

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ANÁLISE ESPECTRAL ATRAVÉS DE CRUZAMENTOS DE
ORDEM SUPERIOR

por

DILSON HENRIQUE RAMOS EVANGELISTA

Porto Alegre, agosto de 2000

Dissertação submetida por DILSON HENRIQUE RAMOS EVANGELISTA* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dra. Sílvia Regina Costa Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Artur Oscar Lopes

Dra. Sara Ianda Corrêa Carmona

Dr. Francisco Cribari Neto

Data de Defesa: 30 de agosto de 2000.

* Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

AGRADECIMENTOS

à professora Sílvia Lopes pela orientação e pelo apoio no desenvolvimento e na conclusão deste trabalho;

aos Professores do Curso de Pós-Graduação em Matemática de UFRGS pela disponibilidade e atenção ;

às amigas Flávia e Lisandra pelo apoio, incentivo e valiosa amizade;

à Bárbara, Daniela e Simone Cerezer pela atenção e auxílio;

à Simone Cruz e aos colegas da Pós-Graduação , pela importante troca de informações e pela convivência agradável;

à Valéria, Rosane e aos bolsistas da do Laboratório Computacional de Pesquisas em Matemática pela ajuda e amizade;

à minha noiva, Cristiane, pelo carinho e pela compreensão ;

ao meu pai, Jandir, e à minha mãe, Noeci, pela dedicação e carinho ao longo de todos esses anos;

aos meus irmãos, Dilce, Daniel, Daniele e Leandro, que mesmo distantes, sempre torceram para que este trabalho fosse realizado;

ao meu tio Claudeci, à minha tia, Regina, e aos meus primos, pelo acolhimento e amizade. Tia obrigada por tudo, sem sua ajuda e incentivo a realização desse trabalho seria quase impossível;

à Casa de Estudantes Juventude Universitária Católica - JUC 7 - pela sua importante função social e por ter propiciado bons momentos e o surgimento de grandes amizades;

a Deus pela vida.

RESUMO

Muitas vezes, é de interesse na análise de séries temporais verificar se existe periodicidade numa série dada. Para isso é empregada a análise espectral clássica, utilizando a função densidade espectral e a função periodograma.

O objetivo desse trabalho é fornecer uma análise espectral alternativa baseada em cruzamentos de ordem superior, ou HOC. Enunciamos um teorema que mostra a relação entre análise espectral clássica e análise espectral utilizando cruzamento de ordem superior.

ABSTRACT

In the analysis of time series, it is often interesting to seek for periodicities in a given series, where the classical spectral analysis is used through the spectral density and periodogram functions .

The goal of this work is to supply an alternative spectral analysis technique based on Higher Order Crossings or HOC. A theorem showing the relationship between classical spectral analysis and Higher Order Crossings is given.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. CONCEITOS BÁSICOS	2
3. ANÁLISE ESPECTRAL CLÁSSICA	8
4. CRUZAMENTOS DE ORDEM SUPERIOR	19
4.1. AUTOREGRESSIVO DE SEGUNDA ORDEM	51
5. APLICAÇÕES	55
5.1. SÉRIE TEMPORAL DAS MANCHAS SOLARES . . .	55
5.2. SÉRIE TEMPORAL DOS NÍVEIS DE ÁGUA NA BACIA DO RIO PARANÁ	58
6. CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	63
7. BIBLIOGRAFIA	65
8. APÊNDICE	67

1. INTRODUÇÃO

Uma série temporal é uma coleção de observações numéricas organizadas em ordem natural. Cada observação é associada a um instante particular de tempo ou intervalo de tempo; são estes instantes ou intervalos de tempo que fornecem a ordenação. As observações são ordenadas por uma variável simples, que nós vamos chamar convencionalmente de tempo.

A análise de séries temporais pode ser feita no domínio do tempo ou no domínio da frequência. No domínio da frequência temos a análise espectral, que tem inúmeras aplicações em engenharia, meteorologia, economia, hidrologia, etc. Uma dessas aplicações, por exemplo, é no problema de assinaturas, que consiste em monitorar um equipamento mecânico para obter informações sobre o funcionamento da máquina. Esse monitoramento é feito por um dispositivo eletrônico que registra ao longo do tempo a vibração da máquina como um sinal oscilando, que pode ser classificado como: estar funcionando corretamente ou não estar funcionando corretamente.

O objetivo desse trabalho é descrever uma análise espectral alternativa usando o Cruzamentos de Ordem Superior, ou HOC Kedem (1986), e para isso vamos comparar a Análise Espectral de Cruzamentos de Ordem Superior com a Análise Espectral Clássica.

No segundo capítulo apresentamos alguns conceitos básicos de séries temporais e de processos estocásticos. No terceiro capítulo apresentamos definições de análise espectral clássica, que serão utilizadas para fazer a comparação com a análise espectral de Cruzamentos de Ordem Superior. No quarto capítulo definimos Cruzamentos de Ordem Superior (D_k) (ver Definição 4.2) e apresentamos lemas e teoremas que nos fornecem uma base para realizar a análise espectral através de Cruzamentos de Ordem Superior. Na seção 4.1. apresentamos um exemplo teórico onde é mostrado que se temos igualdades entre sucessivos $IE(D_k)$, então o processo estocástico é uma senóide pura (ver Teorema 4.1). No quinto capítulo, utilizamos a análise espectral através de Cruzamentos de Ordem Superior nas séries temporais das Manchas Solares e na dos Níveis de Água da Bacia do Rio Paraná e comparamos com os resultados obtidos fazendo uso da Análise Espectral Clássica. Finalmente, no sexto capítulo apresentamos a conclusão final dos resultados obtidos e sugestões para futuros trabalhos.

2. CONCEITOS BÁSICOS

Apresentamos, neste capítulo, alguns conceitos fundamentais que são necessários à compreensão de modelos em séries temporais discutidos neste trabalho. Começamos com uma introdução de processos estocásticos apresentando a sua média, variância e as funções de autocovariância e autocorrelação. As funções de autocovariância e autocorrelação fornecem informações sobre a estrutura de dependência do processo estocástico.

DEFINIÇÃO 2.1. *Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t; t \in T\}$ todas elas definidas em um mesmo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, onde Ω é o espaço amostral, \mathcal{A} é uma σ -álgebra, \mathbb{P} é uma medida de probabilidade e $T \neq \emptyset$ é um conjunto de índices.*

Neste trabalho vamos considerar, na maioria das vezes, o conjunto de índices T como sendo o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} .

DEFINIÇÃO 2.2. *Para um processo estocástico $\{X_t; t \in T\}$ a média do processo, se existir, é definida por*

$$\mathbb{E}(X_t) = \mu_t, \quad t \in T;$$

a **variância** do processo, se existir, é dada por

$$\sigma_t^2 = \mathbb{E}(X_t - \mu_t)^2, \quad t \in T;$$

a **função de autocovariância** entre quaisquer duas variáveis aleatórias X_s e X_t é dada por

$$\gamma_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)], \quad s, t \in T,$$

e a **função de autocorrelação** entre quaisquer duas variáveis aleatórias X_s e X_t é dada por

$$\rho_X(s, t) = \frac{\gamma_X(s, t)}{\sqrt{\sigma_s^2 \sigma_t^2}}, \quad s, t \in T.$$

DEFINIÇÃO 2.3. A função de distribuição n-dimensional das variáveis aleatórias $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})'$ é definida por

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e para todo $t_1, \dots, t_n \in T$, onde $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})'$ indica o vetor $1 \times n$ cujas componentes são X_{t_i} , $1 \leq i \leq n$.

DEFINIÇÃO 2.4. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ é dito ser **fortemente estacionário** se as funções distribuições conjuntas de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})'$ e $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_k+h})'$ são as mesmas, qualquer que seja k um inteiro positivo e quaisquer que sejam $t_1, t_1+h, t_2, t_2+h, \dots, t_k, t_k+h, h \in T$.

Neste trabalho, analisamos processos estocásticos que satisfazem condições de estacionariedade fraca definida a seguir.

DEFINIÇÃO 2.5. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ é dito ser **fracamente estacionário** se

- i) $\mathbb{E}(X_t) = \mu$, uma constante independente de $t \in T$,
- ii) $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$, para todo $t \in T$,
- iii) $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r+t, s+t)$, independe de t para quaisquer $r, s, t \in T$.

Vamos suprimir a palavra 'fracamente' e chamaremos somente *processos estocásticos estacionários* aos processos estocásticos $\{X_t\}_{t \in T}$ que satisfazem as três condições na Definição 2.5.

Para processos estacionários, a média $\mu_t = \mu$ é constante e, conseqüentemente, $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Igualmente, se $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ então $\sigma_t^2 = \sigma^2$, para todo $t \in T$, isto é, a variância do processo é constante.

Podemos observar que para processos estacionários fracos, temos que

$$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + h, s + h), \text{ para quaisquer } r, s, h \in T$$

e

$$\rho_X(r, s) = \rho_X(r + h, s + h), \text{ para quaisquer } r, s, h, \in T.$$

Considerando $r = t - h$ e $s = t$ temos,

$$\gamma_X(r, s) = \gamma_X(t - h, t) = \gamma_X(t, t + h) \equiv \gamma_X(h) \quad (2.1)$$

e

$$\rho_X(r, s) = \rho_X(t - h, t) = \rho_X(t, t + h) \equiv \rho_X(h). \quad (2.2)$$

Então, para um processo estacionário com os dois primeiros momentos finitos, as funções de autocovariância e de autocorrelação entre X_t e X_{t+h} dependem somente da diferença $h \in T$.

É bom lembrar que para um processo estacionário $\{X_t\}_{t \in T}$ a função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ apresenta as seguintes propriedades:

- i) $\gamma_X(0) = Var(X_t)$, para todo t .
- ii) $|\gamma_X(h)| \leq \gamma_X(0)$, para todo $h \in \mathcal{N}$.
- iii) $\gamma_X(h)$ é definida não-negativa no sentido que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_j a_l \gamma_X(h_j - h_l) \geq 0,$$

para qualquer conjunto de pontos $\{h_1, \dots, h_n\} \in T$ e qualquer conjunto de escalares $\{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{R}$.

- iv) $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$, para todo $h \in \mathcal{N}$.

E a função de autocorrelação $\rho_X(\cdot)$ do processo estacionário $\{X_t\}_{t \in T}$ apresenta as propriedades abaixo:

- i) $\rho_X(0) = 1$
- ii) $\rho_X(h) = \rho_X(-h)$, para todo $h \in \mathcal{N}$
- iii) $|\rho_X(h)| \leq 1$, para todo $h \in \mathcal{N}$.

Pelas propriedades *iv)* da função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ e *ii)* da função de autocorrelação $\rho_X(\cdot)$, temos que $\gamma_X(\cdot)$ e $\rho_X(\cdot)$ são ambas funções simétricas com relação a origem $h = 0$.

DEFINIÇÃO 2.6. Um processo de variáveis aleatórias $\{\epsilon_t; t \in T\}$ é dito ser um **processo estocástico ruído branco de média zero** se

$$i) \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0, \text{ para todo } t \in T,$$

$$ii) \gamma_\epsilon(h) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2, & \text{se } h = 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja, sua esperança é zero, sua variância é constante e as variáveis aleatórias deste processo são não correlacionadas.

DEFINIÇÃO 2.7. O processo $\{X_t\}_{t \in T}$ é um **processo Gaussiano** se e somente se as funções de distribuição n -dimensional de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})'$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e para todo $t_1, \dots, t_n \in T$, são todas normais multivariadas.

Existe um importante caso no qual estacionariedade implica estacionariedade forte. Se o processo $\{X_t\}_{t \in T}$ é um processo estacionário Gaussiano, então pode-se mostrar que $\{X_t\}_{t \in T}$ é fortemente estacionário. Os processos estocásticos tratados neste trabalho possuem a propriedade de ergodicidade, isto é, as médias temporais convergem para as médias espaciais (ver Durrett (1996) e Karlin e Taylor (1975)).

É necessário lembrar que um processo estacionário é caracterizado por sua média μ , variância σ^2 , funções de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ e de autocorrelação $\rho_X(\cdot)$. A seguir definiremos os estimadores naturais, ou seja, os estimadores obtidos pelo método dos momentos para os parâmetros

$$i) \mu = \mathbb{E}(X_t),$$

$$ii) \sigma^2 = \text{Var}(X_t)$$

$$iii) \gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

$$iv) \rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)},$$

através de N observações X_1, X_2, \dots, X_N de um processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in T}$. Esta seqüência $\{X_t\}_{t=1}^N$ é dita *Série Temporal*.

DEFINIÇÃO 2.8. *O estimador para a média μ . Obtido a partir do método dos momentos é a média amostral*

$$\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^N X_t}{N}, \quad (2.3)$$

onde \bar{X} é um estimador não viciado e consistente da média μ , pois $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$ e $Var(\bar{X}) \rightarrow 0$, quando $N \rightarrow \infty$.

DEFINIÇÃO 2.9. *O estimador para a função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$. Obtido a partir do método dos momentos é a função de autocovariância amostral dada por*

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X}) \quad (2.4)$$

ou

$$\tilde{\gamma}_X(h) = \frac{1}{N-h} \sum_{t=1}^{N-h} (X_t - \bar{X})(X_{t+h} - \bar{X}), \quad (2.5)$$

onde \bar{X} é a média amostral.

Em geral, o estimador $\tilde{\gamma}_X(h)$ tem menor vício, apesar de ter maior variância quando comparado com o estimador $\hat{\gamma}_X(h)$. Neste trabalho, utilizamos a função de autocovariância amostral $\hat{\gamma}_X(h)$ dada pela expressão (2.4) acima. O quociente N é preferível ao quociente $N - h$ porque desta forma $\hat{\gamma}_X(h)$ é função definida não negativa, e quando comparamos o erro quadrático médio de ambos os estimadores $\hat{\gamma}_X(h)$ e $\tilde{\gamma}_X(h)$ concluímos que, quando h é pequeno, existe uma pequena diferença entre os dois estimadores e, quando h é grande, o vício de $\hat{\gamma}_X(h)$ é compensado por sua menor variância (ver Priestley (1981)).

Como consequência, da expressão (2.4) derivamos que um estimador para a variância $\sigma^2 = Var(X_t)$ do processo $\{X_t\}_{t \in T}$, pelo método dos momentos, é dado por

$$\hat{\gamma}_X(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2, \quad (2.6)$$

onde \bar{X} é a média amostral.

DEFINIÇÃO 2.10. *O estimador para a função de autocorrelação $\rho_X(\cdot)$, pelo método dos momentos, é a função de autocorrelação amostral de ordem h é dada por*

$$\hat{\rho}_X(h) = \frac{\hat{\gamma}_X(h)}{\hat{\gamma}_X(0)}, \quad \text{para todo } |h| < n, \quad (2.7)$$

onde $\hat{\gamma}_X(h)$ é dado pela expressão (2.4) e $\hat{\gamma}_X(0)$ pela expressão (2.6).

3. ANÁLISE ESPECTRAL CLÁSSICA

Estamos interessados em comparar a Análise Espectral através de Cruzamentos de Ordem Superior, assunto do Capítulo 4 deste trabalho, que se baseia em contar o número de vezes que as observações cruzam o eixo das abcissas, com a Análise Espectral Clássica. Para apresentar esta comparação, precisamos definir a função densidade espectral de um processo estocástico, apresentar suas propriedades e definir a função periodograma.

DEFINIÇÃO 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico estacionário com função de autocovariância de ordem h , dada por $\gamma_X(h)$, absolutamente convergente, isto é, $\sum_{h \in T} |\gamma_X(h)| < \infty$. A função densidade espectral de $\{X_t\}_{t \in T}$ é dada por*

$$\begin{aligned} f_X(w) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma_X(h) e^{-iwh} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_X(0) + 2 \sum_{h=1}^{+\infty} \gamma_X(h) \cos(wh) \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

para todo $w \in [-\pi, \pi]$.

Considerando a Propriedade *iv*) da função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$, dada após a Definição 2.5, e propriedades das funções trigonométricas dadas por

$$\cos(-wh) = \cos(wh) \text{ e } \text{sen}(-wh) = -\text{sen}(wh),$$

observamos que a função densidade espectral $f_X(w)$, dada pela expressão (3.1), tem as seguintes importantes propriedades (ver Wei (1990)):

a) $f_X(w)$ é uma função real contínua não negativa, isto é,

$$|f_X(w)| = f_X(w), \quad \text{para todo } w \in [-\pi, \pi],$$

b) $f_X(w) = f_X(-w)$, $w \in [-\pi, \pi]$,

c) $f_X(w)$ é periódica de período 2π .

A definição a seguir fornece um estimador para a função densidade espectral $f_X(\cdot)$ do processo $\{X_t\}_{t \in T}$.

DEFINIÇÃO 3.2. Para um conjunto de N observações X_1, X_2, \dots, X_N de um processo $\{X_t\}_{t \in T}$ a **função periodograma** é definida por

$$I(w) = 2 \left[\hat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{h=1}^{N-1} \hat{\gamma}_X(h) \cos(wh) \right], \text{ para todo } w \in [-\pi, \pi],$$

onde $\hat{\gamma}_X(h)$ é a função de autocovariância amostral do processo definida pela expressão (2.4) e $\hat{\gamma}_X(0)$ é a variância amostral do processo definida pela expressão (2.6).

A função periodograma $I(\cdot)$ dada na Definição 3.2 é um estimador viciado para a função densidade espectral $f_X(\cdot)$. Considere

$$I^*(w) = \frac{I(w)}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\hat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{h=1}^{N-1} \hat{\gamma}_X(h) \cos(wh) \right], \text{ para todo } w \in [-\pi, \pi].$$

Então, dizemos que $I^*(w)$ é o estimador pelo método dos momentos da função densidade espectral $f_X(w)$. Utilizamos $I^*(w)$ por ser um estimador não viciado da função densidade espectral. Consideramos, daqui por diante, $I^*(w)$ como a *função periodograma*.

Veremos a seguir a definição de um filtro linear e suas propriedades e logo após, alguns tipos de filtros usados neste trabalho. Para maiores detalhes consultar Koopmans (1974).

DEFINIÇÃO 3.3. Um **filtro linear** é uma operação que usa um conjunto de coeficientes fixados e conhecidos ψ_j , $j \in \mathbb{Z}$, para suavizar uma série estacionária de entradas $\{X_t\}_{t \in T}$ produzindo uma série de saída ou série filtrada, $\{Y_t\}_{t \in T}$, dada pela expressão

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j X_{t-j}, \quad (3.2)$$

onde o conjunto dos coeficientes ψ_j é chamado de **função resposta de impulso**.

Um filtro linear possui duas propriedades básicas. Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico estacionário de entrada e $\{Y_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico de saída. Denotamos por \mathcal{L} o filtro linear dado por

$$\mathcal{L}(X_t) = Y_t, \quad t \in T.$$

Observe que o filtro $\mathcal{L}(\cdot)$ preserva escalar e é linear, isto é,

$$\mathcal{L}(\alpha X_t) = \alpha \mathcal{L}(X_t), \quad \text{para todo } \alpha \in \mathcal{C} \text{ e para todo } t \in T$$

e

$$\mathcal{L}(X_t + W_t) = \mathcal{L}(X_t) + \mathcal{L}(W_t), \quad \text{para todo } t \in T.$$

As Proposições 3.1. e 3.2., dadas a seguir, fornecem a relação entre as funções de autocovariâncias e as funções de densidade espectral dos processos estocásticos $\{Y_t\}_{t \in T}$ e $\{X_t\}_{t \in T}$ quando $Y_t = \psi(\mathcal{B})X_t$.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Se $\{X_t\}_{t \in T}$ é um processo estocástico estacionário com função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ e se $\sum_{j \in T} |\psi_j| < \infty$, então para cada $t \in T$ o processo $\psi(\mathcal{B})X_t = \sum_{j \in T} \psi_j X_{t-j}$ converge absolutamente com probabilidade um e em quadrado médio para o mesmo limite.*

Se $Y_t = \psi(\mathcal{B})X_t$, então o processo $\{Y_t\}_{t \in T}$ é estacionário com função de autocovariância dada por

$$\gamma_Y(h) = \sum_{j, l \in T} \psi_j \bar{\psi}_l \gamma_X(h - j + l).$$

Prova: Ver a demonstração desta proposição em Brockwell e Davis (1991), página 84.

PROPOSIÇÃO 3.2. Se o processo estocástico estacionário de entrada $\{X_t\}_{t \in T}$ tem função densidade espectral $f_X(\cdot)$ e

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j X_{t-j}, \text{ onde } \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j| < \infty, \quad (3.3)$$

então o processo estocástico de saída $\{Y_t\}_{t \in T}$ tem função densidade espectral $f_Y(\cdot)$ dada por

$$f_Y(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_j e^{-ij\lambda}|^2 f_X(\lambda) = |\psi(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda), \quad (3.4)$$

para todo $\lambda \in [-\pi, \pi]$, onde $\psi(e^{-i\lambda}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_j e^{-ij\lambda}$.

Prova: Ver a demonstração desta proposição em Brockwell e Davis (1991), página 112.

DEFINIÇÃO 3.4. A função $\psi(e^{-i\cdot})$ é chamada **função transferência do filtro**, denotada por $|H(\cdot)|$ e $|\psi(e^{-i\cdot})|^2$ é chamada **poder da função transferência do filtro** ou **função ganho quadrada do filtro**, denotada por $|H(\cdot)|^2$.

Algumas vezes é importante usar um filtro linear que seja uma combinação de outros filtros lineares, para suavizar uma série temporal de entrada. Apresentamos, a seguir, dois métodos de combinação de filtros lineares que produzem novos filtros lineares.

1) **Combinação de Filtros Lineares:** Se \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são filtros lineares com funções de transferência $H_1(\cdot)$ e $H_2(\cdot)$, respectivamente, ambos combinados com o processo estocástico de entrada $\{X_t\}_{t \in T}$, então a transformação linear $\mathcal{L}_3 = \alpha \mathcal{L}_1 + \beta \mathcal{L}_2$, definida por

$$\mathcal{L}_3(X_t) = \alpha \mathcal{L}_1(X_t) + \beta \mathcal{L}_2(X_t), \text{ para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

é um filtro linear. Além disso, a função de transferência $H_3(\cdot)$ do filtro linear \mathcal{L}_3 é dada por

$$H_3(\lambda) = \alpha H_1(\lambda) + \beta H_2(\lambda), \text{ para todo } \lambda \in [-\pi, \pi].$$

2) **Composição de Filtros Lineares:** Se \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 são filtros lineares com funções transferências $H_1(\cdot)$ e $H_2(\cdot)$, respectivamente, tal que \mathcal{L}_1 é combinado com o processo estocástico de entrada $\{X_t\}_{t \in T}$ e \mathcal{L}_2 é combinado com $Y_t = \mathcal{L}_1(X_t)$, então a transformação linear $\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1$, definida por

$$\mathcal{L}_4(X_t) = \mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1(X_t)), \text{ para todo } t \in T,$$

é um filtro linear cuja função de transferência $H_4(\cdot)$ é dada por

$$H_4(\lambda) = H_2(\lambda)H_1(\lambda), \text{ para todo } \lambda \in [-\pi, \pi].$$

A seguir, definiremos três tipos de filtros lineares que serão usados no Capítulo 5 deste trabalho com o objetivo de suavizar os dados da série temporal Manchas Solares (ver Seção 5.1.) e os dados da série temporal dos Níveis de Água da Bacia do Rio Paraná (ver Seção 5.2.).

DEFINIÇÃO 3.5. O operador defasagem é um filtro linear, denotado por \mathcal{B} , dado por

$$\mathcal{B}(X_t) = X_{t-1}, \text{ para todo } t \in T.$$

A potência de ordem 2 do operador defasagem é dada por

$$\mathcal{B}^2(X_t) = \mathcal{B}(\mathcal{B}(X_t)) = \mathcal{B}(X_{t-1}) = X_{t-2}, \text{ para todo } t \in T.$$

Desta forma, podemos generalizar para a potência de ordem $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, da seguinte forma

$$\mathcal{B}^k(X_t) = \mathcal{B}^{k-1}(\mathcal{B}(X_t)) = \mathcal{B}^{k-1}(X_{t-1}) = \dots = \mathcal{B}(X_{t-(k-1)}) = X_{t-k}, \quad (3.5)$$

para todo $t \in T$.

DEFINIÇÃO 3.6. O operador diferença é um filtro linear, denotado por ∇ , e é dado por

$$\nabla(X_t) = X_t - X_{t-1} = (1 - \mathcal{B})X_t, \text{ para todo } t \in T, \quad (3.6)$$

onde \mathcal{B} é o operador defasagem.

A potência de ordem $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ do operador diferença é dada por

$$\begin{aligned}\nabla^k(X_t) &= \nabla^{k-1}(\nabla(X_t)) = \\ &= \nabla^{k-1}(X_t - X_{t-1}) = \\ &= \nabla^{k-2}(X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}), \text{ para todo } k \in \mathbb{N} - \{0\},\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde $\nabla^0(X_t) = X_t$.

Usando a expressão (3.6) e o binômio de Newton na expressão (3.8), temos que

$$\begin{aligned}\nabla^k(X_t) &= (1 - \mathcal{B})^k X_t = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\mathcal{B})^i X_t = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (\mathcal{B})^i X_t,\end{aligned}\tag{3.8}$$

para todo $t \in T$. Usando ainda a Definição 3.5, temos que

$$\nabla^k(X_t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i X_{t-i}, \text{ para todo } t \in T \text{ e } k \in \mathbb{N} - \{0\}.\tag{3.9}$$

DEFINIÇÃO 3.7. *Seja $\{X_t\}_{t \in T}$ um processo estocástico estacionário. O filtro recursivo simples de primeira ordem é definido por*

$$\mathcal{L}(X_t) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j X_{t-j}, \text{ para todo } t \in T \text{ e } \alpha \in (0, 1).\tag{3.10}$$

Podemos reescrever a expressão (3.10) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(X_1) &= (1 - \alpha)X_1 \\
\mathcal{L}(X_2) &= (1 - \alpha)X_2 + \alpha(1 - \alpha)X_1 = (1 - \alpha)X_2 + \alpha \mathcal{L}(X_1) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}(X_t) &= (1 - \alpha)X_t + \alpha \mathcal{L}(X_{t-1}), \text{ para todo } t \in T.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

A seguir, daremos algumas definições de processos estocásticos usados neste trabalho, a saber, os processos estocásticos diferença e uma classe importante de processos estocásticos definidos em termos de equações diferenças lineares com coeficientes constantes, chamados Processos Autoregressivo Média Móvel de ordem p e q ou ARMA(p, q).

Para maiores detalhes, consultar Brockwell e Davis (1991), Priestley (1981), Box et al. (1995) e Kedem (1994).

DEFINIÇÃO 3.8. *O processo estocástico $\{X_t; t \in T\}$ é dito ser um processo autoregressivo média móvel de ordem p e q , denotado por ARMA(p, q), se é um processo estacionário tal que*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \tag{3.12}$$

para qualquer $t \in T$, onde $\{\epsilon_t; t \in T\}$ é um processo estocástico ruído branco dado pela Definição 2.5, $\phi_i, 1 \leq i \leq p$ e $\theta_j, 1 \leq j \leq q$, são constantes reais.

A equação (3.12) pode ser reescrita por

$$\phi(\mathcal{B})X_t = \theta(\mathcal{B})\epsilon_t, \quad t \in T, \tag{3.13}$$

onde $\phi(\mathcal{B})$ e $\theta(\mathcal{B})$ são polinômios em \mathcal{B} (ver Definição 3.5), de ordem p e q , respectivamente, e dados por

$$\phi(z) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \phi_i z^i, \text{ para todo } p \in \mathbb{N},$$

onde $\phi_0 \equiv 1$, e

$$\theta(z) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \theta_i z^i, \text{ para todo } q \in \mathbb{N},$$

onde $\theta_0 \equiv 1$. Se $\theta(\mathcal{B}) = 1$, o processo $\phi(\mathcal{B})X_t = \epsilon_t$ é dito ser um **processo autoregressivo de ordem p** e é denotado por **AR(p)**. Da mesma forma, se $\phi(\mathcal{B}) = 1$, o processo $X_t = \theta(\mathcal{B})\epsilon_t$ é dito ser um **processo média móvel de ordem q** e é denotado por **MA(q)**.

A condição de estacionariedade para processos autoregressivos de ordem p, AR(p), é dada na seguinte proposição .

PROPOSIÇÃO 3.3. *Um processo autoregressivo de ordem p, denotado por AR(p), será estacionário se a série $\phi(\mathcal{B})$ convergir para $|\mathcal{B}| \leq 1$, dentro de e sobre o círculo unitário.*

Prova: Ver a demonstração desta proposição em Box et al. (1995).

Usando a Definição 3.6 do operador diferença ∇ , podemos definir o processo estocástico diferença como segue.

DEFINIÇÃO 3.9. *Seja $\{X_t; t \in T\}$ um processo estocástico estacionário. Definimos **processo estocástico diferença** o processo dado por*

$$\dots, X_0 - X_{-1}, X_1 - X_0, X_2 - X_1, \dots.$$

Denotamos o processo estocástico diferença por $\{\nabla X_t\}_{t \in T}$, isto é,

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}, \text{ para todo } t \in T.$$

*Podemos generalizar esta definição para **processo estocástico diferença de ordem k**, denotado por $\{\nabla^k X_t\}_{t \in T}$ e dado por*

$$\dots, \nabla^k X_{-1}, \nabla^k X_0, \nabla^k X_1, \dots.$$

onde ∇ é o operador diferença dado pela Definição 3.6.

DEFINIÇÃO 3.10. *Seja $\{\nabla^k X_t; t \in T\}$ um processo estocástico diferença de ordem k . A média do processo é definida por*

$$\mathbb{E}(\nabla^k X_t), \text{ para todo } t \in T;$$

a variância do processo é dada por

$$\text{Var}(\nabla^k X_t) = \mathbb{E}[\nabla^k X_t - \mathbb{E}(\nabla^k X_t)]^2, \quad t \in T;$$

a função de autocovariância entre quaisquer duas variáveis aleatórias $\nabla^k X_s$ e $\nabla^k X_t$, para quaisquer $s, t \in T$, é dada por

$$\gamma_{\nabla^k X}(s, t) = \text{Cov}(\nabla^k X_s, \nabla^k X_t) = \mathbb{E}\{[\nabla^k X_s - \mathbb{E}(\nabla^k X_s)][\nabla^k X_t - \mathbb{E}(\nabla^k X_t)]\},$$

e a função de autocorrelação entre quaisquer duas variáveis aleatórias $\nabla^k X_s$ e $\nabla^k X_t$ é dada por

$$\rho_{\nabla^k X}(s, t) = \frac{\gamma_{\nabla^k X}(s, t)}{\sqrt{\text{Var}(\nabla^k X_s) \text{Var}(\nabla^k X_t)}}, \quad s, t \in T.$$

Observe que, quando o processo estocástico $\{X_t; t \in T\}$ for estacionário o processo estocástico diferença de ordem k , $\{\nabla^k X_t; t \in T\}$, também será um processo estocástico estacionário, por ser uma diferença finita de $\{X_t\}_{t \in T}$ e, quando isto ocorrer, denotaremos a **função de autocovariância** do processo estocástico estacionário $\{\nabla^k X_t; t \in T\}$ por

$$\gamma_{\nabla^k X}(h) = \text{Cov}(\nabla^k X_t, \nabla^k X_{t+h}), \quad \text{para todo } h \in T, \quad (3.14)$$

e a **função de autocorrelação** do processo estocástico estacionário $\{\nabla^k X_t; t \in T\}$ por

$$\rho_{\nabla^k X}(h) = \frac{\gamma_{\nabla^k X}(h)}{\gamma_{\nabla^k X}(0)}, \quad \text{para todo } h \in T, \quad (3.15)$$

onde $\gamma_{\nabla^k X}(0) = \text{Var}(\nabla^k X_t)$.

É bom lembrar que, quando o processo estocástico $\{\nabla^k X_t; t \in T\}$ é estacionário, as funções de autocovariância $\gamma_{\nabla^k X}(\cdot)$ e de autocorrelação $\rho_{\nabla^k X}(\cdot)$ do processo estocástico $\{\nabla^k X_t; t \in T\}$ possuem as mesmas propriedades das funções de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ e de autocorrelação $\rho_X(\cdot)$ do processo estocástico estacionário $\{X_t; t \in T\}$, vistas anteriormente.

Os resultados, a seguir, serão usados no Teorema 4.2 do Capítulo 4. Para maiores detalhes, consultar Brockwell e Davis (1991) e James (1996).

TEOREMA 3.1. (Teorema da Representação Espectral). *Uma função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$, de valor complexo definida em T , de um processo estocástico estacionário $\{X_t\}_{t \in T}$, é função definida não negativa se e sómente se*

$$\gamma_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} dF_X(\lambda), \text{ para todo } h \in T,$$

onde $F_X(\cdot)$ é uma função contínua à direita, não decrescente e limitada em $[-\pi, \pi]$ e $F_X(-\pi) = 0$. A função $F_X(\cdot)$ é chamada **função de distribuição espectral de $\gamma_X(\cdot)$ (ou de X)**.

Prova: Ver a demonstração deste teorema em Brockwell e Davis (1991), página 118.

DEFINIÇÃO 3.11. *Sejam X, X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias com, respectivamente, funções de distribuição F, F_1, F_2, \dots . Dizemos que X_n **converge em distribuição** para X , quando $n \rightarrow \infty$, se $F_n(x) \rightarrow F(x)$, para todo x ponto de continuidade de F .*

Notação : $X_n \xrightarrow{D} X$ ou $X_n \xrightarrow{D} F$. Também dizemos que X_n **converge em lei** para X e escrevemos $\mathbb{L}(X_n) \rightarrow \mathbb{L}(X)$.

Se X_n converge em distribuição para X , dizemos que F_{X_n} **converge fracamente** para F_X .

TEOREMA 3.2. (Teorema de Helly-Bray). *Sejam F, F_1, F_2, \dots funções*

de distribuição . Se F_n converge fracamente para F , então

$$\int g(x) dF_n(x) \rightarrow \int g(x) dF(x), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para toda função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada.

Prova: Ver a demonstração deste teorema em James (1996), página 235.

4. CRUZAMENTOS DE ORDEM SUPERIOR

Neste capítulo, vamos considerar as variáveis aleatórias $X_t = Z_t$ do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ como sendo variáveis aleatórias normalmente distribuídas (ver Definição 2.7) com média 0, variância σ_Z^2 e função de autocorrelação de ordem h , $\rho_Z(h) \equiv \rho_h$. Consideramos também que o conjunto de índices T , neste capítulo, será o conjunto dos números inteiros, isto é, $T \equiv \mathbb{Z}$.

Voltando ao exemplo mencionado na introdução, desejamos encontrar um método mais automático e confiável para encontrar componentes periódicas nos dados analisados. Isto nos será fornecido pelo método do cruzamentos de ordem superior explicado a seguir.

Para analisar assinaturas através de computadores, os sinais de tempo contínuos são digitalizados e registrados a momentos discretos. Um sinal pode ser anotado a cada segundo ou a cada décimo de segundo ou até mesmo em milésimos de segundo. Assumimos que os sinais são anotados em intervalos de tempo regulares Δt e, sem perda de generalidade, adotamos $\Delta t = 1$.

O sinal, antes de ser codificado ou analisado, é transformado ou resumido de alguma forma conveniente para aumentar a sua característica predominante. Tal redução é essencial para registros de dados muito longos. Uma forma de reduzir os dados em análises de assinaturas é substituir a série temporal pela contagem de cruzamentos no nível zero ou em outros níveis de cruzamentos. Kedem (1994) faz uma análise detalhada desse método.

Kedem e Slud (1982) discutem as possibilidades e conseqüências de reduzir os dados originais de um sinal por número de cruzamentos no nível zero deste sinal e de suas diferenças finitas. Esses números, chamados de *cruzamentos de ordem superior*, são definidos a seguir.

DEFINIÇÃO 4.1. Considere o processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$. O número de cruzamentos no eixo do tempo são contados no gráfico da série temporal

$$Z_1, \dots, Z_N$$

quando os N pontos (j, Z_j) são conectados por segmentos de linha reta. Estes cruzamentos no eixo do tempo são chamados de **número de cruzamentos de ordem superior de ordem 1** e denotados por D_1 .

Vamos chamar de N o tamanho de D_1 . Note que $\mathbb{E}(D_1)$ não depende do tamanho N .

DEFINIÇÃO 4.2. Considere os processos estocásticos $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\nabla^k Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$, para $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ dados pela Definição 3.9. Então, o número de cruzamentos no eixo do tempo contados no gráfico da série temporal

$$\nabla^{k-1} Z_1, \dots, \nabla^{k-1} Z_N$$

quando os N pontos $(j, \nabla^{k-1} Z_j)$ são conectados por segmentos de linha reta, são chamados de **número de cruzamentos de ordem superior de ordem k** e denotados por D_k .

Observe que $D_1(Z_{t+1} - Z_t) = D_2(Z_t)$ e assim por diante.

O vetor de cruzamento de ordem superior $\{D_1, D_2, \dots\}$ é usado para representar a informação oscilatória de um sinal. Kedem e Slud (1982) discutem essa ordem para realizar uma redução eficaz dos dados pelos cruzamentos de ordem superior. Neste artigo, os autores mostram que é suficiente considerar alguns poucos D_k 's, talvez apenas os dez primeiros. O nosso objetivo principal é detectar a frequência mais importante em uma série temporal que pode ser reformulado em termos de cruzamentos de ordem superior.

A contagem dos cruzamentos de ordem superior em tempo discreto é definido como o número de vezes que cada $\nabla^k Z_t$ troca de sinal. Para fazer esta contagem, podemos utilizar dois métodos.

MÉTODO 4.1. Primeiro definimos uma série temporal binária $X_1^k, X_2^k, \dots, X_N^k$ com $k \in \mathbb{Z}$, dada por

$$X_t^k = \begin{cases} 1, & \text{se } \nabla^{k-1} Z_t \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, o número de cruzamentos de ordem superior de ordem k , D_k , é definido em termos de $\{X_t^k\}_{t=1}^N$, isto é,

$$D_k = \sum_{t=2}^N [X_t^k - X_{t-1}^k]^2 = (X_2^k - X_1^k)^2 + (X_3^k - X_2^k)^2 + \dots + (X_N^k - X_{N-1}^k)^2. \quad (4.1)$$

MÉTODO 4.2. Seja d_t a função indicadora do evento $A = [X_t^k \neq X_{t-1}^k]$, isto é,

$$d_t = \begin{cases} 1, & \text{se } X_t^k \neq X_{t-1}^k \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

X_t^k como no Método 4.1.

Então, o número de cruzamentos de ordem superior de ordem k , D_k , pode ser definido como uma soma de indicadores

$$D_k = \sum_{t=2}^N d_t = d_2 + d_3 + \dots + d_N. \quad (4.2)$$

A seguir, apresentamos um exemplo utilizando o Método 4.1 para encontrar o número de cruzamentos de ordem superior de ordens 1, 2 e 3 de uma série temporal.

Exemplo 4.1. Considere a série temporal com $N = 10$ dada por

$$Y_t : 1; 6; 1; 7; 8; 9; 2; 3; 0; 7$$

gerada a partir de um processo estocástico estacionário $\{Y_t; t \in T\}$, quando $t \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Subtraindo a média amostral, $\bar{y} = 4,4$ dos dados acima temos a nova série temporal $Z_t = Y_t - \bar{y}$, dada por

$$Z_t : -3,4; 1,6; -3,4; 2,6; 3,6; 4,6; -2,4; -1,4; -4,4; 2,6.$$

Para calcular D_1, D_2 e D_3 consideramos a série temporal Z_t onde $Z_{-1} = -3,4$ e $Z_0 = 1,6$. A Figura 4.1 mostra a série temporal $\{Z_t\}_{t=1}^8$.

Usando as Definições 4.1 e 4.2 para encontrar $Z_t, \nabla Z_t$ e $\nabla^2 Z_t$, para $t \in \{1, 2, \dots, 8\}$, temos

Z_t :	-3,4	2,6	3,6	4,6	-2,4	-1,4	-4,4	2,6
∇Z_t :	-5,0	6,0	1,0	1,0	-7,0	1,0	-3,0	7,0
$\nabla^2 Z_t$:	-10,0	11,0	-5,0	0,0	-8,0	8,0	-4,0	10,0.

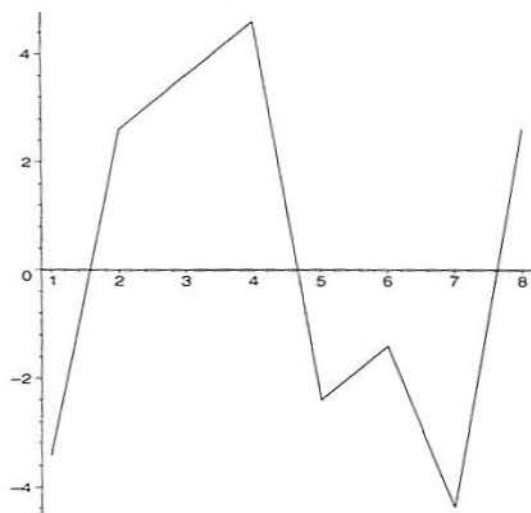


Figura 4.1: Série temporal $\{Z_t\}_{t=1}^8$ do Exemplo 4.1.

Os valores correspondentes à série temporal binária $X_1^k, X_2^k, \dots, X_8^k$, para $k \in \{1, 2, 3\}$, são dados por

X_t^1 :	0	1	1	1	0	0	0	1
X_t^2 :	0	1	1	1	0	1	0	1
X_t^3 :	0	1	0	1	0	1	0	1.

Então, usando a expressão (4.1) temos que

$$D_1 = 3, \quad D_2 = 5 \quad \text{e} \quad D_3 = 7.$$

Note que, pelos dois métodos, uma passagem de um valor negativo para zero é contado como um cruzamento.

A seguir, apresentamos quatro exemplos de séries temporais para os quais são calculados os dez primeiros números de cruzamentos de ordem superior.

Os gráficos mostrados nas Figuras 4.1 a 4.5 são construídos com valores discretos, mas os pontos são conectados através de segmentos de linha reta para dar a impressão de curvas contínuas.

Exemplo 4.2. Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, onde Z_t é dado por

$$Z_t = \cos(0,3t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

A Figura 4.2 apresenta uma série temporal com 220 observações obtida a partir de processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ definido no Exemplo 4.2. Para esta série temporal, com $N = 200$ observações, os dez primeiros números de cruzamentos de ordem superior são todos dados por

$$D_1 = D_2 = \dots = D_{10} = 19.$$

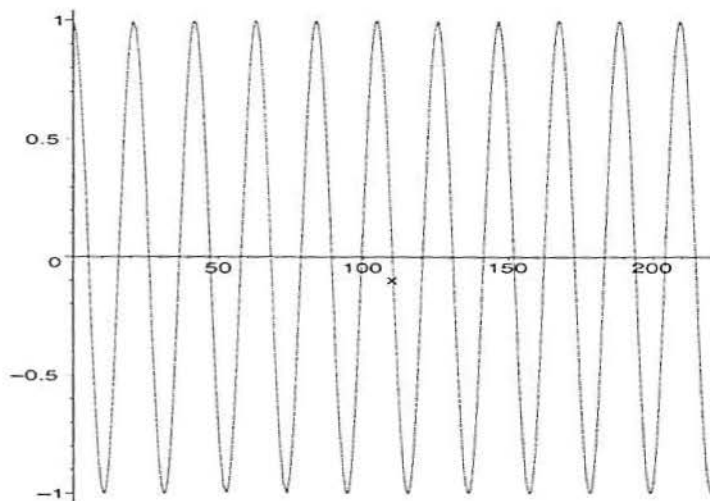


Figura 4.2: Série temporal com $N = 220$ extraída do processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado no Exemplo 4.2.

Exemplo 4.3. Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, onde Z_t é dado por

$$Z_t = \cos(0,3t) + 2 \cos(1,25t) + 0,2 \operatorname{sen}(1,5t) + \epsilon_t,$$

com $\epsilon_t \sim \mathcal{U}(-0,25; 0,25)$.

A Figura 4.3 apresenta uma série temporal com 220 observações obtida a partir de processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ definido acima.

Os dez primeiros números de cruzamentos de ordem superior para esta série temporal, com $N = 200$ observações, fornecem os valores

$$\{D_j\}_{j=1}^{10} = \{79, 79, 79, 81, 101, 127, 149, 165, 166, 169\}.$$

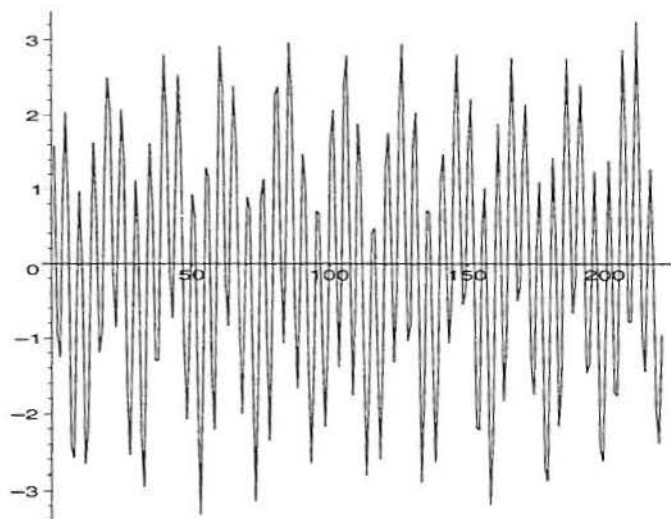


Figura 4.3: Série temporal com $N = 220$ extraída do processo estocástico do Exemplo 4.3.

Exemplo 4.4. Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, onde Z_t é dado por

$$Z_t = 2,2 \cos(0,3t) + 2,8 \cos(1,25t) - 1,5 \sin(2,6t) + \epsilon_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

com $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$.

A Figura 4.4 apresenta uma série temporal com 220 observações obtida a partir de processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ definido no Exemplo 4.4.

Os dez primeiros números de cruzamentos de ordem superior para esta série temporal, com $N = 200$ observações, fornecem os seguintes valores

$$\{D_j\}_{j=1}^{10} = \{77, 100, 139, 161, 162, 165, 165, 165, 165, 165\}.$$

Na Figura 4.4 foi plotada a série temporal $Y_t = Z_t - \bar{Z}$ onde \bar{Z} é a média da série temporal original $\{Z_t\}_{t=1}^{220}$.

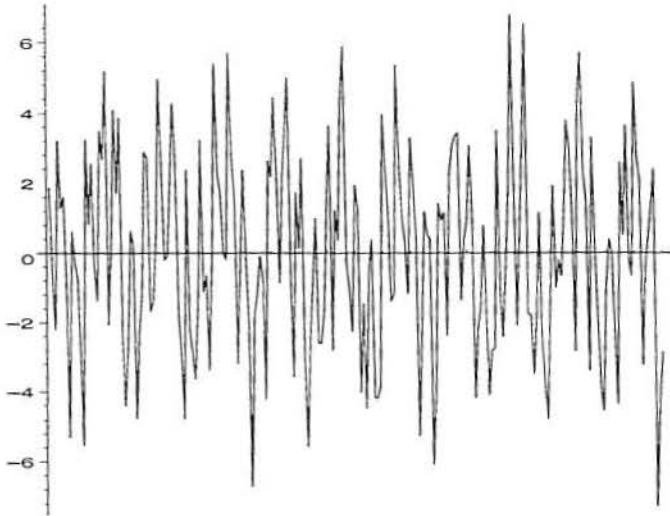


Figura 4.4: Série temporal com $N = 220$ extraída do processo estocástico do Exemplo 4.4.

Exemplo 4.5. Considere o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, onde Z_t é dado por

$$Z_t = 0,8Z_{t-1} + \epsilon_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

com $\epsilon_t \sim \mathcal{U}(-0,5; 0,5)$.

A Figura 4.5 apresenta uma série temporal com 220 observações obtida a partir do processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ definido acima.

Os dez primeiros números de cruzamentos de ordem superior para esta série temporal, com $N = 200$ observações, fornecem os seguintes valores

$$\{D_j\}_{j=1}^{10} = \{48, 101, 130, 142, 148, 156, 160, 166, 167, 171\}.$$

Note que, no exemplo 4.4 o processo estocástico é Gaussiano enquanto que nos Exemplos 4.3 e 4.5 os processos estocásticos são não Gaussianos.

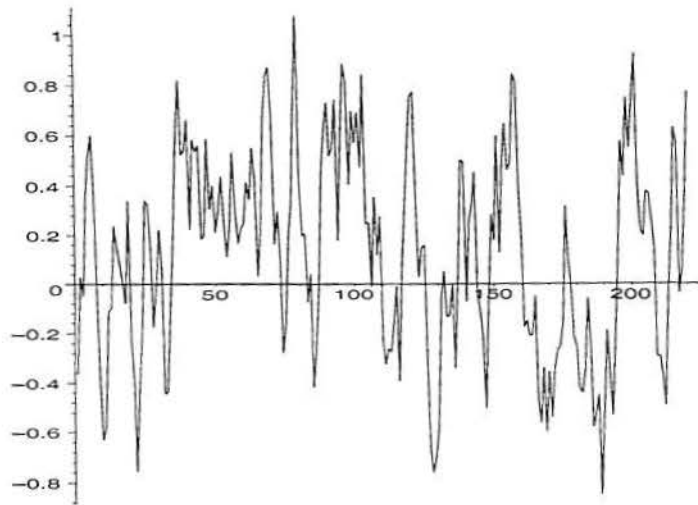


Figura 4.5: Série temporal com $N = 220$ extraída do processo estocástico do Exemplo 4.5.

Observe que nos Exemplos 4.2 a 4.5, o computador gerou números aleatórios ϵ_t , os quais foram adicionados nas componentes periódicas para todo $t = 1, \dots, 220$.

Esta superposição de números aleatórios é importante para simular ruídos gerados por uma máquina e por seu ambiente.

Esse é um caminho razoável para representar situações reais de assinatura, se a máquina foi desligada no tempo t e mais tarde foi reiniciada, então esta nova assinatura de duração t provavelmente possuirá características da primeira, mas não será idêntica a esta. Portanto, o fenômeno discutido acima, não é determinístico e é indispensável para o seu entendimento o uso da teoria de probabilidade.

Esses exemplos ilustram que os D_k tendem a crescer quando k cresce, e mostraremos que uma igualdade entre D_k sucessivos indica a existência de componentes senoidais (isoladas) no sinal. O mesmo fenômeno, também observado em vários outros casos, conduz à hipótese de que igualdade entre alguns cruzamentos de ordem superior indica a existência de componentes senoidais significantes no sinal. Mais adiante (ver Teorema 4.1), mostraremos que, sob certas condições, esse resultado é verdadeiro.

Nossa intenção é investigar o que pode ser demonstrado sobre uma seqüência aleatória, como os exemplos acima, quando alguns de seus cruzamentos

de ordem superior (ou a média de alguns dos D_k 's) coincidem.

O fator chave no nosso trabalho é a relação entre a função de autocorrelação de ordem 1, ρ_1 , e $\mathbb{E}(D_1)$, sob a hipótese de que o processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ é Gaussiano. Observe que D_1 , por ser uma função de Z_1, \dots, Z_N , é uma variável aleatória que assume os valores de 0 até $N - 1$. Então,

$$0 \leq \mathbb{E}(D_1) \leq N - 1.$$

Quando $\mathbb{E}(D_1)$ está próximo de 0 nós esperamos oscilações suaves na série temporal, enquanto que, quando $\mathbb{E}(D_1)$ está próximo de $N - 1$, a série temporal possui oscilações mais freqüentes como podemos observar nas Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente. Isto nos faz pensar que deve existir uma relação entre $\mathbb{E}(D_1)$ e a função de autocorrelação de ordem 1, ρ_1 , que mede a correlação entre variáveis aleatórias Z_t vizinhas. Esta relação é observada no lema a seguir (ver Kedem (1984)).

Lema 4.1. *Seja $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ um processo estocástico estacionário Gaussiano com média zero, variância $\sigma_Z^2 = 1$ e com função de autocorrelação de ordem h , ρ_h , e número de cruzamentos superior de ordem 1 dado por D_1 com tamanho N . Então, existe uma relação entre D_1 e ρ_1 dada por*

$$\rho_1 = \cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N - 1}\right).$$

Prova: Seja d_t a função indicadora do evento

$$A_t = \{Z_{t-1} < 0, Z_t \geq 0\} \cup \{Z_{t-1} \geq 0, Z_t < 0\}.$$

Então, $d_t = 1$ se o evento A_t ocorrer e $d_t = 0$, caso contrário. Observe que, pela expressão (4.2), temos $D_1 = d_2 + \dots + d_N$.

Considere o par de variáveis aleatórias Z_t e Z_{t+1} . Sendo o processo $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ Gaussiano assumimos que este par tenha uma distribuição normal bivariada (ver Karlin e Taylor (1975), página 14). Portanto,

$$\mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t \geq 0) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(x, y) dx dy, \quad (4.3)$$

onde

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_1^2)} [x^2 - 2\rho_1 xy + y^2] \right\}.$$

Mudando para coordenadas polares r e θ temos que $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$ onde $dx dy = |J_{(x,y),(r,\theta)}| dr d\theta = r dr d\theta$, pois o determinante da matriz Jacobiana $J_{(x,y),(r,\theta)}$ é dado por

$$|J_{(x,y),(r,\theta)}| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r.$$

Então,

$$\mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t \geq 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} g(r, \theta) r dr d\theta, \quad (4.4)$$

onde

$$g(r, \theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} \exp \left\{ -\frac{r^2 \cos^2(\theta) - 2r^2 \rho_1 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)}{2(1-\rho_1^2)} \right\}. \quad (4.5)$$

Colocando r^2 em evidência e usando a propriedade trigonométrica

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

na expressão (4.5) acima, temos que

$$g(r, \theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} \exp \left\{ -r^2 \left[\frac{1 - \rho_1 \sin(2\theta)}{2(1-\rho_1^2)} \right] \right\}. \quad (4.6)$$

Resolvendo a segunda integral da igualdade (4.4), em relação a r , temos

$$\mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t \geq 0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left[\frac{2(1-\rho_1^2)}{1-\rho_1 \sin(2\theta)} \right] d\theta.$$

Colocando em evidência $(1-\rho_1^2)$, pois não depende de θ , e racionalizando $\frac{(1-\rho_1^2)}{\sqrt{1-\rho_1^2}}$, temos que

$$\mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t \geq 0) = \frac{\sqrt{1 - \rho_1^2}}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \rho_1 \sin(2\theta)} d\theta. \quad (4.7)$$

Por Stieltjes (1889), temos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \rho_1 \sin(2\theta)} d\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \rho_1^2}} + \frac{\sin^{-1}(\rho_1)}{\sqrt{1 - \rho_1^2}}. \quad (4.8)$$

Usando a expressão (4.8) na igualdade (4.7), temos

$$\mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t \geq 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1}(\rho_1) \quad (4.9)$$

Em virtude da simetria da distribuição normal temos que

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0) = \mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t \geq 0) + \mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t < 0). \quad (4.10)$$

Da mesma forma, temos que

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z_t \geq 0) = \mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t \geq 0) + \mathbb{P}(Z_{t-1} < 0, Z_t \geq 0). \quad (4.11)$$

Usando a expressão (4.9) nas igualdades (4.10) e (4.11) obtemos

$$\mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t < 0) = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin^{-1}(\rho_1) \right] \quad (4.12)$$

e

$$\mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t < 0) = \mathbb{P}(Z_{t-1} < 0, Z_t \geq 0). \quad (4.13)$$

Como $\mathbb{E}(d_t) = \mathbb{P}(d_t = 1) = \mathbb{P}(\{Z_{t-1} < 0, Z_t \geq 0\} \cup \{Z_{t-1} \geq 0, Z_t < 0\})$, temos que

$$\mathbb{E}(d_t) = \mathbb{P}(Z_{t-1} < 0, Z_t \geq 0) + \mathbb{P}(Z_{t-1} \geq 0, Z_t < 0), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Usando as expressões (4.12) e (4.13) temos que

$$\mathbb{E}(d_t) = 2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \text{sen}^{-1}(\rho_1) \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{sen}^{-1}(\rho_1). \quad (4.14)$$

Como $D_1 = d_2 + \dots + d_N$, usando a expressão (4.14), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_1) &= \mathbb{E}(d_2 + \dots + d_N) \\ &= (N-1) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{sen}^{-1}(\rho_1) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}D_1}{N-1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{sen}^{-1}(\rho_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sen}^{-1}(\rho_1) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \mathbb{E}D_1}{N-1}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\rho_1 = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N-1} \right).$$

Como $\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos(x)$, temos que

$$\rho_1 = \cos \left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N-1} \right),$$

o que prova o Lema 4.1. □

Para provar o Teorema 4.1, que será dado neste capítulo, é necessário expressar a função de autocorrelação de ordem 1 do processo estocástico $\{\nabla^k Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$, dada por $\rho_{\nabla^k Z}(1)$, utilizando a função de autocorrelação de ordem h , ρ_h , do processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$. Esta relação é dada no lema a seguir (ver Kedem (1994)).

Lema 4.2. *Sejam $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ um processo estocástico estacionário Gaussiano com média zero, função de autocorrelação de ordem h , ρ_h e a função de autocorrelação de ordem 1 do processo estocástico $\{\nabla^k Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ dada por $\rho_{\nabla^k Z}(1)$. Então,*

$$\rho_{\nabla^k Z}(1) = \frac{-\binom{2k}{k-1} + \rho_1 \left[\binom{2k}{k} + \binom{2k}{k-2} \right] + \dots + (-1)^k \rho_{k+1}}{\binom{2k}{k} - 2\rho_1 \binom{2k}{k-1} + 2\rho_2 \binom{2k}{k-2} - \dots + (-1)^k 2\rho_k},$$

onde ρ_j , para todo $j = 1, 2, \dots, k+1$ indica a função de autocorrelação de ordem j .

Prova: Observe que, pelas Definições 3.5 e 3.6, temos que

$$\nabla^k(Z_t) = (1 - B)^k Z_t = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-B)^i Z_t = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i Z_{t-i},$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Então,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\nabla^k Z_t] &= \text{Var} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i Z_{t-i} \right] = \\ &= \text{Cov} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i Z_{t-i}, \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j Z_{t-j} \right] = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \binom{k}{j} (-1)^j \text{Cov}(Z_{t-i}, Z_{t-j}), \quad (4.15) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\nabla^k Z_t \nabla^k Z_{t-1}] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i Z_{t-i} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j Z_{t-1-j} \right] = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{i+j} \binom{k}{j} \text{Cov}(Z_{t-i}, Z_{t-1-j}). \quad (4.16) \end{aligned}$$

Conforme Definição 2.5, lembramos que γ_h denota a função de autocovariância de ordem h . Tomando $h = i - j$ e desenvolvendo o somatório das expressões (4.15) e (4.16), temos as expressões para $\text{Var}[\nabla^k Z_t]$ e $\mathbb{E}[\nabla^k Z_t \nabla^k Z_{t-1}]$ abaixo que serão necessárias para obtermos a função de autocorrelação de ordem 1 do processo $\{\nabla^k Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então ,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\nabla^k Z_t] &= \gamma_0 \left[\binom{k}{0} \binom{k}{0} + \dots + \binom{k}{k} \binom{k}{k} \right] - \\ &- \gamma_1 \left[\binom{k}{1} \binom{k}{0} + \dots + \binom{k}{k} \binom{k}{k-1} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \gamma_{-1} \left[\binom{k}{0} \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1} \binom{k}{k} \right] + \\
& + \cdots + (-1)^k \gamma_k + (-1)^k \gamma_{-k}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\nabla^k Z_t \nabla^k Z_{t-1}] & = -\gamma_0 \left[\binom{k}{0} \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1} \binom{k}{k} \right] + \\
& + \gamma_1 \left[\binom{k}{0} \binom{k}{0} + \cdots + \binom{k}{k} \binom{k}{k} \right] + \\
& + \gamma_{-1} \left[\binom{k}{0} \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k-2} \binom{k}{k} \right] + \\
& + \cdots + (-1)^k \gamma_{k+1}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Lembramos que, para quaisquer inteiros positivos a , b e n , temos as seguintes propriedades da análise combinatória

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \binom{b}{a} = \binom{b}{b-a} \\
(ii) \quad & \sum_{i=0}^n \binom{a}{i} \binom{b}{n-i} = \binom{a+b}{n}.
\end{aligned}$$

Usando a propriedade (i) acima nas expressões (4.17) e (4.18) temos que

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\nabla^k Z_t] & = \gamma_0 \left[\binom{k}{0} \binom{k}{k} + \cdots + \binom{k}{k} \binom{k}{0} \right] - \\
& - \gamma_1 \left[\binom{k}{k-1} \binom{k}{0} + \cdots + \binom{k}{0} \binom{k}{k-1} \right] - \\
& - \gamma_{-1} \left[\binom{k}{0} \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} \binom{k}{0} \right] + \\
& + \cdots + (-1)^k \gamma_k + (-1)^k \gamma_{-k}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\nabla^k Z_t \nabla^k Z_{t-1}] &= -\gamma_0 \left[\binom{k}{0} \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1} \binom{k}{0} \right] + \\
&+ \gamma_1 \left[\binom{k}{0} \binom{k}{k} + \cdots + \binom{k}{k} \binom{k}{0} \right] + \\
&+ \gamma_{-1} \left[\binom{k}{0} \binom{k}{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-2} \binom{k}{0} \right] + \\
&+ \cdots + (-1)^k \gamma_{k+1}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade (ii), da análise combinatória, nas expressões (4.19) e (4.20) e usando a propriedade iv) da função de autocovariância γ_h , dada no Capítulo 2, temos que

$$\text{Var}[\nabla^k Z_t] = \gamma_0 \binom{2k}{k} - 2\gamma_1 \binom{2k}{k-1} + \cdots + (-1)^k 2\gamma_k \tag{4.21}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\nabla^k Z_t \nabla^k Z_{t-1}] &= -\gamma_0 \binom{2k}{k-1} + \gamma_1 \left[\binom{2k}{k} + \binom{2k}{k-2} \right] + \\
&+ \cdots + \gamma_k \binom{2k}{1} + (-1)^k \gamma_{k+1}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Usando as expressões (3.15), (4.21) e (4.22) temos que

$$\begin{aligned}
\rho_{\nabla^k Z}(1) &= \frac{\mathbb{E}[\nabla^k Z_t \nabla^k Z_{t-1}]}{\text{Var}[\nabla^k Z_t]} = \\
&= \frac{-\gamma_0 \binom{2k}{k-1} + \gamma_1 \left[\binom{2k}{k} + \binom{2k}{k-2} \right] + \cdots + (-1)^k \gamma_{k+1}}{\gamma_0 \binom{2k}{k} - 2\gamma_1 \binom{2k}{k-1} + \cdots + (-1)^k 2\gamma_k}.
\end{aligned}$$

Dividindo e multiplicando a expressão acima por $\gamma_0 = \text{Var}(Z_t)$ temos que

$$\rho_{\nabla^k Z}(1) = \frac{-\binom{2k}{k-1} + \rho_1 \left[\binom{2k}{k} + \binom{2k}{k-2} \right] + \dots + (-1)^k \rho_{k+1}}{\binom{2k}{k} - 2\rho_1 \binom{2k}{k-1} + 2\rho_2 \binom{2k}{k-2} - \dots + (-1)^k 2\rho_k},$$

o que prova o Lema 4.2. □

Com o auxílio dos Lemas 4.1 e 4.2, temos condições de mostrar a relação entre estruturas oscilatórias e a igualdade entre sucessivos $\mathbb{E}(D_k)$, para $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Isto é provado no teorema a seguir.

Teorema 4.1. *Seja $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ um processo estocástico estacionário Gaussiano com média zero e função de autocorrelação de ordem h , ρ_h . Assuma que $\mathbb{E}(D_1) > 0$. Então, fixando o tamanho N de D_1 ,*

- (a) *a seqüência $\{\mathbb{E}(D_k); k \geq 1\}$ é monótona não decrescente e limitada, isto é,*

$$0 \leq \mathbb{E}(D_1) \leq \mathbb{E}(D_2) \leq \dots \leq N - 1.$$

- (b) *se $\mathbb{E}(D_1) = \mathbb{E}(D_2)$, então o processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ é uma senóide pura dado por*

$$Z_t = A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

com

$$\omega = \frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N - 1}.$$

Prova: Para provar que a seqüência $\{\mathbb{E}(D_k)\}_{k \geq 1}$ é monótona não-decrescente é suficiente considerar o caso $k = 2$, pois a relação que existe entre D_1 e D_2 , é a mesma que existe entre D_2 e D_3 , D_3 e D_4 e assim por diante.

A relação mencionada entre D_2 e D_3 , é do fato que quando encontramos D_2 e D_3 usamos os processos estocásticos diferença, $\{\nabla Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\nabla^2 Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, respectivamente, então substituindo $\nabla Z_t = Y_t$ teremos $\nabla^2 Z_t = \nabla Y_t$. Os

processos estocásticos $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\nabla Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ possuem as mesmas características dos processos estocásticos $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\nabla Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$, que são usados para encontrar D_1 e D_2 .

Seja $\rho_{\nabla Z}(\cdot)$ a função de autocorrelação do processo estocástico diferença $\{\nabla Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$. Os D_k 's são variáveis aleatórias que assumem valores entre 0 e $N - 1$, e portanto

$$0 \leq \mathbb{E}(D_k) \leq N - 1,$$

para todo $k \in N - \{0\}$.

Observe que, como a matriz de covariância é definida não-negativa, ela possui a representação

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} = A'A \quad (4.23)$$

para alguma matriz A de ordem (3×3) onde A' denota a matriz transposta de A . Aplicando o determinante à igualdade em (4.23) temos que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} = \det(A'A) = (\det A)^2 \geq 0. \quad (4.24)$$

Usando a expressão (4.24) acima e considerando $|\rho_2| < 1$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{1 - \rho_2} \det \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1 + 2\rho_1^2\rho_2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2}{1 - \rho_2} = \\ &= \frac{(1 - 2\rho_1^2 + \rho_2)(1 - \rho_2)}{1 - \rho_2} = \\ &= 1 - 2\rho_1^2 + \rho_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Usando o resultado do Lema 4.2 para o processo estocástico $\{\nabla Z_t; t \in T\}$, temos que

$$\rho_{\nabla Z}(1) = \frac{-\binom{2}{0} + \rho_1 \binom{2}{1} + (-1)^1 \rho_2}{\binom{2}{1} + (-1)^1 2\rho_1} = \frac{-1 + 2\rho_1 - \rho_2}{2(1 - \rho_1)}. \quad (4.26)$$

Então, usando as expressões (4.25) e (4.26) temos que

$$\begin{aligned} \rho_1 - \rho_{\nabla Z}(1) &= \rho_1 - \frac{-1 + 2\rho_1 - \rho_2}{2(1 - \rho_1)} = \\ &= \frac{2\rho_1 - 2\rho_1^2 + 1 - 2\rho_1 + \rho_2}{2(1 - \rho_1)} = \\ &= \frac{1 - 2\rho_1^2 + \rho_2}{2(1 - \rho_1)} \geq 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

sempre que $|\rho_1| < 1$.

Pela expressão (4.27) e pelo resultado do Lema 4.1, temos que

$$\rho_1 \geq \rho_{\nabla Z}(1), \text{ ou seja, } \cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N-1}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_2)}{N-1}\right).$$

Como $0 \leq \mathbb{E}(D_k) \leq (N-1)$, para todo $k \in N - \{0\}$, e como $\cos(\cdot)$ é uma função monótona decrescente em $[0, \pi]$, segue que

$$\mathbb{E}(D_1) \leq \mathbb{E}(D_2).$$

Logo, pela observação feita no início dessa demonstração, temos que

$$\mathbb{E}(D_k) \leq \mathbb{E}(D_{k+1}), \quad \text{para todo } k \in N - \{0\},$$

e o item (a) do Teorema 4.1 está provado.

Para mostrar o item (b) do mesmo teorema, observe que

$$\frac{\mathbb{E}(Z_t - 2\rho_1 Z_{t-1} + Z_{t-2})^2}{\text{Var}(Z_t)} = \quad (4.28)$$

$$= \frac{\mathbb{E}(Z_t^2 - 4\rho_1 Z_t Z_{t-1} + 4\rho_1^2 Z_{t-1}^2 + 2Z_t Z_{t-2} - 4\rho_1 Z_{t-1} Z_{t-2} + Z_{t-2}^2)}{\text{Var}(Z_t)}.$$

Como $\mathbb{E}(Z_t) = 0$ e usando a definição de função de autocovariância γ_h (ver Definição 2.2) na expressão (4.28) temos que

$$\frac{\mathbb{E}(Z_t - 2\rho_1 Z_{t-1} + Z_{t-2})^2}{\text{Var}(Z_t)} = \frac{\gamma_0 - 4\rho_1 \gamma_1 + 4\rho_1^2 \gamma_0 + 2\gamma_2 - 4\rho_1 \gamma_1 + \gamma_0}{\gamma_0}. \quad (4.29)$$

Usando a definição de função de autocorrelação ρ_h (ver Definição 2.2) na expressão (4.29) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(Z_t - 2\rho_1 Z_{t-1} + Z_{t-2})^2}{\text{Var}(Z_t)} &= 1 - 4\rho_1^2 + 4\rho_1^2 + 2\rho_2 - 4\rho_1^2 + 1 = \\ &= 2 - 4\rho_1^2 + 2\rho_2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Usando a expressão (4.26) que diz que

$$\rho_{\nabla Z}(1) = \frac{-1 + 2\rho_1 - \rho_2}{2(1 - \rho_1)} \quad (4.31)$$

temos o valor de ρ_2 dado por

$$\rho_2 = -1 + 2\rho_1 - 2\rho_{\nabla Z}(1)(1 - \rho_1). \quad (4.32)$$

Substituindo ρ_2 pela expressão (4.32) na expressão (4.30) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(Z_t - 2\rho_1 Z_{t-1} + Z_{t-2})^2}{\text{Var}(Z_t)} &= 2 - 4\rho_1^2 + 2[-1 + 2\rho_1 - 2\rho_{\nabla Z}(1)(1 - \rho_1)] \\ &= 2 - 4\rho_1^2 - 2 + 4\rho_1 - 4\rho_{\nabla Z}(1)(1 - \rho_1) \\ &= 4\rho_1(1 - \rho_1) - 4\rho_{\nabla Z}(1)(1 - \rho_1) \\ &= 4(1 - \rho_1)(\rho_1 - \rho_{\nabla Z}(1)). \end{aligned}$$

Se $\mathbb{E}(D_1) = \mathbb{E}(D_2)$ temos que $\rho_1 = \rho_{\nabla Z}(1)$, então

$$\frac{\mathbb{E}(Z_t - 2\rho_1 Z_{t-1} + Z_{t-2})^2}{\text{Var}(Z_t)} = 4(1 - \rho_1)(\rho_1 - \rho_{\nabla Z}(1)) = 0.$$

Isto implica que, com probabilidade 1,

$$Z_t - 2\rho_1 Z_{t-1} + Z_{t-2} = 0, \quad (4.33)$$

que é uma equação diferença de segunda ordem. Para encontrar a solução da equação diferença, (ver Elaydi (1996)), dada pela expressão (4.33), observe que a sua equação característica é

$$x^2 - 2\rho_1 x + 1 = 0 \quad (4.34)$$

onde $\rho_1 = \cos(\omega)$. Primeiro vamos encontrar as raízes da equação característica dada pela expressão (4.34). Elas são dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\rho_1 \pm \sqrt{4\rho_1^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{2\rho_1 \pm \sqrt{-4(1 - \rho_1^2)}}{2} \\ &= \frac{2\rho_1 \pm 2\sqrt{-(1 - \rho_1^2)}}{2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Usando o fato que $\rho_1 = \cos(\omega)$, na expressão (4.36) e pela propriedade trigonométrica

$$\text{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

temos que

$$\begin{aligned} x &= \cos(\omega) \pm \sqrt{-\text{sen}^2(\omega)} \\ &= \cos(\omega) \pm i \text{sen}(\omega). \end{aligned}$$

Então as raízes da equação característica dada pela expressão (4.34) são

$$x_1 = \cos(\omega) + i \text{sen}(\omega)$$

e

$$x_2 = \cos(\omega) - i \text{sen}(\omega),$$

e a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} Z_t &= a [\cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t)] + b [\cos(\omega t) - i \text{sen}(\omega t)] \\ &= (a + b) \cos(\omega t) + (a - b) i \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo $(a + b)$ por A e $(a - b)i$ por B na expressão (4.36) temos que

$$Z_t = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t), \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (4.37)$$

com $\omega = \frac{\pi E(D_1)}{N-1}$ e o item (b) do Teorema 4.1 está provado. O que conclui a prova do Teorema 4.1. \square

Como aplicação do Teorema 4.1, visto anteriormente, voltamos aos Exemplos 4.2 a 4.5. O objetivo é mostrar, através dos cruzamentos de ordem superior, como obter a frequência angular nos exemplos já considerados. Depois usaremos a análise espectral clássica para comparar os resultados. Denotamos o período por P e a frequência angular da componente senoidal do sinal por ω_0 .

É bom lembrar que em uma aplicação com série temporal qualquer a esperança do número de cruzamentos de ordem superior, $E(D_j)$, é substituída por D_j , obtido a partir das N observações desta série temporal.

Exemplo 4.2: A Figura 4.6 mostra o resultado da função periodograma do processo estocástico desse exemplo. Observe, na Figura 4.6, que o ponto com abscissa $x = 11$ é um pico no gráfico. Então ,

$$P = \frac{220}{11} = 20.$$

Usando a igualdade

$$P = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

para encontrar a frequência angular ω_0 , temos que

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{20} \cong 0,31.$$

Como

$$D_1 = D_2 = \dots = D_{10} = 19$$

temos, aplicando o Teorema 4.1, que

$$\omega_0 = \frac{\pi D_1}{N-1} = \frac{19\pi}{199} = 0,2999.$$

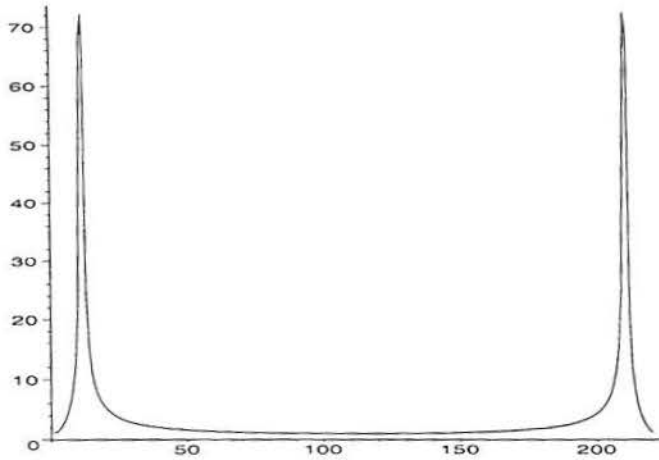


Figura 4.6: Periodograma do processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado no Exemplo 4.2.

Observe que os valores 0,2999 e 0,31 são muito próximos de 0,3 que é a frequência angular da componente senoidal do sinal.

Exemplo 4.3: Como

$$D_1 = D_2 = D_3 = 79$$

temos, aplicando o Teorema 4.1, que

$$\omega_0 = \frac{\pi D_1}{N-1} = \frac{79\pi}{199} = 1,247.$$

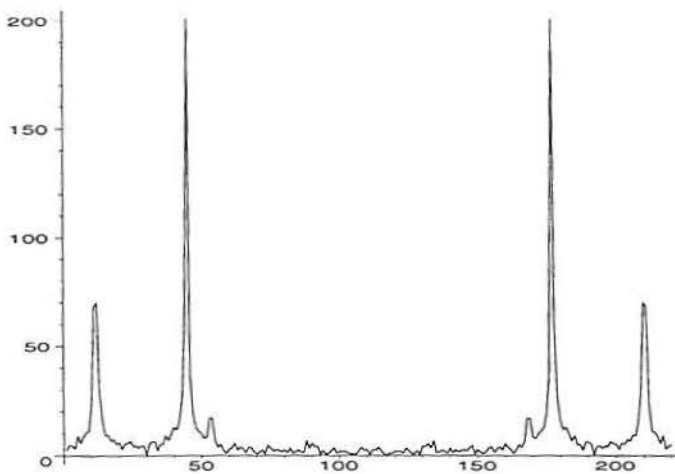


Figura 4.7: Periodograma do processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado no Exemplo 4.3.

A Figura 4.7 mostra o resultado da função periodograma do processo estocástico desse exemplo.

Usando a Figura 4.7, note que o ponto com abcissa $x = 45$ é um dos picos no gráfico. Então ,

$$P = \frac{220}{45} \cong 5.$$

A frequência angular ω_0 é dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{5} \cong 1,256.$$

Observe que os valores 1,247 e 1,256 são muito próximos de 1,25 que é a frequência angular mais próxima de 2π , do sinal deste exemplo. Esta é uma propriedade dos Cruzamentos de Ordem Superior que será provada no Teorema 4.2 deste capítulo.

Exemplo 4.4: Como

$$D_5 = D_6 = \dots = D_{10} = 165$$

temos que

$$\omega = \frac{\pi D_5}{N-1} = \frac{165\pi}{199} = 2,605.$$

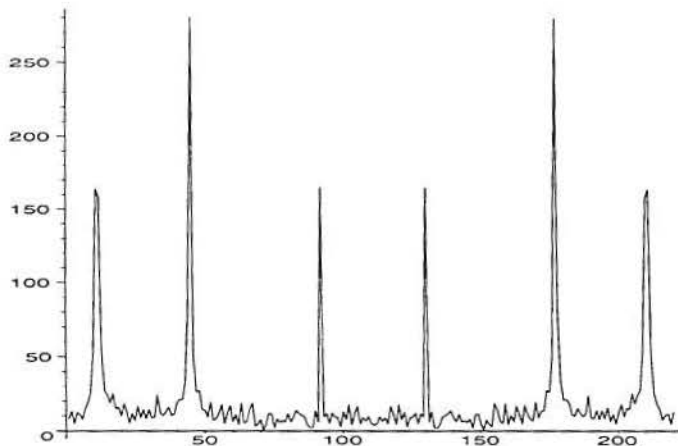


Figura 4.8: Periodograma do processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado no Exemplo 4.4.

A Figura 4.8 mostra o resultado da função periodograma do processo estocástico desse exemplo.

Usando a Figura 4.8, note que o ponto com abcissa $x = 90$ é um dos picos no gráfico. Então ,

$$P = \frac{220}{90} \cong 2,4.$$

A frequência angular ω_0 , é

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{2,4} \cong 2,61.$$

Observe que os valores 2,4 e 2,61 são muito próximos de 2,6 que é a frequência mais próxima de 2π , do sinal deste exemplo. Esta é uma propriedade dos Cruzamentos de Ordem Superior que será provada no Teorema 4.2 deste capítulo.

Exemplo 4.5: O D_k cresce, quando k cresce e não existem dois D_k iguais. Neste caso, não tem nenhuma componente senoidal isolada.

Nós vimos que, quando $\mathbb{E}(D_1)$ é igual a $\mathbb{E}(D_2)$, então o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma senóide pura. Similarmente, se $\mathbb{E}(D_k) = \mathbb{E}(D_{k+1})$, para $k \geq 2$, então $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ deve conter uma componente senoidal superposta com frequência

$$\omega = \frac{\pi \mathbb{E}(D_k)}{N-1}.$$

No caso Gaussiano os D_k tendem a aumentar na média, mas se eles coincidem isto indica que existe uma componente senoidal no processo analisado. Observe que a seqüência $\{\mathbb{E}D_k\}_{k \geq 1}$, pelo Teorema 4.1, é monótona e limitada e desse modo converge quando $k \rightarrow \infty$. O teorema a seguir nos mostra esse resultado (ver Kedem (1984)).

Teorema 4.2. *Suponha que $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ seja um processo estocástico estacionário Gaussiano com média zero e seja ω^* a maior frequência positiva no suporte espectral. Então, independente do tipo de espectro, para D_1 de tamanho N*

$$\frac{\pi \mathbb{E}(D_k)}{N-1} \rightarrow \omega^* \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Prova: Do processo estocástico diferença de ordem k , $\{\nabla^k Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$, conforme Definição 3.9, temos que

$$\nabla^k(Z_t) = (1 - \mathcal{B})^k Z_t. \quad (4.38)$$

Observe que a expressão (4.38) é a composição da função $(1 - \mathcal{B})Z_t$, k vezes, isto é,

$$(1 - \mathcal{B})^k Z_t = \underbrace{(1 - \mathcal{B}) \circ \cdots \circ (1 - \mathcal{B})}_{k \text{ vezes}} Z_t.$$

A função transferência do filtro linear $\nabla Z_t = (1 - \mathcal{B})Z_t$ é dada por

$$H(\omega) = \psi(e^{-i\omega}) = \sum_{j=0}^1 e^{-ij\omega} = (1 - e^{-i\omega}),$$

enquanto que a função ganho quadrada é dada por

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 = H(\omega)\overline{H(\omega)} &= (1 - e^{-i\omega})(1 - e^{i\omega}) = \\ &= [1 - \cos(\omega) + i \operatorname{sen}(\omega)][1 - \cos(\omega) - i \operatorname{sen}(\omega)] = \\ &= 1 - 2 \cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \operatorname{sen}^2(\omega) = \\ &= 1 - 2 \cos(\omega) + 1 = \\ &= 2 - 2 \cos(\omega) = \\ &= 2 [1 - \cos(\omega)]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Usando a propriedade trigonométrica

$$\cos(a) = \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

na expressão (4.39), temos que

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= 2 \left\{ 1 - \left[\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \right\} = \\ &= 2 \left[1 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] = \\ &= 2 \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] = \\ &= \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como

$$\nabla^k(Z_t) = (1 - \mathcal{B})^k Z_t = \underbrace{(1 - \mathcal{B}) \circ \dots \circ (1 - \mathcal{B})}_{k \text{ vezes}} Z_t,$$

pelo Método 2 - **Composição de Filtros Lineares** do Capítulo 3 - temos que a função ganho quadrada da expressão (4.38) é dada por

$$|H(\omega, k)|^2 = \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]^{2k}. \quad (4.41)$$

Pela Proposição 3.3 temos que o processo estocástico $\{\nabla^k Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ é estacionário e tem função de autocovariância, $\gamma_{\nabla^k Z}(h)$, dada pela seguinte expressão

$$\gamma_{\nabla^k Z}(h) = \sum_{j, l \in \mathbb{Z}} \psi_j \bar{\psi}_l \gamma_Z(h - j + l), \quad h \in \mathbb{Z}. \quad (4.42)$$

Sabemos que a função de autocovariância γ_h é função definida não negativa (ver propriedade *iii*) da função de autocovariância no Capítulo 2), e usando o Teorema 3.1 da Representação Espectral, temos que

$$\gamma_Z(h - j + l) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-j+l)\omega} dF_Z(\omega). \quad (4.43)$$

Então, substituindo (4.43) na expressão (4.42) temos que

$$\begin{aligned} \gamma_{\nabla^k Z}(h) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_j \bar{\psi}_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-j+l)\omega} dF_Z(\omega) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j e^{-ij\omega} \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{\psi}_l e^{il\omega} \right) e^{i\omega h} dF_Z(\omega) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j e^{-ij\omega} \right) \overline{\left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l e^{-il\omega} \right)} e^{i\omega h} dF_Z(\omega) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j e^{-ij\omega} \right|^2 dF_Z(\omega). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Como $|\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j e^{-ij\omega}|^2 = |H(\omega, k)|^2$, conforme Definição 3.4, podemos reescrever a expressão (4.44) da seguinte forma

$$\gamma_{\nabla^k Z}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h} |H(\omega, k)|^2 dF_Z(\omega). \quad (4.45)$$

Pela expressão (4.41) e como o processo estocástico $\{\nabla^k Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ só assume valores reais temos que

$$\gamma_{\nabla^k Z}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega h) \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{2k} dF_Z(\omega). \quad (4.46)$$

Usando as expressões (3.15) e (4.46) temos que

$$\begin{aligned} \rho_{\nabla^k Z}(1) &= \cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_k)}{N-1}\right) = \frac{\gamma_{\nabla^k Z}(1)}{\gamma_{\nabla^k Z}(0)} = \\ &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) [2 \operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})]^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} [2 \operatorname{sen}(\frac{\lambda}{2})]^{2k} dF_Z(\lambda)} = \\ &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) [\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})]^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(\frac{\lambda}{2})]^{2k} dF_Z(\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Definimos a medida $\nu_k(\cdot)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, por

$$\nu_k(d\omega) = \frac{[\operatorname{sen}(\frac{\omega}{2})]^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(\frac{\lambda}{2})]^{2k} dF_Z(\lambda)},$$

onde F_Z é a função de distribuição espectral do processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, a expressão (4.47) pode ser reescrita como

$$\cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_k)}{N-1}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) \nu_k(d\omega), \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \quad (4.48)$$

Vamos mostrar que

$$\nu_k \rightarrow \frac{1}{2} \delta_{-\omega^*} + \frac{1}{2} \delta_{\omega^*}, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

onde ω^* é a maior frequência do suporte espectral, e δ_u é a função delta de Dirac no ponto de massa unitário u , isto é, $\delta_u(\Lambda) = 1$, se $u \in \Lambda$ e 0, caso contrário, para qualquer subconjunto Λ em $[-\pi, \pi]$.

Pela expressão (4.40),

$$|H(\omega)|^2 = \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2.$$

Então, $|H(\omega)|^2$ é estritamente crescente em $[0, \pi]$. Para qualquer $\epsilon > 0$, temos que

$$\nu_k[0, \omega^* - \epsilon] = \frac{\int_0^{\omega^* - \epsilon} |H(\omega)|^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda)}.$$

Como $\nu_k(d\omega) = 0$ para valores fora do intervalo $[-\omega^*, \omega^*]$ pois, por hipótese, ω^* é a maior frequência positiva do suporte espectral, temos que

$$\nu_k[0, \omega^* - \epsilon] = \frac{\int_0^{\omega^* - \epsilon} |H(\omega)|^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{-\omega^*}^{\omega^*} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda)}. \quad (4.49)$$

Note que o denominador pode ser escrito como

$$\int_{-\omega^*}^{\omega^*} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda) = \int_{-\omega^*}^{-\epsilon/2} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda) + \int_{\omega^* - \epsilon/2}^{\omega^*} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda).$$

Sendo as duas integrais, na igualdade acima, positivas e usando apenas a segunda integral nesta igualdade, temos que

$$\nu_k[0, \omega^* - \epsilon] \leq \frac{\int_0^{\omega^* - \epsilon} |H(\omega)|^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{\omega^* - \epsilon/2}^{\omega^*} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda)}. \quad (4.50)$$

Como $|H(\omega)|^2$ é estritamente crescente em $[0, \pi]$, substituímos no numerador da expressão (4.50) o maior valor que a função $|H(\omega)|^2$ assume e no denominador pelo seu menor valor.

Obtemos então

$$\begin{aligned} \nu_k[0, \omega^* - \epsilon] &\leq \frac{\int_0^{\omega^* - \epsilon} |H(\omega)|^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{\omega^* - \epsilon/2}^{\omega^*} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda)} \leq \\ &\leq \left[\frac{|H(\omega^* - \epsilon)|^2}{|H(\omega^* - \frac{\epsilon}{2})|^2} \right]^k \frac{\int_0^{\omega^* - \epsilon} dF_Z(\omega)}{\int_{\omega^* - \epsilon/2}^{\omega^*} dF_Z(\lambda)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$, pois

$$\begin{aligned}\omega^* - \epsilon \leq \omega^* - \frac{\epsilon}{2} &\implies |H(\omega^* - \epsilon)|^2 \leq \left| H\left(\omega^* - \frac{\epsilon}{2}\right) \right|^2 \\ &\implies \left[\frac{|H(\omega^* - \epsilon)|}{|H(\omega^* - \frac{\epsilon}{2})|} \right]^2 \leq 1,\end{aligned}$$

já que $|H(\omega)|^2$ é monótona crescente em $[0, \pi]$. Portanto, por simetria, temos que

$$\nu_k[-\omega^* + \epsilon, \omega^* - \epsilon] \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.51)$$

Observe que $\nu_k(d\omega)$ é uma probabilidade em $[-\pi, \pi]$, pois

$$\nu_k([-\pi, \pi]) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^{2k} dF_Z(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} |H(\lambda)|^{2k} dF_Z(\lambda)} = 1.$$

Logo, $\nu_k([-\omega^*, \omega^*]) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ pois, por hipótese, ω^* é a maior frequência positiva do suporte espectral, ou seja,

$$\nu_k([-\omega^*, \omega^*]) = \nu_k([-\omega^*, -\omega^* + \epsilon] \cup [-\omega^* + \epsilon, \omega^* - \epsilon] \cup (\omega^* - \epsilon, \omega^*]) = 1.$$

Portanto, usando a expressão (4.51), temos que

$$\nu_k([-\omega^*, -\omega^* + \epsilon] \cup (\omega^* - \epsilon, \omega^*]) \rightarrow 1, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Logo, a medida de probabilidade ν_k converge para uma probabilidade simétrica com suporte somente nas direções de $-\omega^*$ ou de $+\omega^*$.

Sendo ν_k simétrica em $(-\pi, \pi)$, temos que

$$\nu_k \rightarrow \frac{1}{2}\delta_{-\omega^*} + \frac{1}{2}\delta_{\omega^*}, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.52)$$

Isto implica, pela expressão (4.48) e usando a expressão (4.52), que

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_k)}{N-1}\right) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) \nu_k(d\omega) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega) \delta_{-\omega^*} + \cos(\omega) \delta_{\omega^*}] d(\omega) = \\ &= \frac{1}{2} [\cos(-\omega^*) + \cos(\omega^*)] = \cos(\omega^*), \text{ quando } k \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\pi E(D_k)}{N-1} \rightarrow \omega^*, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

o que prova o Teorema 4.2. □

A seguir, mostraremos uma analogia entre os casos aleatório e determinístico sugeridos pelos Teoremas 4.2 e 4.3, respectivamente.

Roe (1980) provou o seguinte resultado que caracteriza uma função seno.

Teorema 4.3. *Seja $\{f^{(n)}; n \in \mathbb{Z}\}$ uma seqüência de funções definida na reta e com valores reais onde*

$$f^{(n+1)}(t) = \frac{d}{dt} f^{(n)}(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Se existe um valor real $M > 0$ tal que

$$|f^{(n)}(t)| \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e todo } t \in \mathbb{R},$$

então $f^{(0)}(t) = a \sin(t + \phi)$, para constantes $a, \phi \in \mathbb{R}$.

No caso determinístico, tanto $f^0 \equiv f$ como também suas derivadas e integrais devem ser limitadas. Mas no caso aleatório, estamos assumindo que o processo estocástico $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é Gaussiano e, portanto, não é limitado, já que a distribuição normal é definida sobre toda a reta.

A prova dada em Roe (1980) se baseia na demonstração de que a transformada de Fourier da função f se anula em todos os pontos exceto em $+1$ e -1 . Entretanto, na prova do Teorema 4.2 não mencionamos nenhuma análise do tipo Fourier. Contudo, ainda assim existe uma analogia em relação as funções de distribuição F_Z e F para os casos aleatório e determinístico, respectivamente.

Sabemos, pela propriedade *iii*) da função de autocovariância γ_h , vista no Capítulo 2, que γ_h é uma função definida não-negativa. Isto implica, usando o Teorema 3.1, que existe uma função de distribuição de probabilidade

simétrica F tal que a função de autocorrelação ρ_h admite a representação de Fourier dada por

$$\rho_h = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega h) dF(\omega),$$

onde a integral acima é uma integral de Stieltjes. O que podemos dizer de F quando $\mathbb{E}(D_1) = \mathbb{E}(D_2)$? Observe que, pela hipótese de Gaussianidade,

$$\cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N-1}\right) = \rho_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega) dF(\omega)$$

e pela expressão (4.47), temos que

$$\cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_2)}{N-1}\right) = \rho_{\nabla Z}(1) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega)[1 - \cos(\omega)] dF(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos(\omega)] dF(\omega)}.$$

Sendo F uma função de distribuição de probabilidade, existe uma variável aleatória Y com função de distribuição F . Então,

$$\rho_1 = \mathbb{E}[\cos(Y)] \quad (4.53)$$

e

$$\rho_{\nabla Z}(1) = \frac{\mathbb{E}[(\cos(Y))(1 - \cos(Y))]}{1 - \mathbb{E}[\cos(Y)]}, \quad (4.54)$$

de tal modo que, quando $\mathbb{E}(D_1) = \mathbb{E}(D_2)$, temos que $\rho_1 = \rho_{\nabla Z}(1)$ e usando as expressões (4.53) e (4.54) temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\cos(Y)] &= \frac{\mathbb{E}[(\cos(Y))(1 - \cos(Y))]}{1 - \mathbb{E}[\cos(Y)]} \\ \mathbb{E}[\cos(Y)] - \mathbb{E}^2[\cos(Y)] &= \mathbb{E}[(\cos(Y) - \cos^2(Y))] \\ \mathbb{E}[\cos(Y)] - \mathbb{E}^2[\cos(Y)] &= \mathbb{E}[\cos(Y)] - \mathbb{E}[\cos^2(Y)] \\ \mathbb{E}^2[\cos(Y)] &= \mathbb{E}[\cos^2(Y)]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Assim, pela expressão (4.55), temos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\cos(Y) - \mathbb{E}(\cos(Y))]^2 = \\ &= \mathbb{E}[\cos^2(Y) - 2\cos(Y)\mathbb{E}(\cos(Y)) + \mathbb{E}^2(\cos(Y))] = \\ &= \mathbb{E}[\cos^2(Y)] - 2\mathbb{E}^2[\cos(Y)] + \mathbb{E}^2[\cos(Y)] = \\ &= \mathbb{E}[\cos^2(Y)] - \mathbb{E}^2[\cos(Y)] = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, pela expressão (4.53) temos que

$$\mathbb{E}[\cos(Y) - \rho_1]^2 = 0.$$

Então,

$$\rho_1 = \cos(Y),$$

ou seja,

$$\cos\left(\frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N-1}\right) = \cos(Y).$$

Portanto,

$$Y = \frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N-1} + k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

ou seja, Y é uma variável aleatória que admite somente dois valores em $[-\pi, \pi]$, digamos $+\lambda_0$ e $-\lambda_0$. Como F é uma função de distribuição de probabilidade simétrica, ela precisa ter dois saltos, em $+\lambda_0$ e $-\lambda_0$, cada um de tamanho $1/2$. Em outras palavras,

$$F(\lambda+) - F(\lambda-) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } \lambda = \pm\lambda_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta degenerescência de F é análoga à singularidade na caracterização de senóide pura proposta por Roe (1980), no caso determinístico. \square

Na seção à seguir daremos uma prova, para um resultado análogo à parte (b) do Teorema 4.1., baseada em um processo estocástico conhecido na literatura da análise clássica de séries temporais, que é o modelo autoregressivo de segunda ordem (ver Definição 3.8), denotado por AR(2). Nesta prova as hipóteses do Teorema 4.1. são menos restritas já que não assumimos Gaussianidade para o processo AR(2).

É bom lembrar que em uma aplicação de dados reais a esperança do número de cruzamentos de ordem superior, $\mathbb{E}(D_j)$, é substituída por D_j , obtido a partir das N observações desta série temporal.

Lembramos ainda que a hipótese de que o processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ é Gaussiano pode nem sempre valer na prática.

4.1. Modelo Autoregressivo de Segunda Ordem.

Observe, pela Figura 4.9, que apresenta uma série temporal obtida de um AR(2), os dados parecem ter periodicidade, mas no entanto, não contêm nenhuma componente periódica. No início desse século foi percebido que ajustando os dados e superpondo senóides e ruídos, poderia se detectar certas periodicidades. Mas esse método não era prático e nem muito útil já que este freqüentemente conduzia a descobertas de falsos períodos.

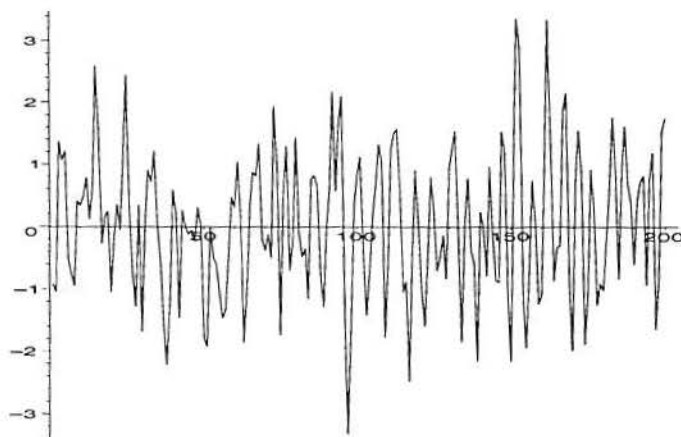


Figura 4.9: $Z_t = 0.5Z_{t-1} - 0.4Z_{t-2} + \epsilon_t$, com $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

No célebre artigo de Yule (1927) é apresentado um método diferente para modelar os dados, tais como os da Figura 4.9. Ele considera uma curva seno suavizada na qual o fator de suavização foi controlado por uma corrente de choques aleatórios.

O resultado foi um modelo de distúrbios harmônicos dado pela forma

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \epsilon_t, \quad (4.56)$$

definido como um processo autoregressivo de segunda ordem, onde $\{\epsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ é um ruído branco com média zero (ver Definição 2.6) e ortogonal, isto é,

$$\mathbb{E}(Z_t \epsilon_{t'}) = 0, \text{ se } t < t'. \quad (4.57)$$

Vamos dar agora uma prova para um resultado análogo ao Teorema 4.1 (b) em que as hipóteses são menos restritas, ou seja, não assumimos Gaussiandade. Se as raízes de $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$ estão fora do círculo unitário, então $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ é uma seqüência aleatória estacionária com média zero (ver Proposição 3.3). Neste caso, mostraremos que o modelo autoregressivo de segunda ordem, quando $\mathbb{E}(D_1) = \mathbb{E}(D_2)$, satisfaz a parte (b) do Teorema 4.1, isto é, ele é uma senóide pura.

Multiplicando a expressão (4.56) pela variável aleatória Z_{t-h} , temos que

$$Z_t Z_{t-h} = \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-h} + \phi_2 Z_{t-2} Z_{t-h} + \epsilon_t Z_{t-h}. \quad (4.58)$$

Aplicando a esperança na expressão (4.58), temos

$$\mathbb{E}(Z_t Z_{t-h}) = \mathbb{E}(\phi_1 Z_{t-1} Z_{t-h}) + \mathbb{E}(\phi_2 Z_{t-2} Z_{t-h}) + \mathbb{E}(\epsilon_t Z_{t-h}).$$

Como $\mathbb{E}(Z_t) = 0$, usando a definição de função de autocovariância (ver Definição 2.2) e a expressão (4.57), temos que

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \phi_2 \gamma_{h-2}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad (4.59)$$

onde $\gamma_k = \mathbb{E}(Z_t Z_{t-k})$.

Dividindo (4.59) por γ_0 , temos, pela definição de função de autocorrelação (ver Definição 2.2), que

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \phi_2 \rho_{h-2}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} - \{0\}. \quad (4.60)$$

Substituindo h por 1 e 2 na expressão (4.60) temos

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1, \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Assumindo que $\rho_0 = 1$ temos

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1, \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Usando a expressão (4.26), que diz que

$$\rho_{\nabla Z}(1) = \frac{-1 + 2\rho_1 - \rho_2}{2(1 - \rho_1)}, \quad (4.63)$$

temos o valor de ρ_2 dado por

$$\rho_2 = -1 + 2\rho_1 - 2\rho_{\nabla Z}(1)(1 - \rho_1). \quad (4.64)$$

Portanto, isolando ϕ_1 e ϕ_2 na expressão (4.62) e com o auxílio da expressão (4.64) temos

$$\phi_1 = \frac{2\rho_1(1 + \rho_{\nabla Z}(1))}{1 + \rho_1}, \quad \phi_2 = \frac{-1 + \rho_1 - 2\rho_{\nabla Z}(1)}{1 + \rho_1}. \quad (4.65)$$

Observe que, da expressão (4.56), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_t Z_t) &= \mathbb{E}[\phi_1 \epsilon_t Z_{t-1} + \phi_2 \epsilon_t Z_{t-2} + \epsilon_t^2] = \\ &= \phi_1 \mathbb{E}(\epsilon_t Z_{t-1}) + \phi_2 \mathbb{E}(\epsilon_t Z_{t-2}) + \mathbb{E}(\epsilon_t^2). \end{aligned}$$

Pela expressão (4.57) e Definição 2.6, temos que

$$\mathbb{E}(\epsilon_t Z_t) = \sigma_\epsilon^2. \quad (4.66)$$

Multiplicando a expressão (4.56) pela variável aleatória Z_t , temos que

$$Z_t Z_t = \phi_1 Z_{t-1} Z_t + \phi_2 Z_{t-2} Z_t + \epsilon_t Z_t. \quad (4.67)$$

Aplicando a esperança na expressão (4.67), temos

$$\mathbb{E}(Z_t^2) = \phi_1 \mathbb{E}(Z_{t-1} Z_t) + \phi_2 \mathbb{E}(Z_{t-2} Z_t) + \mathbb{E}(\epsilon_t Z_t).$$

Pela definição de função de autocorrelação (ver Definição 2.2) e usando a expressão (4.66), temos que

$$\rho_0 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \sigma_\epsilon^2. \quad (4.68)$$

Assumindo que $\rho_0 = 1$ e isolando σ_ϵ^2 na expressão (4.68) obtemos

$$\sigma_\epsilon^2 = 1 - \rho_1 \phi_1 - \rho_2 \phi_2. \quad (4.69)$$

Fazendo $0 \leq \mathbb{E}(D_2) - \mathbb{E}(D_1) \rightarrow 0$ e usando as igualdades da expressão (4.65) segue que

$$\phi_1 = \frac{2\rho_1(1 + \rho_{\nabla Z}(1))}{1 + \rho_1} \rightarrow \frac{2\rho_1(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1} = 2\rho_1, \quad (4.70)$$

$$\phi_2 = \frac{-1 + \rho_1 - 2\rho_{\nabla Z}(1)}{1 + \rho_1} \rightarrow \frac{-1 + \rho_1 - 2\rho_1}{1 + \rho_1} = \frac{-(1 + \rho_1)}{1 + \rho_1} = -1 \quad (4.71)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_2 = -1 + 2\rho_1 - 2\rho_{\nabla Z}(1)(1 - \rho_1) &\rightarrow \rho_2 = -1 + 2\rho_1 - 2\rho_1(1 - \rho_1) = \\ &= -1 + 2\rho_1^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Pelas expressões (4.70), (4.71) e (4.72), temos que

$$\sigma_\epsilon^2 = 1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2 \rightarrow 1 - 2\rho_1^2 + \rho_2 = 0, \quad (4.73)$$

quando $\mathbb{E}(D_2) - \mathbb{E}(D_1) \rightarrow 0$. Então ,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \epsilon_t \rightarrow 2\rho_1 Z_{t-1} - Z_{t-2},$$

quando $\mathbb{E}(D_2) - \mathbb{E}(D_1) \rightarrow 0$.

Em virtude da convergência acima, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tende a uma equação diferença de segunda ordem cuja solução é dada pela expressão (4.37), isto é,

$$Z_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{Z},$$

com $\omega = \frac{\pi \mathbb{E}(D_1)}{N-1}$.

□

5. APLICAÇÕES

Como aplicações do **Teorema 4.1** do Capítulo 4 deste trabalho, daremos, neste capítulo, dois exemplos de séries temporais de dados medidos que são o das manchas solares e o dos níveis de água na bacia do rio Paraná.

É bom lembrar que em uma aplicação de dados reais a esperança do número de cruzamentos de ordem superior, $E(D_j)$, é substituída por D_j , obtido a partir das N observações desta série temporal.

Lembramos ainda que a hipótese de que o processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ é Gaussiano pode nem sempre valer na prática.

5.1. Série Temporal das Manchas Solares

Manchas solares são provocadas pelas intensas explosões na superfície do Sol que podem causar interferências na emissão de sinais por satélites. Estas explosões provocam as manchas solares e ainda o lançamento de energia que, por sua vez, provoca intensa descarga elétrica gerando os ventos solares. Estas ondas magnéticas viajam pelo espaço a uma velocidade incrível de 1 milhão de quilômetros por hora.

Existem hoje, em órbita ao redor da Terra, cerca de 2000 satélites que podem sofrer graves danos em seus componentes elétricos quando em contato com os ventos solares, ou então, por causa das manchas solares ficarem por algum intervalo de tempo sem receber ou sem enviar mensagem, já que as manchas solares podem bloquear os sinais. Os componentes eletrônicos queimados podem trazer inoperância aos satélites e, com isso, causa a perda de milhões de dólares.

A idéia é prever a intensidade das manchas solares ou a chegada dos ventos solares à Terra, o mais cedo possível, para que os cientistas possam se precaver e também para que possam prever épocas adequadas para viagens interplanetárias no futuro.

A Figura 5.1 mostra o gráfico da série temporal das manchas solares em

dados anuais de 1749 a 1924 contendo 176 observações. É conhecido que estas observações contêm várias componentes periódicas e mais um possível ruído. O período mais significativo é o de um pouco mais de 11 anos. Para uma análise espectral completa para esta série temporal veja Anderson (1971), Bloomfield (1976) e Shumway (1988).

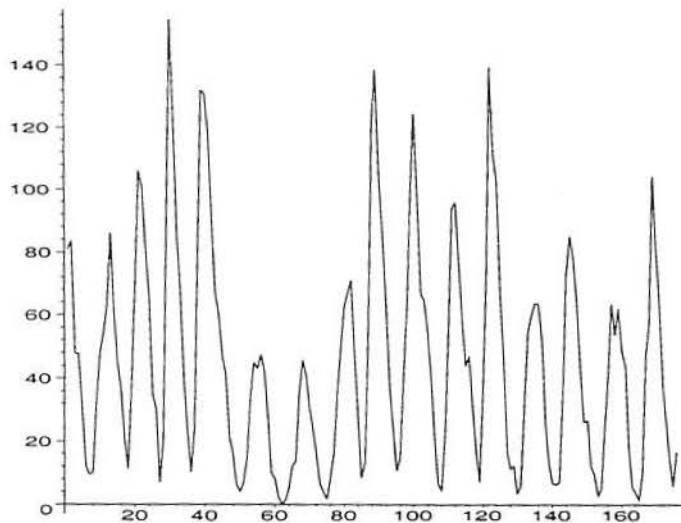


Figura 5.1: Série temporal manchas solares (1749 a 1924).

A Figura 5.2 mostra o resultado do logaritmo natural do periodograma da série manchas solares, na qual tem vários picos. Observe que o pico mais alto é o ponto com abcissa $x = 16$. Então, podemos fazer a seguinte relação para encontrar o período

$$P = \frac{176}{16} \cong 11,1 \text{ anos.}$$

Desejamos analisar a série temporal de manchas solares e descobrir se esta série temporal é oriunda de um processo estocástico que se enquadra nas hipóteses do Teorema 4.1.

Para encontrar o período usando cruzamentos de ordem superior, HOC, aplicamos à série temporal em questão um certo operador linear para suavizar e reduzir o ruído presente nas observações. O operador usado é um filtro que é uma combinação de filtros lineares. Primeiro, usamos o operador defasagem, \mathcal{B} , conforme Definição 3.5 e depois o filtro recursivo simples de primeira

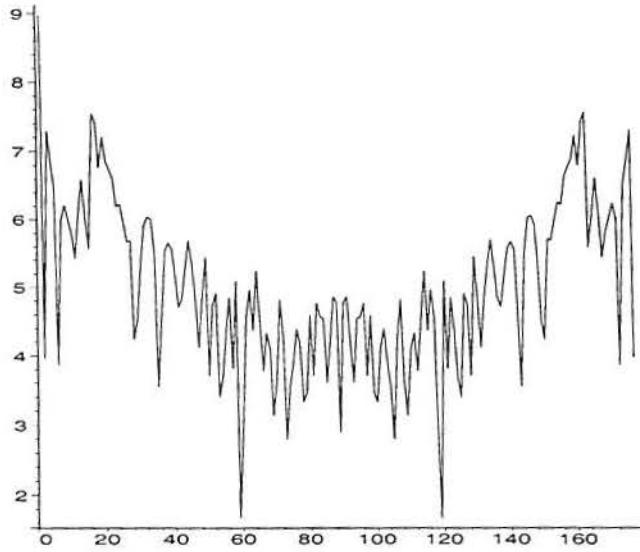


Figura 5.2: Logarítmo Natural do Periodograma da série temporal manchas solares com $N = 176$.

ordem, \mathcal{L} , dado na Definição 3.7, com $n = 10$ e $\alpha = 0,9$. Seja $\{\tilde{X}_t\}_{t=1}^N$ a série temporal sem a média dos dados originais, isto é,

$$\tilde{X}_t = X_t - \bar{X}_t,$$

sendo $\{X_t\}_{t=1}^N$ a série temporal original, $\bar{X}_t = 333,15$ a média dos dados observados e $N = 176$.

Usando a expressão (3.9) obtemos então uma outra seqüência $\{Y_t\}$ da seguinte forma:

$$Y_t = (1 + \mathcal{B})^{10} \tilde{X}_t, \quad t = 1, \dots, 176,$$

onde $\mathcal{B}^k X_t = X_{t-k}$ para todo $k = 1, \dots, 10$. Usando $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ encontramos uma nova seqüência $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ ao se aplicar o o filtro recursivo simples de primeira ordem (ver Definição 3.7) dado por

$$Z_t = \mathcal{L}(Y_t) = (1 - \alpha) Y_t + \alpha \mathcal{L}(Y_{t-1}), \quad t = 1, \dots, 163.$$

O processo $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ será o processo utilizado para encontrar os valores D_k , onde $N = 148$ reservando as 15 primeiras observações para as sucessivas diferenças (ver Exemplo 4.1).

Os primeiros oito D_k 's são $\{9, 25, 26, 26, 28, 38, 46, 60\}$ e observamos que $D_3 = D_4 = 26$. Usando o Teorema 4.1 encontramos a freqüência angular correspondente a $D_3 = 26$ que é

$$\omega_0 = \frac{26\pi}{147} = 0,556$$

cujo período é

$$P = \frac{2\pi}{0,556} = 11,301 \text{ anos.}$$

O período encontrado por Schuster (1906) foi de 11,125 anos. Observamos que os períodos estão muito próximos. E esta é a periodicidade mais forte na série temporal das manchas solares (ver Bloomfield (1976)). Desta maneira, os cruzamentos de ordem superior detectam a periodicidade mais forte desta série temporal.

Levando em consideração a Análise Espectral Clássica e aquela através dos Cruzamentos de Ordem Superior (descritas acima), concluímos que pode se assumir que o modelo adequado para descrever as manchas solares é o senoidal com componentes periódicas. \square

5.2. Série Temporal dos Níveis de Água na Bacia do Rio Paraná

Os dados foram obtidos do posto de medição de nível de água Ladário da bacia do rio Paraná, perto do Pantanal no Mato Grosso do Sul.

Foram feitas duas medições diárias do nível de água (em cm) medidas às 7h e 17h. Os dados diários são uma média destas duas medições. Foram coletados no período de janeiro de 1900 a dezembro de 1909, perfazem um total de 3650 dados.

A Figura 5.3 mostra o gráfico da série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná em dados diários de 1900 a 1909, contendo 3650 observações.

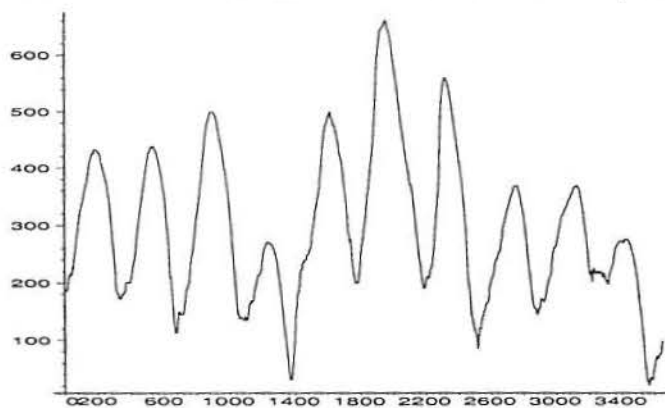


Figura 5.3: Série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná.

A Figura 5.4 mostra o resultado do periodograma da série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná , com freqüência no intervalo de (0, 70).

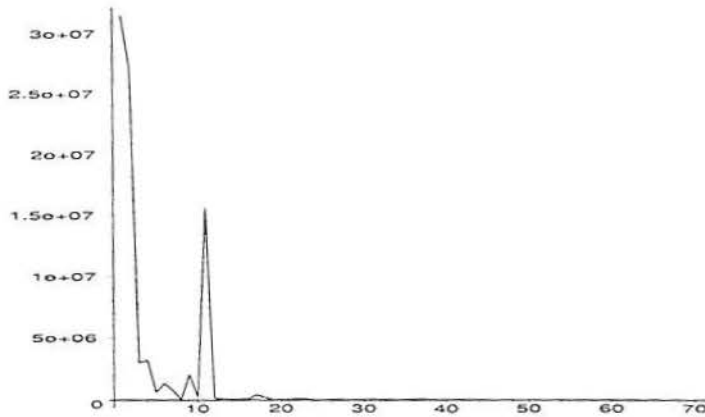


Figura 5.4: Periodograma da série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná com $N = 3650$.

Observe que o pico mais alto é o ponto com abcissa $x = 11$, excetuando-se a freqüência zero. Então , podemos fazer a seguinte relação para encontrar o período

$$P = \frac{3650}{11} \simeq 331,81 \text{ dias,}$$

o que corresponde a 11 meses, aproximadamente.

Desejamos analisar a série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná e descobrir se esta série temporal é oriunda de um processo estocástico que se enquadra nas hipóteses do Teorema 4.1.

Como a série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná não é estacionária não poderemos aplicar o Teorema 4.1 em toda a série. O que podemos fazer é trabalhar com a série temporal particionada e considerar a sub-série estacionária. Para isso dividimos a série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná em três partes onde ela é estacionária. A primeira sub-série vai da observação 1 até 1081, a segunda sub-série do dia 1405 até 2496 e terceira do dia 2469 até 3560.

Para encontrar o período através dos cruzamentos de ordem superior, aplicamos à primeira sub-série (1 até 1081) da série temporal em questão um certo operador linear para suavizar e reduzir o ruído presente nas observações. O operador usado é o filtro recursivo simples de primeira ordem, \mathcal{L} , dado na Definição 3.7, com $\alpha = 0,9$. Seja $\{\tilde{X}_t\}_{t=1}^N$ a série temporal sem a média dos dados no intervalo (1, 1081), isto é,

$$\tilde{X}_t = X_t - \bar{X}_t,$$

sendo $\{X_t\}_{t=1}^N$ a primeira parte da série temporal original, $\bar{X}_t = 310,42$ a média dos dados observados e $N = 1081$.

Aplicando o filtro recursivo simples de primeira ordem (ver Definição 3.7), dado por

$$Z_t = \mathcal{L}(\tilde{X}_t) = (1 - \alpha) \tilde{X}_t + \alpha \mathcal{L}(\tilde{X}_{t-1}), \quad t = 1, \dots, 1081,$$

utilizamos o processo $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ para encontrar os valores D_k , onde $N = 1072$ reservando as 9 primeiras observações para as sucessivas diferenças (ver Exemplo 4.1).

Os primeiros dez D_k 's são $\{6, 6, 336, 510, 690, 827, 876, 900, 908, 922\}$ e observamos que $D_1 = D_2 = 6$. Usando o Teorema 4.1 encontramos a frequência angular correspondente a $D_1 = 6$ que é

$$\omega_0 = \frac{6\pi}{1071} = 0,01091$$

cujo período é

$$P = \frac{2\pi}{0,01091} = 357 \text{ dias},$$

o que corresponde a 11,9 meses.

Na segunda parte da série temporal em questão aplicamos um filtro que é uma combinação de filtros lineares. Primeiro, usamos o operador defasagem, \mathcal{B} , conforme Definição 3.5 e depois o filtro recursivo simples de primeira ordem, \mathcal{L} , dado na Definição 3.7, com $n = 10$ e $\alpha = 0,9$. Seja $\{\tilde{X}_t\}_{t=1}^N$ a série temporal sem a média dos dados originais, isto é,

$$\tilde{X}_t = X_t - \bar{X}_t,$$

sendo $\{X_t\}_{t=1405}^{2496}$ a segunda parte da série temporal original, $\bar{X}_t = 380,15$ a média dos dados observados e $N = 1091$.

Usando a expressão (3.9), obtemos então uma outra seqüência $\{Y_t\}$ da seguinte forma

$$Y_t = (1 + \mathcal{B})^{10} \tilde{X}_t, \quad t = 1, \dots, 1091,$$

onde $\mathcal{B}^k X_t = X_{t-k}$ para todo $k = 1, \dots, 10$. Usando $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ encontramos uma nova seqüência $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ ao se aplicar o filtro recursivo simples de primeira ordem (ver Definição 3.7), dado por

$$Z_t = \mathcal{L}(Y_t) = (1 - \alpha) Y_t + \alpha \mathcal{L}(Y_{t-1}), \quad t = 1, \dots, 1081.$$

O processo $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ será utilizado para encontrar os valores D_k , onde $N = 1072$, reservando as 9 primeiras observações para as sucessivas diferenças (ver Exemplo 4.1).

Os primeiros dez D_k 's são $\{6, 6, 102, 208, 281, 353, 391, 437, 473, 515\}$ e observamos que $D_1 = D_2 = 6$. Usando o Teorema 4.1 encontramos a freqüência angular correspondente a $D_1 = 6$ que é

$$\omega_0 = \frac{6\pi}{1071} = 0,01091$$

cujos período é

$$P = \frac{2\pi}{0,01091} = 357 \text{ dias},$$

o que corresponde a 11,9 meses.

Na terceira parte da série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná aplicamos o mesmo filtro linear descrito acima, com $n = 10$ e $\alpha = 0,99$. Seja $\{\tilde{X}_t\}_{t=1}^N$ a série temporal sem a média dos dados originais, isto é,

$$\tilde{X}_t = X_t - \bar{X}_t,$$

sendo $\{X_t\}_{t=2469}^{3560}$ a terceira parte da série temporal original, $\bar{X}_t = 241,14$ a média dos dados observados e $N = 1091$.

Usando a expressão (3.9), obtemos então uma outra seqüência $\{Y_t\}$ da seguinte forma

$$Y_t = (1 + \mathcal{B})^{10} \tilde{X}_t, \quad t = 1, \dots, 1091,$$

onde $B^k X_t = X_{t-k}$ para todo $k = 1, \dots, 10$. Usando $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ encontramos uma nova seqüência $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ ao se aplicar o filtro recursivo simples de primeira ordem (ver Definição 3.7), dado por

$$Z_t = \mathcal{L}(Y_t) = (1 - \alpha) Y_t + \alpha \mathcal{L}(Y_{t-1}), \quad t = 1, \dots, 1081.$$

O processo $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ será utilizado para encontrar os valores D_k , onde $N = 1072$, reservando as 9 primeiras observações para as sucessivas diferenças (ver Exemplo 4.1).

Os primeiros dez D_k 's são $\{6, 6, 61, 210, 290, 336, 410, 441, 481, 519\}$ e observamos que $D_1 = D_2 = 6$. Usando o Teorema 4.1 encontramos a freqüência angular correspondente a $D_1 = 6$ que é

$$\omega_0 = \frac{6\pi}{1071} = 0,01091$$

cujos período é

$$P = \frac{2\pi}{0,01091} = 357 \text{ dias,}$$

o que corresponde a 11,9 meses.

Observamos que os períodos das três sub-séries onde a série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná é estacionária são iguais, $P = 357$ dias, obtido através dos Cruzamentos de Ordem Superior. Observamos ainda que $P = 357$ dias está muito próximo do período $P \simeq 331,81$ dias obtido utilizando a Análise Espectral Clássica. \square

6. CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Observamos, no Capítulo 4, que o Teorema 4.1. mostra a relação entre estruturas oscilatórias e a igualdade entre sucessivos $\mathbb{E}(D_k)$, para $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, ou seja, para um processo estocástico estacionário Gaussiano com média zero, variância $\sigma_Z^2 = 1$ e função de autocorrelação de ordem h , a seqüência $\{\mathbb{E}(D_k); k \geq 1\}$ é monótona não decrescente e limitada e ainda se $\mathbb{E}(D_1) = \mathbb{E}(D_2)$, o processo estocástico é uma senóide pura.

No Teorema 4.2. foi respondida uma pergunta natural baseada no resultado mostrado na parte (a) do Teorema 4.1., isto é, para que valor converge a seqüência $\{\mathbb{E}(D_k); k \geq 1\}$ quando $k \rightarrow \infty$, já que ela é monótona e limitada?

Pelo Teorema 4.2. vimos que

$$\frac{\pi \mathbb{E}(D_k)}{N-1} \rightarrow \omega^*, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

onde ω^* é a maior freqüência positiva do suporte espectral.

Comparando os resultados obtidos nos Exemplos 4.2, 4.3 e 4.4, onde usamos a Análise Espectral Clássica e aquela através de Cruzamentos de Ordem Superior, observamos que eles são muito próximos da freqüência angular mais próxima de 2π , propriedade esta dos Cruzamentos de Ordem Superior mostrada no Teorema 4.2.

O Teorema 4.3, mostra uma analogia entre os casos aleatório e determinístico em relação as funções de distribuição F_Z e F , respectivamente. Observamos que a degenerescência da F é análoga à singularidade na caracterização de uma senóide pura.

Mostramos na seção 4.1. uma prova para um resultado análogo a parte (b) do Teorema 4.1. em que as hipóteses eram menos restritas já que não assumimos Gaussianidade para o processo AR(2). Aproximamos duas esperanças sucessivas de cruzamentos de ordem superior, e com isso obtivemos

um processo estocástico $\{Z_t; t \in \mathbb{Z}\}$ que é uma senóide pura dado por

$$Z_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

com $\omega = \frac{\pi E(D_1)}{N-1}$.

No Capítulo 5, onde aplicamos o Teorema 4.1 na série temporal das manchas solares, observamos que a frequência encontrada é a mais forte no suporte espectral.

Ainda no Capítulo 5, antes de aplicar o Teorema 4.1 à série temporal dos níveis de água na bacia do rio Paraná foi necessário dividir a série em três partes pois a série temporal original não é estacionária. Observamos que o período encontrado, usando Análise Espectral baseada nos Cruzamentos de Ordem Superior, é próximo do período relacionado a frequência mais forte no suporte espectral encontrado usando a Análise Espectral Clássica.

Portanto, concluímos que a Análise Espectral baseada nos Cruzamentos de Ordem Superior é uma forma alternativa da Análise Espectral Clássica para verificar se existe periodicidade numa série temporal dada. Com a vantagem de que, conforme o Teorema 4.2., a Análise Espectral através dos Cruzamentos de Ordem Superior detecta também a maior frequência positiva do suporte espectral.

Como sugestões para futuros trabalhos pretendemos analisar, através de simulações, se é possível a ocorrência de um falso alarme, isto é, analisando um grande número (na ordem de 10.000) de séries temporais simuladas será que ocorrem dois D_k 's iguais em séries temporais sem periodicidade?

Gostaríamos de provar um resultado análogo ao Teorema 4.1. para processos estocásticos estacionários não Gaussianos, por exemplo, usando distribuições da família de Pearson (ver os Exemplos 4.3. e 4.4. que funcionam bem mesmo para processos não Gaussianos). Outro resultado interessante seria analisar o grau de convergência dos D_k 's.

Seria também interessante saber se existe um número ótimo para a quantidade de D_k 's. No trabalho Kedem e Slud (1982) os autores sugerem o uso dos dez primeiros D_k 's. Será que esta quantidade de D_k 's estaria relacionada com o tamanho amostral N ?

BIBLIOGRAFIA

- [1] Anderson, T. W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley, New York.
- [2] Bloomfield, P. (1976), *Fourier Analysis of Time Series*. John Wiley, New York.
- [3] Box, G. E. P., G. M. Jenkins e G. C. Reinsel (1995), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall, New York.
- [4] Brockwell, P. J. e R. A. Davis (1991), *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, 2ª edição, New York.
- [5] Durrett, R. (1996), *Probability - Theory and Examples*. Duxbury Press, 2ª edição, New York.
- [6] Elaydi, S. N. (1996), *An Introduction to Difference Equations*. Springer-Verlag, New York.
- [7] James, B. R. (1996), *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.
- [8] Karlin, S. e H. M. Taylor (1975), *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York.
- [9] Kedem, B. (1994), *Time Series Analysis by Higher Order Crossings*. IEEE Press, New York.
- [10] Kedem, B. (1984), On the sinusoidal limit of stationary time series. *Annals of Statistics*, Vol. 12, pp. 665-674.
- [11] Kedem, B. e E. Slud (1982), Time Series discrimination by Higher Order Crossings. *Annals of Statistics*, Vol. 10, pp. 786-794.
- [12] Kedem, B. (1986), A Stochastic Characterization of Sine Function. *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, pp. 430-440.

- [13] Koopmans, L. H. (1974), *The Spectral Analysis of Time Series*. Academic Press, New York.
- [14] Priestley, M. B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, Volume 1, New York.
- [15] Roe, J. (1980), A characterization of the sine function. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 87, pp. 69-73.
- [16] Schuster, A. (1906), On the periodicities of sunspots. *Philos. Trans. Royal Soc. London, Série A*, Vol. 206, pp. 69-100.
- [17] Shumway, R. H. (1966), *Applied Statistical Time Series Analysis*. Prentice Hall, New Jersey.
- [18] Stieltjes, T. J. (1889), Extrait d'une lettre adressée a M. Hermite. *Bulletin of Sciences in Math.*, Vol. 13, pp. 170-172.
- [19] Wei, W. (1990), *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. Addison Wesley, New York.
- [20] Yule, G. U. (1927), On a method for investigating periodicities in disturbed series with special reference of Wolfer's sunspot numbers. *Philos. Trans. Royal Soc. London, Série A*, Vol. 226, pp. 267-298.

8. APÊNDICE

Neste apêndice estão apresentadas as rotinas, construídas através da linguagem Fortran, que calculam os cruzamentos de ordem superior e encontram o processo estocástico diferença de ordem k para qualquer série temporal e ainda as rotinas que calculam os filtros lineares usados nas séries temporais Manchas Solares e Níveis de Água na Bacia do Rio Paraná.

A rotina abaixo conta os cruzamentos de ordem superior de uma série temporal através de duas formas diferentes: uma utiliza o Método 4.1 e outra o Método 4.2, ambos vistos no Capítulo 4. Observe que N indica o número de observações da série temporal estudada.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Implicit none
integer j,i,l,t,N
real z(4000),x(4000)
OPEN(UNIT=861,FILE='C:\MSDEV\PROJECTS\Dilson\Lad\kfLad0a9.dat')
write(*,*)'N='
read(*,*) N
do 5 t=1,N
read (861,*)z(t)
5    continue

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      Esta usa o Método 4.1 da Capítulo 4.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

      do 21 t=1, N
if(z(t).GE.0) then
x(t)=1
else
x(t)=0
end if
21    continue
      i=0.0
```



```

do 31 t=2, N
i=i+(x(t)-x(t-1))**2
31  continue
write (*,*)'Hoc=', i

cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
  Esta usa o Método 4.2 da Capítulo 4.
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

      l=0.0
    Do 20 j=2,N
    if (((z(j).lt.0).AND.(z(j-1).ge.0))
+.OR.((z(j).ge.0).AND.(z(j-1).lt.0)))then
      l=l+1
    end if
    20  continue
write (*,*)'total',l
      stop
end

```

%%%

A rotina abaixo foi usada para encontrar o processo estocástico diferença de ordem k , denotado por $\{\nabla^k X_t\}_{t \in T}$ (ver Definição 3.9.) e dado por

$$\dots, \nabla^k X_{-1}, \nabla^k X_0, \nabla^k X_1, \dots$$

onde ∇ é o operador diferença dado pela Definição 3.6.

%%%

```

program tesDIFHOC
  Implicit none
integer h,i,j,k,pf,qf,t,N
real soma,z(4000),fat(90),s(4000),w(4000)
OPEN(UNIT=860,FILE='C:\MSDEV\PROJECTS\dilson\Lad\kfLad0a9.dat')
OPEN(UNIT=861,FILE='C:\MSDEV\PROJECTS\dilson\Lad\kfLad0a1.dat')
write (*,*) 'N='
read(*,*) N
do 5 t=1, N
read (860,*) w(t)

```

```

5      continue
write (*,*)'Valor da k'
  read (*,*)k
  if (k.EQ.1) then
do 200 t=1, N-9
s(t)=z(t)-z(t-1)
write (861,*)s(t)
200   continue
      else
        do 10 t=1, N-9
do 20 i=0, k
  if ((i.eq.0).OR.(i.eq.k)) then
fat(i)=1
  else
    qf=1
pf=1
  Do 30 j=i+1, k
  pf=pf*j
30   continue
      Do 40 h=1, k-i
  qf=qf*h
40   continue
  fat(i)=pf/qf
  end if
20   continue
  soma=0
do 50 i=0,k
soma= soma+((-1)**i)*fat(i)*(z(t-i))
50   continue
  write(861,*)soma
10   continue
end if
stop
end

```

%%%

A rotina abaixo foi usada para aplicar o filtro linear, da Definição 3.5, isto é,

$$Y_t = (1 + \mathcal{B})^{10} \tilde{X}_t, \quad t = 1, \dots, N,$$

onde $\mathcal{B}^k X_t = X_{t-k}$ para todo $k = 1, \dots, 10$.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
program filtro10
  Implicit none
  integer h,i,j,pf,qf,t,N
  real soma,z(4000),fat(90),s(4000)
  OPEN(UNIT=860,FILE='C:\MSDEV\PROJECTS\dilson\Lad\Lad-Med.dat')
  OPEN(UNIT=861,FILE='C:\MSDEV\PROJECTS\dilson\Lad\fLad0a9.dat')
  write(*,*) 'N='
  read(*,*) N
  do 5 t=1, N
  read (860,*) s(t)
  z(t-15)=s(t)
5    continue
  do 10 t=1, N-15
  do 20 i=0, 15
    if ((i.eq.0).OR.(i.eq.15)) then
      fat(i)=1
    else
      qf=1
    pf=1
    Do 30 j=i+1,15
      pf=pf*j
30    continue
    Do 40 h=1,15-i
      qf=qf*h
40    continue
      fat(i)=pf/qf
    end if
  20    continue
    soma=0
  do 50 i=0,15
  soma= soma+fat(i)*(z(t-i))

```

```

50    continue
      write(861,*)soma
      write(*,*)soma
10    continue
stop
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

A rotina abaixo foi usada para aplicar o filtro linear recursivo simples de primeira ordem, \mathcal{L} , dado na Definição 3.7, com $\alpha = 0,9$, isto é,

$$Z_t = \mathcal{L}(Y_t) = (1 - \alpha) Y_t + \alpha \mathcal{L}(Y_{t-1}), \quad t = 1, \dots, N.$$

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      Implicit none
integer t ,N
real z(4000),s(4000)
OPEN(UNIT=861,FILE='C:\MSDEV\PROJECTS\dilson\Lad\fLad0a9.dat')
OPEN(UNIT=865,FILE='C:\MSDEV\PROJECTS\dilson\Lad\kfLad0a9.dat')
write (*,*) 'N='
read(*,*) N
      do 10 t=1, N
read(861,*)z(t)
10    continue
      s(0)=1
do 20 t=1,N
s(t)=(0.1)*z(t)+(0.9)*s(t-1)
write(865,*)s(t)
20    continue
stop
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```