

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**ESTUDO DE UM MODELO POPULACIONAL DE PEIXES  
CONSIDERANDO EFEITOS DE MIGRAÇÃO**

por

**Clésio Pedrinho Wenzel**

Dissertação para a obtenção do Grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre  
Junho de 2003

**UFRGS**  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS  
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

**ESTUDO DE UM MODELO POPULACIONAL DE PEIXES  
CONSIDERANDO EFEITOS DE MIGRAÇÃO**

por

Clésio Pedrinho Wenzel  
Especialista em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

**Mestre em Matemática Aplicada**

Área de Concentração: Sistemas Não Lineares e Ecologia

Orientador: Prof. Dr. Germán Ramon Canahualpa Suazo

Aprovada por:

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer - UNICAMP

Prof. Dr. Julio Claeysen - PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Jacques Loureiro da Silva - PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Junho de 2003

## RESUMO

O propósito do trabalho é estudar um modelo matemático sobre a população de peixes, na situação de represamento de rio. As equações governantes são de tipo parabólico com condições de contorno de Neumann.

O problema é abordado de maneira exata utilizando a função de Green, mas a impraticidade da implementação da solução exata, conduz à procura de uma abordagem alternativa.

Escolheu-se a abordagem em diferenças mas pode ser utilizado o método de elementos finitos ou de volumes finitos.

É feita uma descrição de diversos métodos em diferença em uma e duas dimensões e é considerado o método implícito de direções alternadas pela sua estabilidade incondicional.

São feitas simulações numéricas em Matlab, para tentar explicar o comportamento populacional considerando efeitos da migração, bem como a influência de fatores tais como: reprodução, alimentação ou fatores climáticos (temperatura e nível da água). São simuladas numericamente quatro situações diferentes considerando efeitos de migração transversal e longitudinal, e são enunciados os comentários e conclusões pertinentes.

## ABSTRACT

**TITLE:** "SURVEY ON A FISH-POPULATION MODEL CONSIDERING EFFECTS OF MIGRATION"

The purpose of this work is to study a mathematical model of a fish population confined in a dam. The governing equations are of parabolic type with Neumann boundary conditions.

The problem is analytically solved using the Green function, but the infeasibility of implementation of this exact solution, leads us to seek an alternative approach.

Finite difference approach was chosen, but finite elements or volumes methods may be used instead.

A description is made of the various difference methods in one and two dimensions and the Alternated Direction Implicit Method is considered because of its unconditional stability.

Numerical simulations were made in Matlab, trying to explain the population behaviour considering migration effects, and the influence of factor such as reproduction, diet and climatic factors (temperature and water level) as well. Four different situations are numerically simulated, considering transverse and longitudinal migration, and pertinent comments and conclusions are stated.

## ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO . . . . .	1
2	APRESENTAÇÃO DO MODELO . . . . .	3
2.1	Requisitos Hídricos para a Conservação do Ecossistema Fluvial . . . . .	8
3	UM MODELO MATEMÁTICO PARA A POPULAÇÃO DE PEIXES . . . . .	10
3.1	Introdução . . . . .	10
3.2	Equação Diferencial Parcial para a População . . . . .	10
3.3	Condições de Contorno . . . . .	13
3.4	Condição Inicial . . . . .	15
3.5	Problema de Valor Inicial e de Contorno . . . . .	15
3.6	Crescimento Populacional proporcional à População . . . . .	15
3.7	Abordagem Analítica do Modelo . . . . .	17
3.8	Comentários Finais . . . . .	19
4	MÉTODOS EM DIFERENÇAS PARA EQUAÇÕES PARABÓLICAS . . . . .	20
4.1	Solução em Diferenças Finitas do Problema Unidimensional . . . . .	21
4.1.1	Métodos em Diferenças de Dois Níveis . . . . .	23

4.1.2	Método de Schmidt . . . . .	24
4.1.3	Método de Laasonen . . . . .	25
4.1.4	Método de Crank-Nicholson . . . . .	27
4.1.5	Método Geral de Dois Níveis . . . . .	29
4.1.6	Métodos em Diferenças de Três Níveis . . . . .	31
4.2	Análise de Convergência e Estabilidade . . . . .	33
4.2.1	Análise de Convergência . . . . .	34
4.2.2	Análise de Estabilidade de Von Neumann . . . . .	38
4.3	Resolução Numérica do Problema Bidimensional . . . . .	41
4.4	Métodos Implícitos de Direções Alternadas (ADI) . . . . .	46
5	ABORDAGEM DO PROBLEMA PELO MÉTODO ADI CLÁSSICO . . . . .	48
6	RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	51
6.1	Malha do Domínio Retangular . . . . .	52
6.2	Primeiro Grupo de Dados . . . . .	54
6.2.1	Comentário . . . . .	54
6.3	Segundo Grupo de Dados . . . . .	55
6.3.1	Comentário . . . . .	57
6.4	Terceiro Grupo de Dados . . . . .	57
6.4.1	Comentário . . . . .	59

6.5	Quarto Grupo de Dados . . . . .	59
6.5.1	Comentário . . . . .	61
7	CONCLUSÕES . . . . .	62
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	64

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1	<i>Represamento bilateral de um rio</i> . . . . .	11
Figura 4.1	<i>Malha unidimensional para a equação (4.4)</i> . . . . .	21
Figura 4.2	<i>Representação esquemática para fórmulas de dois níveis</i> . . . . .	24
Figura 4.3	<i>Representação esquemática do método de Schmidt (4.13)</i> . . . . .	24
Figura 4.4	<i>Representação esquemática do método de Laasonen (4.21)</i> . . . . .	26
Figura 4.5	<i>Representação esquemática do método de Crank-Nicholson (4.29) ou (4.30)</i> . . . . .	28
Figura 4.6	<i>Representação esquemática do método de DuFort e Frankel (4.41)</i>	32
Figura 4.7	<i>Aplicação do método implícito no nível <math>n + 1</math></i> . . . . .	45
Figura 6.1	<i>Malha</i> . . . . .	52
Figura 6.2	<i>Gráfico do comportamento 1</i> . . . . .	54
Figura 6.3	<i>Gráfico do comportamento 2</i> . . . . .	56
Figura 6.4	<i>Gráfico do comportamento 3</i> . . . . .	58
Figura 6.5	<i>Gráfico do comportamento 4</i> . . . . .	60

## LISTA DE SIMBOLOS

$f(b)$  função linear contínua dada

$\Omega$  Dominio de  $\mathbb{R}$

$\Omega_i$   $i$ -ésimo elemento triangular da discretização

$r_0$  eixo do rio

$r_1$  jusante

$r_2$  margem esquerda do rio

$r_3$  montante

$a$  crescimento populacional

$\alpha$  dispersão populacional

$\sigma$  decaimento populacional

$V$  espaço ocupado

$V_h$  subespaço de  $V$

$n$  valor posição

$t$  tempo (instante)

- T continuidade das funções nos triângulos
- $B_•$  biomassa populacional a montante e a jusante
- $\beta$  coeficiente de permeabilidade
- $\gamma$  disjuntor
- $\beta_j$  coeficiente de permeabilidade a jusante
- $B_j$  biomassa a jusante
- $\beta_M$  coeficiente de permeabilidade a montante
- $B_M$  biomassa a montante
- $b^\circ$  distribuição inicial da biomassa
- Y malha em y
- X malha em x
- $L_y$  comprimento em y ( parâmetros iniciais)
- $L_x$  comprimento em x
- b condição / momento

$z$  números inteiros

$L_f$  valor da função contínua

$\delta$  peso obtido convenientemente

$Cr$  número de Courant

$\partial$  derivada da função

$\varphi_1$  função teste

$\psi_1$  função teste com certo peso

$V_h$  espaço das funções geradoras

$b_h$  solução discreta

$F(x)$  função positiva nula em cada nó

$\vec{v}$  velocidade ou Fluxo

$A$  matriz de rigidez

$B$  Vetor carga

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é, no primeiro instante, apresentar uma abordagem teórico-prática sobre um modelo migratório de peixes em uma barragem hidroelétrica.

Faz-se um estudo para conhecer, num sentido qualitativo, o porquê das migrações de diferentes espécies, bem como os fatores que desencadeiam tal processo migratório.

Neste estudo, serão considerados quatro tipos de comportamentos:

1. A população estudada permanece no mesmo local, podendo praticar migração em direção do leito do rio (eixo  $y$ ).
2. Aquelas populações que iniciam um movimento lateral progressivo em que o leito do rio se transformou.[Bonetto 1963 in Diniz G.L]
3. Aquelas populações que a partir do fechamento (represamento do rio), e formação do novo lago, iniciam um movimento cíclico de subida e descida no rio, chamado movimento longitudinal.[Bonetto 1963 in Diniz G.L]
4. Aquelas populações territoriais mas que possam praticar a migração longitudinal isto é, em direção do eixo  $x$ . [Bonetto 1963 in Diniz G.L].

Será apresentado também um modelo matemático dando algumas idéias gerais sobre a migração de acordo com os fenômenos apresentados,[Paiva 1982].

Para abordar o problema matemático, descrevem-se duas metodologias:

1. A utilização da função de Green que fornece uma solução analítica do problema.

2. O método de diferenças finitas com o meta de implementar um esquema numérico confiável.

Para efeitos de simulação numérica, foi feita, a implementação computacional do método de diferenças finitas, usando o *software* numérico MATLAB versão 5.3. As simulações gráficas do modelo matemático apresentado em (4.7) ilustram diversos casos das variáveis comportamentais.

## 2 APRESENTAÇÃO DO MODELO

Os estudiosos das migrações animais empregam técnicas muito aperfeiçoadas, como o rastreamento dos bandos com radar, para desvendar os fatores que desencadeiam o impulso migrador e os mecanismos de orientação de que os animais se valem para realizar suas viagens.

Migrações animais são os deslocamentos realizados, periodicamente ou não, em limites de espaço e tempo significativos em relação ao tamanho e à duração da vida da espécie.

Excluem-se, portanto, os movimentos como o do plâncton animal, para cima e para baixo, que representam simples taxias (tropismo; movimentos automáticos e invariáveis) sob influência da luz solar (fototaxia negativa), assim como os que se fazem na busca cotidiana de abrigo. Alguns autores só reconhecem a migração quando existe periodicidade regular, [Azevedo 1938], [Bonetto 1963], [Catella 1992].

As migrações ligadas à reprodução não se confundem com os deslocamentos sazonais (Média entre temperatura, precipitação e profundidade). Peixes marinhos por exemplo, procuram águas menos profundas, nas proximidades da costa, para a postura, permanecendo aí durante o período da reprodução.

Nas migrações entre mar e rios, distinguem-se as espécies **anadrômicas**, que sobem a correnteza, das espécies **catadrômicas**, as que descem.

Consideram-se migrações, embora não típicas, os deslocamentos dos limites de distribuição de uma população. Esses deslocamentos se processam de forma mais lenta que as migrações propriamente ditas e em geral se relacionam a alterações recentes do clima.

Nas duas últimas décadas assistiu-se um programa de construção de represas e usinas hidrelétricas que “levou a transformação de muitos rios brasileiros numa sucessão de lagos artificiais” [Bazzoli 1991 in Diniz G.L., 1994], buscando um aproveitamento energético razoável e num ritmo mais acelerado do que o aceitável para o conhecimento da biologia de sua fauna aquática. Com isso, informações sobre a reprodução e comportamento de peixes brasileiros, bem como estudos sobre alterações ambientais são bastante precárias [Bazzoli 1991 in Diniz G.L.], [Porto 1997].

Os peixes migradores enquadram-se em duas categorias, [Bonetto 1963 in Diniz G.L.].

1. os que se deslocam sem mudar de ambiente ( mais típico);
2. os que alternadamente se deslocam da água doce para a salgada e vice-versa, como as enguias e robalos.

Um exemplo, o dourado, é um peixe de água doce que, no tempo da desova, sobe às cabeceiras dos afluentes e se detém junto aos grandes saltos para, antes de vencer o obstáculo, irromper(brotar) violentamente das águas e atingir vários metros de altura num só pulo, [Bonetto 63 in Diniz G.L.].

Os salmões do Atlântico abandonam as águas do mar e procuram os rios para desovar. Sobem até as cachoeiras, onde se dá a postura, a fecundação e o nascimento dos filhotes (alevinos). Estes, ao atingirem certo grau de desenvolvimento, descem o rio em direção ao mar, enquanto os pais permanecem nas cabeceiras [Brisa 1999].

Antes pensava-se que a chuva era considerada o fator principal que desencadeava o processo migratório, para fins de reprodução [Azevedo 1938], [Petrere 1985 in Diniz G.L.].

Alguns especialistas acreditam que o elemento deflagrador da migração, seja ela longa ou curta, é sempre direta ou indiretamente alimentar. Se o animal vive em região bem provida, torna-se sedentário, mas se falta alimento, empreende a migração.

Os estudos referentes a alimentação e hábitos alimentares das principais espécies de peixes de rios, indicam uma ampla dieta alimentar, destacando-se os seguintes itens consumidores: insetos, peixes, restos de vegetais, detritos, frutos, algas, larvas, microcústáceos, macrófitas aquáticas, escamas e espículas de esponjas.

Outros argumentam, porém, que não se pode atribuir a migração a um único fator, seja ele a alimentação, a redução do número das horas luz no dia etc. Mais provável é a existência de uma combinação de fatores externos como ( alimentação e temperatura) e internos como ( os ritmos de metabolismo) que em conjunto determinariam a inquietação migradora.

Mudanças hormonais são observáveis nesses períodos e a inquietação se dá mesmo em animais em cativeiro, bem protegidos e alimentados, [Brisa 1999].

É freqüente que os animais utilizam mais de um mecanismo de orientação.

O Salmão pode valer-se da bússola solar, além dos estímulos quimiotáticos da corrente, [Brisa 1999].

As larvas de enguias chegam aos estuários dos rios com a maré montante,( junção das águas de rios) e, quando a maré baixa, vão para o fundo, evitando serem varridas de novo para o mar, [Brisa 1999].

Como são capazes de reagir ao cheiro de certas substâncias específicas das águas do rio, aguardam no fundo até que o olfato lhes indique o momento de emergir e retornar, [Brisa 1999].

Atualmente, considera-se como principais fatores o nível da água, juntamente com a temperatura [Schubart 1959 in Diniz G.L. ], [Petrere 1985 in Diniz G.L.].

Além disso, há referências que indicam onde é dada uma certa importância à fase lunar na migração, sendo que nenhuma prova foi estabelecida [Schubart 1943 in Diniz G.L.], [Bayley 1973 in Diniz G.L.], [Petrere 1985 in Diniz G.L.].

De acordo com observações realizadas em outras usinas hidrelétricas, como por exemplo Itaipú, classifica a migração de peixes, em termos gerais, da seguinte forma:

- (i) reprodutiva;
- (ii) térmica;
- (iii) trófica ou nutricional;
- (iv) migrações de crescimento e
- (v) migrações devidas a fenômenos especiais, tais como os originados pelas variações no nível da água e correnteza. [Bonetto 1963 in Diniz G.L.], [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

São reconhecidos vários padrões de movimentos migratórios, no entanto, distingue três principais:

1. Espécies de migração moderada pelo rio, cujos maiores movimentos de migração são para dispersão nos habitat da seca.
2. Black fish, geralmente migração lateral, ou seja, buscando as bordas do canal principal dos rios;

3. White fish, migração longitudinal, característica dos peixes de “piracema”. Tais migrações estão vinculadas, em geral, à reprodução e à fuga de condições adversas nas partes baixas dos rios e lagos. [Welcomme 1985], [Catella 1992].

Com todas essas dificuldades que puderam ser verificadas, observadas e analisadas, fica evidente que a **migração** de peixes em rios ocorre quando da **reprodução** ou por **deficiência na alimentação**.

Para assegurar a migração e conseqüentemente a perpetuação, o Ministério do Meio Ambiente conforme Portaria N. 73 DE 30/10/ 2000 em conformidade com a constituição Federal que preceitua que todos tem direito ao ambiente ecologicamente equilibrado, bem de uso comum e essencial à sadia qualidade de vida, é dever do poder público e da coletividade defendê-lo e preservá-lo as presentes e futuras gerações; com isso *considera que* [Ministério 2000]:

- A lei 7 679 de 23/11/1988; proíbe a pesca em épocas de reprodução, fixando períodos de defeso da piracema para a proteção da fauna aquática, conforme a região;
- Lagoas marginais são caracterizadas como área de proteção permanente dando condições as espécies ictíicas tenham garantia de sobrevivência na fase inicial de seu desenvolvimento;
- A fauna e a flora aquática são recursos ambientais indispensáveis ao equilíbrio dos ecossistemas aquáticos;
- O intenso reforço de pesca exercido sobre os cardumes, nos períodos em que ocorrem os fenômenos migratórios para a reprodução (piracema), pode interferir no equilíbrio biológico das espécies e, conseqüentemente, na formação de seus estoques.

## 2.1 Requisitos Hídricos para a Conservação do Ecossistema Fluvial

Há vários critérios de qualidade da água, como a seguir:

Os critérios da qualidade da água estabelecidos pela resolução N. 20 do CONAMA (Conselho Nacional do Meio Ambiente), para a preservação das comunidades aquáticas e seu equilíbrio natural, e para a preservação da vida aquática de água doce.

Com referência ao requisito de qualidade da água para conservação do ecossistema aquático, o DNAEE (Departamento Nacional de Energia Elétrica), estipulou na sua regra 02 para aprovação dos Estudos de Geração de Energia Hidrelétrica para o Serviço público, 3.7 que:

*“Durante os estudos e a concepção do projeto básico, deve ser levado em consideração que a vazão remanescente no curso de água na jusante da represa não deve ser inferior a 80% da vazão mínima média mensal, caracterizada com base nos dados históricos das vazões naturais dos últimos 10 anos. Os casos para os quais os critérios supra mencionados não se aplicam e os reservatórios em cascata serão examinados pelo DNAEE ”.*

Com base nos padrões migratórios citados anteriormente, três tipos de comportamentos serão considerados :

1. A população estudada permanece no mesmo local, como se não tivesse havido modificado;
2. Aquelas que iniciam um movimento lateral progressivo, em direção às margens do lago em que o rio se transformou;
3. E a terceira são aquelas que a partir do fechamento da barragem e surgimento do lago, iniciam um processo cíclico, subindo e/ou descendo o rio, dentro da nova situação de “rio que flui dentro de um lago”.

[Welcomme 1985 in Diniz G.L.], [Catella 1992]

Estes comportamentos estão fortemente ligados, é claro, a outras características das espécies observadas. Não obstante, os processos migratórios não se dão em alta velocidade, mas gradativamente ( as velocidades oscilam entre 0,03 Km/dia para *Leoporus* sp. e 13,9 Km/dia para *Duopalatinus emarginatus* no Rio São Francisco, ao mesmo tempo em que se alteram outros hábitos e comportamentos, devidos sobretudo à repentina e formidável mudança do seu espaço vital, [Paiva 1982], [Petrere 1985 in Diniz G.L.].

### 3 UM MODELO MATEMÁTICO PARA A POPULAÇÃO DE PEIXES

#### 3.1 Introdução

Neste capítulo, formula-se o modelo matemático que tenta explicar uma população de peixes confinados em uma barragem hidrelétrica bem como os efeitos da .

A variável de interesse neste estudo é a *população* de uma determinada espécie de peixes confinada em uma barragem hidrelétrica. As variáveis independentes são o **espaço** e o **tempo**. De maneira mais específica, é considerado o espaço plano (de duas dimensões) para fornecer uma visão de superfície do fenômeno. Na necessidade de um estudo tri-dimensional, a variável adicional de **profundidade** teria de ser considerada.

Para fins simplificativos, supor-se-á que o local de interesse é uma área retangular.

Uma vez formulado o modelo, proceder-se-á à sua classificação. Isto é feito para poder formular a sua abordagem em termos analíticos e, em um capítulo posterior, a sua aproximação mediante a técnica de diferenças finitas.

Na seção seguinte, o fenômeno em estudo é formulado a través de um problema de valor inicial e de contorno em um domínio retangular. Cabe salientar que é considerado o efeitos de migração.

#### 3.2 Equação Diferencial Parcial para a População

Os fenômenos populacionais são muito complexos e dependem de diversos fatores. Mas um bom ponto de partida para o entendimento destes fenômenos é considerar modelos matemáticos mais ou menos simples que permitam o re-exame

de algumas idéias generalizadas sobre migração, [Paiva 1982],[Petrere 1985 in Diniz G.L. ].

Neste estudo, será considerado um represamento bilateral de um rio como se mostra na figura 3.1. [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

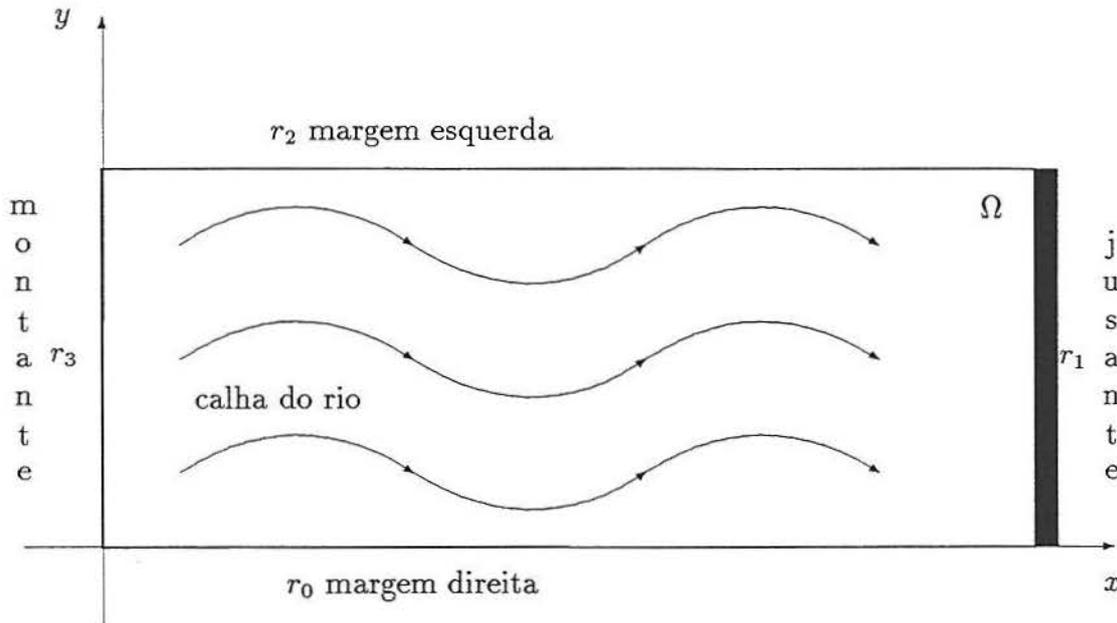


Figura 3.1 *Represamento bilateral de um rio*

Para simplificar nosso estudo, supor-se-á que a região de interesse tem uma forma retangular, e que o represamento é bilateral de maneira que não é permitido o fluxo populacional para regiões externas.

É de interesse o estudo da população de peixes dentro dessa região retangular. Para isto, é fixado um sistema cartesiano de coordenadas, e um domínio retangular  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . A variável de estudo (população de peixes) vai ser denominada

$$b(t, x, y) \quad (3.1)$$

onde  $t$  representa o instante de tempo,  $x$  e  $y$  a posição em que a população é medida.

De acordo com [Paiva 1982] e [Petrere 1985 in Diniz G.L.], um modelo adequado para o estudo da migração seria

$$\frac{\partial b}{\partial t} = (\text{dispersão populacional}) - (\text{decaimento populacional}) - (\text{efeito da migração}) + (\text{crescimento populacional}). \quad (3.2)$$

[Paiva 1982] e [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

Estes quatro fatores vão ser discutidos brevemente, a seguir

- **Decaimento populacional:** Os fatores que o influenciam diretamente são a mortalidade e o efeito da predação entre outros menos importantes. Matematicamente pode ser expresso mediante

$$\text{Decaimento populacional} = \sigma b(t, x, y) \quad (3.3)$$

onde  $\sigma$  é uma constante denominada *constante de decaimento populacional*. [Paiva 1982] e [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

- **Crescimento populacional:** Os fatores que o influenciam diretamente são a natalidade e a alimentação entre outros. Não é fácil conseguir uma expressão matemática simples para este fator, e portanto para explicá-lo será suposta uma certa função  $f$

$$\text{Crescimento populacional} = f(b(t, x, y)) \quad (3.4)$$

[Paiva 1982] e [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

- **Efeito da migração:** Este fator não deve ser confundido com os deslocamentos populacionais sazonais (por temporada). Os fatores que o influenciam diretamente são a reprodução e a procura por melhores

condições vitais. Pode ser expresso matematicamente como

$$\text{Efeito de migração} = \nabla \cdot (Vb(t, x, y)) \quad (3.5)$$

onde  $V$  é um vetor que orienta a migração. [Paiva 1982] e [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

- **Dispersão populacional:** Os fatores que o influenciam diretamente são a procura do espaço vital e as condições de sobrevivência. Uma expressão matemática para este fator está dada por

$$\text{Dispersão populacional} = \nabla \cdot (\alpha \nabla b(t, x, y)) \quad (3.6)$$

onde  $\alpha$  é uma constante denominada *constante de dispersão populacional*.

Os quatro fenômenos mencionados acima levam a estabelecer a seguinte equação diferencial parcial:

$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla b) - \sigma b - \nabla \cdot (Vb) + f(b).} \quad (3.7)$$

que é válida para todo ponto  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  que modela o habitat, e  $t$  varia em um intervalo de tempo  $[0, T]$  representa o período de estudo do processo migratório da população. [Paiva 1982] e [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

### 3.3 Condições de Contorno

Nesta seção vão ser estabelecidas as condições de contorno para o problema em estudo. [Paiva 1982] e [Petrere 1985 in Diniz G.L.]

Lembre-se que o domínio de estudo é um retângulo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de lados  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  como é mostrado na figura 3.1.

De maneira geral, o fluxo populacional em qualquer posição  $(x, y)$  está explicado pela condição

$$\boxed{\alpha \frac{\partial b}{\partial \eta} = \beta_{\eta}(b - B_{\bullet}), \forall t \in [0, T]} \quad (3.8)$$

onde  $\eta$  é o vetor do fluxo,  $\beta_{\eta}$  um coeficiente de permeabilidade, que indica a facilidade dessa migração, tanto num sentido quanto noutro, e  $B_{\bullet}$  é a biomassa populacional a montante e a jusante com a qual aquela em estudo irá competir se ocorrer a migração.

Nas margens do rio não tem fluxo populacional. Esta condição pode ser expressa mediante

$$\frac{\partial b}{\partial \eta} = 0, \text{ em } r_0 \text{ e } r_2, \forall t \in [0, T] \quad (3.9)$$

sendo  $\eta$  o vetor posição normal.

A partir da condição (3.9) é deduzida uma condição de contorno mais específica:

$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial y} = 0 \text{ em } r_0 \text{ e } r_2} \quad (3.10)$$

Similarmente, o fluxo da população na direção perpendicular a  $r_1$  e  $r_3$ , ver figura 3.1, toma a forma

$$\boxed{\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \text{ em } r_1 \text{ e } r_3} \quad (3.11)$$

pois a população encontra-se confinada no domínio retangular e não tem uma outra espécie competindo, e necessariamente tem-se  $\beta_{\eta} = 0$  e  $B_{\bullet} = 0$ .

### 3.4 Condição Inicial

A condição inicial está dada por uma função arbitrária que representa a população no instante em que o estudo é iniciado:

$$\boxed{b(0, x, y) = b_0(x, y), \forall (x, y) \in \Omega} \quad (3.12)$$

### 3.5 Problema de Valor Inicial e de Contorno

As equações (3.7), (3.10), (3.11) e (3.12) formam um problema de valor inicial e de contorno

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} &= \nabla \cdot (\alpha \nabla b) - \sigma b - \nabla \cdot (Vb) + f(b), \quad \forall t \in (0, T], \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial b}{\partial \eta} &= 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, T], \\ b(0, x, y) &= b_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned}} \quad (3.13)$$

A primeira equação diferencial parcial de (3.13) é do tipo parabólico.

Cabe salientar que este tipo de equações explica os processos de transferência de calor ou de massa não estacionários, bidimensionais.

### 3.6 Crescimento Populacional proporcional à População

A equação (3.7)

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla b) - \sigma b - \nabla \cdot (Vb) + f(b) \quad (3.14)$$

pode ser expressa em coordenadas cartesianas  $(x, y)$  como

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) - \sigma b - V_1 \frac{\partial b}{\partial x} - V_2 \frac{\partial b}{\partial y} + f(b), \quad (3.15)$$

levando em conta que os coeficientes de dispersão  $\alpha$  e os componentes do vetor  $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$  são constantes.

Como uma primeira tentativa para resolver o problema (3.13), pode-se assumir que o crescimento populacional  $f(b)$  é proporcional à população, isto é,

$$f(b) = ab, \quad (3.16)$$

onde  $a$  é uma constante. Esta escolha se justifica por dois motivos:

- Primeiro, para auxiliar na compreensão do fenômeno, pois a forma funcional (3.16) é simples e têm características estudadas com exatidão.
- Segundo, é razoável quando são considerados intervalos muito pequenos de tempo em relação à vida dos espécimes.

Neste estudo, o crescimento populacional tem a forma da equação (3.16). Estudos mais aprofundados considerando funções de crescimento que incluem fatores de reprodução sazonal e tornam a função descontínua podem ser consultados em [Paiva e Bastos, 1982] e [Petrere, 1985].

Assumindo então que  $f(b)$  tem a forma (3.16), a equação (3.7) fica na forma

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla(\alpha \nabla b) - \nabla(Vb) + (a - \sigma)b \quad (3.17)$$

ou, em coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) - V_1 \frac{\partial b}{\partial x} - V_2 \frac{\partial b}{\partial y} + (a - \sigma)b. \quad (3.18)$$

O vetor  $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$  explica as direções horizontal e vertical em que é realizado o processo de migração. No presente estudo, supor-se-á que as componentes direcionais  $V_1$  e  $V_2$  são constantes, mas em estudos mais aprofundados tais componentes podem depender do tempo e da localização.

### 3.7 Abordagem Analítica do Modelo

Sob a suposição que o modelo possui um crescimento populacional proporcional à população, (3.16), o problema de valor inicial e de contorno pode ser escrito, em coordenadas cartesianas, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) - V_1 \frac{\partial b}{\partial x} - V_2 \frac{\partial b}{\partial y} + (a - \sigma)b, \quad \forall t \in (0, T], \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \text{ em } r_0 \text{ e } r_2, \quad \forall t \in [0, T], \\ \frac{\partial b}{\partial x} &= 0 \text{ em } r_1 \text{ e } r_3, \quad \forall t \in [0, T], \\ b(0, x, y) &= b_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Em termos de processos de transferência este problema descreve um campo de temperatura (concentração) não estacionário em um meio móvel com uma velocidade constante, sendo que existe uma ganho na quantidade de calor (absorção) proporcional à temperatura (concentração).

De acordo com [Polyanin, A.D., 2002], a substituição funcional

$$b(t, x, y) = \exp(A_1 x + A_2 y + Bt)U(t, x, y), \tag{3.20}$$

onde

$$A_1 = -\frac{V_1}{2\alpha}, \quad A_2 = -\frac{V_2}{2\alpha}, \quad e \quad B = a - \sigma - \frac{V_1^2 + V_2^2}{4\alpha}, \quad (3.21)$$

transforma o problema de valor inicial e de contorno (3.19) em

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \quad \forall t \in (0, T], \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 0 \text{ em } r_0 \text{ e } r_2, \quad \forall t \in [0, T], \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \text{ em } r_1 \text{ e } r_3, \quad \forall t \in [0, T], \\ U(0, x, y) &= U_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde

$$U_0(x, y) = \exp(-A_1 x - A_2 y) b_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (3.23)$$

Analiticamente, a solução do problema de valor inicial e de contorno (3.22) está dado, em forma fechada, por [Carslow, H.C., 1984] e [Polyanin, A.D., 2002],

$$U(t, x, y) = \iint_{\partial\Omega} U_0(\xi, \eta) G(t, x, y, \xi, \eta) d\eta d\xi \quad (3.24)$$

sendo  $G(t, x, y, \xi, \eta)$  a função de Green para o problema (3.22), que está dada por

$$\begin{aligned} G(t, x, y, \xi, \eta) &= \frac{1}{L_x L_y} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 \alpha t}{L_x^2}\right) \cos \frac{n\pi x}{L_x} \cos \frac{n\pi \xi}{L_x} \right] \\ &\times \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 \alpha t}{L_y^2}\right) \cos \frac{m\pi y}{L_y} \cos \frac{m\pi \eta}{L_y} \right], \quad (3.25) \end{aligned}$$

onde  $L_x$  é comprimento e  $L_y$  é a largura da região retangular considerada.

### 3.8 Comentários Finais

A equação

$$b(t, x, y) = \exp(A_1x + A_2y + Bt)U(t, x, y) \quad (3.26)$$

onde as constantes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $B$  estão dadas na equação (3.21) e a função  $U(t, x, y)$  é definida de acordo com (3.24), fornece a solução analítica para o problema de valor inicial e de contorno (3.19) no caso em que o crescimento populacional seja proporcional à população.

Para fins práticos, tal solução é raramente utilizada pois a sua complexidade computacional é um problema bastante sério, devido à ausência de um critério simbólico de truncamento das séries envolvidas. No seu lugar são utilizadas outras abordagens numéricas tais como as de diferenças finitas, que será visto neste trabalho, o método de elementos finitos ou de volumes finitos, [Patankar, S.V., 1980].

## 4 MÉTODOS EM DIFERENÇAS PARA EQUAÇÕES PARABÓLICAS

Neste capítulo é feito um estudo sobre as diversas abordagens numéricas em diferenças finitas para resolver o problema da valor inicial e de contorno do tipo parabólico.

Neste estudo, é considerado o problema seguinte: Seja  $\Omega$  um domínio em  $\mathbb{R}^n$  com seu contorno  $\Gamma = \partial\Omega$ , e  $[0, T]$  um intervalo de tempo,  $T > 0$ . Determinar uma função  $b(t, \bar{x})$  que satisfaz

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla b) - \nabla \cdot (\vec{V}b) + (a - \sigma)b, \quad \forall (t, \bar{x}) \in (0, T] \times \Omega, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial \eta} = g, \quad \forall (t, \bar{x}) \in (0, T] \times \partial\Omega, \quad (4.2)$$

$$b(0, \bar{x}) = b_0(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \Omega, \quad (4.3)$$

onde os coeficientes  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $a$  são constantes reais,  $\vec{V}$  é um vetor de componentes reais,  $g$  é uma função definida sobre  $(0, T] \times \partial\Omega$ , e  $\eta$  denota o vetor normal externo do domínio.

Assume-se que o problema matemático em discussão é *bem posto*, isto é, se existe solução então ela é única e depende de maneira contínua dos dados fornecidos.[Lions.J.M., 1961 in Diniz G.L.]

Os métodos em diferenças finitas consistem em substituir os termos da equação diferencial parcial (EDP) (4.1) por aproximações em diferenças, transformando a EDP em uma equação em diferenças. A solução dessa equação em diferenças fornece a *solução numérica* do problema (4.1)-(4.3)

Assume-se que o método em diferenças finitas satisfaz os requerimentos básicos de consistência, estabilidade e convergência, que estão relacionados pelo teorema de equivalência de Lax

**Teorema 4.1.** *Seja um problema de valor inicial e de contorno bem posto e um método em diferenças finitas associado a tal problema. Sob a hipótese de consistência do método em diferenças, a estabilidade é a condição necessária e suficiente para a convergência.*

#### 4.1 Solução em Diferenças Finitas do Problema Unidimensional

Para uma melhor compreensão do estudo a seguir, considere a equação padronizada de dispersão populacional unidimensional, [Skellam, 1951] e [Murray, 1989],

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

onde  $b(t, x)$  é uma função definida  $\forall (t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ . Constrói-se uma malha retilínea com os pontos da malha paralelos ao eixo de coordenadas. Os pontos da malha estão dados pelas igualdades

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, I, \quad (4.5)$$

onde  $I$  é um inteiro positivo dado e  $\Delta x = \frac{L}{I}$ , sendo  $L$  o comprimento da barra unidimensional considerada. Veja a figura 4.1.

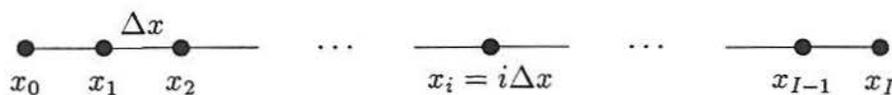


Figura 4.1 Malha unidimensional para a equação (4.4)

Similarmente, pode-se discretizar o intervalo de tempo  $[0, T]$ , mediante a igualdade

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.6)$$

onde  $\Delta t = \frac{T}{N}$ .

Como a equação diferencial parcial (4.4) é válida em todo ponto  $(t, x) \in [0, T] \times [0, L]$ , então é válida nos pontos  $(t_n, x_i)$ , isto é,

$$\frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{(t_n, x_i)} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \Big|_{(t_n, x_i)} \quad (4.7)$$

A construção dos esquemas em diferenças para a EDP (4.7) está baseada em aproximações para as derivadas parciais. Estas aproximações simples da primeira derivada no tempo estão dadas por

$$\frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{(t_n, x_i)} = \begin{cases} \text{(i)} & \frac{b(t_{n+1}, x_i) - b(t_n, x_i)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \text{(ii)} & \frac{b(t_n, x_i) - b(t_{n-1}, x_i)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ \text{(iii)} & \frac{b(t_{n+1}, x_i) - b(t_{n-1}, x_i)}{2\Delta t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{cases} \quad (4.8)$$

A seguir, a aproximação da segunda derivada  $\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$  pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \Big|_{(t_n, x_i)} = \frac{b(t_n, x_{i-1}) - 2b(t_n, x_i) + b(t_n, x_{i+1}))}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (4.9)$$

Substituindo (4.8)iii e (4.9) em (4.7), obte-êm-se

$$\frac{b(t_{n+1}, x_i) - b(t_n, x_i)}{\Delta t} = \frac{b(t_n, x_{i-1}) - 2b(t_n, x_i) + b(t_n, x_{i+1}))}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2), \quad (4.10)$$

$$\frac{b(t_n, x_i) - b(t_{n-1}, x_i)}{\Delta t} = \frac{b(t_n, x_{i-1}) - 2b(t_n, x_i) + b(t_n, x_{i+1}))}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2), \quad (4.11)$$

e

$$\frac{b(t_{n+1}, x_i) - b(t_{n-1}, x_i)}{2\Delta t} = \frac{b(t_n, x_{i-1}) - 2b(t_n, x_i) + b(t_n, x_{i+1}))}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2). \quad (4.12)$$

O valor aproximado da função  $b(t, x)$  no ponto  $(t_n, x_i)$ ,  $b(t_n, x_i)$ , é denotado por  $b_i^n$ . Os termos  $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$  e  $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$  denotam a ordem do *erro de truncamento local* e são também conhecidos como a *ordem* do método. Desprezando os erros de truncamento em (4.10), (4.11) e (4.12) e simplificando, obtêm-se os métodos em diferenças

$$b_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)b_i^n + \lambda(b_{i-1}^n + b_{i+1}^n), \quad (4.13)$$

$$-\lambda b_{i-1}^n + (1 + 2\lambda)b_i^n - \lambda b_{i+1}^n = b_i^{n-1}, \quad (4.14)$$

e

$$b_i^{n+1} = b_i^{n-1} + 2\lambda(b_{i-1}^n - 2b_i^n + b_{i+1}^n), \quad (4.15)$$

onde

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (4.16)$$

é denominado o *parâmetro da razão da malha*.

#### 4.1.1 Métodos em Diferenças de Dois Níveis

As igualdades (4.13) e (4.14) definem métodos em diferenças que utilizam os valores da função  $b(t, x)$  nos dois níveis  $n + 1$  e  $n$  e cada um deles pode ser chamado uma *fórmula de dois níveis*. Isto pode ser representado esquematicamente na figura 4.2.

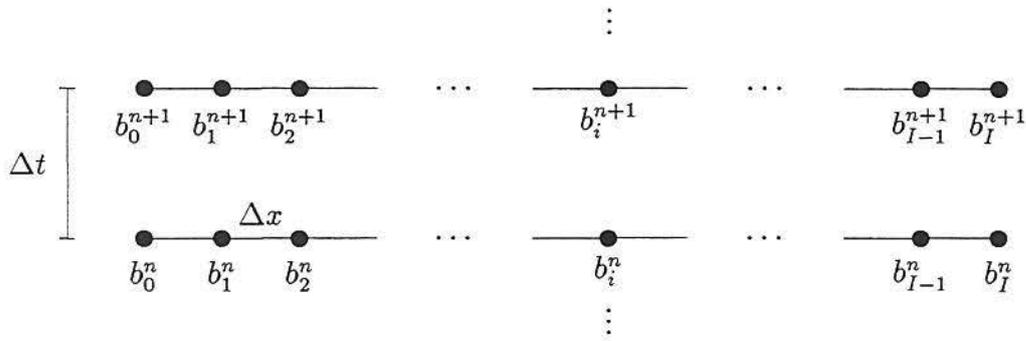


Figura 4.2 Representação esquemática para fórmulas de dois níveis

4.1.2 Método de Schmidt

O método (4.13) é denominado o *método de Schmidt*. O valor da solução em qualquer ponto  $(i, n + 1)$  no  $(n + 1)$ -ésimo nível é expresso em termos dos valores da solução nos pontos  $(i - 1, n)$ ,  $(i, n)$  e  $(i + 1, n)$ . Tal método é denominado um método *explícito*. A figura 4.3 mostra este fato de maneira esquemática.

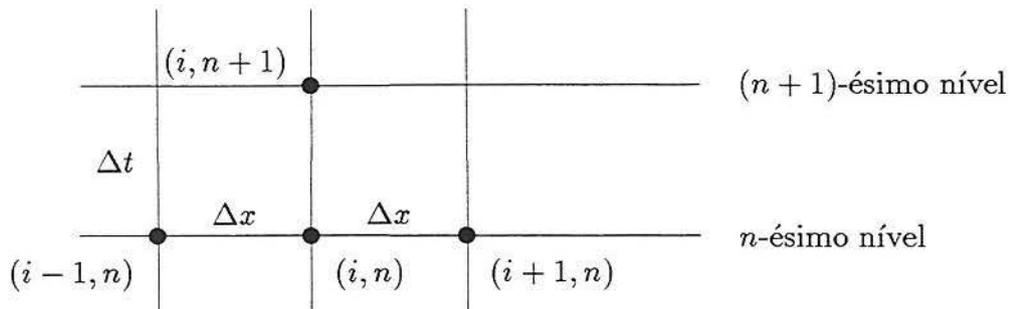


Figura 4.3 Representação esquemática do método de Schmidt (4.13)

O erro  $\tau_i^n$  no nó  $(i, n + 1)$  está dado por

$$\tau_i^n = b(t_{n+1}, x_i) - b(t_n, x_i) - \lambda(b(t_n, x_{i+1}) - 2b(t_n, x_i) + b(t_n, x_{i-1})). \quad (4.17)$$

Substituindo a expansão em série de Taylor de cada termo ao redor de  $(i, n)$  no lado direito de (4.17) e simplificando, consegue-se

$$\begin{aligned}
 \tau_i^n &= \Delta t \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^3 b}{\partial t^3}(t_n, x_i) + \dots \\
 &\quad - \lambda \left( (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta x)^6}{360} \frac{\partial^6 b}{\partial x^6}(t_n, x_i) + \dots \right) \\
 &= \Delta t \left( \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta t)^3}{6} \frac{\partial^3 b}{\partial t^3}(t_n, x_i) + \dots \\
 &\quad - \frac{\Delta t (\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) - \frac{\Delta t (\Delta x)^4}{360} \frac{\partial^6 b}{\partial x^6}(t_n, x_i) - \dots . \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Utilizando a relação (4.7), a equação (4.18) transforma-se em

$$\tau_i^n = \frac{\Delta t}{2} (\Delta x)^2 \left( \lambda - \frac{1}{6} \right) \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) + \frac{\Delta t (\Delta x)^4}{6} \left( \lambda^2 - \frac{1}{60} \right) \frac{\partial^6 b}{\partial x^6}(t_n, x_i) + \dots . \tag{4.19}$$

Tem-se que o método de truncamento local é

$$\frac{1}{\Delta t} \tau_i^n = \frac{(\Delta x)^2}{2} \left( \lambda - \frac{1}{6} \right) \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{6} \left( \lambda^2 - \frac{1}{60} \right) \frac{\partial^6 b}{\partial x^6}(t_n, x_i) + \dots . \tag{4.20}$$

O método (4.13) é, portanto, de ordem  $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$ . Quando  $\lambda = \frac{1}{6}$ , o método é de ordem  $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ .

#### 4.1.3 Método de Laasonen

O método (4.14) em termos dos valores da função nos níveis  $(n+1)$  e  $n$  pode ser escrito como

$$-\lambda b_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda) b_i^{n+1} - \lambda b_{i+1}^{n+1} = b_i^n . \tag{4.21}$$

Este método é denominado o *método de Laasonen*. De maneira esquemática, a igualdade (4.21) é mostrada na figura 4.4

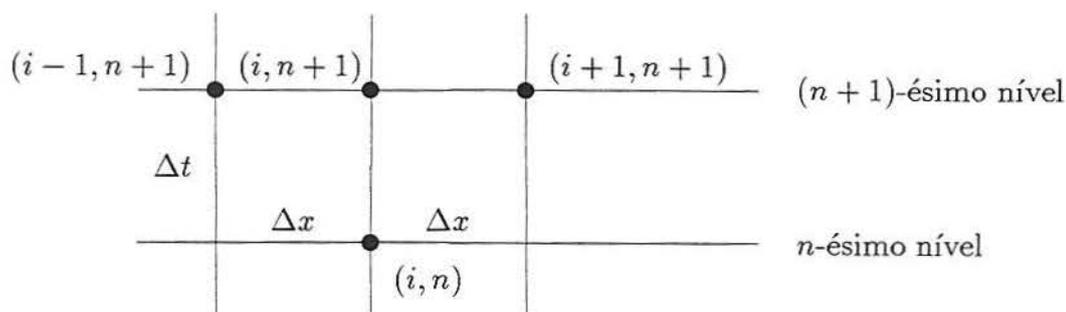


Figura 4.4 Representação esquemática do método de Laasonen (4.21)

O valor da solução em qualquer ponto  $(i, n + 1)$  no  $(n + 1)$ -ésimo nível depende dos valores da solução nos pontos vizinhos no mesmo nível e de um ponto no  $n$ -ésimo nível. Devido ao fato de os valores da solução no  $(n + 1)$ -ésimo nível serem obtidos implicitamente, o método (4.21) é denominado um *método implícito*. Assim como o método de Schmidt, este também é um método de dois níveis. O erro  $\tau_i^n$  no nó  $(i, n)$  está dado por

$$\tau_i^n = -\lambda b(t_{n+1}, x_{i-1}) + (1 + 2\lambda)b(t_{n+1}, x_i) - \lambda b(t_{n+1}, x_{i+1}) - b(t_n, x_i). \quad (4.22)$$

Expandindo cada termo do lado direito de (4.22) ao redor de  $(m, n)$  e simplificando, consegue-se

$$\begin{aligned} \tau_i^n = & \Delta t \left( \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) \right) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) - (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 b}{\partial x^2 \partial t}(t_n, x_i) \\ & - \frac{(\Delta x)^2 \Delta t}{12} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) - \frac{1}{2}(\Delta t)^3 \frac{\partial^4 b}{\partial x^2 \partial t^2}(t_n, x_i) - \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se é utilizada a relação (4.7), então (4.23) transforma-se em

$$\frac{1}{\Delta t} \tau_i^n = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) - 2 \frac{\partial^3 b}{\partial x^2 \partial t}(t_n, x_i) \right) - \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) - \dots \quad (4.24)$$

Portanto, o método (4.21) é de ordem  $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$ .

#### 4.1.4 Método de Crank-Nicholson

Fazendo a média dos erros (4.17) e (4.22), consegue-se

$$\begin{aligned} \tau_i^n &= b(t_{n+1}, x_i) - b(t_n, x_i) - \frac{\lambda}{2} (b(t_n, x_{i+1}) - 2b(t_n, x_i) + b(t_n, x_{i-1})) \\ &\quad + b(t_{n+1}, x_{i-1}) - b(t_{n+1}, x_i) + b(t_{n+1}, x_{i+1})) \\ &= \Delta t \left( \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) \right) - \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t (\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) - \frac{(\Delta t)^3}{4} \frac{\partial^4 b}{\partial x^2 \partial t^2}(t_n, x_i) - \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Utilizando (4.7), encontra-se que

$$\tau_i^n = \mathcal{O}((\Delta t)^3 + \Delta t (\Delta x)^2) \quad (4.26)$$

ou, em termos do erro de truncamento local,

$$\frac{1}{\Delta t} \tau_i^n = \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2). \quad (4.27)$$

Portanto, um método de ordem  $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$  está dado por

$$-\frac{\lambda}{2} b_{i-1}^{n+1} + (1 + \lambda) b_m^{n+1} - \frac{\lambda}{2} b_{i+1}^{n+1} = \frac{\lambda}{2} b_{i-1}^n + (1 - \lambda) b_i^n + \frac{\lambda}{2} b_{i+1}^n \quad (4.28)$$

e pode ser escrito em termos de operadores em diferença, como

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_1\right) \mathbf{b}^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_1\right) \mathbf{b}^n \quad (4.29)$$

onde a ação do operador  $\mathbf{A}_1$  sobre a malha unidimensional do  $n$ -ésimo nível

$$\mathbf{b}^n = [b_0^n, b_1^n, \dots, b_{i-1}^n, b_i^n, b_{i+1}^n, \dots, b_{I-1}^n, b_I^n] \quad (4.30)$$

está dada por

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{b}^n = [\bar{b}_0^n, \{b_{i-1}^n - 2b_i^n + b_{i+1}^n\}_{i=1}^{I-1}, \bar{b}_I^n], \quad (4.31)$$

e  $\mathbf{I}$  é o operador em diferenças identidade. Os valores de  $\bar{b}_0^n$  e  $\bar{b}_I^n$  são calculados de acordo com as condições de contorno do problema. Neste caso,  $\bar{b}_0^n = b_0^n - 2b_1^n + b_2^n$  e  $\bar{b}_I^n = b_{I-2}^n - 2b_{I-1}^n + b_I^n$ . O método (4.29) ou (4.31) é denominado o método de Crank-Nicholson. A representação esquemática é mostrada na figura 4.5

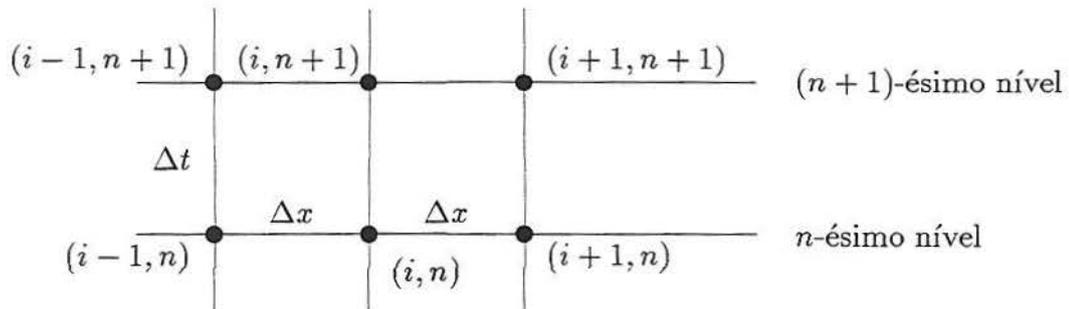


Figura 4.5 Representação esquemática do método de Crank-Nicholson (4.29) ou (4.30)

## 4.1.5 Método Geral de Dois Níveis

Alternativamente, pode-se definir um método em diferenças de dois níveis geral na forma

$$a_2 b_{i-1}^{n+1} + a_1 b_i^{n+1} + a_2 b_{i+1}^{n+1} - b_2 b_{i-1}^n - b_1 b_i^{n+1} - b_0 b_{i+1}^n = 0 \quad (4.32)$$

onde os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  são arbitrários. O erro de truncamento no nó  $(i, n)$  quando a equação diferencial (4.4) é aproximada por (4.32) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \tau_i^n &= \frac{1}{\Delta t} [a_2 b(t_{n+1}, x_{i-1}) + a_1 b(t_{n+1}, x_i) + a_2 b(t_{n+1}, x_{i+1}) \\ &\quad - b_2 b(t_n, x_{i-1}) - b_1 b(t_n, x_i) - b_0 b(t_n, x_{i+1})] \\ &= \frac{1}{\Delta t} [(a_2 + a_1 + a_0) - (b_2 + b_1 + b_0)] b(t_n, x_i) \\ &\quad + (a_2 + a_1 + a_0) \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) + \frac{\Delta x}{\Delta t} [(-a_2 + a_0) + (b_2 - b_0)] \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} (a_2 - a_0 - b_2 - b_0) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) + \Delta x (a_0 - a_2) \frac{\partial^2 b}{\partial t \partial x}(t_n, x_i) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} (a_2 + a_1 + a_0) \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} (a_0 + a_2) \frac{\partial^3 b}{\partial t \partial x^2}(t_n, x_i) \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^3}{6\Delta t} [(-a_2 + a_0) + (b_2 - b_0)] \frac{\partial^3 b}{\partial x^3}(t_n, x_i) \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{24\Delta t} (a_2 + a_0 - b_2 - b_0) \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) + \dots \end{aligned} \quad (4.33)$$

As condições necessárias para determinar os parâmetros, de maneira que a equação em diferenças seja consistente com a equação diferencial, estão dadas

por

$$\begin{aligned}
 a_2 + a_1 + a_0 &= b_2 + b_1 + b_0 \\
 a_2 + a_1 + a_0 &= 1 \\
 a_2 - a_0 &= b_2 - b_0 \\
 -(a_2 + a_0) + (b_2 + b_0) &= 2\lambda \\
 a_2 - a_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

A solução geral de (4.34) pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_0 = \lambda\theta \\
 a_1 &= 1 + 2\lambda\theta \\
 b_2 &= b_0 = \lambda(1 - \theta) \\
 b_1 &= 1 - 2\lambda(1 - \theta)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde  $\theta$  é uma constante arbitrária.

Substituindo (4.35) em (4.33), obtem-se

$$\mathbf{b}^{n+1} - \mathbf{b}^n = \lambda \mathbf{A}_1 [\theta \mathbf{b}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{b}^n]. \tag{4.36}$$

Os valores  $\theta = 0$  e  $\theta = 1$  produzem os métodos de Schmidt e Laasonen, respectivamente. O valor  $\theta = \frac{1}{2}$  produz o método de Crank-Nicholson. Utilizando (4.7) e igualando a zero o coeficiente de  $\frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i)$ , obtem-se

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\lambda}. \tag{4.37}$$

Substituindo (4.37) em (4.36), obtem-se o *método de Crandall* que pode ser escrito como

$$\left(1 + \frac{1}{12} \mathbf{A}_1\right) \nabla_t \mathbf{b}^{n+1} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}_1 (\mathbf{b}^{n+1} + \mathbf{b}^n). \tag{4.38}$$

A ordem do método é  $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ .

#### 4.1.6 Métodos em Diferenças de Três Níveis

O método em diferenças (4.15) é denominado o *método de Richardson*. O método de Richardson é um método de três níveis e um método explícito.

Se é substituído  $b_i^n$  pela média dos valores  $b_i^{n+1}$  e  $b_i^{n-1}$ , isto é,

$$b_i^n \approx \frac{1}{2}(b_i^{n+1} + b_i^{n-1}) \quad (4.39)$$

em (4.15), obtém-se

$$b_i^{n+1} = b_i^{n-1} + 2\lambda(b_{i-1}^n - b_i^{n+1} - b_i^{n-1} + b_{i+1}^n) \quad (4.40)$$

que, após simplificação algébrica, pode ser escrita como

$$b_i^{n+1} = \frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}b_i^{n-1} + \frac{2\lambda}{1+2\lambda}(b_{i-1}^n + b_{i+1}^n). \quad (4.41)$$

Este esquema em diferenças é denominado o *método de DuFort e Frankel*. É um método explícito e de três níveis. O modelo computacional está dado na figura 4.6

O erro do método (4.41) está dado por

$$\tau_i^n = (1+2\lambda)b(t_{n+1}, x_i) - (1-2\lambda)b(t_{n-1}, x_i) - 2\lambda(b(t_n, x_{i-1}) + b(t_n, x_{i+1})). \quad (4.42)$$

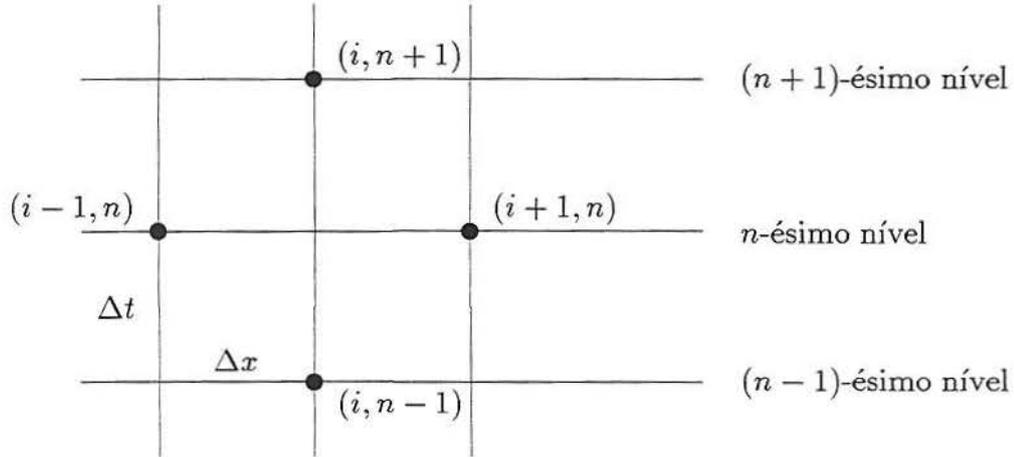


Figura 4.6 Representação esquemática do método de DuFort e Frankel (4.41)

Expandindo em série de Taylor os termos em (4.42) ao redor do ponto  $(t_n, x_i)$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 \tau_i^n &= (1 + 2\lambda) \left( b(t_n, x_i) + \Delta t \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) + \dots \right) \\
 &\quad - (1 - 2\lambda) \left( b(t_n, x_i) - \Delta t \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) - \dots \right) \\
 &\quad - 2\lambda \left( 2b(t_n, x_i) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) + \dots \right) \\
 &= 2\Delta t \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) + 2\lambda(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) - 2\lambda(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) - \frac{\lambda(\Delta x)^4}{6} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

O erro de truncamento local está dado por

$$\frac{1}{\Delta t} \tau_i^n = 2 \left( \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) \right) + 2 \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) - \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^4 b}{\partial x^4}(t_n, x_i) + \frac{(\Delta t)^2}{3} \frac{\partial^3 b}{\partial t^3}(t_n, x_i) + \dots \tag{4.44}$$

E assim, têm-se os seguintes casos:

(i)  $\frac{1}{\Delta t} \tau_i^n \rightarrow 0$  se  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$  e

$$\frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i). \quad (4.45)$$

Dessa maneira, o esquema em diferenças (4.41) é compatível ou consistente com a equação diferencial (4.7) só quando  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$  se  $\Delta x \rightarrow 0$ . Neste caso, o ordem do método é  $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta t/\Delta x)^2)$ .

(ii)  $\frac{1}{\Delta t} \tau_i^n \rightarrow 0$  se  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow C$  quando  $\Delta x \rightarrow 0$  e

$$\frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_i) - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_i) + C^2 \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}(t_n, x_i) = 0. \quad (4.46)$$

Dessa maneira, o esquema em diferenças (4.41) aproxima a equação hiperbólica

$$\frac{\partial b}{\partial t} + C^2 \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \quad (4.47)$$

quando  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$  se  $\Delta x \rightarrow 0$ .

## 4.2 Análise de Convergência e Estabilidade

A solução analítica  $b(t_n, x_i)$  da equação diferencial, a solução em diferenças  $b_i^n$  da equação em diferenças e a solução numérica  $\bar{b}_i^n$  estão relacionadas por

$$|b(t_n, x_i) - \bar{b}_i^n| \leq |b(t_n, x_i) - b_i^n| + |b_i^n - \bar{b}_i^n|. \quad (4.48)$$

Na prática, é desejável que a diferença entre a solução numérica e a solução analítica seja pequena; uma condição suficiente para isto acontecer é que, quando  $\Delta t$  e  $\Delta x$  tendem a zero, tal diferença também tende a zero. A partir de (4.48), encontra-se que esta diferença depende dos valores  $|b(t_n, x_i) - b_i^n|$  e  $|b_i^n - \bar{b}_i^n|$ . O valor  $|b(t_n, x_i) - b_i^n|$  é o erro de truncamento local que aparece quando a equação diferencial é substituída pela equação em diferenças. No caso de um esquema em diferenças convergente, o

erro de truncamento local converge a zero quando  $\Delta t$  e  $\Delta x$  ambos tendem a zero. O erro numérico  $|b_i^n - \bar{b}_i^n|$  aparece porque no cômputo real não é possível construir a solução em diferenças de maneira precisa devido aos erros de arredondamento. Entende-se por *estabilidade* o fato dos erros cometidos em uma etapa dos cálculos não causarem erros cada vez maiores conforme os cálculos são realizados. Se um esquema em diferenças é estável, então o segundo termo em (4.48) é praticamente zero. Portanto, os resultados dos métodos convergentes e estáveis estão muito próximos dos valores analíticos. Agora discute-se a análise de convergência e a estabilidade de alguns dos esquemas em diferenças desenvolvidos na seção 4.1.

#### 4.2.1 Análise de Convergência

**Definição 4.1.** Um esquema em diferenças é dito convergente se

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} b(t_n, x) = b(t, x), \quad n\Delta t \leq T, \quad (4.49)$$

para todo  $x$  e  $t$  na região de interesse.

Supõe-se que  $b_i^n$  está livre de erros de arredondamento, de modo que a única diferença entre  $b(t_n, x_i)$  e  $b_i^n$  é o erro cometido ao substituir (4.4) pela equação em diferença, isto é, o erro de truncamento local.

Subtraindo (4.10) de (4.13), consegue-se

$$\epsilon_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)\epsilon_i^n + \lambda(\epsilon_{i+1}^n + \epsilon_{i-1}^n) + \mathcal{O}((\Delta t)^2 + \Delta t(\Delta x)^2) \quad (4.50)$$

onde  $\epsilon_i^n = b_i^n - b(t_n, x_i)$ . A equação (4.50) é denominada *equação do erro*.

Como os valores iniciais e de contorno são conhecidos exatamente, os valores iniciais e de contorno para os erros são zero.

O erro máximo no  $n$ -ésimo nível é denotado por  $E^n$ , isto é,

$$E^n = \max_m |\epsilon_i^n|. \quad (4.51)$$

De (4.50), tem-se

$$\max_m |\epsilon_i^{n+1}| \leq \max_m |\lambda \epsilon_{i+1}^n + (1 - 2\lambda) \epsilon_i^n + \lambda \epsilon_{i-1}^n| + M^* ((\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2) \quad (4.52)$$

onde  $M^*$  é uma constante dependente de  $\Delta t$  e  $\Delta x$ . Se todos os coeficientes no primeiro termo do lado direito são não-negativos, isto é,  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ , então tem-se

$$E^{n+1} \leq (\lambda + 1 - 2\lambda + \lambda) E^n + M^* ((\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2) \quad (4.53)$$

Utilizando esta relação recursiva, obtem-se

$$\begin{aligned} E^{n+1} &\leq E^n + M^* ((\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2) \\ &\leq E^{n-1} + 2M^* ((\Delta t)^2 + \Delta t (\Delta x)^2) \leq \dots \\ &\leq E^0 + M^* (n+1) \Delta t ((\Delta t) + (\Delta x)^2) \\ &= M^* t_{n+1} ((\Delta t) + (\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (4.54)$$

porque não há erro inicial,  $E^0 = 0$  e  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ . Quando  $\Delta x \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , então  $E^{n+1} \rightarrow 0$ . Portanto, tem-se provado que o método (4.13) é convergente para  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ .

A seguir, discute-se a convergência das soluções em diferença dadas por (4.28). Substituindo  $\epsilon_i^n = b_i^n - b(t_n, x_i)$  em (4.28) obtem-se a equação do erro

$$\left( \mathbf{I} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{C} \right) \epsilon^{n+1} = \left( \mathbf{I} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{C} \right) \epsilon^n + \mathbf{T}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.55)$$

onde

$$\epsilon^n = [\epsilon_1^n \ \epsilon_2^n \ \dots \ \epsilon_{I-1}^n]^T, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{T}^n = [\tau_1^n \ \tau_2^n \ \cdots \ \tau_{I-1}^n]^T, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \circ \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ \circ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

e

$$\tau_i^n = \mathcal{O}((\Delta t)^3 + \Delta t(\Delta x)^2). \quad (4.59)$$

A condição inicial dá

$$\epsilon^0 = \mathbf{0}. \quad (4.60)$$

Pode-se escrever (4.55) como

$$\epsilon^{n+1} = \mathbf{G}\epsilon^n + \sigma^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.61)$$

onde

$$\mathbf{G} = \left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{C}\right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{C}\right), \quad (4.62)$$

e

$$\sigma^n = \left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{C}\right)^{-1} \mathbf{T}^n. \quad (4.63)$$

Aplicando (4.61) de maneira recursiva, encontra-se que

$$\epsilon^n = \mathbf{G}^n \epsilon^0 + \sum_{\nu=1}^n \mathbf{G}^{n-\nu} \sigma^{\nu-1} \quad (4.64)$$

ou

$$\begin{aligned} \|\epsilon^n\| &\leq \|\mathbf{G}^n\| \|\epsilon^0\| + \sum_{\nu=1}^n \|\mathbf{G}^{n-\nu}\| \|\sigma^{\nu-1}\| \\ &\leq \|\mathbf{G}^n\| \|\epsilon^0\| + \frac{1 - \|\mathbf{G}\|^n}{1 - \|\mathbf{G}\|} \max_{0 \leq \nu \leq n-1} \|\sigma^\nu\|. \end{aligned} \quad (4.65)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  é simétrica, e desta maneira  $\mathbf{G}$  também é simétrica. Utilizando a norma espectral, tem-se

$$\|\mathbf{G}\| = \max_j |\mu_j| \quad (4.66)$$

onde  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq I-1$ , são os autovalores de  $\mathbf{G}$  e estes, por sua vez, têm o valor

$$\mu_j = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \lambda_j\right)^{-1} \left(1 + \frac{\lambda}{2} \lambda_j\right) \quad (4.67)$$

onde  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq I-1$ , são os autovalores de  $\mathbf{C}$ . Os autovalores  $\lambda_j$  estão dados por

$$\lambda_j = -4\text{sen}^2\left(\frac{j\pi}{2I}\right), \quad 1 \leq j \leq I-1. \quad (4.68)$$

De (4.66) e (4.67), encontra-se que

$$\|\mathbf{G}\| = \max_{1 \leq j \leq I-1} |\mu_j| < 1, \quad \lambda > 0. \quad (4.69)$$

A equação (4.64) transforma-se em

$$\|\epsilon^n\| \leq \|\epsilon^0\| + \frac{1}{1 - \|\mathbf{G}\|} \max_{0 \leq \nu \leq n-1} \|\mathbf{T}^\nu\| \quad (4.70)$$

onde

$$\max_{0 \leq \nu \leq n-1} \|\mathbf{T}^\nu\| = M^* ((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) \quad (4.71)$$

e  $M^*$  é uma constante. Portanto, obtém-se

$$\|\epsilon^n\| \leq \|\epsilon^0\| + M^*((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2). \quad (4.72)$$

A partir desse resultado, deduz-se que existe convergência incondicional quando  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta x \rightarrow 0$ .

#### 4.2.2 Análise de Estabilidade de Von Neumann

A solução numérica contém erros, especialmente erros de arredondamento. Seja  $\bar{b}_i^n$  a solução numérica da equação em diferenças (4.13). Então pode-se escrever

$$\bar{b}_i^n = b_i^n + \bar{\epsilon}_i^n \quad (4.73)$$

onde  $\bar{\epsilon}_i^n$  é o erro devido ao arredondamento, ou a um erro computacional. Usando o fato de que  $\bar{b}_i^n$  também deve satisfazer (4.13), encontra-se que  $\bar{\epsilon}_i^n$  satisfaz a equação

$$\bar{\epsilon}_i^{n+1} = (1 - 2\lambda)\bar{\epsilon}_i^n + \lambda(\bar{\epsilon}_{i-1}^n + \bar{\epsilon}_{i+1}^n). \quad (4.74)$$

Portanto, conclui-se que a equação em diferenças governa por si a propagação dos erros. É suposto que um grupo de erros é introduzido no nível inicial  $t = 0$  e que se propaga para a frente de acordo com (4.74). Para equações em diferenças com coeficientes constantes, o erro pode ser expandido em uma série de Fourier finita. O erro pode ser escrito como

$$\bar{\epsilon}_m^0 = \sum_j A_{j0} \exp(i\beta_j m \Delta x) \quad (4.75)$$

onde  $\beta_j = j\pi/L$  e o número de termos é igual ao número de pontos nodais sobre a reta  $t = 0$ . Agora, procura-se uma solução de (4.74) tal que se reduza a (4.75) no

tempo  $t = 0$ . Supõe-se que

$$\bar{\epsilon}_m^n = \sum_j A_j \xi^n \exp(i\beta_j m \Delta x) \quad (4.76)$$

onde  $\xi$  é um número real ou complexo arbitrário. Devido à superposição linear, basta considerar o termo

$$\bar{\epsilon}_m^n = A \xi^n \exp(i\beta_j m \Delta x) \quad (4.77)$$

onde  $\beta$  é um número real e  $A$  é uma constante arbitrária. Para que o erro original  $\bar{\epsilon}_m^0$  não cresça quando  $n$  cresce, é necessário e suficiente que,

$$|\xi| < 1. \quad (4.78)$$

Se esta condição é satisfeita então o esquema em diferenças é dito *estável*. Este método de análise de estabilidade é conhecido como o *método de Von Neumann*. O número  $\xi$  é chamado de *fator de amplificação* do esquema. Substituindo (4.77) em (4.74) e simplificando obtém-se

$$\begin{aligned} \xi &= 1 + \lambda(e^{i\beta\Delta x} - 2 + e^{-i\beta\Delta x}) \\ &= 1 + 2\lambda(\cos(\beta\Delta x) - 1) = 1 - 4\lambda \text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.79)$$

A condição (4.78) dá

$$-1 < 1 - 4\lambda \text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) < 1. \quad (4.80)$$

A desigualdade do lado direito é satisfeita trivialmente e a desigualdade do lado esquerdo será satisfeita quando

$$\lambda \leq \frac{1}{2\text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}. \quad (4.81)$$

Como  $0 \leq \text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \leq 1$ , tem-se a condição de estabilidade  $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ . Dessa maneira,  $\lambda = \frac{1}{2}$  separa a região de estabilidade, onde os erros decrescem, da região de instabilidade, onde os erros crescem. Utilizando a mesma análise encontra-se que o fator de amplificação do esquema (4.14) é

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\lambda \text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}. \quad (4.82)$$

Como  $\lambda > 0$ , encontra-se que  $|\xi| < 1$  em qualquer caso. Portanto, o esquema de Laasonen (4.14) é estável para todos os valores do parâmetro de razão de malha  $\lambda$ . Tal esquema é chamado de *esquema incondicionalmente estável*. É fácil mostrar que o esquema de Crank-Nicholson é também um esquema incondicionalmente estável.

O fator de amplificação do esquema de Richardson está dado por

$$\xi = \xi^{-1} - 8\lambda \text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \quad (4.83)$$

ou

$$\xi^2 + 8\lambda \text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)\xi - 1 = 0. \quad (4.84)$$

As raízes dessa equação são

$$\xi_{1,2} = -4\lambda \text{sen}^2\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right) \pm \sqrt{1 + 16\lambda^2 \text{sen}^4\left(\frac{\beta\Delta x}{2}\right)}. \quad (4.85)$$

Encontra-se que a raiz  $|\xi_2| > 1$  para todo  $\lambda$ . Portanto, o método de Richardson é sempre *instável*. Enfim, discute-se a estabilidade do método de DuFort-Frankel (4.41). O fator de amplificação  $\xi$  está governado pela equação

$$(1 + 2\lambda)\xi^2 - 4\lambda \cos(\beta\Delta x)\xi - (1 - 2\lambda) = 0. \quad (4.86)$$

As raízes dessa equação são

$$\begin{aligned}\xi_{1,2} &= \frac{2\lambda \cos(\beta\Delta x) \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2 + 4\lambda^2 \cos^2(\beta\Delta x)}}{1 + 2\lambda} \\ &= \frac{2\lambda \cos(\beta\Delta x) \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2 \text{sen}^2(\beta\Delta x)}}{1 + 2\lambda}.\end{aligned}\quad (4.87)$$

Encontra-se que  $|\xi| \leq 1$  e  $\xi_2 < 1$ . Portanto, o método de DuFort-Frankel é incondicionalmente estável.

### 4.3 Resolução Numérica do Problema Bidimensional

Os esquemas apresentados na seção 4.1 podem ser estendidos facilmente a dimensões espaciais superiores especialmente quando a região é retangular.

A equação parabólica padronizada bidimensional

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \quad (4.88)$$

em uma região retangular limitada

$$\mathcal{R} = [0, T] \times [0, L_x] \times [0, L_y] \quad (4.89)$$

sujeita à condição inicial

$$b(t, x, y) = f(x, y) \quad (4.90)$$

e às condições de contorno

$$b(t, 0, y) = g_1(t, y), \quad b(t, L_x, y) = g_2(t, y), \quad (4.91)$$

$$b(t, x, 0) = h_1(t, x), \quad b(t, x, L_y) = h_2(t, x) \quad (4.92)$$

pode ser discretizada mediante uma malha de espaçamento  $\Delta x = \Delta y$  na região  $[0, L_x] \times [0, L_y]$  com  $I\Delta x = L_x$ . Seja  $\Delta t$  o tamanho do passo na direção temporal tal que  $t = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  onde  $N\Delta t = T$ . Os pontos nodais estão definidos por

$$\begin{aligned}x_i &= i\Delta x, & i &= 0, 1, 2, \dots, I \\y_j &= j\Delta x, & j &= 0, 1, 2, \dots, J \\t_n &= n\Delta t, & n &= 0, 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{4.93}$$

O valor da solução  $b(t, x, y)$  no ponto nodal  $(i, j, n)$  é denotado por  $b_{i,j}^n(t_n, x_i, y_j)$ . A generalização do esquema em diferenças (4.36) do qual (4.13), (4.21) e (4.28) são casos especiais, pode ser escrito como

$$\mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{b}^n + \lambda(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)[\theta\mathbf{b}^{n+1} + (1 - \theta)\mathbf{b}^n]\tag{4.94}$$

onde

$$\mathbf{b}^n = [b_{i,j}^n],\tag{4.95}$$

$\mathbf{A}_1$  é o operador em diferenças

$$\mathbf{A}_1\mathbf{b}^n = [b_{i-1,j}^n - 2b_{i,j}^n + b_{i+1,j}^n]_{i=1}^{I-1},\tag{4.96}$$

$\mathbf{A}_2$  é o operador em diferenças

$$\mathbf{A}_2\mathbf{b}^n = [b_{i,j-1}^n - 2b_{i,j}^n + b_{i,j+1}^n]_{j=1}^{J-1},\tag{4.97}$$

e  $b_{i,j}^n$  é o valor aproximado de  $b(t_n, x_i, y_j)$ . Deve-se mencionar que as equações (4.96) e (4.97) tem que ser completadas nos seus contornos de acordo com as condições de contorno do problema. Diversos valores de  $\theta$  fornecem esquemas explícitos e

implícitos; por exemplo, o valor de  $\theta = 0$  dá o esquema em diferenças

$$\mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{b}^n + \lambda(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{b}^n \quad (4.98)$$

que tem uma ordem de precisão  $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$ .

Utilizando o método de estabilidade de Von Neumann, substitui-se

$$b_{i,j}^n = A \xi^n e^{i\theta_1 i \Delta x} e^{i\theta_2 j \Delta x} \quad (4.99)$$

na equação em diferenças (4.98). O fator de propagação está dado por

$$\xi = 1 - 4\lambda \left( \text{sen}^2 \frac{\theta_1 \Delta x}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta_2 \Delta x}{2} \right). \quad (4.100)$$

Para que o método seja estável, requer-se que  $|\xi| \leq 1$  e portanto

$$-1 \leq 1 - 4\lambda \left( \text{sen}^2 \frac{\theta_1 \Delta x}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta_2 \Delta x}{2} \right) \leq 1. \quad (4.101)$$

Como  $0 \leq \text{sen}^2 \frac{\theta_1 \Delta x}{2}, \text{sen}^2 \frac{\theta_2 \Delta x}{2} \leq 1$ , a condição de estabilidade é  $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$ .

De novo, para  $\theta = \frac{1}{2}$ , o esquema em diferenças (4.94) pode ser escrito como

$$\mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{b}^n + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)[\mathbf{b}^{n+1} + \mathbf{b}^n] \quad (4.102)$$

ou

$$\left[ \mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \right] \mathbf{b}^{n+1} = \left[ \mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \right] \mathbf{b}^n \quad (4.103)$$

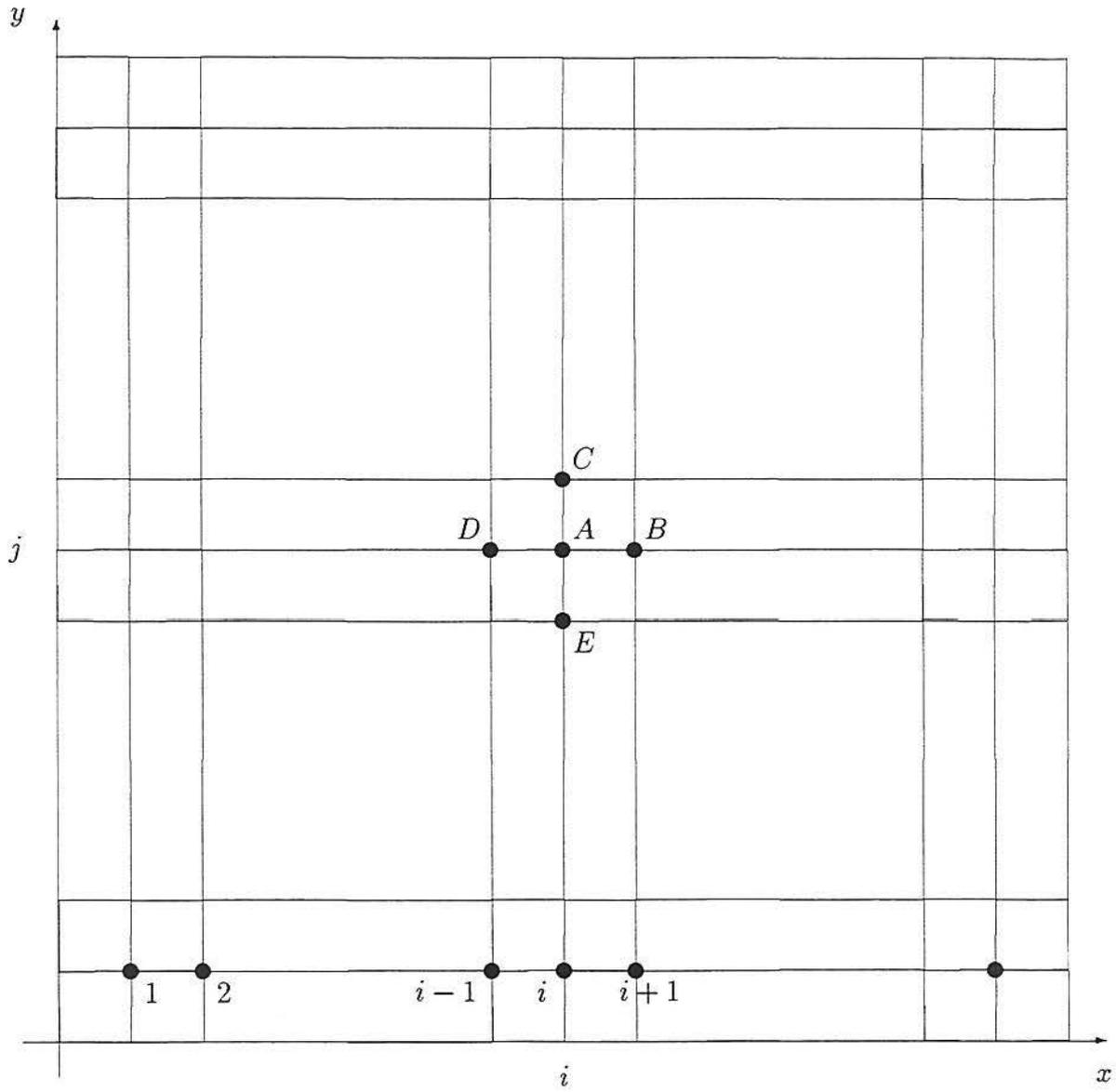
que é de ordem  $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ .

Utilizando o método de Von Neumann, encontra-se que

$$\xi = \frac{1 - 2\lambda \left( \sin^2 \frac{\theta_1 \Delta x}{2} + \sin^2 \frac{\theta_2 \Delta x}{2} \right)}{1 + 2\lambda \left( \sin^2 \frac{\theta_1 \Delta x}{2} + \sin^2 \frac{\theta_2 \Delta x}{2} \right)}. \quad (4.104)$$

Como,  $0 \leq \sin^2 \frac{\theta_1 \Delta x}{2}, \sin^2 \frac{\theta_2 \Delta x}{2} \leq 1$  e  $\lambda > 0$ , a condição  $|\xi| \leq 1$  é sempre satisfeita. Portanto, o método (4.103) é incondicionalmente estável.

Em cada nível de tempo, um sistema de equações lineares tem que ser resolvido. A matriz de coeficientes desse sistema é uma matriz banda, cujo comprimento total de banda é  $2I - 1$  como é mostrado na figura 4.7.

Figura 4.7 Aplicação do método implícito no nível  $n + 1$

onde os pontos  $A : (j - 1)(I - 1) + i$ ,  $B : (j - 1)(I - 1) + i + 1$ ,  $C : j(I - 1) + i$ ,  $D = (j - 1)(I - 1) + i - 1$  e  $E : (j - 2)(I - 1) + i$ .

As incógnitas estão arranjadas no interior do nível e numeradas de esquerda a direita na direção  $x$  e de baixo para cima na direção  $y$ . Quando é aplicado (4.104) em  $A$ , os cinco pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  (e portanto as incógnitas nesses nós) entram no esquema. Os pontos  $E$  e  $C$  estão  $I - 1$  unidades longe de  $A$  enquanto que  $B$  e  $D$  estão uma unidade longe de  $A$ . Portanto, o comprimento total de banda desse sistema de equações é  $2I - 1$ . Se  $I$  é grande, então o comprimento de banda é muito grande e a solução desse sistema de equações requer muito tempo computacional. Para evitar esta dificuldade são utilizados, na prática, os *métodos implícitos de Direções Alternadas*.

#### 4.4 Métodos Implícitos de Direções Alternadas (ADI)

Estes métodos são métodos de dois passos envolvendo a solução de sistemas tridiagonais de equações ao longo de retas paralelas aos eixos  $x$  e  $y$  no primeiro e segundo passo, respectivamente.

No método ADI de Peaceman-Rachford, no primeiro passo avança-se de  $t_n$  até  $t_{n+1/2}$  e utiliza-se diferenças implícitas para  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e diferenças explícitas para  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . No segundo passo, avança-se de  $t_{n+1/2}$  até  $t_{n+1}$  e utiliza-se diferenças explícitas para  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e diferenças implícitas para  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . O método ADI pode ser escrito como

$$\frac{\mathbf{b}^{n+1/2} - \mathbf{b}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \mathbf{A}_1 \mathbf{b}^{n+1/2} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \mathbf{A}_2 \mathbf{b}^n \quad (4.105)$$

e

$$\frac{\mathbf{b}^{n+1} - \mathbf{b}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \mathbf{A}_1 \mathbf{b}^{n+1} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \mathbf{A}_2 \mathbf{b}^{n+1/2}. \quad (4.106)$$

Estas equações também podem ser escritas como

$$\left( \mathbf{I} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}_1 \right) \mathbf{b}^{n+1/2} = \left( \mathbf{I} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{b}^n \quad (4.107)$$

e

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_1\right) \mathbf{b}^{n+1/2}. \quad (4.108)$$

Os valores intermediários  $b_{i,j}^{n+1/2}$  são obtidos resolvendo o sistema de equações produzido por (4.107). Somando (4.107) e (4.108), obtém-se

$$\mathbf{b}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^n + \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^{n+1}. \quad (4.109)$$

As condições de contorno para obter a solução de (4.109) são

$$\mathbf{b}^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^n + \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^{n+1}, \quad i = 0, I. \quad (4.110)$$

As soluções no nível  $n + 1$  são obtidos agora resolvendo o sistema de equações produzido por (4.108). As condições de contorno para a solução deste sistema estão dadas pelas condições de contorno prescritas. Eliminando  $\mathbf{b}^{n+1/2}$  de (4.107) e (4.108), obtém-se

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_1\right) \left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_1\right) \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^n \quad (4.111)$$

que é uma extensão do esquema de Crank-Nicholson a duas dimensões. Utilizando o método de Von Neumann em (4.111), encontra-se que

$$\xi = \frac{[1 - 2\lambda \text{sen}^2(\theta_1 \Delta x/2)][1 - 2\lambda \text{sen}^2(\theta_2 \Delta x/2)]}{[1 + 2\lambda \text{sen}^2(\theta_1 \Delta x/2)][1 + 2\lambda \text{sen}^2(\theta_2 \Delta x/2)]}. \quad (4.112)$$

Como  $0 \leq \text{sen}^2(\theta_1 \Delta x/2), \text{sen}^2(\theta_2 \Delta x/2) \leq 1$  e  $\lambda > 0$ , a condição  $|\xi| \leq 1$  é sempre satisfeita. Portanto, o esquema (4.111) ou o método ADI (4.107), (4.108) é incondicionalmente estável.

## 5 ABORDAGEM DO PROBLEMA PELO MÉTODO ADI CLÁSSICO

A equação a ser resolvida é

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla b) + \sigma b + \nabla \cdot (Vb) = f(b) \quad (5.1)$$

ou em coordenadas  $(t, x, y)$ , quando  $\alpha$  é constante em  $x$  e  $y$

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) + \sigma b + V_1 \frac{\partial b}{\partial x} + V_2 \frac{\partial b}{\partial y} = f(b) \quad (5.2)$$

Mais ainda, utilizando a suposição que  $f(b) = ab$ , tem-se junto com as condições de contorno, a formulação completa do modelo fica na forma seguinte:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) - V_1 \frac{\partial b}{\partial x} - V_2 \frac{\partial b}{\partial y} + (a - \sigma)b, \quad \forall t \in (0, T], \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial b}{\partial y} = 0 \text{ em } r_0 \text{ e } r_2, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = 0 \text{ em } r_1 \text{ e } r_3, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$b(0, x, y) = b_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

(5.3)

Definem-se os operadores diferenciais

$$\mathbf{D}_1 b = \alpha \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - V_1 \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{1}{2}(a - \sigma)b \quad (5.4)$$

e

$$\mathbf{D}_2 b = \alpha \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} - V_2 \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{2}(a - \sigma)b \quad (5.5)$$

de maneira que a equação do problema (5.3) pode ser escrita como

$$\frac{\partial b}{\partial t} = (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2)b. \quad (5.6)$$

O método de Peaceman-Rachford propõe a utilização de dois passos:

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_1\right) \mathbf{b}^{n+1/2} = \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^n \quad (5.7)$$

e

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_2\right) \mathbf{b}^{n+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{A}_1\right) \mathbf{b}^{n+1/2}. \quad (5.8)$$

onde o operadores em diferenças  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  estão definidos como

$$\mathbf{A}_1 = \left[ (\alpha - V_1\Delta x/2)b_{i+1,j}^n - \left(2\alpha + \frac{(\Delta x)^2}{2}(a - \sigma)\right) b_{i,j}^n + (\alpha + V_1\Delta x/2)b_{i-1,j}^n \right]_{i=1}^{I-1} \quad (5.9)$$

e

$$\mathbf{A}_2 = \left[ (\alpha - V_2\Delta y/2)b_{i,j+1}^n - \left(2\alpha + \frac{(\Delta y)^2}{2}(a - \sigma)\right) b_{i,j}^n + (\alpha + V_2\Delta y/2)b_{i,j-1}^n \right]_{j=1}^{J-1} \quad (5.10)$$

onde foram utilizadas as seguintes aproximações em diferenças centrais

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{b_{i+1,j} - b_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{b_{i,j+1} - b_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{b_{i+1,j} - 2b(i,j) + b_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{b_{i,j+1} - 2b(i,j) + b_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}. \quad (5.14)$$

Enfim, para completar cada iteração, os valores  $b_{i,j}^{n+1}$  no contorno, isto é, quando  $i = 0, I$  e  $j = 0, J$ , é utilizada a condição de contorno de Neumann.

O esquema numérico a ser implementado é mostrado nas equações (5.7) e (5.8).

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

O problema

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial b}{\partial t} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) - V_1 \frac{\partial b}{\partial x} - V_2 \frac{\partial b}{\partial y} + (a - \sigma)b, \quad \forall t \in (0, T], \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\
 \frac{\partial b}{\partial y} &= 0 \text{ em } r_0 \text{ e } r_2, \quad \forall t \in [0, T], \\
 \frac{\partial b}{\partial x} &= 0 \text{ em } r_1 \text{ e } r_3, \quad \forall t \in [0, T], \\
 b(0, x, y) &= b_0(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

é resolvido pelo método ADI clássico de Peaceman-Rachford.

Os parâmetros iniciais dos modelos utilizados estão descritos nos quadros que acompanham os respectivos gráficos, para os quais simulamos os quatro padrões de comportamento, numa malha de  $32 \times 32$ , conforme fig. 6.1, sendo somente estudados neste momento a população aí existente, dependendo somente do crescimento da população, da dispersão e do decaimento populacional sem serem efetuadas entradas e nem saídas de populações além dos nascimentos, [Godoy 1959 in Diniz G.L.], [Petrere 1985 in Diniz G.L.].

A condição inicial considerada é

$$b_{(0,x,y)} = -0,01 \log((6,01 - y)/L_y), \tag{6.2}$$

quando a migração for em direção ao eixo  $y$  e

$$b_{(0,x,y)} = -0,01 \log((6,01 - x)/L_x), \tag{6.3}$$

quando for em direção ao eixo  $x$ .

A seguir, mostram-se os resultados mediante o método ADI clássico implementado no MATLAB, surgindo simulações gráficas, partindo de comportamentos das populações pré fixadas, de onde podemos concluir que a população de peixes cresce progressivamente de acordo com a diferença entre o crescimento, dispersão e mortalidade, chegando em alguns casos a ter um aumento bastante significativo.

### 6.1 Malha do Domínio Retangular

Para os parâmetros iniciais do método numérico representado graficamente, foram usados arbitrariamente 30 pontos interiores da malha em  $x$  e  $y$ , conforme mostra a figura 6.1:

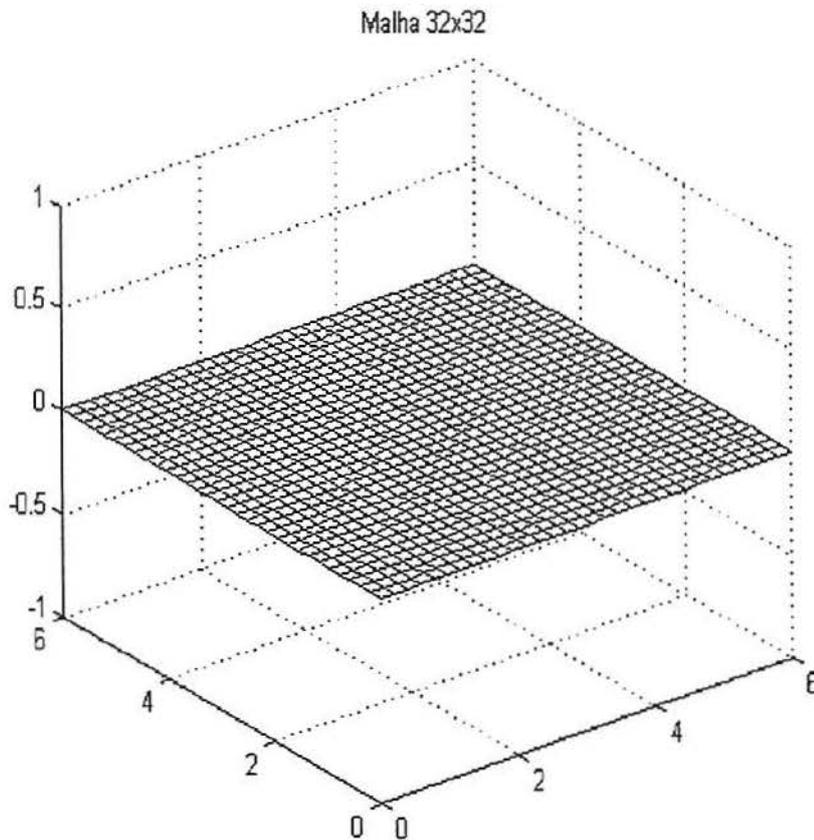


Figura 6.1 *Malha*

A malha usada na simulação gráfica indicada nos parâmetros iniciais são de 30 pontos internos numa malha em  $x$  e  $y$  de 6 por 6. Foram programadas 4 simulações em cada comportamento com tempos variados de 10, 50, 100 e 200 dias, considerando sempre a população aí existente, sem influência externa, somente considerando o crescimento natural da população e o efeito da migração.

O incremento  $\Delta t$  aqui considerado foi 0.5.

## 6.2 Primeiro Grupo de Dados

$\Delta t$	$\alpha$	$\sigma$	a	V1	V2	$\beta j$	B j	$\beta m$	B m
0.5	0.01	0.01	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

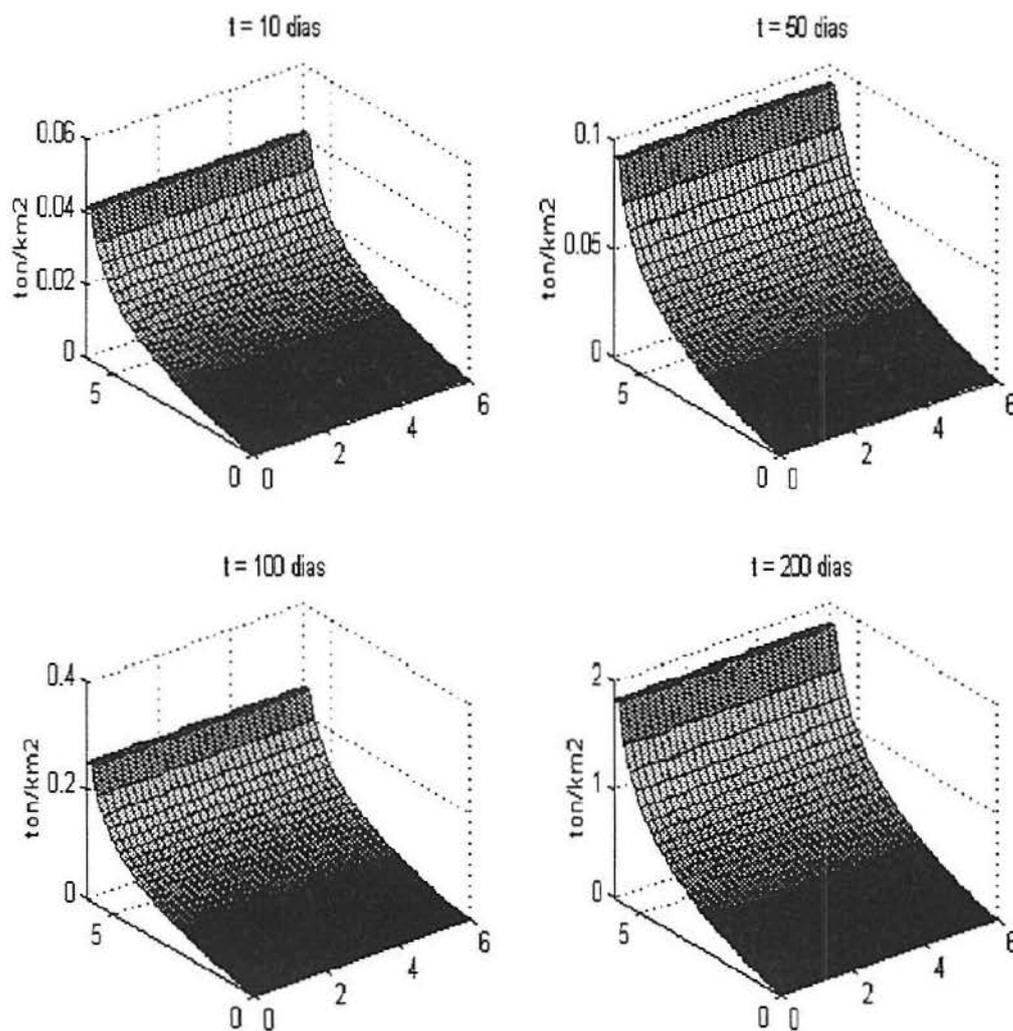


Figura 6.2 Gráfico do comportamento 1

## 6.2.1 Comentário

Aqui são mostradas algumas simulações mediante o método ADI clássico implementado no MATLAB, de onde podemos concluir que a população de peixes

crece progressivamente de acordo com a diferença entre o crescimento, dispersão e mortalidade, chegando em alguns casos a ter um aumento bastante significativo.

Neste Primeiro Grupo de Dados, apresentamos um exemplo para aquelas populações mais territoriais, isto é, onde não acontece a migração ( $V_1 = V_2=0$ ).

O comportamento desta população é uniforme ao longo de todo o território, isto é, não existe uma tendência da população se acumular em alguma parcela do domínio retangular. É evidente que a população tem um comportamento exponencial positivo visto que a taxa de crescimento é maior que a taxa de decaimento. A dispersão tende a “uniformizar” a população ao longo do domínio. Nota-se que com o passar dos dias houve um considerável aumento populacional conforme indicam as simulações, que chegou até  $1,8 \text{ Ton}/\text{Km}^2$  observada após nos 200 dias de iniciado a observação da população.

### 6.3 Segundo Grupo de Dados

$\Delta t$	$\alpha$	$\sigma$	a	V1	V2	$\beta j$	B j	$\beta m$	B m
0.5	0.01	0.05	0.1	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0

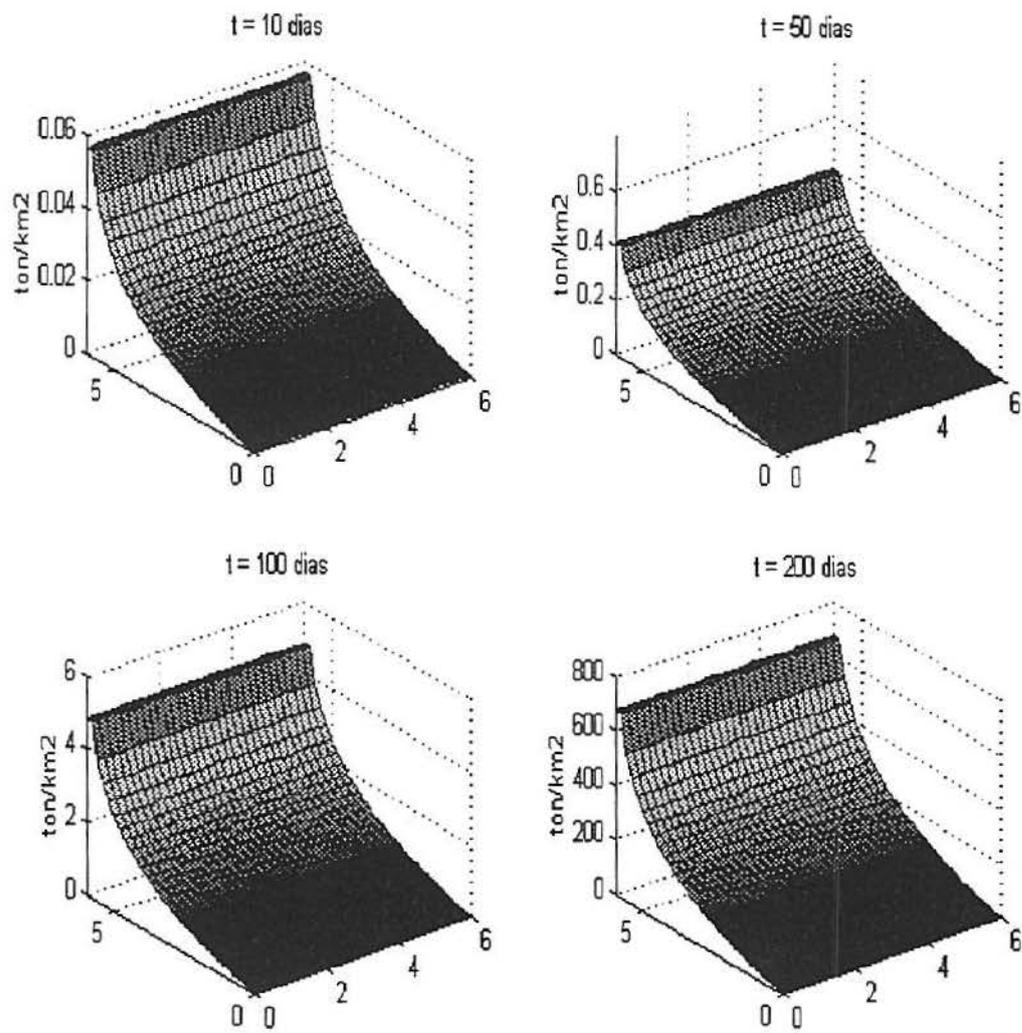


Figura 6.3 Gráfico do comportamento 2

## 6.3.1 Comentário

Neste Segundo Grupo de Dados, damos um exemplo para populações da categoria denominada "blackfish" aquelas com migração lateral (bordas do canal principal), ou seja, aquelas populações com migração só na direção do eixo Y, ( $V_1 = 0.0$  e  $V_2 = 0.2$ ).

Aqui observa-se que foram feitas simulações com uma categoria de peixes denominada blackfish, com migração lateral. Nota-se uma maior diferença entre o crescimento, dispersão e mortalidade, chegando a 0,04, além de um aumento de 0,2 na migração da população no sentido do eixo y (largura do rio), chegando a ultrapassar no final deste período as 600  $Ton/Km^2$

## 6.4 Terceiro Grupo de Dados

$\Delta t$	$\alpha$	$\sigma$	a	V1	V2	$\beta_j$	B j	$\beta_m$	B m
0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

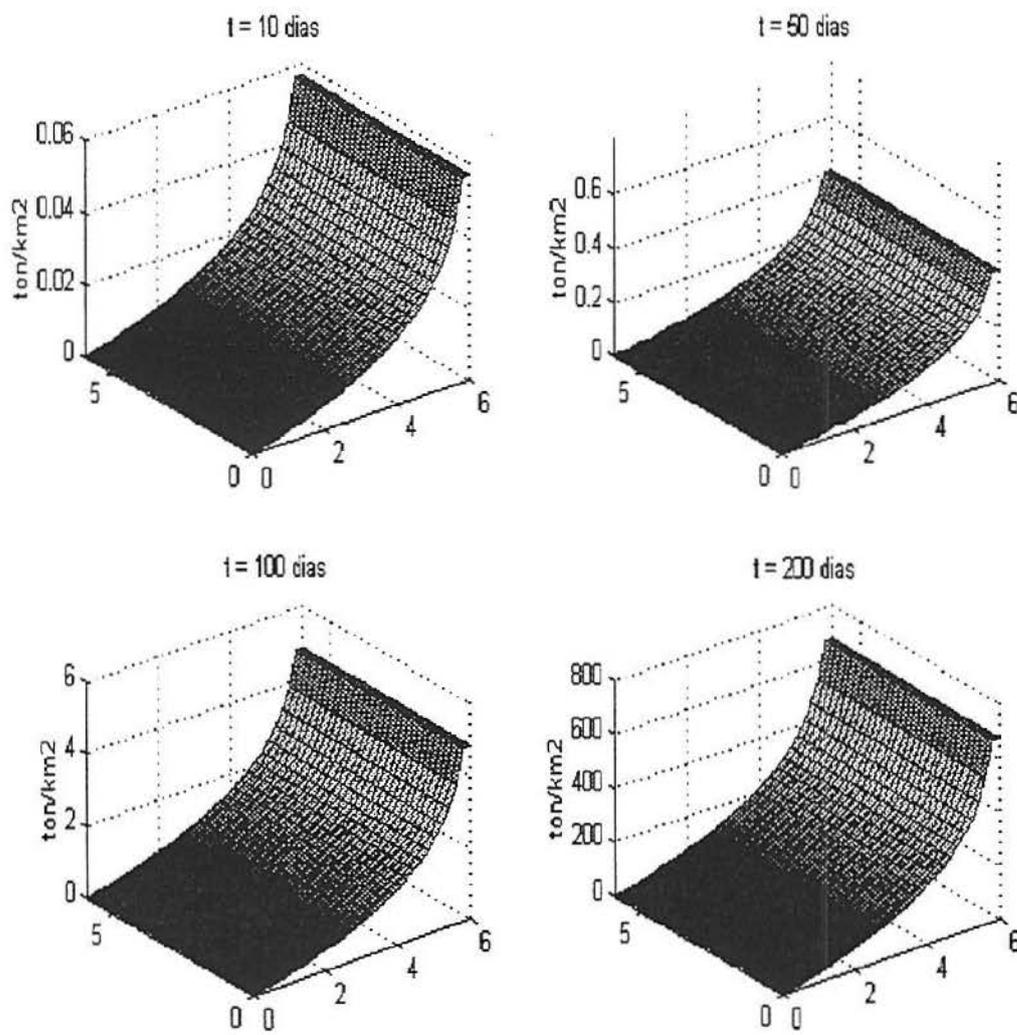


Figura 6.4 Gráfico do comportamento 3

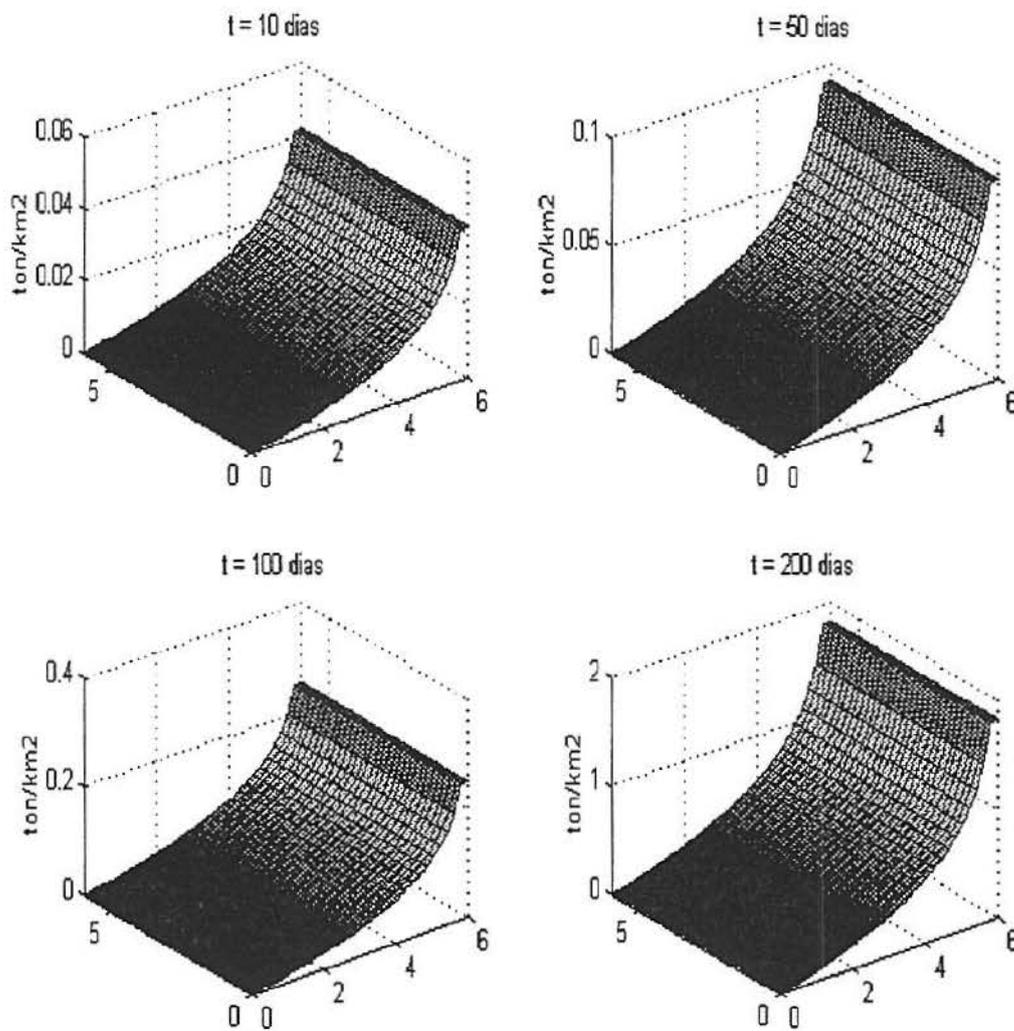
## 6.4.1 Comentário

No Terceiro Grupo de Dados, apresentado refere-se às populações da categoria "whitefish" aquelas com migração longitudinal (peixes de piracema), isto é, quando as populações migram só em direção ao eixo  $x$ , ( $V_1 = 0.2$  e  $V_2 = 0.0$ )

Nota-se um superávit do crescimento populacional em relação a dispersão e a mortalidade, na ordem dos 0,04, somados ao incremento da migração de 0,2 no sentido do eixo  $x$  (calha do rio - piracema), observa-se que praticamente não há aumento da população dessa espécie nesse sentido em relação ao segundo grupo de dados. Explica-se pelo fato de ser espécies de peixes com hábitos diferentes, sua população chega a passar das 600  $Ton/Km^2$ , no final desse período, idêntica ao comportamento 2.

## 6.5 Quarto Grupo de Dados

$\Delta t$	$\alpha$	$\sigma$	$a$	$V_1$	$V_2$	$\beta_j$	$B_j$	$\beta_m$	$B_m$
0.5	0.01	0.01	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Figura 6.5 *Gráfico do comportamento 4*

### 6.5.1 Comentário

No Quarto Grupo de Dados apresentamos um exemplo para aquelas populações mais territoriais do eixo  $x$ , isto é, sem migração, ( $V_1 = V_2 = 0.0$ ).

Foram simulados os mesmos parâmetros do primeiro grupo de dados ou seja, aquelas populações mais territoriais, apenas mudando em direção ao eixo  $x$  (calha do rio), pelo fato de existir um maior espaço para a expansão, observa-se que não houve aumento da população de peixes em relação ao primeiro grupo, ou seja chegando também no final do período aos  $1,8 \text{ Ton}/\text{Km}^2$ .

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, pretendeu-se estudar um modelo populacional de peixes confinados em uma barragem bilateral. As equações governantes resultaram ser equações diferenciais parciais do tipo parabólico junto com condições de contorno e uma condição inicial escolhida adequadamente.

Na tentativa de abordar tal problema de valor inicial e de contorno, encontrou-se na literatura a solução exata do problema mediante a utilização da função de Green. Mas, tal abordagem não é prática porque envolve o cálculo de series de funções.

Por sua vez, tentou-se fazer um estudo detalhado das diversas técnicas em diferenças existentes, e considerando a sua estabilidade incondicional, optou-se pela utilização do método implícito de direções alternadas criada por Peaceman e Rachford, na sua versão clássica.

Tal método numérico foi implementado no Matlab, e foram feitas simulações utilizando uma condição inicial específica adequada para comparação com resultados na literatura.

As simulações produziram resultados satisfatórios e para cada grupo de dados foi feito um comentário apropriado.

Sobre as dificuldades computacionais, podem ser mencionados os seguintes aspectos:

- A implementação da solução exata (utilizando a função de Green) com um número elevado de termos foi tentada no Maple, sem sucesso, pois carecia-se de critérios adequados de truncamento da série. Além do mais, esta tentativa teve um alto custo computacional.

- A implementação do método em diferenças ADI foi relativamente fácil, já que estão disponíveis programas eficientes para a resolução de sistemas tridiagonais. Cada rodada de 400 iterações requiriu um tempo de aproximadamente 200 segundos em um PC Pentium 2 de 500 MHz.

Foi conseguido uma adequada interpretação dos resultados numéricos, que ficaram de acordo com os resultados esperados. Isto mostra o sucesso do método numérico.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azevedo, P., Vieira, B. B., 1938. *Contribuição para o catálogo biológico dos peixes fluviais do Nordeste do Brasil* (Vol.79, pp. 1-13)

Bayley, P. B., 1973. "Studies on the migration characin, *Prochilodus ploatensis* Holmberg, 1889 ( Pisces: Characoidel ) in the R.Pylcomayo, South America." *J. Fish Biol.*, 5: pp. 25-40 in *Diniz G.L.*

Bazzoli, N.E., Chiarini - Garcia, H., Ferreira, R. M. A.,1991. *Ichthyofauna of Paranaíba river in the area to be flooded by the Bocaina reservoir, Minas Gerais, Brazil, Ciência e Cultura*, ( Vol. 43, pp. 451-453 in *Diniz G.L.*).

Bonetto, A. A.,1963 " Investigaciones sobre migraciones de peces en los rios de la cuenca del Plata". *Cienc. Invest. B. Aires.*, 19: (1-2): (12-26) in *Diniz G.L.*

Brooks, A. N. e Hughes, T. J. R.;1982. *Streamline Upwind/ Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows With Particular Emphasis on Incompressible navier-Stokes Equations*, (Vol.32, pp. 199-259 in *Diniz G.L.*)

Catella, A. C. 1992. *Estrutura da Comunidade e Alimentação dos Peixes da Onça, uma lagoa do Pantanal do Rio Aquidauana* (Vol. 1)

Carrey, G. F. e Oden, J. T., 1983. *Finite Elements: A Second Course* (Vol. 2 in *Diniz G.L.* )

Carslow, H. C., 1984. *Operational Methods in Applied Mathematics*, Wiley and Sons.

Christie, I., Griffiths, D. F., Mitchell, A. R. and Zienkiewicz, O. C.; 1976. "Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives." *International Journal for Numerical methods in Engineering.*, 10: pp. 1389-1396 in Diniz G.L.,

Diniz, G. L., 1994, "A mudança no habitat de populações de peixes: de rio a represa - o modelo matemático", Dissertação de Mestrado, IME, UNICAMP.

Diniz, G. L., Meyer, J. F. C. A., 1994, "A dispersão de peixes em represa - um modelo matemático", Bio Matemática, Vol. IV, IMECC-UNICAMP, XVI CNMAC, pp. 65-87.

Godoy, M. P., 1959. Age, growth, sexual maturity, behavior, migration, tagging and transportation of the Curimatá (Vol. 31, pp. 447-477 in Diniz G.L.)

Harddin, D. P., Takac, P. e Webb, G.F., 1990, "Dispersion population models discrete in time and continuous in space." *J.Math., Biol.* 28: pp. 1-20 in Diniz G.L.

Heinrich, J. C., Huyakorn, P. S., Mitchell, A. R. e Zienkiewicz, O. C., 1977. "An Upwind Finite Element Scheme for Two-dimensional Convective Transport Equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, 11: pp. 131-143 in Diniz G.L.

Jain, M. K., Iyengar, S. R. K. & Jain, R. K., 1985. *Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation*, Wiley Eastern Limited.

Johnson, C., 1987. "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method." *J. Cambridge University Press, New York*, p. 279 in Diniz G.L.

Lions, J. M., 1961. *Equations Diferentielles*, Springer in Diniz G.L.

Ministério do Meio Ambiente., 2000. "Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis"

Mcmurtrie, R., 1978. *Persistence and Stability of Single-Species and Prey-predator Systems in Spatially Heterogeneous Environments, Math. Biosciences* (Vol. 39, pp. 11-51 in Diniz G.L.)

Murray, J. D., 1989. *Mathematical Biology*, Springer in Diniz G.L.

Nash, J.C. e Steuart, G.W.,2000. "Computing, in Science e Engineering, The Simplex Method for Linear Programming, p. 29 e The Decompositional Approach to matrix Computation." *Number un, Januari e Februari., 2: p.50*

Paiva, M. P. e Bastos, S. A.,1982. *Marcação de Peixes nas regiões do alto e médio São Francisco(Brasil), Ciência e Cultura, Maracaibo* (Vol 34, pp. 1362-1365)

Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*.

Petrere, J.M., 1985. "Migraciones de peces de agua dulce en America Latina: alguns comentários. COPESCAL. Doc. Ocas." (Vol. 1, p.17 in Diniz G.L.)

Polyanin, A. D., 2002, *Handbook of Linear PDE for Engineers and Scientists*, Ed. Chapman & Hall/CRC

Porto, R.L.L.,1997. *Técnicas quantitativas para o gerenciamento de recursos hídricos, UFRGS Porto Alegre RS*

Schubart, O.,1943. "A pesca na Cachoeira das Emas durante a piracema de 1942-43". *Rev.Ind.Anim., São Paulo., 6: pp. 95-116 in Diniz G.L.*

Skellam, J. G.,1951. *Randon dispersal in theoretical population, Biometrika* (Vol.38, pp. 196-218 in Diniz G.L.)

Welcomme, R.L.,1985. "River Fisheries, FAO," *Fish. Tech. Pop.*, 262:  
*p. 330 in Diniz G.L.*