

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

UNICIDADE SOBRE UM PROBLEMA INVERSO
DE VIBRAÇÕES

POR
ROSEMAIRA CARGNIN DALCIN

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA COMO REQUISITO PARCIAL PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

ORIENTADOR
PROF. Ph.D TERESA TSUKAZAN DE RUIZ

PORTO ALEGRE, MARÇO DE 1993

UFRRS
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA CENTRAL DE MATEMÁTICA

Dedico este trabalho
aos meus Pais e ao
Fernando

AGRADECIMENTO

Aos profs. Teresa T. de Ruiz pela orientação na elaboração deste trabalho e Julio C. Claeysen pelo auxílio.

"O importante não é saber o que fizemos com nós mesmos, mas o que fizemos com o que fizeram de nós.

Por isso agradecemos àqueles que nos educaram pelo que somos."

J. P. Sartre

Em especial,

A Deus, pelo dom da vida.

A minha família, pelo carinho, incentivo e ajuda recebidos.

Aos colegas e amigos: Sandra, Inês, José Vanderlei, Elba, Vânio, ... , pelo apoio e amizade.

Ao Dilomar Copetti, pelas correções feitas no texto.

Ao Departamento de Matemática da UFSM, pela liberação na elaboração final deste trabalho.

SUMÁRIO

	pag.
Resumo.....	7
Abstract.....	7
Introdução.....	8

CAPÍTULO 1

Matrizes de Jacobi	
1.1- Introdução.....	10
1.2- Definições.....	10
1.3- Propriedades.....	14

CAPÍTULO 2

Existência e Unicidade na Reconstrução no caso de Matrizes de Jacobi	
2.1- Introdução.....	18
2.2- Construção da Matriz de Jacobi.....	18
2.3- Unicidade da Matriz de Jacobi.....	27

CAPÍTULO 3

Unicidade num Sistema de N-Graus de Liberdade Não-Amortecido	
3.1- Introdução.....	30
3.2- Modelagem Matemática do Sistema Vibracional de um Prédio.....	30
3.3- Função Frequência Resposta.....	34
3.4- Obtenção da Matriz K, através dos Pólos e Zeros da Função Frequência Resposta.....	36

CAPÍTULO 4

Unicidade num Sistema de N-Graus de Liberdade Amortecido	
4.1- Introdução.....	39
4.2- Formulação do Problema Amortecido.....	39
4.3- Resultados sobre Unicidade.....	48
4.3.1- Unicidade no Extremo Superior.....	48
4.3.2- Unicidade no Extremo Inferior.....	52
4.3.3- Unicidade no Meio.....	52
4.3.4- Unicidade num Sistema Não-Amortecido.....	57

CAPÍTULO 5

Não-Unicidade num Sistema de N-Graus de Liberdade Não-Amortecido	
5.1- Introdução.....	58
5.2- Formulação do Problema Não-Amortecido.....	58
5.3- Resultados sobre Não-Unicidade num Sistema de N-Graus de Liberdade Não-Amortecido	63
5.4- Considerações sobre o Grau de Não-Unicidade.....	72
Bibliografia.....	
	78

RESUMO

A estrutura de uma construção de N-andares é modelada como um sistema massa-mola amortecimento com de N-graus de liberdade através da equação diferencial matricial $M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F$.

São estabelecidas condições para a determinação de forma única dos coeficientes de rigidez e amortecimento, considerando que a distribuição de massa é conhecida.

A não-unicidade da matriz de rigidez é considerada num sistema não-amortecido.

ABSTRACT

The structure of an N-story building is modeled as a lumped mass-spring system with N-degrees of freedom through the matrix differential equation $M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F$.

Uniqueness conditions for the determination of the stiffness and damping coefficients are established under the assumption that the mass distribution is known.

Non-uniqueness of the stiffness matrix is considered with an undamped system.

INTRODUÇÃO

Devido ao grande aumento de construções em regiões sismicamente ativas, mais e mais prognósticos exatos da resposta dinâmica de sistemas estruturais tornam-se necessários. Tais prognósticos requerem um conhecimento das propriedades dinâmicas dos sistemas considerados. Mais precisamente, as distribuições amortecimento e rigidez, as quais são importantes na variação linear da resposta deve ser investigada. Poucos pesquisadores tem tentado investigar os aspectos únicos associados com o problema inverso. [20].

Uma estrutura de N-andares ou um sistema solo de N-camadas é modelado quando acoplado a um sistema de N-graus de liberdade, consistindo de massa, mola e amortecimento.

Com o objetivo de melhorar o modelo analítico que podemos construir para descrever um sistema estrutural, tem sido realizados testes na área de engenharia civil em represas, pontes, construções de grandes elevações,

Este trabalho consiste em determinar as distribuições dos coeficientes de amortecimento e rigidez conhecida a força externa aplicada em um nível específico e a resposta do sistema correspondente a um dos andares, considerando conhecida, também a distribuição de massa.

Inicialmente, foram estabelecidas propriedades das matrizes de Jacobi frequentemente utilizadas no decorrer do trabalho. Construimos de forma única tais matrizes dado um conjunto de autovalores e autovalores da matriz truncada ou então de um conjunto de autovalores e a primeira linha ou coluna da matriz de autovetores.

Para um sistema amortecido é mostrado que a unicidade de resultados do problema inverso pode ser estabelecida a partir da localização apropriada dos sensores, isto é, podemos determinar de forma única as distribuições dos coeficientes de amortecimento e rigidez, quando a matriz de inércia for conhecida, aplicarmos uma força externa num nível adequado e obtemos a resposta do sistema num nível pré-estabelecido.

Ainda considerando sistemas não-amortecidos, porém assumindo que a força externa é aplicada na base, obtemos estimativas sobre o grau da não-unicidade.

Embora, o trabalho apresentado aqui foi motivado por problemas em identificação de construções, os resultados alcançados são aplicáveis na identificação de todos os sistemas que podem ser modelados pela equação $M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F$.

CAPITULO 1

MATRIZES DE JACOBI

1.1. Introdução

O desenvolvimento deste trabalho envolve essencialmente matrizes de Jacobi. Neste primeiro capítulo, serão estabelecidas algumas propriedades deste tipo de matrizes, as quais serão frequentemente utilizadas. O polinômio característico de uma matriz de Jacobi, será definido recursivamente em termos dos menores principais. Isto origina uma sequência polinomial do tipo Sturm, e permite estabelecer que seus zeros são reais e simples, ou seja, uma matriz de Jacobi possui espectro real isolado. [5]

1.2. Definições

1.2.1. Matriz Positiva Definida.

Uma matriz quadrada de ordem N , A , é dita positiva definida quando sua forma quadrática for positiva, isto é, $X^tAX > 0$, para um vetor qualquer $X \neq 0$, onde X^t indica o transposto de X .

O seguinte critério, para caracterizar matrizes positivas definidas, será frequentemente utilizado: Uma matriz quadrada de ordem N é positiva definida se e somente se os N menores principais,

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \text{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots,$$

$$D_N = \text{Det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

são todos estritamente positivos.

Notemos ainda que os autovalores de toda Matriz positiva definida são positivos.

1.2.2. Matriz de Jacobi.

Uma matriz real, A , de ordem N , será dita de Jacobi se A for simétrica e tridiagonal. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & -b_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & -b_{N-1} & a_N \end{bmatrix}. \quad (1.2.1)$$

Para uma matriz tridiagonal simétrica A , seu polinômio característico pode ser calculado recursivamente. Mais precisamente, se $P_i(\lambda)$ denota o i -ésimo menor principal superior de $(A - \lambda I)$, então,

$$P_i(\lambda) = (a_i - \lambda)P_{i-1}(\lambda) - b_{i-1}^2 P_{i-2}(\lambda), \quad i=2, 3, \dots, N.$$

$$P_1(\lambda) = (a_1 - \lambda)$$

$$P_0(\lambda) = 1 \quad (1.2.2)$$

Cada $P_i(\lambda)$ é um polinômio de grau i , e possui como coeficiente líder (o de potência λ^i) $(-1)^i$, uma vez que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{P_i(\lambda)}{\lambda^i} = (-1)^i. \quad (1.2.3)$$

Uma sequência finita de polinômios $q_0(\lambda)$, $q_1(\lambda)$, \dots , $q_N(\lambda)$, é dita de Sturm quando satisfaz as seguintes propriedades:

- a) O sinal de $q_0(\lambda)$ é constante.
- b) $q_i(\lambda)$ e $q_{i-1}(\lambda)$ não possuem zero comum. (1.2.4)
- c) $q_i(\lambda) = 0$ implica $q_{i+1}(\lambda)q_{i-1}(\lambda) < 0$.

Esta última propriedade é conhecida na literatura como sendo a propriedade de sequências de Sturm e relaciona-se à separação dos zeros dos polinômios $q_i(\lambda)$.

Para uma matriz de Jacobi, os polinômios $P_0(\lambda)$, $P_1(\lambda)$, \dots , $P_N(\lambda)$ formam uma sequência de Sturm. A condição a) é óbvia, b) é imediata por indução. $P_1(\lambda) = (a_1 - \lambda)$ e $P_2(\lambda) = (a_2 - \lambda)(a_1 - \lambda) - b_1^2$ não podem possuir o zero comum $\lambda = a_1$, caso contrário teria-se que $b_1 = 0$, o que não ocorre com matrizes de Jacobi. Suponha que $P_{i-1}(\lambda)$ e $P_i(\lambda)$ não possuam zero comum. Se $P_i(\lambda)$ e $P_{i+1}(\lambda)$ possuem um zero comum, então $P_i(\alpha) = P_{i+1}(\alpha) = 0$, mas $P_{i+1}(\alpha) = (a_{i+1} - \alpha)P_i(\alpha) - b_i^2 P_{i-1}(\alpha)$ implica $b_i^2 P_{i-1}(\alpha) = 0$. O que é uma contradição pela hipótese indutiva, pois teríamos $P_{i-1}(\alpha) = 0$ uma vez que $b_i^2 > 0$. Conclui-se que $P_i(\lambda)$ e $P_{i+1}(\lambda)$ não possuem zero comum. c) Finalmente da relação de recorrência (1.2.2) segue que $P_{i+1}(\alpha) = -b_i^2 P_{i-1}(\alpha)$.

A seguir será introduzida a função de Sturm. Para uma sequência finita de polinômios

$$q_0(\lambda), q_1(\lambda), \dots, q_N(\lambda),$$

define-se a função $S_r(\lambda)$, como sendo igual ao número cumulativo de mudanças de sinal na sequência de polinômios $q_i(\lambda)$, $i=0, 1, \dots, r$. Esta função possui a seguinte propriedade:

$S_r(\lambda)$ varia somente quando λ passa através de um zero de $q_r(\lambda)$.

De fato; é fácil verificar que $S_r(\lambda)$ muda somente quando λ passa através de um zero de um dos $q_s(\lambda)$, $s \leq r$. Portanto basta vermos que nenhuma mudança de $S_r(\lambda)$ ocorre quando $s < r$.

Suponhamos que $q_s(\lambda^0) = 0$, $1 \leq s < r$, então por (1.2.4-b) $q_{s-1}(\lambda^0) \neq 0$ e $q_{s+1}(\lambda^0) \neq 0$ têm sinais opostos. Os sinais da tríade $q_{s-1}(\lambda^0)$, $q_s(\lambda^0)$ e $q_{s+1}(\lambda^0)$ são portanto $+ 0 -$ ou $- 0 +$. Suponhamos o primeiro, e que $q_s(\lambda)$ é crescente numa vizinhança de λ^0 . (Para os outros casos é análogo).

Sendo assim, os sinais da tríade para valores de λ próximos e menores de λ^0 são $+-$, enquanto que para valores próximos porém maiores que λ^0 são $++$.

Logo para valores menores ou maiores que λ^0 , existe uma única mudança de sinal na tríade de polinômios, de forma que a tríade não contribui em qualquer mudança de $S_r(\lambda)$ conforme λ passa através de λ^0 .

Mas nenhum outro membro da sequência contribuirá em qualquer mudança de $S_r(\lambda)$ conforme λ passa através de λ^0 . No caso de λ^0 ser um zero de $q_t(\lambda)$, $|t-s| \geq 2$, não haverá novamente nenhuma mudança em $S_r(\lambda)$. Desta forma $S_r(\lambda)$ não mudará no todo.

1.3. PROPRIEDADES

A seguir estabeleceremos propriedades dos polinômios $P_i(\lambda)$, definidos para uma matriz de Jacobi.

Propriedade 1.3.1.

Seja A uma matriz de Jacobi de ordem N. Então:

- a) Os zeros do menor principal $P_r(\lambda)$ de $(A-\lambda I)$ são reais e simples. Além disso, para $P_r(\lambda^0) \neq 0$ e $S_r(\lambda^0) = k$, temos que $P_r(\lambda)$ tem k zeros menores que λ^0 .
- b) Se $P_r(\lambda)$ e $P_{r-2}(\lambda)$ tem um zero comum, então ele é $\lambda = a_r$.

Prova.

a) Como $P_s(\lambda) = (-1)^s \lambda^s + \dots$, temos que todos os $P_s(\lambda)$ serão positivos para λ negativo suficientemente grande, isto é, $\lambda \leq \alpha$, de modo que $S_r(\alpha) = 0$: α pode ser igual a zero se A for positiva definida. Por outro lado, para λ suficientemente grande e positivo, isto é, $\lambda \geq \beta$, o $P_s(\lambda)$ alternará de sinal, de modo que $S_r(\beta) = r$. Agora desde que $S_r(\lambda)$ pode crescer somente quando λ passa através de um zero de $P_r(\lambda)$, segue que todos os zeros de $P_r(\lambda)$ devem ser distintos. Pois se λ^0 fosse um zero de multiplicidade par, então $S_r(\lambda)$ não cresceria em absoluto conforme λ passasse através de λ^0 . Caso λ^0 fosse um zero de multiplicidade ímpar $S_r(\lambda)$ cresceria somente por uma unidade. Além disso se $P_r(\lambda^0) \neq 0$, $S_r(\lambda^0) = k$ e como $S_r(\lambda)$ só pode crescer quando λ passa através de um zero de $P_r(\lambda)$, e já que os zeros são todos simples, significa então que $P_r(\lambda)$ tem exatamente k zeros menores do que λ^0 .

b) É imediato a partir da relação de recorrência dada por (1.2.2) e por (1.2.4-b).

Propriedade 1.3.2.

Seja A uma matriz de Jacobi de ordem N. Então o número de zeros do menor principal $P_r(\lambda)$ de $(A-\lambda I)$ satisfazendo $\alpha < \lambda < \beta$ é exatamente $S_r(\beta) - S_r(\alpha)$.

Propriedade 1.3.3.

Seja A uma matriz de Jacobi de ordem N . Se λ^0 é um zero do menor principal $P_r(\lambda)$ de $(A-\lambda I)$, então conforme λ passa através de λ_-^0 e λ_+^0 , o sinal de $P_{r-1}(\lambda)P_r(\lambda)$ muda de $+$ para $-$ e $S_r(\lambda)$ cresce por unidade.

Prova.

Seja $P_r(\lambda_-^0)=0$ e $S_r(\lambda_-^0)=k$, ($k < r$). Como $S_r(\lambda)$ muda somente quando λ passa através de um zero, segue que $P_{r-1}(\lambda_-^0)$ e $P_r(\lambda_-^0)$ têm o mesmo sinal. Logo $P_{r-1}(\lambda_-^0)P_r(\lambda_-^0) > 0$. Por (1.2.4-c) temos que $P_{r-1}(\lambda_+^0)$ mantém o sinal, porém $P_r(\lambda_+^0)$ mudou. Portanto $P_{r-1}(\lambda_+^0)P_r(\lambda_+^0) < 0$ e $S_r(\lambda_+^0)=k+1$, já que as raízes de $P_r(\lambda)$ são simples.

Propriedade 1.3.4.

Seja A uma matriz de Jacobi de ordem N e $P_r(\lambda)$ o menor principal de $(A-\lambda I)$. Então:

- a) Os autovalores de A são todos distintos, isto é, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_N$.
- b) Os zeros de $P_r(\lambda)$ e $P_{r-1}(\lambda)$ entrelaçam-se uns aos outros.

Prova.

a) É imediato, pois os autovalores de A são exatamente os zeros de $P_N(\lambda)$, que são todos distintos pela Prop. 1.3.1-a).
b) Sejam μ_1 e μ_2 dois zeros vizinhos de $P_r(\lambda)$. Consideremos $P_r(\mu_1^-) > 0$ então $P_r(\mu_1^+) < 0$, também $P_r(\mu_2^-) < 0$ e $P_r(\mu_2^+) > 0$. Usando a Prop. 1.3.3. segue que $P_{r-1}(\mu_1^+) > 0$ e $P_{r-1}(\mu_2^-) < 0$. Desta forma $P_{r-1}(\lambda)$ muda de sinal entre μ_1^+ e μ_2^- e portanto existe, no mínimo um zero de $P_{r-1}(\lambda)$ em (μ_1, μ_2) .

Por (1.2.4-c) $P_{r+1}(\mu_i)$ e $P_{r-1}(\mu_i)$, $i=1, 2$, têm sinais opostos, logo $P_{r+1}(\mu_1^+) < 0$ e $P_{r+1}(\mu_2^-) > 0$, de modo que $P_{r+1}(\lambda)$ tem também, no mínimo um zero em (μ_1, μ_2) .

Mostremos agora que $P_{r-1}(\lambda)$ e $P_{r+1}(\lambda)$ têm um único

zero em (μ_1, μ_2) . Suponhamos por absurdo que $P_{r-1}(\lambda)$ (ou $P_{r+1}(\lambda)$) tenha dois (ou mais) zeros em (μ_1, μ_2) , então pelo mesmo argumento feito acima, $P_r(\lambda)$ teria um zero em (μ_1, μ_2) , contrariando assim o fato de que μ_1 e μ_2 são zeros vizinhos.

Veremos agora 2 (dois) exemplos que mostram a importância da função $S_r(\lambda)$ na separação das raízes de $P_1(\lambda)$.

Exemplo 1.

Considere os polinômios: $P_1(\lambda) = (2 - \lambda)$,

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

$$P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4.$$

Para $\lambda=0$, obtemos: $P_0(0)=1$, $P_1(0)=2$, $P_2(0)=3$, $P_3(0)=4$. Desta forma temos a seguinte sequência $\{1, 2, 3, 4\}$, para os quais não existe mudança de sinal, logo $S_r(\lambda)=0$, para todo r . Similarmente calculando a sequência de Sturm, para $\lambda=2$ e $\lambda=5$ obtemos $\{1, 0, -1, 0\}$ e $\{1, -3, 8, -21\}$ respectivamente. Portanto, $S_1(2)=0$, $S_2(2)=S_3(2)=1$ e $S_1(5)=1$, $S_2(5)=2$, $S_3(5)=3$.

Exemplo 2.

$N=3$. Sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, $\mu_1 \leq \mu_2$ e ν_1 raízes de $P_3(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ e $P_1(\lambda)$ respectivamente.

Notemos primeiro, diretamente de (1.2.2), que

$$P_i(\lambda) > 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow -\infty, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Desta forma $P_2(\lambda) > 0$ para $|\lambda| \rightarrow +\infty$, desde que P_2 é quadrática.

Além disso, por (1.2.4-c) $P_2(\nu_1) < 0$, portanto $\mu_1 < \nu_1 < \mu_2$. Analogamente P_3 é cúbico com $P_3(\lambda) > 0$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$, e desde que $P_1(\mu_1) > 0$ enquanto $P_1(\mu_2) < 0$ obtemos por (1.2.4-c) que $P_3(\mu_1) < 0$ e $P_3(\mu_2) > 0$. Logo $P_3(\lambda)$ tem uma raiz em cada um dos intervalos $(-\infty, \mu_1)$, (μ_1, μ_2) e $(\mu_2, +\infty)$ e

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2, \quad \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3.$$

Os polinômios $P_1(\lambda)$, $P_2(\lambda)$ e $P_3(\lambda)$ estão representados na figura 1(a) abaixo. Observe que as raízes de $P_N(\lambda)$, as quais são os autovalores de $(A-\lambda I)$, são distintas. Isto deriva do fato de que os elementos fora da diagonal de A são todos diferentes de zero.

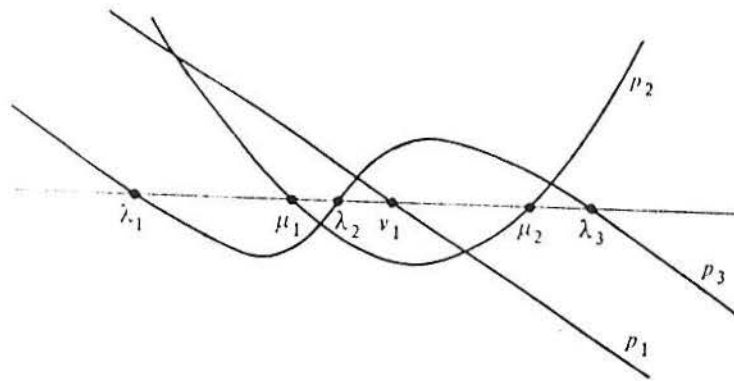


fig 1(a)

CAPITULO 2

Existência e Unicidade na Reconstrução no caso de Matrizes de Jacobi

2.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é a determinação de uma matriz de Jacobi, A , de forma única.

Primeiro veremos que é possível construí-la através dos autovalores, $(\lambda_1)_1^N$, e dos autovalores, $(\mu_1)_1^{N-1}$, da matriz truncada, obtida eliminando-se a última linha e coluna de A . [7], [9].

Outro problema inverso estudado, é a determinação de tal matriz, através dos seus autovalores $(\lambda_1)_1^N$ e sendo conhecidos os valores da primeira (ou última) linha da matriz de autovetores. [5].

2.2. Construção da Matriz de Jacobi

Denotemos por J a Matriz de Jacobi de ordem N , cujos os elementos na diagonal são a_1, a_2, \dots, a_N , e com elementos fora da diagonal, $-b_1, -b_2, \dots, -b_N$, sendo que consideraremos no que segue os b_1 's estritamente positivos.

Seja K a matriz truncada obtida eliminando-se a última linha e última coluna de J .

Assim sendo as matrizes J e K tomam a seguinte forma:

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & -b_{N-1} & a_N \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & a_{N-2} & -b_{N-2} \\ 0 & \dots & 0 & -b_{N-2} & a_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

No sucessivo, os autovalores de J serão denotados por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ e os de K por $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}$.

Teorema 2.2.1.

Dados dois conjuntos de valores espectrais $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ e $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}\}$, os quais satisfazem

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_{N-1} < \mu_{N-1} < \lambda_N. \quad (2.2.2)$$

Então podemos construir uma matriz de Jacobi, J, de ordem N, tal que os λ_j são os autovalores de J e μ_j são os autovalores de K.

Prova.

Dados os dois conjuntos de autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ e $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}\}$, ficam determinados os polinômios

$$P_N(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda_j - \lambda) \quad \text{e} \quad P_{N-1}(\lambda) = \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda).$$

Como $P_N(\lambda)$ e $P_{N-1}(\lambda)$ representam os polinômios característicos de uma matriz de Jacobi, eles satisfazem a relação de recorrência (1.2.2),

$$P_N(\lambda) = (a - \lambda)P_{N-1}(\lambda) - cP_{N-2}(\lambda), \quad (2.2.3)$$

onde $a = a_N$, $c = b_{N-1}^2$ e $P_1(\lambda)$ é o menor principal superior de ordem 1 de $(J - \lambda I)$, também cada $P_i(\lambda)$ é um polinômio de grau i , com primeiro coeficiente $(-1)^i$.

Sejam:

$$P_N(\lambda) = (-\lambda)^N + \alpha_{N-1}(-\lambda)^{N-1} + \dots + \alpha_0$$

$$P_{N-1}(\lambda) = (-\lambda)^{N-1} + \beta_{N-2}(-\lambda)^{N-2} + \dots + \beta_0 \quad (2.2.4)$$

$$P_{N-2}(\lambda) = (-\lambda)^{N-2} + \gamma_{N-3}(-\lambda)^{N-3} + \dots + \gamma_0.$$

Então, igualando os coeficientes de igual potência nas equações (2.2.3) e (2.2.4) obtemos

$$a = \alpha_{N-1} - \beta_{N-2} \quad (2.2.5)$$

$$c = a\beta_{N-2} + \beta_{N-3} - \alpha_{N-2} \quad (2.2.6)$$

$$\gamma_j = \frac{a\beta_j + \beta_{j-1} - \alpha_j}{c}, \quad j = N-3, N-4, \dots, 1 \quad (2.2.7)$$

$$\gamma_0 = \frac{a\beta_0 - \alpha_0}{c}. \quad (2.2.8)$$

Os coeficientes de P_{N-2} estão bem definidos desde que $c \neq 0$. Da definição de P_N e P_{N-1} segue que

$$\alpha_{N-1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j, \quad \alpha_{N-2} = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_{j+1} \sum_{k=1}^j \lambda_k,$$

$$\beta_{N-2} = \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j, \quad \beta_{N-3} = \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \sum_{k=j+1}^{N-1} \mu_k,$$

usando (2.2.5) e (2.2.6), tem-se

$$a = \sum_{j=1}^N \lambda_j - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j,$$

$$c = \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_{j+1} - \mu_j) \sum_{k=1}^j (\mu_k - \lambda_k).$$

Da condição de entrelaçamento nota-se que $c > 0$. Desta forma (2.2.3) é determinado de maneira única e $P_{N-2}(\lambda)$ é um polinômio real de grau $N-2$.

Para continuar o processo devemos mostrar que os zeros de $P_{N-1}(\lambda)$ e $P_{N-2}(\lambda)$ satisfazem a condição de entrelaçamento.

Desde que $P_{N-1}(\lambda) = 0$ para todos os autovalores μ_k , obtemos de (2.2.3) que

$$\prod_{j=1}^N (\lambda_j - \mu_k) = 0 - c P_{N-2}(\mu_k), \quad k=1, 2, \dots, N-1.$$

Desta condição e de (2.2.2) segue que o sinal de $P_{N-2}(\mu_k)$ é $(-1)^{k+1}$. Consequentemente, o polinômio $P_{N-2}(\lambda)$ tem um zero ν_k em cada um dos intervalos (μ_k, μ_{k+1}) . Isto caracteriza todas as raízes $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{N-2}$ de $P_{N-2}(\lambda) = 0$. Onde conclui-se que

$$\mu_1 < \nu_1 < \mu_2 < \nu_2 < \dots < \mu_{N-2} < \nu_{N-2} < \mu_{N-1}.$$

Logo podemos repetir o processo usando P_{N-1} e P_{N-2} e determinar a_{N-1} e b_{N-2} , e assim sucessivamente. O último coeficiente a_1 é determinado de $P_1(\lambda) = (a_1 - \lambda)$

Exemplo.

Sejam $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$, $\mu_1=4$, $\mu_2=7$, dois conjuntos de autovalores.

Assim,

$$P_N(\lambda) = P_3(\lambda) = \prod (\lambda_j - \lambda) = -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 69\lambda + 54.$$

$$P_{N-1}(\lambda) = P_2(\lambda) = \prod (\mu_j - \lambda) = \lambda^2 - 11\lambda + 28.$$

De (2.2.3) obtemos

$$-\lambda^3 + 16\lambda^2 - 69\lambda + 54 = -\lambda^3 + (a+11)\lambda^2 + (c-11a-28)\lambda + 28a - ca_1,$$

já que $P_{N-2}(\lambda) = P_1(\lambda) = (a_1 - \lambda)$.

Igualando os coeficientes das iguais potências temos

$$a = a_3 = 5, \quad c = 14, \quad \text{logo } b_2 = \pm\sqrt{14}, \quad a_1 = 43/7.$$

Usando P_{N-1} e P_{N-2} , tem-se

$$\lambda^2 - 11\lambda + 28 = \lambda^2 + (-43/7 - a')\lambda + 43/7a' - c'.$$

Novamente por igualdade de polinômios temos,

$$a' = a_2 = 34/7, \quad c' = b_1 = 90/49. \quad \text{Logo,}$$

$$J = \begin{bmatrix} 43/7 & -90/49 & 0 \\ -90/49 & 34/7 & -\sqrt{14} \\ 0 & -\sqrt{14} & 5 \end{bmatrix}$$

Veremos a seguir que podemos construir uma matriz de Jacobi, J , conhecendo o conjunto de autovalores de J , que são todos distintos, Prop. 1.3.4-a), e a primeira ou última linha da matriz de autovetores.[5]. A demonstração da existência usa o algoritmo de Lanczos, [Lanczos(1950), Golub(1973), Golub and Van Loan(1983)].

Teorema 2.2.2.

Dado $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, conjunto de autovalores onde $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, e seja U a matriz de autovetores normalizados, sendo conhecidos valores da primeira ou última linha de U , então pode-se determinar a matriz de Jacobi J , onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ são os autovalores de J .

Prova.

Provaremos para o caso em que a primeira linha da matriz de autovetores é conhecida, isto é, $(u_1^{(1)})_1^N$.

Seja $u^{(1)}$ autovetores de J , temos

$$Ju^{(1)} = \lambda_1 u^{(1)} \tag{2.2.9}$$

Tomando $U = [u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}]$, então a condição de ortogonalidade

$$u^{(i)t} u^j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.2.10)$$

produz $U^t U = I$, também $U U^t = I$.

De forma que

$$\sum_{i=1}^N u_r^{(i)} u_s^{(i)} = \delta_{rs}. \quad (2.2.11)$$

Se escrevermos $x^{(r)} = \{u_r^{(1)}, u_r^{(2)}, \dots, u_r^{(N)}\}$

temos $x^{(r)t} x^{(s)} = \delta_{rs}$.

Como J é uma matriz simétrica e real, pode ser diagonalizada, isto é, o sistema de equações dado por (2.2.9) pode ser escrito na forma

$$JU = U\Lambda \quad (2.2.12)$$

onde Λ é uma matriz diagonal. Considerando

$$X = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}] = U^t,$$

temos

$$XJ = \Lambda X,$$

ou seja

$$[x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(N)}] \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -b_{N-1} & a_N \end{bmatrix} = \Lambda [x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(N)}] \quad (2.2.13)$$

A primeira coluna deste sistema de equações é

$$a_1 x^{(1)} - b_1 x^{(2)} = \Lambda x^{(1)}. \quad (2.2.14)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.2.14) por $x^{(1)t}$ e considerando que $x^{(1)t} x^{(2)} = 0$, obtemos

$$a_1 = x^{(1)t} \Lambda x^{(1)}. \quad (2.2.15)$$

$$\text{Tomando } d^{(2)} = a_1 x^{(1)} - \Lambda x^{(1)}. \quad (2.2.16)$$

Se $\|x^{(2)}\|_2 = 1$, onde $\|\cdot\|_2$ é a norma quadrada do L_2 de x ,

$$\|x\|_2^2 = x^t x, \quad \|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{1/2},$$

temos que b_1 pode ser escolhido como

$$b_1 = \|d^{(2)}\|_2 \quad (2.2.17)$$

$$\text{então } x^{(2)} = \frac{d^{(2)}}{b_1}.$$

Assim estão determinados a_1 e b_1 . Consideremos a i -ésima coluna do sistema de equações dado por (2.2.13)

$$-b_{i-1}x^{(i-1)} + a_i x^{(i)} - b_i x^{(i+1)} = \Lambda x^{(i)}. \quad (2.2.18)$$

Numa etapa anterior encontramos $x^{(i)}$ de modo que $x^{(i)t} x^{(i-1)} = 0$, logo podemos escolher a_i , da seguinte forma

$$a_i = x^{(i)t} \Lambda x^{(i)} \quad (2.2.19)$$

então

$$d^{(i+1)} = -b_{i-1}x^{(i-1)} + a_i x^{(i)} - \Lambda x^{(i)} \quad (2.2.20)$$

$$e \quad b_i = \|d^{(i+1)}\|_2, \quad x^{(i+1)} = \frac{d^{(i+1)}}{b_i}, \quad i=2, 3, \dots, N. \quad (2.2.21)$$

Existem outros métodos numéricos de construção de uma matriz de Jacobi. Boor e Golup (1978), por exemplo constroem uma matriz de Jacobi através de polinômios ortogonais mônicos, usando produto interno discreto, sendo este processo considerado numericamente estável. Já o método de Hald (Teo 2.2.1) é considerado instável, pois os polinômios $P_{N-2}, P_{N-3}, \dots, P_1$ são encontrados cancelando-se sucessivamente os termos principais no par anterior de polinômios.

2.3. Unicidade da Matriz de Jacobi

Teorema 2.3.1.(Hochstadt). Seja J uma matriz de Jacobi de ordem N , e K a matriz truncada. Então podemos determinar unicamente J pelos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}$ de J e K , respectivamente.

Prova.

Seja $u=u(\lambda)$ autovetor de J . Então $u(\lambda)$ satisfaz a equação diferença

$$(a_1 - \lambda)u_1 - b_1 u_2 = 0 \quad (2.3.1)$$

$$-b_1 u_1 + (a_2 - \lambda)u_2 - b_2 u_3 = 0 \quad (2.3.2)$$

\vdots

$$-b_{i-1} u_{i-1} + (a_i - \lambda)u_i - b_i u_{i+1} = 0 \quad (2.3.4)$$

\vdots

$$-b_{N-2} u_{N-2} + (a_{N-1} - \lambda)u_{N-1} - b_{N-1} u_N = 0 \quad (2.3.5)$$

$$-b_{N-1} u_{N-1} + (a_N - \lambda)u_N = 0. \quad (2.3.6)$$

Podemos escolher a primeira componente do vetor u igual a um, isto é, $u_1=1$.

Agora λ_j é autovalor de J , se a solução u_j satisfaz a condição de fronteira (2.3.6), com $\lambda=\lambda_j$. Igualmente temos que μ_j é autovalor de K , se a solução u_j satisfaz (2.3.5) com $\lambda=\mu_j$, desde que $u_N(\mu_j)$ é zero, uma vez que $b_{N-1} \neq 0$.

Suponhamos que exista uma outra matriz de Jacobi \bar{J} , com elementos na diagonal \bar{a}_i e elementos fora da diagonal $-\bar{b}_i$, onde os b_i 's são estritamente positivos, e tal que os autovalores de \bar{J} e \bar{K} coincidem com os de J e K respectivamente. Sejam $u(\lambda_j)$ e $v(\lambda_j)$ autovetores

correspondentes aos autovalores λ_j de J e \bar{J} respectivamente. Desta forma

$$Ju(\lambda_j) = \lambda_j u(\lambda_j) \quad \text{e} \quad \bar{J}v(\lambda_j) = \lambda_j v(\lambda_j).$$

Se multiplicarmos ambos os lados da primeira equação por $v(\lambda_j)^t$ e da segunda equação por $u(\lambda_j)^t$ obtemos

$$v(\lambda_j)^t (J - \bar{J})u(\lambda_j) = 0, \quad j=1, 2, \dots, N. \quad (2.3.7)$$

Da mesma forma sejam $u(\mu_j)$ e $v(\mu_j)$ autovetores de K e \bar{K} respectivamente. Usando o mesmo argumento anterior chegamos a

$$v(\mu_j)^t (K - \bar{K})u(\mu_j) = 0, \quad j=1, 2, \dots, N-1. \quad (2.3.8)$$

Para cada um dos vetores $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^t$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^t$ temos

$$v^t J u = \sum_{i=1}^N a_i u_i v_i + \sum_{i=1}^{N-1} -b_i (u_i v_{i+1} + u_{i+1} v_i). \quad (2.3.9)$$

Consideremos agora a seguinte função auxiliar

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a}_i) u_i(\lambda) v_i(\lambda) + \sum_{i=1}^{N-1} (-b_i + \bar{b}_i) (u_i(\lambda) v_{i+1}(\lambda) + u_{i+1}(\lambda) v_i(\lambda)),$$

onde $u_i(\lambda)$ é a solução da equação diferença (2.3.1)-(2.3.6) e $v_i(\lambda)$ é definida igualmente para a Matriz de Jacobi \bar{J} .

Usando (2.3.7) e (2.3.9) segue que $F(\lambda_j) = 0$ para todos autovalores λ_j de J e \bar{J} .

Desde que $u_N(\mu_j) = v_N(\mu_j) = 0$ para todos os autovalores μ_j de K , temos que para $\lambda = \mu_j$ o último termo em cada soma de $F(\lambda)$ é zero. O que resta é o lado esquerdo de (2.3.8). Portanto $F(\mu_j) = 0$ para todos autovalores μ_j de K e \bar{K} . Como os autovalores de J e K se entrelaçam (Prop. 1.3.4-b) a função F é zero em pelo menos $(2N-1)$ pontos distintos.

Segue de (2.3.1)-(2.3.6) que $u_i(\lambda)$ é um polinômio em λ de grau $i-1$, com primeiro termo

$$u_i(\lambda) = (-1)^{i-1} (b_{i-1} \dots b_1)^{-1} \lambda^{i-1} + \dots,$$

igualmente obtemos

$$v_i(\lambda) = (-1)^{i-1} (\bar{b}_{i-1} \dots \bar{b}_1)^{-1} \lambda^{i-1} + \dots.$$

O primeiro somatório na definição de F é uma combinação linear de N polinômios de graus $0, 2, \dots, 2N-2$. Desde que todos os b_i 's são estritamente positivos, não existe cancelamento no primeiro coeficiente de

$$u_i(\lambda)v_{i+1}(\lambda) + u_{i+1}(\lambda)v_i(\lambda),$$

o qual é portanto um polinômio de grau $2i-1$. Assim o segundo somatório é uma combinação de $N-1$ polinômios de graus $1, 3, \dots, 2N-3$.

Garantimos assim que F é um polinômio de grau no máximo $2N-2$. Mas, tendo pelo menos $(2N-1)$ raízes, segue que F é identicamente nula.

Desde que os polinômios

$$u_i v_i \quad \text{e} \quad u_i v_{i+1} + u_{i+1} v_i$$

são linearmente independentes, obtemos

$$a_i - \bar{a}_i = 0 = -b_i + \bar{b}_i, \quad \text{portanto} \quad a_i = \bar{a}_i \quad \text{e} \quad b_i = \bar{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

CAPITULO 3

Unicidade num Sistema de N-Graus de Liberdade Não-Amortecido

3.1. Introdução

Neste capítulo obteremos a equação matricial que descreve um sistema mecânico no caso geral, isto é, $M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F$, porém discutiremos o problema inverso para um sistema não-amortecido. (O caso geral será visto no CAP. 4). [8], [15].

Este problema consiste na reconstrução da matriz de rigidez através dos pólos e zeros da função frequência resposta, considerando que cada componente do vetor deslocamento é conhecida. [5].

Observamos que para obter K , faremos uso das propriedades relativas às matrizes de Jacobi.

3.2. Modelagem Matemática do Sistema Vibracional de um Prédio

Num sistema mecânico vibratório com N -graus de liberdade, ou seja, N coordenadas independentes necessárias para a descrição do movimento, existem duas classes gerais de vibrações: a livre e a forçada. A vibração livre acontece quando o sistema oscila sob a ação de forças que lhes são inerentes, e na ausência de qualquer força externa. Trabalharemos aqui com a vibração forçada, que ocorre quando forças externas atuam sobre o sistema.

Consideraremos também os sistemas amortecidos, cujo efeito é retirar energia do sistema. Num sistema vibratório,

podemos encontrar muitos tipos de forças amortecedoras. Geralmente a descrição destas forças é complicada, utilizando-se assim modelos simplificados.

Em particular, será considerado o amortecimento viscoso, definido como sendo proporcional à velocidade.

Uma vez definido o modelo matemático da estrutura, constitui um problema da teoria das vibrações determinar a resposta da estrutura, ou seja, os deslocamentos que se desenvolvem nos seus elementos.

Aqui estaremos interessados no problema inverso, ou seja, consideraremos conhecida a força externa e a resposta do sistema relativa a esta força e passaremos a determinar as matrizes de rigidez e amortecimento, supondo conhecida a matriz de inércia.

As estruturas das figs. 3(a) e 3(b) correspondem respectivamente, a um modelo matemático de relações "ações-deslocamentos", num sistema massa-mola-amortecimento e sua relação com uma estrutura de N-andares ou um sistema solo de N-camadas.

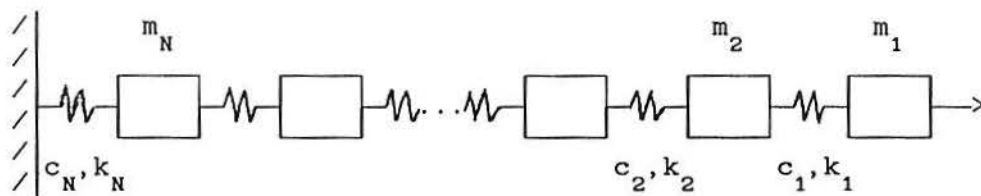


fig. 3(a)

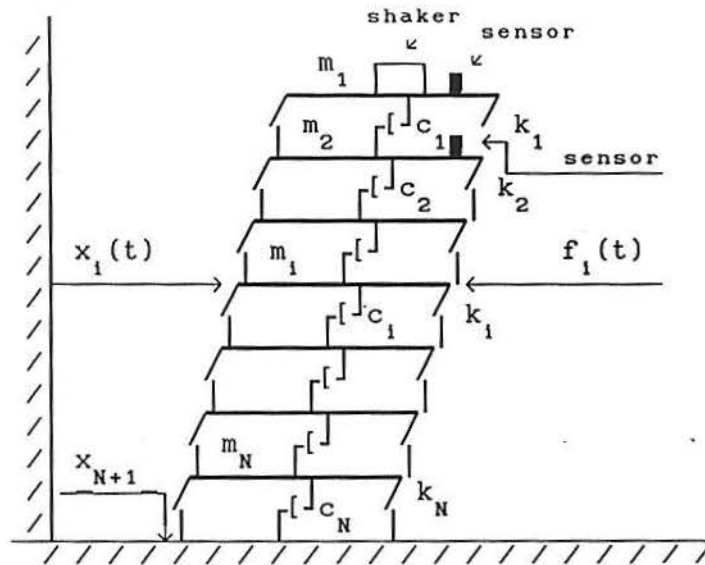


fig. 3(b)

Para o i -ésimo nível, denotemos por m_i , c_i e k_i a massa, o coeficiente de atrito e o coeficiente de rigidez (lei de Hooke) respectivamente. Seja f_i a força externa que atua sobre a massa m_i .

A partir da 2ª lei de Newton, temos

$$m \cdot a = \sum F = F_{\text{res}} \quad (3.2.1)$$

As equações do movimento, para as massas m_1, m_2, \dots, m_N tomam a seguinte forma:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 \dot{x}_1 + c_1 \dot{x}_2 - k_1 x_1 + k_1 x_2 + f_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = c_1 \dot{x}_1 - (c_1 + c_2) \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_3 + k_1 x_1 - (k_1 + k_2) x_2 + k_2 x_3 + f_2$$

⋮
⋮
⋮

$$m_N \ddot{x}_N = c_{N-1} \dot{x}_{N-1} - (c_{N-1} + c_N) \dot{x}_N + k_{N-1} x_{N-1} - (k_{N-1} + k_N) x_N + f_N$$

Escrevendo sob forma de matriz, temos

$$\begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & & & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -c_{N-1} \\ 0 & & & -c_{N-1} & c_{N-1}+c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -k_{N-1} \\ 0 & & & -k_{N-1} & k_{N-1}+k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente, surge a equação diferencial matricial de segunda ordem

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F, \quad (3.2.2)$$

onde

M: Matriz diagonal das massas ou matriz de inércia.

K: Matriz tridiagonal positiva definida, dos coeficientes de rigidez. Tal matriz é denominada matriz de rigidez.

C: Matriz tridiagonal positiva definida, dos coeficientes de amortecimento, denominada matriz de amortecimento.

F = F(t): Força externa

3.3. Função Frequência Resposta

Num sistema não-amortecido, isto é, $c_i=0$, suponhamos que seja aplicada uma força externa no i -ésimo nível do tipo exponencial, $F(t)=F_0 e^{i\omega t}$. Assim a equação (3.2.2) toma a seguinte forma

$$M \ddot{x}(t) + K x(t) = F_0 e^{i\omega t}, \quad (3.3.1)$$

com

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_0 \\ \\ \\ \rightarrow i\text{-ésima posição} \\ \\ \end{matrix}$$

Notemos que a equação diferencial em $x(t)$ dada por (3.3.1) é semelhante a equação diferencial ordinária em $y(t)$ dada por

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = F_0 e^{i\omega t}, \quad (3.3.2)$$

onde a solução geral de (3.3.1) é dada pela função complementar e pela integral particular. A função complementar é a solução geral da equação homogênea

$$M \ddot{x}(t) + K x(t) = 0, \quad (3.3.3)$$

o que representa fisicamente a vibração livre do sistema, e por outro lado, uma integral particular é uma solução qualquer de (3.3.1), sendo que é nesta parte da solução que o movimento forçado do sistema está representado. Procura-se então uma solução de (3.3.1) do tipo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \phi e^{i\omega t}, \quad (3.3.4)$$

onde ϕ representa as amplitudes dos x 's no movimento harmônico, cuja frequência ω é a mesma da força externa que excita o sistema sob consideração.

De (3.3.4) temos

$$\ddot{x}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_N(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \phi e^{i\omega t}, \quad (3.3.5)$$

substituindo (3.3.4) e (3.3.5) em (3.3.1) obtemos

$$(-\omega^2 M + K)\phi e^{i\omega t} = F e^{i\omega t}$$

ou equivalentemente

$$(K - \omega^2 M)\phi = F. \quad (3.3.6)$$

Supondo que ω não é a frequência natural do sistema ($\omega \neq \omega_0$), a matriz $(K - \omega^2 M)$ é não singular. Logo

$$\phi = (K - \omega^2 M)^{-1} F. \quad (3.3.7)$$

De (3.3.4) segue que $x(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= (K - \omega^2 M)^{-1} F e^{i\omega t}, \\ x(t) &= (K - \omega^2 M)^{-1} F(t). \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Seja $H(w) = (K - w^2 M)^{-1}$. Na teoria das vibrações cada componente $H_{ij}(w)$ da matriz de ordem N , $H(w)$, é chamada Função Frequência Resposta, onde cada H_{ij} corresponde a relação existente entre a entrada na posição j , (F_j) , e a saída na posição i , (x_i) .

Observemos que é conhecida cada componente do vetor $x(t)$, logo, também de $\phi(t)$.

3.4. Obtenção da Matriz K , através dos Pólos e Zeros da Função Frequência Resposta

Obtemos a função frequência resposta através do cálculo da matriz adjunta de $(K - w^2 M)$ e do seu determinante, isto é,

$$H(w) = (K - w^2 M)^{-1} = \frac{\text{adj}(K - w^2 M)}{\det(K - w^2 M)} \quad (3.4.1)$$

Consideremos M , a matriz de inércia conhecida, e analisemos os pólos e zeros de $H(w)$. Os pólos são obtidos pela solução de $\det(K - w^2 M)$, cuja solução é exatamente o conjunto de autovalores do problema de autovalor generalizado:

$$(K - w^2 M)x = 0, \quad \text{com } x \neq 0. \quad (3.4.2)$$

Os zeros são obtidos pela resolução de $\det C_i = 0$, onde C_i é a matriz de ordem $N-1$ obtida a partir de $(K - w^2 M)$ tirando-se a i -ésima linha e a i -ésima coluna, tal solução é a mesma do problema de autovalor generalizado:

$$(K - w^2 M)x = 0, \quad \text{com } x_i = 0, \quad (3.4.3)$$

pois os valores da i -ésima coluna de $(K - w^2 M)$ não importam, podendo ser substituídos por $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^t$, temos

então que o cálculo do determinante de $(K - w^2 M)$ com a i -ésima coluna substituída recai no cálculo do \hat{L} i -ésima posição $\det C_i$.

A matriz K é, portanto, obtida a partir dos pólos e zeros da função frequência resposta, que são respectivamente os autovalores dos problemas de autovalor generalizado

$$(K - w^2 M)x = 0, \quad x=0, \quad \text{e} \quad (K - w^2 M)x = 0, \quad x_i = 0.$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} M &= M^{1/2} M^{1/2} \\ u &= M^{1/2} x \\ \lambda &= w^2 \\ A &= M^{-1/2} K M^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

obtemos o problema de autovalor

$$(A - \lambda I)u = 0. \quad (3.4.5)$$

Portanto, determinados os dois conjuntos de autovalores, determinamos a matriz A usando Teo. 2.2.1., ficando assim determinada K , a matriz de rigidez, por (3.4.4), uma vez que a matriz de inércia M é considerada conhecida.

Exemplo.

Sejam $m_1=1$, $m_2=1$, e $m_3=2$. Os pólos $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$ e os zeros $\mu_1=4$ e $\mu_2=7$.

Os pólos são os autovalores de A, e os zeros são os autovalores da matriz truncada. Assim pelo Teo. 2.2.1, segue que A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 43/7 & -90/49 & 0 \\ -90/49 & 34/7 & -\sqrt{14} \\ 0 & -\sqrt{14} & 5 \end{bmatrix},$$

portanto, por (3.4.4) determinamos a matriz K:

$$K = \begin{bmatrix} 43/7 & -90/49 & 0 \\ -90/49 & 34/7 & -\sqrt{28} \\ 0 & -\sqrt{28} & 10 \end{bmatrix}.$$

CAPITULO 4

Unicidade num Sistema de N-Graus de Liberdade Amortecido

4.1. Introdução

Estudaremos como determinar unicamente as distribuições dos coeficientes de rigidez e amortecimento num sistema de N-graus de liberdade. Para isto assumiremos que a matriz das massas, M , é conhecida à priori, que a função força a qual excita o sistema é igual a zero quando $t=0$. Consideraremos ainda, que a função força gerada pelos excitadores é não nula sobre um intervalo finito durante testes de vibração.

Veremos que um correto posicionamento dos sensores, em algum nível específico, sendo conhecida uma componente do vetor deslocamento, junto à aplicação da força externa num nível adequado, nos conduz a unicidade das matrizes K e C . [17], [18].

Além disso, consideraremos um sistema não-amortecido e obteremos a matriz de rigidez. [20].

Usaremos para determinar tais matrizes, propriedades relativas a transformada de Laplace.

4.2. Formulação do Problema Amortecido

Consideremos a equação diferencial matricial dada por (3.2.2)

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F(t) \quad (4.2.1)$$

onde

$$F(t) = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^t f_1(t) = e_1 f_1(t).$$

Tomemos as funções f_i absolutamente integráveis e de crescimento exponencial limitadas. Aplicando transformada de Laplace na equação diferencial de 2^o ordem, dada por (4.2.1) a fim de reduzir tal sistema diferencial a um sistema algébrico, temos

$$(Ms^2 + Cs + K)X(s) = e_i F_i(s) \quad (4.2.2)$$

onde s é a variável transformada, $X(s)$ e $F_i(s)$ são as transformadas de $x(t)$ e $f_i(t)$ respectivamente, com $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Podemos escrever (4.2.2) como:

$$AX(s) = e_i F_i(s) \quad (4.2.3)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1(s) & -b_1(s) & \dots & 0 \\ -b_1(s) & a_2(s) & -b_2(s) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -b_{N-1}(s) & a_N(s) \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} b_i(s) &= c_1 s + k_1, & i=1, 2, \dots, N, \\ a_i(s) &= m_1 s^2 + b_{i-1}(s) + b_i(s), & i=1, 2, \dots, N, \\ k_0 &= c_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Notemos que A é uma matriz de Jacobi.

O problema consiste em determinar as distribuições dos coeficientes de rigidez e amortecimento unicamente.

Denotemos:

$-R_i(s)$ como sendo o i -ésimo menor principal inferior de A . $R_i(s)$ é um polinômio em s de grau $2(N-i+1)$, satisfazendo a seguinte fórmula de recorrência

$$\begin{aligned} R_i(s) &= a_i(s)R_{i+1}(s) - b_i^2(s)R_{i+2}(s), \quad i=1, 2, \dots, N. \\ R_{N+1}(s) &= 1 \\ R_{N+2}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$-P_i(s)$ como sendo o i -ésimo menor principal superior de A . $P_i(s)$ é um polinômio em s de grau $2i$, que satisfaz a fórmula de recorrência

$$\begin{aligned} P_i(s) &= a_i(s)P_{i-1}(s) - b_{i-1}^2(s)P_{i-2}(s), \quad i=1, 2, \dots, N. \\ P_0 &= 1. \\ P_{-1} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

$-\Delta_i(s)$ como sendo o determinante da matriz obtida de A , substituindo a j -ésima coluna pelo vetor e_i .

Assim sendo, podemos resolver (4.2.3) pela transformada da função resposta no $N-j+1$ -ésimo andar, $X_j(s)$, da seguinte forma:

$$X_j(s) = \frac{\Delta_i(s)}{R_1(s)} F_1(s), \quad (4.2.7)$$

onde $\frac{\Delta_i(s)}{R_1(s)}$ é a Função Frequência Resposta, definida como sendo a relação existente entre a entrada na posição i e a saída na posição j .

Vejam algumas propriedades dos polinômios $R_i(s)$ e $P_i(s)$, como também de suas funções auxiliares $r_i(s)$ e $p_i(s)$.

Propriedade 4.2.1.

Sejam $R_i(s)$ e $P_i(s)$ definidos anteriormente, satisfazendo (4.2.5) e (4.2.6), respectivamente. Então:

$$a) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_i(s)}{s^{2i}} = m_1 m_2 \dots m_i, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$b) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R_i(s)}{s^{2(N-i+1)}} = m_1 m_{i+1} \dots m_N, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$c) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_i(s)}{s^2 P_{i-1}(s)} = m_i, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$d) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R_i(s)}{s^2 R_{i+1}(s)} = m_i, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$e) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_i(s)}{s} = c_i, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Prova.

a) Por indução: $i=1$.

Usando (4.2.6) e (4.2.4), segue que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_1(s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_1(s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{m_1 s^{2+c_1} s^{k_1}}{s^2} = m_1.$$

Suponhamos que $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_i(s)}{s^{2i}} = m_1 m_2 \dots m_i$.

Provemos que $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_{i+1}(s)}{s^{2(i+1)}} = m_1 m_2 \dots m_i m_{i+1}$.

Mas por (4.2.4) e (4.2.6), tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_{i+1}(s)}{s^{2(i+1)}} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}(s)P_i(s) - b_i^2(s)P_{i-1}(s)}{s^{2(i+2)}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{(m_{i+1}s^2 + b_i(s) + b_{i+1}(s))P_i(s)}{s^{2(i+1)}} - \frac{b_i^2(s)P_{i-1}(s)}{s^{2(i+1)}} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} m_{i+1} \frac{P_i(s)}{s^{2i}} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_i(s)P_i(s)}{s^{2(i+1)}} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_{i+1}(s)P_i(s)}{s^{2(i+1)}} + \\ &- \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_i^2(s)P_{i-1}(s)}{s^{2(i+1)}}, \end{aligned}$$

usando a hipótese de indução na primeira parcela e o fato de que os três últimos termos $\rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$, temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P_{i+1}(s)}{s^{2(i+1)}} = m_1 m_2 \dots m_i m_{i+1}.$$

b) Por indução: $i=N$.

Usando (4.2.5), tem-se

$$R_N(s) = a_N(s) = m_N s^2 + b_{N-1}(s) + b_N(s),$$

por (4.2.4), segue que

$$R_N(s) = m_N s^2 + (c_{N-1} + c_N)s + k_{N-1} + k_N,$$

logo

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R_N(s)}{s^2} = m_N.$$

Supondo que $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R_i(s)}{s^{2(N-i+1)}} = m_i m_{i+1} \dots m_N$, $i=n+1, \dots, N$.

Provemos que $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R_n(s)}{s^{2(N-n+1)}} = m_n m_{n+1} \dots m_N$.

Podemos reescrever $R_n(s)$, usando (4.2.5) como

$$R_n(s) = a_n(s)R_{n+1}(s) - b_n^2(s)R_{n+2}(s), \text{ logo}$$

$$\frac{R_n(s)}{s^{2(N-n+1)}} = \frac{a_n(s)}{s^2} \frac{R_{n+1}(s)}{s^{2(N-n)}} - \frac{b_n^2(s)}{s^2} \frac{R_{n+2}(s)}{s^{2(N-n-1)}} \frac{1}{s^2},$$

por (4.2.4), tem-se

$$\frac{R_n(s)}{s^{2(N-n+1)}} = \frac{m_n s^2 + b_{n-1}(s) + b_n(s)}{s^2} \frac{R_{n+1}(s)}{s^{2(N-n)}} - \frac{b_n^2(s)}{s^2} \frac{R_{n+2}(s)}{s^{2(N-n-1)}} \frac{1}{s^2}.$$

Agora tomando limite quando $s \rightarrow \infty$ em ambos os lados da equação acima, e aplicando indução, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{R_n(s)}{s^{2(N-n+1)}} = m_n m_{n+1} \dots m_N,$$

uma vez que o segundo termo $\rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$.

c), d) e e) seguem imediato usando a), b) e a definição de $b_1(s)$, respectivamente.

Definiremos a seguir as funções auxiliares $r_i(s)$ e $p_i(s)$, em função dos polinômios $R_i(s)$ e $P_i(s)$, respectivamente.

$$p_i(s) = \frac{b_i(s)}{s} \left[1 - b_i(s) \frac{P_{i-1}(s)}{P_i(s)} \right], \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$r_{i-1}(s) = \frac{b_{i-1}(s)}{s} \left[1 - b_{i-1}(s) \frac{R_{i+1}(s)}{R_i(s)} \right], \quad i=2, \dots, N+1.$$

Propriedade 4.2.2.

As funções $r_i(s)$ e $p_i(s)$ definidas acima satisfazem respectivamente, as seguintes relações de recorrência:

$$a) p_i(s) = \frac{b_i(s)}{s} \frac{m_i s + p_{i-1}(s)}{m_i s + b_i(s)/s + p_{i-1}(s)}, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$b) r_{i-1}(s) = \frac{b_{i-1}(s)}{s} \frac{m_i s + r_i(s)}{m_i s + b_{i-1}(s)/s + r_i(s)}, \quad i=2, 3, \dots, N.$$

quando $m_{N+1} = \infty$

Prova.

$$a) \text{ Por definição, } p_i(s) = \frac{b_i(s)}{s} \left[1 - b_i(s) \frac{P_{i-1}(s)}{P_i(s)} \right] =$$

$$= \frac{b_i(s)}{s} \left[\frac{P_i(s) - b_i(s)P_{i-1}(s)}{P_i(s)} \right], \text{ usando (4.2.6), temos que}$$

$$p_i(s) = \frac{b_i(s)}{s} \left[\frac{a_i(s)P_{i-1}(s) - b_{i-1}^2(s)P_{i-2}(s) - b_i(s)P_{i-1}(s)}{a_i(s)P_{i-1}(s) - b_{i-1}^2(s)P_{i-2}(s)} \right],$$

usando (4.2.2), tem-se

$$p_i(s) = \frac{b_i(s)}{s} \left[\frac{(m_i s^2 + b_{i-1} + b_i)P_{i-1}(s) - b_{i-1}^2 P_{i-2}(s) - b_i P_{i-1}(s)}{(m_i s^2 + b_{i-1} + b_i)P_{i-1}(s) - b_{i-1}^2 P_{i-2}(s)} \right]$$

dividindo numerador e denominador por $sP_{i-1}(s)$, temos

$$p_i(s) = \frac{b_i(s)}{s} \left[\frac{m_i s + (b_{i-1}/s)(1 - b_{i-1} P_{i-2}(s)/P_{i-1}(s))}{m_i s + b_i/s + (b_{i-1}/s)(1 - b_{i-1} P_{i-2}(s)/P_{i-1}(s))} \right],$$

e o resultado segue.

A outra parte segue de maneira análoga.

Propriedade 4.2.3.

As funções $p_i(s)$ e $r_i(s)$ definidas acima satisfazem:

$$a) \lim_{s \rightarrow \infty} p_i(s) = c_i \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} r_i(s) = c_i, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$b) \lim_{s \rightarrow \infty} (p_i(s) - c_i)s = k_i - \frac{c_i^2}{m_i} \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (r_i(s) - c_i)s = k_i - \frac{c_i^2}{m_{i+1}}.$$

$$c) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_i(s)}{s} = \sum_{l=1}^i m_l, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

Prova.

a) Pela definição de $p_1(s)$ e por (4.2.4), obtemos

$$p_1(s) = \frac{(c_1 s + k_1)}{s} \left[1 - \frac{b_1(s)}{s^2} \frac{P_{1-1}(s)}{P_1(s)} s^2 \right].$$

Tomando limite quando $s \rightarrow \infty$ e usando a Prop. 4.2.1-c), tem-se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} p_1(s) = c_1.$$

A prova para $r_1(s)$ segue de maneira análoga.

b) Pela definição de $p_1(s)$ e (4.2.4), segue

$$(p_1(s) - c_1)s = k_1 - \frac{(c_1 s + k_1)^2}{s^2} \frac{P_{1-1}(s)}{P_1(s)} s^2. \quad \text{Tomando limite}$$

quando $s \rightarrow \infty$, em ambos os lados da equação acima e usando Prop. 4.2.1-c), obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (p_1(s) - c_1)s = k_1 - \frac{c_1^2}{m_1}.$$

A outra parte segue de maneira análoga.

c) Segue por indução.

$$i=1. \quad \frac{p_1(s)}{s} = (c_1 s + k_1) \frac{m_1}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1}.$$

Tomando limite quando $s \rightarrow 0$, temos $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{p_1(s)}{s} = \frac{m_1}{1}$.

Suponhamos que o resultado é válido para $n=1, 2, \dots, i$.

Temos então,

$$\frac{p_i(s)}{s} = \frac{m_i + p_{i-1}(s)/s}{m_i s^2/b_i(s) + 1 + (p_{i-1}(s)/s)(s^2/b_i(s))},$$

onde segue que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{p_i(s)}{s} = m_i + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p_{i-1}(s)}{s} = m_i + \sum_{l=1}^{i-1} m_l = \sum_{l=1}^i m_l,$$

4.3. Resultados sobre Unicidade

A unicidade das distribuições dos coeficientes de rigidez e amortecimento é possível sob certas condições que dependem da localização apropriada dos sensores, assim como da aplicação da força externa num nível adequado.

No que segue, consideraremos um sistema do tipo

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F$$

$$\dot{x}(0) = x(0) = 0. \quad (4.3.1)$$

4.3.1. Unicidade no Extremo Superior

Assumiremos que um vibrador está localizado no andar mais alto de uma estrutura, ou seja, a força externa é aplicada no topo. Consideraremos também que a resposta $x_1(t)$ do sistema é dada neste andar, onde $x_1(t)$ significa que um sensor está localizado no topo.

Consideraremos ainda que o sistema está em repouso e equilíbrio para $t=0$, que a função força a qual excita o sistema é contínua, e é zero quando $t \leq 0$.

Teorema 4.3.1.

Dada a matriz das massas, M , a força externa aplicada no topo, $f_1(t)$, e a primeira componente do vetor deslocamento, $x_1(t)$, de um sistema dado por (4.3.1), então as matrizes de rigidez e amortecimento podem ser determinadas de forma única.

Prova.

Começaremos determinando k_1 e c_1 , da seguinte forma: Fazemos em (4.2.7), $i=j$ e obtemos

$$X_i(s) = \frac{P_{i-1}(s)R_{i+1}(s)}{R_1(s)} F_i(s), \quad (4.3.2)$$

Como $i=1$, a equação (4.3.2) torna-se,

$$X_1(s) = \frac{R_2(s)}{R_1(s)} F_1(s),$$

ou

$$\frac{F_1(s) R_1(s)}{X_1(s) R_2(s)} = \frac{a_1(s)R_2(s) - b_1^2(s)R_3(s)}{R_2(s)} = a_1(s) - b_1^2(s) \frac{R_3(s)}{R_2(s)} \quad (4.3.3)$$

onde $R_1(s)$, $R_2(s)$ e $R_3(s)$ são polinômios de graus $2N$, $2(N-1)$, $2(N-2)$, respectivamente.

Usando (4.2.4), segue que

$$\frac{F_1(s)}{X_1(s)} = m_1 s^2 + b_1(s) - b_1^2(s) \frac{R_3(s)}{R_2(s)}$$

$$\frac{F_1(s)}{X_1(s)} - m_1 s^2 = c_1 s + k_1 - b_1^2(s) \frac{R_3(s)}{R_2(s)}, \quad (4.3.4)$$

dividindo ambos os lados de (4.3.4) por s ,

$$\left[\frac{1}{s} \frac{F_1(s)}{X_1(s)} - m_1 s \right] = c_1 + \frac{k_1}{s} - \frac{b_1^2(s)}{s^3} \frac{R_3(s)}{R_2(s)} s^2. \quad (4.3.5)$$

Tomando limite quando $s \rightarrow \infty$ em (4.3.5) e usando a Prop. 4.2.1-d) temos:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} \frac{F_1(s)}{X_1(s)} - m_1 s \right] = c_1 - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(c_1 s + k_1)^2}{s^3} \frac{1}{m_2} = c_1. \quad (4.3.6)$$

Calculado c_1 por (4.3.6), voltamos em (4.3.4) e obtemos

$$\frac{F_1(s)}{X_1(s)} - m_1 s^2 - c_1 s = k_1 - \frac{(k_1 + c_1 s)^2}{s^2} \frac{R_3(s)}{R_2(s)} s^2. \quad (4.3.7)$$

Tomando limite quando $s \rightarrow \infty$, e usando a Prop. 4.2.1-d), temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{F_1(s)}{X_1(s)} - m_1 s^2 - c_1 s \right] + \frac{c_1^2}{m_2} = k_1 \quad (4.3.8)$$

Determinado c_1 e k_1 , usamos (4.3.4) para obter $r_1(s)$, conforme segue:

$$\left[\frac{F_1(s)}{X_1(s)} - m_1 s^2 \right] \frac{1}{s} = \frac{c_1 s + k_1}{s} - \frac{b_1^2(s)}{s} \frac{R_3(s)}{R_2(s)} = \frac{b_1(s)}{s} \left[1 - b_1(s) \frac{R_3(s)}{R_2(s)} \right] \quad (4.3.9)$$

logo

$$\left[\frac{F_1(s)}{X_1(s)} - m_1 s^2 \right] \frac{1}{s} = r_1(s). \quad (4.3.10)$$

Assim, determinamos $r_1(s)$, $b_1(s)$ e por conseguinte, $a_1(s)$. Podemos então expressar $r_2(s)$ usando Prop. 4.2.2-b). Agora, conhecendo as funções $r_i(s)$, podemos determinar k_n e c_n , $n=i, i+1, \dots, N$, unicamente, usando os três passos abaixo.

$$\text{PASSO 1- } c_i = \lim_{s \rightarrow \infty} r_i(s), \text{ pela Prop. 4.2.3-a).} \quad (4.3.11)$$

$$\text{PASSO 2- } k_i = \frac{c_i^2}{m_{i+1}} + \lim_{s \rightarrow \infty} (r_i(s) - c_i)s, \quad m_{N+1} = \infty,$$

pela Prop. 4.2.3-b), já que c_i é conhecido do passo 1. (4.3.12)

PASSO 3- Agora com k_i e c_i calculados, usamos a Prop. 4.2.2-b), e obtemos

$$r_{i+1}(s) = \frac{m_{i+1} b_i(s) - (m_{i+1} s + b_i(s)/s) r_i(s)}{r_i(s) - b_i(s)/s}. \quad (4.4.13)$$

Com $r_{i+1}(s)$ determinado, voltamos ao passo 1.

Como consequência imediata deste teorema, temos que, considerados dois sistemas com N -graus de liberdade, cada um sujeito a uma força externa aplicada no topo, $f_1^j(t)$, $j=1, 2, \dots$, denotando os dois sistemas por $\{k_i, c_i, m_i\}$ e $\{\bar{k}_i, \bar{c}_i, m_i\}$, e considerando que a resposta no topo é a mesma, isto é, $x_1^j(t) = \bar{x}_1^j(t)$, $j=1, 2, \dots$, então $k_i = \bar{k}_i$ e $c_i = \bar{c}_i$, $i=1, 2, \dots, N$.

4.3.2. Unicidade no Extremo Inferior

Temos unicidade neste caso, quando é conhecida a força externa aplicada no térreo, $f_N(t)$, e a resposta $x_N(t)$, na mesma posição. Utilizaremos o mesmo processo da seção anterior para determinar unicamente as distribuições de rigidez e amortecimento, porém começaremos determinando k_N e c_N .

Observemos que as equações (4.2.2) e (4.2.7) tomam a seguinte forma respectivamente:

$$(Ms^2 + Cs + K)X(s) = g(s)F_N(s),$$

$$X_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{P_N(s)} F_N(s), \quad (4.3.14)$$

onde $X(s)$ é a transformada de $x(t)$, $F_N(s)$ é a transformada de $f_N(t)$ e Δ_i é o determinante obtido de A por substituição da i -ésima coluna pela vetor $g(s) = (0, 0, \dots, c_N s + k_N)^t$.

4.3.3. Unicidade no Meio

A unicidade de $c_i, k_i, i=1, 2, \dots, N$, quando a força externa for aplicada no meio, pode ser obtida a partir da localização apropriada dos sensores. Assim, podemos obtê-la quando conhecemos a resposta em dois níveis consecutivos, e a força externa (vibradores) for aplicada em duas localizações diferentes, porém, adequadas. Mostraremos então a unicidade em duas partes, conforme os teoremas abaixo:

Teorema 4.3.2.

Dadas as respostas $x_n(t)$ e $x_{n+1}(t)$, as massas $m_1, \dots, m_n, m_{n+1}, \dots, m_N$, e k_n ou c_{n+1} de um sistema dado por (4.3.1), sujeito a força externa $f_i, i \leq n$, aplicada à massa m_1 , então k_1, c_1, \dots, c_n , podem ser unicamente determinadas.

Prova.

De (4.2.3), obtemos

$$\frac{X_{n+1}(s)}{X_n(s)} = b_n(s) \frac{R_{n+2}(s)}{R_{n+1}(s)}. \quad (4.3.15)$$

Primeiro obteremos $b_n(s)$, conforme segue:

a) Suponhamos k_n conhecido. Usando (4.2.4), temos

$$\frac{X_{n+1}(s)}{X_n(s)} = (c_n s + k_n) \frac{R_{n+2}(s)}{R_{n+1}(s)}. \quad (4.3.16)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.2.15) por s , tem-se

$$\frac{sX_{n+1}(s)}{X_n(s)} = c_n \frac{R_{n+2}(s)}{R_{n+1}(s)} s^2 + \frac{k_n}{s} \frac{R_{n+2}(s)}{R_{n+1}(s)} s^2. \quad (4.3.17)$$

Tomando limite quando $s \rightarrow \infty$ e pela Prop. 4.2.1-d), segue que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sX_{n+1}(s)}{X_n(s)} = \frac{c_n}{m_{n+1}}. \quad (4.3.18)$$

Assim (4.3.18) determina c_n , e portanto também $b_n(s)$.

b) Suponhamos c_{n+1} conhecido. Por (4.3.15) temos,

$$\frac{X_{n+1}(s)}{X_n(s) - X_{n+1}(s)} = \frac{(c_n s + k_n)}{m_{n+1} s^2 + c_{n+1} s + k_{n+1} - b_{n+1}^2 (s) R_{n+3} / R_{n+2}} \quad (4.3.19)$$

Expandindo em s , para valores grandes, obtemos

$$\frac{s^2 X_{n+1}(s)}{X_n(s) - X_{n+1}(s)} = \frac{c_n s + k_n}{m_{n+1}} \left[1 - \left(\frac{c_{n+1}}{s m_{n+1}} + \frac{k_{n+1}}{s^2 m_{n+1}} - \frac{b_{n+1}^2}{s^2 m_{n+1}} \frac{R_{n+3}}{R_{n+2}} \right) + \dots \right] \quad (4.3.20)$$

de modo que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{s^2 X_{n+1}(s)}{X_n(s) - X_{n+1}(s)} - \frac{c_n s}{m_{n+1}} \right] = \frac{k_n}{m_{n+1}} - \frac{c_n c_{n+1}}{m_{n+1}^2} \quad (4.3.21)$$

Como c_n é obtido de (4.3.18), e c_{n+1} é dado, então k_n pode ser unicamente calculado por (4.3.21), ficando assim $b_n(s)$ determinado por (4.2.4). Podemos então determinar a razão $R_{n+2}(s)/R_{n+1}(s)$ por (4.3.15), identificando completamente $r_n(s)$.

Basta agora usarmos os três passos dados por (4.3.11)-(4.3.13) para obtermos $k_l, c_l, l=n, n+1, \dots, N$.

Teorema 4.3.3.

Seja $f_{i+1}(t)$ a força externa aplicada à massa m_{i+1} de um sistema dado por (4.3.1).

Se $x_n(t)$ e $x_{n+1}(t)$, $n \leq i$, os deslocamentos ocorridos nos $(N-n+1)$ e $(N-n+2)$ -andares, respectivamente, e m_i , $i=1, 2, \dots, n$, são conhecidos, então podemos determinar de forma única $k_1, c_1, l=1, 2, \dots, n$.

Prova.

Usando (4.2.3), obtemos

$$\frac{X_n(s)}{X_{n+1}(s)} = b_n(s) \frac{P_{n-1}(s)}{P_n(s)} = \frac{b_n(s)}{a_n(s) - b_{n-1}^2(s) P_{n-2}(s)/P_{n-1}(s)}, \quad (4.3.22)$$

de forma que

$$\frac{X_n(s)}{X_{n+1}(s) - X_n(s)} = \frac{b_n(s)}{m_n s^2 + b_{n-1}(s) - b_{n-1}^2(s) (P_{n-2}(s)/P_{n-1}(s))}. \quad (4.3.23)$$

Por (4.2.4), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{X_n(s)}{X_{n+1}(s) - X_n(s)} &= \frac{c_n s}{m_n s^2 + b_{n-1}(s) (1 - b_{n-1}(s) P_{n-2}(s)/P_{n-1}(s))} + \\ &+ \frac{k_n}{m_n s^2 + b_{n-1}(s) (1 - b_{n-1}(s) P_{n-2}(s)/P_{n-1}(s))}. \end{aligned}$$

Multiplicando por s ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\frac{sX_n(s)}{X_{n+1}(s)-X_n(s)} = \frac{c_n}{m_n+p_{n-1}(s)/s} + \frac{k_n}{m_n+p_{n-1}(s)}. \quad (4.3.24)$$

Tomando agora o limite quando $s \rightarrow \infty$, e usando Prop. 4.2.3-a), segue que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sX_n(s)}{X_{n+1}(s)-X_n(s)} = \frac{c_n}{m_n}. \quad (4.3.25)$$

Multiplicando (4.3.23) por s^2 , tem-se

$$\frac{s^2X_n(s)}{X_{n+1}(s)-X_n(s)} = \frac{c_n s}{m_n+p_{n-1}(s)/s} + \frac{k_n}{m_n+p_{n-1}(s)/s}.$$

Tomando limite na equação acima quando $s \rightarrow 0$, e usando Prop. 4.2.3-c), obtemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2X_n(s)}{X_{n+1}(s)-X_n(s)} = \frac{k_n}{m_n + \sum_1^{n-1} m_1} = \frac{k_n}{\sum_1^n m_1}. \quad (4.3.26)$$

A partir de (4.3.25) e (4.3.26) c_n e k_n são determinados, conhecemos então a razão $P_{n-1}(s)/P_n(s)$ e também $p_n(s)$.

Mostraremos que dado $p_i(s)$, $1 \leq i \leq n$, podemos encontrar k_1 e c_1 , $1 \leq i \leq n$, unicamente, usando os três passos abaixo.

$$\text{PASSO 1- } c_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} p_1(s). \quad (4.3.27)$$

$$\text{PASSO 2- } k_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} (p_1(s) - c_1) s + \frac{c_1^2}{m_1}. \quad (4.3.28)$$

$$\text{PASSO 3- } p_{1-1}(s) = \frac{m_1 b_1(s) - (m_1 s + b_1(s)/s) p_1(s)}{-b_1(s)/s + p_1(s)}. \quad (4.3.29)$$

Uma vez determinado $p_{1-1}(s)$, voltamos ao passo 1.

4.3.4. Unicidade num Sistema Não-Amortecido

Para um sistema não-amortecido, isto é, $c_1 = 0$, $i=1, 2, \dots, N$, o sistema de equações dado por (4.2.1) toma a seguinte forma,

$$M \ddot{x} + K x = F(t). \quad (4.3.30)$$

A unicidade do problema inverso de um sistema não-amortecido, pode ser estabelecida como num sistema amortecido, isto é, pela localização apropriada dos sensores e aplicação da força externa num nível adequado.

O algoritmo usado para determinar a distribuição de rigidez, neste caso, é o mesmo usado nas seções 4.3.1., 4.3.2., e 4.3.3., quando tratamos de sistemas amortecidos. Desta forma temos unicidade num sistema não-amortecido quando conhecemos a força externa aplicada no topo, e a resposta no mesmo nível, ou a força externa na base, com a resposta também na base. Ainda obtemos a unicidade num sistema não-amortecido a partir da localização dos sensores em dois andares consecutivos, desde que a função força, a qual excita o sistema, seja aplicada em duas localizações diferentes, porém, convenientes. Devemos considerar nos três casos, a distribuição de massa conhecida à priori.

CAPITULO 5

Não-Unicidade num Sistema de N-graus de Liberdade Não-Amortecido

5.1. Introdução

Consideremos um sistema de N-graus de liberdade não-amortecido, isto é, $c_i=0$, $i=1, 2, \dots, N$. Assumiremos que a matriz de inércia, M , é conhecida, e que a força externa é aplicada na base. Passamos a ver circunstâncias sob as quais a não-unicidade é encontrada, juntamente com estimativas do grau de não-unicidade em cada caso. Veremos que o grau de não-unicidade é encontrado monotonamente crescente de acordo com o aumento na altura do sensor, num sistema de construção, no máximo um para um sensor localizado na base e no máximo $N!$ para um sensor localizado no N-ésimo andar de uma estrutura de N-andares. [20]

5.2. Formulação do Problema Não-Amortecido

Considerando um sistema não-amortecido, o conjunto de equações dado por (4.2.1), toma a seguinte forma:

$$M \ddot{x} + K x = F, \quad (5.2.1)$$

onde

F é a força externa, que consideraremos do tipo $F(t)=(0,0, \dots, 0, k_N z(t))^t$, (5.2.2)

$x_i(t)$ significa que um sensor foi colocado no $(N-i+1)$ -ésimo andar.

Desta forma o sistema pode ser escrito como

$$\ddot{y} + A y = fz(t) \quad (5.2.3)$$

onde

$$y = M^{1/2}x,$$

$$f = (0, 0, \dots, k_N/\sqrt{m_N})^t, \quad t \text{ indica o transposto,}$$

$$A = M^{-1/2}KM^{-1/2},$$

Assim a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & a_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & -b_{N-1} & a_N \end{bmatrix},$$

$$\text{com } b_i = \frac{k_i}{\sqrt{m_i m_{i+1}}}, \quad a_i = \frac{k_{i-1} + k_i}{m_i}, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (5.2.4)$$

$$k_0 = 0.$$

Novamente A é uma matriz de Jacobi.

Tomando a transformada de Laplace em ambos os lados de (5.2.3), e substituindo a variável transformada por $i\sqrt{\lambda}$, obtemos

$$(A - \lambda I)Y = fZ(\lambda), \quad (5.2.5)$$

onde $Y(\lambda)$ e $Z(\lambda)$ representam as transformadas de $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente.

Denotemos:

$-P_i(\lambda)$ como o i -ésimo menor principal de $(A-\lambda I)$,

$-P_0(\lambda)=1$,

logo

$$P_N(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Onde, $P_i(\lambda)$ satisfaz a relação de recorrência (1.2.2).

$-\Delta_i$ é o determinante da matriz obtida de $(A - \lambda I)$ por substituição de sua i -ésima coluna pelo vetor f .

Resolvendo (5.2.5) para $Y_i(\lambda)$, obtemos

$$Y_i(\lambda) = \frac{\Delta_i}{P_N(\lambda)} Z(\lambda), \quad (5.2.6)$$

usando (5.2.2), temos

$$X_i(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \frac{k_N}{\sqrt{m_N}} b_{N-1} b_{N-2} \dots b_i \frac{P_{i-1}(\lambda)}{P_N(\lambda)} Z(\lambda),$$

onde $X_i(\lambda)$ é a transformada de $x_i(t)$. Desta forma podemos usar (5.2.4) para obter

$$\frac{X_i(\lambda)}{Z(\lambda)} = \frac{k_N}{m_N} \frac{K_{N-1}}{m_{N-1}} \dots \frac{k_1}{m_1} \frac{P_{i-1}(\lambda)}{P_N(\lambda)}. \quad (5.2.7)$$

Propriedade 5.2.1.

Sejam $P_i(\lambda)$, os polinômios definidos anteriormente, e a_i e b_i , definidos em (5.2.4).

Definimos por A_i a submatriz superior esquerda de ordem i de A , então:

a) As submatrizes A_i são de Jacobi,

$$b) \det(A_i) = \frac{k_i}{m_i} \frac{k_{i-1}}{m_{i-1}} \dots \frac{k_1}{m_1}, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

$$c) \frac{P_{i-1}(0)}{P_i(0)} = \frac{m_i}{k_i}, \quad i=2, 3, \dots, N.$$

Prova.

a) Imediato da definição de A_i .

b) Seja K_i a submatriz superior esquerda de ordem i de K , por (5.2.3) resulta que

$$\det(A_i) = \det(K_i) \frac{1}{m_i} \frac{1}{m_{i-1}} \dots \frac{1}{m_1}.$$

Resta observar que $\det(K_i) = k_i k_{i-1} \dots k_1$. Vemos isto por indução.

Para $i=1$, $\det(K_1) = k_1$.

Assumimos que $K_i = k_i K_{i-1}$, para $i \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= (k_n + k_{n+1})K_n - k_n^2 K_{n-1} = (k_n + k_{n+1})k_n K_{n-1} - k_n^2 K_{n-1} = \\ &= k_{n+1} k_n K_{n-1} = k_{n+1} K_n. \end{aligned}$$

Portanto, $\det(K_{n+1}) = k_{n+1} \det(K_n) = k_{n+1} k_n \dots k_2 k_1$.

c) Usando b) e a relação $P_i(0) = \det(A_i)$, o resultado segue.

Propriedade 5.2.2.

Dados dois conjuntos $\{k_i\}$ e $\{\bar{k}_i\}$, $i=1, 2, \dots, N$.

Então

$$\left[\prod_{l=1}^N \frac{k_l}{m_l} \right] \frac{P_{i-1}(\lambda)}{P_N(\lambda)} = \left[\prod_{l=1}^N \frac{\bar{k}_l}{m_l} \right] \frac{\bar{P}_{i-1}(\lambda)}{\bar{P}_N(\lambda)} \quad (5.2.8)$$

se e somente se

$$\frac{P_{i-1}(\lambda)}{P_N(\lambda)} = \frac{\bar{P}_{i-1}(\lambda)}{\bar{P}_N(\lambda)}. \quad (5.2.9)$$

Prova.

(\Rightarrow) Multiplicando (5.2.8) em cruz, e equacionando os coeficientes de λ^{N+i-1} , temos:

$$\prod_{l=1}^N \frac{k_l}{m_l} = \prod_{l=1}^N \frac{\bar{k}_l}{\bar{m}_l}, \text{ o que nos leva a (5.2.9).}$$

(\Leftarrow) Considerando agora (5.2.9) e usando (1.2.3), tem-se

$$P_{i-1}(\lambda) = \bar{P}_{i-1}(\lambda) \quad \text{e} \quad P_N(\lambda) = \bar{P}_N(\lambda),$$

onde segue que

$$\det(A_{i-1}) = \det(\bar{A}_{i-1}) \quad \text{e} \quad \det(A_N) = \det(\bar{A}_N).$$

Usando a Prop. 5.2.1-b) e dividindo as duas equações acima, temos

$$\prod_{l=1}^N \frac{k_l}{m_l} = \prod_{l=1}^N \frac{\bar{k}_l}{\bar{m}_l}, \text{ do qual resulta (5.2.8).}$$

Propriedade 5.2.3.

Seja A uma matriz de Jacobi de ordem N , com os a_i 's e b_i 's definidos em (5.2.4). $P_N(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Então a potência dos k_i 's na expansão de $P_N(\lambda)$ é no máximo um.

Prova.

Por definição,

$$P_N(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum (-1)^{t(p)} u_{1i_1} \dots u_{Ni_N}, \quad (5.2.10)$$

quando $p = (i_1, i_2, \dots, i_N)$ é a permutação de $(1, 2, \dots, N)$ e $t(p)$ é o grau da permutação p . Desde que u_{ij} 's são elementos da matriz tridiagonal $(A - \lambda I)$, muitos termos do somatório acima são iguais a zero. Também observa-se que a

mais alta potência dos k_i 's é dois.

Para a estrutura tridiagonal da matriz, se os termos na soma acima contêm um elemento fora da diagonal u_{aa+1} deve conter também u_{a+1a} . Para cada termo contendo o produto $u_{aa+1}u_{a+1a}$ existe outro com sinal oposto no qual o produto é repassado para $u_{aa}u_{a+1a+1}$. Usando

$$u_{aa} = \frac{k_{a-1} + k_a}{m_a} - \lambda, \quad .$$

$$u_{a+1a} = u_{aa+1} = \frac{k_a}{\sqrt{m_a m_{a+1}}},$$

concluimos que o termo contendo k_a^2 se cancela.

5.3. Resultados sobre Não-Unicidade num Sistema de N-Graus de Liberdade Não-Amortecido

Iniciaremos com um exemplo numérico, onde temos um sistema de 3-graus de liberdade, no qual $m_i, k_i, i=1, 2, 3$, são reais e positivos.

Denotemos este sistema por um conjunto de 2×3 elementos, $\{k_i, m_i\}$, excitamos o referido sistema com um movimento na base, $z(t)$, e determinamos a correspondente resposta no topo, $x_1(t)$. A seguir, considere um outro sistema de 3-graus de liberdade, $\{\bar{k}_i, m_i\}$, o qual é excitado com o mesmo movimento na base, $z(t)$, e obtemos a resposta no topo, correspondente ao segundo sistema, que é dada por $\bar{x}_1(t)$.

Assim, tomando para o sistema $\{k_i, m_i\}, i=1, 2, 3$, $m_1=1, m_2=1, m_3=2; k_1=1, k_2=1, k_3=2$.

Então por (5.2.7) obtemos a resposta no topo dada por

$$\frac{X_1(\lambda)}{Z(\lambda)} = \frac{k_3}{m_3} \frac{k_2}{m_2} \frac{k_1}{m_1} \frac{1}{P_3(\lambda)},$$

pela Prop. 5.2.1-b), temos

$$\frac{k_3}{m_3} \frac{k_2}{m_2} \frac{k_1}{m_1} = \det(A) \quad \text{e} \quad P_3(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

no qual,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 \\ 0 & -b_2 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 3/2 \end{bmatrix},$$

uma vez que por (5.2.4), vimos que

$$b_i = \frac{k_i}{\sqrt{m_i m_{i+1}}}, \quad a_i = \frac{k_{i-1} + k_i}{m_i}, \quad i=1, 2, 3.$$

$$k_0 = 0.$$

Logo $\det(A)=1$ e $\det(A-\lambda I)=P_3(\lambda)=-\lambda^3+9/2\lambda^2-5\lambda+1$, portanto

$$X_1(\lambda) = \frac{\det(A)}{P_3(\lambda)} Z(\lambda) = \frac{Z(\lambda)}{-\lambda^3+9/2\lambda^2-5\lambda+1}.$$

Resolvendo da mesma forma para o sistema $\{\bar{k}_i, m_i\}$, com $m_1=1, m_2=1, m_3=2; \bar{k}_1=1/2, \bar{k}_2=1, \bar{k}_3=4$, encontramos

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t).$$

Concluimos, então, que para um sistema de 3-graus de liberdade $\{k, m\}$, excitado por uma força externa na base, $z(t)$, a qual produz uma resposta no topo, $x_1(t)$, considerando as massas m_i , $i=1, 2, 3$, conhecidas, a identificação dos k_i 's, $i=1, 2, 3$, não é única.

Porém, para um sistema de 3-graus de liberdade, nas mesmas condições que o anterior, provaremos no final desta seção que:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) Se } k_1 = \bar{k}_1 \text{ então } k_2 = \bar{k}_2 \text{ e } k_3 = \bar{k}_3, \\
 & \text{b) Se } k_3 = \bar{k}_3 \text{ então } k_1 = \bar{k}_1 \text{ e } k_2 = \bar{k}_2. \\
 \text{e} \quad & \text{c) Se } k_2 = \bar{k}_2 \text{ então } k_1 \neq \bar{k}_1 \text{ e } k_3 \neq \bar{k}_3 \\
 & \text{se e somente se } m_2^2 = m_1(m_3 - m_2).
 \end{aligned}
 \tag{5.3.1}$$

Passemos a considerar o caso geral, ou seja, um sistema não-amortecido com N -graus de liberdade, com m_i, k_i , $i=1, 2, \dots, N$, reais e positivos. Denotemos novamente este sistema por $\{k_i, m_i\}$. Consideremos uma força externa agindo na base, $z(t)$, e determinemos a correspondente resposta no topo, $x_1(t)$. Repetindo este processo, obtemos um conjunto de respostas no topo, $x_1^n(t)$, $n=1, 2, \dots$, correspondente a um conjunto de movimentos na base, $z^n(t)$, $n=1, 2, \dots$. Com esses pares sob controle, $\{z^n(t), x_1^n(t)\}$, passaremos a responder a seguinte questão: Em geral, existem muitos outros sistemas, $\{\bar{k}_i, m_i\}$, os quais produzem o mesmo par $\{z^n(t), x_1^n(t)\}$, como esses dados pelo sistema $\{k_i, m_i\}$? (Pelo exemplo numérico anterior podemos ver que existe pelo menos um outro sistema $\{\bar{k}_i, m_i\}$, que produz o mesmo par $\{z(t), x_1(t)\}$, e tal que os k_i 's, $i=1, 2, \dots, N$, são todos reais e positivos, isto é, o sistema é fisicamente realizável).

Teorema 5.3.1.

Dado um sistema $\{k_i, m_i\}$, $k_i > 0$, $m_i > 0$, $i=1, 2, \dots, N$, que produz os pares $\{z^n(t), x_1^n(t)\}$, então existem, em geral outros $N!-1$ sistemas, $\{\bar{k}_i, \bar{m}_i\}$, os quais produzem os mesmos pares entrada-saída.

Prova.

De (5.2.7) e Prop. 5.2.1-b), temos

$$\frac{X_1(\lambda)}{Z(\lambda)} = \frac{k_N}{m_N} \frac{k_{N-1}}{m_{N-1}} \cdots \frac{k_1}{m_1} \frac{1}{P_N(\lambda)} = \det(A) \frac{1}{P_N(\lambda)}.$$

Pelo exemplo numérico, podemos supor que existe pelo menos um outro sistema $\{\bar{k}_i, \bar{m}_i\}$, tal que para ambos os sistemas, $\{k_i, m_i\}$ e $\{\bar{k}_i, \bar{m}_i\}$, a razão $X_1(\lambda)/Z(\lambda)$ é a mesma, para todos os valores de λ .

Assim,

$$\frac{X_1(\lambda)}{Z(\lambda)} = \det(A) \frac{1}{P_N(\lambda)} = \det(\bar{A}) \frac{1}{\bar{P}_N(\lambda)}. \quad (5.3.2)$$

Sabemos que $P_N(\lambda)$ é um polinômio de grau N , cujo coeficiente do termo de maior grau é dado por $(-1)^N$, logo conhecendo $X_1(\lambda)$ e $Z(\lambda)$ podemos determinar $\det(A)$ e $P_N(\lambda)$ separadamente. Como,

$$P_N(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad (5.3.3)$$

usando a Prop. 5.2.2., chegamos a seguinte condição:

$$\bar{P}_N(\lambda) = P_N(\lambda) = \det(A - \lambda I). \quad (5.3.4)$$

Para determinar os k_1 's, igualamos os coeficientes das várias potências de λ em ambos os lados de (5.3.4). Isto nos leva a um sistema de N-equações algébricas não-lineares nos k_1 's, as quais tomam a seguinte forma de acordo com a Prop. 5.2.3.,

$$\sum_{i_1=1}^N \alpha_{i_1} \bar{k}_{i_1} = \sum_{i_1=1}^N \alpha_{i_1} k_{i_1} = b_1 \quad (5.3.5)$$

$$\sum_{i_2 > i_1} \sum_{i_1=1}^N \alpha_{i_1 i_2} \bar{k}_{i_1} \bar{k}_{i_2} = \sum_{i_2 > i_1} \sum_{i_1=1}^N \alpha_{i_1 i_2} k_{i_1} k_{i_2} = b_2 \quad (5.3.6)$$

⋮

$$\begin{aligned} & \sum_{i_n > i_{n-1}} \dots \sum_{i_2 > i_1} \sum_{i_1=1}^N \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} \bar{k}_{i_1} \bar{k}_{i_2} \dots \bar{k}_{i_n} = \\ & = \sum_{i_n > i_{n-1}} \dots \sum_{i_2 > i_1} \sum_{i_1=1}^N \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_n} = b_n \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

⋮

$$\bar{k}_1 \bar{k}_2 \dots \bar{k}_N = k_1 k_2 \dots k_N = b_N. \quad (5.3.8)$$

Neste conjunto os b_1 's são todos conhecidos da esquerda de (5.3.3) e podem ser expressos em termos das raízes, λ_1 , da equação $P_N(\lambda)=0$, como segue:

$$b_1 = \sum_{i=1}^N \lambda_i,$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^N \lambda_i \lambda_j,$$

(5.3.9)

⋮

$$b_N = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N.$$

Observemos que os b_i 's, $i=1, 2, \dots, N$, são todos positivos, já que eles são expressos em termos do produto e soma das raízes de $P_N(\lambda)$, que são todas positivas. Também todos os α 's são conhecidos, pois envolvem as massas m_i , que são dadas. Notemos que os α 's são positivos. De fato: Basta verificar que todos os termos que aparecem multiplicando $(-\lambda)^i$ na expressão do $\det(A-\lambda I)$ são positivos.

Em (5.2.10) existe um termo da forma

$$(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \dots (a_N - \lambda) \tag{5.3.10}$$

e todos os outros contêm elementos de fora da diagonal de $(A-\lambda I)$ que aparecem em pares. Como foi visto na Prop. 5.2.3., estes termos cancelam-se na expressão final do $\det(A-\lambda I)$, visto que eles contêm k_i^2 , etc... . Portanto, todos os outros termos vem do produto (5.3.10), no qual os coeficientes de $(-\lambda)^i$ são todos positivos.

Assim sendo, a equação (5.3.7) é de grau n . Note também que o conjunto tem pelo menos um conjunto solução, $\bar{k}_i = k_i$, $i=1, 2, \dots, N$.

Utilizamos o Teorema de Bezout [13], sobre interseções de hipersuperfícies com relação as suas multiplicidades, para estabelecer que se o número de soluções é finito, então existem $N(N-1) \dots 2 \cdot 1 = N!$ conjuntos soluções contados com suas multiplicidade, onde um conjunto é constituído por $k_i = \bar{k}_i$, $i=1, 2, \dots, N$.

Observemos que quando $N=3$:

1) As equações dadas por (5.3.5)-(5.3.8), assumem a seguinte forma:

$$\bar{k}_1 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \bar{k}_2 \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) + \frac{\bar{k}_3}{m_3} = b_1 \quad (5.3.11)$$

$$\bar{k}_1 \bar{k}_2 (m_1 + m_2 + m_3) + \bar{k}_1 \bar{k}_3 (m_1 + m_2) + \bar{k}_2 \bar{k}_3 m_1 = \frac{b_2}{m_1 m_2 m_3} \quad (5.3.12)$$

$$\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 = \frac{b_3}{m_1 m_2 m_3} \quad (5.3.13)$$

2) Notemos por substituição algébrica que k_3 é uma raiz da equação de sexto grau, enquanto k_1 e k_2 são determinados unicamente por (5.3.11) e (5.3.12). As seis soluções são obtidas de acordo com o resultado do Teorema de Bezout.

Teorema 5.3.2.

Se o conjunto de equações dado por (5.3.5)-(5.3.8) tem um número finito de soluções, e se existe um sistema $\{k_i, m_i\}$ com os k_i 's todos reais e positivos os quais satisfazem aquele conjunto de equações, então existe, em geral pelo menos um outro sistema $\{\bar{k}_i, m_i\}$ tal que os \bar{k}_i 's são todos reais e positivos.

Prova.

De fato: As soluções complexas ocorrem aos pares, devido ao fato que os coeficientes do conjunto de equações (5.3.5)-(5.3.8) são reais. Também o número de possíveis soluções é dado por $N!$ que é um número par. Agora de (5.3.5) temos que o conjunto $\{k_i, m_i\}$ é tal que

$$\bar{P}_N(\lambda) = P_N(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(\bar{A} - \lambda I),$$

portanto os autovalores das matrizes A e \bar{A} são os mesmos. Mas os autovalores da matriz A são todos positivos, já que A é uma matriz simétrica e positiva definida, portanto os autovalores de \bar{A} também são positivos e $\det(\bar{A}_i) > 0$, $i=1, 2, \dots, N$. Pela Prop. 5.2.1-b), temos

$$\det(\bar{A}_i) = \frac{\bar{k}_i}{m_i} \frac{\bar{k}_{i-1}}{m_{i-1}} \dots \frac{\bar{k}_1}{m_1},$$

logo, para $i=1$, tem-se

$$\det(\bar{A}_1) > 0 \Rightarrow \frac{\bar{k}_1}{m_1} > 0 \Rightarrow \bar{k}_1 > 0.$$

Também

$$\det(A_2) > 0 \Rightarrow \frac{\bar{k}_2}{m_2} \frac{\bar{k}_1}{m_1} > 0 \Rightarrow \bar{k}_2 > 0, \text{ usando que } \bar{k}_1 > 0.$$

Procedendo desta maneira, notamos que $\bar{k}_i > 0$, $i=1, 2, \dots, N$.

Provemos (5.3.1).

Para um sistema de 3-graus de liberdade temos:

a) Se $k_1 = \bar{k}_1$, usando (5.3.11)-(5.3.13), obtemos

$$k_2 \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) + \frac{k_3}{m_3} = \bar{k}_2 \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) + \frac{\bar{k}_3}{m_3},$$

$$\begin{aligned} k_1 k_2 (m_1 + m_2 + m_3) + k_1 k_3 (m_1 + m_2) + k_2 k_3 m_1 &= \\ &= \bar{k}_1 \bar{k}_2 (m_1 + m_2 + m_3) + \bar{k}_1 \bar{k}_3 (m_1 + m_2) + \bar{k}_2 \bar{k}_3 m_1, \end{aligned}$$

$$k_2 k_3 = \bar{k}_2 \bar{k}_3.$$

Logo

$$(m_1 + m_2 + m_3)(k_2 - \bar{k}_2) + (m_1 + m_2)(k_3 - \bar{k}_3) = 0,$$

$$\left[\frac{m_3 + m_2}{m_2 m_3} \right] (k_2 - \bar{k}_2) + \frac{1}{m_3} (k_3 - \bar{k}_3) = 0,$$

cuja única solução é a trivial, isto é,

$$k_2 - \bar{k}_2 = 0 \text{ e } k_3 - \bar{k}_3 = 0 \Rightarrow k_2 = \bar{k}_2 \text{ e } k_3 = \bar{k}_3.$$

b) Se $k_3 = \bar{k}_3$, então de (5.3.11)-(5.3.13) tem-se:

$$(m_1+m_2)(k_1-\bar{k}_1) + m_1(k_2-\bar{k}_2) = 0,$$

$$\left[\frac{m_2+m_1}{m_1 m_2} \right] (k_1-\bar{k}_1) + \left[\frac{m_3+m_2}{m_2 m_3} \right] (k_2-\bar{k}_2) = 0,$$

cujas únicas soluções são a trivial, ou seja,

$$k_1 = \bar{k}_1 \quad \text{e} \quad k_2 = \bar{k}_2.$$

c) Se $k_2 = \bar{k}_2$, temos por (5.3.11)-(5.3.13), que

$$\left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right] (k_1 - \bar{k}_1) + \frac{1}{m_3} (k_3 - \bar{k}_3) = 0$$

$$(m_1+m_2+m_3)(k_1-\bar{k}_1) + m_1(k_3-\bar{k}_3) = 0,$$

mas

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_3} \\ m_1+m_2+m_3 & m_1 \end{bmatrix} = \frac{m_1(m_3-m_2)-m_2^2}{m_2 m_3}.$$

Logo $k_1 \neq \bar{k}_1$ e $k_3 \neq \bar{k}_3$, se e somente se $m_1(m_3 - m_2) = m_2^2$.

5.4. Considerações sobre o Grau de Não-Unicidade

Vimos no CAP. 4 que dada a matriz de inércia, A , a força externa, $z(t)$, aplicada na base, a resposta $x_N(t)$, no primeiro andar, a identificação dos k_1 's é única.

Consideraremos novamente a força externa aplicada na base, porém suponhamos conhecida a resposta no 2º andar, e a matriz M , concluiremos então que existem no máximo quatro conjuntos de valores, k_1, k_2, \dots, k_N , os quais produzem a mesma resposta para o 2º andar.

De fato, usando (5.2.7) para o 2^o andar, tem-se

$$\frac{Z(\lambda)}{X_{N-1}(\lambda)} = \frac{m_N m_{N-1}}{k_N k_{N-1}} \frac{P_N(\lambda)}{P_{N-2}(\lambda)}. \quad (5.4.1)$$

Usando (1.2.2) duas vezes obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{Z(\lambda)}{X_{N-1}(\lambda)} = \frac{m_N m_{N-1}}{k_N k_{N-1}} & \left[\lambda^2 - (a_N + a_{N-1})\lambda + (a_N a_{N-1} - b_{N-1})^2 + \right. \\ & \left. + b_{N-2}^2 \lambda \frac{P_{N-3}(\lambda)}{P_{N-2}(\lambda)} - a_N b_{N-2}^2 \frac{P_{N-3}(\lambda)}{P_{N-2}(\lambda)} \right]. \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Então por (5.2.4) e por (1.2.3) obtemos as três seguintes equações para k_N , k_{N-1} e k_{N-2} ,

$$k_{N-1} k_N = \alpha_1 = \frac{m_N m_{N-1}}{\bar{\alpha}_1}, \quad (5.4.3)$$

$$k_N \frac{1}{m_N} + k_{N-1} \left(\frac{1}{m_N} + \frac{1}{m_{N-1}} \right) + k_{N-2} \frac{1}{m_{N-1}} = \alpha_2 = -\frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1}, \quad (5.4.4)$$

$$(k_N + k_{N-1}) k_{N-2} - k_{N-2}^2 \frac{m_N}{m_{N-2}} = \alpha_3 = \frac{(\bar{\alpha}_3 - 1)}{\bar{\alpha}_1} m_N m_{N-1}, \quad (5.4.5)$$

onde os $\bar{\alpha}_i$ $i=1, 2, 3$ são os coeficientes do polinômio do 2^o grau dado por (5.4.2).

Estas equações tem no máximo quatro soluções. De fato, pois (5.4.5) é uma equação quadrática em k_{N-2} , gerando duas soluções. Substituindo em (5.4.3) e (5.4.4) obtemos as outras duas soluções. Uma vez conhecido um conjunto de valores de k_N, k_{N-1}, k_{N-2} , encontramos a razão $P_{N-3}(\lambda)/P_{N-2}(\lambda)$, por (5.4.2). Determinamos, então, $k_{N-3}, k_{N-4}, \dots, k_1$, usando o seguinte algoritmo.

Suponhamos conhecida a razão,

$$\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)}, \quad n=1, 2, \dots, N-3.$$

Pela relação de recorrência (1.2.2), obtemos

$$\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} = (a_{n+1} - \lambda) - b_n^2 \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)}.$$

Onde segue que

$$a_{n+1} = \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} + \lambda - b_n^2 \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)}.$$

Tomando limite quando $\lambda \rightarrow \infty$ em ambos os lados da equação acima e usando (1.2.3), tem-se

$$a_{n+1} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} + \lambda \right],$$

assim, fica determinado k_n usando (5.2.4)

$$k_n = a_{n+1} m_{n+1} - k_{n+1}.$$

Para continuar as iterações, determinamos

$$\frac{P_n(\lambda)}{P_{n-1}(\lambda)} = b_n^2 \left[a_{n+1} - \lambda - \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} \right]^{-1}$$

uma vez que por (5.2.4)

$$b_n^2 = \frac{k_n^2}{m_n m_{n+1}} .$$

Observações

1) Para $N=3$, conhecemos $P_1(\lambda)$ e $P_3(\lambda)$. De $P_1(\lambda)$ e dado que o sistema é não-amortecido obtemos o valor de k_1 por (5.2.4). Podemos encontrar k_2 e k_3 unicamente usando (5.4.3)-(5.4.5) donde resulta que o problema tem única solução.

2) Para $N=4$, podemos fazer as mesmas considerações anteriores e obtermos que o sistema possui no máximo duas soluções.

A seguir, veremos o que ocorre com o número de soluções quando a resposta no n -ésimo andar é conhecida.

Teorema 5.4.1.

Dado um sistema do tipo

$$M \ddot{x} + K x = fz(t)$$

$$\dot{x}(0) = x(0) = 0,$$

onde a matriz M é conhecida, a resposta no n -ésimo andar, $2 < n < N$, também é conhecida, então o número de soluções é finito e é no máximo $(N-n)!(n-1)!(n-1)$.

Prova.

Usando (5.2.7) para o n -ésimo andar temos

$$\frac{X_{N-n+1}(\lambda)}{Z(\lambda)} = \frac{k_N}{m_N} \frac{K_{N-1}}{m_{N-1}} \cdots \frac{k_{N-n+1}}{m_{N-n+1}} \frac{P_{N-n}(\lambda)}{P_N(\lambda)},$$

podemos obter $P_N(\lambda)$ e $P_{N-n}(\lambda)$. Isto produz dois conjuntos de equações semelhantes para (5.3.5)-(5.3.8) tomando N e $N-n$ equações respectivamente. O último conjunto envolve $N-n$ desconhecidos k_1, k_2, \dots, k_{N-n} , e tem no máximo $(N-n)!$ soluções. Cada um destes conjuntos soluções pode ser substituído no conjunto anterior, tomando N equações, fora das quais somente n são usadas. Age-se deste modo pois restam somente n desconhecidas, isto é, k_{N-n+1}, \dots, k_N . Na substituição as últimas $N-n+1$ equações no conjunto (5.3.5)-(5.3.8) reduzem o grau, de modo que elas tornam-se de grau $n-1$. O grau das $n-1$ primeiras equações fica inalterado. Portanto, as n desconhecidas podem ser determinadas usando-se essas $n-1$ equações junto com uma equação de grau $n-1$ para as $N-n+1$ equações restantes. Assim, temos no máximo $(n-1)!(n-1)$ conjuntos soluções de n desconhecidas. Logo, para todas as N desconhecidas existem no máximo $(N-n)!(n-1)!(n-1)$ soluções.

O resultado acima, relativo aos Teoremas 5.3.1 e 5.4.1., foi resumido na tabela 1, para $N=1, 2, \dots, 10$. Também foram considerados os casos onde a unicidade é encontrada. (CAP.4).

Tabela 1

Número máximo de soluções quando a resposta é dada no n -ésimo andar de uma estrutura de N -andares.

$N \backslash n$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	10!	8!8	7!14	6!36	5!5!	5!96	6!18	7!4	4	1
9		9!	7!7	6!12	5!30	4!96	5!18	6!4	4	1
8			8!	6!6	5!10	4!24	4!18	5!4	4	1
7				7!	5!5	4!8	3!18	4!4	4	1
6					6!	96	36	24	4	1
5						5!	18	8	4	1
4							4!	4	2	1
3								3!	1	1
2									2!	1

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARCILON, V., **On the Solution of the Inverse Problem with Amplitude and Natural Frequency Data**, Phys. Earth Planet. Inst., 13, pp. 1-7, 1976.
- [2] BISHOP, R.E.D., GLADWELL, G.L.M. and MICHAELSON, S., **The Matrix Analysis of Vibration**, Cambridge, At the University Press, 1965.
- [3] BISHOP, R. E. D. and JOHNSON, D.C., **The Mechanics of Vibration**, Cambridge, Cambridge University Press, 1960.
- [4] BUDE, K. and BURRIDGE., **The One Dimensional Inverse Problem of Reflection Seismology**, SIAM Rev., 25, pp. 497-559, 1983.
- [5] GLADWELL, G. M. L., **Inverse Problems in Vibration**, Dordrecht, Martinus Nijhoff Publisheers, 1986.
- [6] GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F., **Matrix Computations**, Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1983.
- [7] HALD, Ole H., **Inverse Eigenvalue Problems for Jacobi Matrices**, Linear Algebra and its Applications, 14, pp. 63-85, 1976.
- [8] HARTOG, J. P. Den., **Mechanical Vibrations**, New York, Mc. Graw-Hill, 1956.
- [9] HOCHSTADT, H., **On Some Inverse Problems in Matrix Theory**, Archiv der Math, 18, pp. 201-207, 1967.

- [10] HOCHSTADT, H., On the Construction of a Jacobi Matrix from Spectral Data, Linear Algebra Appl., 8, pp. 435-446, 1974.
- [11] HURTY, W. C. and RUBISTEIN, M .F., Dynamics of Structures, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1964.
- [12] LANCASTER, P., Theory of Matrices, New York, Academic Press, 1968.
- [13] LEFSCHETZ, S., Algebraic Geometry, Princeton, Princeton University Press, NJ, 1953.
- [14] ORTEGA, JAMES M. and POOLE, WILLIAN G., An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations, Marshfield, Pitman Publishing Inc., 1981.
- [15] TIMOSHENKO, S., Vibration Problems in Engineering, New York, John Wiley & Sons, 1974
- [16] UDWADIA, F. E., On Some Unicity Problems in Building Systems Identification from Strong Motion Records, Fifth European World Conference, Istanbul, 1975.
- [17] UDWADIA, F. E., Some Uniqueness Results Related to Soil and Building Structural Identification, SIAM J. Appl. Math. Vol. 45, N° 4, pp. 674-685, Aug. 1985.
- [18] UDWADIA, F. E., SHARMA, D. K. and SHAH, P. C., Uniqueness of Damping and Stiffnes Distribution in the Identification of Soil Structural Systems, J. Appl. Mech, 45, pp. 181- 187, 1978.

- [19] UDWADIA, F. E. and SHAH, P. C., **Identification of Structures through Records obtained during Strong Ground Shaking**, Trans. Amer. Soc. Mech. Engrg. Ser B, 98, pp. 1347-1362, 1976.
- [20] UDWADIA, F. E. and SHARMA, D. K., **Some Uniqueness Results Related to Building Structural Identification**, SIAM J. Appl. Math., Vol. 34, N°1, pp. 104-118, Jan. 1978.

