvidas modelagens matemáticas que aproximam a realidade, considerando parte dos inúmeros mecanismos internos e externos que influenciam no desenvolvimento de uma população.

Um fator importante a ser considerado é a extração, quando a população sofre uma remoção permanente de parte de seus indivíduos. Este fator pode refletir uma série de situações reais como um programa de controle populacional ou uma epidemia que afete uma parte da população ou, ainda, uma coleta de animais por meio da caça ou da pesca.

No final da década de 70, tivemos uma série de trabalhos apresentando os efeitos da extração em vários modelos de crescimento populacional. Primeiramente, os efeitos da remoção de indivíduos na estabilidade de uma população foram investigados em modelos populacionais determinísticos, independentes da idade. Muitos destes trabalhos são referenciados em [26].

Um modelo de crescimento populacional linearmente dependente da idade foi considerado em [26, 27]. Este modelo é baseado na Equação de McKendrick-Von Foerster e associado a estratégias de extração dependentes da idade. Com a inclusão da dependência etária conseguiu-se resultados mais precisos pois foram

expressos para determinados grupos etários, ao contrário dos modelos independentes da idade, que apresentam resultados para a população inteira. Observe que neste modelo linearmente dependente da idade não foi incluída a dependência da densidade e, por conseqüência, não aparecem termos não lineares [27].

A necessidade de combinar informações demográficas e a dependência da densidade nos modelos matemáticos populacionais é apresentada em [32], com o objetivo de salientar que esta combinação aperfeiçoa os modelos teóricos e conseqüentemente amplia sua utilidade em estudos de sistemas ecológicos naturais.

Neste trabalho, estudamos os efeitos da extração em modelos com distribuição etária dependentes da densidade (capítulo 4). O modelo utilizado é baseado na Equação Integral de Lotka com a inclusão do recrutamento dependente da densidade [29]. As estratégias de extração consideradas dependem exclusivamente da idade [26].

Esta dissertação é organizada como segue. No capítulo 2, estabelecemos um modelo matemático para a evolução populacional no tempo. Este modelo considera a distribuição etária dos indivíduos continuamente no tempo e apresenta uma relação de dependência linear com a idade (seção 2.1). Na seqüência, temos a solução formal do problema de contorno associado a este modelo linear (seção 2.2). Então derivamos a Equação Integral de Lotka para a natalidade, reduzindo o problema original a uma equação integral e fazemos uma análise do comportamento

assintótico da população (seções 2.3 e 2.4). Na última seção, resolvemos a equação integral em questão utilizando Transformadas de Laplace.

No capítulo 3, introduzimos a extração no modelo linear, considerando que uma fração δ da população é removida ($0 < \delta < 1$). Na primeira seção, a extração depende somente da idade e são considerados dois intervalos etários de extração. Na segunda seção, consideramos que a extração depende da idade e também do tempo. É feito um estudo considerando a natalidade que nos fornece informações sobre o comportamento da população e os efeitos da extração nesta população.

No quarto capítulo, propomos um modelo populacional dependente da densidade baseado nos trabalhos de Diekman e Heijmans [8] e Silva [29]. Este modelo é apresentado na seção 4.1. Ele nos conduz a uma equação integral não linear para a natalidade análoga à Equação Integral de Lotka. É desenvolvido um critério para avaliar a influência de cada parâmetro na estabilidade populacional (seção 4.1), o que será útil para avaliarmos os efeitos da extração no modelo não linear proposto (seção 4.2). A extração neste caso é considerada dependente somente da idade e não do tempo; e são considerados perfis reprodutivos que imitam processos reprodutivos naturais. A seguir, apresentamos uma série de resultados analíticos e numéricos (seção 4.3).

No último capítulo, temos as conclusões referentes aos capítulos anteriores.

2 MODELO LINEAR COM ESTRUTURA ETÁRIA

2.1 Equação de McKendrick-Von Foerster

Para analisarmos quantitativamente um processo de evolução populacional, necessitamos de uma modelagem matemática que nos permita observar as variações da população com o tempo e a influência de diversos fatores nessas variações. Embora muitos fatores possam afetar o crescimento populacional, são a natalidade, a mortalidade e a migração os fatores que influenciam diretamente no comportamento da população. Neste sentido, vamos apresentar o modelo de evolução populacional baseado na Equação de McKendrick-Von Foerster, que considera a distribuição etária de indivíduos continuamente no tempo.

Os efeitos da estrutura etária são importantes ecologicamente quando estudamos uma população em uma escala de tempo comparável com o tempo de vida de cada indivíduo desta população. Além disso, as taxas vitais (natalidade e mortalidade) variam sensivelmente com a idade dos indivíduos.

É assumido que estamos modelando a população de uma espécie simples, que não está sujeita a processos de migração (isolada). Vamos considerar somente as fêmeas da população, o que é equivalente à suposição que o número de machos é igual ao número de fêmeas. Também vamos ignorar todas as diferenças entre os indivíduos, exceto a idade.

Seja a função $N(x, t)$ o número de indivíduos com idade inferior a x no instante t . Observe que as variáveis das quais a função $N(x, t)$ depende, idade e tempo, estão no intervalo $[0, \infty)$.

Da própria definição, podemos observar que $N(x, t) \geq 0$. E, se tomarmos idades x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, segue que $N(x_1, t) \leq N(x_2, t)$.

Assim $N(x, t)$ é uma função monótona crescente da variável x , isto é, $\frac{\partial N}{\partial x} \geq 0$. Ainda,

$$N(0, t) = 0 \quad (2.1.1)$$

$$N(x_m, t) = N(\infty, t) = N(t) \quad (2.1.2)$$

onde x_m denota a máxima idade que um indivíduo pode alcançar e $N(t)$, a população total.

Seja $u(x, t) = \frac{\partial N}{\partial x}$; $u(x, t)$ é a função densidade da distribuição etária. Como $N(x, t)$ é monotonicamente crescente e da expressão 2.1.2, podemos verificar que $u(x, t) \geq 0$ e $u(x_m, t) = 0$.

Seja Δx um intervalo de idade suficientemente pequeno, $\Delta x > 0$, então $u(x, t) \Delta x$ representa o número de indivíduos com idade entre x e $x + \Delta x$ no instante t . Deste fato, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$N(x_2, t) - N(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx, \quad (2.1.3)$$

$$N(t) = \int_0^{\infty} u(x, t) dx, \quad (2.1.4)$$

sendo que a diferença $N(x_2, t) - N(x_1, t)$ representa o número de indivíduos com idade entre x_1 e x_2 no instante t e $N(t)$, a população total em t .

Considere a taxa de mortalidade $\mu(x, t)$ tal que $\mu(x, t) \Delta t$ representa a fração de indivíduos com idade x que morre no intervalo $(t, t + \Delta t)$. Por conseqüência, podemos escrever:

$$u(x, t) \Delta x - u(x + \Delta x, t + \Delta t) \Delta x = \mu(x, t) \Delta t u(x, t) \Delta x, \quad (2.1.5)$$

$$u(x, t) \Delta x - u(x + \Delta x, t + \Delta t) \Delta x = \mu(x, t) u(x, t) \Delta t \Delta x. \quad (2.1.6)$$

Fazendo a expansão de $u(x + \Delta x, t + \Delta t)$ em série de Taylor em torno de (x, t) e desprezando os termos não lineares, obtemos:

$$u(x + \Delta x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_x \Delta x + u_t \Delta t, \quad (2.1.7)$$

onde $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Observe que x tem a mesma escala de t , $\frac{dx}{dt} = 1$, e portanto $\Delta x = \Delta t$.

E substituindo 2.1.7 na equação 2.1.6, encontramos a Equação Diferencial Parcial Linear:

$$u_t + u_x = -\mu(x, t) u(x, t). \quad (2.1.8)$$

que é conhecida como a Equação de McKendrick-Von Foerster.

Seja $u_0(x)$ a densidade de distribuição etária no instante inicial ($t = 0$), que supomos ser conhecida. Daí podemos estabelecer a condição inicial para a

equação 2.1.8 dada por:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.1.9)$$

Considere a taxa de fertilidade $f(x, t)$; então $f(x, t) \Delta x$ representa a taxa de produção de ovos (ou larvas) por indivíduo com idade entre x e $x + \Delta x$, no instante t . Assim, a taxa de natalidade $B(t)$ no instante t , para toda a população, é dada por:

$$B(t) = \int_0^{\infty} u(x, t) f(x, t) dx. \quad (2.1.10)$$

Mas a densidade de indivíduos de idade zero em um instante qualquer t é igual a taxa de natalidade neste mesmo instante e daí obtemos a condição de contorno:

$$u(0, t) = B(t). \quad (2.1.11)$$

Combinando a equação 2.1.8 com 2.1.9 e 2.1.11, escrevemos o problema de contorno que rege o processo de evolução populacional em questão:

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= -\mu(x, t) u(x, t) & x \in [0, \infty), t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in [0, \infty) \\ u(0, t) &= B(t) & t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Um ponto de destaque no problema 2.1.12 é que a natalidade $B(t)$, descrita na equação 2.1.10, depende ela mesma da distribuição populacional $u(x, t)$.

A seguir, resolveremos 2.1.12 utilizando o Método das Características para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem, negligenciando o fato de $B(t)$ não ser conhecida.

2.2 Solução da Equação de McKendrick-Von Foerster

Para resolver o problema 2.1.12 e encontrar uma solução formal para a função $u(x, t)$, foi escolhido o Método das Características para Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem [34]. Este método consiste da integração formal ao longo de curvas características no quadrante positivo do plano $x-t$.

É necessário assumir, inicialmente, que a natalidade $B(t)$ é conhecida, embora ela dependa da densidade populacional $u(x, t)$.

Aplicando o método escolhido, determinamos a seguinte família de curvas características:

$$\frac{dt}{dx} = 1 \implies t = x + C \quad (2.2.1)$$

onde C representa uma constante genérica, ilustrada na figura 2.1.

Observe na figura 2.1 que para $t > x$ as curvas características interceptam a condição de contorno $u(0, t) = B(t)$ e para $t < x$ elas interceptam a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. Por isso, o processo de solução de 2.1.12 será dividido em duas etapas: na primeira etapa resolveremos a equação 2.1.8 para $t > x$ e na segunda, para $t < x$.

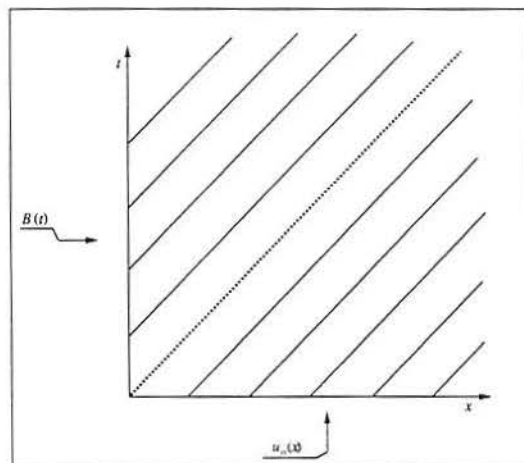


Figura 2.1: Representação das Curvas Características no quadrante positivo do plano $x-t$. Elas interceptam a taxa de natalidade $u(0, t) = B(t)$ para $t > x$ e a densidade populacional inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ para $t < x$.

Etapa I: Para $t > x$, procedemos a substituição de variáveis conveniente:

$$\begin{cases} \xi = t - x \\ \eta = x \end{cases} \implies \begin{cases} u_x = -u_\xi + u_\eta \\ u_t = u_\xi \end{cases} \quad (2.2.2)$$

na equação 2.1.8, onde ξ é constante ao longo das características e $x = \eta$ intercepta cada características uma única vez e denotamos $u_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ e $u_\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}$. Obtemos, então, a equação diferencial parcial nas variáveis ξ e η :

$$u_\eta = -\mu(\eta, \xi + \eta) u, \quad (2.2.3)$$

cuja solução é:

$$u(\eta, \xi + \eta) = F(\xi) \exp \left[- \int_{\eta_0}^{\eta} \mu(s, \xi + s) ds \right]. \quad (2.2.4)$$

Usando a condição de contorno $u(0, t) = B(t)$ e observando que quando $x = 0$, temos $\xi = t$ e $\eta = 0$, segue:

$$B(\xi) = B(t) \quad (2.2.5)$$

e, então

$$B(\xi) = F(\xi) \exp \left[- \int_{\eta_0}^0 \mu(s, \xi + s) ds \right]. \quad (2.2.6)$$

Isolando $F(\xi)$ na equação anterior,

$$F(\xi) = B(\xi) \exp \left[- \int_0^{\eta_0} \mu(s, \xi + s) ds \right] \quad (2.2.7)$$

e substituindo 2.2.7 em 2.2.4, obtemos:

$$u(\eta, \xi + \eta) = B(\xi) \exp \left[- \int_0^{\eta} \mu(s, \xi + s) ds \right]. \quad (2.2.8)$$

Retornando às variáveis originais:

$$u(x, t) = B(t - x) \exp \left[- \int_0^x \mu(s, t - x + s) ds \right], \quad (2.2.9)$$

que é a solução do problema proposto para $t > x$.

Etapa II:

Para $t < x$, de maneira similar à etapa anterior, fazemos a substituição de variáveis:

$$\begin{cases} \xi = x - t \\ \eta = t \end{cases} \implies \begin{cases} u_x = u_\xi \\ u_t = -u_\xi + u_\eta \end{cases}, \quad (2.2.10)$$

na equação 2.1.8, e obtemos:

$$u_\eta = -\mu(\xi + \eta, \eta) u. \quad (2.2.11)$$

Após desenvolvimento análogo ao anterior, obtemos a solução para a densidade populacional nas variáveis ξ e η , para $t < x$, como segue:

$$u(\xi + \eta, \eta) = u_0(\xi) \exp \left[- \int_0^\eta \mu(\xi + s, s) ds \right]. \quad (2.2.12)$$

E, nas variáveis x e t temos:

$$u(x, t) = u_0(x - t) \exp \left[- \int_0^t \mu(x - t + s, s) ds \right], \quad (2.2.13)$$

o que encerra o processo de solução via linhas características.

Unindo os resultados obtidos nas duas etapas, a solução do problema 2.1.12 é dada por:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - t) \exp \left[- \int_0^t \mu(x - t + s, s) ds \right] & \text{se } t < x \\ B(t - x) \exp \left[- \int_0^x \mu(s, t - x + s) ds \right] & \text{se } t > x \end{cases}. \quad (2.2.14)$$

Observe que a natalidade $B(t)$ ainda é uma incógnita na solução 2.2.14.

Na próxima seção, vamos derivar a Equação Integral de Lotka, substituindo a solução formal de $u(x, t)$ dada em 2.2.14 na equação 2.1.10 e reduzir o nosso problema a solução de uma equação integral.

2.3 Equação Integral de Lotka

Se substituirmos a solução 2.2.14 do problema de valor no contorno 2.1.12 na equação da natalidade 2.1.10, obtemos a seguinte equação integral:

$$B(t) = G(t) + \int_0^t f(x, t) B(t - x) \exp \left[- \int_0^x \mu(s, t - x + s) ds \right] dx, \quad (2.3.1)$$

onde $G(t)$ representa o poder reprodutivo dos indivíduos presentes no instante inicial e é dado por:

$$G(t) = \int_t^\infty f(x, t) u_0(x - t) \exp \left[- \int_0^t \mu(x - t + s, s) ds \right] dx. \quad (2.3.2)$$

O segundo termo de 2.3.1 representa a taxa de nascimentos oriundos de indivíduos nascidos após $t = 0$. E a exponencial $\exp \left[- \int_0^x \mu(s, t - x + s) ds \right]$ representa a probabilidade de um indivíduo sobreviver até a idade x , dado que nasceu no instante $t - x$.

A equação 2.3.1 é conhecida como Equação de Renovação de Lotka ou Equação Integral de Lotka.

Suponha que as taxas vitais (fertilidade e mortalidade) não dependem do tempo, isto é, $f = f(x)$ e $\mu = \mu(x)$. E denote $l(x)$ como a probabilidade de um indivíduo sobreviver até a idade x . Então:

$$l(x) = \exp \left[- \int_0^x \mu(s) ds \right]. \quad (2.3.3)$$

Por conseqüência a equação integral 2.3.1 é reduzida a

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x) f(x) l(x) dx \quad (2.3.4)$$

onde $G(t)$, agora também simplificada, é:

$$G(t) = \int_t^\infty u_0(x-t) f(x) l(x) dx. \quad (2.3.5)$$

Seja $M(x) = f(x) l(x)$ a função maternidade. Reescrevemos, então a equação 2.3.4 como:

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x) M(x) dx. \quad (2.3.6)$$

A equação 2.3.6 permite alguns estudos mais detalhados. Na próxima seção, será apresentada uma análise do comportamento assintótico da natalidade $B(t)$; ou, em outras palavras, vamos observar o desenvolvimento de $B(t)$ quando o tempo tende a infinito, desprezando a contribuição dos indivíduos presentes no instante inicial. Como conseqüência deste enfoque, poderemos estudar a estrutura etária e o crescimento (ou decaimento) da população.

Ainda, podemos encontrar a solução formal da equação 2.3.6 utilizando Transformadas de Laplace, o que será feito na última seção deste capítulo (seção 2.5).

2.4 O Comportamento Assintótico da Natalidade

Nesta seção, vamos observar o comportamento assintótico da natalidade $B(t)$ descrita na equação 2.3.6.

Quando tomamos um instante t suficientemente grande podemos considerar $G(t) = 0$ pois a fertilidade é nula a partir da idade limite do intervalo reprodutivo, ou seja, a contribuição da população inicial $u_0(x)$ pode ser negligenciada quando o tempo tende a infinito. Desta consideração, a equação 2.3.6 pode ser reduzida a

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t-x) M(x) dx. \quad (2.4.1)$$

Vamos buscar soluções do tipo $B(t) = Q e^{\lambda t}$, onde Q representa uma constante qualquer. Substituindo em 2.4.1:

$$Q e^{\lambda t} = \int_0^{\infty} Q e^{\lambda(t-x)} M(x) dx \quad (2.4.2)$$

e simplificando, obtemos

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} M(x) dx = 1. \quad (2.4.3)$$

É razoável considerarmos que a função maternidade $M(x)$ é nula fora do intervalo $[T, k]$, onde T representa o início do período reprodutivo, isto é, os indivíduos atravessam uma fase juvenil na qual não são capazes de reproduzir-se até a idade T , e k representa idade do mais velho indivíduo apto a reprodução. Por

conseqüência, a equação 2.4.3 dá origem a

$$\int_T^k e^{-\lambda x} M(x) dx = 1. \quad (2.4.4)$$

É importante observar que a Equação Característica 2.4.4 tem uma única solução real. Para este fim, definimos a função

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} M(x) dx \quad (2.4.5)$$

que, neste caso, se reduz a

$$\varphi(\lambda) = \int_T^k e^{-\lambda x} M(x) dx. \quad (2.4.6)$$

Note que:

(i) $\varphi(\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$;

(ii) $\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$;

(iii) $\varphi'(\lambda) = \int_k^T -x e^{-\lambda x} M(x) dx < 0$, onde $\varphi'(\lambda) = \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}$.

Um esboço do gráfico de $\varphi(\lambda)$ pode ser visto na figura 2.2, onde está clara a existência de uma única solução real, a qual denotaremos por λ_1 .

Seja R_0 a taxa reprodutiva básica. Definimos R_0 como o número de filhotes fêmeas que um indivíduo tem em toda a sua vida. Matematicamente escrevemos:

$$R_0 = \varphi(0) = \int_T^k M(x) dx. \quad (2.4.7)$$

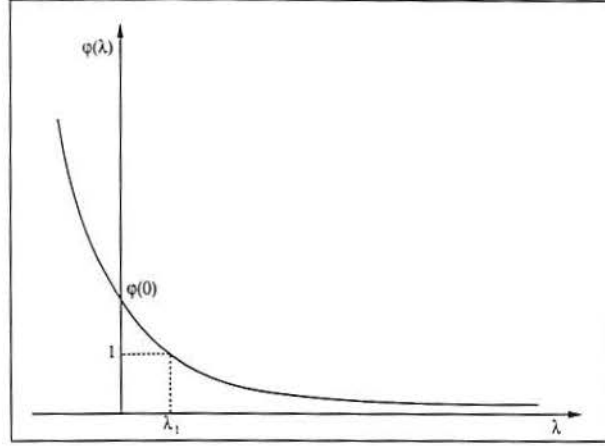


Figura 2.2: Esboço do gráfico da função $\varphi(\lambda)$, onde λ_1 denota a única solução real de $\varphi(\lambda) - 1 = 0$, isto é, a única solução real da Equação Característica.

É importante salientar que existe uma relação entre a taxa reprodutiva básica R_0 e a única solução real λ_1 . Esta relação está ilustrada na figura 2.3. Dela podemos escrever que para $R_0 = 1$, a solução real λ_1 é nula; para $R_0 > 1$, λ_1 é positiva e para $R_0 < 1$, λ_1 é negativa.

Ainda devemos observar que a Equação Característica 2.4.4 possui infinitas outras soluções λ_j , $j = 2, 3, \dots$ que aparecem como pares complexos conjugados satisfazendo $\text{Re}\{\lambda_j\} < \lambda_1$. Isto pode ser visto quando substituirmos $\lambda_j = a + ib$, $j \neq 1$ na equação característica. Separando as partes real e imaginária, obtemos, respectivamente:

$$\int_T^k e^{-ax} \cos bx M(x) dx = 1 \quad (2.4.8)$$

e

$$\int_T^k e^{-ax} \sin bx M(x) dx = 0. \quad (2.4.9)$$

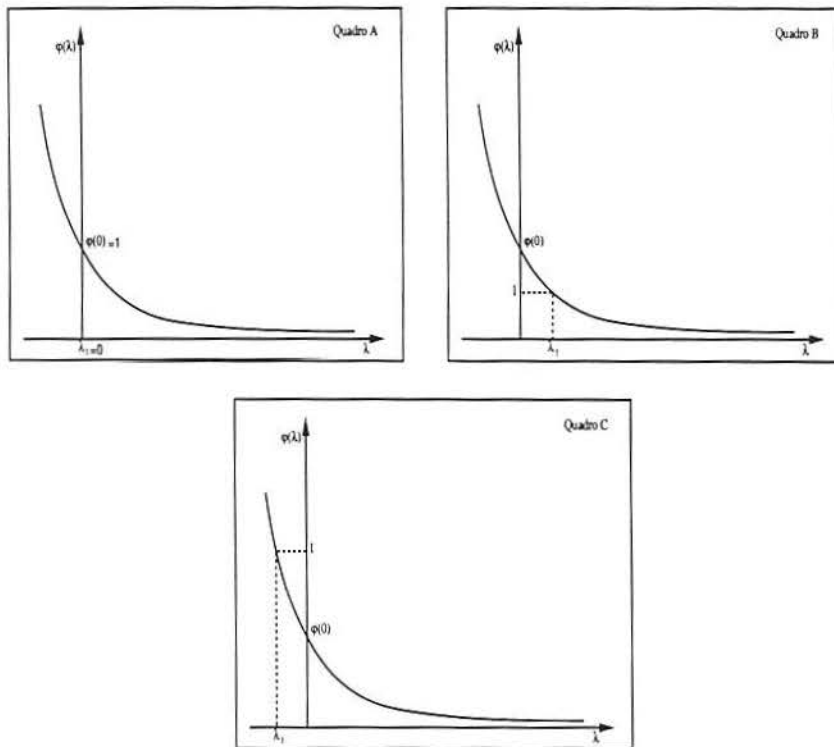


Figura 2.3: No Quadro A, λ_1 ocorre exatamente quando $\lambda = 0$ pois $R_0 = \varphi(0) = 1$. No Quadro B, como $R_0 > 1$ então $\lambda_1 > 0$ e no Quadro C, como $R_0 < 1$, segue que $\lambda_1 < 0$.

Observe que as equações 2.4.8 e 2.4.9 também são satisfeitas para o conjugado de λ_j , isto é, o número complexo $\overline{\lambda_j} = a - ib$.

Ainda, considerando a Equação Característica 2.4.4 e a equação 2.4.8, podemos escrever:

$$\int_T^k e^{-\lambda x} M(x) dx = \int_T^k e^{-ax} \cos bx M(x) dx. \quad (2.4.10)$$

Como $\cos bx M(x) \leq M(x)$ e observando a última equação, podemos concluir que $e^{-ax} > e^{-\lambda_1 x}$ e então $a < \lambda_1$. Isto quer dizer que a parte real de todas as soluções complexas da equação característica são menores que a única solução real λ_1 .

Também podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para Integrais na equação 2.4.9, de onde obtemos:

$$e^{-aq} \sin bq M(q) = 0 \quad (2.4.11)$$

e

$$\sin bq = 0. \quad (2.4.12)$$

Mas existem infinitos valores de b que satisfazem a equação 2.4.12. Portanto, podemos dizer que existem infinitas soluções do tipo $\lambda_j = a + ib$, $j = 2, 3, \dots$, para a Equação Característica.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que todas as soluções λ_j , $j = 1, 2, \dots$ são soluções simples.

Como a equação integral

$$B(t) = \int_T^k B(t-x) M(x) dx \quad (2.4.13)$$

é uma equação linear, podemos utilizar o Princípio da Superposição, como segue:

$$B(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j e^{\lambda_j t}. \quad (2.4.14)$$

Observe que quando $t \rightarrow \infty$, a soma $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j e^{\lambda_j t}$ é dominada pelo termo $Q_1 e^{\lambda_1 t}$ pois a solução real λ_1 é também a solução dominante. Então:

$$B(t) \approx Q_1 e^{\lambda_1 t} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.4.15)$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{e^{\lambda_1 t}} = Q_1. \quad (2.4.16)$$

No entanto, $u(x, t)$ pode ser escrito de 2.2.14 como $u(x, t) = B(t-x) l(x)$ e da equação 2.4.15 obtemos:

$$u(x, t) \approx Q_1 e^{\lambda_1(t-x)} l(x) \quad (2.4.17)$$

e

$$u(x, t) \approx Q_1 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 x} l(x) \quad (2.4.18)$$

quando $t \rightarrow \infty$, onde podemos observar claramente que a dependência da idade e do tempo estão separadas.

Utilizando 2.4.18 e a população total que está definida na equação 2.1.4, podemos escrever:

$$\begin{aligned} N(t) &\approx \int_0^{\infty} Q_1 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 x} l(x) dx \\ &\approx Q_1 e^{\lambda_1 t} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 x} l(x) dx, \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

quando $t \rightarrow \infty$, o que comprova que a população total cresce ou decai exponencialmente, podendo permanecer constante se $\lambda_1 = 0$.

Ainda, podemos definir $A(t)$ como a proporção de indivíduos com idade entre x_1 e x_2 , ou seja,

$$A(t) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx}{N(t)}. \quad (2.4.20)$$

De 2.4.18, obtemos:

$$\begin{aligned} A(t) &\approx \frac{\int_{x_1}^{x_2} Q_1 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 x} l(x) dx}{\int_0^{\infty} Q_1 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 x} l(x) dx} \\ &\approx \frac{\int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda_1 x} l(x) dx}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 x} l(x) dx} \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

que não depende nem do tempo, nem da distribuição inicial, mostrando que a estrutura etária é constante.

2.5 Solução por Transformada de Laplace

Para encerrar este capítulo, a equação 2.3.6 é resolvida utilizando Transformadas de Laplace [33].

Denotamos a transformada de Laplace de uma função $H(t)$ definida para $t > 0$ por $\hat{H}(\lambda)$, ou seja,

$$\hat{H}(\lambda) = \mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} H(t) dt \quad (2.5.1)$$

onde o parâmetro λ é complexo. A transformada de Laplace de $H(t)$ existe se a integral em 2.5.1 converge para algum valor de λ .

Observe na equação 2.3.6 que

$$\int_0^t B(t-x)M(x) dx = B(t) * M(t), \quad (2.5.2)$$

onde $B(t)*M(t)$ denota a convolução da taxa de natalidade e da função maternidade.

Aplicando transformada de Laplace em 2.3.6 e utilizando a propriedade da convolução $\mathcal{L}\{H_1(t) * H_2(t)\} = \hat{H}_1(\lambda) \hat{H}_2(\lambda)$ obtemos:

$$\hat{B}(\lambda) = \hat{G}(\lambda) + \hat{B}(\lambda) \hat{M}(\lambda) \quad (2.5.3)$$

e isolando $\hat{B}(\lambda)$

$$\hat{B}(\lambda) = \frac{\hat{G}(\lambda)}{1 - \hat{M}(\lambda)} \quad (2.5.4)$$

para todo λ tal que $\text{Re}\{\lambda\} > \lambda_1$ onde λ_1 é a única solução real da equação característica de Lotka 2.4.3.

Observe que $1 - \hat{M}(\lambda)$, denominador da equação 2.5.4, é nulo quando λ é solução da Equação Característica $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} M(x) dx = 1$. Da seção anterior, temos que esta equação tem infinitas soluções denotadas por λ_j , $j = 1, 2, \dots$

Por simplicidade, e sem perda de generalidade, assumimos que estas soluções têm multiplicidade 1.

Assim, o quociente em 2.5.4 pode ser escrito como:

$$\hat{B}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_j}{\lambda - \lambda_j} \quad (2.5.5)$$

$$\hat{B}(\lambda) = \frac{Q_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{Q_2}{\lambda - \lambda_2} + \dots \quad (2.5.6)$$

onde Q_j , $j = 1, 2, \dots$, são determinados como segue:

$$Q_j = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \left(\frac{\hat{G}(\lambda) (\lambda - \lambda_j)}{1 - \hat{M}(\lambda)} - (\lambda - \lambda_j) \sum_{i \neq j} \frac{Q_i}{\lambda - \lambda_i} \right). \quad (2.5.7)$$

Como $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \left((\lambda - \lambda_j) \sum_{i \neq j} \frac{Q_i}{\lambda - \lambda_i} \right) = 0$, temos:

$$Q_j = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} \frac{\hat{G}(\lambda) (\lambda - \lambda_j)}{1 - \hat{M}(\lambda)}. \quad (2.5.8)$$

Usando a regra de L'Hospital em 2.5.8. sai que

$$Q_j = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_j} - \frac{\hat{G}(\lambda) + (\lambda - \lambda_j) \hat{G}'(\lambda)}{\hat{M}'(\lambda)} \quad (2.5.9)$$

onde $\hat{G}'(\lambda) = \frac{d\hat{G}(\lambda)}{d\lambda}$, $\hat{M}'(\lambda) = \frac{d\hat{M}(\lambda)}{d\lambda}$ que é dada por:

$$\hat{M}'(\lambda) = \int_0^{\infty} -t e^{-\lambda t} M(t) dt. \quad (2.5.10)$$

E, finalmente, obtemos os coeficientes Q_j , $j = 1, 2, \dots$,

$$Q_j = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\lambda_j t} G(t) dt}{\int_0^{\infty} t e^{-\lambda_j t} M(t) dt}. \quad (2.5.11)$$

Pela Transformada Inversa de Laplace da equação 2.5.5, encontramos a expressão para a natalidade:

$$B(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j e^{\lambda_j t}, \quad (2.5.12)$$

onde Q_j , $j = 1, 2, \dots$, é dado em 2.5.11.

Ainda podemos escrever que $B(t) = O(e^{\lambda t})$ para λ tal que $\text{Re}\{\lambda\} > \lambda_1$ e $B(t) = Q_1 e^{\lambda_1 t} + O(e^{\lambda_1 t})$ quando $t \rightarrow \infty$, onde Q_1 é o resíduo de $\hat{B}(\lambda)$ quando $\lambda = \lambda_1$.

E

$$e^{\lambda_1 t} u(x, t) \xrightarrow{\text{unif.}} Q_1 \exp \left[-\lambda_1 x - \int_0^x \mu(s) ds \right] \quad (2.5.13)$$

quando $t \rightarrow \infty$. O lado direito de 2.5.13 representa a distribuição etária estável da população.

3 EXTRAÇÃO NO MODELO LINEAR

3.1 Extração Dependente Somente da Idade

No capítulo anterior, estudamos um modelo linear de crescimento populacional dependente da idade, baseado na equação de McKendrick-Von Foerster.

Agora, associado a este modelo, vamos observar a estrutura da população quando está sujeita a extração de uma fração dos seus indivíduos, assumindo que esta extração é feita a uma taxa constante δ ($0 < \delta < 1$) e que os indivíduos removidos pertencem a um intervalo etário particular. São considerados dois casos, um quando os indivíduos removidos têm idade superior a c ($x > c$) e outro quando têm idade entre c e $c + n$ ($c < x < c + n$). Então, nessa primeira abordagem, a estratégia de extração é suposta dependente da idade (mas não do tempo) [26].

Este tipo de coleta se prestaria para modelar situações como um programa de controle populacional onde uma fração de fêmeas adultas da população é removida (Caso 1); ou também o início de uma doença que afete apenas uma fração de indivíduos em um determinado intervalo etário (Caso 2).

Caso 1:

O primeiro caso em questão é quando uma fração δ de indivíduos com idade $x > c$ é extraída ($0 < \delta < 1$). Então $\delta \chi_{[c, \infty)}(x) u(x, t) \Delta x$ representa o número de indivíduos coletados com idade entre x e $x + \Delta x$ no instante t , onde χ_A

é a função característica do conjunto A , ou seja:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}. \quad (3.1.1)$$

Procedendo de maneira similar à seção 2.1, a equação 2.1.8 dá lugar a equação

$$u_t + u_x = -\mu(x, t) u - \delta \chi_{[c, \infty)}(x) u, \quad (3.1.2)$$

com as mesmas condição inicial e condição de contorno dadas em 2.1.9 e 2.1.11, respectivamente.

A solução da equação 3.1.2 com $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u(0, t) = B_c(t)$ é análoga a 2.2.14, apenas substituindo $\mu(x, t)$ por $\theta(x, t) = \mu(x, t) + \delta \chi_{[c, \infty)}(x)$, como segue:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x-t) \exp \left\{ -\int_0^t [\mu(x-t+s, s) + \delta \chi_{[c, \infty)}(x-t+s)] ds \right\} & \text{se } t < x \\ B_c(t-x) \exp \left\{ -\int_0^x [\mu(s, t-x+s) + \delta \chi_{[c, \infty)}(s)] ds \right\} & \text{se } t > x \end{cases}, \quad (3.1.3)$$

onde $B_c(t)$ denota a natalidade neste primeiro tipo de extração.

E ainda, substituindo a solução 3.1.3 na equação da natalidade 2.1.10, obtemos:

$$B_c(t) = \begin{cases} G_c(t) + \int_0^t f(x, t) B_c(t-x) \exp \left[-\int_0^x \mu(s, t-x+s) ds \right] dx & \text{se } t \leq c \\ G_c(t) + \int_0^t f(x, t) B_c(t-x) E(x, t) \exp \left[-\int_0^x \mu(s, t-x+s) ds \right] dx & \text{se } t > c \end{cases} \quad (3.1.4)$$

onde

$$G_c(t) = \int_t^\infty f(x, t) u_0(x-t) E(x, t) \exp \left[-\int_0^t \mu(x-t+s, s) ds \right] dx \quad (3.1.5)$$

e

$$E(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c < x \leq c + t \\ e^{-\delta t} & \text{se } c + t < x \end{cases} \quad (3.1.6)$$

É natural esperarmos que a população que sofre extração seja menor que a população que não está sujeita a ela. Comparando a equações 2.3.1 e 3.1.4, podemos observar claramente a influência da extração. Para $t \leq c$, quando os indivíduos mais velhos da população ainda tem idade inferior à c , o efeito da extração na natalidade $B_c(t)$ está presente somente em $G_c(t)$ que representa a natalidade oriunda da população inicial $u_0(x)$. Mas para $t > c$, o efeito da extração apresenta-se em ambos os termos da natalidade.

Agora, tomando o caso particular onde $f = f(x)$ e $\mu = \mu(x)$, ambos independentes do tempo, a equação 3.1.4 torna-se uma equação do tipo Equação de Renovação, na qual podemos utilizar transformadas de Laplace.

Então, para $t > c$ obtém-se a equação para a natalidade:

$$B_c(t) = G_c(t) + \int_0^t B_c(t-x) E(x) M(x) dx \quad (3.1.7)$$

onde

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } x > c \end{cases} \quad (3.1.8)$$

e $M(x)$ é a função maternidade introduzida no capítulo anterior. Então a transformada de Laplace de $B_c(t)$, denotada por $\hat{B}_c(\lambda)$, existe para todo λ tal que

$\text{Re}\{\lambda\} > \lambda_c$ onde λ_c é a única solução real da seguinte equação característica:

$$\varphi_c(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} E(x) M(x) dx = 1. \quad (3.1.9)$$

Do fato que $0 < E(x) \leq 1$, podemos observar que $\lambda_c \leq \lambda_1$ visto que $\varphi_c(\lambda) \leq \varphi(\lambda)$ para todo λ , onde $\varphi(\lambda)$ é definida na equação 2.4.5. E, se a idade c a partir da qual inicia a coleta for superior à idade k do indivíduo mais velho capaz de reproduzir-se, então $\lambda_c = \lambda_1$. Ainda, segue que $B_c(t) = O(e^{\lambda_1 t})$ para $t > c$, $\text{Re}\{\lambda\} > \lambda_c$ e que $B_c(t) = Q_c e^{\lambda_c t} + O(e^{\lambda_c t})$ quando $t \rightarrow \infty$, onde Q_c é o resíduo da transformada de Laplace $\hat{B}_c(\lambda)$ em $\lambda = \lambda_c$, para $t > c$. Para $x > c$ pode-se provar que

$$e^{\lambda_c t} u(x, t) \xrightarrow{\text{unif.}} Q_c \exp \left[-(\lambda_c + \delta)x - \int_0^x \mu(s) ds \right] \quad (3.1.10)$$

quando $t \rightarrow \infty$, onde o lado direito expressa a distribuição etária estável.

Comparando a distribuição etária estável 2.5.13, quando não há coleta, com a distribuição etária estável 3.1.10, podemos observar a relação que existe entre $\lambda_c + \delta$ e λ_1 . Esta comparação mostra que um comportamento muito diferente só irá ocorrer quando o sinal de $\lambda_c + \delta$ for oposto ao sinal de λ_1 . O único caso coerente biologicamente é quando $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_c + \delta > 0$, pois a extração não poderia provocar o crescimento da distribuição etária estável. Por outro lado, para populações onde $0 < \lambda_1 \ll 1$, poderíamos esperar que $\lambda_c + \delta > \lambda_1$.

Caso 2:

Agora vamos considerar o segundo caso proposto onde uma fração δ de indivíduos da população com idade entre c e $c + n$ é extraída. Neste caso, o número de indivíduos extraídos no instante t com idade entre x e $x + \Delta x$ é dado por $\delta \chi_{[c, c+n]}(x) u(x, t) \Delta x$.

Como no caso anterior, obtém-se uma equação semelhante a equação 2.1.8 incluindo o termo de extração

$$u_t + u_x = -\mu(x, t) u(x, t) - \delta \chi_{[c, c+n]}(x) u, \quad (3.1.11)$$

com as mesmas condições inicial e de contorno.

Procedendo de maneira análoga ao Caso 1 e considerando $t > c + n$, obtemos a seguinte equação para a natalidade, aqui denotada por $B_n(t)$,

$$B_n(t) = G_n(t) + \int_0^t f(x, t) B_n(t-x) E_n(x) \exp \left[- \int_0^x \mu(s, t-x+s) ds \right] dx \quad (3.1.12)$$

onde

$$G_n(t) = \int_t^\infty f(x, t) u_0(x-t) E_n(x, t) \exp \left[- \int_0^t \mu(x-t+s, s) ds \right] dx, \quad (3.1.13)$$

$$E_n(x, t) = \begin{cases} e^{-\delta n} & \text{se } x \leq c+t \\ e^{-\delta(c+n-x+t)} & \text{se } c+t < x \leq c+n+t \\ 1 & \text{se } c+n+t < x \end{cases} \quad (3.1.14)$$

e

$$E_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c < x \leq c+n \\ e^{-\delta n} & \text{se } c+n < x \end{cases} \quad (3.1.15)$$

Assumindo novamente $f = f(x)$ e $\mu = \mu(x)$, obtemos a transformada de Laplace de $B_n(t)$, $\hat{B}_n(\lambda)$, que existe para todo λ tal que $\text{Re}(\lambda) > \lambda_n$ onde λ_n é a única solução real da nova equação característica:

$$\varphi_n(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} E_n(x) M(x) dx = 1, \quad (3.1.16)$$

sendo $M(x)$ a função maternidade.

Confrontando as três equações características podemos observar que $\varphi_c(\lambda) \leq \varphi_n(\lambda) \leq \varphi(\lambda)$ para todo λ , o que implica $\lambda_c \leq \lambda_n \leq \lambda_1$. Esta observação é previsível quando analisamos demograficamente.

E a distribuição etária é dada por:

$$e^{\lambda_n t} u(x, t) \xrightarrow{\text{unif.}} Q_n \exp \left[-(\lambda_n + \delta)x - \int_0^x \mu(s) ds \right] \quad (3.1.17)$$

quando $t \rightarrow \infty$ para $c < x < c + n$, ou

$$e^{\lambda_n t} u(x, t) \xrightarrow{\text{unif.}} Q_n \exp \left[-\lambda_n x - \int_0^x \mu(s) ds \right] \quad (3.1.18)$$

para $x > c + n$. O coeficiente Q_n é o resíduo de $\hat{B}_n(\lambda)$ em $\lambda = \lambda_n$.

Para ilustrar os resultados obtidos no Caso 1 e no Caso 2, vamos apresentar um exemplo que utiliza um modelo simples conhecido por Modelo de Gênese.

Considere que a fertilidade e a mortalidade são constantes, representados respectivamente por f e μ . E ainda que a densidade populacional inicial $u_0(x)$ é dada

por $\delta_0(x)$, que denota a função Delta de Dirac [33]. Isto significa que a população inicial está concentrada em $x = 0$, ou seja, consiste apenas de recém-nascidos.

No caso onde a extração não é considerada, reescrevemos a equação 2.3.6 como:

$$B(t) = f e^{-\mu t} + f \int_0^t B(t-x) e^{-\mu x} dx \quad (3.1.19)$$

cuja solução $B(t) = f e^{(f-\mu)t}$ é diretamente obtida utilizando transformada de Laplace. Ainda, a equação característica 2.4.3 se reduz à $\varphi(\lambda) = \frac{f}{\lambda + \mu} = 1$ e, então, $\lambda_1 = f - \mu$. E segue que $f e^{-f x}$ é a distribuição etária estável.

Quando consideramos a extração dada no Caso 1, para $t > c$, obtemos a equação para a natalidade

$$B_c(t) = f e^{-\mu t} e^{-\delta(t-c)} + f \int_0^t B_c(t-x) e^{-\mu x} E(x) dx \quad (3.1.20)$$

e ainda

$$\begin{aligned} \varphi_c(\lambda) &= f \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} E(x) dx \\ &= \frac{f}{\lambda + \mu} + f e^{-(\lambda+\mu)c} \left[\frac{1}{\lambda + \mu + \delta} - \frac{1}{\lambda + \mu} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Observe que a expressão entre colchetes na última equação é sempre negativa para $0 < \delta < 1$, como consideramos. Comparando com o caso sem extração, segue que $\varphi_c(\lambda) < \varphi(\lambda)$ e portanto $\lambda_c < \lambda_1$, como havíamos previsto.

Fazendo uma expansão em potências de δ , encontramos:

$$\lambda_c = f - \mu - e^{-f c} \delta + O(\delta^2) \quad (3.1.22)$$

e obtemos a distribuição etária estável para $x > c$

$$Q_c \exp[-f - (1 - e^{-fc})\delta + O(\delta^2)]x. \quad (3.1.23)$$

Como resultado da extração, podemos observar uma redução na distribuição etária estável por um fator aproximadamente da ordem de $e^{-\delta x}$, dado que $f > 0$.

Analogamente, no Caso 2 da extração para $t > c + n$, obtemos:

$$B_n(t) = f e^{-\delta n} e^{-\mu t} + f \int_0^t B_n(t-x) e^{-\mu x} E_n(x) dx \quad (3.1.24)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_n(\lambda) &= f \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} E(x) dx \\ &= \frac{f}{\lambda + \mu} + f e^{-(\lambda+\mu)c} \left[\frac{1}{\lambda + \mu + \delta} - \frac{1}{\lambda + \mu} \right] \\ &+ e^{-\delta n} e^{-(\lambda+\mu)(c+n)} \left[\frac{1}{\lambda + \mu} - \frac{1}{\lambda + \mu + \delta} \right]. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Confrontando o caso onde não ocorre extração e os dois casos considerados de extração, fica claro que $\varphi_c(\lambda) < \varphi_n(\lambda) < \varphi(\lambda)$ e, portanto, $\lambda_c < \lambda_n < \lambda_1$.

Utilizando novamente uma expansão em torno de potências de δ , obtemos:

$$\lambda_n = f - \mu - e^{fc} (1 - e^{-fn})\delta + O(\delta^2). \quad (3.1.26)$$

As estratégias de extração propostas nesta seção falham na modelagem de um programa de extração sazonal. Para ajustar-se a esta situação, um programa de extração dependente da idade e também do tempo será proposto na próxima seção.

3.2 Extração Dependente da Idade e do Tempo

Agora, vamos introduzir a dependência da variável temporal na extração, com o objetivo de modelar situações tais como uma epidemia periódica afetando somente uma parcela da população (por exemplo, a população mais velha), ou ainda, estações de caça e pesca nas quais só será permitida a remoção de indivíduos adultos e em determinados períodos do ano [27].

Nesta seção, vamos assumir que a fertilidade e a mortalidade independem do tempo, isto é, $f = f(x)$ e $\mu = \mu(x)$.

Para descrever a extração proposta, é considerado um período de tempo T' e uma estação de extração que dura um intervalo de tempo h ($h < T'$), suposta por conveniência sempre no final do período. Assim, o tempo entre duas estações de extração é T' . Ainda, supomos que uma fração de indivíduos com idade superior a c ($x > c$) é extraída a taxa constante δ , $0 < \delta < 1$. A figura 3.1 ilustra esta estratégia de extração.

Então, representamos o número de indivíduos coletados com idade entre x e $x + \Delta x$, no instante t por $\delta \chi_{[c,\infty)} H(t) u(x, t) \Delta x$ onde

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } nT' < t < (n+1)T' - h \\ 1 & \text{se } (n+1)T' - h < t < (n+1)T', \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Procedendo como na seção 2.1. obtemos a equação

$$u_t + u_x = -\mu(x, t) u(x, t) - \delta \chi_{[c,\infty)}(x) H(t) u \quad (3.2.2)$$

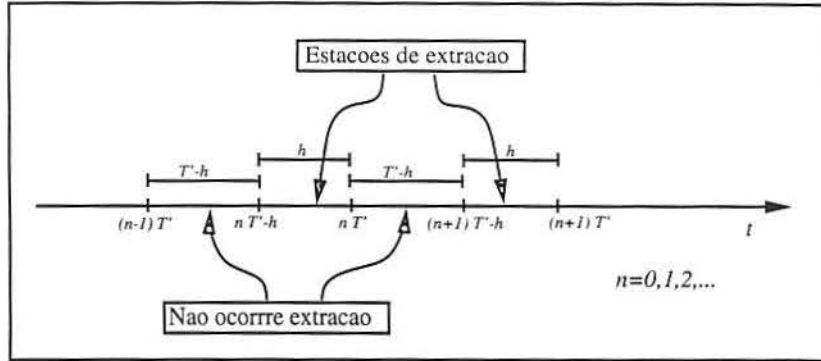


Figura 3.1: Apresentação esquemática das estações de extração, onde T' representa um dado período de tempo e h , o intervalo de duração de uma estação de extração.

que juntamente com a condição inicial 2.1.9 e condição de contorno 2.1.11, compõe o problema de valor no contorno de interesse. Resolvemos este problema integrando ao longo de curvas características (procedimento de maneira análogo ao da seção 2.2), e assim obtemos:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x-t) \exp \left[-\int_0^t \mu(x-t+s) ds \right] \\ \quad \exp \left[-\delta \int_0^t \chi_{[c, \infty)}(x-t+s) H(s) ds \right] & \text{se } x > t \\ B(t-x) \exp \left[-\int_0^x \mu(s) ds \right] \\ \quad \exp \left[-\delta \int_0^x \chi_{[c, \infty)}(s) H(t-x+s) ds \right] & \text{se } x < t \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Ainda, substituindo a solução 3.2.3 na equação 2.1.10, chegamos que a natalidade satisfaz a seguinte equação

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x) M(x) \exp \left[-\delta \int_0^t \chi_{[c, \infty)}(s) H(t-x+s) ds \right] dx \quad (3.2.4)$$

onde

$$G(t) = \int_t^\infty u_0(x-t) f(x) \exp \left[-\int_0^t \mu(x-t+s) ds \right] \\ \exp \left[-\delta \int_0^t \chi_{[c, \infty)}(x-t+s) H(s) ds \right] dx.$$

(3.2.5)

Para futuras substituições, considere duas relações obtidas por simples trocas de variáveis. A primeira relação, válida para $x \geq t$, é:

$$\int_0^t \chi_{[c,\infty)}(x-t+s) H(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ \int_{c+t-x}^t H(s) ds & \text{se } x-t < c < x \\ \int_0^t H(s) ds & \text{se } c < x-t \end{cases} \quad (3.2.6)$$

e a segunda relação, para $x < t$, é dada por

$$\int_0^x \chi_{[c,\infty)}(s) H(t-x+s) ds = \begin{cases} 0 & \text{se } x < c \\ \int_{c+t-x}^t H(s) ds & \text{se } x > c \end{cases}. \quad (3.2.7)$$

Note que estamos interessados somente em soluções para $t > c$, pois estas apresentam plenamente os efeitos da extração. Então, utilizando as relações acima, chegamos a uma nova expressão para a equação integral da natalidade quando $t > c$ como segue:

$$B(t) = G(t) + \int_0^c B(t-x) M(x) dx + \int_c^t B(t-x) M(x) \exp \left[-\delta \int_{c+t-x}^t H(s) ds \right] dx \quad (3.2.8)$$

onde

$$G(t) = \int_t^{t+c} u_0(x-t) f(x) \exp \left[-\int_0^t \mu(x-t+s) ds \right] \exp \left[-\delta \int_{c+t-x}^t H(s) ds \right] dx + \exp \left[-\delta \int_0^t H(s) ds \right] \int_{t+c}^{\infty} u_0(x-t) f(x) \exp \left[-\int_0^t \mu(x-t+s) ds \right] dx. \quad (3.2.9)$$

Ao contrário da seção anterior, o último termo da equação 3.2.8 não é a convolução de duas funções, o que nos impossibilita a utilização imediata de transformadas de Laplace.

Um procedimento viável, neste caso, é criar equações integrais aproximadas (que sejam equações de renovação) e utilizar suas soluções para limitar as soluções do problema original.

Para este fim, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\left[\left[\frac{b-a}{T'} \right] \right] h \leq \int_a^b H(s) ds \leq \left[\left[\frac{b-a}{T'} \right] \right] h + h \quad (3.2.10)$$

para quaisquer a e b , onde $\llbracket x \rrbracket$ é a função maior inteiro menor ou igual a x . Desta desigualdade e do fato que $M(x) \geq 0$, para $x \geq 0$ escrevemos

$$0 \leq M_-(x) \leq M(x, t) \leq M_+(x) \quad (3.2.11)$$

onde

$$M_-(x) = M(x) e^{-\delta h} \exp \left\{ -\delta \left[\left[\frac{x-c}{T'} \right] \right] h \right\}, \quad (3.2.12)$$

$$M(x, t) = M(x) \exp \left[-\delta \int_{c+t-x}^t H(s) ds \right] \quad (3.2.13)$$

e

$$M_+(x) = M(x) \exp \left\{ -\delta \left[\left[\frac{x-c}{T'} \right] \right] h \right\}. \quad (3.2.14)$$

Note que as funções $M_-(x)$ e $M_+(x)$ são independentes do tempo.

Considerando que a função maternidade é somente $M(x)$ para $0 \leq x \leq c$,

podemos escrever

$$B_-(t) = G(t) + \int_0^t B_-(t-x) M_-(x) dx, \quad (3.2.15)$$

$$B(t) = G(t) + \int_0^t B(t-x) M(x,t) dx \quad (3.2.16)$$

e

$$B_+(t) = G(t) + \int_0^t B_+(t-x) M_+(x) dx. \quad (3.2.17)$$

E então $B_-(t) \leq B(t) \leq B_+(t)$, onde as funções $B_-(t)$ e $B_+(t)$ são soluções de equações de renovação.

Para a resolução das equações 3.2.15 e 3.2.17, utilizando transformadas de Laplace (ver as seções 2.5 e 3.1), necessitamos das soluções da seguinte equação característica:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \tilde{M}(x) dx = 1 \quad (3.2.18)$$

onde

$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} M(x) & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ M(x) e^{-\delta h} \exp \left\{ -\delta \left[\frac{x-c}{T'} \right] h \right\} & \text{se } x > c \end{cases} \quad (3.2.19)$$

para a equação 3.2.15, e

$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} M(x) & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ M(x) \exp \left\{ -\delta \left[\frac{x-c}{T'} \right] h \right\} & \text{se } x > c \end{cases} \quad (3.2.20)$$

para a equação 3.2.17.

Podemos escrever a exponencial $\exp \left\{ -\delta \left\lfloor \frac{x-c}{T'} \right\rfloor h \right\}$ como a função de grau

$$\exp \left\{ -\delta \left\lfloor \frac{x-c}{T'} \right\rfloor h \right\} = e^{-\delta n h}, \quad c + nT' \leq x < c + (n+1)T',$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.21)$$

e então estabelecer as seguintes cotas inferior e superior

$$\exp \left(-\delta \frac{x-c}{T'} h \right) \leq \exp \left\{ -\delta \left\lfloor \frac{x-c}{T'} \right\rfloor h \right\} \leq e^{\delta h} \exp \left(-\delta \frac{x-c}{T'} h \right) \quad (3.2.22)$$

que coincidem com valores onde ocorrem saltos.

De maneira similar à seção 3.1, a equação característica 3.2.18, para $\tilde{M}(x)$ dado em 3.2.20, tem uma única solução real denotada por λ_+ e todas as outras soluções são pares complexos conjugados que satisfazem $\text{Re}\{\lambda\} < \lambda_+$. E daí escrevemos $B_+(t) = B_+ e^{\lambda_+ t} + O(e^{\lambda_+ t})$ quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, temos para $B_-(t)$ a solução real λ_- .

É relevante notar que $M_-(x) \leq M_+(x)$ e, por isso, $\lambda_- \leq \lambda_+$.

Agora, considere o Modelo de Gênese, apresentado no exemplo da seção anterior. Neste modelo a fertilidade e a mortalidade são constantes. A população inicial está concentrada na idade $x = 0$ e é expressada pela função Delta de Dirac $\delta_0(x)$.

Neste modelo, a natalidade $B(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} B(t) &= f e^{-\mu t} \exp \left[-\delta \int_c^t H(s) ds \right] + f \int_0^c B(t-x) e^{-\mu x} dx \\ &+ f \int_0^t B(t-x) e^{-\mu x} \exp \left[-\delta \int_{t+c-x}^t H(s) ds \right] dx \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

e $M(x) = f e^{-\mu x}$. Ainda:

$$M_-(x) = \begin{cases} f e^{-\mu x} & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ f e^{-\mu x} e^{-\delta h} \exp \left\{ -\delta \left[\frac{x-c}{T'} \right] h \right\} & \text{se } x > c \end{cases} \quad (3.2.24)$$

e

$$M_+(x) = \begin{cases} f e^{-\mu x} & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ f e^{-\mu x} \exp \left\{ -\delta \left[\frac{x-c}{T'} \right] h \right\} & \text{se } x > c \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Se utilizamos a cota superior dada em 3.2.22 em $M_+(x)$, obtemos a seguinte equação característica

$$f \int_0^c e^{-(\lambda+\mu)x} dx + f e^{\delta h} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} \exp \left[-\delta \frac{x-c}{T'} h \right] dx = 1 \quad (3.2.26)$$

e, resolvendo as integrais,

$$\frac{f}{\lambda + \mu} + f e^{-(\lambda+\mu)c} \left[\frac{e^{\delta h}}{\lambda + \mu + \delta h/T'} - \frac{1}{\lambda + \mu} \right] = 1. \quad (3.2.27)$$

A solução real quando desconsideramos a extração ($\delta = 0$) é $\lambda_1 = f - \mu$.

E quando consideramos a extração em tempo integral, obtemos a solução real $\lambda_c = f - \mu - e^{-fc} \delta + O(\delta^2)$ (ver seção 3.1). Isto nos sugere uma expansão de λ_+ em potências de $\delta h/T'$, que dá

$$\lambda_+ = f - \mu - e^{-fc} (1 - fT') \delta h/T' + O((\delta h/T')^2). \quad (3.2.28)$$

Procedendo como acima, agora utilizando a cota inferior estabelecida em 3.2.22 em $M_-(x)$, obtemos:

$$\lambda_- = f - \mu - e^{-fc}(1 + fT') \delta h/T' + O((\delta h/T')^2). \quad (3.2.29)$$

4 EXTRAÇÃO EM MODELOS COM RECRUTAMENTO DEPENDENTE DA DENSIDADE

4.1 Modelo Não Linear

Nos capítulos 2 e 3, o modelo de evolução populacional dependia linearmente da idade, mas não estabelecia uma dependência direta com a densidade populacional.

Neste capítulo, vamos apresentar um modelo de crescimento populacional dependente da densidade. Esta dependência será introduzida através do recrutamento, isto é, através da seleção de indivíduos com idade $x > 0$ que entram na população. Em particular, esta dependência da densidade populacional será apresentada pela dependência somente da taxa de natalidade $B(t)$. Esta suposição é freqüentemente abordada na literatura pesqueira [2, 15, 16, 21]. A figura 4.1 ilustra este modelo.

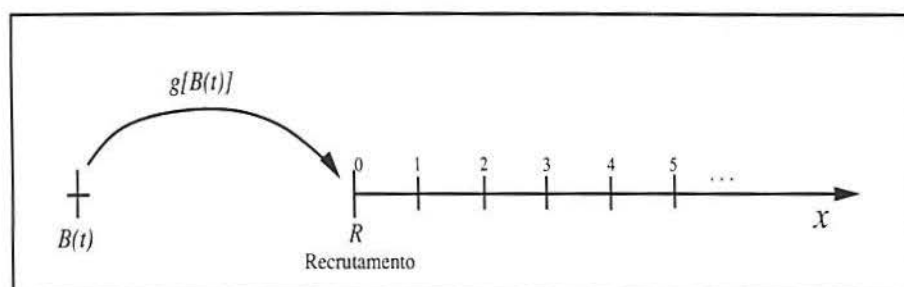


Figura 4.1: Ilustração do modelo dependente da densidade populacional. Observe que $g[B(t)]$ é a probabilidade de um indivíduo passar a fazer parte da população, $B(t)$ é a natalidade e R é a população de recrutas.

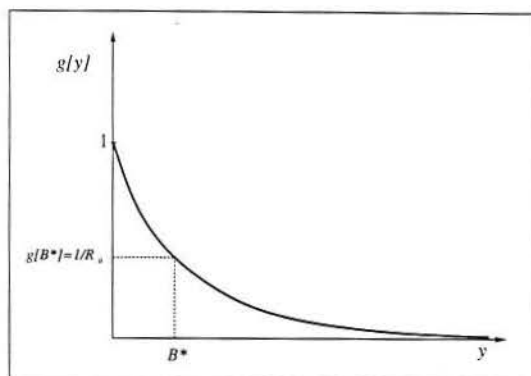


Figura 4.2: Neste esboço, podemos observar as propriedades da função g bem como o equilíbrio B^* , que satisfaz $g[B^*] = 1/R_0$.

Seja $u(x, t)$ a densidade populacional na idade x e no instante t .

Definimos o recrutamento R como:

$$R(t) = B(t) g[B(t)] \quad (4.1.1)$$

onde $B(t)$ é a taxa de natalidade no instante t conforme equação 2.1.10 e $g[B(t)]$ é a probabilidade de fazer parte da população de recrutas.

A função g expressa a intensidade da dependência da densidade. Assumimos que esta função é suavemente decrescente de $[0, \infty)$ em $(0, 1]$. Ainda, temos que $g[0] = 1$ quando a natalidade é nula e $\lim_{y \rightarrow \infty} g[y] = 0$. Na figura 4.2, temos um esboço de g .

As hipóteses consideradas em g são satisfeitas nas funções de recrutamento usuais. Temos como exemplo a função de Beverton-Holt [3]

$$g[y] = \frac{1}{1 + cy}, \quad c > 0, \quad (4.1.2)$$

a função de Hassel [11]

$$g[y] = \frac{1}{(1 + cy)^b}, \quad b > 1, c > 0, \quad (4.1.3)$$

e a função de Ricker [23]

$$g[y] = e^{-cy}, \quad c > 0. \quad (4.1.4)$$

É natural observarmos que

$$u(x, t) = u(0, t - x) l(x), \quad (4.1.5)$$

onde $l(x)$ denota a probabilidade de sobrevivência até a idade x (introduzida na seção 2.3).

Ainda, do fato que a população na idade $x = 0$ num dado instante é igual à população de recrutas neste mesmo instante, escrevemos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= R(t - x) l(x) \\ &= B(t - x) g[B(t - x)] l(x). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Substituindo 4.1.6 em 2.1.10, obtemos a seguinte versão não linear da equação 2.4.1

$$B(t) = \int_0^\infty B(t - x) g[B(t - x)] M(x) dx \quad (4.1.7)$$

onde $M(x) = f(x) l(x)$ é a função maternidade introduzida no segundo capítulo. Observe que a fertilidade e a mortalidade são consideradas independentes do tempo, mas dependentes da idade.

A equação não linear 4.1.7 possui um único ponto de equilíbrio positivo, sob as condições impostas à função g . Este equilíbrio, que denotamos por B^* , satisfaz:

$$B^* = \int_0^{\infty} B^* g[B^*] M(x) dx. \quad (4.1.8)$$

Simplificando, obtemos

$$g[B^*] = \frac{1}{R_0} \quad (4.1.9)$$

onde R_0 é a taxa básica reprodutiva, ou seja, $R_0 = \int_0^{\infty} M(x) dx$ (ver seção 2.4).

É importante notar que B^* é um equilíbrio positivo se $R_0 > 1$, o que será assumido neste capítulo. Observe a figura 4.2.

Para analisarmos a estabilidade local do equilíbrio B^* , lineariza-se a equação 4.1.7 em torno de B^* assumindo que a natalidade é da forma:

$$B(t) = B^* + e^{\lambda t}. \quad (4.1.10)$$

Introduzindo 4.1.10 na equação 4.1.7, obtemos:

$$B^* + e^{\lambda t} = \int_0^{\infty} [B^* + e^{\lambda(t-x)}] g[B^* + e^{\lambda(t-x)}] M(x) dx. \quad (4.1.11)$$

A expansão de Taylor de $g[B^* + e^{\lambda(t-x)}]$, desprezando os termos não lineares em B^* , é:

$$g[B^* + e^{\lambda(t-x)}] = g[B^*] + g'[B^*] e^{\lambda(t-x)} \quad (4.1.12)$$

onde $g'[y] = \frac{\partial g}{\partial y}$.

Substituindo 4.1.12 em 4.1.11, e desprezando os termos não lineares, chegamos a

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\infty} \{B^* g'[B^*] + g[B^*]\} e^{-\lambda x} M(x) dx \\ &= \left\{ \frac{B^* g'[B^*]}{g[B^*]} + 1 \right\} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{M(x)}{R_0} dx \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

lembrando que $g[B^*] = 1/R_0$.

Finalmente, definimos a função maternidade normalizada $m(x)$

$$m(x) = \frac{M(x)}{R_0} \quad (4.1.14)$$

e o parâmetro global γ

$$\gamma = -\frac{B^* g'[B^*]}{g[B^*]} \quad (4.1.15)$$

que substituindo em 4.1.13, fornece-nos a Equação Característica

$$\frac{1}{1-\gamma} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} m(x) dx. \quad (4.1.16)$$

O equilíbrio positivo B^* é local assintoticamente estável (ao qual iremos nos referir simplesmente por estável), se e somente se a solução dominante λ da equação característica 4.1.16 satisfaz $\text{Re}\{\lambda\} < 0$.

O teorema a seguir nos fornece um critério para avaliar a estabilidade de B^* .

Teorema: Seja $m : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua por partes satisfazendo $\int_0^\infty m(x) dx = 1$ e $m(x) \leq K e^{\alpha x}$ para todo $x \geq 0$, onde K e α são constantes positivas. Então:

- (i) Se $0 < \gamma < 1$, a equação 4.1.16 possui uma solução real dominante e B^* é estável com aproximação monotônica.
- (ii) Se $1 < \gamma < 2$, a equação 4.1.16 possui soluções com parte imaginária não nula e B^* é estável com aproximação oscilatória.

Dem:

- (i) Vamos definir a função auxiliar $\varphi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ como segue:

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} m(x) dx, \quad (4.1.17)$$

que está definida para $\lambda \geq -\alpha$. A continuidade de m e a convergência uniforme das integrais $\int_0^\infty e^{-\lambda x} m(x) dx$ e $\int_0^\infty x e^{-\lambda x} m(x) dx$ garantem a diferenciabilidade de $\varphi(\lambda)$ e

$$\varphi'(\lambda) = - \int_0^\infty x e^{-\lambda x} m(x) dx. \quad (4.1.18)$$

Conseqüentemente φ é decrescente. Além disso $\varphi(\lambda) \rightarrow +\infty$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$ (se φ estiver definida para todo número real) ou quando $\lambda \rightarrow -\beta$, onde β é um número real tal que $0 < \beta \leq \alpha$. Ainda temos que $\varphi(\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$ e que $\varphi(0) = 1$.

Por hipótese $\frac{1}{1-\gamma} > 1$. Então existe uma única solução real $\lambda_1 < 0$ para a equação 4.1.16 (ver figura 4.3). Seja $\sigma = a + bi$, $b \neq 0$, uma outra solução da equação 4.1.16. Substituindo σ nesta equação e separando as partes real e imaginária

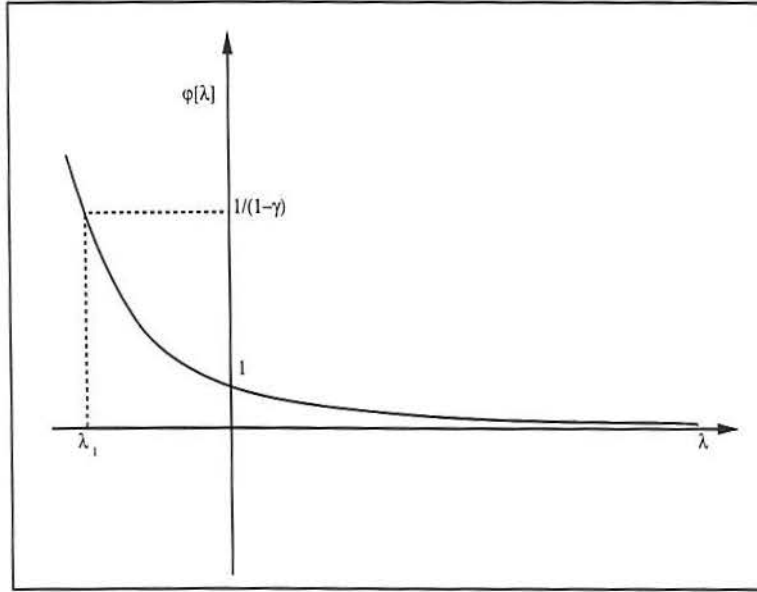


Figura 4.3: Esboço da única solução real da equação característica quando $0 < \gamma < 1$ (i).

obtemos, respectivamente

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx m(x) dx = \frac{1}{1-\gamma} \quad (4.1.19)$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx m(x) dx = 0. \quad (4.1.20)$$

Observe que as equações 4.1.19 e 4.1.20 também são satisfeitas se substituirmos b por $-b$. Deste fato, temos que as soluções complexas ocorrem aos pares conjugados. Mas λ_1 também é solução de 4.1.16, logo.

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 x} m(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx m(x) dx. \quad (4.1.21)$$

Mas para a última equação ser satisfeita é necessário que $e^{-\lambda_1 x} < e^{-ax}$ e conseqüentemente $\lambda_1 > a$. Portanto, λ_1 é a solução dominante e o resultado é estabelecido.

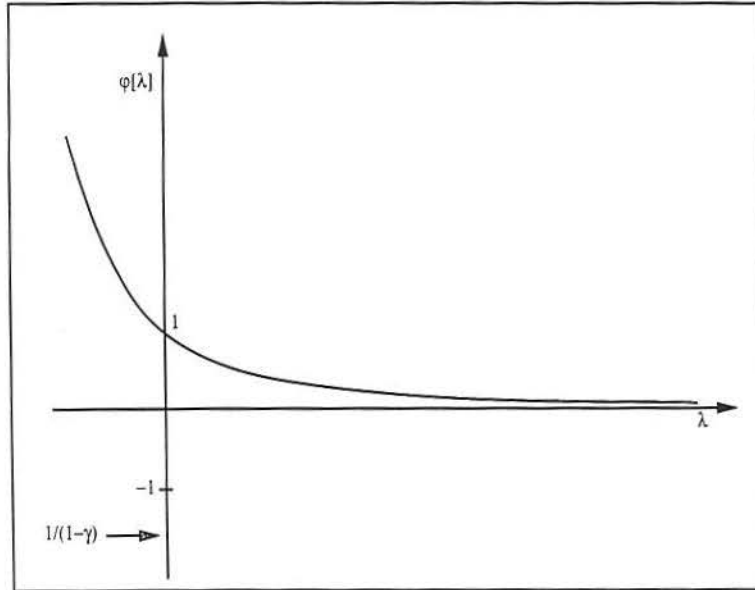


Figura 4.4: Não existe soluções reais para a equação característica quando $1 < \gamma < 2$ (ii).

(ii) Agora supomos $1 < \gamma < 2$, logo $\left| \frac{1}{1-\gamma} \right| > 1$. Temos que:

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} m(x) dx \right| = \left| \frac{1}{1-\gamma} \right| > 1. \quad (4.1.22)$$

Por outro lado, temos

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} m(x) dx \right| \leq \left| \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re}\{\lambda\}x} m(x) dx \right|. \quad (4.1.23)$$

Das equações 4.1.22 e 4.1.23, obtemos:

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re}\{\lambda\}x} m(x) dx \right| > 1 \quad (4.1.24)$$

e assim $\operatorname{Re}\{\lambda\} < 0$ para todo λ . Como $\frac{1}{1-\gamma} < 0$, não temos soluções reais pois $\varphi(\lambda) > 0$ para todo λ real (ver figura 4.4).

Como a condição para a estabilidade $0 < \gamma < 2$ apresentada no critério é só suficiente, vamos estudar a possibilidade de estender esta região de estabilidade para valores de $\gamma \geq 2$. Por isso, a partir daqui consideraremos que $\gamma \geq 2$.

Por conveniência, definimos região de estabilidade como o intervalo do parâmetro γ , denotado por $(0, \bar{\gamma})$, de modo que B^* é estável se e somente se $\gamma \in (0, \bar{\gamma})$. A fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ é função dos parâmetros de $m(x)$.

Quando γ alcança seu valor crítico $\bar{\gamma}$, a solução dominante de 4.1.16 toma a forma de $\lambda = i\omega$ e B^* perde a estabilidade. Neste momento, ocorre uma bifurcação de Hopf que dá origem a uma solução periódica de frequência aproximadamente ω . Esta solução pode ser estável ou instável (ver critério estabelecido por Diekmann e Heijmans [8]).

Observe que o parâmetro γ é um parâmetro global, que depende das taxas vitais (fertilidade e mortalidade) por meio da função $m(x)$, bem como da densidade populacional por meio de g .

Ainda, observe que B^* é uma função crescente de R_0 pois g é decrescente e $g[B^*] = 1/R_0$ (conforme 4.1.9). Então, se a função $-y g'[y]/g[y]$ é crescente, temos que γ é uma função crescente de R_0 . Utilizando esta hipótese adicional sobre g , podemos interpretar γ como uma medida da saída reprodutiva. Deste fato, é equivalente definirmos a região de estabilidade em função de γ ou de R_0 . É relevante salientar que assumindo que $-y g'[y]/g[y]$ é crescente não estamos removendo o

realismo biológico pois esta hipótese é satisfeita em todas as funções de recrutamento clássicas consideradas na literatura [3, 6, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 20, 23, 28, 30, 31].

Adicionalmente, definimos que um parâmetro θ é estabilizador se para quaisquer valores θ_1 e θ_2 deste parâmetro, tais que $\theta_1 < \theta_2$, temos que $\bar{\gamma}(\theta_1) < \bar{\gamma}(\theta_2)$. Isto é, a fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ é uma função crescente de θ . Caso contrário, dizemos que θ é desestabilizador.

4.2 Extração

Vamos acrescentar a extração ao modelo dependente da densidade apresentado na seção anterior, e observar os efeitos da extração na estabilidade da população quando variamos a escala reprodutiva.

Para este fim, escolhemos o parâmetro γ como objeto de estudo. Assim, podemos observar os efeitos da escala reprodutiva e da extração independentes dos efeitos da taxa reprodutiva básica R_0 e do recrutamento.

Seja $c(x)$ a função de extração. Esta função vai caracterizar a taxa na qual ocorre a remoção de indivíduos da população e o intervalo etário a que pertencem estes indivíduos. Então $c(x) u(x, t) \Delta x$ denota o número de indivíduos extraídos com idade entre x e $x + \Delta x$, no instante t .

Em todos os casos de extração considerados, os indivíduos são removidos à taxa de extração constante δ onde $0 < \delta < 1$. Estudamos três esquemas de extração, que se diferenciam somente no intervalo etário de extração. São eles:

- Extração 1: $c(x) = \delta$. Neste caso, os indivíduos são removidos à taxa constante δ independentemente da idade x .
- Extração 2: $c(x) = \delta \chi_{[c, \infty)}(x)$. São removidos indivíduos com idade superior a c ($x \geq c$).
- Extração 3: $c(x) = \delta \chi_{[c, c+n]}(x)$. São removidos indivíduos com idade entre c e $c + n$ ($c \leq x \leq c + n$).

Seja $\epsilon(x)$ a probabilidade de um indivíduo não ser extraído até a idade x . Então:

$$\epsilon(x) = \exp \left[- \int_0^x c(s) ds \right]. \quad (4.2.1)$$

A equação 4.1.6 é substituída por

$$u(x, t) = B(t - x) g[B(t - x)] l(x) \epsilon(x), \quad (4.2.2)$$

introduzindo $\epsilon(x)$. A função g é a probabilidade de sobrevivência ao recrutamento, definida na seção anterior.

Na sequência, obtemos a equação não linear

$$B(t) = \int_0^\infty B(t - x) g[B(t - x)] M(x) dx \quad (4.2.3)$$

onde, agora, temos a função maternidade como $M(x) = f(x) l(x) \epsilon(x)$.

A taxa reprodutiva básica R_0 é redefinida como o número de filhotes fêmeas que um indivíduo tem em toda a sua vida, incluindo a probabilidade deste indivíduo não ser extraído. Logo:

$$R_0 = \int_0^{\infty} f(x) l(x) \epsilon(x) dx. \quad (4.2.4)$$

Mantendo todas as considerações da seção anterior, a equação 4.2.3 possui um único ponto de equilíbrio positivo B^* , que satisfaz $g[B^*] = 1/R_0$.

Ainda procedendo de maneira análoga a seção 4.1, obtemos a seguinte Equação Característica:

$$\frac{1}{1 - \gamma} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} m(x) dx. \quad (4.2.5)$$

onde $m(x) = M(x)/R_0$ é a função maternidade normalizada, para $M(x)$ e R_0 definidos nesta seção e $\gamma = -B^* g'[B^*]/g[B^*]$, para B^* equilíbrio positivo da equação 4.2.3.

Quando o equilíbrio B^* da equação 4.2.3 perde a estabilidade, temos que $\text{Re}\{\lambda\} = 0$. Então assume-se $\lambda = i\omega$ e γ alcança seu valor de fronteira $\bar{\gamma}$. Por consequência, podemos reescrever a equação 4.2.5 como:

$$\frac{1}{1 - \bar{\gamma}} = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} m(x) dx. \quad (4.2.6)$$

e separando as partes imaginária e real obtemos, respectivamente, a equação para a frequência

$$0 = \int_0^{\infty} \sin \omega x m(x) dx \quad (4.2.7)$$

e a equação para a fronteira da estabilidade

$$\frac{1}{1 - \bar{\gamma}} = \int_0^{\infty} \cos \omega x m(x) dx. \quad (4.2.8)$$

Observe que se ω é solução da equação 4.2.7, então $-\omega$ também será solução desta equação. Desta forma, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\omega > 0$. Esta suposição será extremamente útil em algumas das subseções a seguir. Nas próximas seções, vamos apresentar resultados analíticos e numéricos utilizando o modelo descrito nesta seção para diferentes funções maternidade. Cada seção a seguir será associada a uma das estratégias de extração propostas.

4.3 Resultados: Extração 1

Nesta primeira etapa dos resultados, consideramos que são removidos indivíduos da população a taxa constante δ ($0 < \delta < 1$), independentemente da idade. Em outras palavras, assumimos $c(x) = \delta$. Então a probabilidade $\epsilon(x)$ é

$$\epsilon(x) = e^{-\delta x}. \quad (4.3.1)$$

4.3.1 Maternidade Constante

O primeiro tipo de saída reprodutiva considerado é a maternidade constante. Neste caso, o produto $f(x) l(x)$ é constante em um intervalo $[T, k]$, onde T denota a idade a partir da qual o indivíduo é capaz de reproduzir-se, isto é, T marca o final do período juvenil e k denota a idade do indivíduo mais velho capaz de reproduzir-se.

Então:

$$f(x) l(x) = \begin{cases} a & \text{se } T \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

onde a é uma constante real positiva. Procedendo o cálculo de R_0 conforme equação 4.2.4, obtemos:

$$\begin{aligned} R_0 &= \int_T^k a e^{-\delta x} dx \\ &= \frac{a(e^{-\delta T} - e^{-\delta k})}{\delta} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

e a função maternidade normalizada, descrita na seção 4.2, é dada por

$$m(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{(e^{-\delta T} - e^{-\delta k})} e^{-\delta x} & \text{se } T \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

O equilíbrio perde a estabilidade quando $\text{Re}\{\lambda\} = 0$ e assume-se que $\lambda = i\omega$. Então, o parâmetro γ atinge seu valor de fronteira $\bar{\gamma}$ e a equação característica 4.2.5 torna-se:

$$\frac{1}{1 - \bar{\gamma}} = \int_T^k e^{-i\omega x} \frac{\delta}{(e^{-\delta T} - e^{-\delta k})} e^{-\delta x} dx. \quad (4.3.5)$$

Separando a parte real e a parte imaginária da equação 4.3.5, obtemos da parte imaginária a equação para a frequência

$$\int_T^k \sin \omega x e^{-\delta x} dx = 0 \quad (4.3.6)$$

e, da parte real a equação para a fronteira de estabilidade

$$\int_T^k \cos \omega x \frac{\delta}{(e^{-\delta T} - e^{-\delta k})} e^{-\delta x} dx = \frac{1}{1 - \bar{\gamma}}. \quad (4.3.7)$$

Integrando e procedendo algumas manipulações algébricas nas equações 4.3.6 e 4.3.7, obtemos respectivamente

$$(\omega \cos \omega k + \delta \sin \omega k) e^{-\delta k} = (\omega \cos \omega T + \delta \sin \omega T) e^{-\delta T} \quad (4.3.8)$$

e

$$\bar{\gamma} = 1 + \frac{(\delta^2 + \omega^2)(e^{-\delta k} - e^{-\delta T})}{\delta K_0} \quad (4.3.9)$$

onde $K_0 = (-\delta \cos \omega k + \omega \sin \omega k) e^{-\delta k} - (-\delta \cos \omega T + \omega \sin \omega T) e^{-\delta T}$.

Para estimarmos a fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$, que depende de ω , precisamos encontrar a solução ω da equação para a frequência 4.3.8 que minimiza $\bar{\gamma}$. Então, estamos interessados na menor frequência $\omega > 0$ que satisfaça a equação 4.3.8. Mas esta equação é uma equação transcendental que nos permite apenas uma análise numérica de seu comportamento.

Utilizando o software Maple V (Release 2 e 3), obtemos uma série de resultados numéricos que delineiam o comportamento de $\bar{\gamma}$, quando os parâmetros do problema são variados.

Após exaustivas simulações, concluímos que:

- A fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ é inicialmente crescente até atingir um valor máximo onde passa a decrescer em função da taxa de extração δ (para um intervalo reprodutivo $[T, k]$ coerente). Então a taxa de extração δ produz um efeito estabilizador até certo ponto e, a partir deste valor, passa a ser desestabilizador. Este comportamento está ilustrado nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7.
- Quando deslocamos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade, sem alterar o comprimento deste intervalo, observamos que este deslocamento produz um efeito desestabilizador em $\bar{\gamma}$ e que o valor máximo de $\bar{\gamma}$ ocorre para valores menores de δ . Isto pode ser observado na figura 4.5.
- Observamos que T é um parâmetro desestabilizador (figura 4.6) e que k é estabilizador (figura 4.7), confirmando o que foi discutido sem a influência da extração em [29].
- Quando consideramos T suficientemente menor que k , observamos que a fronteira $\bar{\gamma}$ varia abruptamente para os valores iniciais de δ . Neste intervalo de δ , ocorrem regiões onde $\bar{\gamma}$ é crescente e outras onde $\bar{\gamma}$ é decrescente em função de δ . A partir de um certo valor de δ , $\bar{\gamma}$ passa a ser extritamente decrescente, o que pode ser verificado na figura 4.8.

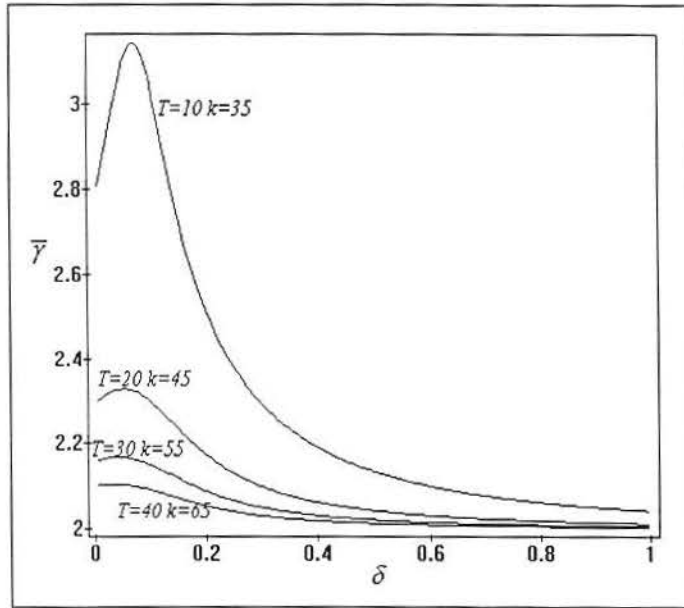


Figura 4.5: Comportamento de $\bar{\gamma}$ quando movemos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade.

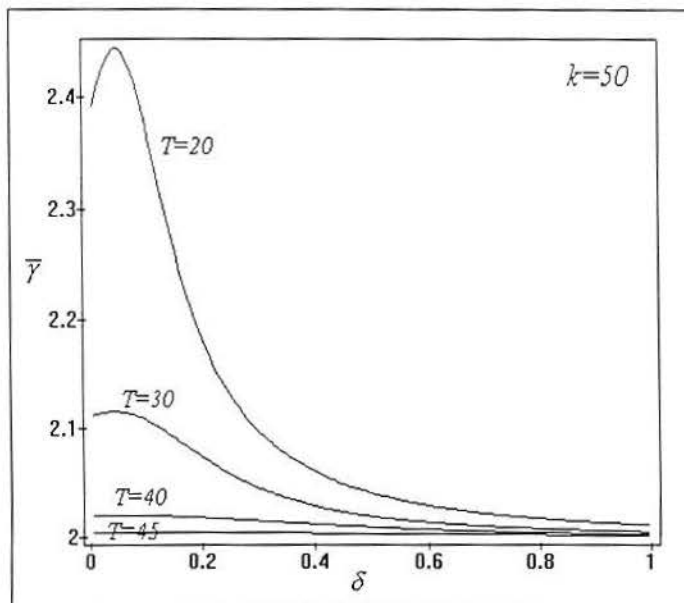


Figura 4.6: Efeito desestabilizador de T .

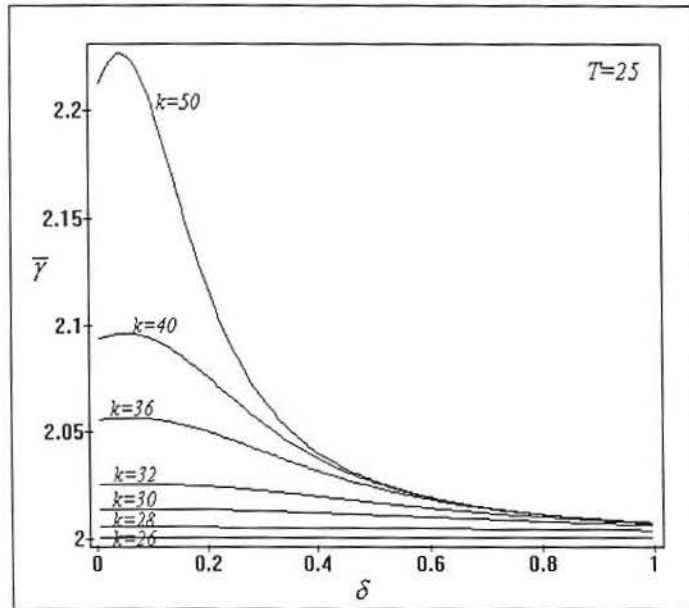


Figura 4.7: Efeito estabilizador de k .

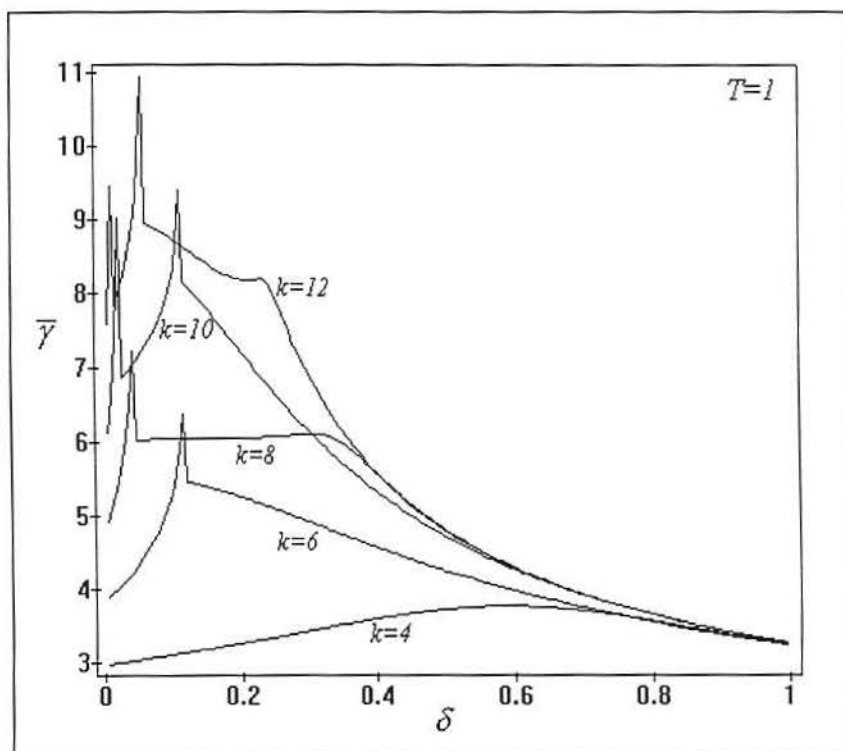


Figura 4.8: Comportamento de \bar{y} quando T é significativamente menor que k .

Vamos considerar dois casos especiais para a maternidade constante. Embora estes casos sejam menos realísticos que o anterior, eles nos possibilitam uma avaliação analítica do comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação ao parâmetro δ .

O primeiro caso supõe que $T = 0$, isto é, consideramos o período juvenil desprezível. Em termos matemáticos, escrevemos:

$$f(x) l(x) = \begin{cases} a & \text{se } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3.10)$$

Procedendo cálculos análogos ao anterior, obtemos $R_0 = \frac{a(1 - e^{-\delta k})}{\delta}$ e a função maternidade normalizada

$$m(x) = \begin{cases} \frac{\delta}{(1 - e^{-\delta k})} e^{-\delta x} & \text{se } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3.11)$$

A estabilidade é perdida quando $\text{Re}\{\lambda\} = 0$ ($\lambda = i\omega$) e γ alcança seu valor crítico $\bar{\gamma}$, como segue

$$\frac{1}{1 - \bar{\gamma}} = \int_0^k e^{-i\omega x} \frac{\delta}{(1 - e^{-\delta k})} e^{-\delta x} dx. \quad (4.3.12)$$

Da parte imaginária da equação 4.3.12, obtemos a equação para a frequência

$$\int_0^k \sin \omega x e^{-\delta x} dx = 0 \quad (4.3.13)$$

que resulta em

$$\omega \cos \omega k + \delta \sin \omega k = \omega e^{\delta k}. \quad (4.3.14)$$

Observando esta última equação, podemos assumir que $\omega > 0$ sem perda de generalidade.

Como $\sin \omega k \leq \omega k$, então $\omega \cos \omega k + \delta \sin \omega k \leq \omega(\cos \omega k + \delta k)$ e daí:

$$\omega e^{\delta k} > \omega(1 + \delta k) \geq \omega(\cos \omega k + \delta k) \geq \omega \cos \omega k + \delta \sin \omega k. \quad (4.3.15)$$

Portanto, a equação 4.3.14 não pode ser satisfeita a menos que $\omega = 0$.

No segundo caso, o período juvenil é considerado, mas os indivíduos não mais possuem uma idade limite para a reprodução. Esta suposição é expressa por

$$f(x) l(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \geq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.3.16)$$

Calculamos $R_0 = \frac{a}{\delta} e^{-\delta T}$ e a maternidade normalizada como segue

$$m(x) = \begin{cases} \delta e^{-\delta(x-T)} & \text{se } x \geq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.3.17)$$

Quando B^* perde a estabilidade, a equação 4.2.5 dá lugar a

$$\frac{1}{1 - \bar{\gamma}} = \int_T^\infty e^{-i\omega x} \delta e^{-\delta(x-T)} dx. \quad (4.3.18)$$

Da parte imaginária de 4.3.18, obtemos

$$\int_T^\infty \sin \omega x e^{-\delta x} dx = 0, \quad (4.3.19)$$

integrando, obtemos

$$\omega \cos \omega T + \delta \sin \omega T = 0 \quad (4.3.20)$$

e, utilizando propriedades trigonométricas, reescrevemos a última equação como

$$\tan \omega T = -\frac{\omega}{\delta}. \quad (4.3.21)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $\omega > 0$ em 4.3.21.

Da parte real de 4.3.18, chegamos na equação para $\bar{\gamma}$, como segue

$$\delta e^{\delta T} \int_T^{\infty} \cos \omega x e^{-\delta x} dx = \frac{1}{1 - \bar{\gamma}}. \quad (4.3.22)$$

Integrando, a equação acima dá lugar a

$$\frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} (\delta \cos \omega T - \omega \sin \omega T) = \frac{1}{1 - \bar{\gamma}}, \quad (4.3.23)$$

e, novamente utilizando propriedades trigonométricas, temos

$$\frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} (\delta - \omega \tan \omega T) \cos \omega T = \frac{1}{1 - \bar{\gamma}}. \quad (4.3.24)$$

Substituindo $\tan \omega T$ conforme a equação 4.3.21 em 4.3.24, obtemos

$$\frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} \left(\delta + \frac{\omega^2}{\delta} \right) \cos \omega T = \frac{1}{1 - \bar{\gamma}} \quad (4.3.25)$$

que simplificamos

$$\cos \omega T = \frac{1}{1 - \bar{\gamma}} \quad (4.3.26)$$

e reescremos como:

$$\bar{\gamma} = 1 - \sec \omega T. \quad (4.3.27)$$

Ainda para escrever a última equação em uma forma mais simples, basta observarmos que $\sec \omega T = \pm \sqrt{1 + \tan^2 \omega T}$ e, de 4.3.21, que $\sec \omega T = \pm \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\delta^2}}$. Também, é importante lembrar que consideramos $\gamma \geq 2$, então devemos tomar apenas $\sec \omega T = -\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\delta^2}}$, que garante esta condição. Assim, temos

$$\bar{\gamma} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\delta^2}}. \quad (4.3.28)$$

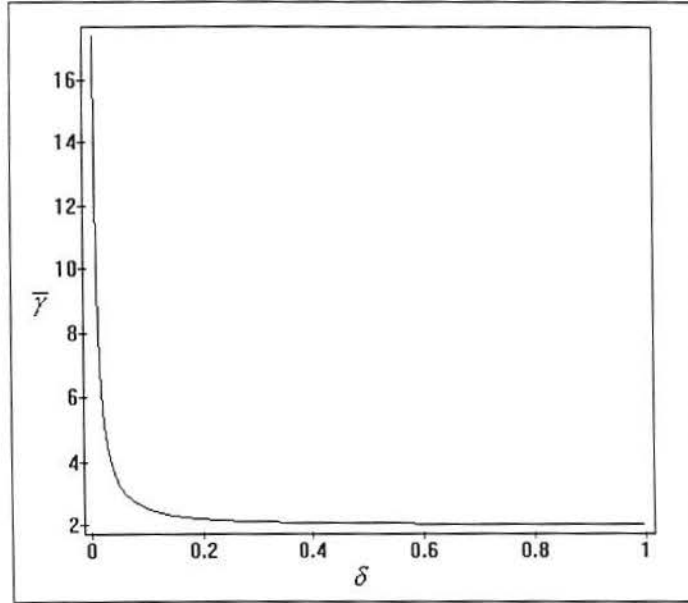


Figura 4.9: Gráfico da fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ em função da taxa de extração δ , para $T = 20$. Podemos observar que δ é um parâmetro desestabilizador.

Para avaliarmos a influência da taxa de extração δ na população, vamos calcular $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta}$ e estudar seu comportamento. Antes, porém, derivamos ambos os lados da equação 4.3.21 em relação a δ .

$$\frac{\partial}{\partial \delta}(\tan \omega T) = \frac{\partial}{\partial \delta} \left(-\frac{\omega}{\delta} \right) \quad (4.3.29)$$

e obtemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial \delta} = \frac{\omega}{\delta + T(\delta^2 + \omega^2)} > 0 \quad (4.3.30)$$

pois assumimos $\omega > 0$.

Agora, derivamos a equação 4.3.28 em relação a δ e obtemos

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta} = \left(1 + \frac{\omega^2}{\delta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega}{\delta} \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\omega}{\delta} \right). \quad (4.3.31)$$

Observe que o sinal de $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta}$ depende do sinal de $\frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\omega}{\delta} \right)$ pois o produto $\left(1 + \frac{\omega^2}{\delta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega}{\delta} > 0$. Então, utilizando o resultado obtido em 4.3.30, derivamos

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{\omega}{\delta} \right) = -\frac{\omega T(\omega^2 + \delta^2)}{\delta^2[\delta + T(\omega^2 + \delta^2)]} < 0. \quad (4.3.32)$$

Com isso, obtemos que $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta} < 0$, o que significa que $\bar{\gamma}$ é uma função decrescente do parâmetro δ e então este parâmetro tem efeito desestabilizador na população. Observe a figura 4.9 que apresenta o gráfico de $\bar{\gamma}$ em função da variação de δ .

4.3.2 Maternidade Densidade Gamma Deslocada

Este segundo perfil de maternidade selecionado considera um período não reprodutivo até a idade T , seguido por um período reprodutivo onde $f(x) l(x)$ é inicialmente crescente com a idade x até atingir um valor máximo e então decair rapidamente para zero quando $x \rightarrow \infty$. Para este fim, vamos utilizar uma função Densidade Gamma Deslocada, que é freqüentemente encontrada na literatura [5, 18, 19, 25]. Observe a figura 4.10.

Então, tomemos $f(x) l(x)$ definida como

$$f(x) l(x) = \begin{cases} a g_s(x - T, \tau) & \text{se } x \geq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3.33)$$

onde a é uma constante real positiva e

$$g_s(x, \tau) = \frac{\tau^{s+1}}{\Gamma(s+1)} x^s e^{-\tau x} \quad (4.3.34)$$

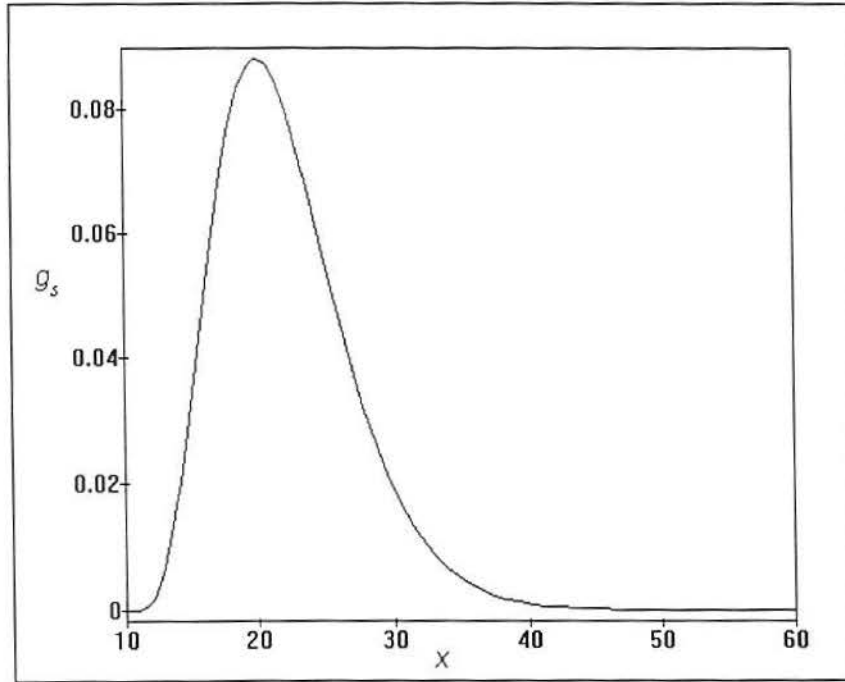


Figura 4.10: Gráfico da função $g_s(x - T, \tau)$ para $T = 10$, $\tau = 0.5$ e $s = 5$.

para $s > 0$, onde $\Gamma(s + 1)$ é a função Gamma, usualmente definida como

$$\Gamma(s + 1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx. \quad (4.3.35)$$

Calculamos, então, a taxa reprodutiva básica

$$\begin{aligned} R_0 &= \int_0^{\infty} a g_s(x - T, \tau) e^{-\delta x} dx \\ &= a \frac{\tau^{s+1}}{(\tau + \delta)^{s+1}} e^{-\delta T} \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

e a maternidade normalizada

$$m(x) = \begin{cases} \frac{(\tau + \delta)^{s+1}}{\tau^{s+1}} g_s(x - T, \tau) e^{-\delta(x-T)} & \text{se } x \geq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.3.37)$$

que reescrevemos de maneira simplificada

$$m(x) = \begin{cases} g_s(x - T, \tau + \delta) & \text{se } x \geq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.3.38)$$

Neste caso, a equação característica 4.2.5 pode ser escrita utilizando transformada de Laplace, que denotamos por \mathcal{L} , como segue:

$$\frac{1}{1-\gamma} = e^{-\lambda T} \mathcal{L}\{g_s(x, \tau + \delta)\} \quad (4.3.39)$$

e, resolvendo a transformada, obtemos

$$\frac{1}{1-\gamma} = e^{-\lambda T} \frac{(\tau + \delta)^{s+1}}{(\tau + \delta + \lambda)^{s+1}}. \quad (4.3.40)$$

Quando a estabilidade é perdida, $\lambda = i\omega$, γ alcança seu valor crítico $\bar{\gamma}$ e a equação 4.3.40 torna-se

$$\frac{1}{1-\bar{\gamma}} = e^{-i\omega T} \frac{(\tau + \delta)^{s+1}}{(\tau + \delta + i\omega)^{s+1}} \quad (4.3.41)$$

Para facilitar a manipulação algébrica, vamos representar o número complexo $\tau + \delta + i\omega$ na sua forma polar $\rho e^{i\theta}$, onde $\rho = \sqrt{(\tau + \delta)^2 + \omega^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{\omega}{\tau + \delta}\right)$.

Substituindo em 4.3.41, chegamos a

$$\frac{1}{1-\bar{\gamma}} = e^{-i\omega T} \frac{(\tau + \delta)^{s+1}}{\rho^{s+1} e^{i\theta(s+1)}} \quad (4.3.42)$$

na seqüência

$$e^{i[\omega T + \theta(s+1)]} \left(\frac{\rho}{\tau + \delta}\right)^{s+1} = 1 - \bar{\gamma}, \quad (4.3.43)$$

e finalmente

$$\{\cos[\omega T + \theta(s+1)] + i \sin[\omega T + \theta(s+1)]\} \left(\frac{\rho}{\tau + \delta}\right)^{s+1} = 1 - \bar{\gamma}. \quad (4.3.44)$$

Da parte imaginária da equação 4.3.44, observamos que:

$$\sin[\omega T + \theta(s+1)] = 0, \quad (4.3.45)$$

que implica em

$$\cos[\omega T + \theta (s + 1)] = \pm 1. \quad (4.3.46)$$

Por outro lado, da parte real de 4.3.44, obtemos a seguinte equação para a fronteira da estabilidade

$$\cos[\omega T + \theta (s + 1)] \left(\frac{\rho}{\tau + \delta} \right)^{s+1} = 1 - \bar{\gamma} \quad (4.3.47)$$

e, isolando $\bar{\gamma}$, obtemos

$$\bar{\gamma} = 1 - \cos[\omega T + \theta (s + 1)] \left(\frac{\rho}{\tau + \delta} \right)^{s+1}. \quad (4.3.48)$$

Utilizando 4.3.46, podemos simplificar a última equação. É importante notar que devemos utilizar $\cos[\omega T + \theta (s + 1)] = -1$ pois isto garante a condição $\gamma \geq 2$. Então:

$$\bar{\gamma} = 1 + \left(\frac{\rho}{\tau + \delta} \right)^{s+1} \quad (4.3.49)$$

e, substituindo ρ , obtemos:

$$\bar{\gamma} = 1 + \left(\frac{\sqrt{(\tau + \delta)^2 + \omega^2}}{\tau + \delta} \right)^{s+1}. \quad (4.3.50)$$

Voltando a equação da frequência 4.3.45, podemos observar:

$$\omega T + \theta (s + 1) = j\pi \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3.51)$$

onde substituindo θ anterior e reorganizando, obtemos:

$$\arctan \left(\frac{\omega}{\tau + \delta} \right) = \frac{j\pi - \omega T}{s + 1} \quad (4.3.52)$$

e, na seqüência,

$$\tan\left(\frac{j\pi - \omega T}{s+1}\right) = \frac{\omega}{\tau + \delta} \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3.53)$$

Observe que, se substituirmos θ na equação 4.3.45, podemos assumir que $\omega > 0$ sem perda de generalidade. Ainda, quando fazemos esta suposição sobre ω , temos que $\arctan\left(\frac{\omega}{\tau + \delta}\right) > 0$ e o lado esquerdo da equação 4.3.51 torna-se positivo, o que força-nos a considerar $j > 0$.

Na seqüência, definimos a função

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \omega T + \arctan\left(\frac{\omega}{\tau + \delta}\right) (s+1) \\ &= j\pi \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

Procedendo a derivada de ϕ em relação a ω , obtemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = (s+1) \frac{\tau + \delta}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} > 0. \quad (4.3.55)$$

E então a frequência mínima ocorre quando $j = 1$. Portanto, a equação da frequência 4.3.53 torna-se:

$$\tan\left(\frac{\pi - \omega T}{s+1}\right) = \frac{\omega}{\tau + \delta}. \quad (4.3.56)$$

Agora, para estudarmos o comportamento de $\bar{\gamma}$ em função de δ , temos que calcular $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta}$.

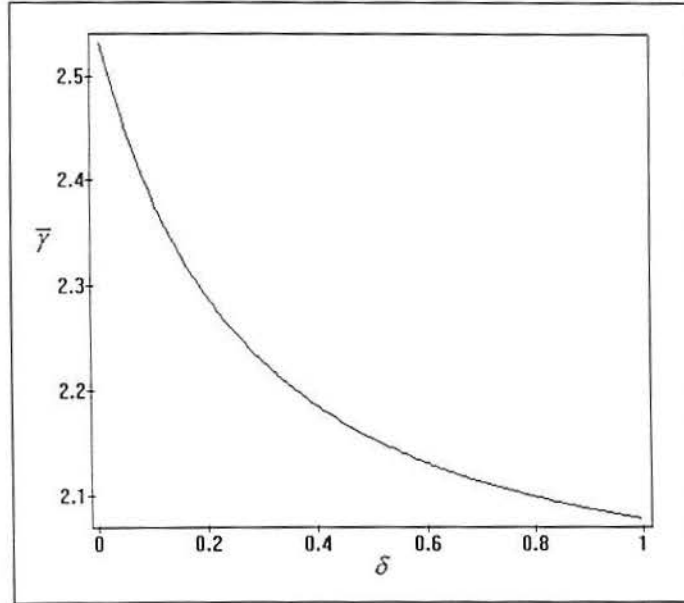


Figura 4.11: Gráfico da fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ em função da taxa de extração δ , para $T = 10$, $s = 5$ e $\tau = 0.5$. Podemos novamente observar que δ é um parâmetro desestabilizador.

Primeiro, obtemos $\frac{\partial \omega}{\partial \delta}$ derivando os dois lados da equação 4.3.56, como

segue:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left[\tan \left(\frac{\pi - \omega T}{s+1} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{\omega}{\tau + \delta} \right] \quad (4.3.57)$$

e, então:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \delta} = \frac{\omega (s+1)}{[(\tau + \delta)^2 + \omega^2] T + (\tau + \delta) (s+1)} > 0, \quad (4.3.58)$$

pois assumimos $\omega > 0$.

Ainda, procedemos a derivada $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta}$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta} = (s+1) \left(1 + \frac{\omega^2}{(\tau + \delta)^2} \right)^{\frac{s+1}{2}-1} \frac{\omega}{\tau + \delta} \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{\omega}{\tau + \delta} \right]. \quad (4.3.59)$$

Como as parcelas à esquerda de $\frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{\omega}{\tau + \delta} \right]$ são positivas, basta analisarmos o sinal de $\frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{\omega}{\tau + \delta} \right]$ para determinarmos o sinal de $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta}$. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{\omega}{\tau + \delta} \right] = \frac{-\omega [(\tau + \delta)^2 + \omega^2] T}{(\tau + \delta)^2 \{[(\tau + \delta)^2 + \omega^2] T + (\tau + \delta) (s + 1)\}} < 0 \quad (4.3.60)$$

e, portanto, temos que $\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \delta} < 0$. Deste fato, concluímos que $\bar{\gamma}$ é função decrescente de δ e, por conseqüência, δ é um parâmetro desestabilizador. A figura 4.11 ilustra este resultado.

4.4 Resultados: Extração 2

Nesta seção, consideramos que uma fração δ da população com idade superior a c é extraída. Então $c(x) = \delta \chi_{[c, \infty)}(x)$ e

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } x \geq c \end{cases} . \quad (4.4.1)$$

4.4.1 Maternidade Constante

Seguindo a mesma linha da subseção 4.3.1, consideramos uma saída reprodutiva constante no intervalo $[T, k]$ dada na equação 4.3.2.

Na seqüência, calculamos a taxa reprodutiva básica $R_0 = a C_0$, tal que

$$C_0 = c - T + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} e^{-\delta(k-c)} \quad (4.4.2)$$

e a maternidade normalizada

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} 1 & \text{se } T \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (4.4.3)$$

A equação característica é agora escrita como

$$\frac{C_0}{1 - \bar{\gamma}} = \int_T^c e^{-\lambda x} dx + \int_c^k e^{-\lambda x} e^{-\delta(x-c)} dx; \quad (4.4.4)$$

quando a estabilidade é perdida ($\lambda = i\omega$ e $\gamma = \bar{\gamma}$), obtemos da parte imaginária a seguinte equação para a frequência ω :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \omega T - \cos \omega c}{\omega} &= \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} (e^{-\delta(k-c)} \sin \omega k - \sin \omega c) \\ &+ \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2} (e^{-\delta(k-c)} \cos \omega k - \cos \omega c) \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

e da parte real:

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{C_0}{K_0} \quad (4.4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{\sin \omega c - \sin \omega T}{\omega} + \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} (\cos \omega c - e^{-\delta(k-c)} \cos \omega k) \\ &- \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2} (\sin \omega c - e^{-\delta(k-c)} \sin \omega k). \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Procedendo experimentos numéricos, aproximamos o comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação aos parâmetros da extração δ e c , e em relação aos parâmetros do intervalo reprodutivo T e k . Obtemos os seguintes resultados:

- O comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a taxa de extração δ é semelhante ao obtido para a maternidade constante na primeira estratégia de extração. Inicialmente, $\bar{\gamma}$ é crescente, até atingir um valor máximo e passar a decair com o crescimento de δ (figuras 4.12, 4.13, 4.14, 4.18 e 4.19). Ainda, quando tomamos k suficientemente maior que T , observamos que $\bar{\gamma}$ oscila (ora crescente, ora decrescente), o que também acontecia na extração 1 (figura 4.16).
- O comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a idade c em que se inicia a extração é apresentado nas figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15. Neste caso, c comporta-se como desestabilizador para valores de δ próximos de zero (figura 4.15: $\delta = 0.005$), atravessando uma região de transição onde c é ora estabilizador ora desestabilizador (figura 4.15: $\delta = 0.05$) e finalmente passa a comportar-se como um parâmetro estabilizador para valores maiores de δ (figura 4.15: $\delta = 0.1, \delta = 0.2, \delta = 0.3, \delta = 0.5$ e $\delta = 0.995$).
- Quando movemos o intervalo etário $[T, k]$ no sentido crescente da idade (movendo também o c), observamos que este deslocamento produz um efeito desestabilizador (figuras 4.16 e 4.17), como na extração 1.
- O retardo reprodutivo T comporta-se novamente como parâmetro desestabilizador (figura 4.18) e k , como parâmetro estabilizador (figura 4.19).

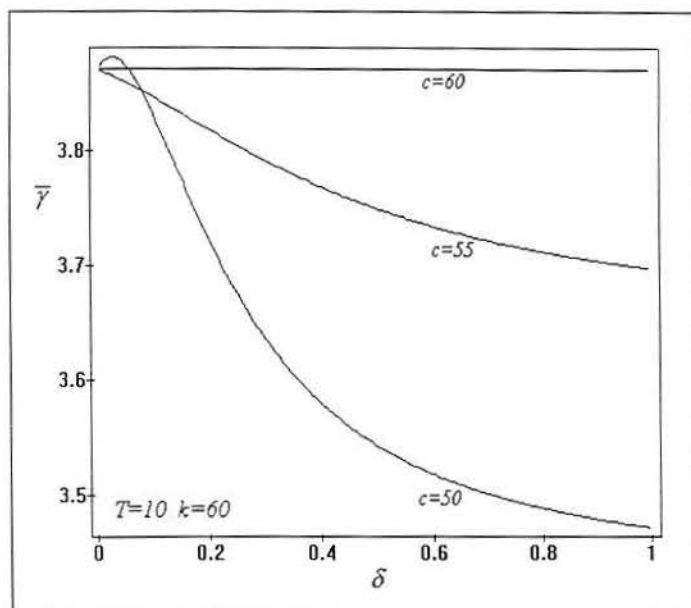


Figura 4.12: Comportamento de \bar{v} em relação a δ para diferentes valores de c .

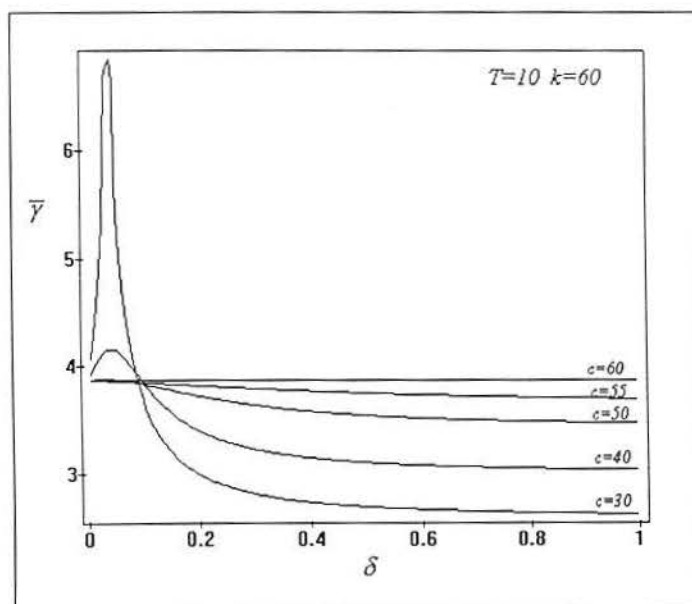


Figura 4.13: Comportamento de \bar{v} em relação a δ para diferentes valores de c .

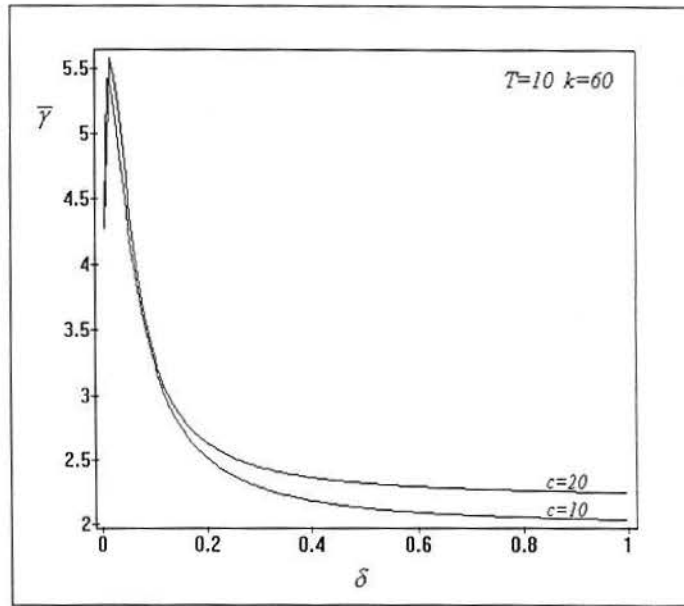


Figura 4.14: Comportamento de \bar{y} em relação a δ para diferentes valores de c .

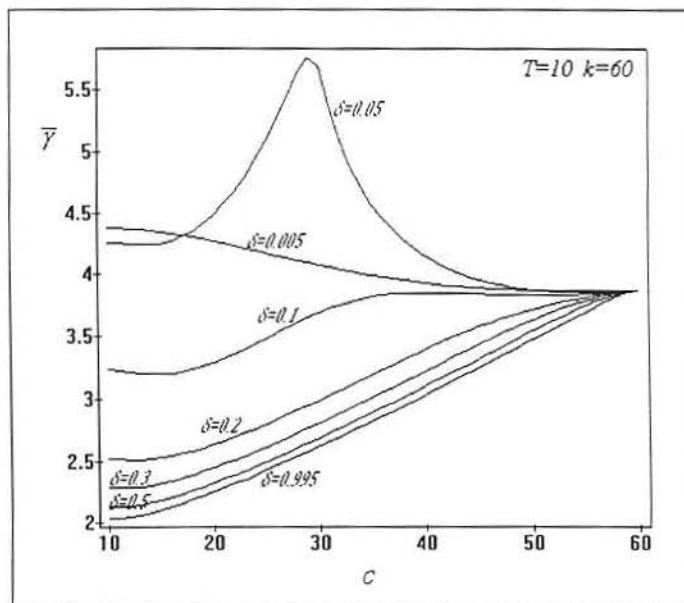


Figura 4.15: Comportamento de \bar{y} em relação a c para diferentes valores de δ .

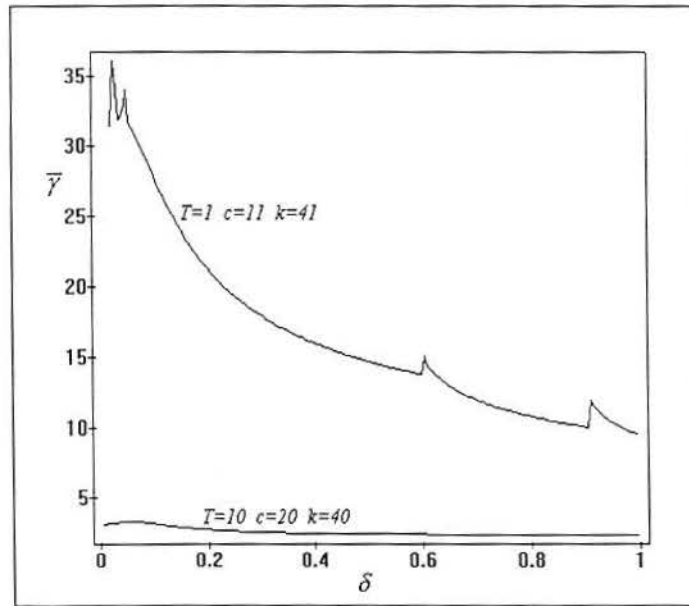


Figura 4.16: Comportamento de $\bar{\gamma}$ quando movemos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade.

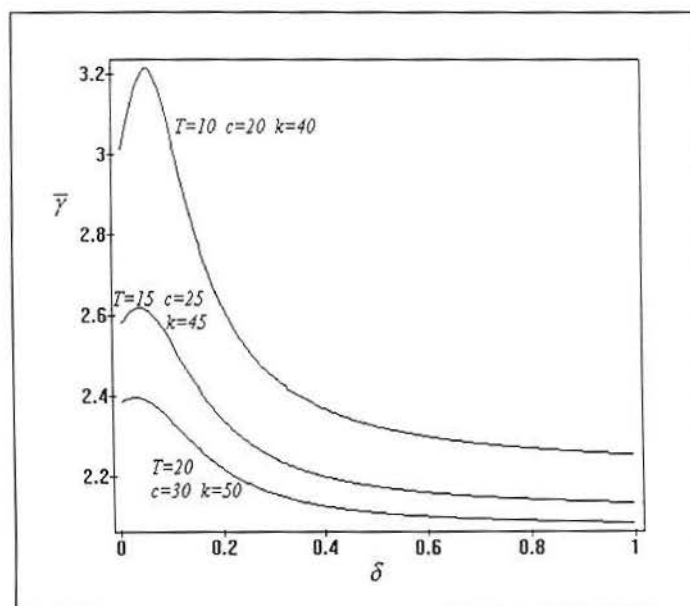


Figura 4.17: Comportamento de $\bar{\gamma}$ quando movemos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade.

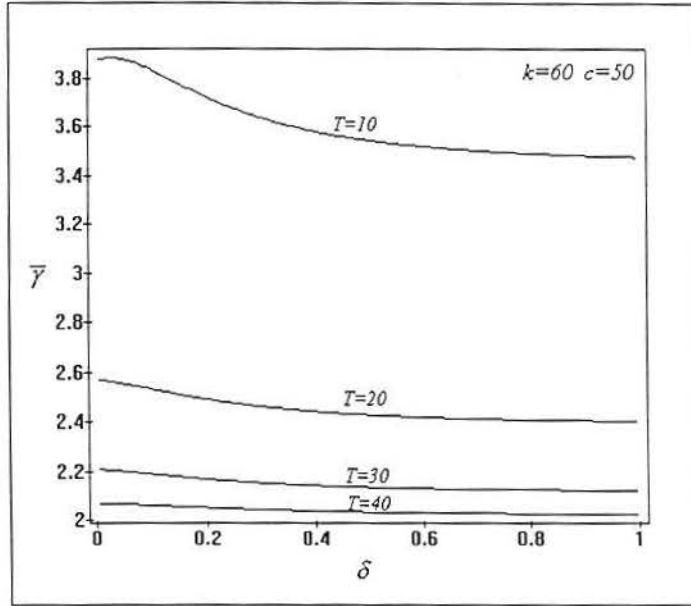


Figura 4.18: Efeito desestabilizador de T .

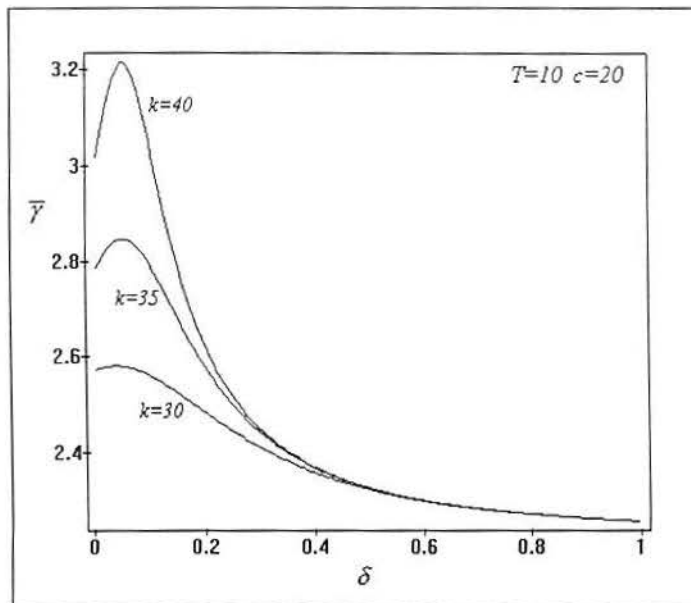


Figura 4.19: Efeito estabilizador de k .

O primeiro caso particular considerado é quando $f(x) l(x)$ é constante no intervalo $[0, k]$, desprezando o período juvenil T conforme a equação 4.3.10.

Calculamos $R_0 = a C_0$, onde

$$C_0 = c + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} e^{-\delta(k-c)}. \quad (4.4.8)$$

Na seqüência, a função maternidade normalizada fica:

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} . \quad (4.4.9)$$

Considerando que a estabilidade é perdida quando $\text{Re}\{\lambda\} = 0$, substituímos λ por $i\omega$ na equação característica e γ por seu valor crítico $\bar{\gamma}$. Da parte imaginária obtemos

$$\frac{(1 - \cos \omega c) (\delta^2 + \omega^2)}{\omega} = \delta [e^{-\delta(k-c)} \sin \omega k - \sin \omega c] + \omega [e^{-\delta(k-c)} \cos \omega k - \cos \omega c], \quad (4.4.10)$$

que podemos reescrever como $f(\omega) = 0$, onde $f(\omega)$ é dada por:

$$f(\omega) = \frac{(1 - \cos \omega c) (\delta^2 + \omega^2)}{\omega} + \delta [\sin \omega c - e^{-\delta(k-c)} \sin \omega k] + \omega [\cos \omega c - e^{-\delta(k-c)} \cos \omega k]. \quad (4.4.11)$$

Numericamente, observamos que a função 4.4.11 apresenta uma única raiz: $\omega = 0$. Alguns gráficos de $f(\omega)$ são apresentados nas figuras 4.20, 4.21 e 4.22. Portanto, a equação 4.4.10 não pode ser satisfeita a menos que $\omega = 0$.

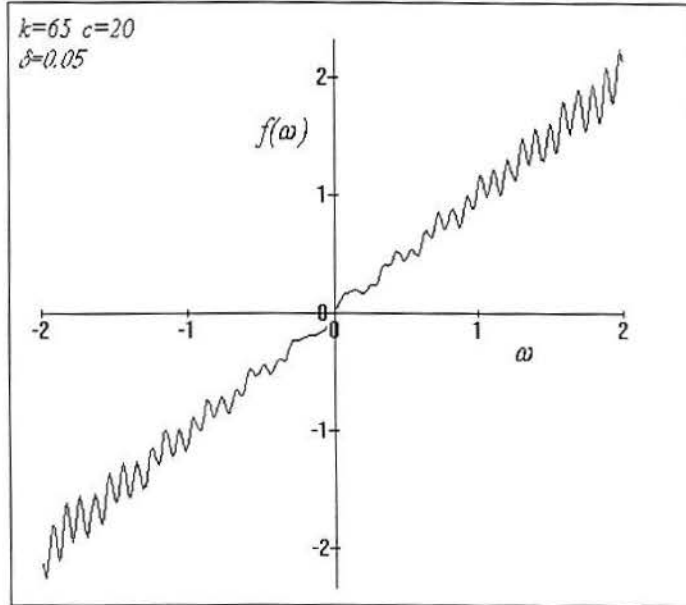


Figura 4.20: $f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$.

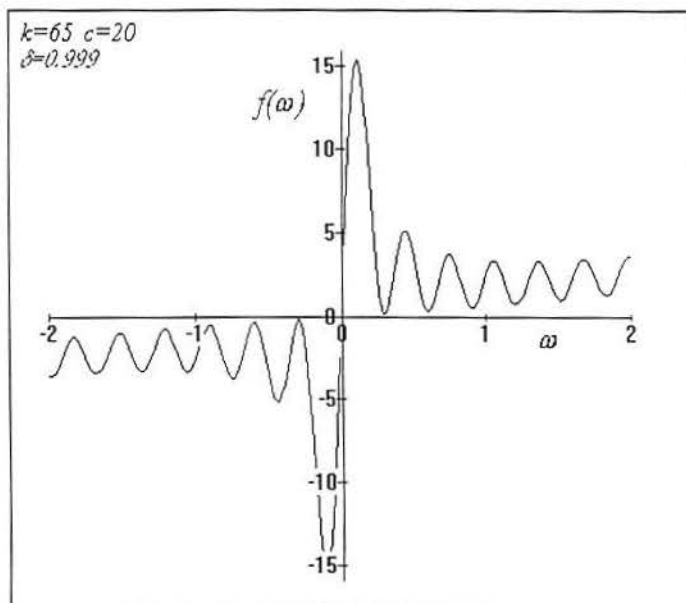


Figura 4.21: $f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$.

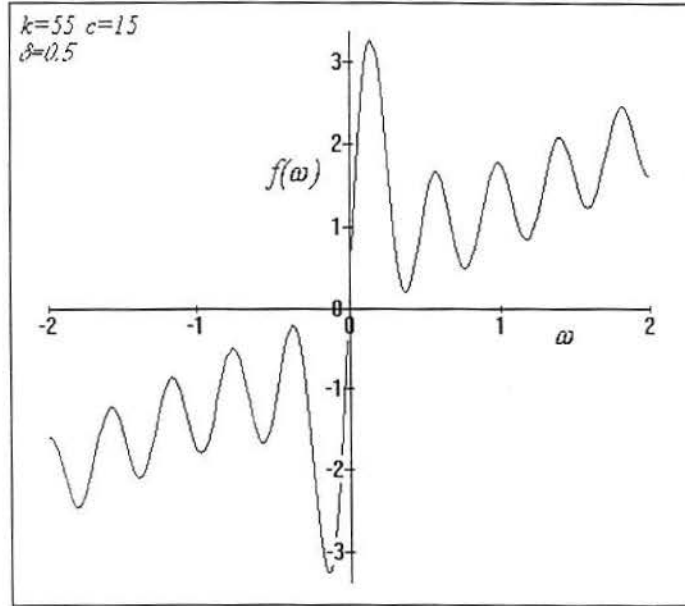


Figura 4.22: $f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$.

O segundo caso particular da maternidade constante em questão é expresso pela equação 4.3.16 onde $f(x) l(x)$ é constante a partir do período juvenil T .

Encontramos $R_0 = a C_0$ onde

$$C_0 = c - T + \frac{1}{\delta} \quad (4.4.12)$$

e

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} 1 & \text{se } T \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.4.13)$$

Quando a estabilidade é perdida, temos que $\lambda = i \omega$ e $\gamma = \bar{\gamma}$ na equação

4.2.5. Obtemos, então, a equação para a frequência ω

$$(\cos \omega c - \cos \omega T) (\delta^2 + \omega^2) = \omega (\delta \sin \omega c + \omega \cos \omega c) \quad (4.4.14)$$

e para a fronteira da estabilidade $\bar{\gamma}$

$$\bar{\gamma} = 1 + \frac{C_0}{K_0} \quad (4.4.15)$$

onde

$$K_0 = \frac{\sin \omega T - \sin \omega c}{\omega} + \frac{\omega \sin \omega c - \delta \cos \omega c}{\delta^2 + \omega^2}. \quad (4.4.16)$$

Procedendo inúmeros experimentos numéricos, concluímos:

- O parâmetro δ comporta-se como desestabilizador (figuras 4.23 e 4.24), exceto quando T é muito menor que c ; nestes casos, $\bar{\gamma}$ é decrescente por intervalos (figura 4.23: $T = 1$).
- A idade na qual inicia-se a extração comporta-se como um parâmetro estabilizador (figuras 4.24 e 4.26), exceto possivelmente para valores pequenos de δ e grandes de c (figuras 4.25 e 4.26: $\delta = 0.05$).
- Observamos novamente que T é um parâmetro desestabilizador (figura 4.23).

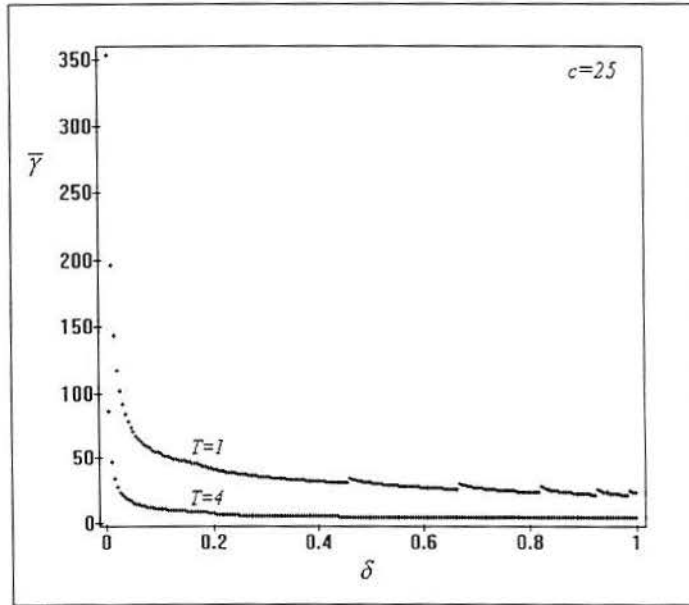


Figura 4.23: Efeito desestabilizador de T .

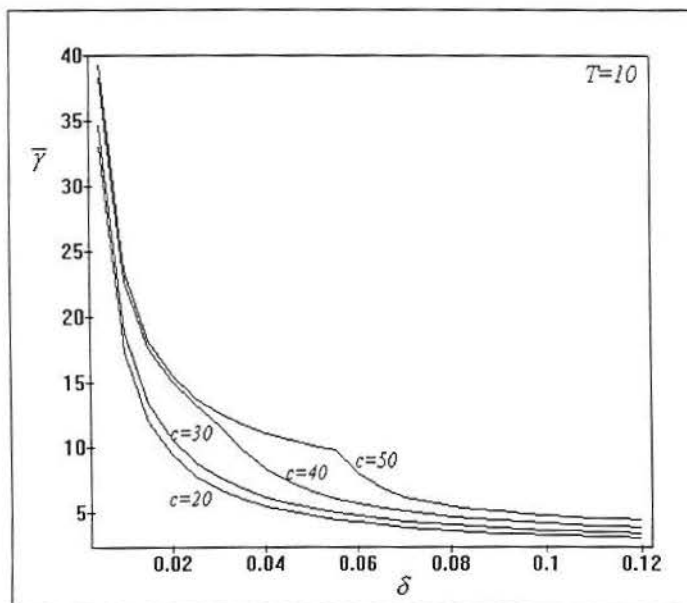


Figura 4.24: Efeito estabilizador de c e desestabilizador de δ .

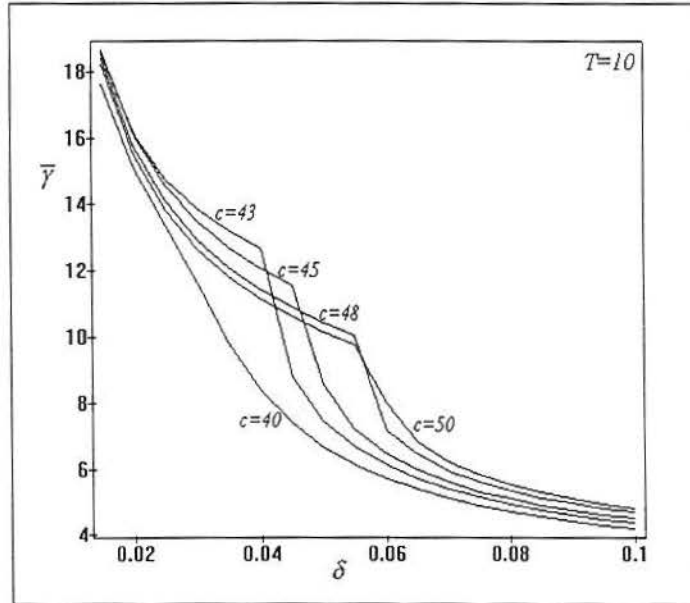


Figura 4.25: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ quando c está entre 40 e 50.

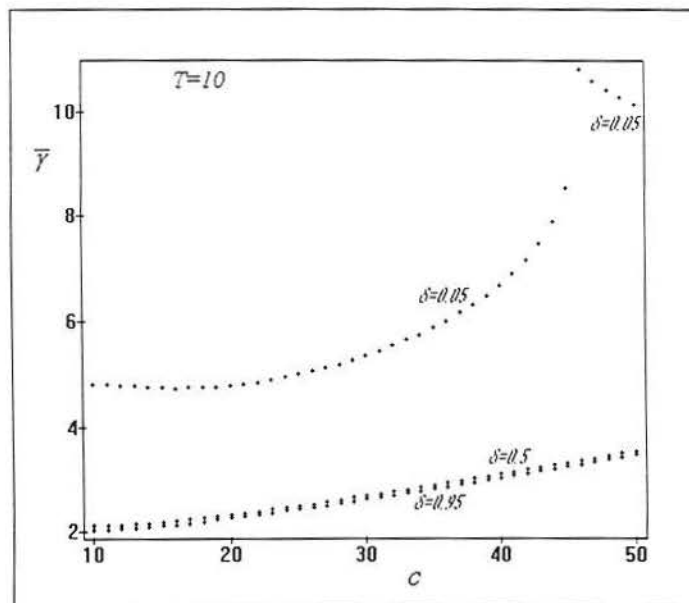


Figura 4.26: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .

4.4.2 Maternidade Densidade Gamma Deslocada

Considere a maternidade gamma deslocada $f(x) l(x)$ apresentada em

4.3.33. Calculamos $R_0 = a C_0$, onde:

$$C_0 = \int_T^c g_s(x - T, \tau) dx + \int_c^\infty e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) dx, \quad (4.4.17)$$

e, a maternidade normalizada:

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} g_s(x - T, \tau) & \text{se } T \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.4.18)$$

Quando a estabilidade é perdida, λ é substituído por $i\omega$ e γ alcança seu valor na fronteira $\bar{\gamma}$ na equação característica 4.2.5. Da parte imaginária, obtemos a seguinte equação para ω :

$$\int_T^c g_s(x - T, \tau) \sin \omega x dx + \int_c^\infty e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) \sin \omega x dx = 0 \quad (4.4.19)$$

e, da parte real, obtemos que

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{C_0}{K_0} \quad (4.4.20)$$

onde

$$K_0 = \int_T^c g_s(x - T, \tau) \cos \omega x dx + \int_c^\infty e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) \cos \omega x dx \quad (4.4.21)$$

e C_0 é dado em 4.4.17.

Substituindo $g_s(x - T, \tau)$ (definida na equação 4.3.34), fazendo a troca de variáveis $\nu = x - T$ e utilizando propriedades trigonométricas, reescrevemos as

equações 4.4.17, 4.4.19 e 4.4.21 como segue

$$C_0 = \frac{\tau^{s+1}}{\Gamma(s+1)} \left[\int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} d\nu + e^{-\delta(T-c)} \int_{c-T}^{\infty} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} d\nu \right], \quad (4.4.22)$$

$$\begin{aligned} & \sin \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \cos \omega \nu d\nu + \cos \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \sin \omega \nu d\nu + \\ & e^{-\delta(T-c)} \left[\sin \omega T \int_{c-T}^{\infty} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \cos \omega \nu d\nu + \right. \\ & \left. \cos \omega T \int_{c-T}^{\infty} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \sin \omega \nu d\nu \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

e

$$\begin{aligned} K_0 = & \frac{\tau^{s+1}}{\Gamma(s+1)} \left\{ \cos \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \cos \omega \nu d\nu - \sin \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \sin \omega \nu d\nu \right. \\ & \left. + e^{-\delta(T-c)} \left[\cos \omega T \int_{c-T}^{\infty} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \cos \omega \nu d\nu - \sin \omega T \int_{c-T}^{\infty} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \sin \omega \nu d\nu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

As equações 4.4.22, 4.4.23 e 4.4.24 são expressas em termos de integrais definidas. Estas integrais são resolvidas durante os experimentos numéricos realizados no aplicativo Maple V. Vamos assumir que s é um número natural. Esta suposição também foi utilizada em outros trabalhos [18, 19].

Procedendo de maneira similar a subseção 4.3.1, estimamos numericamente a fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ em função dos parâmetros de interesse. Com isso, obtemos os seguintes resultados:

- A fração de indivíduos removidos, δ , produz um efeito estritamente destabilizador conforme as figuras 4.27, 4.28 e 4.29.

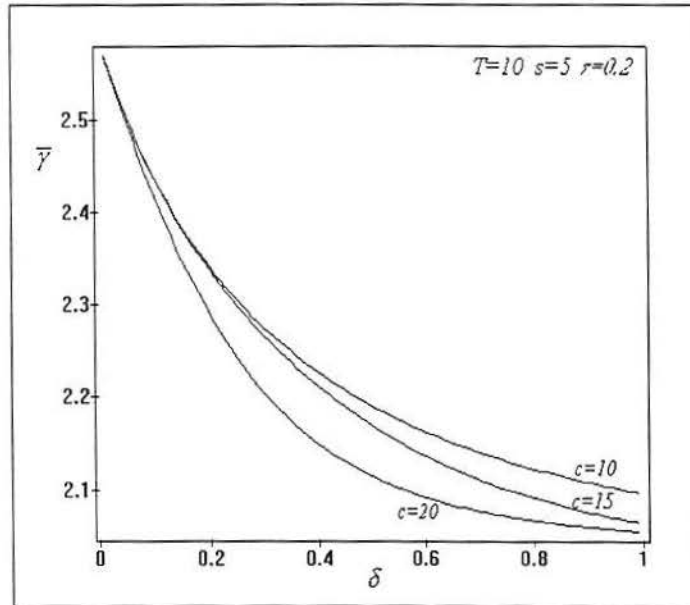


Figura 4.27: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .

- A fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ é inicialmente decrescente em c , ou seja, quando indivíduos mais jovens são removidos c é um parâmetro desestabilizador (figura 4.27); a partir de uma certa idade, c passa a ser estabilizador (figuras 4.28 e 4.29) e, finalmente, $\bar{\gamma}$ permanece aproximadamente constante em relação a c (figura 4.30).
- O retardo reprodutivo apresenta-se como um parâmetro desestabilizador (figura 4.31).

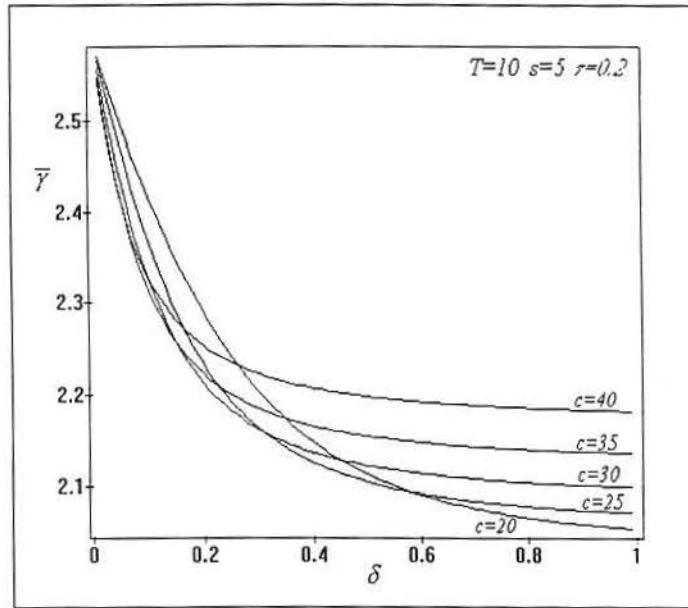


Figura 4.28: Comportamento de \bar{v} em relação a δ para diferentes valores de c .

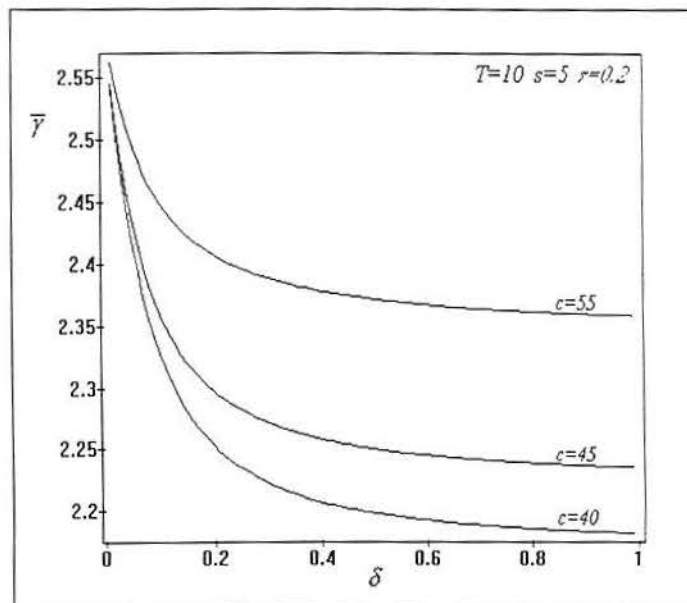


Figura 4.29: Comportamento de \bar{v} em relação a δ para diferentes valores de c .

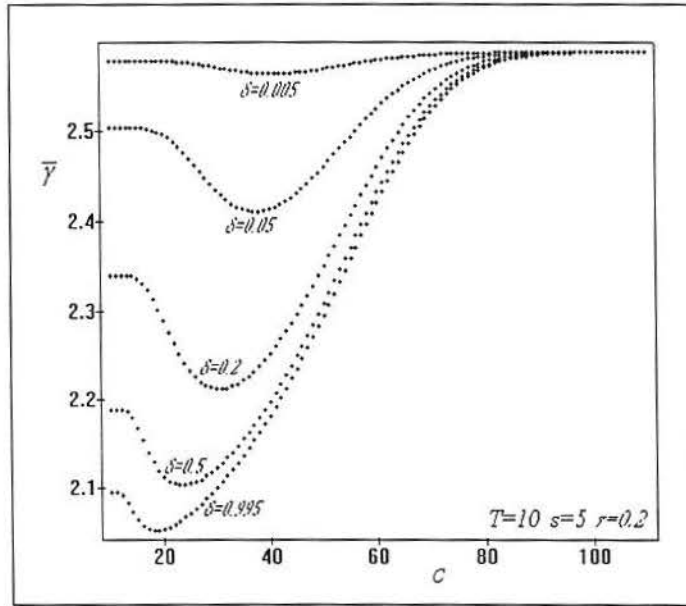


Figura 4.30: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .

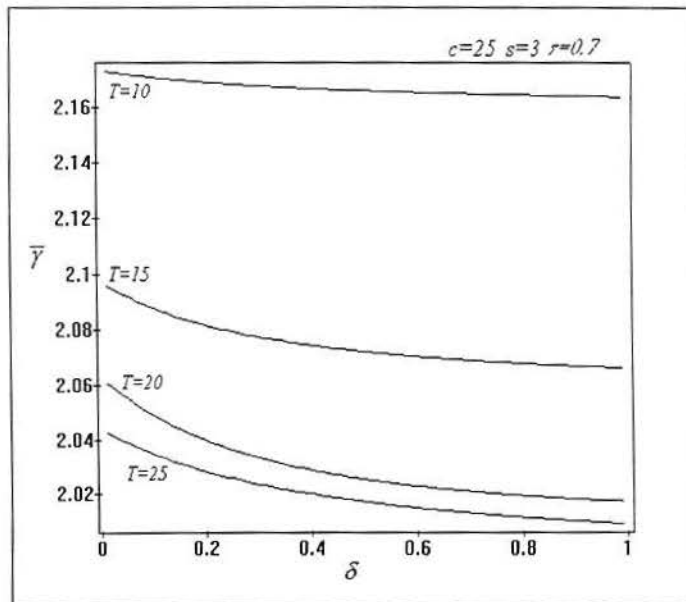


Figura 4.31: Efeito desestabilizador de T .

Vamos considerar o caso particular da maternidade gamma deslocada quando $s = 0$. Neste caso, a maternidade é reduzida a

$$f(x) l(x) = \begin{cases} a \tau e^{-\tau(x-T)} & \text{se } x \geq T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.4.25)$$

onde a é uma constante real positiva.

Calculamos então o número reprodutivo básico $R_0 = a C_0$ tal que

$$C_0 = 1 - e^{-\tau(c-T)} + \frac{\tau}{\delta + \tau} e^{-\tau(c-T)} \quad (4.4.26)$$

e a maternidade normalizada

$$m(x) = \frac{\tau e^{\tau T}}{C_0} \begin{cases} e^{-\tau x} & \text{se } T \leq x < c \\ e^{-\tau x} e^{-\delta(x-c)} & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.4.27)$$

O equilíbrio B^* perde a estabilidade quando $\text{Re}(\lambda) = 0$ ($\lambda = i\omega$ e $\gamma = \bar{\gamma}$)

e a equação característica dá origem a equação

$$\begin{aligned} \frac{\tau \sin \omega T + \omega \cos \omega T}{\tau^2 + \omega^2} &= e^{-\tau(c-T)} \left\{ \sin \omega c \left[\frac{\tau}{\tau^2 + \omega^2} - \frac{\tau + \delta}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \omega \cos \omega c \left[\frac{1}{\tau^2 + \omega^2} - \frac{1}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

para a frequência, e a equação

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{C_0}{\tau e^{\tau T} K_0} \quad (4.4.29)$$

para $\bar{\gamma}$, onde

$$\begin{aligned} K_0 &= e^{-\tau T} \frac{\tau \cos \omega T - \omega \sin \omega T}{\tau^2 + \omega^2} \\ &\quad + e^{-\tau c} \left\{ \cos \omega c \left[\frac{\tau + \delta}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} - \frac{\tau}{\tau^2 + \omega^2} \right] + \omega \sin \omega c \left[\frac{1}{\tau^2 + \omega^2} - \frac{1}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

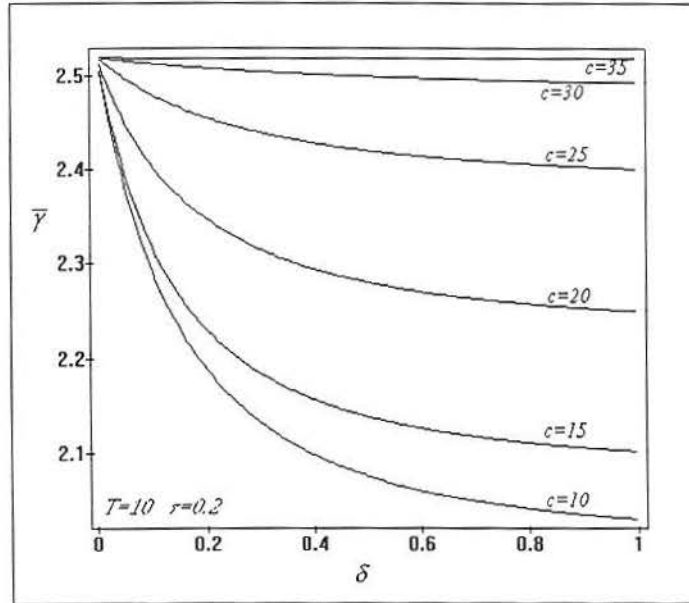


Figura 4.32: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .

Com base em inúmeras simulações, concluímos que:

- A taxa de extração δ é um parâmetro desestabilizador para a maioria dos valores de c (figura 4.32), exceto em um pequeno intervalo de c onde δ é inicialmente desestabilizador e posteriormente estabilizador (figuras 4.33: $c = 40$, 4.34: $c = 38$ e $c = 40$).
- A idade onde inicia-se a extração, c , comporta-se inicialmente como um parâmetro estabilizador, passando por uma região de transição a partir da qual a variação de c não altera a região de estabilidade (figura 4.35).
- Temos novamente o efeito desestabilizador de T (figura 4.36).

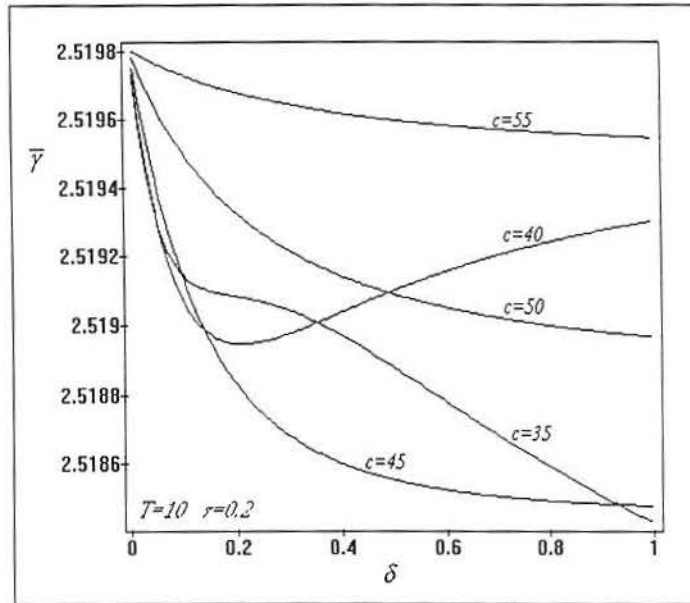


Figura 4.33: Comportamento de \bar{y} em relação a δ para diferentes valores de c .

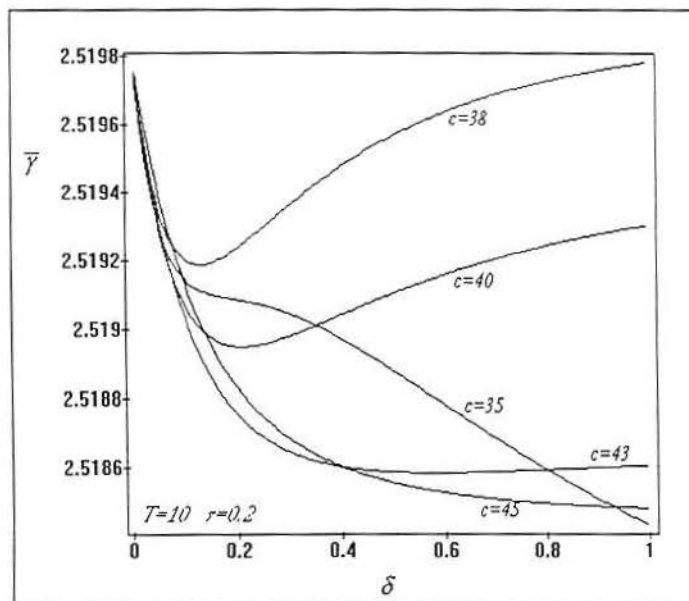


Figura 4.34: Comportamento de \bar{y} em relação a δ para diferentes valores de c .

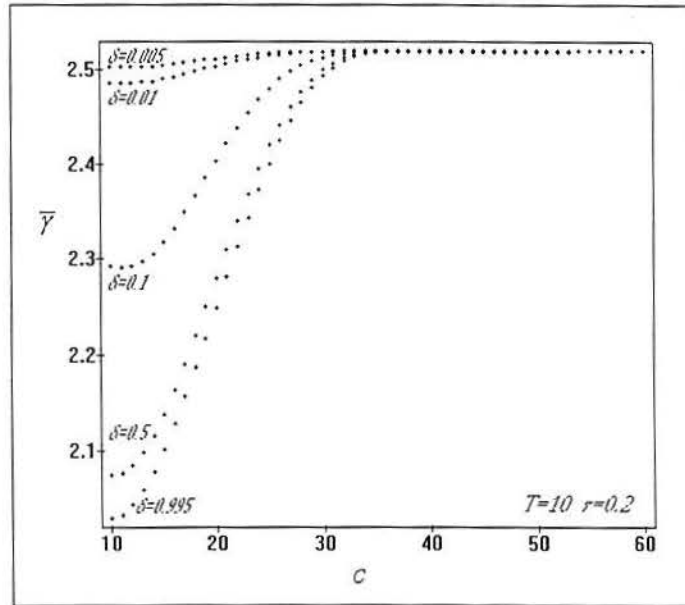


Figura 4.35: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para diferentes valores de δ .

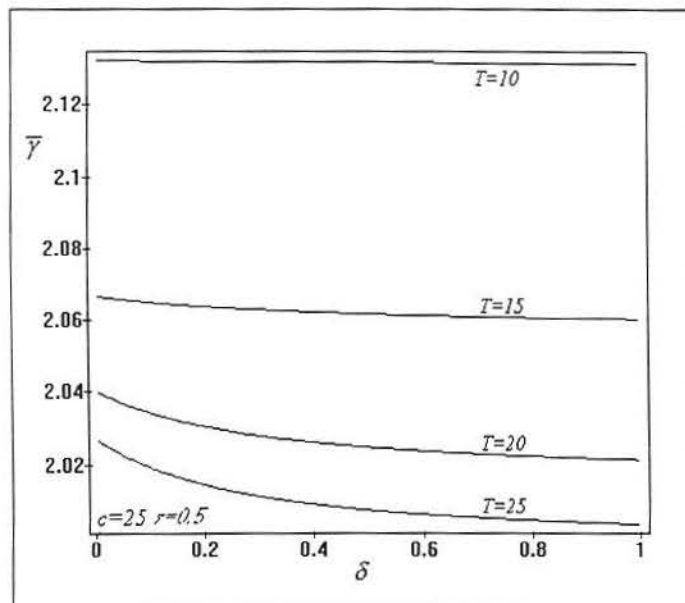


Figura 4.36: Efeito desestabilizador de T .

O segundo caso particular considerado é quando $s = 0$ e $T = 0$. Assim, a função maternidade é dada por

$$f(x) l(x) = \begin{cases} a \tau e^{-\tau x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.4.31)$$

onde a é uma constante real positiva.

A taxa reprodutiva básica é $R_0 = a C_0$ tal que

$$C_0 = 1 - e^{-\tau c} + \frac{\tau}{\delta + \tau} e^{-\tau c} \quad (4.4.32)$$

e a maternidade normalizada é

$$m(x) = \frac{\tau}{C_0} \begin{cases} e^{-\tau x} & \text{se } 0 \leq x < c \\ e^{-\tau x} e^{-\delta(x-c)} & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (4.4.33)$$

Quando a estabilidade é perdida, da parte imaginária da equação característica tiramos a seguinte equação para a frequência

$$\frac{\omega e^{\tau c}}{\tau^2 + \omega^2} = \sin \omega c \left[\frac{\tau}{\tau^2 + \omega^2} - \frac{\tau + \delta}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} \right] + \omega \cos \omega c \left[\frac{1}{\tau^2 + \omega^2} - \frac{1}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} \right] \quad (4.4.34)$$

que apresenta $\omega = 0$ como única solução (verificação numérica). Podemos reescrever 4.4.34 como $f(\omega) = 0$ onde

$$f(\omega) = \sin \omega c \left[\frac{\tau}{\tau^2 + \omega^2} - \frac{\tau + \delta}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} \right] + \omega \cos \omega c \left[\frac{1}{\tau^2 + \omega^2} - \frac{1}{(\tau + \delta)^2 + \omega^2} \right] - e^{\tau c} \frac{\omega}{\tau^2 + \omega^2}. \quad (4.4.35)$$

A figura 4.37 apresenta um gráfico típico do comportamento de $f(\omega)$. Nos casos verificados, sempre obtemos gráficos semelhantes. Por conseqüência, a equação 4.4.34 não pode ser satisfeita a menos que $\omega = 0$.

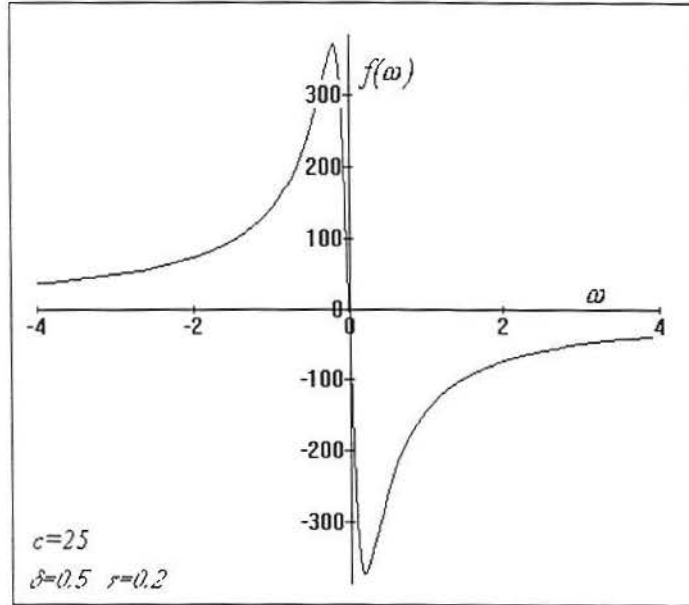


Figura 4.37: $f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$.

4.5 Resultados: Extração 3

Nesta última seção, consideramos que indivíduos no intervalo etário $[c, c+n]$ são extraídos a taxa constante δ , que significa $c(x) = \delta \chi_{[c, c+n]}(x)$ e, portanto,

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c \leq x \leq c+n \\ e^{-\delta n} & \text{se } x > c+n \end{cases} \quad (4.5.1)$$

4.5.1 Maternidade Constante

Tomando a maternidade constante no intervalo etário $[T, k]$ conforme a equação 4.3.2, podemos encontrar $R_0 = a C_0$ tal que

$$C_0 = c - T + \frac{1}{\delta} - \frac{e^{-\delta n}}{\delta} + e^{-\delta n} (k - c - n), \quad (4.5.2)$$

e a função maternidade normalizada

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} 1 & \text{se } T \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c \leq x \leq c+n \\ e^{-\delta n} & \text{se } c+n < x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Quando o equilíbrio B^* perde a estabilidade ($\lambda = i\omega$ e $\gamma = \bar{\gamma}$), obtemos da equação característica a equação para a frequência ω

$$\begin{aligned} \delta^2 [e^{-\delta n} \cos \omega(c+n) - \cos \omega c] &= \delta \omega [e^{-\delta n} \sin \omega(c+n) - \sin \omega c] \\ &+ (\delta^2 + \omega^2) [e^{-\delta n} \cos \omega k - \cos \omega T] \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

e a equação para a fronteira da estabilidade

$$\bar{\gamma} = 1 + \frac{C_0}{K_0} \quad (4.5.5)$$

onde

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{\sin \omega T - \sin \omega c}{\omega} + \frac{\omega \sin \omega c - \delta \cos \omega c}{\delta^2 + \omega^2} \\ &+ \frac{e^{-\delta n} [\delta \cos \omega(c+n) - \omega \sin \omega(c+n)]}{\delta^2 + \omega^2} \\ &+ \frac{e^{-\delta n} [\sin \omega(c+n) - \sin \omega k]}{\omega} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Através de experimentos numéricos, pesquisamos a solução ω da equação 4.5.4 a qual corresponde o menor valor de $\bar{\gamma}$. Com base nestes experimentos, concluímos:

- O efeito da taxa de extração δ na fronteira da estabilidade concorda com que foi apresentado para a maternidade constante anteriormente

(extração 1 e 2). A fronteira $\bar{\gamma}$ é inicialmente crescente em função de δ , atingindo um ponto máximo e passando a decrescer (figuras 4.38, 4.39, 4.41, 4.45, 4.46 e 4.47).

- O efeito de c em $\bar{\gamma}$ também concorda com o apresentado na seção 4.4.1. Este efeito é ilustrado nas figuras 4.38, 4.39 e 4.40. Para valores pequenos de δ , c comporta-se ora como estabilizador, ora como desestabilizador (figura 4.40: $\delta = 0.005$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$ e $\delta = 0.2$). Para valores mais elevados de δ , a idade onde inicia-se a extração é um parâmetro estritamente estabilizador, ou seja, quando removemos indivíduos mais velhos temos uma tendência a estabilidade (figura 4.40: $\delta = 0.5$ e $\delta = 0.995$).
- O efeito do tamanho do intervalo de extração n na fronteira de estabilidade $\bar{\gamma}$ pode ser observado nas figuras 4.41, 4.42, 4.43 e 4.44. Para valores pequenos de δ (figura 4.42: $\delta = 0.005$), n comporta-se como estabilizador, isto é, se a fração de indivíduos extraídos for muito pequena o tamanho do intervalo de extração é estabilizador. A figura 4.43 apresenta uma região de transição, onde δ ainda está próximo de zero, na qual $\bar{\gamma}$ comporta-se ora crescente, ora decrescente; neste ponto, para valores grandes de n , o parâmetro comporta-se como estabilizador. E finalmente, quando observamos valores maiores de δ , obtemos um comportamento padrão:

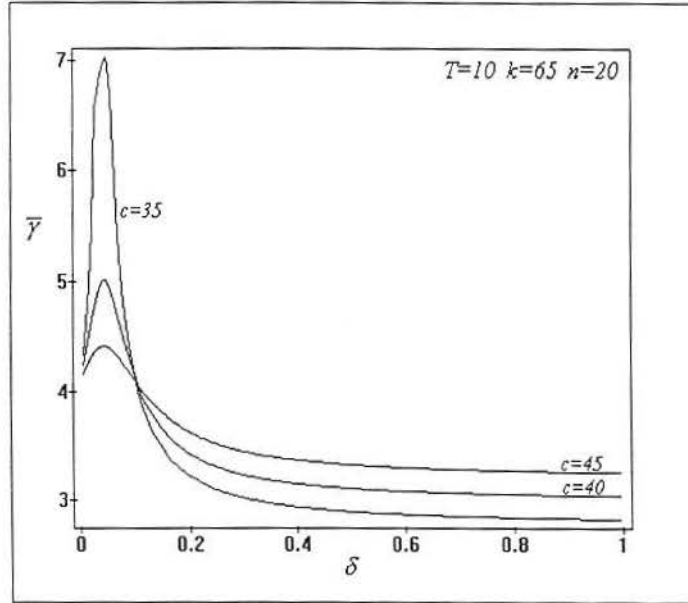


Figura 4.38: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .

$\bar{\gamma}$ pode ser crescente para um pequeno intervalo inicial de n , decaindo bruscamente (n desestabilizador) e terminando constante em relação a n (figura 4.44).

- Quando movemos o intervalo reprodutivo $[T, k]$ no sentido crescente da idade, movendo também c e mantendo n constante, observamos que este movimento produz um efeito desestabilizador e que o $\bar{\gamma}$ máximo ocorre em valores menores de δ (figura 4.45).
- Como nos casos anteriores, T é um parâmetro desestabilizador (figura 4.46) e k é um parâmetro estabilizador (figura 4.47).

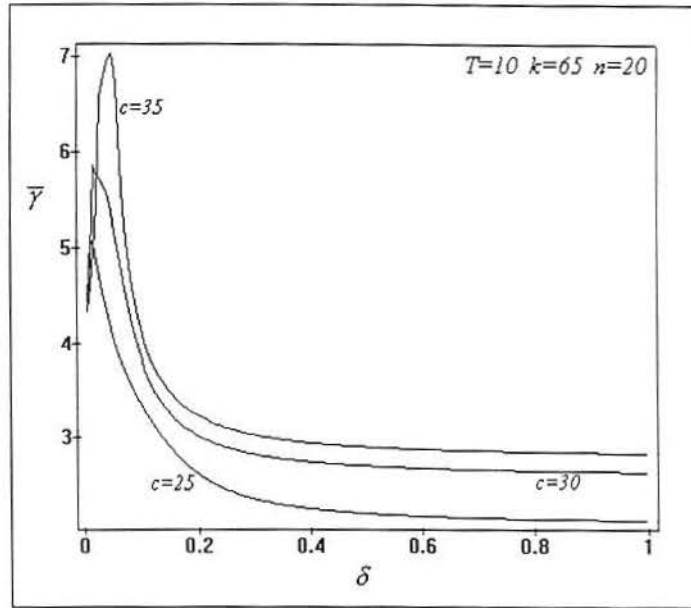


Figura 4.39: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .

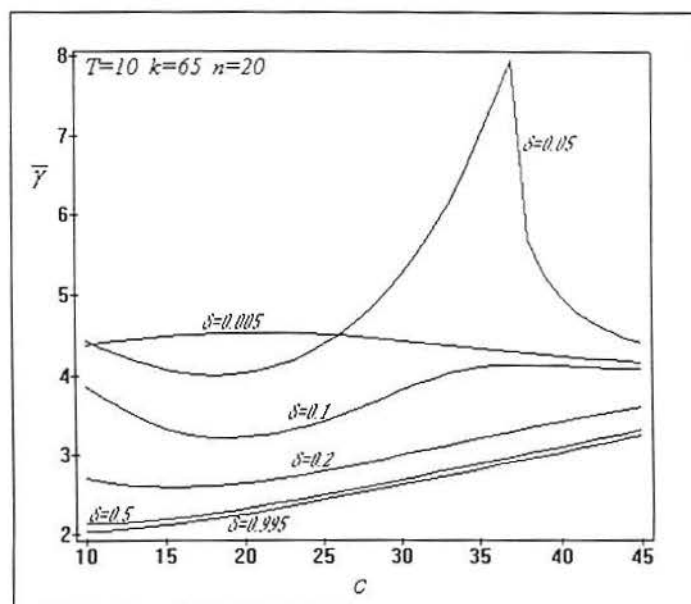


Figura 4.40: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para valores diferentes de δ .

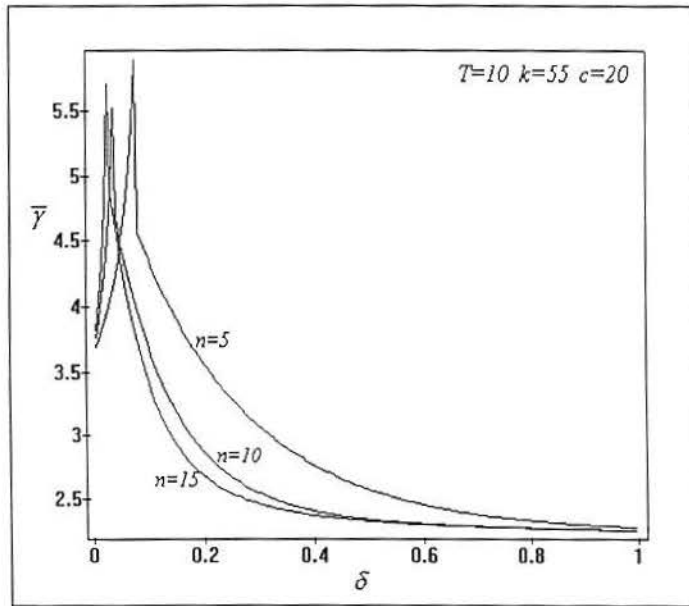


Figura 4.41: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de n .

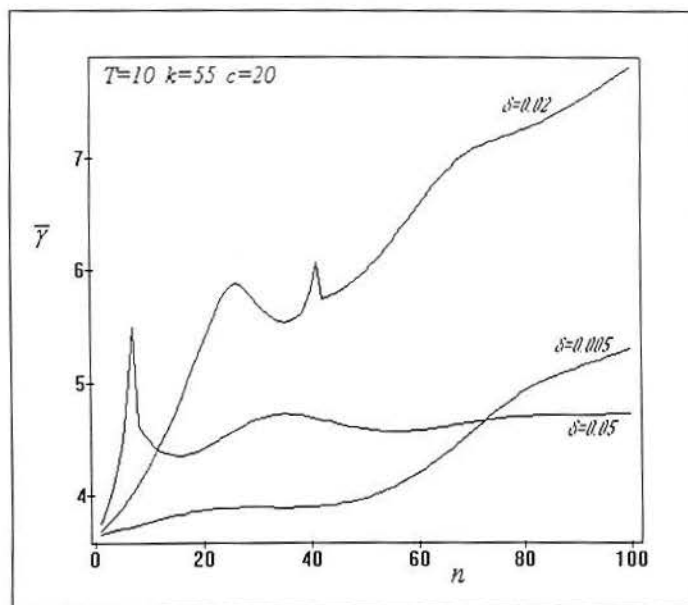


Figura 4.42: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .

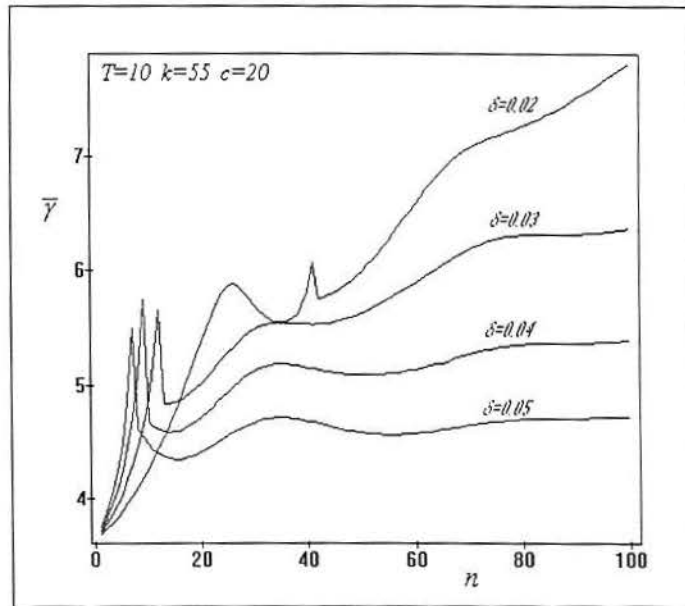


Figura 4.43: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .

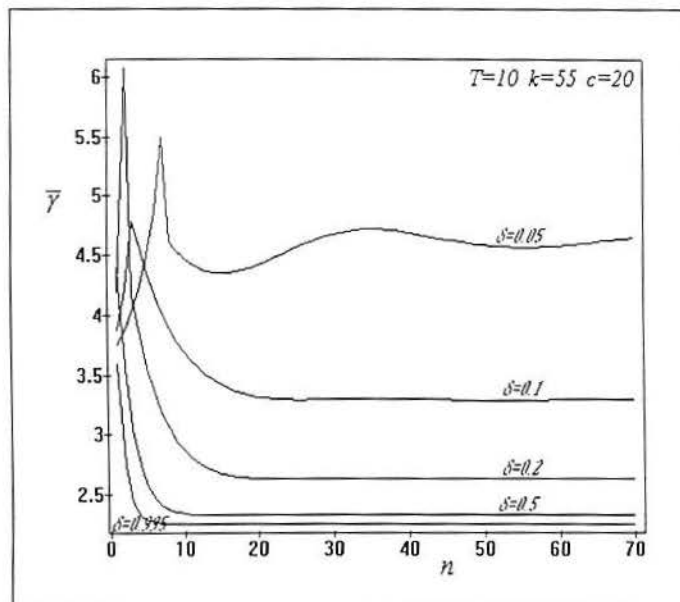


Figura 4.44: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .

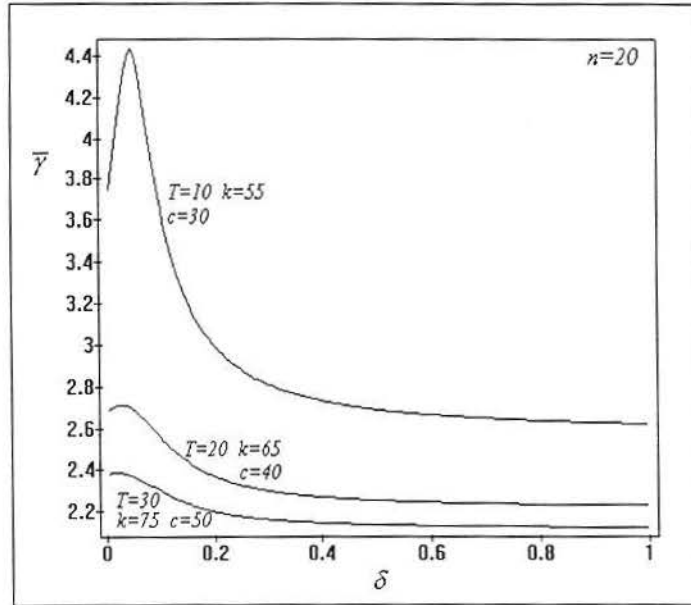


Figura 4.45: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ quando movemos o intervalo $[T, k]$ no sentido crescente da idade, movendo também c e mantendo n constante.

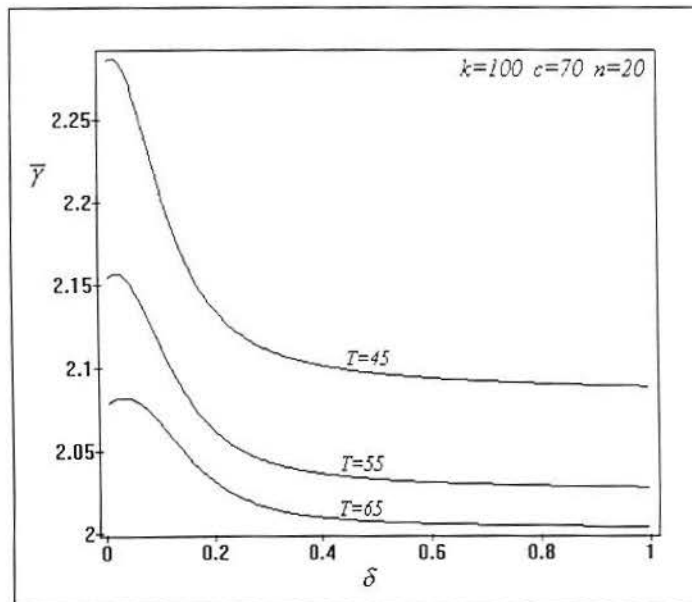


Figura 4.46: Efeito desestabilizador de T .

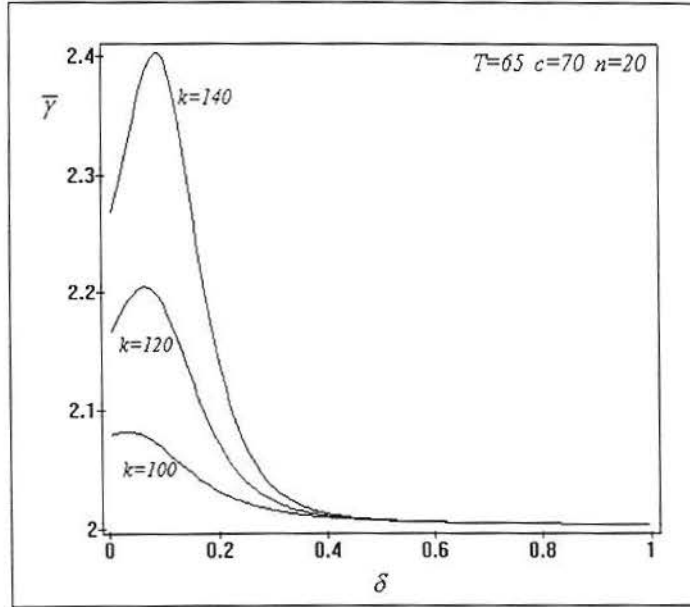


Figura 4.47: Efeito estabilizador de k .

Para esta terceira estratégia de extração, vamos considerar somente o caso particular no qual a maternidade é constante no intervalo $[0, k]$ (o período juvenil é desprezado), conforme a equação 4.3.10.

Procedendo os cálculos pertinentes, encontramos $R_0 = a C_0$ onde

$$C_0 = c + \frac{1}{\delta} - \frac{e^{-\delta n}}{\delta} + e^{-\delta n} (k - c - n), \quad (4.5.7)$$

e

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c \leq x \leq c+n \\ e^{-\delta n} & \text{se } c+n < x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5.8)$$

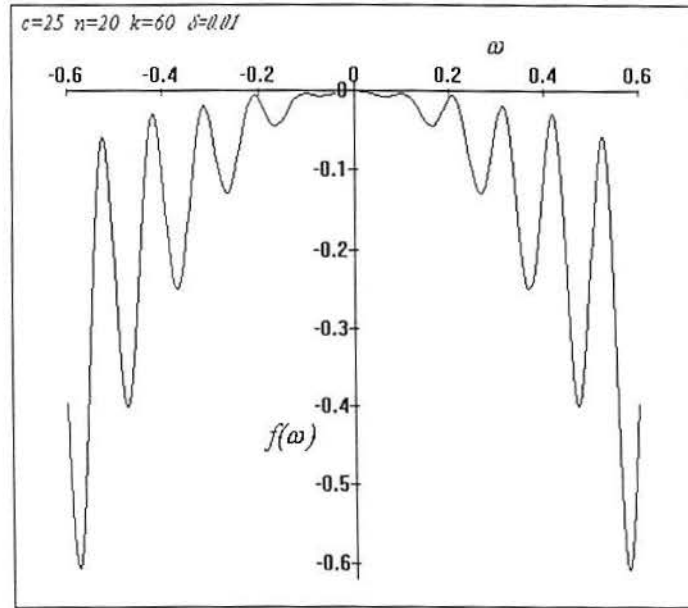


Figura 4.48: $f(\omega)$ apresenta uma única raiz $\omega = 0$.

Quando a estabilidade é perdida, obtemos da parte imaginária da equação característica, a seguinte equação para a frequência

$$\delta^2 \left[e^{-\delta n} \cos \omega(c+n) - \cos \omega c \right] = \delta \omega \left[e^{-\delta n} \sin \omega(c+n) - \sin \omega c \right] + (\delta^2 + \omega^2) \left(e^{-\delta n} \cos \omega k - 1 \right). \quad (4.5.9)$$

Podemos escrever esta última equação como $f(\omega) = 0$ tal que

$$f(\omega) = \delta^2 \left[\cos \omega c - e^{-\delta n} \cos \omega(c+n) \right] + \delta \omega \left[e^{-\delta n} \sin \omega(c+n) - \sin \omega c \right] + (\delta^2 + \omega^2) \left(e^{-\delta n} \cos \omega k - 1 \right). \quad (4.5.10)$$

Pesquisamos numericamente as raízes de 4.5.10 e obtemos que esta função possui uma única raiz em $\omega = 0$. A figura 4.48 ilustra o gráfico de $f(\omega)$.

4.5.2 Maternidade Densidade Gamma Deslocada

Novamente utilizamos a maternidade $f(x) l(x)$ dada em 4.3.33. Obtemos

$R_0 = a C_0$, onde:

$$C_0 = \int_T^c g_s(x - T, \tau) dx + \int_c^{c+n} e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) dx + \int_{c+n}^{\infty} e^{-\delta n} g_s(x - T, \tau) dx \quad (4.5.11)$$

e

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} g_s(x - T, \tau) & \text{se } T \leq x < c \\ e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) & \text{se } c \leq x \leq c + n \\ e^{-\delta n} g_s(x - T, \tau) & \text{se } x > c + n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5.12)$$

Quando a estabilidade é perdida, a equação característica 4.2.5 nos fornece uma equação para ω

$$\begin{aligned} \int_T^c g_s(x - T, \tau) \sin \omega x dx + \int_c^{c+n} e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) \sin \omega x dx \\ + \int_{c+n}^{\infty} e^{-\delta n} g_s(x - T, \tau) \sin \omega x dx = 0 \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

e, uma equação para $\bar{\gamma}$

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{C_0}{K_0} \quad (4.5.14)$$

onde

$$\begin{aligned} K_0 = \int_T^c g_s(x - T, \tau) \cos \omega x dx + \int_c^{c+n} e^{-\delta(x-c)} g_s(x - T, \tau) \cos \omega x dx \\ + \int_{c+n}^{\infty} e^{-\delta n} g_s(x - T, \tau) \cos \omega x dx. \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

Utilizando um procedimento análogo a seção 4.4.2, reescrevemos as equações

4.5.11, 4.5.13 e 4.5.15, respectivamente, como segue

$$C_0 = \frac{\tau^{s+1}}{\Gamma(s+1)} \left[\int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} d\nu + e^{-\delta(T-c)} \int_{c-T}^{c+n-T} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} d\nu + e^{-\delta n} \int_{c+n-T}^{\infty} \nu^s e^{-\tau\nu} d\nu \right], \quad (4.5.16)$$

$$\begin{aligned} & \sin \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \cos \omega \nu d\nu + \cos \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \sin \omega \nu d\nu \\ e^{-\delta(T-c)} & \left[\sin \omega T \int_{c-T}^{c+n-T} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \cos \omega \nu d\nu + \cos \omega T \int_{c-T}^{c+n-T} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \sin \omega \nu d\nu \right] \\ e^{-\delta n} & \left[\sin \omega T \int_{c+n-T}^{\infty} \nu^s e^{-\tau\nu} \cos \omega \nu d\nu + \cos \omega T \int_{c+n-T}^{\infty} \nu^s e^{-\tau\nu} \sin \omega \nu d\nu \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

e

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{\tau^{s+1}}{\Gamma(s+1)} \left\{ \cos \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \cos \omega \nu d\nu - \sin \omega T \int_0^{c-T} \nu^s e^{-\tau\nu} \sin \omega \nu d\nu \right. \\ &+ e^{-\delta(T-c)} \left[\cos \omega T \int_{c-T}^{c+n-T} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \cos \omega \nu d\nu - \sin \omega T \int_{c-T}^{c+n-T} \nu^s e^{-(\delta+\tau)\nu} \sin \omega \nu d\nu \right] \\ &+ \left. e^{-\delta n} \left[\cos \omega T \int_{c+n-T}^{\infty} \nu^s e^{-\tau\nu} \cos \omega \nu d\nu - \sin \omega T \int_{c+n-T}^{\infty} \nu^s e^{-\tau\nu} \sin \omega \nu d\nu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

Via experimentação numérica, estimamos a fronteira de estabilidade em função de parâmetros convenientes. Observamos dois comportamentos possíveis de $\bar{\gamma}$ quando variamos os parâmetros. Eles serão descritos a seguir separadamente.

Caso 1:

- A figura 4.49 mostra o efeito desestabilizador de δ .

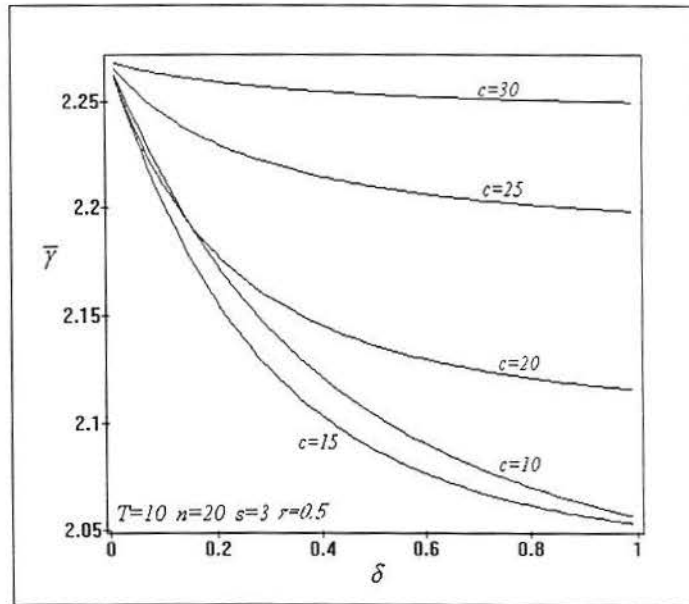


Figura 4.49: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de c .

- Como pode-se verificar nas figuras 4.49 e 4.50, c inicia produzindo um efeito desestabilizador, passando para estabilizador. A partir de uma certa idade, $\bar{\gamma}$ permanece constante em relação a c .
- Quando o tamanho do intervalo de extração é pequeno, n comporta-se como um parâmetro desestabilizador. Depois de um certo ponto, $\bar{\gamma}$ permanece constante em relação a n (figuras 4.51 e 4.52).
- O efeito desestabilizador do retardo reprodutivo T é apresentado na figura 4.53.

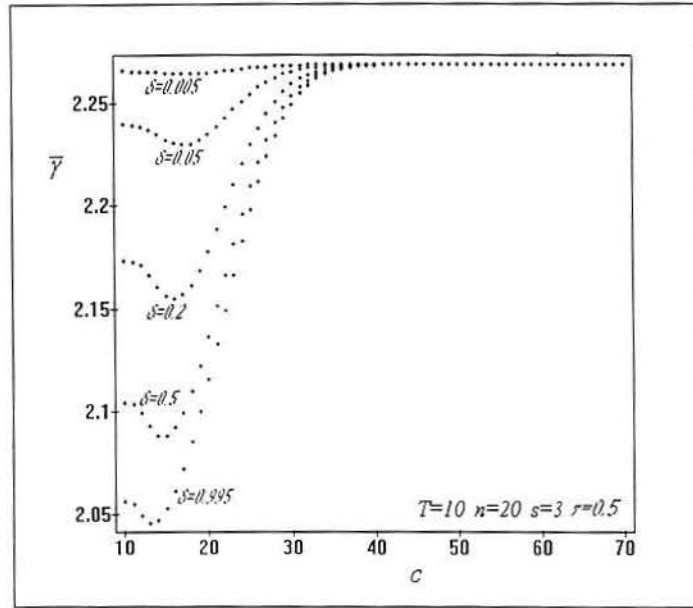


Figura 4.50: Comportamento de \bar{y} em relação a c para diferentes valores de δ .

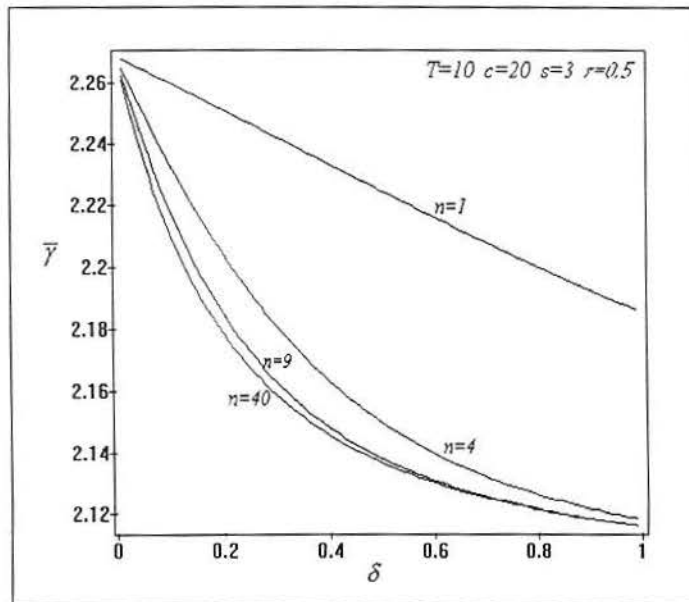


Figura 4.51: Comportamento de \bar{y} em relação a δ para diferentes valores de n .

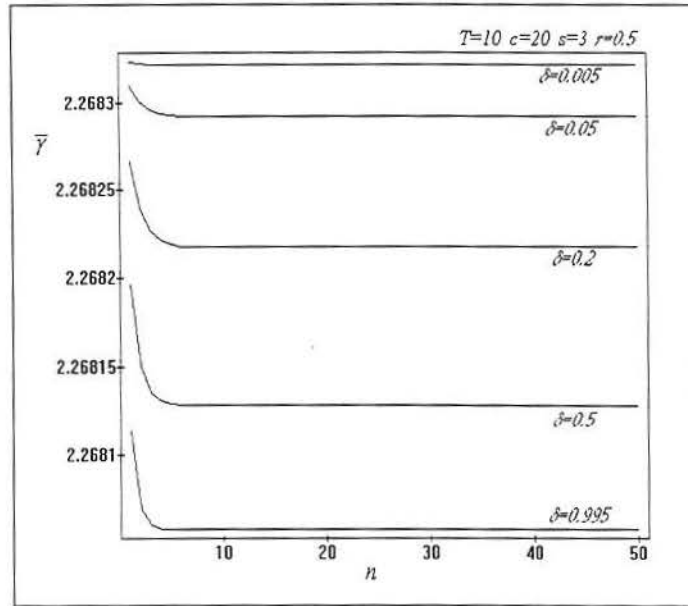


Figura 4.52: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para diferentes valores de δ .

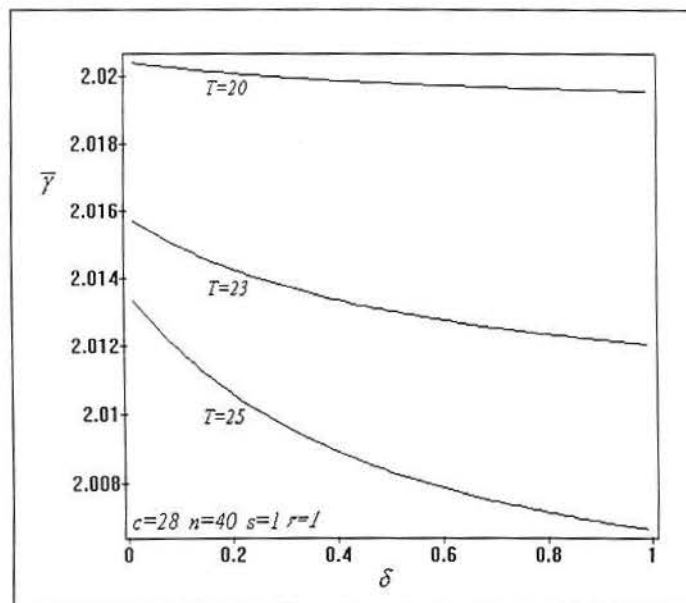


Figura 4.53: Efeito desestabilizador de T .

Caso 2:

- Neste caso, a fronteira $\bar{\gamma}$ apresenta-se inicialmente crescente passando a decair em relação a δ (figuras 4.54, 4.56 e 4.58), a partir de um ponto máximo. A figura 4.54 mostra que este máximo ocorre em valores menores de $\bar{\gamma}$ e δ quando tomamos valores maiores de c , introduzindo a possibilidade de $\bar{\gamma}$ ser estritamente decrescente em relação a δ , como no Caso 1 (figura 4.54: $c = 75$ e $c = 95$). Este máximo também é sensível ao crescimento de n como podemos observar na figura 4.56.
- O efeito de c na fronteira da estabilidade é semelhante ao do Caso 1 e está ilustrado na figura 4.55.
- O tamanho do intervalo de extração é inicialmente estabilizador passando a desestabilizador e, a partir de um certo valor de n , este parâmetro não influencia significativamente na região de estabilidade (figura 4.57).
- O retardo reprodutivo apresenta-se ora como estabilizador, ora como desestabilizador, dependendo de δ (figura 4.58). Observe na figura 4.58 que o valor máximo de $\bar{\gamma}$ vai decaindo com o crescimento de T e também passa a ocorrer em valores maiores de δ .

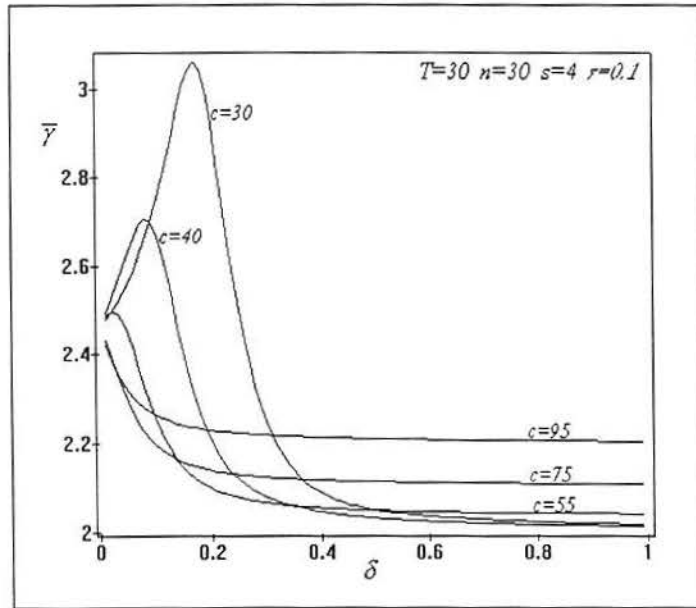


Figura 4.54: Comportamento de \bar{y} em relação a δ para diferentes valores de c .

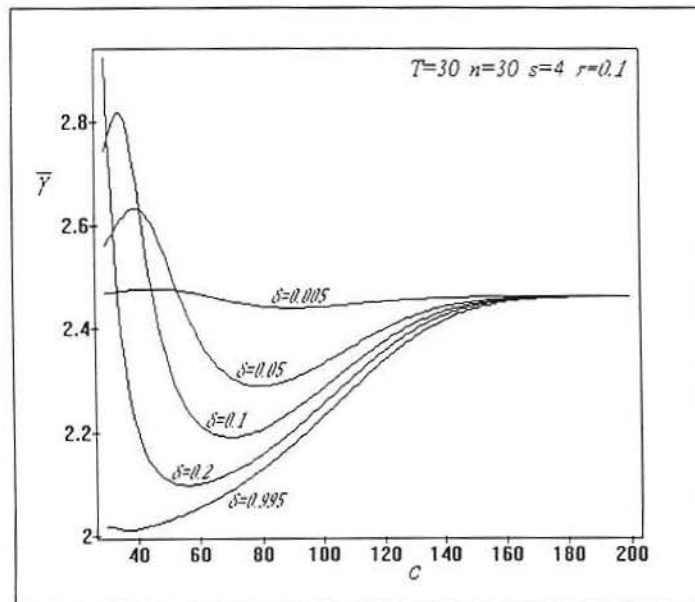


Figura 4.55: Comportamento de \bar{y} em relação a c para diferentes valores de δ .

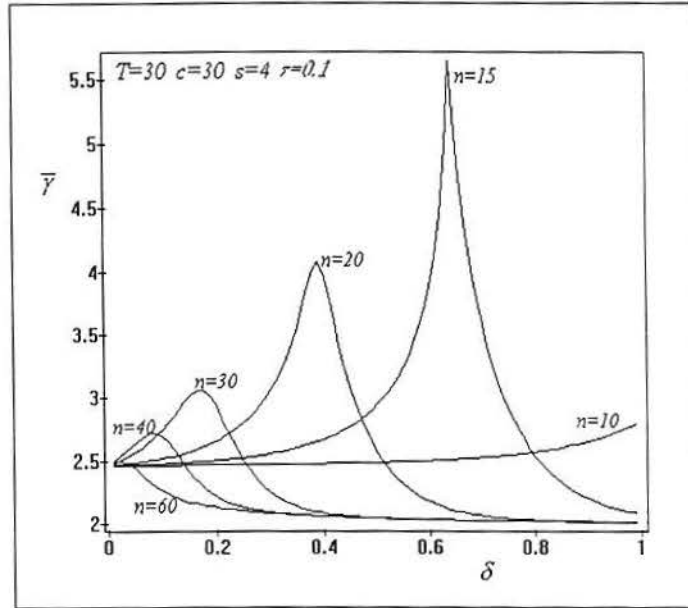


Figura 4.56: Comportamento de \bar{y} em relação a δ para diferentes valores de n .

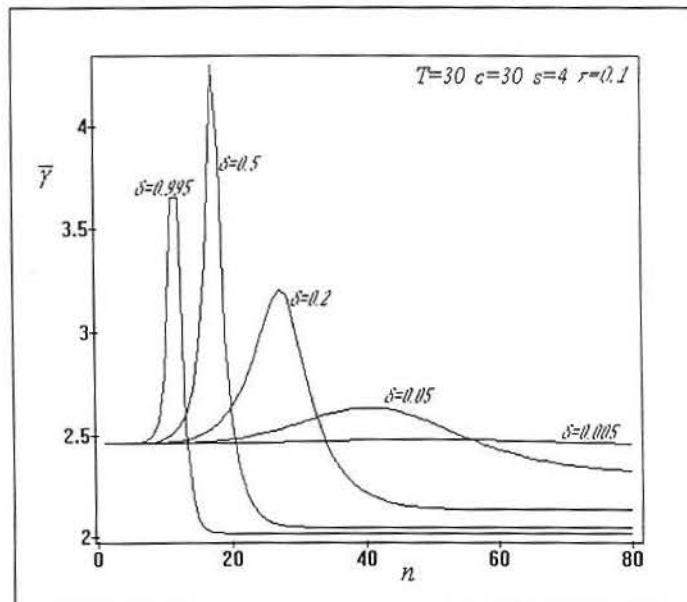


Figura 4.57: Comportamento de \bar{y} em relação a n para diferentes valores de δ .

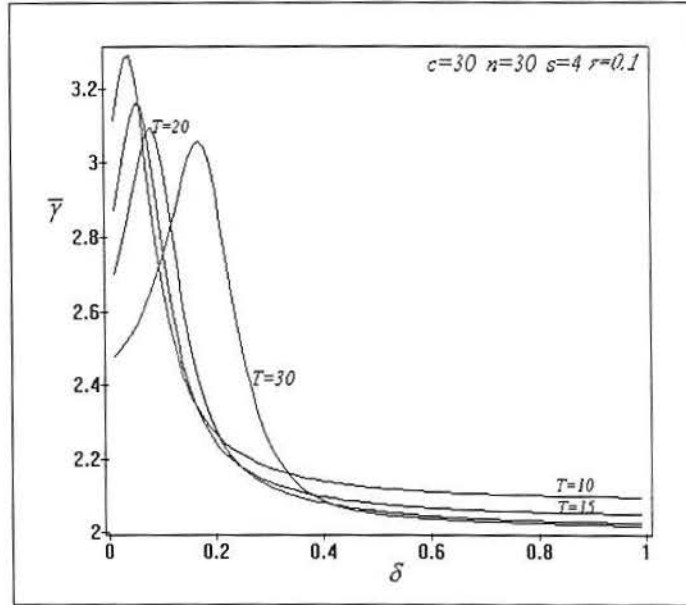


Figura 4.58: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para diferentes valores de T .

Como na seção 4.4.2, vamos considerar o caso particular da maternidade gamma deslocada onde $s = 0$. A função maternidade, neste caso, é descrita na equação 4.4.25. A taxa reprodutiva básica é $R_0 = a \tau e^{\tau T} C_0$, onde

$$C_0 = \frac{e^{-\tau T} - e^{-\tau c}}{\tau} + \frac{e^{\delta c}}{\delta + \tau} \left[e^{-(\delta + \tau)c} - e^{-(\delta + \tau)(c+n)} \right] + \frac{e^{\delta n}}{\tau} e^{-\tau(c+n)} \quad (4.5.19)$$

e a maternidade normalizada é

$$m(x) = \frac{1}{C_0} \begin{cases} e^{-\tau x} & \text{se } T \leq x < c \\ e^{-\tau x} e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c \leq x \leq c+n \\ e^{-\tau x} e^{-\delta n} & \text{se } x > c+n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5.20)$$

Quando a estabilidade é perdida, obtemos a equação para ω

$$e^{-\tau T} \frac{\tau \sin \omega T + \omega \cos \omega T}{\tau^2 + \omega^2} + e^{-\tau c} \frac{(\delta + \tau) \sin \omega c + \omega \cos \omega c}{(\delta + \tau)^2 + \omega^2} + e^{-\tau c} e^{-(\delta + \tau)n} \frac{\tau \sin \omega(c+n) + \omega \cos \omega(c+n)}{\tau^2 + \omega^2} =$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\tau c} \frac{\tau \sin \omega c + \omega \cos \omega c}{\tau^2 + \omega^2} + \\
& e^{-\tau c} e^{-(\delta+\tau)n} \frac{(\delta + \tau) \sin \omega(c + n) + \omega \cos \omega(c + n)}{(\delta + \tau)^2 + \omega^2}
\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

e a equação para a fronteira $\bar{\gamma}$

$$\bar{\gamma} = 1 - \frac{C_0}{K_0} \tag{4.5.22}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_0 &= e^{-\tau T} \frac{\tau \cos \omega T - \omega \sin \omega T}{\tau^2 + \omega^2} - e^{-\tau c} \frac{\tau \cos \omega c - \omega \sin \omega c}{\tau^2 + \omega^2} \\
&+ e^{-\tau c} \frac{(\delta + \tau) \cos \omega c - \omega \sin \omega c}{(\delta + \tau)^2 + \omega^2} \\
&- e^{-\tau c} e^{-(\delta+\tau)n} \frac{(\delta + \tau) \cos \omega(c + n) - \omega \sin \omega(c + n)}{(\delta + \tau)^2 + \omega^2} \\
&+ e^{-\tau c} e^{-(\delta+\tau)n} \frac{\tau \cos \omega(c + n) - \omega \sin \omega(c + n)}{\tau^2 + \omega^2}.
\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

A partir dos resultados obtidos, observamos:

- O parâmetro δ apresenta-se como desestabilizador na maioria dos casos (figura 4.59), exceto para alguns valores de c (figura 4.60: $c = 40$).
- A região de estabilidade $(0, \bar{\gamma})$ é inicialmente crescente em relação a c , passando por uma região de transição e tornando-se praticamente constante a partir de um certo ponto (figura 4.61).
- O tamanho do intervalo de extração. n , é um parâmetro inicialmente desestabilizador mas que não apresenta efeito sobre $\bar{\gamma}$ para valores maiores de n (figuras 4.62 e 4.63).

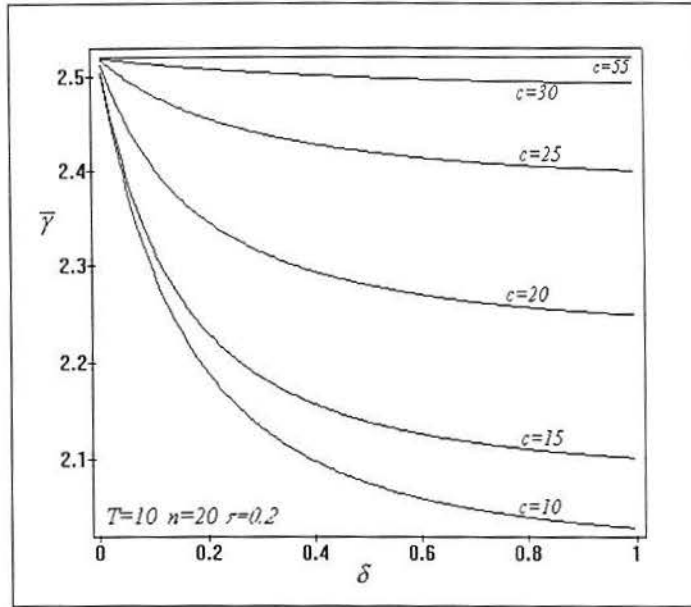


Figura 4.59: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .

- O efeito desestabilizador de T é apresentado na figura 4.64.

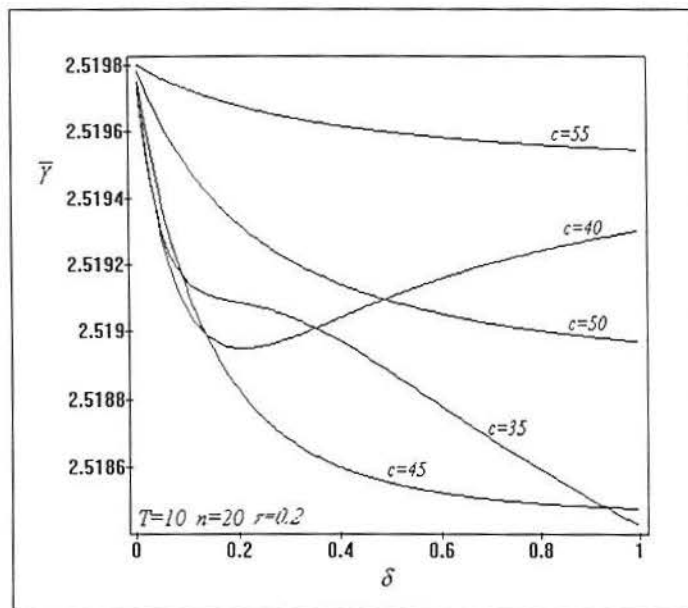


Figura 4.60: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de c .

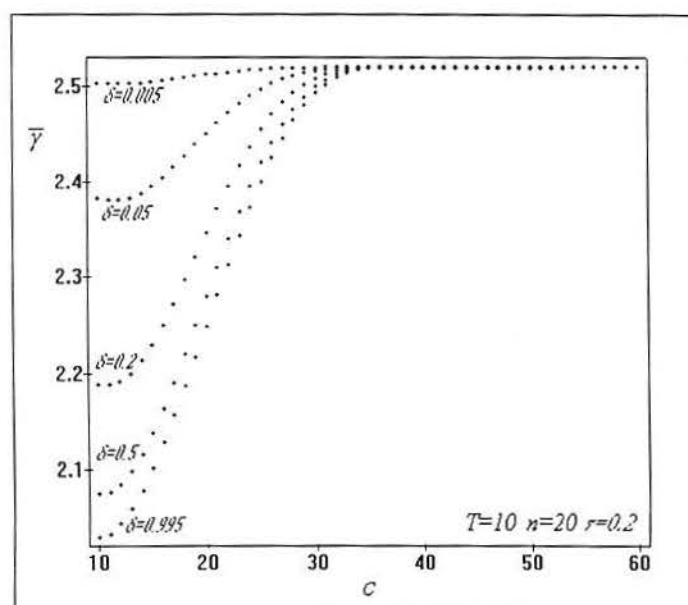


Figura 4.61: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a c para valores diferentes de δ .

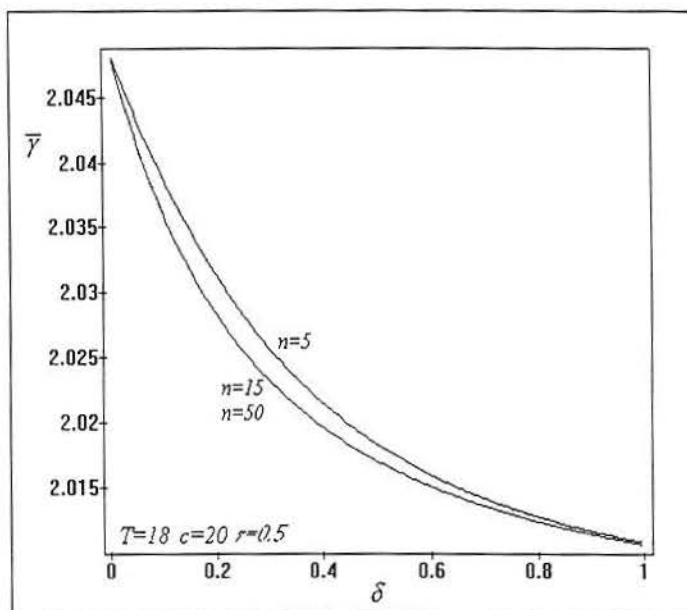


Figura 4.62: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a δ para valores diferentes de n .

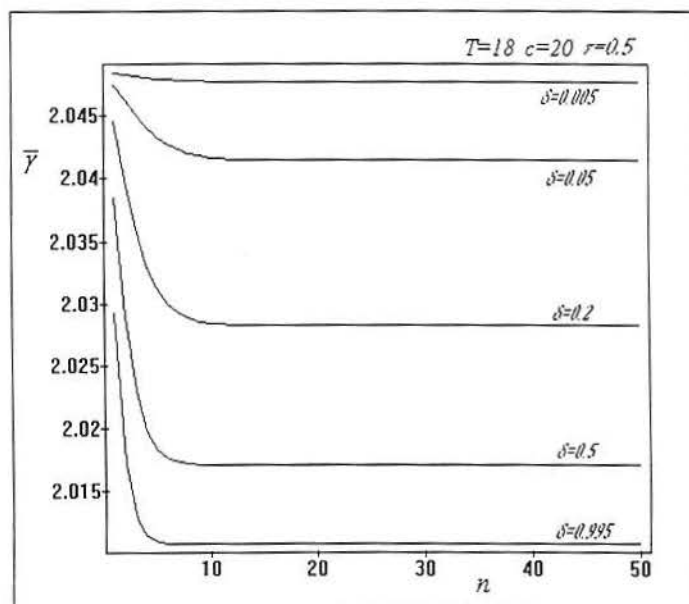


Figura 4.63: Comportamento de $\bar{\gamma}$ em relação a n para valores diferentes de δ .

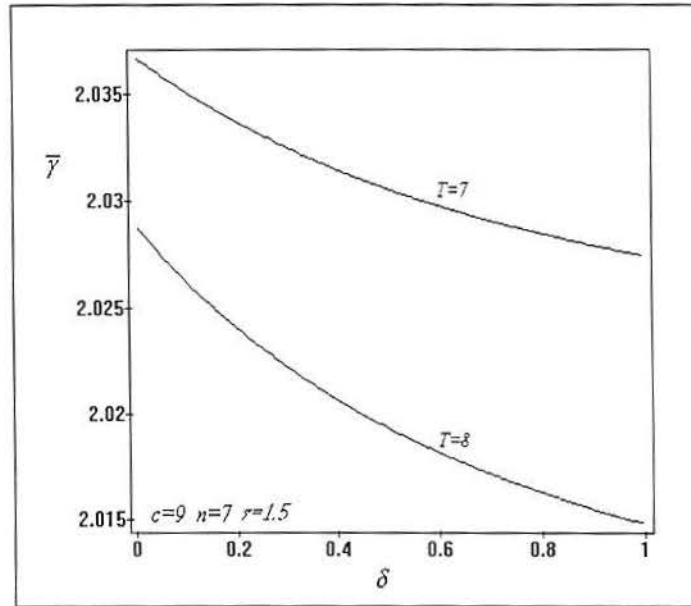


Figura 4.64: Efeito desestabilizador de T .

Agora, vamos considerar o caso particular em que $s = 0$ e $T = 0$ cuja função maternidade é dada na equação 4.4.31. Também obtemos $R_0 = a C_0$ onde

$$C_0 = 1 - e^{-\tau c} + \frac{\tau e^{\delta c}}{\delta + \tau} \left[e^{-(\delta+\tau)c} - e^{-(\delta+\tau)(c+n)} \right] + e^{-\delta n} e^{-\tau(c+n)} \quad (4.5.24)$$

e

$$m(x) = \frac{\tau}{C_0} \begin{cases} e^{-\tau x} & \text{se } 0 \leq x < c \\ e^{-\tau x} e^{-\delta(x-c)} & \text{se } c \leq x \leq c+n \\ e^{-\tau x} e^{-\delta n} & \text{se } x > c+n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5.25)$$

Quando a estabilidade é perdida, obtemos

$$\begin{aligned} (\delta^2 \tau + \delta \tau^2 - \delta \omega^2) \left[\sin \omega c - e^{-(\delta+\tau)n} \sin \omega(c+n) \right] + \\ (\delta^2 + 2\delta \tau) \omega \left[\cos \omega c - e^{-(\delta+\tau)n} \cos \omega(c+n) \right] = e^{\tau c} \omega \left[(\delta + \tau)^2 + \omega^2 \right] \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

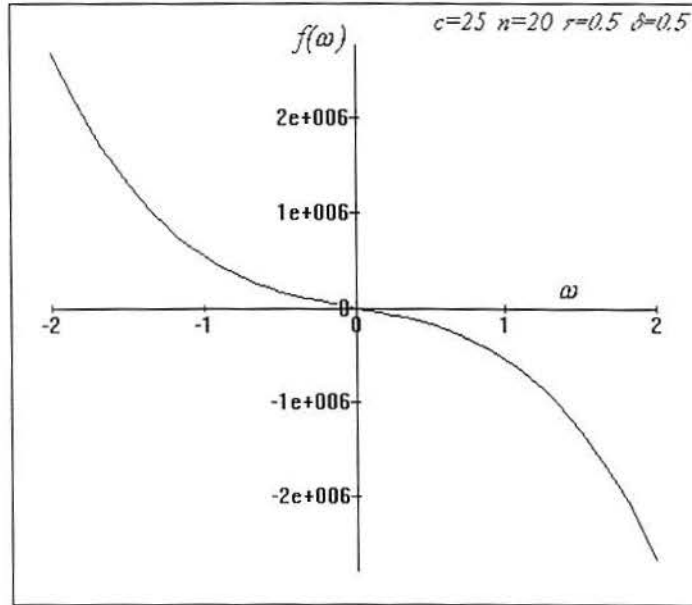


Figura 4.65: $f(\omega)$ apresenta um única raiz $\omega = 0$.

da parte imaginária da equação característica. Esta equação só é satisfeita quando $\omega = 0$. Se reescrevemos 4.5.26 como $f(\omega) = 0$ tal que

$$\begin{aligned}
 f(\omega) = & (\delta^2\tau + \delta\tau^2 - \delta\omega^2) [\sin \omega c - e^{-(\delta+\tau)n} \sin \omega(c+n)] \\
 & + (\delta^2 + 2\delta\tau) \omega [\cos \omega c - e^{-(\delta+\tau)n} \cos \omega(c+n)] - e^{\tau c} \omega [(\delta + \tau)^2 + \omega^2],
 \end{aligned}
 \tag{4.5.27}$$

a figura 4.65 ilustra o gráfico típico de $f(\omega)$ que possui uma única raiz em $\omega = 0$.

5 CONCLUSÕES

O primeiro resultado importante do capítulo 4 foi que independente da estratégia de extração utilizada e do perfil reprodutivo considerado, sempre que desprezamos o período juvenil ($T = 0$), temos que a equação para a frequência apresenta como única solução $\omega = 0$.

Foram observados três parâmetros da extração: a fração de indivíduos removidos (δ), a idade na qual inicia o intervalo de extração (c), presente nas estratégias de extração 2 e 3, e o tamanho do intervalo de extração, n , introduzido na Extração 3.

A fração de indivíduos removidos, δ , comporta-se essencialmente como um parâmetro desestabilizador para a maioria dos valores de δ , ou seja, o aumento da fração de indivíduos removidos produz a redução da região de estabilidade, exceto em dois casos que apresentamos a seguir. O primeiro caso ocorre quando consideramos a maternidade constante no intervalo $[T, k]$ para as três estratégias de extração onde δ comporta-se inicialmente como estabilizador, passando a desestabilizador quando $\bar{\gamma}$ atinge um valor máximo em relação a δ . O ponto de máximo de $\bar{\gamma}$ mostrou-se sensível a posição do intervalo reprodutivo, movendo-se para valores menores de δ quando $[T, k]$ move-se para valores maiores da idade e este deslocamento produziu efeito desestabilizador. Além disso, para valores de k suficientemente maiores que

os de T , temos inicialmente um comportamento oscilatório de $\bar{\gamma}$ em relação a δ mas, a partir de um certo δ , $\bar{\gamma}$ torna-se decrescente. Um outro caso no qual a fronteira da estabilidade é crescente até atingir um ponto de máximo e passar a decair é observado na seção 4.5.2: Caso 2. Nestes dois casos, se a fração de indivíduos removidos for suficientemente pequena, a região de estabilidade cresce em função deste parâmetro. Mas, a partir de um certo δ , a região de estabilidade passa a decrescer em relação a δ .

O efeito da idade c na região de estabilidade depende do perfil reprodutivo considerado. Para a maternidade constante (Extração 2 e 3), este efeito está associado aos valores de δ utilizados. O parâmetro c comportou-se como desestabilizador para valores iniciais de δ , ou seja, se a extração iniciar em indivíduos mais velhos, a região de estabilidade tende a diminuir. Para os valores de δ na seqüência, temos uma região de transição na qual c é ora estabilizador, ora desestabilizador. E, para valores mais elevados de δ , c comportou-se como estabilizador, ou seja, o crescimento da região de estabilidade pode ser obtido com o aumento da idade inicial de extração.

Já para a maternidade gamma deslocada, tanto na Extração 2 quanto na Extração 3, temos a influência de c independente de δ . Observamos que a região de estabilidade começa decrescente em relação a c , até um ponto mínimo a partir do qual passa a crescer; $\bar{\gamma}$ permanece crescente até um certo valor onde torna-se

constante em relação a c . Portanto, se inicia-se a extração em indivíduos mais jovens, a região de estabilidade tende a diminuir. No entanto, a partir de uma certa idade c , a fronteira $\bar{\gamma}$ tende a aumentar com c e, quando inicia-se a extração em indivíduos de idade elevada, c não influencia significativamente na região de estabilidade.

O efeito do tamanho do intervalo de extração, n , também é sensível ao perfil reprodutivo escolhido. Para a maternidade constante (Extração 3), o comportamento de n está relacionado aos valores de δ . Para valores extremamente pequenos de δ , n é estabilizador, isto é, se a fração de indivíduos removidos for consideravelmente pequena, temos um acréscimo na região de estabilidade em função do tamanho do intervalo de extração. Na seqüência, para valores ainda pequenos de δ , aparece uma região onde n é ora estabilizador, ora desestabilizador. Mas para valores mais elevados de n , $\bar{\gamma}$ cresce em função de n até um certo valor, a partir do qual decai bruscamente e, finalmente, mantém-se constante em relação a n . Este último comportamento descrito ocorre na maior parte dos valores de δ .

Para a maternidade gamma deslocada (Extração 3), n comportou-se inicialmente desestabilizador passando a não exercer efeito sobre $\bar{\gamma}$ a partir de certo n , exceto para o Caso 2 da seção 4.5.2 onde comportou-se como estabilizador para os valores iniciais de n . Em outras palavras, se o intervalo de extração for pequeno, o

crescimento de n geralmente implica na queda da região de estabilidade, ao passo que se o intervalo de de extração for maior, n não influencia na estabilidade.

O retardo reprodutivo T produziu um efeito desestabilizador na maioria dos casos estudados. No Caso 2 da seção 4.5.2 este parâmetro comportou-se tanto como estabilizador como desestabilizador dependendo do valor de δ . Neste caso, o máximo de $\bar{\gamma}$ decai com o aumento de T e ocorre em valores menores de δ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] BEGON, M., MORTIMER, M. *Population Ecology. A Unified Study of Animals and Plants*, Blackwell Scientific Publications, Oxford (1986).
- [2] BERGH, M. O., GETZ, W. M. Stability of discrete age structured and aggregated delay-difference populations models. *J. Math. Biol.*, **26**, 555-587 (1988).
- [3] BEVERTON, R. J. A., HOLT, S. J. On the dynamics of exploited fish populations. *Fish. Invest. Minist. Agric. Fish. Food (U. K.) Ser II*, **19**, 1-533 (1957).
- [4] BOTSFORD, L. W., WICKHAM, D. E. Behavior of age-specific, density-dependent models and the northern California Dungeness crab (*Cancer magister*) fishery. *J. Fish. Res. Board Can.*, **35**, 833-843 (1978).
- [5] CUSHING, J. M. Model stability and instability in age structured populations. *J. Theor. Biol.*, **86**, 709-730 (1980).
- [6] DE ANGELIS, D. L., VAN WINKLE, W., CHRISTERSEN, S. W., BLUM, S. R., KIRK, B. L., RUST, B. W., ROSS, C.

A generalized fish life-cycle population and computer program. ORLN/TM-6125, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn (1978).

- [7] DE ANGELIS, D. L., SLOBODA, L. J., CHRISTERSEN, S. W., VAUGHAN, D. J. Stability and return times of Leslie matrices with density-dependent survival: application to fish populations. *Ecol. Modelling*, **8**, 149-163 (1980).
- [8] DIEKMAN, O., HEIJMANS, J. A. M. Nonlinear dynamical systems: worked examples, perspectives and open problems. In: *The Dynamics of Physiologically Structured Population*. Metz, J. A. J., Diekman, O., eds., Lecture Notes in Biomathematics, vol. 68, Springer-Verlag, New York (1986).
- [9] FRAUENTHAL, J. C. A dynamic model for human population growth. *Theor. Pop. Biol.*, **8**, 64-73 (1975).
- [10] FRAUENTHAL, J. C. Analysis of age-structure models. In: *Mathematical Ecology. An Introduction*. Hallam, F., Levin, S. A., eds., Biomathematics, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, pp.117-147 (1986).
- [11] HASSEL, M. P. Density-dependence in single-species populations. *J. Anim. Ecol.*, **44**, 283-295 (1975).

- [12] HASSEL, M. P., LAWTON, J. H., MAY, R. M. Patterns of dynamical behavior in single species population. *J. Anim. Ecol.*, **45**, 471-486 (1976).
- [13] HORWOOD, J. W., SHEPHERD, J. G. The sensitivity of age-structured populations to environmental variability. *Math. Biosci.*, **57**, 59-82 (1981).
- [14] JIAN, S., JINGYUAN, Y. *Population System Control*, Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [15] LEVIN, S. A., GOODYEAR, C. P. Analysis of an age-structured fishery model. *J. Math. Biol.*, **9**, 245-274 (1980).
- [16] LEVIN, S. A. Age-structure and stability in multiple-age spawning populations. In: *Renewable Resource Management*. Vicent, T. L., Skowronski, J. M., eds., Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [17] MAY, R. M., BEDDINTON, J. R., HORWOOD, J. W., SHEPHERD, J. G. Exploiting natural populations in an uncertain world. *Math. Biosci.*, **42**, 219-252 (1978).
- [18] McNAIR, J. N. Stability effects of a juvenile period in age-structured populations. *J. Theor. Biol.*, **137**, 397-422 (1989).

- [19] NISBET, R. M., GURNAY, W. S. C. The formulation of age-structure models. In: *Mathematical Ecology. An Introduction*. Hallam, F., Levin, S. A., eds., Biomathematics, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, pp.95-115 (1986).
- [20] PELLA, J. J., TOMLINSON, P. K. A generalized stock production model . *InterAmer. Trop. Tuna Comm. Bull.*, **13**, 421-496 (1969).
- [21] REED, W. S. Optimum age-specific harvesting in a nonlinear population model. *Biometrics*, **36**, 579-593 (1980).
- [22] RICCIARDI, L. M. Stochastic population theory: birth and death processes. In: *Mathematical Ecology. An Introduction*. Hallam, F., Levin, S. A., eds., Biomathematics, vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, pp.155-238 (1986).
- [23] RICKER, W. E. Stock and recruitment. *J. Fish. Res. Board Can.*, **11**, 559-623 (1954).
- [24] RORRES, C. Stability of an age specific population with density dependent fertility, *Theor. Pop. Biol.*, **10**, 26-46 (1976).
- [25] RORRES, C. Local stability of a population with density-dependent fertility, *Theor. Pop. Biol.*, **16**, 283-300 (1979).

- [26] SÁNCHEZ, D. A. Linear age-dependent population growth with harvesting. *Bull. Math. Biol.*, **40**, 377-385 (1978).
- [27] SÁNCHEZ, D. A. Linear age-dependent population growth with seasonal harvesting. *J. Math. Biol.*, **9**, 361-368 (1980).
- [28] SILVA, J. A. L., HALLAM, T. G. Compensation and stability in nonlinear matrix models. *Math. Biosci.*, **110**, 67-101 (1992).
- [29] SILVA, J. A. L. Reproductive schedules in a density-dependent recruitment model. *Math. Biosci.*, **144**, 1-22 (1997).
- [30] USHER, M. B. Developments in the Leslie matrix model. In: *Mathematical Models in Ecology*. Jeffers, N. R., eds., Blackwell, Oxford, pp. 29-60 (1972).
- [31] VAN WINKLE, W., RUST, B. W., GOODYEAR, C. P., THALL, P. A striped bass population model and computer programs. ORNL/TM-4578, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn. (1974).
- [32] VENCE, R. R., NEWMAN, W. I., SULSKY, D. The demographic meanings of the classical population growth models of ecology. *Theor. Pop. Biol.*, **33**, 199-225 (1988).

- [33] WIDDER, D. V. *The Laplace Transform*. Princeton University Press, Princeton (1941).
- [34] ZAUDERER, E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, New York (1989).