Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS E UM EXEMPLO DE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA QUE É NÃO-DIFERENCIÁVEL EM TODOS OS PONTOS

MARIA HELENA MUSSI FORTES

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre.

Orientação: Prof. Dr. Artur Oscar Lopes

Banca examinadora:
Prof. Dr. Albert Meads Fisher (Seattle - Washington)
Prof. Dr. Artur Oscar Lopes (UFRGS- IM)
Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha (UFRGS - IM)

Julho 1996

Porto Alegre

À memória de meu pai

João Baptista Mussi

a quem devo o gosto pela Matemática.

AGRADECIMENTOS

São muitas as pessoas a quem devo agradecer. Menciono particularmente meus familiares, amigos e colegas de trabalho, de quem recebi todo o apoio e compreensão, os professores do Curso de Pós-Graduação, em especial, os professores Artur Lopes, Jaime Ripoll e Sara Carmona, que me incentivaram durante todo o curso.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar a existência de uma função contínua que é não-diferenciável em todo ponto.

Seguiremos aqui a exposição de H. Katsuura (Amer. Math. Monthly (1991)) e que utiliza conceitos como sistemas de funções iteradas (iterated function systems) e o espaço de Hausdorff de subconjuntos compactos de um espaco métrico completo. Para ter uma descrição completa do assunto, vamos apresentar uma exposição sistemática de tais conceitos.

Na Seção 1 apresentamos o Espaço de Hausdorff dos conjuntos compactos. Na Seção 2 mostramos que um certo sistema iterado de funções determina uma contração no espaço de Hausdorff. Finalmente na Seção 3 mostramos o exemplo de uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto. No apêndice apresentamos uma breve introdução aos conceitos utilizados de espaços métricos e a prova do teorema da contração.

ABSTRACT

In this thesis we show the existence of a continuous function which is nowhere differentiable.

We follow the H. Katsuura's work in Amer. Math. Month. (1991) which utilizes concepts as iterated function systems and Hausdorff space of compact subsets of a complete metric space. For having a full description of the subject, we give a systematic description of such concepts.

In Section 1 we introduce the Hausdorff space of compact subsets. In Section 2 we show that some iterated function systems determines a contraction in the Hausdorff space. Finally, in Section 3, we construct an example of a continuous function nowhere differentiable. In the Appendix we give a breve exposition of some concepts in Metric Spaces and we prove Contraction Theorem.

ÍNDICE

I. O ESPAÇO MÉTRICO DE HAUSDORFF

Definição 1: Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então $H(X)$ representa o espaço cujos pontos são os subconjuntos compactos não vazios de X.

Definição 2: Seja (X, d) um espaço métrico completo. Sejam $x \in X$ e $B \in H(X)$. A distância $\tilde{d}$ do ponto x ao conjunto B é definida por

$$\tilde{d}(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\}.$$

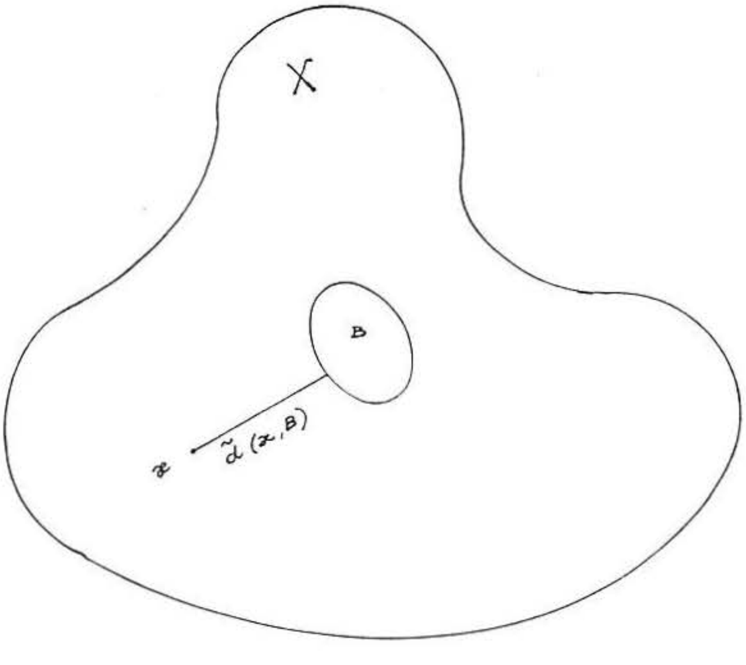


Figura 1

A existência do valor mínimo do conjunto $\{d(x, y) : y \in B\}$ está garantida pelo fato de B ser um conjunto compacto e não vazio e também de ser d uma métrica em X (ver fig. 1). De fato, consideremos $x \in X$ e a função contínua

$$f : B \to \mathbb{R}, \quad f(y) = d(x, y).$$

Seja $P = \inf\{f(y) : y \in B\}$.

Como $f(y) \geq 0$ para todo $y \in B$, concluimos que P é finito.

Para mostrar que existe mínimo, basta provar a existência de um ponto $\hat{y} \in B$ tal que $d(x, \hat{y}) = P$. Para isso, consideremos a seqüência $\{y_n : n = 1, 2, 3, \ldots\} \subset B$ tal que

$$|f(y_n) - P| < \frac{1}{n}.$$

Como B é compacto, essa seqüência $\{y_n\}$ admite uma subseqüência $\{y_{n_k}\}$ com limite $\hat{y} \in B$. Então, usando a continuidade da f, temos que

$$d(x, \hat{y}) = f(\hat{y}) = f\Big(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}\Big) = \lim_{k\to\infty}(f(y_{n_k})) = P.$$

Definição 3: Seja (X, d) um espaço métrico completo. Sejam A, $B \in H(X)$. A distância$\tilde{\tilde{d}}(A, B)$ do conjunto A ao conjunto B é definida por

$$\tilde{\tilde{d}}(A, B) = \max\{\tilde{d}(x, B) : x \in A\}.$$

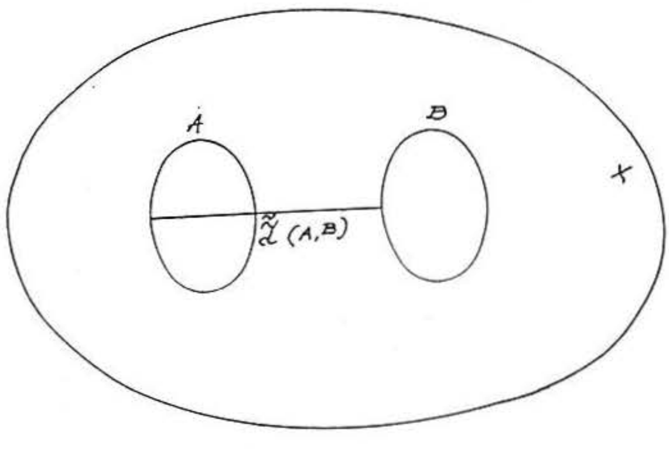


Figura 2

A existência do valor máximo do conjunto $\{\tilde{d}(x, B) : x \in A\}$ está garantida pelo fato de ser A compacto diferente do vazio e de $\tilde{d}$ ser contínua (ver fig. 2).

Afirmação 1: Em geral,

$$\tilde{\tilde{d}}(A, B) \neq \tilde{\tilde{d}}(B, A),$$

ou seja, a métrica d em X, usada como acima, não implica que $\tilde{\tilde{d}}$ seja uma métrica em $H(X)$. De fato, se considerarmos A, $B \in H(X)$, com $A \subset B$, teremos, para todo $x \in A$:

$$\tilde{d}(x, B) = \min\{d(x, y) : y \in B\} = 0$$

(pois $x \in B$).

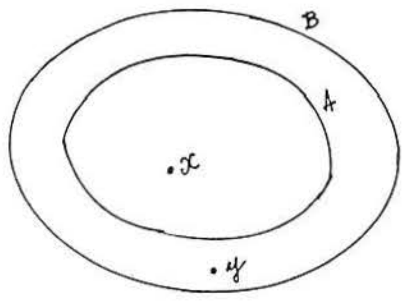


Figura 3

Logo

$$\tilde{\tilde{d}}(A, B) = \max\{\tilde{d}(x, B) : x \in A\} = 0.$$

Mas, tomando $y \in B$ e $y \notin A$ (ver fig. 3), temos: $\tilde{d}(y, A) \neq 0$, logo

$$\max\{\tilde{d}(y, A) : y \in B\} = \tilde{\tilde{d}}(B, A) \neq 0.$$

Afirmação 2: A desigualdade triangular é válida para a função $\tilde{\tilde{d}}$, ou seja, $\forall A$, B, $C \in H(X)$, (X, d) espaço métrico, tem-se:

$$\tilde{\tilde{d}}(A, B) \leq \tilde{\tilde{d}}(A, C) + \tilde{\tilde{d}}(C, B).$$

De fato, se considerarmos $a \in A$ qualquer, teremos:

$$\tilde{d}(a,B) = \min\{d(a,b) : b \in B\} \leq \min\{d(a,c) + d(c,b) : b \in B\}, \quad \forall c \in C.$$

Então $\tilde{d}\,(a,B) \leq d\,(a,c) + \min\{d\,(c,b) : b \in B\}$, $\forall c \in C$.
Ou seja: $\tilde{d}(a,B) \leq d(a,c) + \tilde{d}(c,B)$, $\forall c \in C$.
Se vale para todo $c \in C$, então podemos escrever:

$$\tilde{d}(a,B) \leq \min\{d(a,c) : c \in C\} + \max\{\tilde{d}(c,B) : c \in C\}.$$

Ou seja: $\tilde{d}(a,B) \leq \tilde{d}(a,C) + \tilde{\tilde{d}}(C,B)$.
Mas a desigualdade acima vale para todo $a \in A$, logo podemos afirmar que

$$\max\{\tilde{d}(a,B) : a \in A\} \leq \max\{\tilde{d}(a,C) : a \in A\} + \tilde{\tilde{d}}(C,B).$$

Ou

$$\tilde{\tilde{d}}(A,B) \leq \tilde{\tilde{d}}(A,C) + \tilde{\tilde{d}}(C,B)$$

Como se viu na Afirmação 1, $\tilde{\tilde{d}}$ não define uma métrica em $H(X)$, no ponto de vista da Definição 6 do Apêndice.

Vamos agora munir o conjunto $H(X)$ de uma métrica.

Definição 4: Seja (X,d) um espaço métrico completo. Sejam A, $B \in H(X)$. A distância de Hausdorff - h - entre os conjuntos A e B é definida por

$$h(A,B) = \tilde{\tilde{d}}(A,B) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,A)$$

onde a notação $x \vee y$ significa o máximo dos dois números reais x e y.

Teorema 1: h é uma métrica em $H(X)$.

Prova: Seja (X,d) espaço métrico completo e sejam A, B, $C \in H(X)$.

Usaremos a seguir as justificativas:

(1) Definição de h

(2) Afirmação 2

(3) Definição do $\vee$

(4) Se a, b, c, $d \in I\!R$, então $(a+b) \vee (c+d) \leq (a \vee c) + (b \vee d)$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{r} a \leq a \vee c \\ b \leq b \vee d \quad + \\ \hline a+b \leq (a \vee c)+(b \vee d) \end{array} & & \begin{array}{r} c \leq a \vee c \\ d \leq b \vee d \quad + \\ \hline c+d \leq (a \vee c)+(b \vee d) \end{array} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$(a+b) \vee (c+d) \leq (a \vee c)+(b \vee d)$$

(i) A e B são compactos e não vazios, logo existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $h(A,B) = d(a,b)$ e, como d é métrica em X, tem-se

$$0 \leq h(A,B) < +\infty.$$

Além disso,

$$h(A,A) \stackrel{1}{=} \tilde{\tilde{d}}(A,A) \vee \tilde{\tilde{d}}(A,A) = \tilde{\tilde{d}}(A,A) = \max\{\tilde{d}(x,A) : x \in A\} = 0.$$

Se $A \neq B$, podemos supor que exista $a \in A$ e $a \notin B$. Neste caso, temos:

$$h(A,B) \stackrel{1}{=} \tilde{\tilde{d}}(A,B) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,A) \geq \tilde{\tilde{d}}(A,B) \geq \tilde{d}(a,B) > 0$$

(ii) $h(A,B) \stackrel{1}{=} \tilde{\tilde{d}}(A,B) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,A) \stackrel{3}{=} \tilde{\tilde{d}}(B,A) \vee \tilde{\tilde{d}}(A,B) \stackrel{1}{=} h(B,A)$

(iii) $h(A,B) \stackrel{1}{=} \tilde{\tilde{d}}(A,B) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,A) \stackrel{2}{\leq} [\tilde{\tilde{d}}(A,C) + \tilde{\tilde{d}}(C,B)] \vee [\tilde{\tilde{d}}(B,C) + \tilde{\tilde{d}}(C,A)] \stackrel{4}{\leq} [\tilde{\tilde{d}}(A,C) \vee \tilde{\tilde{d}}(C,A)] + [\tilde{\tilde{d}}(C,B) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,C)] \stackrel{1}{=} h(A,C) + h(C,B)$.
Portanto, $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$.
Então, se estão verificados os axiomas

(i) $h(A,B) \geq 0$ e $h(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \forall A, B \in H(X)$

(ii) $h(A,B) = h(B,A), \ \forall A, B \in H(X)$

(iii) $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B), \ \forall A, B, C \in H(X)$
conclui-se que h é uma métrica em $H(X)$.

Acabamos de verificar que $(H(X), h)$ é um espaço métrico. Vamos introduzir outras definições e propriedades para poder concluir que $(H(X), h)$ é um espaço métrico completo.

Definição 5: Seja (X,d) um espaço métrico. Consideremos $S \subset X$ e $\epsilon > 0$. Então

$$S+\epsilon = \{y \in X : d(x,y) \leq \epsilon \text{ para algum } x \in S\}$$

$S+\epsilon$ é, às vezes, chamado dilatação de S pela bola de raio ϵ (ver Figura 4).

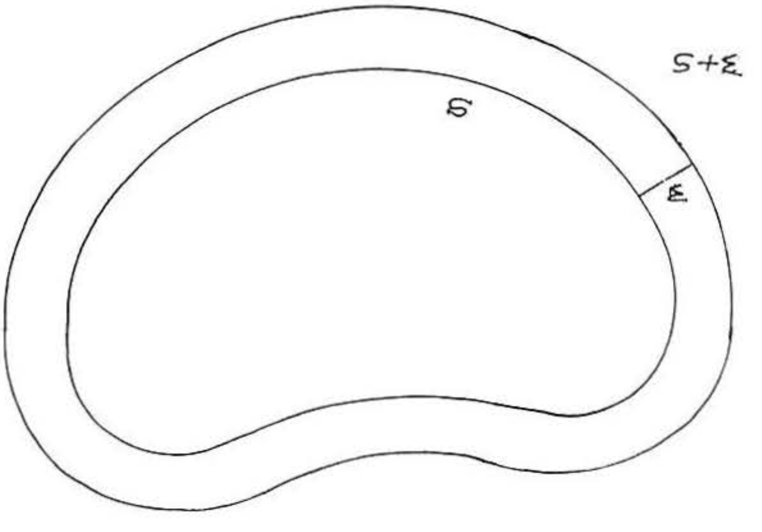


Figura 4

Afirmação 3: Se S é compacto, então $S+\epsilon$ é fechado.

Prova: Consideremos, em $S+\epsilon$, a seqüência convergente $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ e seja y o seu limite.

Como $y_i \in S+\epsilon$, conclui-se que para todo i existe $x_i \in S$ tal que $d(x_i, y_i) \leq \epsilon$. Mas S é compacto, logo a seqüência $\{x_i\} \subset S$ tem uma subseqüência convergente $\{x_{i_k}\}$; digamos que

$$\lim_{k \to \infty} x_{i_k} = z \in S.$$

Então, como $\forall k$, $d(x_{i_k}, y_{i_k}) \leq \epsilon$, temos, pela continuidade da função distância:

$$\epsilon \geq \lim_{k\to\infty} d(x_{i_k}, y_{i_k}) = d\Big(\lim_{k\to\infty} x_{i_k}, \lim_{k\to\infty} y_{i_k}\Big) = d(z, y).$$

Como $z \in S$ e $d(z,y) \leq \epsilon$ conclui-se que $y \in S + \epsilon$, ou seja, a seqüência $\{y_i\}$ converge para $y \in S + \epsilon$. Portanto $S + \epsilon$ é fechado.

Lema 1: Sejam A, $B \in H(X)$, onde (X,d) é um espaço métrico completo. Seja $\epsilon > 0$. Então

$$h(A,B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon \text{ e } B \subset A + \epsilon$$

Prova: Provemos primeiro que $\tilde{\tilde{d}}(A,B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon$

$\Longrightarrow$ Supor que $\tilde{\tilde{d}}(A,B) \leq \epsilon$

Temos então

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{d}}(A,B) \leq \epsilon &\Longrightarrow \max\{\tilde{d}(a,B) : a \in A\} \leq \epsilon \\
&\Longrightarrow \tilde{d}(a,B) \leq \epsilon, \ \forall a \in A \\
&\Longrightarrow a \in B + \epsilon, \ \forall a \in A \\
&\Longrightarrow A \subset B + \epsilon
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Supor $A \subset B + \epsilon$

Temos, neste caso $a \in A \Rightarrow a \in B + \epsilon \Rightarrow \exists b \in B$ tal que $d(a,b) \leq \epsilon \Rightarrow \min\{d(a,b) : b \in B\} \leq \epsilon \Rightarrow \tilde{d}(a,B) \leq \epsilon \Rightarrow \max\{\tilde{d}(a,B) : a \in A\} \leq \epsilon \Rightarrow \tilde{\tilde{d}}(A,B) \leq \epsilon$.

Do mesmo modo, vale a equivalência $\tilde{\tilde{d}}(B,A) \leq \epsilon \Leftrightarrow B \subset A + \epsilon$.

Vejamos agora a equivalência do Lema:

Sabemos que $h(A,B) = \tilde{\tilde{d}}(A,B) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,A)$

Então $h(A,B) \leq \epsilon \Leftrightarrow \tilde{\tilde{d}}(A,B) \leq \epsilon$ e $\tilde{\tilde{d}}(B,A) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B+\epsilon$ e $B \subset A+\epsilon$.

Lema 2: (Lema da Extensão) - Seja (X,d) um espaço métrico completo. Seja $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy de pontos em $(H(X),h)$. Seja $\{n_j\}$ uma seqüência de inteiros $0 < n_1 < n_2 < n_3 < ....$ Suponhamos que em (X,d) se tenha uma seqüência de Cauchy $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ com $x_{nj} \in A_{nj}$. Então existe uma seqüência de Cauchy $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, com $\tilde{x}_n \in A_n$, tal que $\tilde{x}_{nj} = x_{nj}$ para todo $j = 1,2,3....$

Prova: Vamos construir a seqüência $\{\tilde{x}_n \in A_n : n = 1,2,3,...\}$ da seguinte maneira: para cada $n \in \{1,2,3,...,n_1\}$, escolher $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}) = \tilde{d}(x_{n_1}, A_n)\}$, ou seja, $\tilde{x}_n$ é um ponto de A_n, o mais próximo a x_{n_1}. A existência de tal ponto está garantida pelo fato de A_n ser um conjunto compacto.

De modo análogo, para cada $j \in \{2,3,4,...\}$ e cada $n \in \{n_{j-1}+1, n_{j-1}+2,...,n_j\}$, escolher $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = \tilde{d}(x_{n_j}, A_n)\}$.

Mostremos agora que $\{\tilde{x}_n\}$ tem as propriedades desejadas, ou seja, que $\{\tilde{x}_n\}$ é, de fato, uma extensão de $\{x_{n_j}\}$ a $\{A_n\}$.

Temos, por construção, que $\tilde{x}_n \in A_n$ e que $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$. Resta provar que $\{\tilde{x}_n\}$ é uma seqüência de Cauchy.

Consideremos então $\epsilon > 0$. Por hipótese $\{x_{n_j}\}$ é de Cauchy, logo $\exists N_1$ tal que, n_k, $n_j \geq N_1$, tem-se

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

$\{A_n\}$ é também de Cauchy, logo $\exists N_2$ tal que, m, $n \geq N_2$, tem-se

$$h(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Então, para m, $n \geq N$, tem-se:

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \qquad (*)$$

onde

$$m \in \{n_{j-1}+1, n_{j-1}+2, n_{j-1}+3, ..., n_j\}$$

e

$$n \in \{n_{k-1}+1, n_{k-1}+2, n_{k-1}+3, ..., n_k\}.$$

Como $h(A_m, A_{nj}) \leq \epsilon/3$, existe, pelo Lema 1, $y \in A_m \cap (\{x_{n_j}\} + \epsilon/3)$. logo $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \epsilon/3$. Da mesma forma, $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \epsilon/3$. Então, da desigualdade (*), tem-se que $d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \epsilon$ para todo m, $n > N$, o que prova ser de Cauchy a seqüência $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\tilde{x}_n \in A_n$.

Teorema 2: $(H(X), h)$ é um espaço métrico completo.

Prova: O que precisamos provar é que, se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $(H(X), h)$, então

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \in H(X).$$

O conjunto A pode ser caracterizado assim: $A = \{x \in X$: existe uma seqüência $\{x_n\}$, $x_n \in A_n$, de Cauchy que converge a $x\}$.

Consideremos então $\{A_n\}$ seqüência de Cauchy em $H(X)$ e seja $A = \{x \in X$: x é limite de alguma seqüência $\{x_n\}$, $x_n \in A_n\}$.

Vamos separar a demonstração nos ítens a seguir:

(a) $A \neq \emptyset$

(b) A é fechado

(c) Para $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que, para $n \geq N$, $A \subset A_n + \epsilon$

(d) A é totalmente limitado

(e) $A = \lim\limits_{n \to +\infty} A_n$

(a) Provaremos esta parte, mostrando a existência de uma seqüência de Cauchy $\{a_i \in A_i\}$ em X. Para isso, consideremos a seqüência de números inteiros positivos $N_1 < N_2 < N_3 < \ldots < N_n < \ldots$ tais que

$$h(A_m, A_n) \leq \frac{1}{2^i}$$

para $m, n \geq N_i$.

Escolhamos $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Então, como

$$h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2},$$

podemos encontrar $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}.$$

Suponhamos que se tenha selecionado uma seqüência finita $x_{N_i} \in A_{N_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ para a qual se tenha

$$d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Então, como

$$h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$$

e $x_{N_k} \in A_{N_k}$, podemos determinar $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ tal que

$$d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

(Por exemplo, o ponto $x_{N_{k+1}}$ pode ser o ponto de $A_{N_{k+1}}$ que é o mais próximo de x_{N_k}).

Por indução, podemos determinar uma seqüência (infinita) $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$ tal que

$$d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}.$$

Para verificar que ela é de Cauchy, consideremos $\epsilon > 0$ e escolhamos N_ϵ de modo que

$$\sum_{i=N_\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon.$$

Então, para $m, n > N_\epsilon$, temos:

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + ... +$$

$$... + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < \sum_{i=N_\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon.$$

Aplicando o Lema 2 e o fato de X ser completo, conclui-se que existe uma seqüência convergente $\{a_i \in A_i\}$ tal que $a_{N_i} = x_{N_i}$. Logo existe $\lim a_i$ e, pela definição de A, esse limite pertence a A. Portanto $A \neq \emptyset$.

(b) Para mostrar que A é fechado, vamos considerar uma seqüência convergente $\{a_i\}$, com $a_i \in A$, cujo limite chamaremos "a", e provar que $a \in A$.

Se "a" é o limite da seqüência $\{a_i\}$, então existe uma seqüência crescente de números inteiros positivos, $\{N_i\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$d(a_{N_i}, a) \leq \frac{1}{i} \qquad (I)$$

Mas, cada elemento da seqüência $\{a_i\}$ é um elemento de A, ou seja, é o limite de alguma seqüência convergente cujos elementos x_n pertencem a A_n. Então, para o elemento $a_{N\epsilon} \in A$, existe uma subseqüência de números inteiros $\{m_i\}$ tal que

$$d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq \frac{1}{i} \qquad (II)$$

De (I) e (II), temos:

$$d(x_{N_i,m_i}, a) \leq d(x_{N_i,m_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) < \frac{2}{i}.$$

Se tomarmos $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$, teremos que $y_{m_i} \in A_{m_i}$ e

$$\lim_{i \to +\infty} y_{m_i} = a.$$

Aplicando o Lema da Extensão, $\{y_{m_i}\}$ pode ser extendida à seqüência $\{z_i\}$, $z_i \in A_i$ e, portanto, $a \in A$, o que mostra ser A fechado:

$\{y_{m_i}\}$ convergente $\Rightarrow$ $\{y_{m_i}\}$ de Cauchy $\overset{\text{Lema 2}}{\Rightarrow}$ $\{z_i\}$ de Cauchy $\overset{X \text{ completo}}{\Rightarrow}$ $\{z_i\}$ convergente $\Rightarrow a \in A$.

(c) Seja $\epsilon > 0$ e $\{A_n\}$ uma seqüência de Cauchy em $H(X)$. Então existe $N > 0$ tal que para $m, n \geq N$, tem-se $h(A_m, A_n) \leq \epsilon$.

Consideremos $n \geq N$. Então, para $m \geq n$ tem-se $A_m \subset A_n + \epsilon$ (Lema 1).

Precisamos provar que $A \subset A_n + \epsilon$. Para isso, consideremos $a \in A$. Pela definição do conjunto A, existe uma seqüência $\{a_i \in A_i\}$ que converge para a, ou seja, podemos assumir que N seja suficientemente grande para que se possa escrever para $m \geq N$, $d(a_m, a) < \epsilon$.

Mas $a_m \in A_n + \epsilon$ $(A_m \subset A_n + \epsilon)$ e $A_n + \epsilon$ é fechado, (A_n é compacto), logo $a \in A_n + \epsilon$.

Mas o elemento $a \in A$ considerado foi qualquer, portanto, para N suficientemente grande, tem-se que $A \subset A_n + \epsilon$, o que prova o item.

(d) A é totalmente limitado.

Vamos supor que A não seja totalmente limitado. Então existe $\epsilon > 0$ para o qual não existe um ϵ-net para A. Isso significa que pode ser determinada uma seqüência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in A$, tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ para $i \neq j$. Sabemos, pelo item (c) que, dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe n suficientemente grande, de modo que

$$A \subset A_n + \frac{\epsilon}{3}.$$

Então, para cada $x_i \in A$, existe um correspondente $y_i \in A_n$ tal que

$$d(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como A_n é compacto, a seqüência $\{y_i\}$ admite uma subseqüência $\{y_{n_i}\}$ convergente, isto é, em $\{y_{n_i}\}$ podem ser encontrados dois pontos tão próximos quanto se queira. Assim, podem ser determinados dois pontos y_{n_i} e y_{n_j} tais que

$$d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Pode-se então escrever, para n suficientemente grande:

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

o que contradiz a hipótese. Logo A é totalmente limitado.

Observação: Vimos no item (b) que A é fechado e no item (d) que é totalmente limitado. Concluimos então que A é compacto (Lema 7 do Apêndice). Mas $A \neq \emptyset$, pelo item (a), logo $A \in H(X)$.

(e) $\lim A_n = A$

Na parte (c), provou-se que para $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para $n \geq N$, $A \subset A_n + \epsilon$. Se provarmos que, nas mesmas condições, $A_n \subset A + \epsilon$, poderemos usar o Lema 1 para afirmar que $h(A_n, A) \leq \epsilon$, ou seja, que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Provemos então que, dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que, se $n \geq N$, tem-se $A_n \subset A + \epsilon$:

Seja $\epsilon > 0$. Então, como $\{A_n\}$ é de Cauchy, existe $N > 0$ tal que, para $m, n \geq N$,

$$h(A_m, A_n) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para $m, n \geq N$, tem-se

$$A_m \subset A_n + \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $y \in A_n$. Existe uma seqüência crescente $\{N_i\}$, de números inteiros positivos tais que $n < N_1 < N_2 < N_3 < ... < N_k < ...$ e, para $m, k \geq N_j$,

$$A_m \subset A_k + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}.$$

Note que

$$A_n \subset A_{N_1} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $y \in A_n$, existe $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tal que

$$d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Da mesma forma, como $x_{N_1} \in A_{N_1}$, existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\epsilon}{2^2}.$$

Assim por diante, pode-se determinar a seqüência $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \ldots$ de modo que $x_{N_j} \in A_{N_j}$ e

$$d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \frac{\epsilon}{2^{j+1}}.$$

Então, para todo j, tem-se

$$d(y, x_{N_j}) \leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + d(x_{N_2}, x_{N_3}) + \ldots + d(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \frac{\epsilon}{2^3} + \ldots + \frac{\epsilon}{2^j} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^j}\right)\epsilon < \epsilon.$$

A seqüência $\{x_{N_j}\}$ é também de Cauchy e, como (X, d) é completo, converge a um ponto $x \in A$. Portanto $d(y, x_{N_j}) < \epsilon$ implica $d(y, x) < \epsilon$ e, portanto $A_n \subset A + \epsilon$, para todo $n \geq N$.

Isso completa a prova do item (e) pois:

$$A \subset A_n + \epsilon \text{ e } A_n \subset A + \epsilon \Leftrightarrow h(A_n, A) \leq \epsilon \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} A_n = A.$$

II. UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DAS CONTRAÇÕES

Apresentamos nesta seção quatro lemas que serão necessários mais adiante.

Lema 3: Se $f : X \to X$ é uma função contínua no espaço métrico (X, d), então f é função de $H(X)$ em si mesmo.

Prova: Seja S um subconjunto compacto e não vazio de X, ou seja, $S \in H(X)$. Temos então

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\} \neq \emptyset \text{ pois } S \neq \emptyset.$$

Para provar que $f(S)$ é compacto, consideremos em $f(S)$ a seqüência $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, com $y_n = f(x_n)$. Então $\{x_n\}$ é uma seqüência em S e, como S é compacto, existe uma subseqüência $\{x_{N_n}\}$ que converge a $\hat{x} \in S$.

Temos então, como f é uma função contínua (por hipótese):

$$\lim_{n\to\infty} y_{N_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_{N_n}) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_{N_n}\Big) = f(\hat{x}) = \hat{y} \in f(S).$$

Mas, se a seqüência $\{y_n\} \subset f(S)$, qualquer, admite uma subseqüência $\{y_{N_n}\}$ convergente em $f(S)$, concluimos que $f(S)$ é compacto.

Sendo $f(S)$ compacto e não vazio, pode-se afirmar que $f(S) \in H(X)$, ou seja, f é uma função de $H(X)$ em $H(X)$.

Lema 4: Se $\omega : X \to X$ é uma contração no espaço métrico (X, d), com fator de contratividae s, então $\omega : H(X) \to H(X)$, definida por $\omega(B) = \{\omega(x) : x \in B\}$ para todo $B \in H(X)$ é uma contração em $(H(X), h)$ com fator s de contratividade.

Prova: Do Lema 8 do Apêndice, temos que $\omega : X \to X$ é contínua. Então, pelo Lema 3 acima temos que ω é função $\omega : H(X) \to H(X)$.

Consideremos B, $C \in H(X)$. Temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{d}}(\omega(B), \omega(C)) &= \max\{\min\{d(\omega(x)), \omega(y)) : y \in C\} : x \in B\} \leq \\ &\leq \max\{\min\{sd(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = \\ &= s\max\{\min\{d(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = s\tilde{\tilde{d}}(B, C)\end{aligned}$$

Do mesmo modo, demonstra-se que

$$\tilde{\tilde{d}}(\omega(C),\omega(B)) \leq s\tilde{\tilde{d}}(C,B).$$

Logo

$$\begin{aligned} h(\omega(B),\omega(C)) &= \tilde{\tilde{d}}(\omega(B),\omega(C)) \vee \tilde{\tilde{d}}(\omega(C),\omega(B)) \leq \\ &\leq s\tilde{\tilde{d}}(B,C) \vee s\tilde{\tilde{d}}(C,B) = \\ &= s[\tilde{\tilde{d}}(B,C) \vee \tilde{\tilde{d}}(C,B)] = \\ &= sh(B,C). \end{aligned}$$

Portanto ω é uma contração em $(H(X),h)$ cujo fator de contratividade é s.

Lema 5: Se A, B, C, $D \in H(X)$, onde (X,d) é um espaço métrico completo, então $h(A \cup B, C \cup D) \leq h(A,C) \vee h(B,D)$, onde h é a métrica de Hausdorff.

Prova:
$h(A \cup B, C \cup D) = \tilde{\tilde{d}}(A \cup B, C \cup D) \vee \tilde{\tilde{d}}(C \cup D, A \cup B) \stackrel{1}{=}$
$\stackrel{1}{=} \tilde{\tilde{d}}(A, C \cup D) \vee \tilde{\tilde{d}}(B, C \cup D) \vee \tilde{\tilde{d}}(C, A \cup B) \vee \tilde{\tilde{d}}(D, A \cup B) \stackrel{2}{\leq}$
$\stackrel{2}{\leq} \tilde{\tilde{d}}(A,C) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,D) \vee \tilde{\tilde{d}}(C,A) \vee \tilde{\tilde{d}}(D,B) =$
$= [\tilde{\tilde{d}}(A,C) \vee \tilde{\tilde{d}}(C,A)] \vee [\,\tilde{\tilde{d}}(B,D) \vee \tilde{\tilde{d}}(D,B) =$
$= h(A,C) \vee h(B,D)$.

Justificativas: Supor A, B, $C \in H(X)$, (X,d) espaço métrico completo.

1) $\tilde{\tilde{d}}(A \cup B, C) = \tilde{\tilde{d}}(A,C) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,C)$

De fato: $\tilde{\tilde{d}}(A \cup B, C) = \max\{\tilde{d}(x,C) : x \in A \cup B\} = \max\{\tilde{d}(x,C) : x \in A$ ou $x \in B\} = \max\{\tilde{d}(x,C) : x \in A\} \vee \max\{\tilde{d}(x,C) : x \in B\} = \tilde{\tilde{d}}(A,C) \vee \tilde{\tilde{d}}(B,C)$

2) $B \subset C \Rightarrow \tilde{\tilde{d}}(A,C) \leq \tilde{\tilde{d}}(A,B)$, $\forall A \in H(X)$

De fato: Se $B \subset C$ então, $\forall x \in X$, $\tilde{d}(x,C) \leq \tilde{d}(x,B)$ pois: (ver Fig. 5)

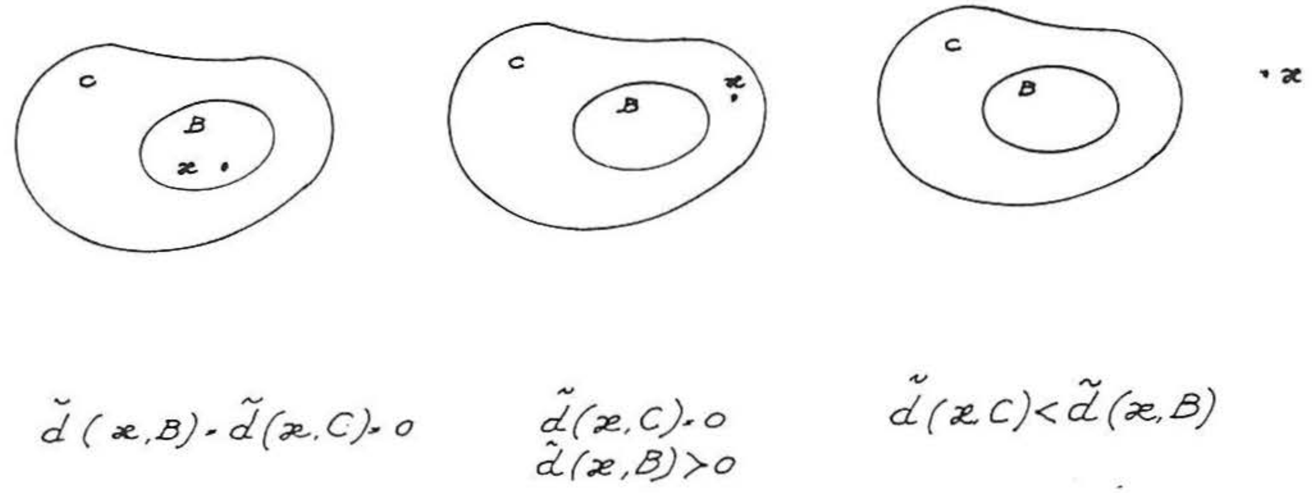


Figura 5

$x \in B \Rightarrow \tilde{d}(x, B) = \tilde{d}(x, C) = 0$
$x \in C \wedge x \notin B \Rightarrow \tilde{d}(x, C) = 0$ e $\tilde{d}(x, B) > 0$
$x \notin C \Rightarrow \min\{d(x, y) : y \in C\} \leq \min\{d(x, y) : y \in B\}$
$\Rightarrow \tilde{d}(x, C) \leq \tilde{d}(x, B)$
Logo

$$\begin{aligned} B \subset C \quad &\Rightarrow \quad \tilde{d}(x, C) \leq \tilde{d}(x, B), \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \quad \max\{\tilde{d}(x, C) : x \in A\} \leq \max\{\tilde{d}(x, B) : x \in A\} \\ &\Rightarrow \quad \tilde{\tilde{d}}(A, C) \leq \tilde{\tilde{d}}(A, B) \end{aligned}$$

Lema 6: Seja (X, d) um espaço métrico completo. Sejam ω_1, ω_2, ω_3, ..., ω_N contrações em $(H(X), h)$. Seja s_i o fator de contratividade de cada ω_i.

Definamos $\omega : H(X) \to H(X)$ por

$$\omega(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B) \cup ... \cup \omega_N(B) = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(B),$$

para cada $B \in H(X)$.

Então ω é uma contração cujo fator de contratividade é $s = \max\{s_i : i = 1, 2, 3, ..., N\}$.

Prova: Faremos a prova para $N = 2$. O lema será facilmente provado usando indução.

Sejam $B,\ C \in H(X)$. Temos:

$$\begin{aligned} h(\omega(B), \omega(C)) &= h(\omega_1(B) \cup \omega_2(B), \omega_1(C) \cup \omega_2(C)) \leq \\ &\overset{\text{Lema 5}}{\leq} h(\omega_1(B), \omega_1(C)) \vee h(\omega_2(B), \omega_2(C)) \leq \\ &\overset{\text{Hipótese}}{\leq} s_1 h(B, C) \vee s_2 h(B, C) \leq \\ &\leq sh(B, C), \text{ onde } s = \max\{s_1, s_2\}. \end{aligned}$$

Logo

$$h(\omega(B), \omega(C)) \leq sh(B, C), \quad \forall\, B,\ C \in H(X)$$

ou seja, ω é uma contração com fator de contratividade $s = \max\{s_1, s_2\}$.

III. A CONSTRUÇÃO DE UMA FUNÇÃO CONTÍNUA E NÃO DIFERENCIÁVEL EM QUALQUER PONTO

Seja $X = [0;1] \times [0;1]$ o quadrado unitário fechado no plano, com a métrica euclidiana. Sejam as funções $\omega_i : X \to X$, $i = 1,2,3$, contrações definidas por

$$\begin{aligned}
\omega_1(x,y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}\right) \\
\omega_2(x,y) &= \left(\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3}\right) \\
\omega_3(x,y) &= \left(\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3}\right)
\end{aligned}$$

A simples observação de sua lei, permite concluir que, em cada ω_i a coordenada y é contraída ao menos $2/3$ de seu valor e a coordenada x é contraída a $1/3$ do seu valor. Isto é, se denotarmos π_1 e π_2, respectivamente, a projeção na primeira e na segunda coordenada, então para dois pontos quaisquer (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de X, tem-se, para $i = 1,2,3$:

$$d(\pi_2(\omega_i(x_1,y_1)), \pi_2(\omega_i(x_2,y_2))) \leq \frac{2}{3} d(\pi_2(x_1,y_1), \pi_2(x_2,y_2))$$

e

$$d(\pi_1(\omega_i(x_1,y_1)), \pi_1(\omega_i(x_2,y_2))) \leq \frac{1}{3} d(\pi_1(x_1,y_1), \pi_1(x_2,y_2)).$$

Mostremos que ω_i, $i = 1,2,3$, é contração.

Sejam (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in X$. Temos

$$\begin{aligned}
d[\omega_1(x_1,y_1), \omega_1(x_2,y_2)] &= d\left[\left(\frac{x_1}{3}, \frac{2y_1}{3}\right), \left(\frac{x_2}{3}, \frac{2y_2}{3}\right)\right] \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y_1}{3} - \frac{2y_2}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{9}[(x_1 - x_2)^2 + (2y_1 - 2y_2)^2]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{9}[(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2]} \\
&\leq \sqrt{\frac{4}{9}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]} \\
&= \frac{2}{3} d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]
\end{aligned}
$$

Logo

$$d[\omega_1(x_1, y_1), \omega_1(x_2, y_2)] \leq \frac{2}{3} d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$$

e ω_1 é contração com fator de contratividade $2/3$.

Da mesma forma:

$$
\begin{aligned}
d[\omega_2(x_1, y_1), \omega_2(x_2, y_2)] &= d\left[\left(\frac{2 - x_1}{3}, \frac{1 + y_1}{3}\right), \left(\frac{2 - x_2}{3}, \frac{1 + y_2}{3}\right)\right] \\
&= \sqrt{\left(\frac{2 - x_1}{3} - \frac{2 - x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 + y_1}{3} - \frac{1 + y_2}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{9}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]} \\
&= \frac{1}{3} d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \leq \frac{2}{3} d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]
\end{aligned}
$$

Logo ω_2 é contração com fator de contratividade $1/3$.

Também para ω_3, temos:

$$
\begin{aligned}
d[\omega_3(x_1, y_1), \omega_3(x_2, y_2)] &= d\left[\left(\frac{2 + x_1}{3}, \frac{1 + 2y_1}{3}\right), \left(\frac{2 + x_2}{3}, \frac{1 + 2y_2}{3}\right)\right] \\
&= \sqrt{\left(\frac{2 + x_1}{3} - \frac{2 + x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 + 2y_1}{3} - \frac{1 + 2y_2}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2} \leq \\
&\leq \frac{2}{3}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\
&= \frac{2}{3} d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]
\end{aligned}
$$

Portanto

$$d[\omega_3(x_1, y_1), \omega_3(x_2, y_2)] \leq \frac{2}{3} d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

e cada uma das funções $\omega_i : X \to X$, $i = 1, 2, 3$ é uma contração do quadrado X (ver Fig. 6).

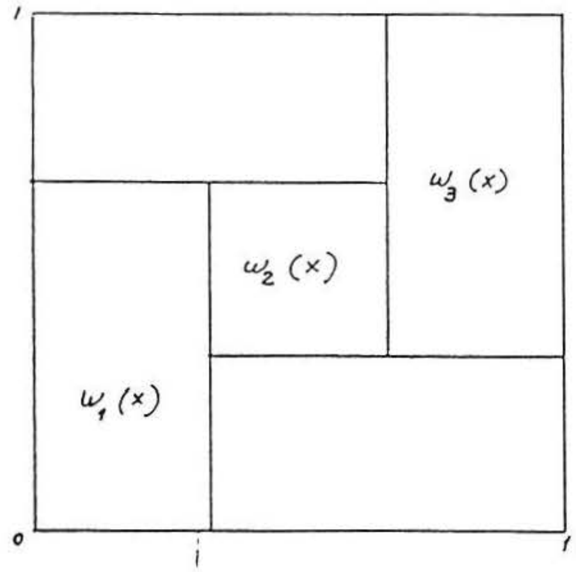


Figura 6

De acordo com a figura 6, ω_1 contrai X a $\omega_1(X)$, com o ponto fixo (0,0). ω_2 reflete X em torno do eixo

$$x = \frac{1}{2}$$

e o contrai a $\omega_2(X)$, com o ponto fixo

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

ω_3 reduz X a $\omega_3(X)$ e o ponto fixo é (1,1).

Se considerarmos o conjunto $H(X)$ de todos os subconjuntos fechados e não vazios de X, podemos, pelos Lemas 3 e 6, definir a função

$$\omega : H(X) \to H(X)$$

tal que $\omega(A) = \omega_1(A) \cup \omega_2(A) \cup \omega_3(A)$ para todo $A \in H(X)$. Considerando então o espaço métrico $(H(X), h)$, conclui-se que a função ω é uma contração em $H(X)$, com a métrica h de Hausdorff, cujo fator de contratividade é $2/3$ (Lemas 4 e 6).

Seja $D_0 \in H(X)$, $D_0 = \{(x,x) \in X\}$ a diagonal do quadrado X. Consideremos, para $n = 1, 2, 3, ...$ o conjunto $D_n = \omega(D_{n-1}) \in H(X)$. Então, para cada $n = 1, 2, 3, ...$, D_n é o gráfico de uma função contínua de [0;1] em si mesmo, a qual chamaremos f_n (ver Fig. 7, 8, e 9).

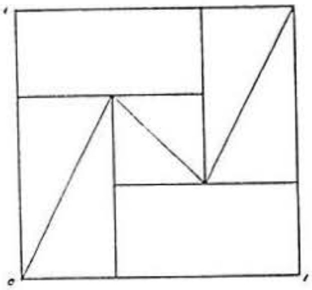
Observemos que, se $m \geq n$, então $D_m \subset \omega^n(X)$ e que $\omega^n(X)$ é a união de 3^n retângulos cujas dimensões são menores ou iguais a

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

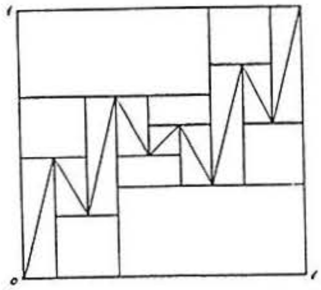
Assim,

$$\sup\{d(f_m(t), f_n(t)) : t \in [0;1]\} = d(f_m, f_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

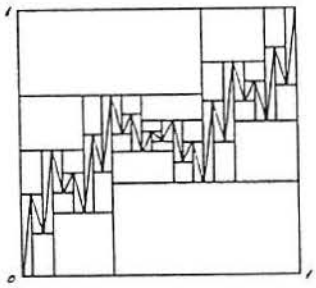
Isso significa que a seqüência $\{f_n\}$ de funções contínuas é uniformemente convergente, ou seja, existe uma função contínua f, de [0;1] em [0;1] tal que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, no intervalo [0;1]. O que vamos provar é que essa função f não é diferenciável em qualquer ponto de (0;1) que se considere.



$\omega(x) = D_1$



$\omega^2(x) = D_2$



$\omega^3(x) = D_3$

Figuras 7, 8, 9

Como ω é uma contração em $H(X)$, existe um único ponto fixo D, em $H(X)$ (Teorema do Ponto Fixo: Teorema 4 do Apêndice).

Então, se $A \in H(X)$, a seqüência $\{\omega^n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a D, na métrica h de Hausdorff. Assim, considerando a seqüência $\{D_n\} \subset H(X)$,onde $D_0 = \{(x,x) : x \in [0;1]\}$ e $D_n = \omega(D_{n-1})$, para todo $n = 1,2,3,...$, temos que D_n converge a D e D é o gráfico da função f.

PROVA DA NÃO DIFERENCIABILIDADE DA f.

Seja T o conjunto de todos os números racionais, cujo denominador é potência de 3, no intervalo [0;1] e, para cada $n = 1,2,3,...$, seja T_n o conjunto

$$T_n = \{x \in [0;1] : x = \frac{k}{3^n},\ \ k \text{ inteiro}, 0 \leq k \leq 3^n\}.$$

Proposição 1: Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ seqüências em T tais que
(1) x_n e y_n estão em T_n, $\forall n = 1, 2, 3, ...$
(2) $y_n - x_n = 1/3^n$, $\forall n = 1, 2, 3, ...$
(3) ou $x_n = x_{n+1}$ ou $y_n = y_{n+1}$, $\forall n$, $n \geq N$, N inteiro positivo.
Então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right| = \infty.$$

Prova: Afirmação:

$$\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right| \geq 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Observemos, em primeiro lugar que se $x \in T_n$, então $f(x) = f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, ...$

Supor $n = 1$.

Neste caso, pelas condições (1) e (2) da hipótese, podemos ter: $x_1 = 0$ e $y_1 = 1/3$ ou $x_1 = 1/3$ e $y_1 = 2/3$ ou $x_1 = 2/3$ e $y_1 = 1$. Portanto, de acordo com a figura 7:

$$\frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} = \begin{cases} \frac{f_1(1/3) - f_1(0)}{1/3 - 0} = \frac{2/3 - 0}{1/3} = 2 \\ \text{ou} \\ \frac{f_1(2/3) - f_1(1/3)}{2/3 - 1/3} = \frac{1/3 - 2/3}{1/3} = -1 \\ \text{ou} \\ \frac{f_1(1) - f_1(2/3)}{1 - 2/3} = \frac{1 - 1/3}{1/3} = \frac{2/3}{1/3} = 2 \end{cases}$$

Em qualquer dos casos possíveis, tem-se

$$\left|\frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1}\right| \geq 1 = 2^{1-1}$$

e a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Vamos supor agora que a afirmação seja válida para algum inteiro $n \geq 1$, ou seja, que, para $n \geq 1$ se tenha

$$|f(y_n) - f(x_n)| \geq 2^{n-1}|y_n - x_n|.$$

Neste caso, teremos, tomando a condição (3) com $x_{n+1} = x_n$ e não esquecendo que, $x \in T_n \Rightarrow f(x) = f_n(x)$, de acordo com a figura 10:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}}\right| &= \frac{\frac{2}{3}|f(y_n) - f(x_n)|}{\frac{1}{3}|y_n - x_n|} \geq \\
&\geq 2\frac{2^{n-1}|y_n - x_n|}{|y_n - x_n|} = 2^{(n+1)-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, se a afirmação é válida para $n \geq 1$, será válida também para $n + 1$. Conclui-se daí que a afirmação é válida para qualquer n.

Se a afirmação é verdadeira, então a proposição também.

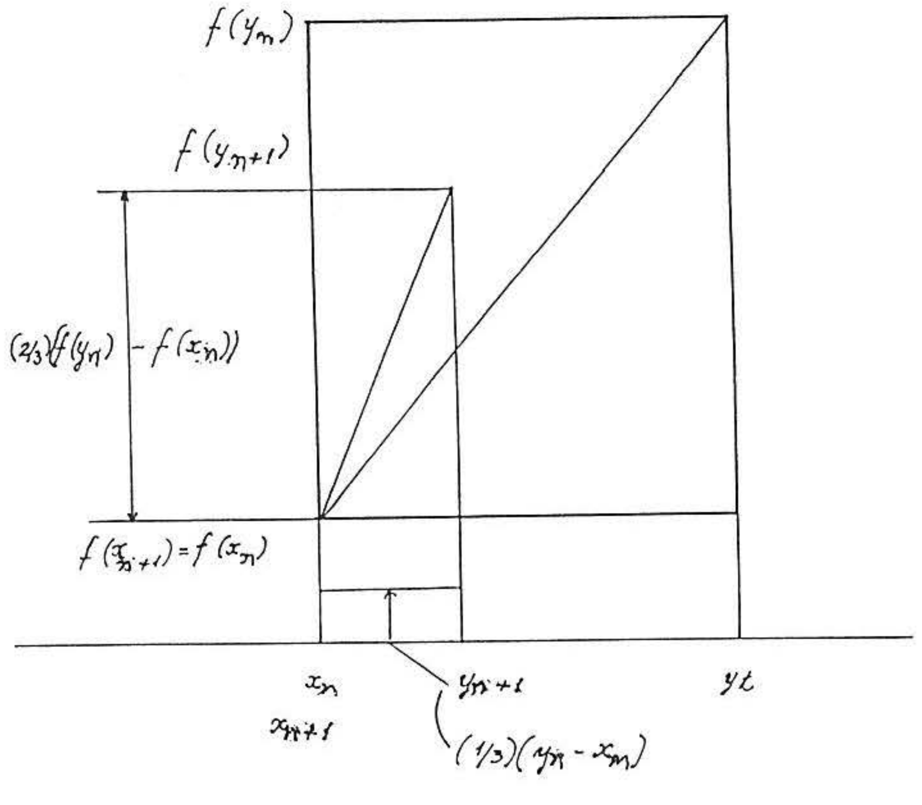


Figura 10

Proposição 2: Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ seqüências em T tais que, para infinitos $n = 1, 2, 3, ...$,

(1) $x_n, y_n \in T_n$

(2) $y_n - x_n = 1/3^n$

(3) $x_n \neq x_{n+1}$ e $y_n \neq y_{n+1}$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

não existe.

Prova: Vamos demonstrar, em primeiro lugar, que vale a afirmação

$$\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right| \geq 1$$

para todo $n = 1, 2, 3, ...$

De fato, a afirmação é verdadeira para $n = 1$, como já foi demonstrado na Proposição 1.

Suponhamos que, para algum $n \geq 1$ se tenha como verdadeiro que

$$\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right| \geq 1.$$

Então, para $x_{n+1} = x_n$ (ou $y_{n+1} = y_n$), já se provou, na proposição anterior, que a afirmação é verdadeira para $n + 1$.

Se $x_{n+1} \neq x_n$ e $y_{n+1} \neq y_n$, então, de acordo com a Figura 11, tem-se:

$$\left|\frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{3}|f(y_n) - f(x_n)|}{\frac{1}{3}|y_n - x_n|} = \left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right| \geq 1.$$

Portanto a afirmação é verdadeira para todo $n = 1, 2, 3, ...$

Mas, por outro lado, se n é um número inteiro tal que $x_n \neq x_{n+1}$ e $y_n \neq y_{n+1}$, então, de acordo com a Figura 11, temos:

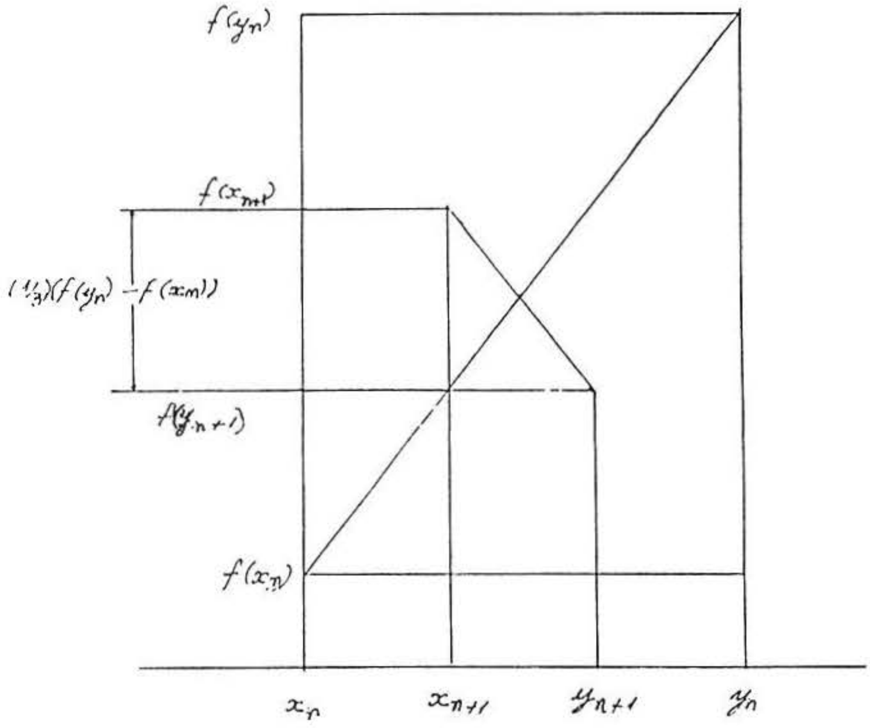


Figura 11

$$\frac{f(y_{n+1}) - f(x_{n+1})}{y_{n+1} - x_{n+1}} = \frac{-\frac{1}{3}(f(y_n) - f(x_n))}{\frac{1}{3}(y_n - x_n)} = -\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

ou seja, a razão

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

troca de sinal cada vez que n aumenta uma unidade; portanto, se existir o limite da expressão acima para $n \to \infty$, esse limite terá de ser zero. Mas a afirmação que acabamos de demonstrar diz que o limite dessa expressão deve ter módulo maior ou igual a 1, portanto o limite não existe, o que demonstra a proposição.

A proposição seguinte é por demais conhecida, dispensa comentários.

Proposição 3: Seja g uma função real em [0;1], diferenciável em t, com $0 < t < 1$. Se, para todo $n = 1, 2, 3, ...$, $0 < x_n < t < y_n < 1$ e se $x_n \to t$ e $y_n \to t$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(x_n)}{y_n - x_n} = g'(t) \in I\!R.$$

Teorema 3: A função $f : [0;1] \to [0;1]$ considerada acima

$$\left(f = \lim_{n\to\infty} f_n\right)$$

é não diferenciável em todo $x \in (0;1)$.

Prova: Seja $x \in (0;1)$.
Supor $x \in T_n$ para algum $n = 1,2,3,\ldots$. Então seja y_k de modo que

$$y_k - x = \frac{1}{3^{n+k}}$$

para todo $k = 1,2,3,\ldots$. Temos então

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty}\left(x + \frac{1}{3^{n+k}}\right) = x.$$

Temos então satisfeitas as hipóteses da Proposição 1, portanto

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f(y_k) - f(x_k)}{y_k - x_k}\right| = \infty,$$

ou seja, (*) f não é diferenciável em qualquer $x \in (0;1)$ tal que $x \in T_n$ para algum $n = 1,2,3,\ldots$

Supor $x \notin T_n$, $\forall n \in \{1,2,3,\ldots\}$.

Temos então, para $x \in (0;1)$:

$$n = 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3} \text{ e } x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow x \in (x_1;y_1), \text{ onde}$$

$$(x_1;y_1) = \begin{cases} \left(0;\frac{1}{3}\right) \\ ou \\ \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right) \\ ou \\ \left(\frac{2}{3};1\right) \end{cases}$$

$$n = 2 \Rightarrow x \in (x_2;y_2), \text{ onde}$$

$$(x_2; y_2) = \begin{cases} \left(x_1; x_1 + \frac{1}{3^2}\right) \\ ou \\ \left(x_1 + \frac{1}{3^2}; x_1 + \frac{2}{3^2}\right) \\ ou \\ \left(x_1 + \frac{2}{3^2}; x_1 + \frac{3}{3^2}\right) \end{cases}$$

$$n = 3 \Rightarrow x \in (x_3; y_3) \text{ onde}$$

$$(x_3; y_3) = \begin{cases} \left(x_2; x_2 + \frac{1}{3^3}\right) \\ ou \\ \left(x_2 + \frac{1}{3^3}; x_2 + \frac{2}{3^3}\right) \\ ou \\ \left(x_2 + \frac{2}{3^3}; x_2 + \frac{3}{3^3}\right) \end{cases}$$

e assim por diante, indefinidamente, tem-se: $x \in ...(x_n; y_n) \subset (x_{n-1}; y_{n-1}) \subset ... \subset (x_1; y_1)$.

Como $x \notin T$, em qualquer etapa $n = 1, 2, 3, ...$ que se considere, sempre x estará compreendido entre dois pontos x_n e $y_n \in T_n$, cada vez mais próximos de x e tais que

$$y_n - x_n = \frac{1}{3^n}.$$

Portanto, se $x \notin T_n$, sempre poderão ser consideradas duas seqüências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ cujo limite é x e tais que, para todo $n = 1, 2, 3, ...$, se tenha

(1) x_n e $y_n \in T_n$

(2) $y_n - x_n = 1/3^n$

(3) $x_n < x < y_n$

Se acontecer que $x_n = x_{n+1}$ ou $y_n = y_{n+1}$, para todo $n > N$, N inteiro positivo, então, pela Proposição 1, teremos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \right| = \infty.$$

Se ocorrer, para infinitos valores de n, que $x_n \neq x_{n+1}$ e $y_n \neq y_{n+1}$, então, pela Proposição 2, teremos que não existe o

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Mas, pela Proposição 3, esse último limite, quando existe e é finito, é a derivada da função f em x.

(**) Portanto, se $x \notin T$, a função f não é derivável em $x \in (0;1) - T_n$.

Das conclusões (*) e (**), segue que f é não derivável em todo $x \in (0;1)$.

APÊNDICE

Definição 6: Um espaço métrico (X, d) é um conjunto X e uma função $d : X \times X \rightarrow I\!R$, chamada métrica, que a cada par (x, y) de pontos de X associa um número real $d(x, y)$, chamado distância entre x e y, que satisfaz os seguintes axiomas:

(i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in X$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$

Observações:

a) Se $X = I\!R$ a distância entre dois pontos $x, y \in I\!R$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$, chamada métrica usual da reta. Sempre que considerarmos o espaço métrico $I\!R$, estaremos usando tal métrica.

b) Se $X = I\!R^n$, a métrica euclidiana é definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2},$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

c) Se X é o conjunto das funções limitadas $f : A \rightarrow I\!R$ onde A é um conjunto qualquer), então a métrica que usaremos é a métrica do Sup, dada por

$$d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|.$$

(Uma função real $f : A \rightarrow I\!R$ é dita limitada se existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| < k$, para todo $x \in A$).

É fácil ver que tal d define uma métrica no espaço das funções limitadas.

Definição 7: Diz-se que uma seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, de pontos de um espaço métrico (X, d), converge a um ponto $x \in X$ se, qualquer que seja o número $\epsilon > 0$ dado, existe um número inteiro $N > 0$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n > N$.

O ponto $x \in X$ é chamado limite da seqüência e anota-se

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

(ou simplesmente $\lim x_n = x$).

Diz-se que uma seqüência $\{f_n\}$ de funções $f_n : A \to M$, onde M é um espaço métrico, converge uniformemente em A para a função $f : A \to M$ se, qualquer que seja o número real $\epsilon > 0$, é possível determinar um número inteiro $N > 0$ tal que, para todo $n > N$, tem-se

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in A}\{d(f_n(x), f(x))\} < \epsilon.$$

Definição 8: Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Dizemos que $f : X_1 \to X_2$ é contínua se $x_n \in X_1$ é tal que $x_n \to x$ então $f(x_n) \to f(x)$.

Observação: O limite uniforme de uma seqüência de funções contínuas $f_n : A \to M$ é uma função contínua $f : A \to M$.

Definição 9: Seja $S \subset X$ um subconjunto do espaço métrico (X, d). S é dito fechado se S contém o limite de toda seqüência convergente $\{x_n\} \subset S$.

Definição 10: Uma seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ou simplesmente $\{x_n\}$) de pontos de um espaço métrico (X, d) é dita seqüência de Cauchy se, para todo número $\epsilon > 0$ dado, existe um número inteiro $N > 0$ tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon$ para todo $m, n > N$.

Observação: Toda seqüência convergente é de Cauchy mas nem toda seqüência de Cauchy é convergente.

Definição 11: Um espaço métrico (X, d) é dito completo se toda seqüência de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em X converge a um ponto de X.

Definição 12: Seja $S \subset X$ um subconjunto do espaço métrico (X, d). S é dito um conjunto compacto se toda seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em S contém uma subseqüência $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente em S.

Definição 13: Seja $S \subset X$ um subconjunto do espaço métrico (X, d). S é dito limitado se existem um ponto $a \in X$ e um número real $R > 0$ tais que $d(a, x) < R$, $\forall x \in S$.

Definição 14: Seja $S \subset X$ um subconjunto do espaço métrico (X, d). S é totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\} \subset S$ tal que, dado um ponto qualquer $x \in S$, existe algum $y_i \in \{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\}$ tal que $d(x, y_i) \leq \epsilon$. Esse conjunto $\{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\} \subset S$ é chamado ϵ-net para S.

Em outras palavras, $S \subset X$ é totalmente limitado se S está contido na união de um número finito de bolas de mesmo raio e centro em S.

Lema 7: Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $S \subset X$. Então S é compacto se e somente se é fechado e totalmente limitado.

Prova:

$\Leftarrow$ Supor S fechado e totalmente limitado.

Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de pontos de S.

Como S é totalmente limitado, pode ser determinada uma coleção finita de bolas fechadas de raio 1 cuja união contém S. Mas, se a coleção de bolas é finita e S está contido na união dessas bolas, pelo menos uma delas, digamos B_1, contém infinitos pontos $x_n \in S$. Vamos escolher o número inteiro N_1 de modo que $x_{N_1} \in B_1 \cap S$. É fácil concluir que $B_1 \cap S$ é um conjunto totalmente limitado. Portanto podemos cobrir $B_1 \cap S$ com um conjunto finito de bolas de raio $1/2$. Pelo mesmo raciocínio anterior, uma dessas bolas, digamos B_2, contém infinitos pontos x_n. Vamos escolher $N_2 > N_1$, de modo que $x_{N_2} \in B_2 \cap S$. Assim por diante, podemos obter uma seqüência de bolas $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset B_4 \supset ... \supset B_n \supset ...$ de raio

$$r = \frac{1}{2^{n-1}}$$

e uma seqüência de números inteiros $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ tais que $x_{N_n} \in B_n \cap S$. Então, pelo modo como foi construída, $\{x_{N_n}\}$ é uma subseqüência de $\{x_n\} \subset S$ e, além disso é de Cauchy em $S \subset X$. Como (X, d) é completo e S é fechado, conclui-se que $\{x_{N_n}\}$ é convergente em S. Mas se a seqüência $\{x_n\}$ (que é qualquer) tem uma subseqüência convergente, conclui-se que S é compacto.

$\Rightarrow$ Vamos supor agora que S é compacto.

Que S é fechado, decorre da própria definição de compacto. Vamos supor que S não seja totalmente limitado. Então existe $\epsilon > 0$ para o qual não é possível determinar o ϵ-net para S. Ou seja, existe uma seqüência de pontos de S, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon(*)$, para todo $i \neq j$. mas, como S é compacto, essa seqüência $\{x_n\}$ admite subseqüência convergente em S e, portanto de Cauchy. Portanto é possível determinar dois números inteiros diferentes - N_j e N_k - para os quais $d(x_{N_j}, x_{N_k}) < \epsilon$, o que contraria a desigualdade (*). Conclui-se daí que S é totalmente limitado.

Definição 15: Seja (X, d) um espaço métrico. Uma função $\omega : X \to X$ é dita uma contração se e somente se existe um número λ, $0 \leq \lambda < 1$ tal que $\forall x, y \in X$, $d(\omega(x), \omega(y)) \leq \lambda d(x, y)$.

O número λ é chamado fator de contratividade.

Lema 8: Se $\omega : X \to X$ é uma contração no espaço métrico (X, d), então ω é contínua.

Prova: Se $\lambda = 0$, então ω é uma função constante e, portanto, contínua. Seja λ, $0 < \lambda < 1$, o fator de contratividade de ω. Então $d(\omega(x), \omega(y)) \leq \lambda d(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Considerado $\epsilon > 0$ arbitrário, pode-se determinar δ tal que

$$0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{\lambda}$$

e, neste caso, tem-se, para todo $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} d(x,y) < \delta \quad &\Rightarrow \quad d(\omega(x), \omega(y)) < \lambda d(x,y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad d(\omega(x), \omega(y)) \leq \lambda\delta \Rightarrow d(\omega(x), \omega(y)) < \lambda\frac{\epsilon}{\lambda} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad d(\omega(x), \omega(y)) < \epsilon \Rightarrow \omega \text{ é contínua} \end{aligned}$$

Vamos agora apresentar o Teorema da Contração.

Teorema 4: Teorema do Ponto Fixo para Contrações (Método das Aproximações Sucessivas) Seja (M, d) um espaço métrico completo. Consideremos $F \subset M$ um subconjunto fechado e $\omega : F \to F$ uma contração.

Dado um ponto qualquer $x_0 \in F$, a seqüência

$$x_1 = \omega(x_0), x_2 = \omega(x_1), x_3 = \omega(x_2), ..., x_{k+1} = \omega(x_k), ...$$

converge para um ponto $a \in F$, que é o único ponto fixo de F.

Demonstração: Se ω é uma contração, então $\exists\lambda$, $0 \leq \lambda < 1$, tal que $\forall x$, $y \in F$, $d(\omega(x), \omega(y)) \leq \lambda d(x, y)$.

Temos também, para a seqüência $(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ...)$ em F:

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_1) &= d(\omega(x_1), \omega(x_0)) \leq \lambda d(x_1, x_0) \\
d(x_3, x_2) &= d(\omega(x_2), \omega(x_1)) \leq \lambda d(x_2, x_1) \\
d(x_4, x_3) &= d(\omega(x_3), \omega(x_2)) \leq \lambda d(x_3, x_2) \\
&\vdots \\
d(x_k, x_{k-1}) &= d(\omega(x_{k-1}), \omega(x_{k-2})) \leq \lambda d(x_{k-1}, x_{k-2}) \\
d(x_{k+1}, x_k) &= d(\omega(x_k), \omega(x_{k-1})) \leq \lambda d(x_k, x_{k-1}).
\end{aligned}$$

Nas k desigualdades acima, após k substituições, teremos:

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda^k d(x_1, x_0) \qquad \text{(I)}$$

Temos também, para $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, pela desigualdade triangular:
$d(x_{k+p}, x_k) \leq d(x_{k+p}, x_{k+p-1}) + d(x_{k+p-1}, x_{k+p-2}) + d(x_{k+p-2}, x_{k+p-3}) + ... + d(x_{k+1}, x_k)$.

Ou seja,

$$d(x_{k+p}, x_k) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{k+i+1}, x_{k+i}).$$

Então, pela desigualdade (I), vem:

$$d(x_{k+p}, x_k) \leq \sum_{i=0}^{p-1} [\lambda^{k+i} d(x_1, x_0)].$$

Ou

$$d(x_{k+p}, x_k) \leq \left[\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i}\right] d(x_1, x_0).$$

Mas

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i} = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^k \lambda^i = \lambda^k \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i \leq \lambda^k \frac{1}{1-\lambda} = \frac{\lambda^k}{1-\lambda}.$$

Logo

$$d(x_{k+p}, x_k) \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} d(x_1, x_0).$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, temos que, dado $\epsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, sempre existirá um número inteiro $N > 0$ tal que, para todo $k > N$ se tenha

$$\frac{\lambda^k}{1-\lambda} < \frac{\epsilon}{d(x_1, x_0)}, \qquad (x_1 \neq x_0)$$

logo, para qualquer p fixado, tem-se, para todo $k > N$,

$$d(x_{k+p}, x_k) < \epsilon.$$

Então a seqüência (x_k) é de Cauchy em M e, como M é completo (toda seqüência de Cauchy em M converge), existe

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = a \qquad \text{(II)}$$

e $a \in F$ pois, por hipótese, F é fechado.

Além disso, como ω é contínua, (Lema 8), tem-se ainda que:

$$\omega(a) = \omega\left(\lim_{k \to +\infty} x_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \omega(x_k) = \lim_{k \to +\infty} x_{k+1} = a.$$

Se $\omega(a) = a$, então a é ponto fixo de ω.

Temos também que "a" é único:

Vamos supor que

$$\omega(a) = a \quad \text{e} \quad \omega(b) = b, \quad a,\, b \in F.$$

Então

$$d(a,b) = d(\omega(a), \omega(b)) \leq \lambda d(a,b)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq \lambda d(a,b) \\ d(a,b)(1-\lambda) &\leq 0 \\ d(a,b) &\leq 0 \text{ pois } 1-\lambda > 0, \text{ já que } \lambda < 1 \\ d(a,b) &= 0 \\ a &= b \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

BARNSLEY, MICHAEL. Fractals Everywhere, Academic Press. Inc., Boston, 1988.

KATSUURA, HIDEFUMI. Continuous Nowhere-Differenciable Functions - an Application of Contraction Mappings. Amer. Math. Monthly 98, num. 5, p. 411 (1991).

LIMA, ELON LAGES. Espaços Métricos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.