

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Modelo de Hull-White e Algumas Extensões com  
Volatilidade Estocástica: Aproximações  
Perturbativas**

por

**João Plínio Juchem Neto**

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada.

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen  
Orientador

Porto Alegre, novembro de 2007.

## DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

J919m Juchem Neto, João Plínio

Modelo de Hull-White e algumas extensões com volatilidade estocástica: aproximações perturbativas / por João Plínio Juchem Neto. - - Porto Alegre: UFRGS / Instituto de Matemática, 2007.  
110 f. : il. ; 29,5 cm.

Orientador: Julio Cesar Ruiz Claeysen

Dissertação (mestrado) – UFRGS/ Instituto de Matemática/ PPGMAp, 2007.

1. Matemática de Finanças. 2. Métodos Perturbativos. 3. Processos Estocásticos. I. Ruiz Claeysen, Julio Cesar, II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada. III. Título.

CDU – 51(043)

Bibliotecária responsável : Josiane Gonçalves da Costa – CRB 10/1544

# **Modelo de Hull-White e Algumas Extensões com Volatilidade Estocástica: Aproximações Perturbativas**

por

**João Plínio Juchem Neto**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## **Mestre em Matemática Aplicada**

Linha de Pesquisa: Vibrações, Controle e Sinais

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Passamani Zubelli  
IMPA

Prof. Dr. Fabricio Tourrucôo  
DECON/UFRGS

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo  
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em  
27 de novembro de 2007.

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Cristina Varriale  
Coordenadora

Ad maiorem Dei gloriam.

*Aos meus pais.*

# *Agradecimentos*

Primeiramente eu gostaria de expressar os meus mais sinceros agradecimentos à minha família: ao meu pai Élcio, minha mãe Eva, minhas irmãs Daniela e Luísa e à minha namorada, Dani, pelo apoio, paciência, amor e carinho. É a família, valor e instituição tão deturpado em nossos tempos, que forma a nossa identidade, e torna possível a construção de uma sociedade justa e perene.

Também gostaria de deixar registrado os meus agradecimentos:

Ao Prof. Julio Cesar Ruiz Claeysen, pela sua orientação, apoio e paciência na elaboração desta dissertação.

Ao Prof. Fabricio Tourrucô pela sugestão do tema e colaboração constante durante a elaboração deste trabalho, e ao Prof. Jorge Paulo de Araújo, orientador de minha monografia de conclusão do curso de Economia, por ter me apresentado à Matemática de Finanças (ambos da Faculdade de Ciências Econômicas).

Ao PPGMAp na figura de seus professores e alunos, que foram de importância inestimável para a evolução da minha formação matemática.

Ao Sr. Élvio Machado Pereira, meu chefe no Departamento de Administração da Dívida da CEEE - Companhia Estadual de Energia Elétrica, e demais colegas, pelo apoio e ensinamentos durante a minha breve experiência na empresa, envolvendo parte dos anos de 2006 e 2007.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa Científica - CNPq, pelo apoio financeiro parcial.

“ ... ‘What sort of people live about here?’

‘In that direction,’ the Cat said, waving its right paw round, ‘lives a Hatter: and in that direction,’ waving the other paw, ‘lives a March Hare. Visit either you like: they’re both mad.’

‘But I don’t want to go among mad people,’ Alice remarked.

‘Oh, you can’t help that,’ said the Cat: ‘we’re all mad here. I’m mad. You’re mad.’

‘How do you know I’m mad?’ said Alice.

‘You must be,’ said the Cat, ‘or you wouldn’t have come here.’

Alice didn’t think that proved it at all; however, she went on ‘And how do you know that you’re mad?’

‘To begin with,’ said the Cat, ‘a dog’s not mad. You grant that?’

‘I suppose so,’ said Alice.

‘Well, then,’ the Cat went on, ‘you see, a dog growls when it’s angry, and wags its tail when it’s pleased. Now I growl when I’m pleased, and wag my tail when I’m angry. Therefore I’m mad.’ ”

Lewis Carroll (1832-1898)

Alice’s Adventures in Wonderland

# *Resumo*

Nesta dissertação trabalhamos com o Modelo de Hull-White para a Estrutura a Termo da Taxa de Juro (ETTJ), considerando o caso em que a volatilidade é uma função determinística do tempo, e duas extensões em que ela segue um processo estocástico não correlacionado com a taxa de juro: uma considerando um movimento Browniano geométrico com *drift* nulo, e outra considerando um processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão à média. Obtemos aproximações perturbativas para o preço de *Zero-coupon bonds* aplicando o Método de Perturbação Regular quando os parâmetros envolvendo a volatilidade são pequenos, e realizamos simulações para o caso em que os coeficientes são constantes (Modelo de Vasicek). Desta forma, obtemos uma aproximação para o *yield curve*, ou ETTJ. Para o caso clássico comparamos a aproximação perturbativa com a solução exata do modelo, e concluímos que uma aproximação considerando correções de até quarta ordem é muito precisa. Para os modelos com volatilidade estocástica, comparamos a aproximação perturbativa de quarta ordem com simulações de Monte Carlo, e observamos um comportamento qualitativo semelhante, principalmente para maturidades menores.

# *Abstract*

In this dissertation we work with the Hull-White model for the Term-Structure of Interest Rate (TSIR), considering the situation where the volatility is a deterministic function of time, and two extensions that follow a stochastic process uncorrelated with the interest rate: the first considers a geometric Brownian motion with zero drift, and the second a Ornstein-Uhlenbeck process with mean-reversion. We obtain perturbation approximations for the Zero-coupon bond prices using the Regular Perturbation Method when the parameters involving the volatility are small, and perform simulations for the constant coefficient case (Vasicek Model). Once this is done, we obtain a perturbative approximation for the yield curve, or TSIR. For the classical case we compare this approximation with the exact solution, and conclude that a fourth order perturbative approximation is very precise. For the cases with stochastic volatility, we compared the fourth order perturbative approximation with Monte Carlo simulations, and observed essentially the same qualitative behavior, mainly for short maturities.



# *Sumário*

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

Introdução	15
<b>1 Introdução à Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juro</b>	<b>19</b>
1.1 Conceitos Básicos . . . . .	19
1.1.1 <i>Coupon bonds</i> . . . . .	22
1.2 Modelos Estocásticos para a Taxa de Juro . . . . .	23
1.2.1 Abordagem Direta . . . . .	23
1.2.2 Abordagem Indireta . . . . .	23
1.2.2.1 Modelos Endógenos . . . . .	24
1.2.2.2 Modelos Exógenos . . . . .	24
1.3 O Mercado de Títulos de Renda Fixa . . . . .	25
<b>2 Modelo de Vasicek e Modelo de Hull-White</b>	<b>29</b>
2.1 O Modelo de Vasicek . . . . .	29
2.1.1 Resolvendo a EDE do Modelo de Vasicek . . . . .	30
2.1.2 Determinando a Estrutura a Termo da Taxa de Juro . . . . .	31
2.2 O Modelo de Hull-White . . . . .	35
2.2.1 Ajuste à ETTJ Inicial . . . . .	38

2.2.1.1	Um Exemplo de Ajuste à ETTJ Inicial . . . . .	41
2.2.2	Resolvendo o Modelo de Hull-White via EDP . . . . .	42
2.2.3	Obtendo uma Aproximação Perturbativa para o Modelo de Hull-White . . . . .	43
2.2.3.1	Aproximação Perturbativa para o Modelo de Vasicek . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Modelo de Hull-White com Volatilidade Estocástica</b>	<b>53</b>
3.1	Modelo A . . . . .	53
3.1.1	Obtendo uma Aproximação Perturbativa . . . . .	54
3.1.2	Modelo de Vasicek com Volatilidade Estocástica . . . . .	57
3.1.2.1	Validação da Aproximação Perturbativa via Monte-Carlo . . . . .	62
3.2	Modelo B . . . . .	67
3.2.1	Obtendo uma Aproximação Perturbativa . . . . .	67
3.2.2	Modelo de Vasicek com Volatilidade Estocástica . . . . .	70
3.2.2.1	Validação da Aproximação Perturbativa via Monte-Carlo . . . . .	73
	<b>Conclusão</b>	<b>77</b>
	<b>Referências</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos Básicos de Probabilidade e Processos Estocásticos</b>	<b>82</b>
A.1	Definições e Resultados Básicos de Probabilidade . . . . .	82
A.2	Definições e Resultados Básicos de Processos Estocásticos . . . . .	87
A.3	Integral de Itô Unidimensional . . . . .	89
A.4	Integral de Itô $n$ -dimensional . . . . .	92
A.5	Teorema da Existência e Unicidade . . . . .	93
<b>B</b>	<b>Modelo para Precificação de Títulos Contingentes</b>	<b>96</b>
B.1	Conceitos Fundamentais . . . . .	97

B.2	Resultados Fundamentais . . . . .	101
B.3	O Preço Livre de Arbitragem de um <i>Zero-coupon bond</i> . . . . .	103
<b>C</b>	<b>O Teorema de Feynman-Kac</b>	<b>105</b>
C.1	Aplicando o Teorema de Feynman-Kac ao Problema de Precificação de <i>Zero-coupon bonds</i> . . . . .	108
C.1.1	Modelos com Um Fator . . . . .	109
C.1.2	Modelos com Dois Fatores . . . . .	109

# *Lista de Figuras*

1	Composição do Mercado de Títulos de Renda Fixa dos EUA . . . . .	27
2	ETTJ Inicial - Preço de Zero-Coupon Bonds . . . . .	35
3	ETTJ Inicial - <i>Yield to Maturities</i> . . . . .	35
4	ETTJ Inicial - <i>Yield Curve</i> na vizinhança de $\theta = 10\%$ . . . . .	36
5	Comparação entre Modelo Clássico e Modelo de Vasicek - $P(t, 30)$ . . . . .	36
6	Comparação entre Modelo Clássico e Modelo de Vasicek - $R(t, 30)$ . . . . .	37
7	Aproximação perturbativa da ETTJ inicial - $P(0, T)$ . . . . .	47
8	Erro absoluto da aproximação perturbativa de $P(0, T)$ . . . . .	48
9	Magnitude das correções da aproximação perturbativa de $P(0, T)$ . . . . .	48
10	Aproximação perturbativa de $P(t, 30)$ . . . . .	49
11	Erro absoluto da aproximação perturbativa de $P(t, 30)$ . . . . .	49
12	Magnitude das correções da aproximação perturbativa de $P(t, 30)$ . . . . .	50
13	Erro absoluto <i>versus</i> $\sigma$ . . . . .	50
14	Erro absoluto <i>versus</i> $\sigma$ e $T$ . . . . .	51
15	Erro absoluto <i>versus</i> $\alpha$ e $T$ ( $r(0) = 2\%$ , $\theta = 10\%$ ) . . . . .	51
16	Erro absoluto <i>versus</i> $\theta$ e $T$ ( $r(0) = 2\%$ , $\alpha = 1$ ) . . . . .	52
17	Erro absoluto <i>versus</i> $r(0)$ e $T$ ( $\theta = 10\%$ , $\alpha = 1$ ) . . . . .	52
18	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{P}(0, T)$ . . . . .	59
19	Magnitude das correções da aproximação perturbativa de $\hat{P}(0, T)$ . . . . .	59
20	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{R}(0, T)$ . . . . .	60
21	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ de $\hat{P}(t, 30)$ . . . . .	60
22	Magnitude das correções da aproximação perturbativa de $\hat{P}(t, 30)$ . . . . .	61

23	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ de $\hat{R}(t, 30)$ . . . . .	61
24	Aproximação até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{R}(0, T)$ ( $r_0 = 9.5\%$ ) . . . . .	62
25	Aproximação até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{R}(0, T)$ ( $r_0 = \theta = 10\%$ ) . . . . .	62
26	Aproximação até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{R}(0, T)$ ( $r_0 = 10.5\%$ ) . . . . .	63
27	Magnitude das correções da aproximação perturbativa de $\hat{P}(0, 30)$ <i>versus</i> $\beta$	63
28	Efeito do índice de correlação $\rho$ na ETTJ: $\hat{P}^{(4)}(0, T; \rho) - \hat{P}^{(4)}(0, T; \rho = 0)$ .	64
29	Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC: $r_0 = 9.5\%$ . . . . .	65
30	Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC: $r_0 = 10\%$ . . . . .	66
31	Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC: $r_0 = 10.5\%$ . . . . .	66
32	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{P}(0, T)$ . . . . .	72
33	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{R}(0, T)$ . . . . .	72
34	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ de $\hat{P}(t, 30)$ . . . . .	73
35	Aproximação perturbativa até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ de $\hat{R}(t, 30)$ . . . . .	73
36	Aproximação até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{P}(0, T)$ ( $r_0 = 9.5\%$ ) . . . . .	74
37	Aproximação até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{R}(0, T)$ ( $r_0 = 9.5\%$ ) . . . . .	74
38	Aproximação até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{P}(0, T)$ ( $r_0 = 10.5\%$ ) . . . . .	75
39	Aproximação até $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ da ETTJ inicial - $\hat{R}(0, T)$ ( $r_0 = 10.5\%$ ) . . . . .	75
40	Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC: $r_0 = 9.5\%$ . . . . .	76
41	Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC: $r_0 = 10.5\%$ . . . . .	76

## *Lista de Tabelas*

1	Comparação entre $\hat{P}_{MC}$ , $\hat{P}_{PER}$ e $P_{VAS} - r_0 = 9.5\%$ . . . . .	67
2	Comparação entre $\hat{R}_{MC}$ , $\hat{R}_{PER}$ e $R_{VAS} - r_0 = 9.5\%$ . . . . .	67
3	Comparação entre $\hat{P}_{MC}$ , $\hat{P}_{PER}$ e $P_{VAS} - r_0 = 10\%$ . . . . .	68
4	Comparação entre $\hat{R}_{MC}$ , $\hat{R}_{PER}$ e $R_{VAS} - r_0 = 10\%$ . . . . .	68
5	Comparação entre $\hat{P}_{MC}$ , $\hat{P}_{PER}$ e $P_{VAS} - r_0 = 10.5\%$ . . . . .	69
6	Comparação entre $\hat{R}_{MC}$ , $\hat{R}_{PER}$ e $R_{VAS} - r_0 = 10.5\%$ . . . . .	69

# *Lista de Símbolos*

$T$	Maturidade, ou data de vencimento, de um <i>Zero-coupon bond</i>
$T^*$	Maturidade máxima de um <i>Zero-coupon bond</i>
$P(t, T)$	Preço de um <i>Zero-coupon bond</i> de maturidade $T$ no tempo $t$
$R(t, T)$	<i>Yield to maturity</i> , ou <i>yield</i> , de um <i>Zero-coupon bond</i> de maturidade $T$
$\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}\{\cdot \cdot\}$	Esperança condicional, sob a medida de probabilidade $\mathcal{Q}$
$\mathbb{V}^{\mathcal{Q}}\{\cdot \cdot\}$	Variância condicional, sob a medida de probabilidade $\mathcal{Q}$
$r(t)$	Taxa de juro de curto prazo no tempo $t$
$\sigma(t)$	Volatilidade, ou desvio padrão, da taxa de juro de curto prazo no tempo $t$
$W, W_t$	Movimento Browniano em $\mathbb{R}$
$\mathbf{W}, \mathbf{W}_t$	Movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$
$\Omega$	Espaço amostral
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -álgebra em $\Omega$
$(\mathcal{F}_t)$	Filtração contida em $\mathcal{F}$
$\mathcal{P}$	Medida de probabilidade
$\mathcal{Q}$	Medida de probabilidade martingale equivalente à $\mathcal{P}$
$F(t, T_1, T_2)$	Taxa de juro futura em $t$ , de um empréstimo entre $T_1$ e $T_2$
$f(t, T)$	Taxa de juro futura instantânea em $t$ , de um empréstimo infinitesimal em $T$
$\Pi(t, T)$	Valor de um portfólio de <i>Zero-coupon bonds</i> em $t$ , com maturidade $T$
$C$	Valor do juro pago por um <i>Coupon-bond</i>
$\tilde{P}(t, T)$	Valor de um <i>Coupon-bond</i> de maturidade $T$ no tempo $t$
$\varphi$	Variável aleatória com distribuição normal padronizada $\mathcal{N}(0, 1)$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Distribuição normal de média $\mu$ e variância $\sigma^2$
$f_{\varphi}(\cdot)$	Função densidade de probabilidade de $\varphi$
$F_{\varphi}(\cdot)$	Função distribuição de $\varphi$
$\rho(t, \lambda)$	Derivada de Radon-Nicodyn
$\lambda, \boldsymbol{\lambda}$	<i>Market price of risk</i> unidimensional, e $m$ -dimensional
$d(T)$	Função desconto ajustada à ETTJ inicial observada no mercado
$\mathcal{O}(\varepsilon^{2n})$	Correção de ordem $2n$ da expansão perturbativa

$\rho$	Coefficiente de correlação entre $W^1$ e $W^2$
$\hat{P}(t, T)$	Preço de um <i>Zero-coupon bond</i> (Vol. Estocástica)
$\hat{R}(t, T)$	<i>Yield to maturity</i> de um <i>Zero-coupon bond</i> (Vol. Estocástica)
$P^{(n)}(t, T)$	Aprox. perturbativa de ordem $n$ do preço de um <i>Zero-coupon bond</i>
$R^{(n)}(t, T)$	Aprox. perturbativa de ordem $n$ do <i>yield</i> de um <i>Zero-coupon bond</i>
$\hat{P}_{MC}$	Aproximação do preço de um <i>Zero-coupon bond</i> por Monte Carlo
$\hat{R}_{MC}$	Aproximação do <i>yield</i> de um <i>Zero-coupon bond</i> por Monte Carlo
$P_{VAS}$	Preço exato de um <i>Zero-coupon bond</i> - Modelo de Vasicek
$R_{VAS}$	<i>Yield</i> exato de um <i>Zero-coupon bond</i> - Modelo de Vasicek
$\hat{P}_{PER}$	Aproximação perturbativa do preço de um <i>Zero-coupon bond</i>
$\hat{R}_{PER}$	Aproximação perturbativa do <i>yield</i> de um <i>Zero-coupon bond</i>
$\mathcal{B}$	$\sigma$ -álgebra de Borel
$\mathcal{P}$	Economia ou mercado
$\bar{\mathcal{P}}$	Economia ou mercado normalizado
$\Theta$	Portfólio ou estratégia
$V^\Theta$	Valor de um portfólio
$V$	Título contingente
$\sigma$	Matriz de variâncias de dimensão $n \times m$
$\mathbf{a}$	Matriz de difusão, definida como $\sum_{k=1}^m \sigma_{ik} \sigma_{jk}$ , $i, j = 1, \dots, n$
$\Pi_t(V)$	Preço livre de arbitragem de um título contingente em $t$
$\chi_A$	Função indicadora de conjunto



# *Introdução*

O problema de determinação da Estrutura a Termo da Taxa de Juro (ETTJ) é de grande importância em matemática de finanças, e de grande aplicação prática, tanto na área de avaliação e precificação de títulos de renda fixa, quanto na precificação de contratos derivativos baseados nestes ativos. A ETTJ (ou *yield curve*: retorno *vs.* maturidade) nada mais é do que a curva dos retornos oferecidos por *Zero-coupon bonds*<sup>1</sup> de maturidades, ou datas de vencimento,  $T \in [0, T^*]$ , onde  $T^*$  é a maturidade máxima.

Para determinarmos a ETTJ, precisamos primeiro determinar o preço de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$ ,  $P(t, T)$ , em  $t \in [0, T)$ , e a seguir calcular o seu retorno, ou *yield*,  $R(t, T)$ . A Teoria de Precificação de Títulos Contingentes, aplicada ao caso particular do Modelo de Hull-White (Hull & White (1990, June 1993), Hull(1998), Shreve(2004)), estabelece as seguintes expressões para o preço de um *Zero-coupon bond*:

A) Modelo de Hull-White (1 fator):

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\}$$

onde a taxa de juro de curto prazo  $r(t)$  é um processo estocástico com a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \sigma(t)dW_t$$

sendo que os coeficientes  $\alpha(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\sigma(t)$  são funções determinísticas do tempo.

B) Modelo de Hull-White com Volatilidade Estocástica (2 fatores):

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s, \sigma_s) ds \right) \middle| r(t) = r_t, \sigma(t) = \sigma \right\}$$

Neste caso  $\sigma(t)$  é um processo estocástico, enquanto que os parâmetros  $\alpha(t)$ ,  $\theta(t)$  continuam a ser funções determinísticas do tempo. Depois de calcularmos  $P(t, T)$ , podemos determinar o *yield* através da expressão:

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$$

---

<sup>1</sup>Um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$  é um título contingente que vale 1, com certeza, na sua data de vencimento  $T$ .

Nesta dissertação trataremos apenas do Modelo de Hull-White (que é uma generalização do Modelo de Vasicek (Vasicek, 1977)) por ser um modelo de fácil tratabilidade analítica para o caso de 1 fator e por permitir a calibragem do modelo à ETTJ inicial observada no mercado, o que é fundamental para a precisão da precificação de derivativos de títulos de renda fixa.

Podemos seguir dois caminhos para determinar  $P(t, T)$ :

- Calcular diretamente a esperança condicional, em relação à medida de probabilidade martingale equivalente, o que é possível para o Modelo de Hull-White com volatilidade determinística.
- Transformar esta formulação probabilística em um problema de Cauchy, através da aplicação do Teorema de Feynman-Kac, e tentar resolver a EDP parabólica retroativa (*backward*) resultante.

No caso do Modelo de Hull-White (volatilidade determinística) é possível encontrar uma forma analítica fechada para  $P(t, T)$  seguindo qualquer um dos caminhos acima. Mas no geral isto já não ocorre quando consideramos a volatilidade estocástica. Neste caso, temos três possibilidades:

- Simulação de Monte Carlo: simular os processos estocásticos e obter uma aproximação média para a esperança condicional (Duffie(1996), Hull(1998), Lamberton & Lapeyre(1996)). O problema deste método é que ele é computacionalmente intensivo, mas se torna atrativo quando consideramos modelos com muitos fatores;
- Aproximação Numérica: considerar o problema de Cauchy correspondente ao problema de precificação e utilizar um método numérico (geralmente um método de diferenças finitas) para obter uma solução aproximada, o que é mais eficiente que simulações de Monte Carlo, mas mesmo assim pode se tornar computacionalmente pesado para modelos multi-fatoriais (Duffie(1996), Hull (1998), Lamberton & Lapeyre(1996));
- Aproximação perturbativa: obter uma aproximação perturbativa regular para a solução do problema de Cauchy correspondente ao problema de precificação, o que pode nos fornecer aproximações analíticas bastante precisas e eficientes (Tourrucô(2004), Tourrucô *et al.*(2007)).

Assim, o objetivo principal desta dissertação é a obtenção de aproximações perturbativas para a ETTJ implicada pelo Modelo de Hull-White e por duas extensões deste com volatilidade estocástica, considerando que a volatilidade não está correlacionada com a taxa de juro, e que os parâmetros envolvendo a volatilidade são pequenos. O Modelo A considera que a volatilidade estocástica segue um movimento Browniano geométrico com *drift* nulo:

$$\begin{cases} dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \varepsilon\sigma_t dW_t^1 \\ d\sigma_t = \varepsilon\beta\sigma_t dW_t^2 \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases}$$

e o Modelo B que ela segue o seguinte processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão à média:

$$\begin{cases} dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \varepsilon\sigma_t dW_t^1 \\ d\sigma_t = \varepsilon\eta(t)[m(t) - \sigma_t]dt + \varepsilon\beta(t)dW_t^2 \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases}$$

onde  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Ela está estruturada em três capítulos, conclusões e perspectivas, e três apêndices, conforme detalhado abaixo:

- Capítulo 1: neste capítulo fazemos uma revisão dos principais conceitos envolvidos na modelagem em tempo contínuo da ETTJ (Neftci(1996), Lamberton & Lapeyre(1996), Jarrow(2002)); apresentamos uma classificação dos modelos encontrados na literatura (Shiryaev(2000), Vieira Neto(1999)); e finalizamos com uma breve introdução sobre o mercado de títulos de renda fixa (SIFMA(Feb 2007), Sack(2007), Tesouro Nacional(2007)).
- Capítulo 2: inicialmente apresentamos e resolvemos analiticamente o Modelo de Vasicek (Vasicek, 1977) para a ETTJ; comparamos este modelo com o modelo em que a taxa de juro é constante; introduzimos e resolvemos analiticamente o Modelo de Hull-White (Hull & White(2000), Hull & White(June 1993)); derivamos a condição que permite com que este modelo se ajuste à ETTJ inicial e apresentamos um exemplo simples desta calibração (Lund, April 1998); resolvemos o Modelo de Hull-White através da equação diferencial parcial resultante da aplicação do Teorema de Feynman-Kac (Shreve, 2004); e finalmente obtemos uma aproximação perturbativa para este modelo quando a volatilidade da taxa de juro é pequena (Tourrucôo(2004), Tourrucôo *et al.*(2007)), analisando a sua precisão para o caso em que os seus coeficientes são constantes (Modelo de Vasicek).

- Capítulo 3: aqui tratamos de duas extensões do Modelo de Hull-White com volatilidade estocástica; apresentamos o Modelo A, no qual a volatilidade estocástica (não correlacionada com a taxa de juro) segue um movimento Browniano geométrico com termo de *drift* nulo, e o Modelo B, onde ela segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão à média; obtemos aproximações perturbativas para a ETTJ, realizando algumas simulações para o caso de coeficientes constantes; e por fim validamos parcialmente estas aproximações através de simulações de Monte Carlo.
- Conclusões e perspectivas.
- Apêndice A: neste apêndice revisamos os conceitos básicos de probabilidade e de processos estocásticos, sem nos preocuparmos em demonstrar os resultados. A referência para este apêndice se encontra principalmente em Evans(Version 1.2), Shreve(2004) e Lamberton & Lapeyre(1996).
- Apêndice B: aqui apresentamos um resumo da Teoria de Precificação de Títulos Contingentes baseado em Vieira(1999), Vieira & Pereira(2001), e complementado com Duffie(1996) e Neftci(1996); e a aplicamos para o problema particular de precificação de *Zero-coupon bonds* considerando modelos de 1 e 2 fatores para a taxa de juro.
- Apêndice C: finalizando a dissertação, apresentamos o Teorema de Feynman-Kac (Karatzas & Shreve(2000)), sem entrarmos em sua demonstração, resultado que nos permite transformar o problema probabilístico de precificação de *Zero-coupon bonds* em um problema de Cauchy; e, por fim, o aplicamos ao problema de precificação, considerando novamente 1 e 2 fatores.

# 1 *Introdução à Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juro*

## 1.1 Conceitos Básicos

Como o objetivo principal desta dissertação é encontrar aproximações analíticas para o preço de *Zero-coupon bonds*, é de bom tom iniciarmos definindo o que é um *Zero-coupon bond*.

**Definição 1** - Um *Zero-coupon bond* com maturidade (ou data de vencimento)  $T$  é um título de renda fixa cujo valor é igual a 1 em  $T$ .

Assim, considerando o conjunto de tempo  $\mathbb{T} = [0, T]$ , queremos determinar o preço deste título  $P(t, T)$  em  $t \in [0, T)$ , sabendo, com certeza, que o seu valor na data de vencimento futura  $T$  será igual a 1.<sup>1</sup> Importante observar que o preço de um *Zero-coupon bond* também é função da taxa de juro de curto prazo corrente  $r_t$ , mas como estamos seguindo a notação amplamente utilizada na literatura, escrevemos ele apenas como  $P(t, T)$ .

Se vivessemos em um mundo onde a taxa de juro de curto prazo  $r^2$  fosse conhecida para todo  $t \in [0, T]$ , ou seja, se fosse uma função determinística do tempo,  $r = r(t)$ ,

---

<sup>1</sup>Para fins de modelagem, consideramos, sem perda de generalidade, que um *Zero-coupon bond* paga o valor normalizado 1 na data de vencimento. Na realidade este valor poderia ser dado por qualquer constante real positiva  $M$  (este valor é chamado de principal, ou valor de face, do título). Desta forma, o preço deste título em  $t$  seria dado por  $MP(t, T)$ .

<sup>2</sup>É oportuno esclarecermos que a taxa de juro considerada nestes modelos é a taxa de juro nominal, e não a real (que é igual à taxa de juro nominal menos a taxa de inflação). Portanto,  $r$  nunca pode assumir valores negativos, pois neste caso um agente econômico irá preferir a moeda à um título. De fato, como bem colocou Black (1995), a moeda se comporta como uma opção: quando um determinado instrumento financeiro apresenta uma taxa de juro negativa, então escolhemos a moeda.

teríamos que  $P(t, T)$  seria solução da seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\begin{cases} dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt \\ P(T, T) = 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

cuja solução é dada por:

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right), \quad t \in [0, T] \quad (1.2)$$

Ou seja, o valor do *Zero-coupon bond* em  $t$  seria simplesmente o valor  $P(T, T) = 1$  descontado continuamente pela taxa de juro de curto prazo  $r(t)$  acumulada no período  $[t, T]$ ,  $\bar{r} := \int_t^T r(s)ds$ . Se, por exemplo, considerássemos  $r(t) \equiv \bar{r}$  constante, obteríamos:

$$P(t, T) = e^{-\bar{r}(T-t)}, \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

Considerando um mundo com incerteza, onde a taxa de juro de curto prazo é aleatória, precisamos considerar um modelo probabilístico para a taxa de juro. Assim, seja o espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ , conforme definido no Apêndice A (Definição 16). Neste caso, o preço de um *Zero-coupon bond* com maturidade  $T$  é dado pela seguinte esperança condicional (B.13):

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) \middle| r(t) = r_t \right\} \quad (1.4)$$

onde  $\mathcal{Q}$  é a medida martingale equivalente a  $\mathcal{P}$ , e onde  $(r(s))_{s \in [t, T]}$  não é mais uma função determinística do tempo, e sim um processo estocástico (ver teoria de precificação de títulos contingentes apresentada no Apêndice B). Neste trabalho consideramos que a taxa de juro de curto prazo segue um processo estocástico, que será determinado no Capítulo 2. Na próxima seção apresentamos uma lista, sem entrar em maiores detalhes, com alguns modelos estocásticos para a taxa de juro de curto prazo encontrados na literatura.

Agora, seguindo Neftci (1996), apresentamos um conceito fundamental no estudo de títulos de renda fixa, que é o de Estrutura a Termo das Taxas de Juro (ETTTJ), também conhecida como *yield curve*.

**Definição 2** - Seja uma família de *Zero-coupon bonds* cujo espectro contínuo de maturidades seja dado por  $T \in [t, T^*]$ , para algum  $T^*$  real positivo e finito, representando o maior tempo utilizado na modelagem. Sejam seus preços  $P(t, T)$  e seus respectivos *yields* (ou *yields to maturity*)  $R(t, T)$ . Então, o espectro de *yields*  $\{R(t, T) | T \in [t, T^*]\}$  é denominado de Estrutura a Termo da Taxa de Juro (ETTTJ).

O *yield*  $R(t, T)$  de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$  é definido implicitamente pela equação:

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T)(T - t)), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

onde  $P(t, T)$  é calculado através da esperança condicional (1.4).  $R(t, T)$  pode ser interpretado como a taxa média de retorno do *Zero-coupon bond*, do momento corrente  $t$  até a sua maturidade  $T$  (considerando capitalização contínua).

**Observação** - Aqui estamos trabalhando com uma ETTJ contínua no intervalo  $[t, T^*]$ . Na realidade o que observamos nos mercados é um espectro descontínuo de *yields*, ou seja, existe apenas um número finito de maturidades, cujo valor máximo geralmente não ultrapassa 30 anos.

Agora considere que  $t$  seja o momento presente, e que  $s$  seja um determinado tempo no futuro, i.e.,  $s \in (t, T^*]$ . Seja  $r(s)$  a taxa de juro instantânea, que remunera um valor de \$1 aplicado em  $s$ , por um período de tempo infinitesimal  $ds$ . Como  $s > t$  está no futuro, esta taxa não é observável, portanto podemos apenas formar uma expectativa em relação ao seu valor. Na realidade, de (1.4) e (1.5), encontramos a seguinte relação entre o *yield* até o vencimento e as taxas de juro futuras:

$$\exp(-R(t, T)(T - t)) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\}$$

e portanto:

$$R(t, T) = \frac{-\ln \left( \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\} \right)}{T - t} = -\frac{1}{T - t} \ln(P(t, T)) \quad (1.6)$$

**Definição 3** - A taxa de juro futura no tempo  $t$ , de um empréstimo que começa em  $T_1$  e termina em  $T_2$ , sendo  $t < T_1 < T_2$ , é definida como:

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{\ln(P(t, T_1)) - \ln(P(t, T_2))}{T_2 - T_1} \quad (1.7)$$

**Definição 4** - A taxa de juro futura instantânea no tempo  $t$ , de um empréstimo realizado por um período de tempo infinitesimal em  $T > t$  é definida como:

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (1.8)$$

Esta definição implica que:

$$f(t, t) = r_t$$

Cabe aqui uma pequena digressão sobre as características da modelagem da taxa de juro de curto prazo, que nos fornece os preços de *Zero-coupon bonds*, em relação à modelagem do mercado de ações. Na modelagem da ETTJ, devemos levar em consideração algumas características diversas daquelas da modelagem do mercado de ações (Tuckman, 2002):

1. O preço de um título converge para o seu valor de face na sua data de vencimento  $T$  (no caso de um *Zero-coupon bond*, o seu preço converge para 1), o que não acontece com o preço das ações, que não apresentam esta restrição;
2. A volatilidade do preço de um título deve convergir a zero na data de vencimento  $T$ , diferentemente da volatilidade do preço de uma ação, pois esta não possui uma data de vencimento;
3. Como as volatilidades dos preços das ações são muito maiores do que a da taxa de juro de curto prazo, no caso da modelagem de derivativos de ações não é muito problemático considerar a taxa de juro de curto prazo constante, como no Modelo de Black-Scholes (Black and Scholes, 1973), o que é muito diferente do mercado de títulos, onde a taxa de juro tem uma influência direta muito mais intensa nos preços dos títulos.

### 1.1.1 *Coupon bonds*

Enquanto um *Zero-coupon bond* paga apenas o principal  $M$  na sua maturidade  $T$ , um *Coupon bond*, além de pagar o principal  $M$  em  $T$ , também paga, periodicamente (geralmente semestral ou anualmente), juro fixos  $C$  sobre este principal (os chamados *coupons*).

Assim, considere um *Coupon bond* emitido em  $t = 0$ , pagando  $n$  *coupons* no valor de  $C$  cada, nos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n = T$ , e reembolsando o principal  $M$  em  $T$ . Este título pode ser considerado como um portfólio de  $n$  *Zero-coupon bonds*, com maturidades  $t_1, t_2, \dots, t_n = T$ , e valores de face  $C$  nas primeiras  $n - 1$  maturidades e  $(M + C)$  na  $n - \text{ésima}$ . O valor deste portfólio  $\Pi(t, T)$ , em  $t = 0$ , é dado por:

$$\Pi(0, T) = C \sum_{i=1}^{n-1} P(0, t_i) + (M + C)P(0, T) \quad (1.9)$$



Chamando o preço deste *Coupon bond* de  $\tilde{P}(0, T)$ , temos que:

$$\tilde{P}(0, T) = \Pi(0, T) = C \sum_{i=1}^{n-1} P(0, t_i) + (M + C)P(0, T) \quad (1.10)$$

Esta igualdade é válida porque estamos trabalhando com as hipóteses de que o mercado é completo e sem possibilidade de arbitragem (lucro sem risco). Assim, se  $\tilde{P}(0, T) > \Pi(0, T)$ , basta assumir uma posição vendida (*short*) em um *Coupon bond* com as características acima (recebendo  $\tilde{P}(0, T)$ ), e assumir uma posição comprada (*long*) em um portfólio de *Zero-coupon bonds* que o replique (pagando  $\Pi(0, T)$ ) - isto é possível porque o mercado é completo. Desta forma, auferimos um lucro sem risco de  $\tilde{P}(0, T) - \Pi(0, T)$ , o que contradiz a hipótese de não-arbitragem. Se  $\tilde{P}(0, T) < \Pi(0, T)$ , vale o raciocínio inverso. Portanto, a igualdade deve valer.

## 1.2 Modelos Estocásticos para a Taxa de Juro

Shiryaev (2000) apresenta uma lista bastante abrangente de modelos de um fator<sup>3</sup> para a dinâmica da taxa de juro encontrados na literatura.

Considere um espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ , e um movimento Browniano  $(W_t)_{t \geq 0}$  definido neste espaço. Assim, temos a seguinte classificação para os principais modelos de taxa de juro de um fator (Vieira Neto, 1999).

### 1.2.1 Abordagem Direta

Este tipo de abordagem especifica o processo estocástico seguido diretamente pelo preço do título  $P(t, T)$ , da mesma forma que Black & Scholes (1973) fizeram ao modelar o comportamento do preço de uma ação. Não trataremos deste tipo de modelo neste trabalho, mas, apenas para deixar registrado, o modelo de Ball e Torous, de 1983, e o modelo de Munnik, de 1992, fazem parte desta categoria.

### 1.2.2 Abordagem Indireta

Os modelos que seguem esta linha estabelecem o processo estocástico que rege a taxa de juro de curto prazo  $r_t$  - ou a taxa de juro futura instantânea  $f(t, T)$ , e a partir daí determinam o preço do título  $P(t, T)$  como uma função desta variável. Estes modelos

---

<sup>3</sup>Modelos de um fator consideram apenas uma fonte de aleatoriedade.

ainda podem ser classificados como endógenos ou exógenos.

### 1.2.2.1 Modelos Endógenos

Os modelos endógenos são aqueles que, considerando mercados completos e livres de arbitragem, derivam o preço dos títulos a partir da taxa de juro de curto prazo, e que, além de fornecerem a distribuição de probabilidade futura da ETTJ, fornecem a ETTJ inicial endogenamente, a partir dos parâmetros (constantes) do processo estocástico seguido pela taxa de juro, e da taxa de juro corrente. Esta última característica torna este tipo de modelo de pouca aplicação prática na precificação de derivativos (embora tenha utilidade para a precificação e avaliação do valor dos próprios títulos que estão sendo modelados) pois, apesar de reproduzir qualitativamente o comportamento da ETTJ, é praticamente impossível calibrá-lo para que reproduza a ETTJ inicial observada no mercado, o que acaba gerando erros significativos na precificação de derivativos de taxa de juro. Exemplos deste tipo de modelo são dados abaixo, com a especificação da Equação Diferencial Estocástica (EDE) que rege a taxa de juro de curto-prazo  $r_t$  (ver Apêndice A para a definição de EDE).

Modelo de Merton (Merton, 1973):

$$dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t \quad (1.11)$$

Modelo de Vasicek (Vasicek, 1977):

$$dr_t = \alpha[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t \quad (1.12)$$

Modelo de Dothan (1978):

$$dr_t = \alpha r_t dt + \sigma r_t dW_t \quad (1.13)$$

Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (Cox, Ingersoll & Ross, 1985):

$$dr_t = \alpha[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (1.14)$$

### 1.2.2.2 Modelos Exógenos

Esta categoria de modelos permite a calibragem dos seus parâmetros, que aqui são dependentes do tempo, de forma a se ajustarem à ETTJ inicial observada no mercado.

Assim, eles não permitem a avaliação do preço corrente de um título (já que tomam a ETTJ corrente observada no mercado como uma condição inicial do modelo), mas, por outro lado, possibilitam que a distribuição de probabilidade da ETTJ futura seja obtida com maior precisão, tornando possível, portanto, uma melhor precificação de contratos derivativos de títulos de renda fixa. Abaixo alguns exemplos.

Modelo de Ho-Lee (Ho & Lee, 1986):

$$dr_t = \alpha(t)dt + \sigma(t)dW_t \quad (1.15)$$

Modelo de Black-Derman-Toy (Black, Derman & Toy, 1990):

$$dr_t = \alpha(t)r_t dt + \sigma(t)dW_t \quad (1.16)$$

Modelo de Hull-White (Hull & White, 1990):

$$dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \sigma(t)dW_t \quad (1.17)$$

Modelo de Black-Karasinski (Black & Karasinski, 1991):

$$dr_t = r_t \alpha(t)[\theta(t) - \ln(r_t)]dt + \sigma(t)r_t dW_t \quad (1.18)$$

### 1.3 O Mercado de Títulos de Renda Fixa

O mercado de títulos de renda fixa é um mercado composto por vários segmentos. Nos Estados Unidos, por exemplo, existem sete grandes categorias de títulos (SIFMA, Feb 2007):

1. *Treasury*: emitidos pelo governo federal, que utiliza os recursos obtidos para cobrir o seu *déficit* fiscal.
2. *Federal Agency*: emitidos por vários empreendimentos patrocinados pelo governo, como o *Federal Home Loan Bank System*, *Freddie Mac* e *Fannie Mae* (instituições que atuam no mercado imobiliário); o *Farm Credit System* (uma agência do Ministério da Agricultura, cujo objetivo é financiar a agricultura familiar); e a *Tennessee Valley Authority* (uma agência de desenvolvimento focada no rio Tennessee e áreas adjacentes). A *Tennessee Valley Authority* é um agência de propriedade privada, mas os títulos emitidos por ela são garantidos pelo governo americano.
3. *Municipal*: são obrigações de dívidas emitidas pelos estados, cidades, *counties* e outras

entidades governamentais. Os recursos obtidos são utilizados no financiamento de custos administrativos e de projetos nas áreas de educação, transporte, saúde, habitação e energia. Estes títulos são a forma mais importante com a qual os estados e governos locais tomam dinheiro emprestado do mercado para financiar seus investimentos de capital e suas necessidades de fluxo de caixa.

4. *Corporate*: emitidos principalmente por empresas financeiras, industriais e de prestação de serviços, com o objetivo de financiar investimentos de capital e necessidades de fluxo de caixa.

5. *Asset Back Securities (ABS)*: são certificados que representam uma cesta de ativos, tais como recebíveis de cartão de crédito, empréstimos e *leasings* automotivos, ativos imobiliários e empréstimos estudantis.

6. *Mortgage-Related*: são títulos relacionados ao mercado hipotecário, que representam empréstimos realizados por instituições financeiras para financiar a compra de imóveis. Eles são criados quando estes empréstimos são agrupados e vendidos como títulos para os investidores.

7. *Money Market*: representam instrumentos do mercado monetário, tais como *commercial papers* e certificados de depósito.

Para termos uma idéia do tamanho deste mercado nos Estados Unidos, o estoque total da dívida em títulos era de US\$ 27,4 trilhões em 31 de dezembro de 2006, e o total de novas emissões realizadas durante o ano de 2006 foi de US\$ 6,13 trilhões. Na Figura 1 reproduzimos dois gráficos mostrando a composição deste estoque e da emissão em 2006, comparada com a de 2005, por segmento (SIFMA, Feb 2007). Apenas os títulos do Tesouro (*Treasuries*) respondem por US\$ 4,3 trilhões, ou 15,8% do mercado total, enquanto que o total emitido em 2006 foi de US\$ 780,8 bilhões (aproximadamente 12,7% do total de emissões).

Como são obrigações da dívida do governo dos EUA, os títulos do Tesouro (*Treasury*) são considerados o investimento mais seguro de todos, pois o governo tem o poder de aumentar suas receitas através do aumento dos impostos, e de emitir moeda. Assim, eles não apresentam risco de crédito, o que significa que é virtualmente certo que os juros e o principal serão pagos nas datas estipuladas. Por este motivo, as taxas de juro pagas pelos títulos do Tesouro geralmente são menores do que as pagas pelos títulos de outros segmentos, como *corporate* ou *municipal*, por exemplo.

O mercado de títulos do Tesouro americano é o maior e mais líquido do mundo e,

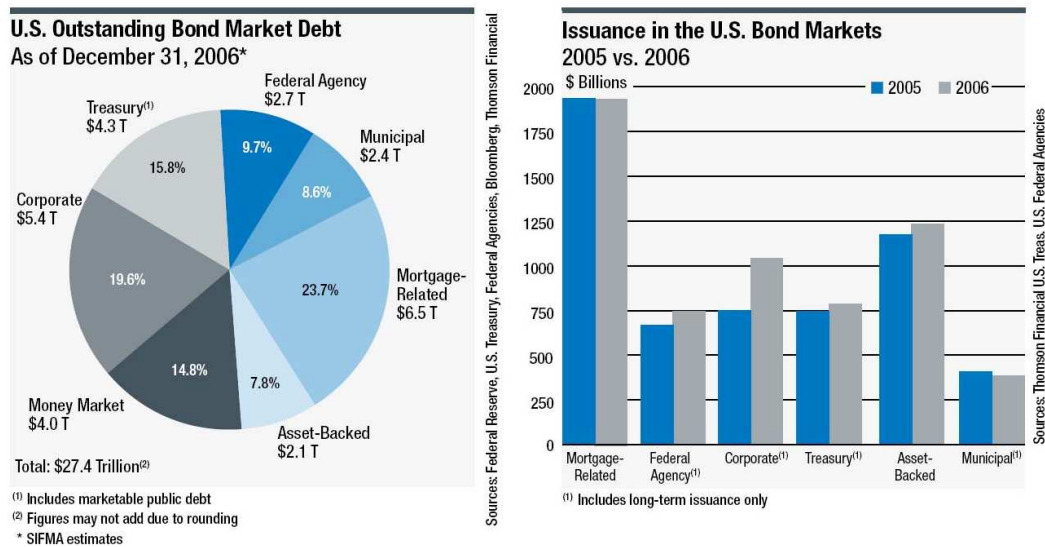


Figura 1: Composição do Mercado de Títulos de Renda Fixa dos EUA  
Fonte: SIFMA, Feb 2007.

embora não apresente risco de crédito, ele é afetado pela taxa de juro (se a taxa de juro subir depois que um *Treasury* for emitido, o preço deste título irá cair, e vice-versa), pela inflação, e pelo risco de mercado (os preços dos títulos estão sujeitos à lei da oferta e demanda atuando no mercado secundário).

Existem basicamente três tipos de títulos que são emitidos pelo Tesouro americano:

1. *Treasury Bills* (Cédulas do Tesouro): são *Zero-coupon bonds* de curto prazo, com maturidade de no máximo um ano.
2. *Treasury Notes* (Notas do Tesouro): são *coupon bonds* de médio prazo, com maturidades entre um e dez anos.
3. *Treasury Bonds* (Bônus do Tesouro): são *coupon bonds* de médio e longo prazos, com maturidades maiores do que dez anos. Geralmente, os bônus de maior maturidade são de trinta anos.

Além destes três tipos de títulos, o Tesouro dos Estados Unidos também emite *TIPS* (*Treasury Inflation-Protected Securities*), que são *coupon bonds* protegidos contra a inflação e com maturidades típicas de cinco, dez e vinte anos, e *STRIPS* (*Separate Trading of Registered Interest and Principal Securities*), que são *Zero-coupon bonds* criados pela separação física do principal e do fluxo de caixa dos juros de *coupon bonds* emitidos previamente, podendo, desta forma, serem negociados separadamente como *Zero-coupon bonds* no mercado. Ou seja, esta separação transforma um *coupon bond* em *n* *STRIPS* de juro e um *STRIP* de principal.

STRIPS são títulos muito interessantes, pois os *STRIPS* de juros nos fornecem um modo fácil e efetivo de determinar a ETTJ dos *Zero-coupon bonds* observada no mercado (Sack, 2000).

Os modelos considerados neste trabalho não levam em consideração o risco de crédito no problema de precificação de *Zero-coupon bonds*. Assim, dadas as hipóteses dos modelos, obteremos a ETTJ de *Zero-coupon bonds* que não apresentam risco de crédito, como aqueles emitidos pelo Tesouro dos EUA.

No caso do Brasil, o Tesouro brasileiro emitiu, em 2006, um total de R\$ 488,2 bilhões em títulos no mercado (títulos como LTN - Letra do Tesouro Nacional, LFT - Letra Financeira do Tesouro, NTN - Notas do Tesouro Nacional, etc.). Em 31 de dezembro de 2006, o estoque total de títulos do Tesouro no mercado era de R\$ 1,2 trilhões (Tesouro Nacional, 2007).

## 2 *Modelo de Vasicek e Modelo de Hull-White*

### 2.1 O Modelo de Vasicek

O modelo de Vasicek (Vasicek, 1977) considera que a taxa de juro de curto prazo é determinada pelo seguinte processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão à média, definido em um dado espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ :

$$dr_t = \alpha[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\sigma$  são constantes reais positivas, e  $(W_t)_{t \geq 0}$  é um movimento Browniano, isto é,  $dW_t = \varphi \sqrt{dt}$ , sendo  $\varphi$  uma variável aleatória com distribuição normal padrão,  $\varphi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$P_\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

e com função distribuição:

$$F_\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) ds, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Este modelo é muito interessante do ponto de vista econômico, pois modela a taxa de juro de curto prazo como um processo com reversão à média  $\theta$ , à taxa  $\alpha$ , adicionado a um ruído aleatório  $(W_t)$ , que pode ser interpretado como os sucessivos pequenos choques (neste caso) advindos da atividade econômica. Esta característica de reversão à média da taxa de juro se justifica, pois, quando a taxa de juro aumenta muito, o investimento é desestimulado, diminuindo desta forma a demanda por empréstimos. Isto faz a taxa de juro diminuir até o ponto em que se torna atraente tomar dinheiro emprestado novamente, aumentando a demanda por empréstimos, e assim aumentando a taxa de juro.

Este é um exemplo de um modelo de um fator, pois há uma única fonte de ruído  $(W_t)$  influenciando a taxa de juro.

### 2.1.1 Resolvendo a EDE do Modelo de Vasicek

Para resolver a equação (2.1), começamos multiplicando-a pela função  $\mu(t) = e^{\alpha t}$ . Assim, podemos escrevê-la como:

$$e^{\alpha t} dr + e^{\alpha t} \alpha r dt = e^{\alpha t} \alpha \theta dt + e^{\alpha t} \sigma dW_t \quad (2.4)$$

O lado esquerdo desta equação pode ser escrito como  $d(e^{\alpha t} r)$ . Para ver isto, basta considerar a função  $g(t, r) := e^{\alpha t} r$  e aplicar o Lema de Itô (Teorema 2 do Apêndice A):

$$\begin{cases} dg = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial r} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} G^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial r} G dW \\ dr = F(r, t) dt + G(r, t) dW \end{cases}$$

Da equação (2.1) temos que  $F = \alpha(\theta - r)$  e  $G = \sigma$ . Portanto:

$$d(e^{\alpha t} r) = (\alpha e^{\alpha t} r + e^{\alpha t} \alpha(\theta - r) + 0) dt + e^{\alpha t} \sigma dW$$

o que resulta em:

$$d(e^{\alpha t} r) = e^{\alpha t} \alpha \theta dt + e^{\alpha t} \sigma dW_t \quad (2.5)$$

Desta forma, podemos escrever (2.4) como (2.5). Agora, integrando (2.5) entre  $t$  (o tempo corrente) e  $T$  (um tempo futuro),  $T > t \geq 0$ , obtemos a solução desejada:

$$r(T) = e^{-\alpha(T-t)} r_t + \theta (1 - e^{-\alpha(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-\alpha(T-s)} dW_s \quad (2.6)$$

onde a integral estocástica no lado direito da equação é considerada no sentido de Itô.

A esperança de  $r(T)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{r(T)\} &= e^{-\alpha(T-t)} r_t + \theta \{1 - e^{-\alpha(T-t)}\} + \sigma \mathbb{E} \left\{ \int_t^T e^{-\alpha(T-s)} dW_s \right\} \\ &= e^{-\alpha(T-t)} r_t + \theta (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

pois,  $\mathbb{E} \left\{ \int_t^T e^{-\alpha(T-s)} dW_s \right\} = 0$ , pela propriedade martingale da integral de Itô.



Já a variância de  $r(T)$  é:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\{r(T)\} &= \mathbb{E}\{r(T)^2\} - \mathbb{E}\{r(T)\}^2 \\
&= e^{-2\alpha(T-t)}\sigma^2\mathbb{E}\left\{\left(\int_t^T e^{-\alpha(T-s)}dW_s\right)^2\right\} \\
&= e^{-2\alpha(T-t)}\sigma^2\mathbb{E}\left\{\int_t^T e^{-2\alpha(T-s)}ds\right\} \\
&= e^{-2\alpha(T-t)}\sigma^2\int_t^T e^{-2\alpha(T-s)}ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(T-t)})
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nestes cálculos, além de utilizarmos a propriedade martingale da integral de Itô, também utilizamos, nestes últimos passos, a isometria de Itô (Teorema 1 do Apêndice A).

Resumindo, a distribuição de  $r(T)$  é dada pela normal:

$$r(T) \sim \mathcal{N}\left(e^{-\alpha(T-t)}r_t + \theta(1 - e^{-\alpha(T-t)}), \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(T-t)})\right) \tag{2.9}$$

Observe que, quando  $T \rightarrow \infty$ , a distribuição de  $r(T)$  converge para  $\mathcal{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ . Além disto, como  $r(T)$  possui distribuição normal, temos que  $\mathcal{P}(r(T) < 0) > 0$ , o que não é uma hipótese muito realista. Mas, como um dos objetivos principais da modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juro é a sua utilização para a precificação de derivativos de títulos de renda fixa, esta hipótese não é muito problemática, pois Hull-White (2000) mostraram que, se considerarmos uma versão estendida do modelo de Vasicek, o erro na precificação implicado por esta hipótese não é significativo. Veremos este modelo estendido na Seção 2.2.

### 2.1.2 Determinando a Estrutura a Termo da Taxa de Juro

Determinar a ETTJ no tempo  $t$  significa determinarmos o espectro de *yields*  $R(t, T)$  para maturidades arbitrárias  $T > t$  (ou, equivalentemente, determinar o preço de *Zero-coupon bonds*  $P(t, T)$ , o qual nos permite calcular o *yield to maturity* através da relação  $R(t, T) = -\frac{1}{T-t}\ln(P(t, T))$ ). Conforme a Teoria de Precificação de Títulos Contingentes apresentada no Apêndice B, sob as hipóteses de que o mercado é completo e livre de

arbitragem, o preço de um *Zero-coupon bond* é dado por (B.13)<sup>1</sup>:

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\} \quad (2.10)$$

onde  $\mathcal{Q}$  é a medida martingale equivalente à  $\mathcal{P}$ .

Definindo a função:

$$h(t, T) := \int_t^T r(s) ds \quad (2.11)$$

e utilizando a seguinte propriedade, que vale quando  $h(t)$  for gaussiana (Vieira Neto, 1999):

$$\mathbb{E} \{ e^{-h(t)} \} = e^{-\mathbb{E}\{h(t)\} + \frac{1}{2}\mathbb{V}\{h(t)\}}$$

temos que:

$$P(t, T) = e^{-\mathbb{E}^{\mathcal{Q}}\{h(t)|r(t)=r_t\} + \frac{1}{2}\mathbb{V}^{\mathcal{Q}}\{h(t)|r(t)=r_t\}} \quad (2.12)$$

Para simplificar a notação, nos cálculos a seguir iremos escrever simplesmente  $\mathbb{E} \{ h(t) \}$  e  $\mathbb{V} \{ h(t) \}$  ao invés de  $\mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \{ h(t) | r(t) = r_t \}$  e  $\mathbb{V}^{\mathcal{Q}} \{ h(t) | r(t) = r_t \}$ .

---

<sup>1</sup>Observe que segundo esta teoria, supondo o *market price of risk* constante  $\lambda(t) \equiv \lambda$ , e escrevendo a derivada de Radon-Nikodym como:

$$\rho(t, \lambda) = \exp \left( - \int_0^t \lambda dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 ds \right)$$

temos que a medida de probabilidade martingale equivalente  $\mathcal{Q}$  é dada por:

$$d\mathcal{Q} = \rho(t, \lambda) d\mathcal{P}.$$

Agora, aplicando o Teorema de Girsanov,  $W^{\mathcal{Q}} = W + \lambda t$  é um processo de Wiener em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ . Assim,  $dW = dW^{\mathcal{Q}} - \lambda dt$ . Desta forma, podemos reescrever (2.1) como:

$$dr_t = \alpha \left[ \theta - \frac{\sigma \lambda}{\alpha} - r_t \right] dt + \sigma dW_t^{\mathcal{Q}}.$$

e é considerando esta EDE que o preço de um *Zero-coupon bond* é dado por:

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\}.$$

Nesta dissertação não consideraremos explicitamente o *market price of risk*, pois isto não influenciará no nosso objetivo principal, que é obter e analisar aproximações perturbativas para a ETTJ.

De (2.6) e (2.11) temos que:

$$\begin{aligned}
h(t, T) &= \int_t^T r(s) ds \\
&= \int_t^T e^{-\alpha(s-t)} r(t) ds + \int_t^T \theta (1 - e^{-\alpha(s-t)}) ds + \sigma \int_t^T \int_t^s e^{-\alpha(s-s')} dW_{s'} ds \\
&= \theta(T-t) + (r_t - \theta) \left( \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \right) + \sigma \int_t^T \int_{s'}^T e^{-\alpha(s-s')} ds dW_{s'} \\
&= \theta(T-t) + (r_t - \theta) B(t, T) + \sigma \int_t^T B(s', T) dW_{s'}
\end{aligned}$$

sendo:

$$B(t, T) := \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

Assim, a esperança de  $h(t, T)$  é:

$$\mathbb{E}\{h(t, T)\} = \theta(T-t) + (r_t - \theta) B(t, T)$$

e a variância:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[h(t, T)] &= \mathbb{E}\{h(t, T)^2\} - \mathbb{E}\{h(t, T)\}^2 \\
&= \sigma^2 \mathbb{E} \left\{ \left( \int_t^T B(s', T) dW_{s'} \right)^2 \right\} \\
&= \sigma^2 \mathbb{E} \left\{ \int_t^T B(s', T)^2 ds' \right\} \\
&= \sigma^2 \int_t^T B(s', T)^2 ds' \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha^3} [2\alpha(T-t) - 4(1 - e^{-\alpha(T-t)}) + (1 - e^{-2\alpha(T-t)})]
\end{aligned}$$

E então, de (2.12) obtemos:

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= A(t, T) e^{-B(t, T)r_t} \\
A(t, T) &= e^{\theta(B(t, T) - (T-t)) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} ((T-t) - 2B(t, T) + \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}))} \\
B(t, T) &:= \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

o que implica que o *yield to maturity*  $R(t, T)$  é dado por:

$$\begin{aligned}
R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T)) \\
&= -\frac{1}{T-t} \ln(A(t, T)) + \frac{1}{T-t} \ln(B(t, T)) r_t
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Os resultados (2.13) e (2.14) nos mostram que toda a ETTJ é determinada a partir

do conhecimento da taxa de juro de curto prazo no momento corrente  $t$ ,  $r_t$ , dados os parâmetros  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\sigma$ , que podem ser estimados a partir de dados históricos do mercado, ou calibrados a um conjunto de informações observado no tempo corrente. Observe que o *yield to maturity*, dado por (2.14), é afim em relação a  $r_t^2$ . Na realidade, o modelo de Vasicek é um caso particular de uma classe maior de modelos da ETTJ, chamados de *modelos afim da estrutura a termo da taxa de juro* (Duffie, 1996).

Na Figura 2 podemos ver graficamente os preços iniciais  $P(0, T)$  implicados pelo Modelo de Vasicek para as maturidades  $T \in [0, 30]$ , considerando os parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 10\%$ ,  $\sigma = 10\%$ , e três valores para a taxa de juro inicial  $r_0$ . Na Figura 3, podemos verificar que a ETTJ, ou *yield curve*, pode ser crescente ( $r_0 = 5\%$ ) ou decrescente ( $r_0 = 10\%$  e  $r_0 = 15\%$ ). Na realidade, na vizinhança de  $r_0 = \theta$ , o *yield curve* pode assumir algumas formas razoavelmente complexas, conforme podemos verificar na Figura 4.

É interessante, para obtermos alguma intuição sobre o modelo, compararmos a evolução do preço  $P(t, T)$  e do *yield*  $R(t, T)$  de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$  no período  $t \in [0, T]$ , dados pelo Modelo Clássico (taxa de juro determinística) e pelo Modelo de Vasicek (taxa de juro estocástica). Fazemos isto considerando os parâmetros utilizados nos exemplos acima e, além disto,  $r_0 = 9.2\%$  (Vasicek),  $r_t \equiv r_0$  (Clássico),  $T = 30$ . Na Figura 5 podemos verificar que o Modelo de Vasicek fornece um preço menor do que o Modelo Clássico para um *Zero-coupon bond* com maturidade de  $T = 30$ , durante todo o período  $t \in [0, T]$ , sendo que ambos convergem para 1 em  $T$ . A justificativa econômica para isto é que a grande maioria dos investidores são avessos ao risco. Assim, para comprar um título com retorno incerto, eles só o fazem se o seu preço for menor do que o de um título livre de risco (modelado pelo Modelo Clássico), ou, equivalentemente, se o seu *yield* for maior (ver Figura 6).

---

<sup>2</sup>Uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita afim se existem constantes  $a$  e  $b$  tal que,  $\forall x, g(x) = a + bx$ .

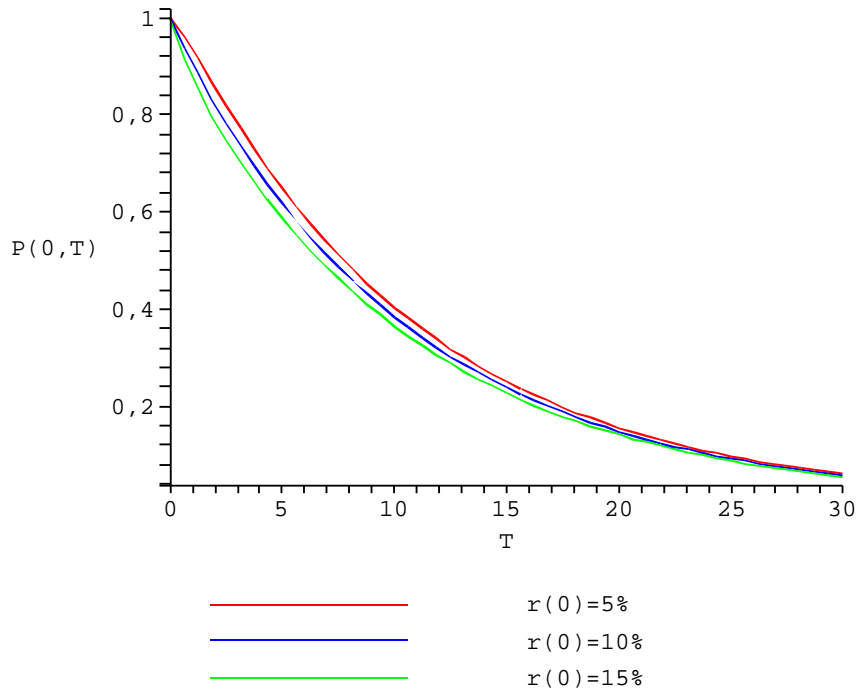


Figura 2: ETTJ Inicial - Preço de Zero-Coupon Bonds

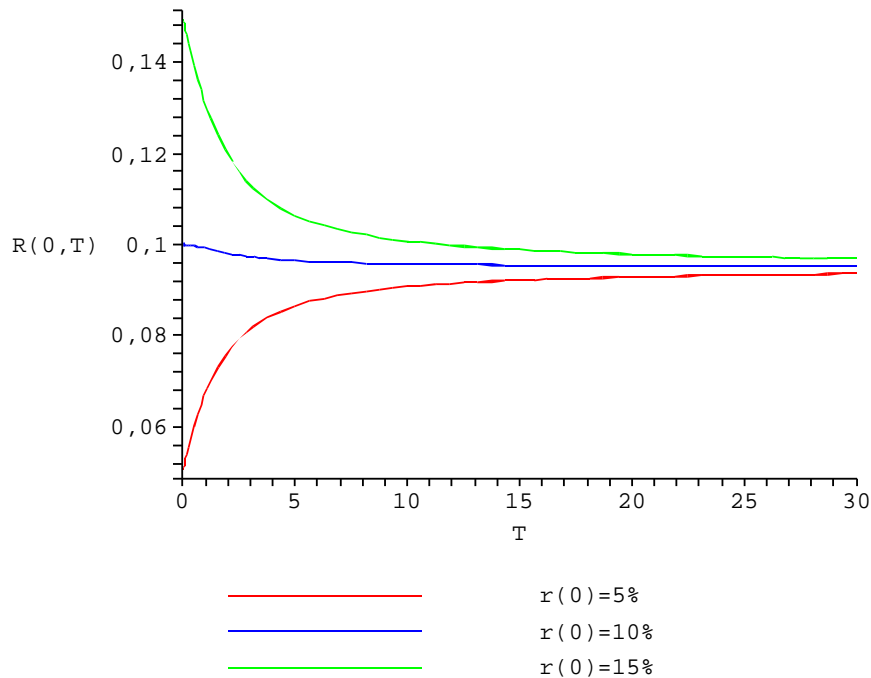


Figura 3: ETTJ Inicial - Yield to Maturities

## 2.2 O Modelo de Hull-White

Um dos grandes problemas do modelo de Vasicek é que a ETTJ inicial, gerada endogenamente pelo modelo, geralmente não confere com aquela observada no mercado, o que

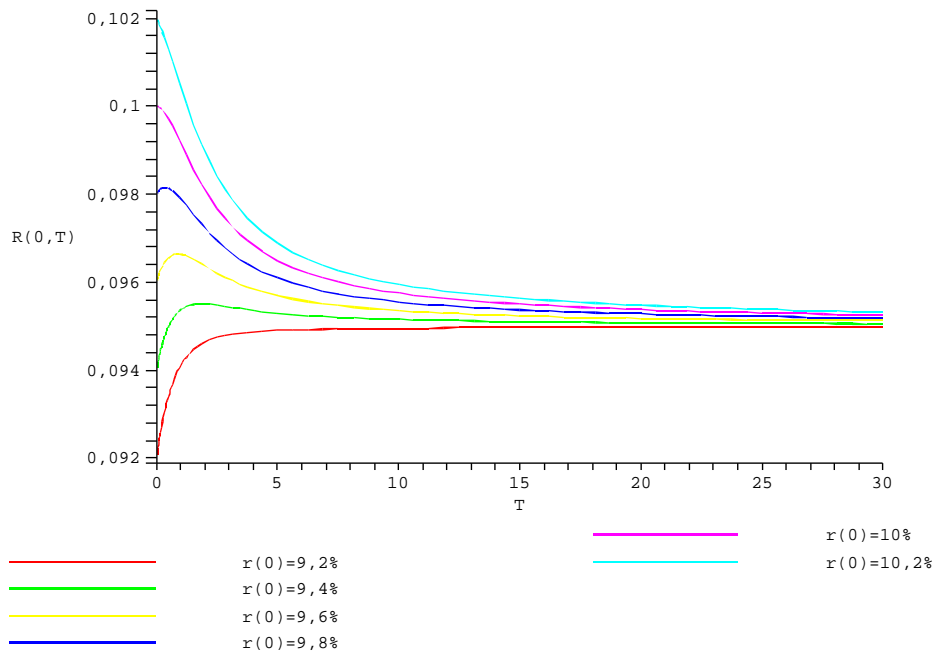


Figura 4: ETTJ Inicial - *Yield Curve* na vizinhança de  $\theta = 10\%$

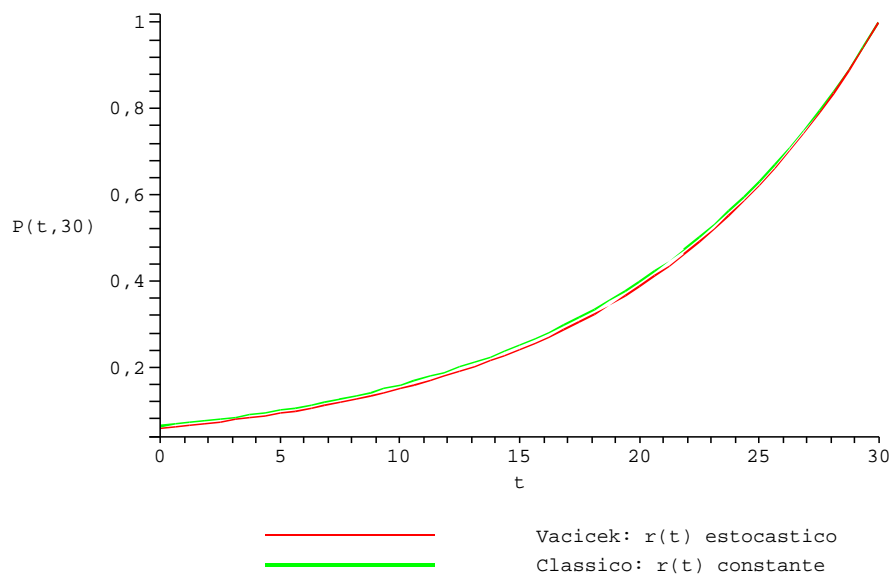


Figura 5: Comparação entre Modelo Clássico e Modelo de Vasicek -  $P(t, 30)$

acaba gerando erros significativos na precificação de derivativos de títulos de renda fixa, e consequentemente limitando o seu uso para este fim: Hull (1998) observa que um erro de 1% no preço de um título implica em um erro de 25% no preço de uma opção. Então, com o intuito de resolver este problema, Hull-White (2000) generalizaram o modelo de Vasicek, permitindo que os coeficientes da EDE (2.1) fossem funções determinísticas do tempo:

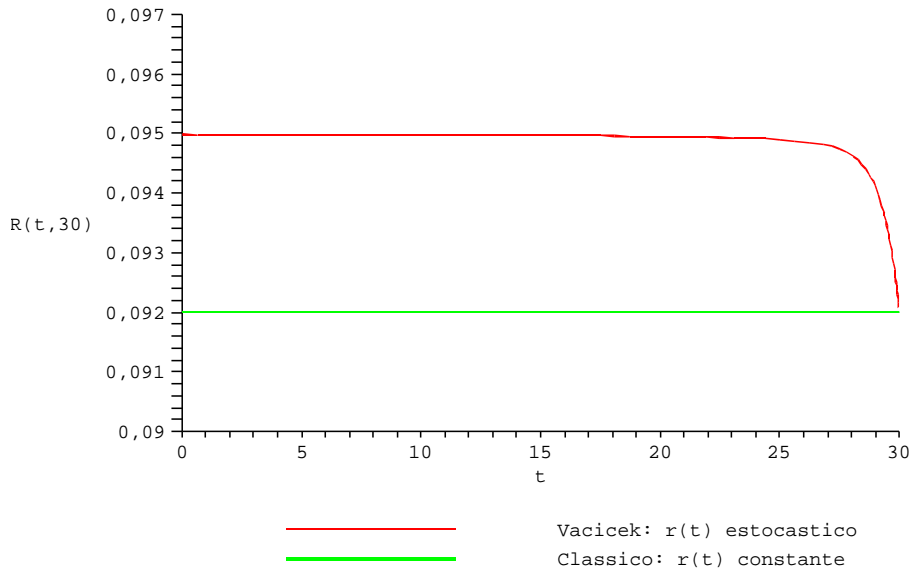


Figura 6: Comparação entre Modelo Clássico e Modelo de Vasicek -  $R(t, 30)$

$$dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \sigma(t)dW_t \quad (2.15)$$

Este modelo é conhecido como Modelo de Vasicek Estendido (ou Modelo de Hull-White) e, além de permitir o ajuste à ETTJ inicial (considerando-se apenas  $\theta(t)$  dependente do tempo), ele pode ser calibrado de forma a se ajustar à Estrutura a Termo da Volatilidade da Taxa de Juro (ETVTJ) e à Estrutura a Termo da Volatilidade da Taxa de Juro Futura (ETVTJF) correntes - considerando os outros coeficientes dependentes do tempo. Na próxima seção vamos considerar apenas o ajuste à ETTJ, referenciando o trabalho de Hull-White (2000) para os outros dois casos.

Para resolver (2.15), consideramos o "fator integrante"  $\mu(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$  e procedemos da mesma maneira que na seção anterior. Desta forma, a solução é dada por:

$$\begin{aligned}
 r(T) &= \xi(t, T)r_t + \int_t^T \alpha(s)\theta(s)\xi(s, T)ds + \int_t^T \sigma(s)\xi(s, T)dW_s \\
 \xi(t, T) &= e^{-\int_t^T \alpha(s)ds}
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Neste caso,  $r(T)$  possui distribuição:

$$r(T) \sim \mathcal{N}\left(\xi(t, T)r_t + \int_t^T \xi(s, T)\alpha(s)\theta(s)ds, \int_t^T \xi(s, T)^2\sigma(s)^2ds\right) \quad (2.17)$$

Definindo  $h(t, T)$  como em (2.11), e considerando (2.16), a sua esperança e variância

são dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{h(t, T)\} &= r_t B^*(t, T) + \int_t^T \alpha(s) \theta(s) B^*(s, T) ds \\ \mathbb{V}\{h(t, T)\} &= \int_t^T \sigma(s)^2 B^*(t, T)^2 ds \\ B^*(t, T) &:= \int_t^T \xi(t, s) ds\end{aligned}\tag{2.18}$$

Assim, o preço de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$ , no instante  $t$ , é obtido a partir de (2.12) e (2.18), resultando em:

$$\begin{aligned}P(t, T) &= A^*(t, T) e^{-B^*(t, T) r_t} \\ A^*(t, T) &= e^{\int_t^T [-\alpha(s) \theta(s) B^*(s, T) + \frac{1}{2} \sigma(s)^2 B^*(s, T)^2] ds} \\ B^*(t, T) &:= \int_t^T \xi(t, s) ds, \quad \xi(t, T) = e^{-\int_t^T \alpha(s') ds'}\end{aligned}\tag{2.19}$$

É fácil verificar que, se considerarmos  $\alpha(t) \equiv \alpha$ ,  $\theta(t) \equiv \theta$  e  $\sigma(t) \equiv \sigma$ , (2.19) se reduz à solução do Modelo de Vasicek (2.13), conforme esperado.

### 2.2.1 Ajuste à ETTJ Inicial

Para calibrarmos o modelo de Hull-White com a ETTJ inicial observada no mercado, basta considerarmos o seguinte caso particular de (2.15):

$$dr_t = \alpha[\theta(t) - r_t] dt + \sigma dW_t\tag{2.20}$$

Então, seguindo Lund (1998), vamos determinar analiticamente a forma de  $\theta(t)$ , que nos garantirá que:

$$P(0, T) = d(T), \quad T \in [0, T^*]$$

onde  $d(T)$  é a função desconto correspondente à ETTJ observada no mercado, e  $T^*$  é a maturidade máxima.

Para tanto, a fim de simplificar os cálculos, vamos escrever a solução de (2.20):

$$\begin{aligned}r(T) &= \xi(t, T) r_t + \alpha \int_t^T \theta(s) \xi(s, T) ds + \sigma \int_t^T \xi(s, T) dW_s \\ \xi(t, T) &= e^{-\alpha(T-t)}\end{aligned}$$

como:

$$r(T) = \bar{r}(T) + x(T)\tag{2.21}$$



onde  $\bar{r}(T)$  é a esperança de  $r(T)$ :

$$\bar{r}(T) = \xi(t, T)r_t + \alpha \int_t^T \theta(s)\xi(s, T)ds \quad (2.22)$$

e  $x(T) = \sigma \int_t^T \xi(s, T)dW_s$  é solução da seguinte EDE:

$$\begin{cases} dx_t = -\alpha x_t dt + \sigma dW_t \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Feitas estas observações, o preço de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s)ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\} \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T (\bar{r}(s) + x(s))ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\} \\ &= \exp \left( - \int_t^T \bar{r}(s)ds \right) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T x(s)ds \right) \middle| X(t) = x \right\} \\ &= \exp \left( - \int_t^T \bar{r}(s)ds \right) \exp \left( \hat{A}(t, T) - B(t, T)x \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \hat{A}(t, T) &= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_t^T B(s, T)^2 ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \left[ (T-t) + \frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)} - 4(1 - e^{-\alpha(T-t)})}{2\alpha} \right] \\ B(t, T) &= \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} \end{aligned}$$

A esperança matemática na terceira linha de (2.24) foi calculada da mesma forma que nos casos anteriores.

Para calibrar o modelo, observe que:

$$d(T) = P(0, T) = \exp \left( - \int_0^T \bar{r}(s)ds \right) \exp (A(0, T))$$

pois  $x(0) = 0$ . Aplicando o logaritmo nos dois lados desta equação, obtemos:

$$\ln d(T) = - \int_0^T \bar{r}(s)ds + A(0, T)$$

e agora derivando em relação à  $T$ :

$$\frac{d \ln d(T)}{dT} = -\frac{d \int_0^T \bar{r}(s) ds}{dT} + \frac{dA(0, T)}{dT}$$

chegamos a seguinte expressão:

$$\bar{r}(T) = f(0, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 B(0, T)^2 \quad (2.25)$$

onde utilizamos que a taxa de juro futura instantânea em  $T$ ,  $f(0, T)$ , observada no instante  $t = 0$ , é dada por  $f(0, T) = -\frac{d \ln d(T)}{dT}$ , conforme (1.8). Agora, derivando (2.22) em relação a  $T^3$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dT} &= \alpha\theta(T) - \alpha \left( e^{-\alpha T} r(T) + \alpha \int_0^T \theta(s) e^{-\alpha(T-s)} ds \right) \\ &= \alpha\theta(T) - \alpha\bar{r}(T) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\alpha\theta(T) = \alpha\bar{r}(T) + \frac{d\bar{r}}{dT} \quad (2.26)$$

Derivando (2.25) em relação a  $T$  e substituindo em (2.26):

$$\begin{aligned} \alpha\theta(T) &= \alpha f(0, T) + \frac{1}{2}\alpha\sigma^2 B(0, T)^2 + \frac{df(0, T)}{dT} + \sigma^2 B(0, T) \frac{dB(0, T)}{dT} \\ &= \alpha f(0, T) + \frac{df(0, T)}{dT} + \phi(T) \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi(T) &= \frac{1}{2}\alpha\sigma^2 B(0, T)^2 + \sigma^2 B(0, T) \frac{dB(0, T)}{dT} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha T}) = \mathbb{V}_0 \{r(T)\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

por (2.8). Desta forma, definindo  $\theta(t)$  como:

$$\theta(t) = f(0, t) + \frac{1}{\alpha} \frac{df(0, t)}{dt} + \frac{1}{\alpha} \mathbb{V}_0 \{r(t)\} \quad (2.29)$$

calibramos o Modelo de Hull-White à Estrutura a Termo da Taxa de Juro inicial observada no mercado.

---

<sup>3</sup>Observe que nos cálculos desta seção estamos considerando o tempo inicial  $t = 0$ .

### 2.2.1.1 Um Exemplo de Ajuste à ETTJ Inicial

Considere que a ETTJ inicial ajustada aos dados observados no mercado seja dada por:

$$P(0, T) = d(T) = e^{-r_0 T} \quad (2.30)$$

Isto implica que a taxa de juro futuro instantânea  $f(0, T)$  é constante, e igual a:

$$f(0, T) = r_0$$

e portanto, a sua derivada é nula. Assim, por (2.29):

$$\theta(t) = r_0 + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (2.31)$$

Nesta seção vamos mostrar que substituindo (2.31) em (2.24), obteremos a ETTJ inicial, dada por (2.30). Assim, de (2.24) temos que:

$$\begin{aligned} P(0, T) &= \exp \left( - \int_0^T \bar{r}(s) ds + \hat{A}(0, T) \right) \\ &= \exp \left( - \int_0^T \bar{r}(s) ds + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T B(s, T)^2 ds \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

e de (2.22) e (2.31), que:

$$\begin{aligned} \bar{r}(s) &= e^{-\alpha s} r_0 + \alpha e^{-\alpha s} \int_0^s e^{\alpha s'} \theta(s') ds' \\ &= e^{-\alpha s} r_0 + \alpha e^{-\alpha s} \left[ r_0 \left( \frac{e^{\alpha s} - 1}{\alpha} \right) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} \int_0^s e^{\alpha s'} (1 - e^{-2\alpha s'}) ds' \right] \\ &= r_0 + \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-\alpha s}}{\alpha} \right)^2 \\ &= r_0 + \frac{1}{2} \sigma^2 B(0, s)^2 \end{aligned}$$

Então, substituindo este resultado em (2.32), obtemos a ETTJ inicial:

$$\begin{aligned} P(0, T) &= \exp \left( -r_0 T - \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T B(0, s)^2 ds + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T B(s, T)^2 ds \right) \\ &= e^{-r_0 T}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

pois  $\int_0^T B(0, s)^2 ds = \int_0^T B(s, T)^2 ds$ .

## 2.2.2 Resolvendo o Modelo de Hull-White via EDP

Aplicando o Teorema de Feynman-Kac (C.13) à formulação probabilística do modelo de Hull-White:

$$\begin{cases} P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\} \\ dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \sigma(t)dW_t \end{cases} \quad (2.34)$$

obtemos que a solução  $P(t, T)$  de (2.34) também é solução do seguinte problema do Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \alpha(t)[\theta(t) - r] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma(t)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \\ P(T, T) = 1, \quad \forall r \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.35)$$

Supondo que a solução desta EDP é da forma  $P(t, T) = e^{-B^*(t, T)r + C^*(t, T)}$ , temos que<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= [-B^{*'}r + C^{*'}]P \\ \frac{\partial P}{\partial r} &= -B^*P \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= B^{*2}P \end{aligned}$$

Neste caso, a solução terminal  $P(T, T) = 1$  é válida se, e somente se,  $B^*(T, T) = C^*(T, T) = 0$ . Substituindo estes resultados em (2.35), obtemos:

$$\left[ (-B^{*'} + \alpha(t)B^* - 1)r + C^{*'} - \alpha(t)\theta(t)B^* + \frac{1}{2}\sigma(t)^2B^{*2} \right] P = 0$$

Como  $P(t, T)$  não é identicamente nula, temos que:

$$(-B^{*'} + \alpha(t)B^* - 1)r = -C^{*'} + \alpha(t)\theta(t)B^* - \frac{1}{2}\sigma(t)^2B^{*2}$$

e, como a solução deve valer para todo  $r$ :

$$\begin{cases} -B^{*'} + \alpha(t)B^* - 1 = 0, & B^*(T, T) = 0 \\ -C^{*'} + \alpha(t)\theta(t)B^* - \frac{1}{2}\sigma(t)^2B^{*2} = 0, & C^*(T, T) = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema de EDO's é dada por:

$$\begin{aligned} B^*(t, T) &= \int_t^T \xi(t, s) ds, \quad \xi(t, T) = e^{-\int_t^T \alpha(s) ds} \\ C^*(t, T) &= \int_t^T \left[ -\alpha(s)\theta(s)B^*(s, T) + \frac{1}{2}\sigma(s)^2B^{*2}(s, T) \right] ds \end{aligned} \quad (2.36)$$

---

<sup>4</sup>  $f'(\cdot)$  denota a derivada da função em relação ao tempo.

Definindo  $A^*(t, T) := e^{C^*(t, T)}$ , podemos escrever a solução de (2.35) como:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= A^*(t, T)e^{-B^*(t, T)r_t} \\ A^*(t, T) &= e^{\int_t^T [-\alpha(s)\theta(s)B^*(s, T) + \frac{1}{2}\sigma(s)^2 B^*(s, T)^2] ds} \\ B^*(t, T) &:= \int_t^T \xi(t, s) ds, \quad \xi(t, T) = e^{-\int_t^T \alpha(s) ds} \end{aligned} \quad (2.37)$$

o que confirma a solução (2.19), obtida na Seção 2.2 diretamente através do cálculo da esperança condicional (2.34).

### 2.2.3 Obtendo uma Aproximação Perturbativa para o Modelo de Hull-White

Agora vamos obter uma aproximação perturbativa para o Modelo de Hull-White, considerando que a volatilidade da taxa de juro de curto prazo é muito pequena, ou seja:

$$dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \varepsilon\sigma(t)dW_t \quad (2.38)$$

onde  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Nesta seção seguimos Tourrucôo (2004) e Tourrucôo *et al.* (2007), mas aqui aplicamos o método no modelo de Hull-White conforme encontrado na literatura de finanças, e não no modelo de Black-Karasinski generalizado, que foi tratado pelos autores supra-citados.

Relembrando da esperança de  $r_t$ , dada em (2.17), temos que:

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) &:= \mathbb{E}\{r(t)\} = \xi(0, t)r(0) + \int_0^t \xi(s, t)\alpha(s)\theta(s)ds \\ \xi(s, t) &= e^{-\int_s^t \alpha(s')ds'} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Agora, vamos definir uma nova variável de estado  $Y(t)$ , pela seguinte expressão<sup>5</sup>:

$$r(t) = \bar{r}(t) + \xi(t)Y(t) \quad (2.40)$$

**Proposição 1** -  $Y(t)$  é martingal.

**Demonstração:** Tomando o diferencial da expressão (2.40), temos que:

$$\begin{aligned} dr(t) &= d\bar{r}(t) + \xi(t)dY(t) + Y(t)d\xi(t) \\ &= \alpha(t)[\theta(t) - \bar{r}_t]dt + \xi(t)dY(t) - \alpha(t)\xi(t)Y(t)dt \end{aligned}$$

onde consideramos que  $d\bar{r}(t) = \alpha(t)[\theta(t) - \bar{r}_t]dt$ , por (2.38), e derivamos  $\xi(t)$  em relação

---

<sup>5</sup>Aqui, vamos considerar  $\xi(t) := \xi(0, t)$ .

a  $t$ . Agora, por (2.40), temos que  $\bar{r}(t) = r(t) - \xi(t)Y(t)$ , e portanto:

$$dr(t) = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \xi(t)dY(t) \quad (2.41)$$

Mas, (2.41) precisa coincidir com (2.38), e assim:

$$dY(t) = \varepsilon \frac{\sigma(t)}{\xi(t)} dW_t$$

Como no tempo inicial  $t = 0$  temos que  $r(0) = \bar{r}(0)$ , pois a taxa inicial é conhecida com certeza, então  $Y(0) = 0$ . Assim:

$$\begin{cases} dY(t) = \varepsilon \frac{\sigma(t)}{\xi(t)} dW_t \\ Y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

e portanto,  $Y(t)$  é martingal.  $\square$

Considerando (2.40), podemos reescrever o problema de precificação de um *Zero-coupon bond* como:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| r(t) = r_t \right\} \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T [\bar{r}(s) + \xi(s)Y(s)] ds \right) \middle| Y(t) = y \right\} \\ &= e^{-\int_t^T \bar{r}(s) ds} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s)Y(s) ds \right) \middle| Y(t) = y \right\} \\ &= \bar{P}(t, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s)Y(s) ds \right) \middle| Y(t) = y \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde, levando em conta (2.18),  $\bar{P}(t, T)$  é dado por:

$$\bar{P}(t, T) = e^{-\mathbb{E}\{h(t)\}} = \exp \left( -r_t B^*(t, T) - \int_t^T \alpha(s)\theta(s)B^*(s, T) ds \right) \quad (2.44)$$

Falta ainda determinar:

$$I(t, y; T) := \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s)Y(s) ds \right) \middle| Y(t) = y \right\}$$

onde  $Y(t)$  segue (2.42). Aplicando o Teorema de Feynman-Kac (C.13), temos que  $I(t, y; T)$

é solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} - y\xi(t)I = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 \sigma(t)^2}{\xi(t)^2} \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \\ I(T, y; T) = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.45)$$

Agora vamos aproximar a solução do problema de Cauchy acima, utilizando o Método de Perturbação Regular. Assim, supomos a solução  $I(t, y; T)$  da forma:

$$I(t, y; T) \sim \sum_{n=0}^N \varepsilon^n I^{(n)}(t, y; T), \quad \varepsilon \downarrow 0 \quad (2.46)$$

onde  $N$  é um inteiro positivo. Observe que não estamos supondo que o somatório converja para  $N \rightarrow \infty$ . Substituindo (2.46) em (2.45), obtemos os seguintes sub-problemas envolvendo apenas EDO's:

$$\mathcal{O}(1) : \begin{cases} I_t^{(0)} - y\xi(t)I^{(0)} = 0, \quad \text{em } [0, T) \times \mathbb{R} \\ I^{(0)}(T, y; T) = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.47)$$

e para  $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$ :

$$\mathcal{O}(\varepsilon^{2n}) : \begin{cases} I_t^{(2n)} - y\xi(t)I^{(2n)} = f^{(2n-2)}, \quad \text{em } [0, T) \times \mathbb{R} \\ I^{(2n)}(T, y; T) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.48)$$

onde:

$$f^{(2n-2)}(t, y; T) := -\frac{1}{2} \frac{\sigma(t)^2}{\xi(t)^2} I_{yy}^{(2n-2)} \quad (2.49)$$

Os sub-problemas de ordem ímpar possuem soluções identicamente nulas.

A solução do termo dominante (2.47) da expansão (2.46) é dada por:

$$I^{(0)}(t, y; T) = e^{-yB^*(t, T)} \quad (2.50)$$

e a das correções de ordem superior  $\mathcal{O}(\varepsilon^{2n})$ ,  $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$ , por:

$$I^{(2n)}(t, y; T) = -I^{(0)}(t, y; T) \int_t^T \frac{f^{(2n-2)}(s, y; T)}{I^{(0)}(s, y; T)} ds \quad (2.51)$$

Desta forma, uma aproximação perturbativa para o preço de um *Zero-coupon bond*

de maturidade  $T$ , considerando correções de até ordem  $N$ , é dado por:

$$P(t, T) \sim \bar{P}(t, T) \left( \sum_{n=0}^{N/2} \varepsilon^{2n} I^{(2n)}(t, 0; T) \right), \quad \varepsilon \downarrow 0 \quad (2.52)$$

A aproximação de interesse é quando  $y = 0$ , pois no tempo corrente  $t$ ,  $r(t) = \bar{r}(t)$ . Além disto, podemos considerar, s.p.g.,  $\varepsilon = 1$  na aproximação (2.52), desde que não esqueçamos de que, neste caso, precisamos ter  $0 < \sigma(t) \ll 1$ .

### 2.2.3.1 Aproximação Perturbativa para o Modelo de Vasicek

Como exemplo, abaixo apresentamos uma aproximação perturbativa para o Modelo de Vasicek, até a correção de quarta ordem:

$$\begin{aligned} P(t, T) &\approx P^{(4)}(t, T) = \bar{P}(t, T) \left( I^{(0)}(t, 0; T) + I^{(2)}(t, 0; T) + I^{(4)}(t, 0; T) \right) \\ \bar{P}(t, T) &= e^{-r_t B(t, T) + \theta [B(t, T) - (T-t)]} \\ I^{(0)}(t, y; T) &= e^{-y B(t, T)} \\ I^{(2)}(t, y; T) &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} I^{(0)}(t, y; T) \left( (T-t) - 2B(t, T) + \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \right) \\ I^{(4)}(t, y; T) &= -I^{(0)}(t, y; T) \int_t^T \frac{f^{(2)}(s, y; T)}{I^{(0)}(s, y; T)} ds \end{aligned} \quad (2.53)$$

É importante salientar que esta aproximação só vale para  $\sigma$  pequeno. Observe também que:

$$I^{(0)}(t, 0; T) \equiv 1$$

Nas Figuras 7 a 12 apresentamos gráficos onde podemos avaliar a precisão da aproximação perturbativa obtida em relação à solução exata fornecida pelo modelo de Vasicek (2.13), considerando os parâmetros  $\alpha = 1$ ,  $\theta = 10\%$ ,  $\sigma = 1\%$  e  $r(0) = 2\%$ . Nas Figuras 7 a 9 analisamos a aproximação da curva de descontos inicial, constando dos preços de *Zero-coupon bonds*  $P(0, T)$  para as maturidades  $T \in [0, 30]$ , enquanto que, nas Figuras 10 a 12, tratamos da aproximação do preço de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T = 30$ ,  $P(t, 30)$ , no intervalo  $t \in [0, 30]$ .

Analisando caso a caso, na Figura 7 podemos perceber que a aproximação perturbativa reproduz fielmente a curva de descontos inicial. Na Figura 8 apresentamos o erro absoluto das aproximações de ordem  $n = 0, 2, 4$ ,  $E(0, T) := |P^{(n)}(0, T) - P(0, T)|$ , onde observamos que, na medida em que acrescentamos correções, o erro absoluto diminui uniformemente. Já na Figura 9 verificamos a magnitude das correções. Nas Figuras 10 a 12 apresentamos



os mesmos resultados, mas agora para  $P(t, 30)$ .

Na Figura 13 podemos confirmar a ordem dos erros da expansão. Para a aproximação de ordem dominante  $\mathcal{O}(1)$  temos que a inclinação da reta é igual a 2 (ou seja,  $E(0, T) \propto \sigma^2$ ), o que confirma o esperado. Para a aproximação considerando até a correção de  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , novamente confirmamos que  $E(0, T) \propto \sigma^4$ . Já para a aproximação de  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ , temos que  $E(0, T) \propto \sigma^6$ .

Na Figura 14 apresentamos a superfície do erro absoluto de  $P^{(4)}(t, T)$ , para  $T \in [0, 30]$  e  $\sigma \in [0, 0.1]$ , onde podemos verificar que, na medida em que a maturidade  $T$  e a volatilidade  $\sigma$  aumentam, o erro também aumenta, chegando a um máximo da ordem de  $10^{-5}$ . Na Figura 15 trocamos a volatilidade do gráfico anterior pelo parâmetro  $\alpha$ , onde verificamos que o erro aumenta quando  $\alpha$  se aproxima de zero e quando  $T$  aumenta, chegando à ordem de  $10^{-4}$ . Nas Figuras 16 e 17 também podemos ver que o erro aumenta quando  $\theta$  e  $r(0)$  se aproximam de zero e quando  $T$  aumenta, mas neste caso ele não chega a ser significativo, pois o pior caso é da ordem de  $10^{-10}$ .

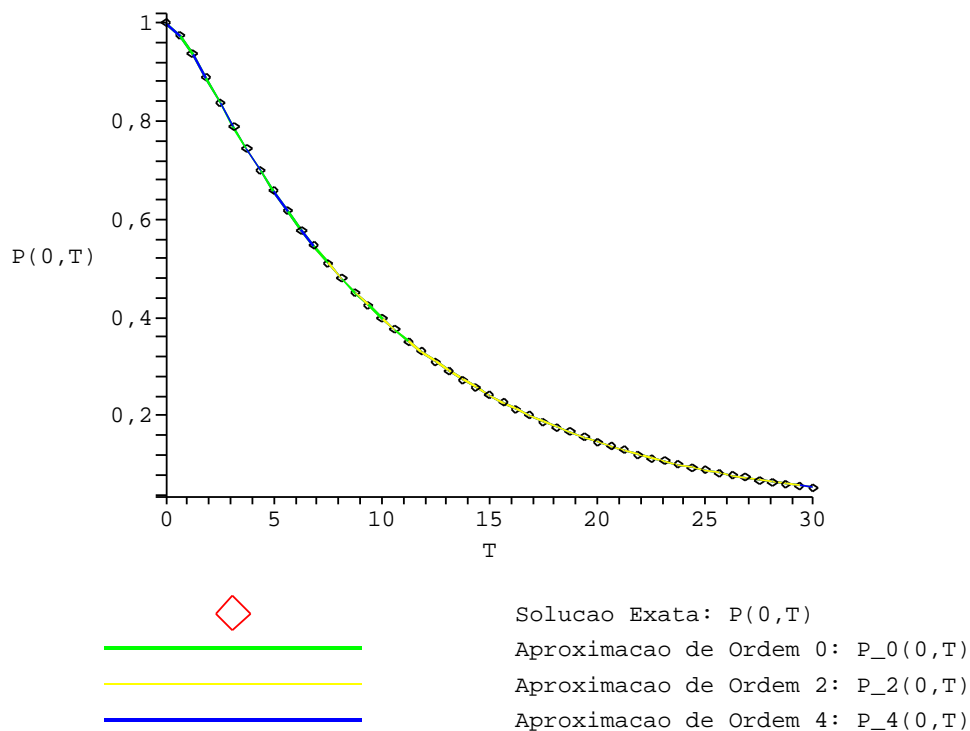


Figura 7: Aproximação perturbativa da ETTJ inicial -  $P(0, T)$

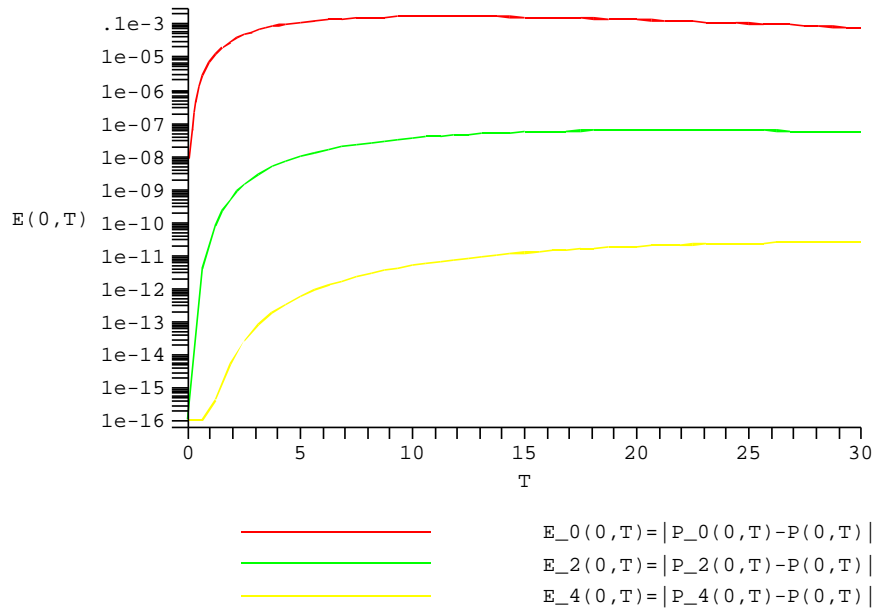


Figura 8: Erro absoluto da aproximação perturbativa de  $P(0, T)$

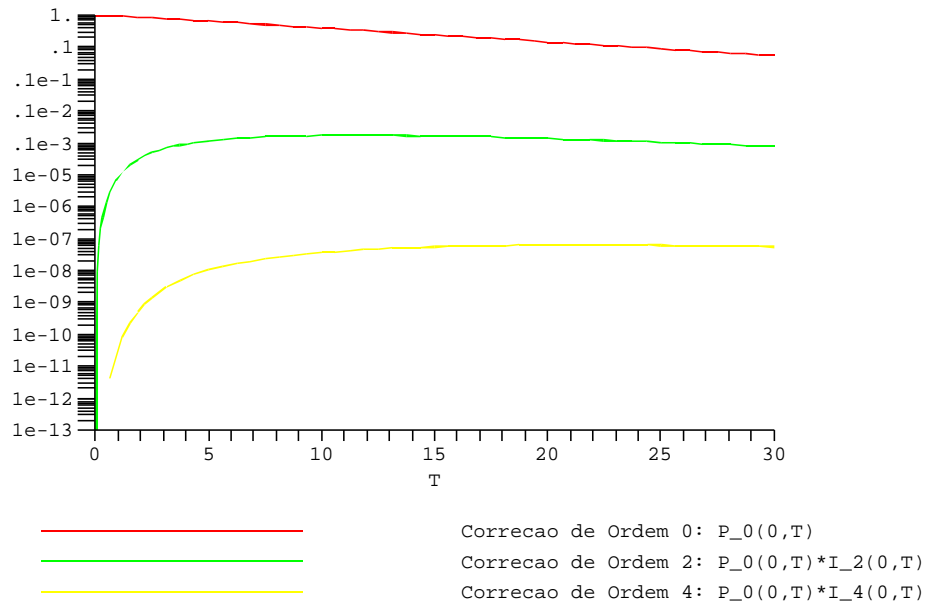


Figura 9: Magnitude das correções da aproximação perturbativa de  $P(0, T)$

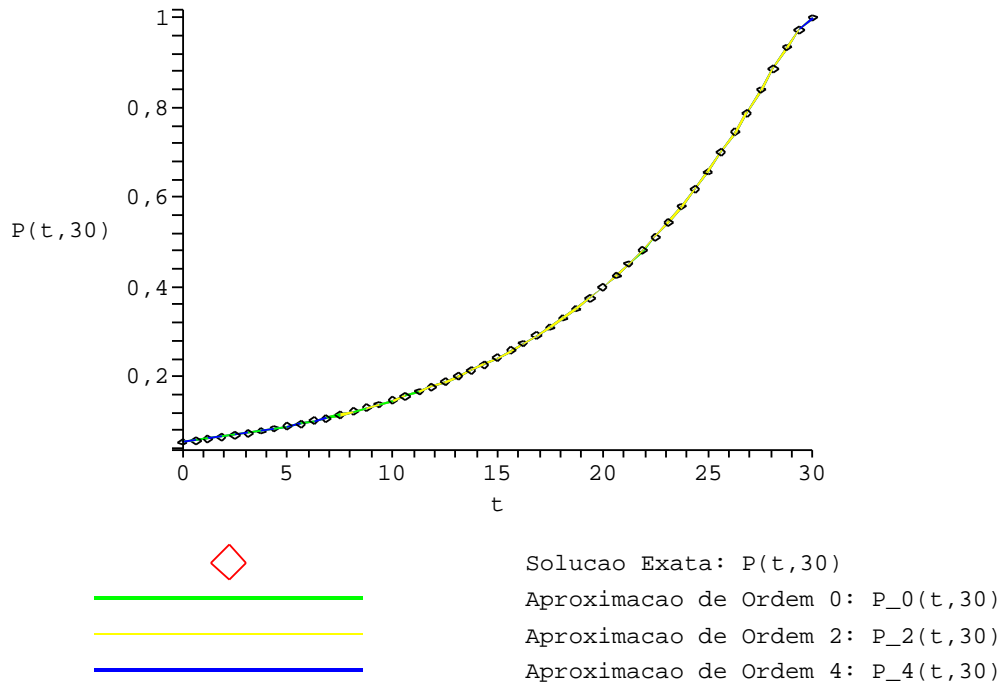


Figura 10: Aproximação perturbativa de  $P(t, 30)$

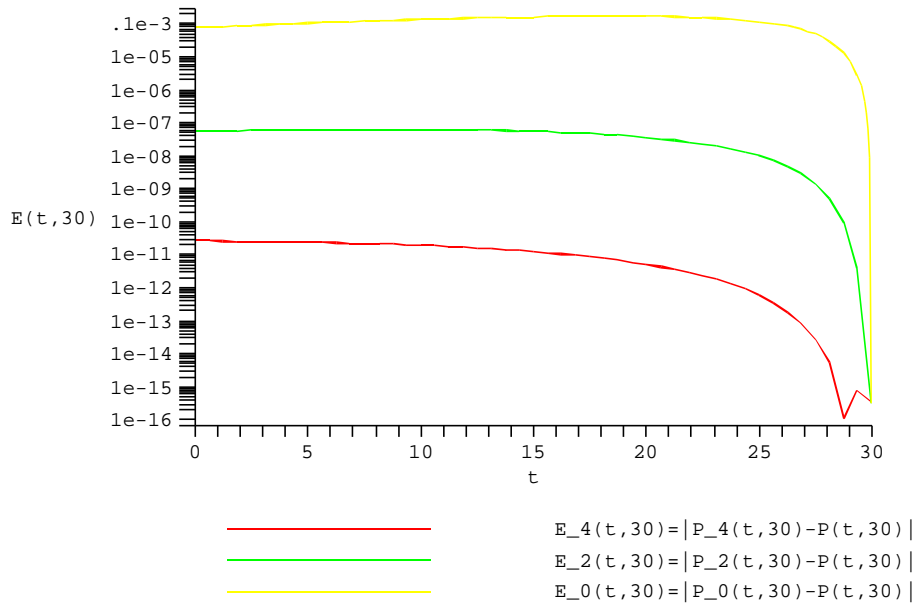


Figura 11: Erro absoluto da aproximação perturbativa de  $P(t, 30)$

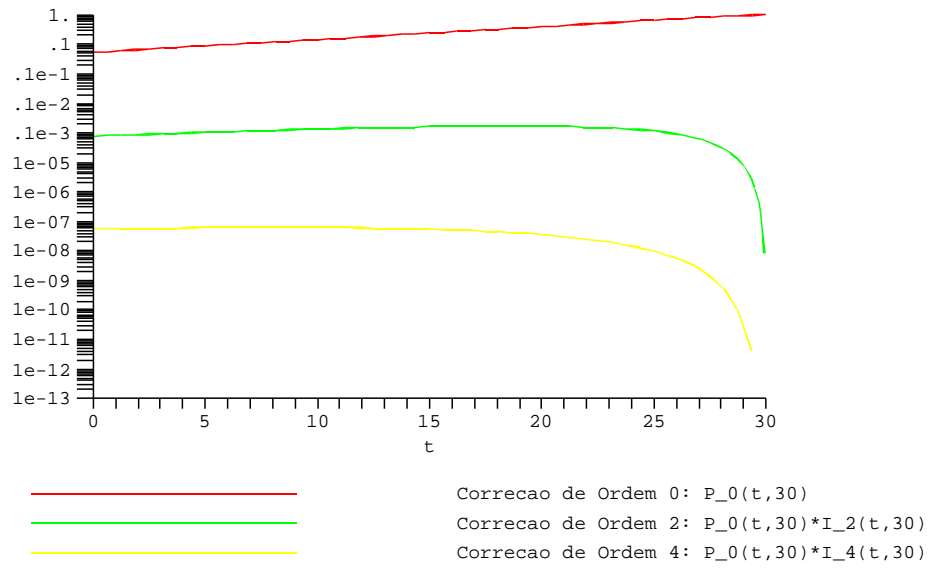


Figura 12: Magnitude das correções da aproximação perturbativa de  $P(t, 30)$

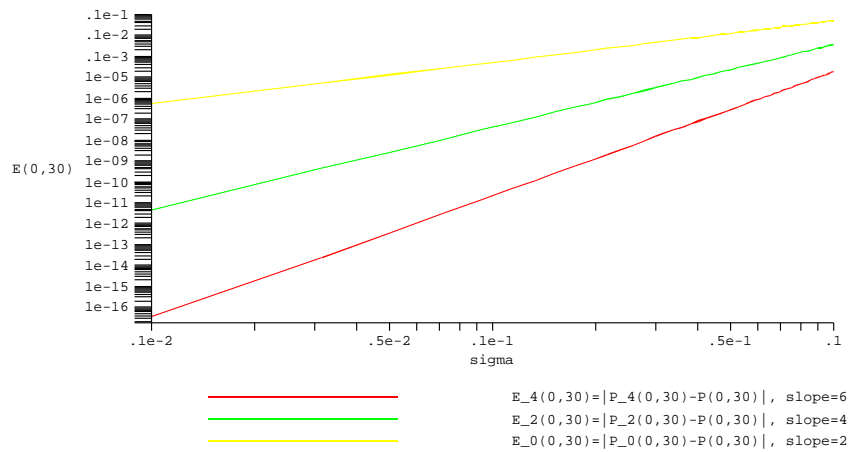


Figura 13: Erro absoluto *versus*  $\sigma$

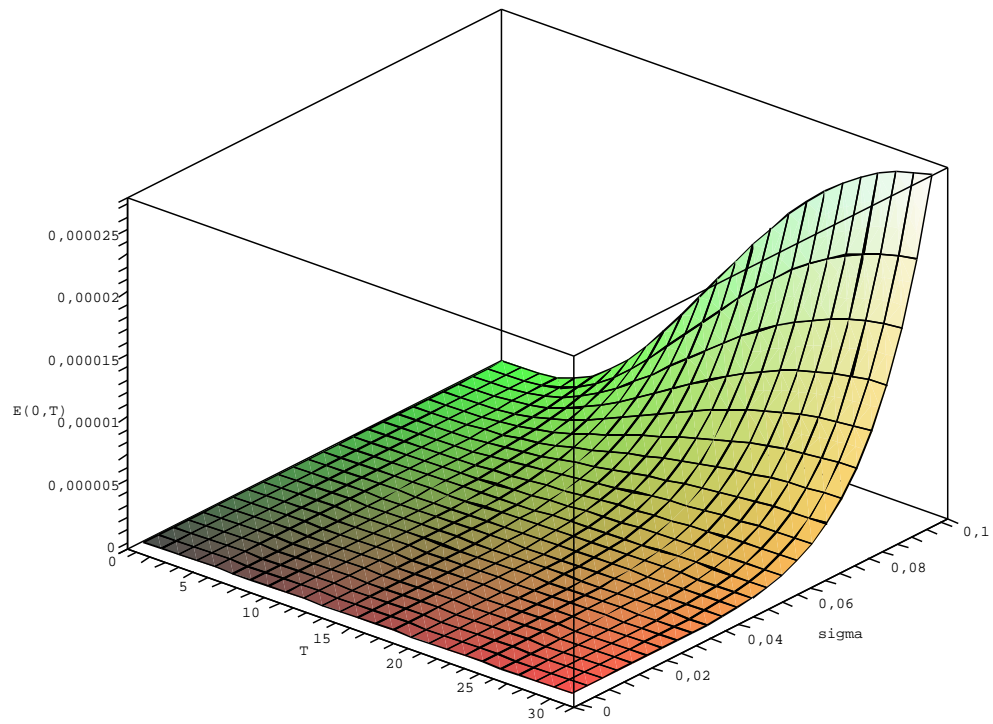


Figura 14: Erro absoluto *versus*  $\sigma$  e  $T$

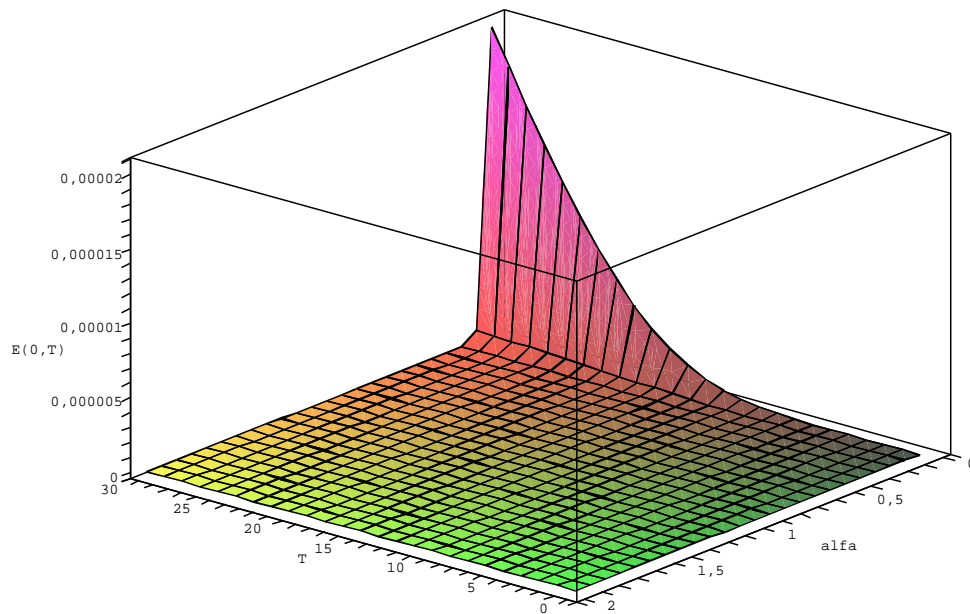


Figura 15: Erro absoluto *versus*  $\alpha$  e  $T$  ( $r(0) = 2\%$ ,  $\theta = 10\%$ )

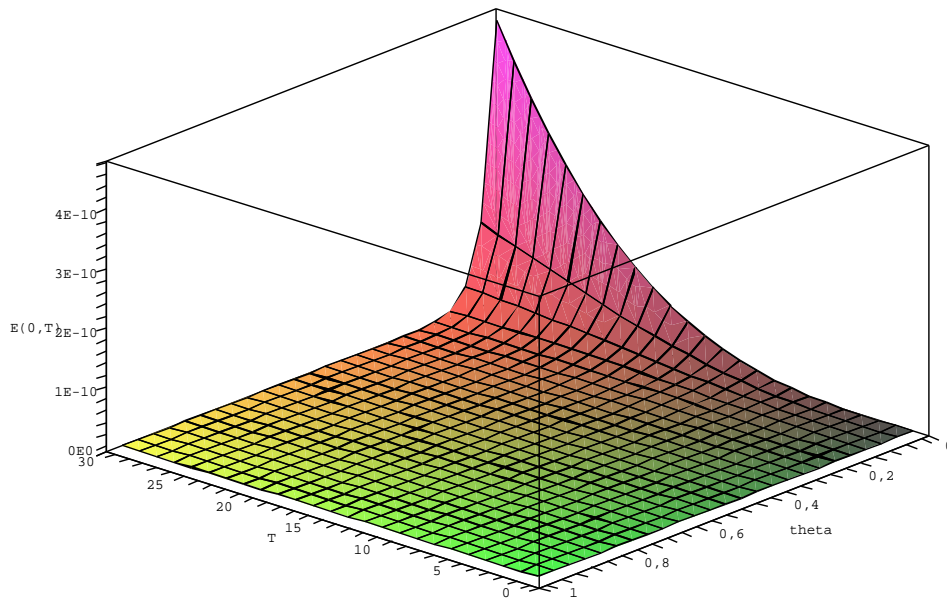


Figura 16: Erro absoluto *versus*  $\theta$  e  $T$  ( $r(0) = 2\%$ ,  $\alpha = 1$ )

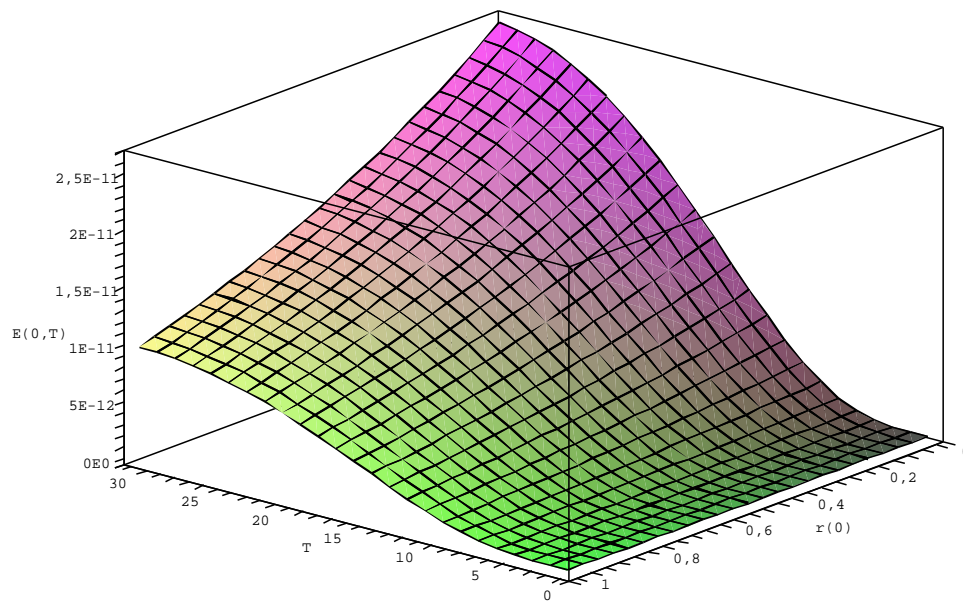


Figura 17: Erro absoluto *versus*  $r(0)$  e  $T$  ( $\theta = 10\%$ ,  $\alpha = 1$ )

## 3 *Modelo de Hull-White com Volatilidade Estocástica*

Neste capítulo vamos considerar o Modelo de Hull-White tratado no capítulo anterior, mas com uma diferença: agora consideraremos um modelo de dois fatores, no qual, além da taxa de juro de curto prazo, a sua volatilidade também é estocástica. O nosso objetivo é encontrar aproximações perturbativas para a ETTJ e verificar qual é o impacto de se considerar uma volatilidade incerta no preço e no *yield* de *Zero-coupon bonds*.

Uma das principais motivações para o estudo de modelos de dois fatores para a ETTJ se encontra na seguinte limitação dos modelos de um fator: eles implicam em uma perfeita correlação entre os retornos dos títulos de todas as maturidades, o que não é observado empiricamente. Além disto, ao considerarmos que a volatilidade é regida por este segundo fator, o modelo está levando em consideração os níveis correntes das duas principais variáveis que explicam os movimentos da ETTJ, que são a taxa de juros de curto prazo e a sua volatilidade (Longstaff & Schwartz, 1992). Finalmente, modelos de dois fatores podem facilitar a calibragem à ETTJ iniciais pouco usuais, e também não implicam, no geral, que o modelo seja afim (Cotton *et al.*, 2004).

### 3.1 Modelo A

Inicialmente vamos considerar o seguinte modelo de dois fatores, onde a volatilidade segue um movimento Browniano geométrico com o *drift* nulo:

$$\begin{cases} dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \sigma_t dW_t^1 \\ d\sigma_t = \beta\sigma_t(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2) \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Observe que, se  $\rho = 1$  ou  $\rho = -1$ , a taxa de juro de curto prazo  $r_t$  e a sua volatilidade  $\sigma_t$  são perfeitamente correlacionados, enquanto que, se  $\rho = 0$ ,  $r_t$  e  $\sigma_t$  não apresentam nenhuma

correlação, pois  $(W_t^1)$  e  $(W_t^2)$  são dois movimentos Brownianos independentes. Para  $|\rho| < 1$ , podemos ter graus variados de correlação entre  $r_t$  e  $\sigma_t$ . Tipicamente esperamos que, quando  $\rho > 0$ , a volatilidade aumenta, o que tende a diminuir o preço dos títulos, aumentando o seu *yield* (Cotton *et al.*, 2004), acontecendo o contrário para  $\rho < 0$ .

### 3.1.1 Obtendo uma Aproximação Perturbativa

Com o objetivo de obter uma aproximação perturbativa para a ETTJ implicada por (3.1), vamos considerar volatilidades pequenas. Assim, introduzindo  $0 < \varepsilon \ll 1$ , reescrevemos (3.1) como:

$$\begin{cases} dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \varepsilon\sigma_t dW_t^1 \\ d\sigma_t = \varepsilon\beta\sigma_t(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2) \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

A partir de agora vamos considerar o caso em que  $r(t)$  e  $\sigma(t)$  não são correlacionados, isto é,  $\rho = 0$ . Assim, o problema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \varepsilon\sigma_t dW_t^1 \\ d\sigma_t = \varepsilon\beta\sigma_t dW_t^2 \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Neste caso podemos utilizar o mesmo argumento da Seção 2.5 para simplificar o problema. Então, definindo a nova variável de estado  $Y(t)$  por:

$$r(t) = \bar{r}(t) + \xi(t)Y(t)$$

transformamos (3.3) em:

$$\begin{cases} dY(t) = \varepsilon \frac{\sigma(t)}{\xi(t)} dW_t^1 \\ d\sigma_t = \varepsilon\beta\sigma_t dW_t^2 \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$



O preço de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$ ,  $\hat{P}(t, T)$ , é dado por (B.14):

$$\begin{aligned}
\hat{P}(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s, \sigma_s) ds \right) \middle| r(t) = r_t, \sigma(t) = \sigma \right\} \\
&= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T [\bar{r}(s) + \xi(s)Y(s, \sigma_s)] ds \right) \middle| Y(t) = y, \sigma(t) = \sigma \right\} \\
&= e^{-\int_t^T \bar{r}(s) ds} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s)Y(s, \sigma_s) ds \right) \middle| Y(t) = y, \sigma(t) = \sigma \right\} \\
&= \bar{P}(t, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s)Y(s, \sigma_s) ds \right) \middle| Y(t) = y, \sigma(t) = \sigma \right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde, por (2.44):

$$\bar{P}(t, T) = \exp \left( -r_t B^*(t, T) - \int_t^T \alpha(s) \theta(s) B^*(s, T) ds \right) \tag{3.6}$$

Ainda precisamos calcular:

$$\hat{I}(t, y, \sigma; T) := \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s, \sigma_s) Y(s) ds \right) \middle| Y(t) = y, \sigma(t) = \sigma \right\}$$

considerando (3.4). Aplicando o Teorema de Feynman-Kac (C.18), temos que  $\hat{I}(t, y, \sigma; T)$  é solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} - y \xi(t) \hat{I} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{\xi(t)^2} \frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \beta^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial \sigma^2} \\ \hat{I}(T, y, \sigma; T) = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{3.7}$$

Agora vamos encontrar uma solução aproximada para  $\hat{I}(t, y, \sigma; T)$ . Suponha:

$$\hat{I}(t, y, \sigma; T) \sim \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \hat{I}^{(n)}(t, y, \sigma; T), \quad \varepsilon \downarrow 0 \tag{3.8}$$

onde  $N$  é um inteiro positivo. Substituindo (3.8) em (3.7), obtemos os seguintes sub-problemas:

$$\mathcal{O}(1) : \begin{cases} \hat{I}_t^{(0)} - y \xi(t) \hat{I}^{(0)} = 0, \quad em [0, T) \times \mathbb{R} \\ \hat{I}^{(0)}(T, y, \sigma; T) = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{3.9}$$

e para  $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$ :

$$\mathcal{O}(\varepsilon^{2n}) : \begin{cases} \hat{I}_t^{(2n)} - y\xi(t)\hat{I}^{(2n)} = \hat{f}^{(2n-2)}, & \text{em } [0, T) \times \mathbb{R} \\ \hat{I}^{(0)}(T, y, \sigma; T) = 0, & \forall y \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.10)$$

onde:

$$\hat{f}^{(2n-2)}(t, y, \sigma; T) := -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\xi(t)^2} \frac{\partial^2 \hat{I}^{(2n-2)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \beta^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \hat{I}^{(2n-2)}}{\partial \sigma^2} \quad (3.11)$$

Os sub-problemas de ordem ímpar possuem soluções identicamente nulas. Observe que o que diferencia  $\hat{f}(\cdot)$  (3.11) de  $f(\cdot)$  (2.49), é o segundo termo adicional, envolvendo  $\beta$ , parâmetro relacionado à EDE que rege a volatilidade estocástica, e uma derivada parcial de segunda ordem em relação à volatilidade,  $\sigma$ . Se considerarmos  $\beta = 0$ , recuperamos a aproximação perturbativa para o Modelo de Hull-White com volatilidade determinística (2.46)-(2.49).

A solução do termo dominante (3.9) da expansão (3.8) confere com a do Modelo de HW com volatilidade determinística (2.50):

$$\hat{I}^{(0)}(t, y; T) = I^{(0)}(t, y; T) = e^{-yB^*(t, T)} \quad (3.12)$$

As correções de ordem superior  $\mathcal{O}(\varepsilon^{2n})$ ,  $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$ , são dadas por:

$$\hat{I}^{(2n)}(t, y, \alpha; T) = -I^{(0)}(t, y; T) \int_t^T \frac{\hat{f}^{(2n-2)}(s, y, \sigma; T)}{I^{(0)}(s, y; T)} ds \quad (3.13)$$

Para a correção de segunda ordem, temos que:

$$\hat{f}^{(0)}(t, y, \sigma; T) = f^{(0)}(t, y; T) = -\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\xi(t)^2} \frac{\partial^2 I^{(0)}}{\partial y^2}$$

pois  $\frac{\partial^2 I^{(0)}}{\partial y \partial \sigma} = \frac{\partial^2 I^{(0)}}{\partial \sigma^2} = 0$ . Isto implica que:

$$\hat{I}^{(2)}(t, y, \sigma; T) = I^{(2)}(t, y, \sigma; T) \quad (3.14)$$

onde consideramos  $Y(t) = y$  e  $\sigma(t) = \sigma$ , no tempo corrente  $t$ . Novamente percebemos que esta correção é igual à do modelo com volatilidade determinística.

A volatilidade estocástica começa a influenciar a ETTJ apenas da correção de quarta ordem em diante.

Assim, a aproximação perturbativa para o preço do *Zero-coupon bond* é dada por:

$$\hat{P}(t, T) \sim \bar{P}(t, T) \left( I^{(0)}(t, 0; T) + \varepsilon^2 I^{(2)}(t, 0, \sigma; T) + \sum_{n=2}^{N/2} \varepsilon^{2n} \hat{I}^{(2n)}(t, 0, \sigma; T) \right), \quad \varepsilon \downarrow 0 \quad (3.15)$$

Novamente, aqui a aproximação de interesse é quando  $y = 0$ , pois no tempo corrente  $t$ ,  $r(t) = \bar{r}(t)$ . Além disto, podemos considerar, s.p.g.,  $\varepsilon = 1$  na aproximação (3.15), desde que  $0 < \sigma, \beta \ll 1$ .

### 3.1.2 Modelo de Vasicek com Volatilidade Estocástica

Como caso particular, nesta seção vamos considerar o Modelo de Vasicek (parâmetros constantes) com volatilidade estocástica. Abaixo apresentamos a aproximação perturbativa de quarta ordem para este caso:

$$\begin{aligned} \hat{P}(t, T) &\approx \hat{P}^{(4)}(t, T) = \bar{P}(t, T) \left( I^{(0)}(t, 0; T) + I^{(2)}(t, 0, \sigma; T) + \hat{I}^{(4)}(t, 0, \sigma; T) \right) \\ \bar{P}(t, T) &= e^{-r_t B(t, T) + \theta [B(t, T) - (T-t)]} \\ I^{(0)}(t, y; T) &= e^{-yB(t, T)} \\ I^{(2)}(t, y, \sigma; T) &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} I^{(0)}(t, y; T) \left( (T-t) - 2B(t, T) + \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \right) \\ \hat{I}^{(4)}(t, y, \sigma; T) &= -I^{(0)}(t, y; T) \int_t^T \frac{\hat{f}^{(2)}(s, y, \sigma; T)}{I^{(0)}(s, y; T)} ds \end{aligned} \quad (3.16)$$

É importante salientar que, neste caso, esta aproximação só vale para  $\sigma$  e  $\beta$  pequenos. Observe também que:

$$I^{(0)}(t, 0; T) \equiv 1$$

A seguir apresentamos alguns gráficos ilustrando os resultados obtidos. Neste caso, como não temos a solução exata, calculamos uma correção adicional para analisar a magnitude das correções:

$$\hat{I}^{(6)}(t, y, \sigma; T) = -I^{(0)}(t, y; T) \int_t^T \frac{\hat{f}^{(4)}(s, y, \sigma; T)}{I^{(0)}(s, y; T)} ds$$

Das Figuras 18 a 23, consideramos os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ \theta &= 10\% \\ \sigma_0 &= 10\% \\ r_0 &= 2\% \\ \beta &= 0.2\end{aligned}$$

Na Figura 18 podemos verificar que a ETTJ inicial gerada pelo modelo com volatilidade estocástica é maior do que a gerada pelo modelo com volatilidade constante, considerando a aproximação perturbativa até a correção de quarta ordem em ambos os casos. Na Figura 19 constatamos que a magnitude das correções até  $\mathcal{O}(\varepsilon^6)$  do modelo com volatilidade estocástica é decrescente em relação à ordem. Na Figura 20, podemos confirmar que o *yield curve* do modelo com volatilidade estocástica é de menor magnitude do que o com volatilidade determinística, o que é parecido, qualitativamente, com os resultados obtidos por Cotton *et al.* (2004) para o caso em que o processo estocástico seguido pela volatilidade é um processo de O-U com rápida reversão à média. Observe que, no nosso caso, ao considerarmos apenas o termo difusivo na EDE regendo a volatilidade, o efeito desta no *yield* é mais intenso quanto maior é a maturidade  $T$ . Nas Figuras 21, 22 e 23 podemos verificar os mesmos resultados para um *Zero-coupon bond* com maturidade  $T = 30$ .

Nas Figuras 24, 25 e 26 podemos ver várias formas de *yield curves* considerando  $r_0 = 9.5\%$  ( $< \theta$ ),  $r_0 = 10\%$  ( $= \theta$ ) e  $r_0 = 10.5\%$  ( $> \theta$ ), respectivamente.

Na Figura 27 consideramos a magnitude das correções até sexta ordem, em função do parâmetro  $\beta$ , para um *Zero-coupon bond* com maturidade  $T = 30$ , em  $t = 0$ , e com os outros parâmetros iguais aos dos gráficos anteriores. Neste gráfico observamos que até  $\beta \approx 0.26$  a magnitude das correções é decrescente como função da correção, e para  $\beta > 0.26$ , o comportamento é invertido, com a magnitude aumentando com a ordem da correção, o que confirma a validade da aproximação perturbativa apenas para valores pequenos de  $\beta$ .

Embora não seja matematicamente válido, se tivéssemos considerado a mesma simplificação e os mesmos cálculos acima, considerando o índice de correlação  $\rho \neq 0$ , o modelo ainda reproduziria o efeito, constatado empiricamente, de que para  $\rho > 0$  o preço do *Zero-coupon bond* cairia, em relação à  $\rho = 0$ , e para  $\rho < 0$  o preço subiria, conforme podemos constatar na Figura 28.

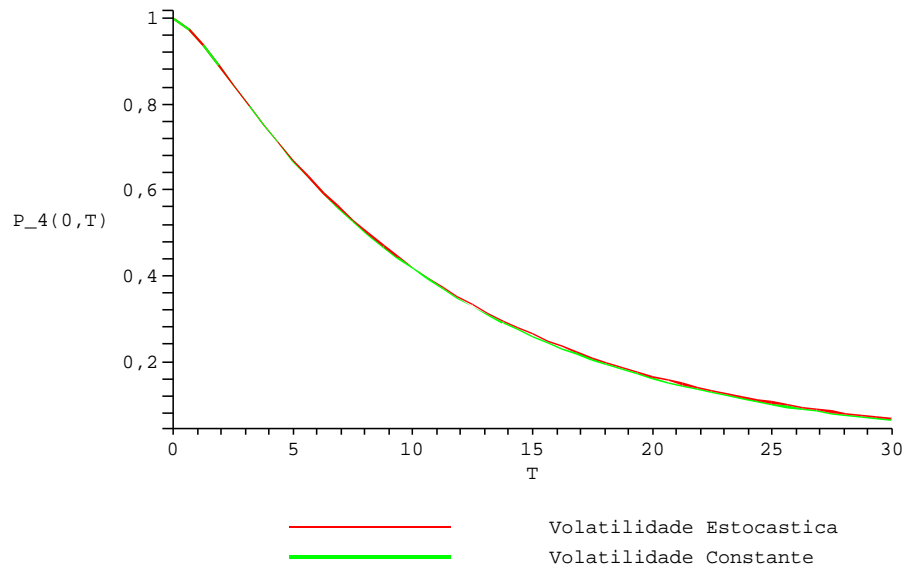


Figura 18: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{P}(0, T)$

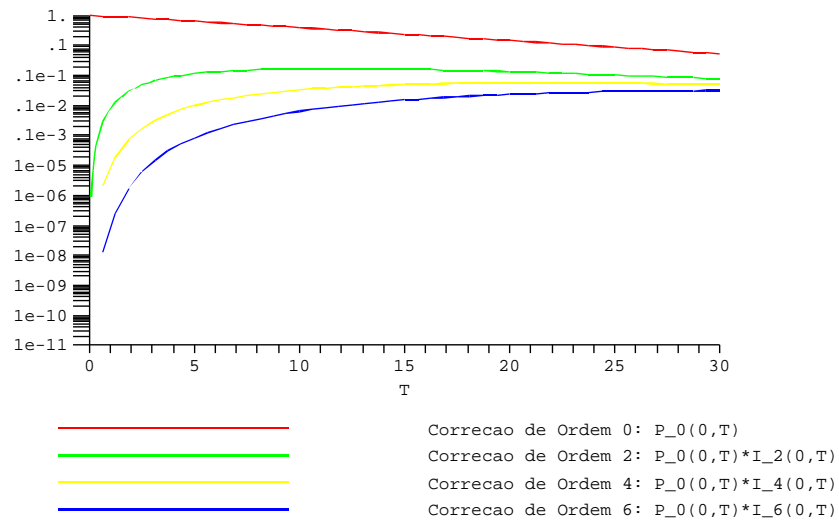


Figura 19: Magnitude das correções da aproximação perturbativa de  $\hat{P}(0, T)$

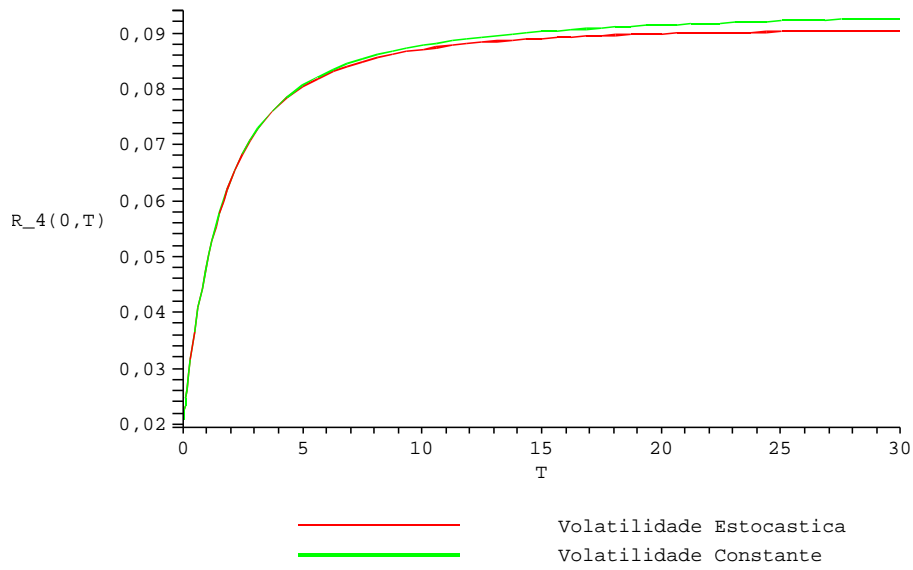


Figura 20: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{R}(0, T)$

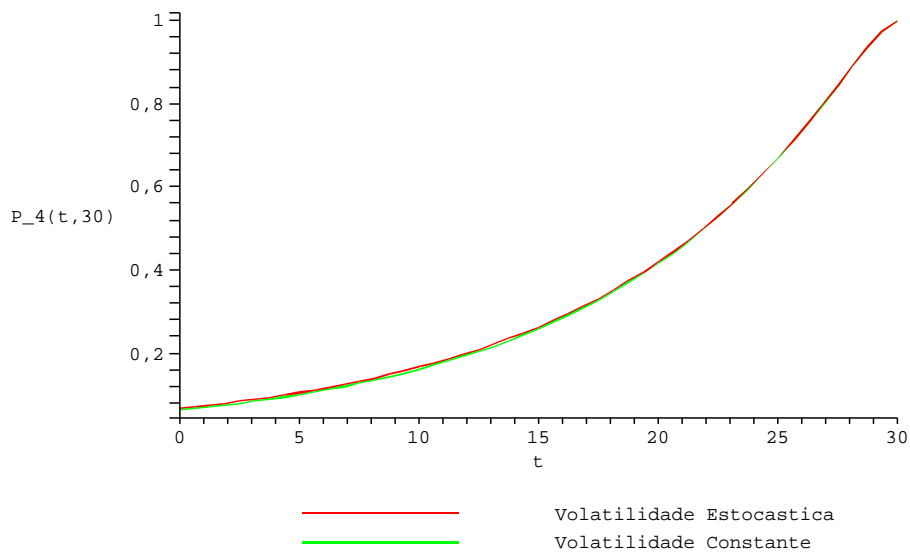


Figura 21: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  de  $\hat{P}(t, 30)$

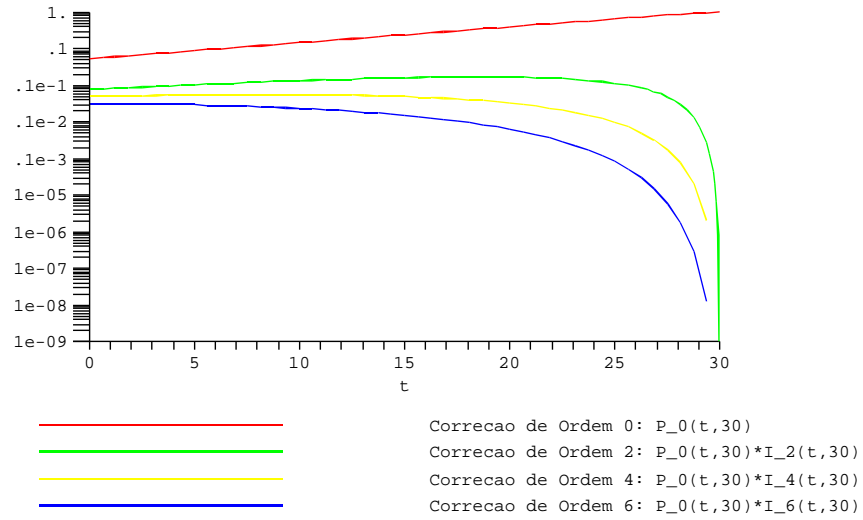


Figura 22: Magnitude das correções da aproximação perturbativa de  $\hat{P}(t, 30)$

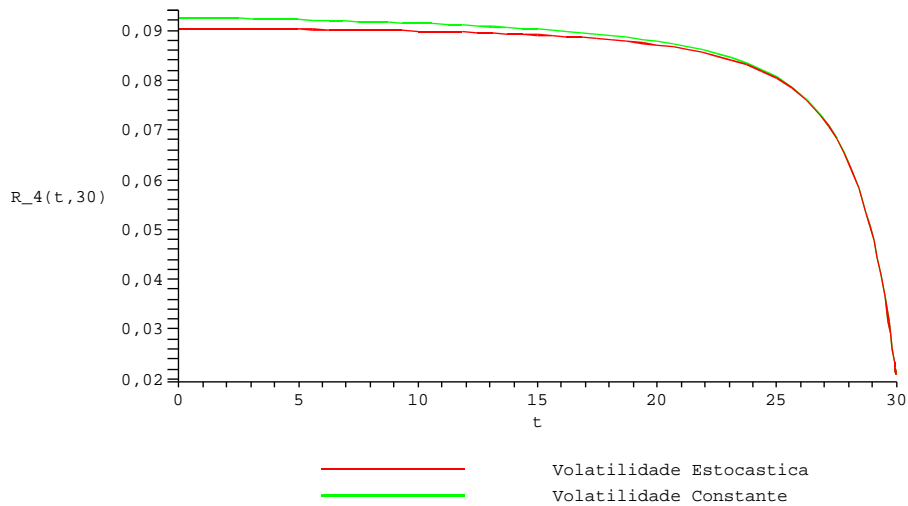


Figura 23: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  de  $\hat{R}(t, 30)$

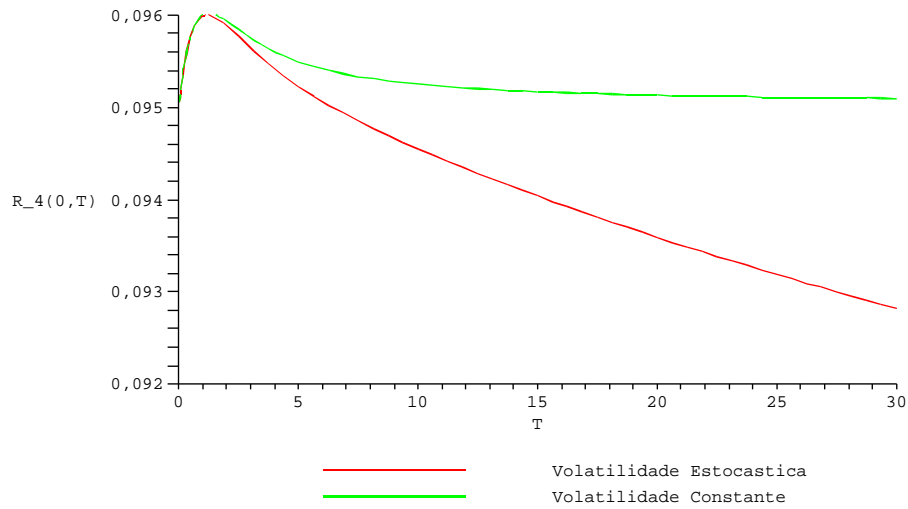


Figura 24: Aproximação até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{R}(0, T)$  ( $r_0 = 9.5\%$ )

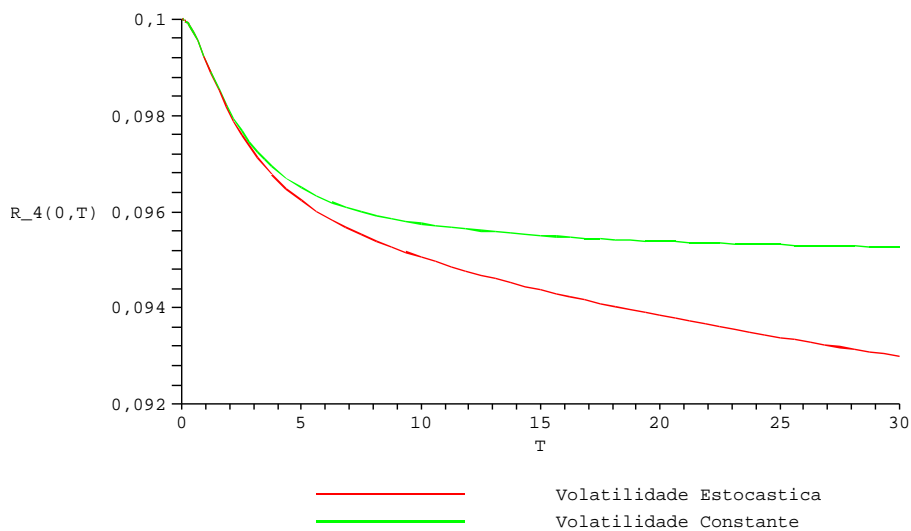


Figura 25: Aproximação até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{R}(0, T)$  ( $r_0 = \theta = 10\%$ )

### 3.1.2.1 Validação da Aproximação Perturbativa via Monte-Carlo

Nesta seção apresentamos algumas evidências parciais para a validação da aproximação perturbativa encontrada na seção anterior. Utilizamos para tanto simulações de Monte Carlo (MC), considerando a técnica de variáveis antitéticas (Hull (1998), Duffie (1996)). Para a simulação numérica da EDE (3.3), considerando os coeficientes constantes e  $\varepsilon = 1$ , utilizamos o Método de Euler-Maruyama (Higham, 2001):



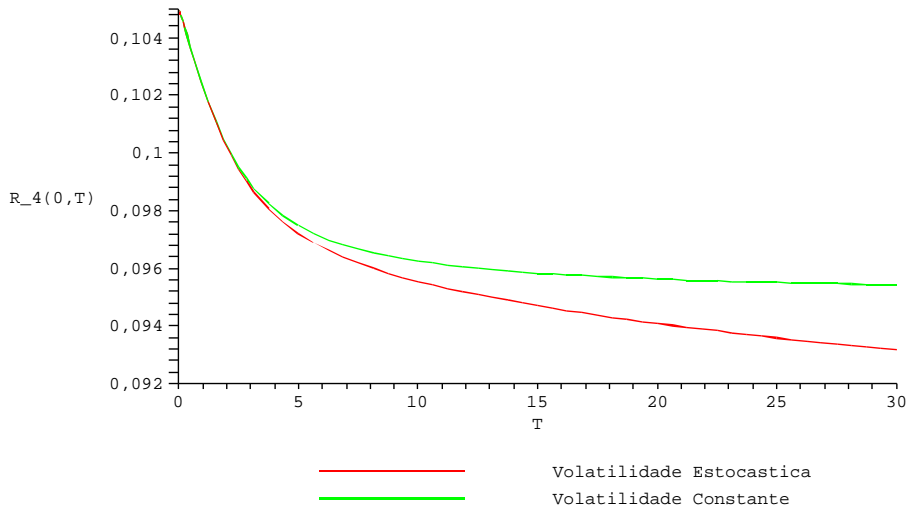


Figura 26: Aproximação até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{R}(0, T)$  ( $r_0 = 10.5\%$ )

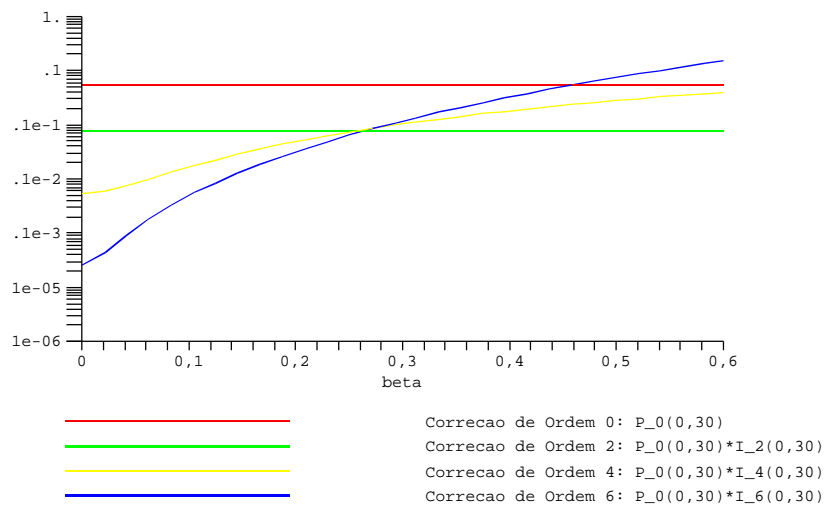


Figura 27: Magnitude das correções da aproximação perturbativa de  $\hat{P}(0, 30)$  versus  $\beta$

$$\begin{cases} r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + \alpha[\theta - r_{t_i}]dt + \sigma_{t_i}\varphi^1\sqrt{dt} \\ \sigma_{t_{i+1}} = \beta\sigma_{t_i}\varphi^2\sqrt{dt} \\ r_{t_0} = r_0, \sigma_{t_0} = \sigma_0 \\ i = 0, 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $\varphi^1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  e  $\varphi^2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  são independentes,  $dt = \frac{T}{N}$ ,  $t_i = idt$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , e  $N$  é um inteiro positivo finito. Realizamos  $M$  realizações deste processo, obtendo a seguinte aproximação para o preço de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$ , em  $t = 0$ ,

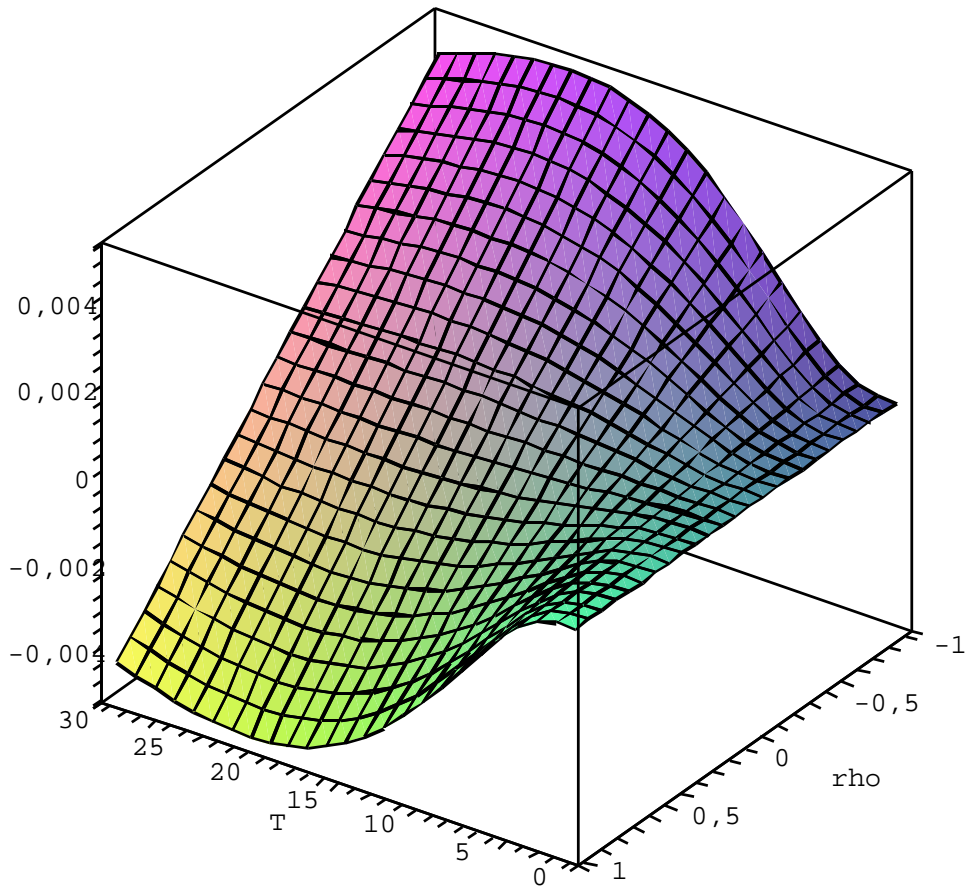


Figura 28: Efeito do índice de correlação  $\rho$  na ETTJ:  $\hat{P}^{(4)}(0, T; \rho) - \hat{P}^{(4)}(0, T; \rho = 0)$

na realização  $j$ :

$$\begin{cases} \hat{P}_{MC}^j(0, T) = e^{-\bar{r}_j T} \\ \bar{r}_j = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N r_{t_i}^j \end{cases} \quad (3.18)$$

E portanto, a aproximação de Monte Carlo para o preço do *Zero-coupon bond* será:

$$\hat{P}_{MC}(0, T) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{P}_{MC}^j(0, T) \quad (3.19)$$

No método de variáveis antitéticas, que é um método de redução de variância que melhora a convergência da aproximação, primeiro calculamos a aproximação acima, chamando o resultado de:

$$\hat{P}_{MC}^1(0, T)$$

e em seguida trocamos os sinais das variáveis aleatórias  $\xi^1$  e  $\xi^2$  e calculamos uma outra

estimativa, a qual chamamos de:

$$\hat{P}_{MC}^2(0, T)$$

Por fim, a aproximação final será dada pela média aritmética:

$$\hat{P}_{MC}(0, T) = \frac{\hat{P}_{MC}^1(0, T) + \hat{P}_{MC}^2(0, T)}{2} \quad (3.20)$$

o que implica que o *yield* aproximado será dado por:

$$\hat{R}_{MC}(0, T) = -\frac{\ln(\hat{P}_{MC}(0, T))}{T} \quad (3.21)$$

Nas Figuras 29, 30 e 31 apresentamos o resultado destas simulações para os pontos  $T = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ , onde verificamos a concordância com os resultados apresentados anteriormente nas Figuras 24, 25 e 26, respectivamente.

Da Tabela 1 a 6 apresentamos os valores numéricos para estas simulação, comparando o preço e o *yield* resultantes da aproximação de MC -  $\hat{P}_{MC}$  e  $\hat{R}_{MC}$  - com os dados pelo Modelo de Vasicek (Volatilidade Constante) -  $P_{VAS}$  e  $R_{VAS}$  - e pelo Método Perturbativo (Volatilidade Estocástica) -  $\hat{P}_{PER}$  e  $\hat{R}_{PER}$ . Podemos verificar, então, que a ordem de grandeza da distância entre  $\hat{P}_{MC}$  ( $\hat{R}_{MC}$ ) e  $\hat{P}_{PER}$  ( $\hat{R}_{PER}$ ) é, em média, uma ordem de grandeza inferior do que a distância entre  $\hat{P}_{PER}$  ( $\hat{R}_{PER}$ ) e  $P_{VAS}$  ( $R_{VAS}$ ).

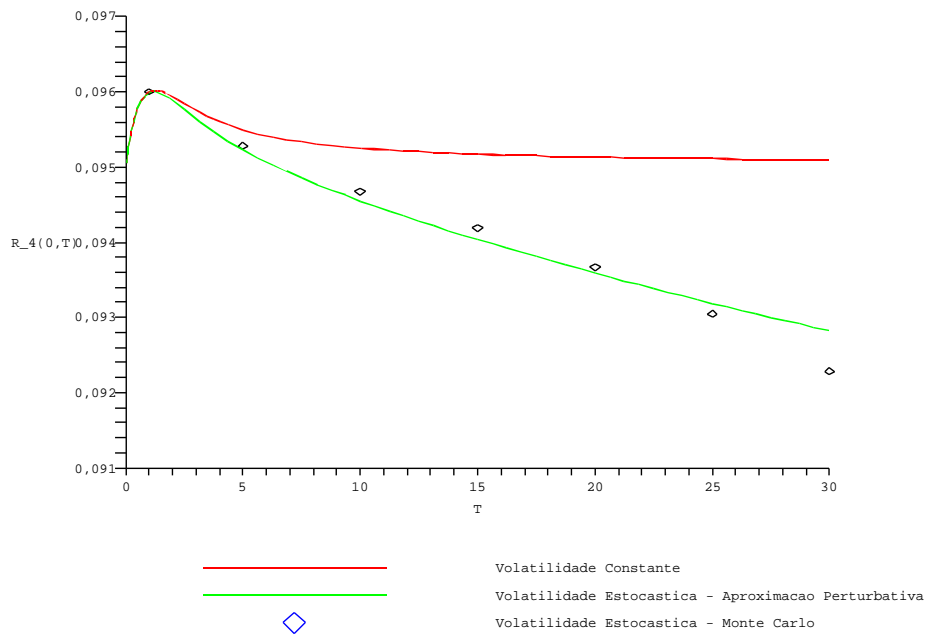


Figura 29: Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC:  $r_0 = 9.5\%$

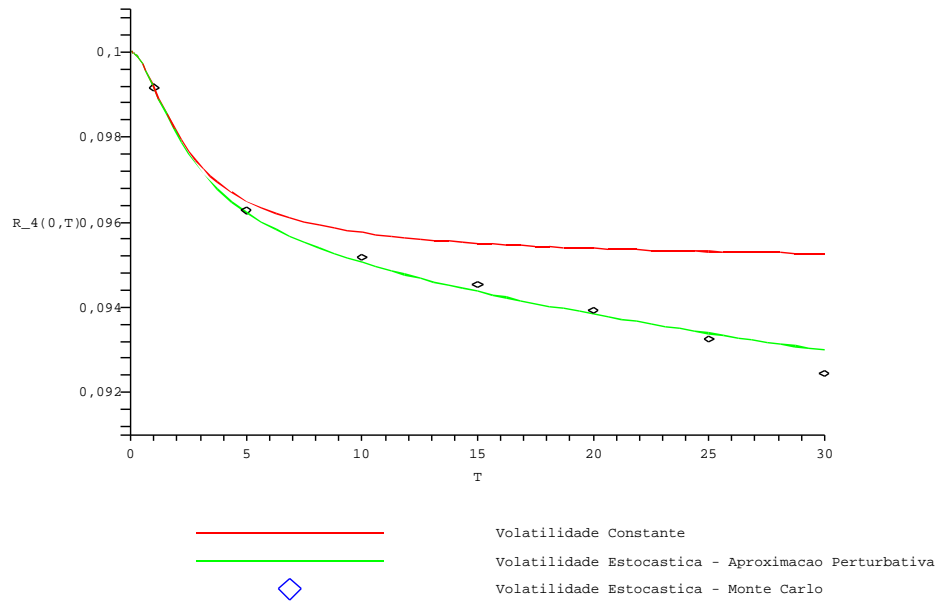


Figura 30: Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC:  
 $r_0 = 10\%$

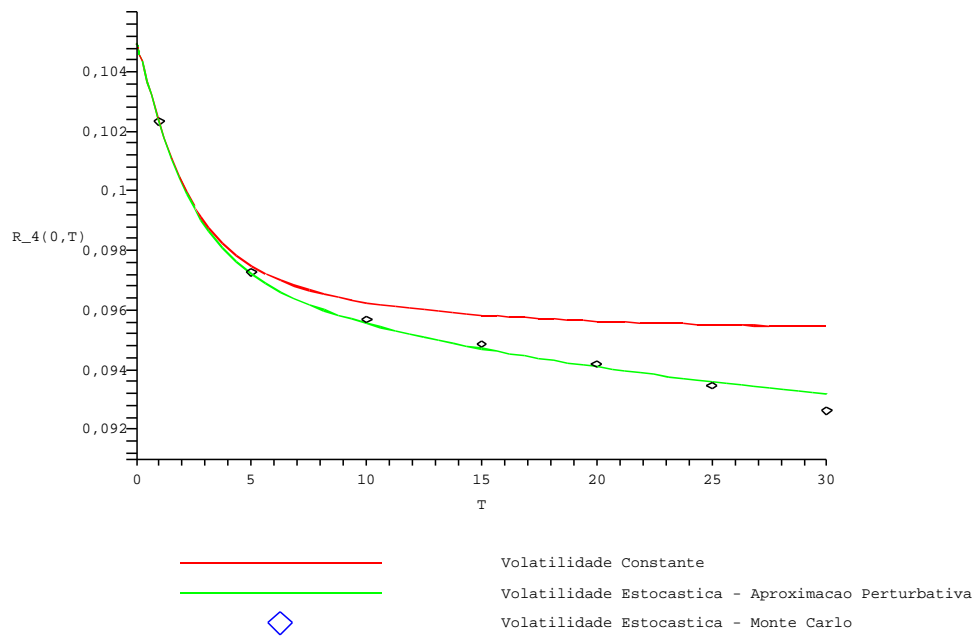


Figura 31: Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC:  
 $r_0 = 10.5\%$

Tabela 1: Comparação entre  $\hat{P}_{MC}$ ,  $\hat{P}_{PER}$  e  $P_{VAS}$  -  $r_0 = 9.5\%$ 

$T$	$P_{VAS}$	$\hat{P}_{PER}$	$\hat{P}_{MC}$	$\hat{P}_{PER} - P_{VAS}$	$\hat{P}_{MC} - \hat{P}_{PER}$
1	0,90846	0,90847	0,90846	9E-06	1E-05
5	0,62035	0,62117	0,62103	8E-04	1E-04
10	0,38578	0,38849	0,38802	3E-03	5E-04
15	0,23991	0,24401	0,24344	4E-03	6E-04
20	0,14920	0,15385	0,15360	5E-03	3E-04
25	0,09278	0,09733	0,09766	5E-03	-3E-04
30	0,05770	0,06175	0,06275	4E-03	-1E-03

Tabela 2: Comparação entre  $\hat{R}_{MC}$ ,  $\hat{R}_{PER}$  e  $R_{VAS}$  -  $r_0 = 9.5\%$ 

$T$	$R_{VAS}$	$\hat{R}_{PER}$	$\hat{R}_{MC}$	$\hat{R}_{PER} - R_{VAS}$	$\hat{R}_{MC} - \hat{R}_{PER}$
1	0,09600	0,09599	0,09600	-1E-05	-1E-05
5	0,09549	0,09523	0,09528	-3E-04	-5E-05
10	0,09525	0,09455	0,09467	-7E-04	-1E-04
15	0,09517	0,09404	0,09419	-1E-03	-2E-04
20	0,09513	0,09359	0,09367	-2E-03	-8E-05
25	0,09510	0,09319	0,09305	-2E-03	1E-04
30	0,09508	0,09282	0,09229	-2E-03	5E-04

## 3.2 Modelo B

### 3.2.1 Obtendo uma Aproximação Perturbativa

Nesta seção vamos considerar que a volatilidade estocástica segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão à média, como tratado por Cotton *et al.* (2004), mas, enquanto ele considerou uma rápida reversão à média para a obtenção de uma aproximação perturbativa e permitiu que a volatilidade estivesse correlacionada com a taxa de juro, nós consideraremos que os parâmetros envolvendo a EDE da volatilidade são pequenos, e que não existe correlação entre  $r(t)$  e  $\sigma(t)$ . Ou seja, considerando  $0 < \varepsilon \ll 1$ , temos que:

$$\begin{cases} dr_t = \alpha(t)[\theta(t) - r_t]dt + \varepsilon\sigma_t dW_t^1 \\ d\sigma_t = \varepsilon\eta(t)[m(t) - \sigma_t]dt + \varepsilon\beta(t)dW_t^2 \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Utilizando o mesmo argumento utilizado para o modelo anterior, vamos definir as novas variáveis de estado  $Y(t)$  e  $Z(t)$  pelas equações:

$$\begin{aligned} r(t) &= \bar{r}(t) + \xi(t)Y(t), \quad \xi(t) = e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} \\ \sigma(t) &= \bar{\sigma}(t) + \hat{\xi}(t)Z(t), \quad \hat{\xi}(t) = e^{-\varepsilon \int_0^t \eta(s)ds} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tabela 3: Comparação entre  $\hat{P}_{MC}$ ,  $\hat{P}_{PER}$  e  $P_{VAS}$  -  $r_0 = 10\%$ 

$T$	$P_{VAS}$	$\hat{P}_{PER}$	$\hat{P}_{MC}$	$\hat{P}_{PER} - P_{VAS}$	$\hat{P}_{MC} - \hat{P}_{PER}$
1	0,90560	0,90561	0,90560	9E-06	1E-05
5	0,61728	0,61810	0,61795	8E-04	1E-04
10	0,38385	0,38655	0,38608	3E-03	5E-04
15	0,23871	0,24279	0,24223	4E-03	6E-04
20	0,14845	0,15308	0,15283	5E-03	2E-04
25	0,09232	0,09684	0,09717	5E-03	-3E-04
30	0,05741	0,06144	0,06244	4E-03	-1E-03

Tabela 4: Comparação entre  $\hat{R}_{MC}$ ,  $\hat{R}_{PER}$  e  $R_{VAS}$  -  $r_0 = 10\%$ 

$T$	$R_{VAS}$	$\hat{R}_{PER}$	$\hat{R}_{MC}$	$\hat{R}_{PER} - R_{VAS}$	$\hat{R}_{MC} - \hat{R}_{PER}$
1	0,09916	0,09915	0,09916	-1E-05	-1E-05
5	0,09649	0,09622	0,09627	-3E-04	-5E-05
10	0,09575	0,09505	0,09517	-7E-04	-1E-04
15	0,09550	0,09437	0,09453	-1E-03	-2E-04
20	0,09538	0,09384	0,09392	-2E-03	-8E-05
25	0,09530	0,09339	0,09325	-2E-03	1E-04
30	0,09525	0,09299	0,09245	-2E-03	5E-04

e assim reescrever (3.22) como:

$$\begin{cases} dY(t) = \varepsilon \frac{\bar{\sigma}(t) + \hat{\xi}(t)Z(t)}{\xi(t)} dW_t^1, & Y(0) = 0 \\ dZ(t) = \varepsilon \frac{\beta(t)}{\hat{\xi}(t)} dW_t^2, & Z(0) = 0 \\ \mathbb{E}\{dW_t^1 dW_t^2\} = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Neste caso, o preço de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$ ,  $\hat{P}(t, T)$ , é dado por (B.14):

$$\begin{aligned} \hat{P}(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T r(s, \sigma_s) ds \right) \middle| r(t) = r_t, \sigma(t) = \sigma \right\} \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T [\bar{r}(s) + \xi(s)Y(s, Z_s)] ds \right) \middle| Y(t) = y, Z(t) = z \right\} \\ &= e^{-\int_t^T \bar{r}(s) ds} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s)Y(s, Z_s) ds \right) \middle| Y(t) = y, Z(t) = z \right\} \\ &= \bar{P}(t, T) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s)Y(s, Z_s) ds \right) \middle| Y(t) = y, Z(t) = z \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Tabela 5: Comparação entre  $\hat{P}_{MC}$ ,  $\hat{P}_{PER}$  e  $P_{VAS} - r_0 = 10.5\%$ 

$T$	$P_{VAS}$	$\hat{P}_{PER}$	$\hat{P}_{MC}$	$\hat{P}_{PER} - P_{VAS}$	$\hat{P}_{MC} - \hat{P}_{PER}$
1	0,90274	0,90275	0,90274	9E-06	1E-05
5	0,61422	0,61503	0,61489	8E-04	1E-04
10	0,38194	0,38462	0,38416	3E-03	5E-04
15	0,23752	0,24158	0,24102	4E-03	6E-04
20	0,14771	0,15232	0,15207	5E-03	2E-04
25	0,09186	0,09636	0,09669	5E-03	-3E-04
30	0,05713	0,06113	0,06212	4E-03	-1E-03

Tabela 6: Comparação entre  $\hat{R}_{MC}$ ,  $\hat{R}_{PER}$  e  $R_{VAS} - r_0 = 10.5\%$ 

$T$	$R_{VAS}$	$\hat{R}_{PER}$	$\hat{R}_{MC}$	$\hat{R}_{PER} - R_{VAS}$	$\hat{R}_{MC} - \hat{R}_{PER}$
1	0,10232	0,10231	0,10232	-1E-05	-1E-05
5	0,09748	0,09722	0,09726	-3E-04	-5E-05
10	0,09625	0,09555	0,09567	-7E-04	-1E-04
15	0,09583	0,09470	0,09486	-1E-03	-2E-04
20	0,09563	0,09409	0,09417	-2E-03	-8E-05
25	0,09550	0,09359	0,09345	-2E-03	1E-04
30	0,09542	0,09316	0,09262	-2E-03	5E-04

onde, como em (3.6):

$$\bar{P}(t, T) = \exp \left( -r_t B^*(t, T) - \int_t^T \alpha(s) \theta(s) B^*(s, T) ds \right) \quad (3.26)$$

Agora, vamos obter uma aproximação perturbativa para:

$$\hat{I}(t, y, z; T) := \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \xi(s) Y(s, Z_s) ds \right) \middle| Y(t) = y, Z(t) = z \right\}$$

considerando (3.24). Aplicando o Teorema de Feynman-Kac (C.18), temos que  $\hat{I}(t, y, z; T)$  é solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{I}}{\partial t} - y \xi(t) \hat{I} = - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 (\bar{\sigma}(t) + \hat{\xi}(t) z)^2}{\xi(t)^2} \frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 \beta^2(t)}{\hat{\xi}(t)^2} \frac{\partial^2 \hat{I}}{\partial z^2} \\ \hat{I}(T, y, z; T) = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.27)$$

Supondo novamente que:

$$\hat{I}(t, y, z; T) \sim \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \hat{I}^{(n)}(t, y, z; T), \quad \varepsilon \downarrow 0 \quad (3.28)$$

onde  $N$  é um inteiro positivo. Substituindo (3.28) em (3.27), obtemos os seguintes sub-

problemas:

$$\mathcal{O}(1) : \begin{cases} \hat{I}_t^{(0)} - y\xi(t)\hat{I}^{(0)} = 0, & em [0, T) \times \mathbb{R}^2 \\ \hat{I}^{(0)}(T, y, z; T) = 1, & \forall y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (3.29)$$

e para  $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$ :

$$\mathcal{O}(\varepsilon^{2n}) : \begin{cases} \hat{I}_t^{(2n)} - y\xi(t)\hat{I}^{(2n)} = \hat{f}^{(2n-2)}, & em [0, T) \times \mathbb{R} \\ \hat{I}^{(0)}(T, y, z; T) = 0, & \forall y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(2n-2)}(t, y, z; T) &:= -\frac{1}{2} \frac{(\bar{\sigma}(t) + \hat{\xi}(t)z)^2}{\xi(t)^2} \frac{\partial^2 \hat{I}^{(2n-2)}}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\beta^2(t)}{\hat{\xi}(t)^2} \frac{\partial^2 \hat{I}^{(2n-2)}}{\partial z^2} \\ \bar{\sigma}(t) &= \hat{\xi}(0, t)\sigma + \varepsilon \int_0^t \hat{\xi}(s, t)\eta(s)m(s)ds \end{aligned} \quad (3.31)$$

A solução do termo dominante (3.29) da expansão (3.28) confere com a do Modelo de HW com volatilidade determinística (2.50):

$$\hat{I}^{(0)}(t, y; T) = I^{(0)}(t, y; T) = e^{-yB^*(t, T)} \quad (3.32)$$

As correções de ordem superior  $\mathcal{O}(\varepsilon^{2n})$ ,  $n = 1, \dots, \frac{N}{2}$ , são dadas por:

$$\hat{I}^{(2n)}(t, y, z; T) = -I^{(0)}(t, y; T) \int_t^T \frac{\hat{f}^{(2n-2)}(s, y, z; T)}{I^{(0)}(s, y; T)} ds \quad (3.33)$$

Assim, a aproximação perturbativa para o preço do *Zero-coupon bond* é dada por:

$$\hat{P}(t, T) \sim \bar{P}(t, T) \left( I^{(0)}(t, 0; T) + \sum_{n=1}^{N/2} \varepsilon^{2n} \hat{I}^{(2n)}(t, 0, 0; T) \right), \quad \varepsilon \downarrow 0 \quad (3.34)$$

Observe que a aproximação de interesse é quando  $y = z = 0$ , pois no tempo corrente  $t$ ,  $r(t) = \bar{r}(t)$  e  $\sigma(t) = \bar{\sigma}(t)$ . Além disto, podemos considerar, s.p.g.,  $\varepsilon = 1$  na aproximação (3.34), desde que  $0 < \eta(t), \beta(t) \ll 1$ .

### 3.2.2 Modelo de Vasicek com Volatilidade Estocástica

Como caso particular, nesta seção vamos considerar os parâmetros constantes (Modelo de Vasicek). Abaixo apresentamos a aproximação perturbativa de quarta ordem para este



caso:

$$\begin{aligned} \hat{P}(t, T) &\approx \hat{P}^{(4)}(t, T) = \bar{P}(t, T) \left( I^{(0)}(t, 0; T) + \hat{I}^{(2)}(t, 0, 0; T) + \hat{I}^{(4)}(t, 0, 0; T) \right) \\ \bar{P}(t, T) &= e^{-r_t B(t, T) + \theta [B(t, T) - (T - t)]} \end{aligned} \quad (3.35)$$

É importante salientar que, neste caso, esta aproximação só vale para  $\eta$  e  $\beta$  pequenos. Observe também que:

$$I^{(0)}(t, 0; T) \equiv 1$$

Das Figuras 32 a 35, consideramos os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \theta &= 10\% \\ \sigma_0 &= 10\% \\ r_0 &= 2\% \\ \beta &= 0.2 \\ m &= 9.5\% \end{aligned}$$

Na Figura 32 podemos verificar novamente que a volatilidade estocástica implica em um preço maior para os *Zero-coupon bonds* (e quanto menor  $\eta$ , maior o preço), o que se traduz em *yields* menores, os quais apresentamos na Figura 33. Observe que para  $\eta$  menores, reproduzimos o efeito apresentado em Cotton *et al.* (2004) de que o *yield* é crescente para pequenas maturidades ( $0 \leq T \leq 3$ , aproximadamente), decrescente até maturidades intermediárias ( $T \approx 15$ ), e crescente novamente para maturidades maiores. Nas Figuras 34 e 35 apresentamos os preços e *yields* para um *Zero-coupon bond* com maturidade igual a 30.

Finalmente, nas Figuras 36 e 37 apresentamos os preços e *yields*, considerando  $r_0 = 9.5\% < \theta$ , considerando também os valores do Modelo A. Nestes gráficos podemos verificar o impacto maior na ETTJ implicado pelo Modelo B. Nas Figuras 38 e 39, consideramos  $r_0 = 10.5\% > \theta$ .

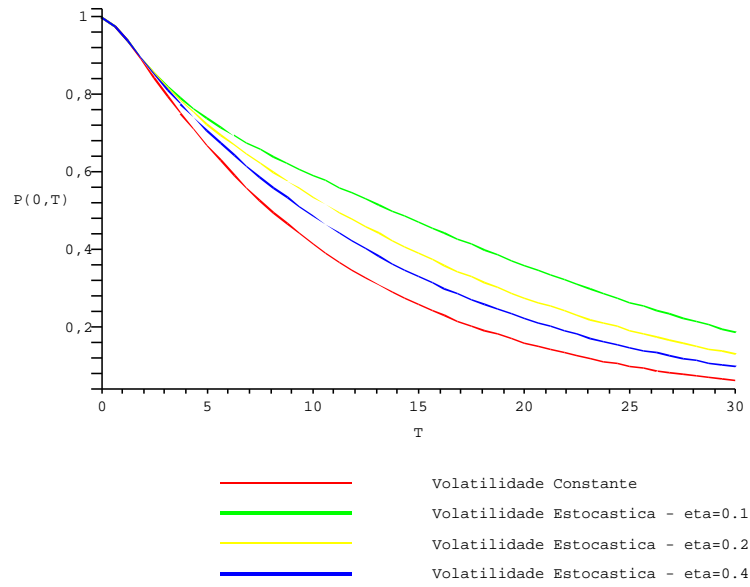


Figura 32: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{P}(0, T)$

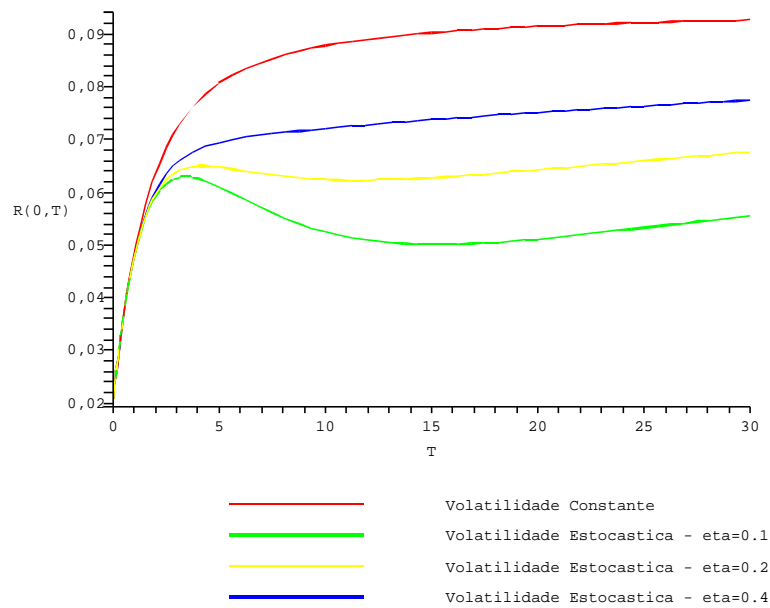


Figura 33: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{R}(0, T)$

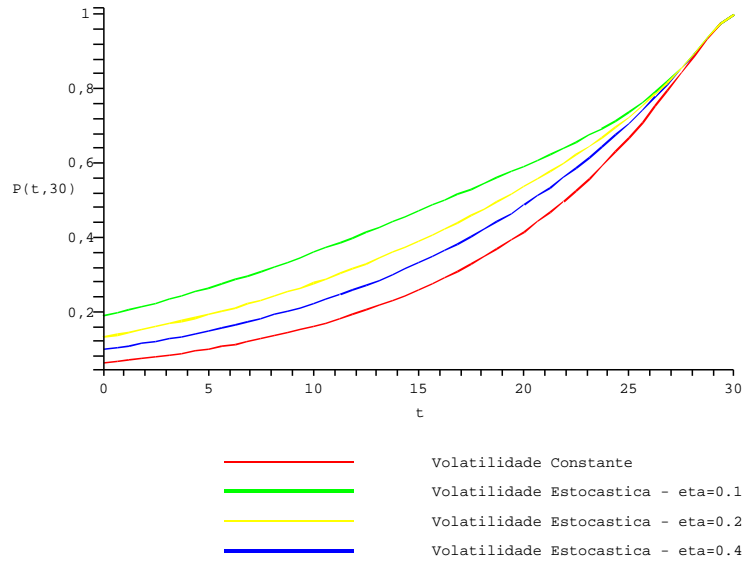


Figura 34: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  de  $\hat{P}(t, 30)$

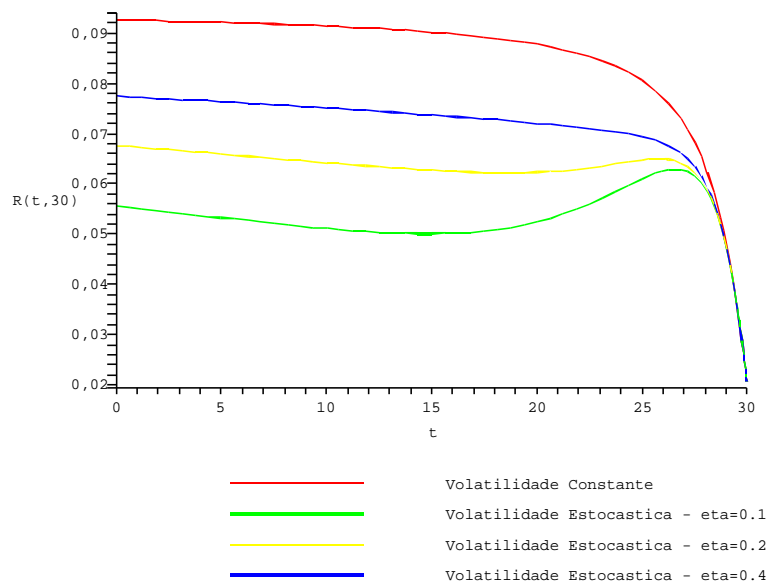


Figura 35: Aproximação perturbativa até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  de  $\hat{R}(t, 30)$

### 3.2.2.1 Validação da Aproximação Perturbativa via Monte-Carlo

Nas Figuras 40 e 41 apresentamos uma validação parcial do Modelo B, através de simulações de Monte Carlo (método das variáveis antitéticas), para algumas maturidades, e considerando  $\eta = 0.4$ . Observe que o método de MC não capturou o *yield* crescente para maturidades maiores.

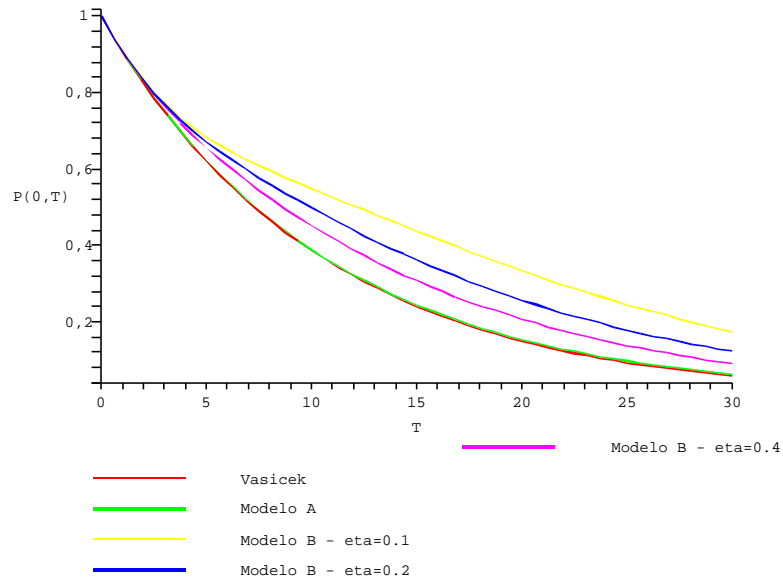


Figura 36: Aproximação até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{P}(0, T)$  ( $r_0 = 9.5\%$ )

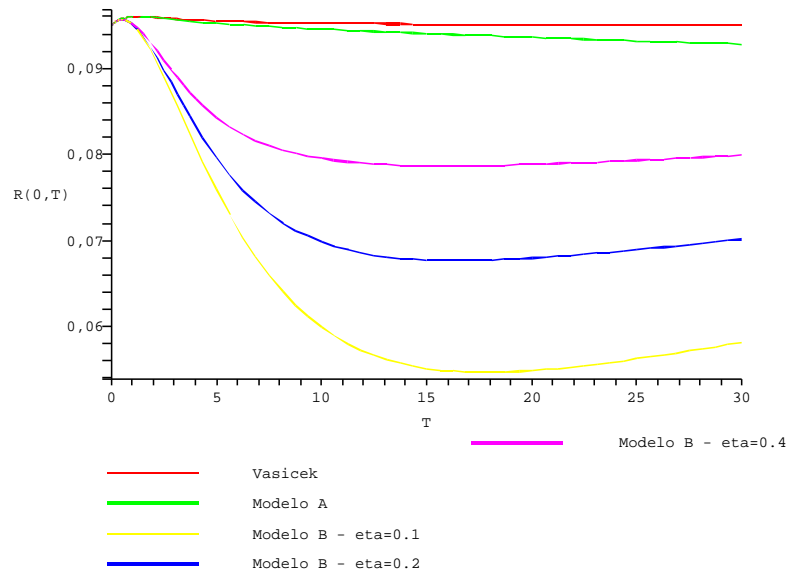


Figura 37: Aproximação até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{R}(0, T)$  ( $r_0 = 9.5\%$ )

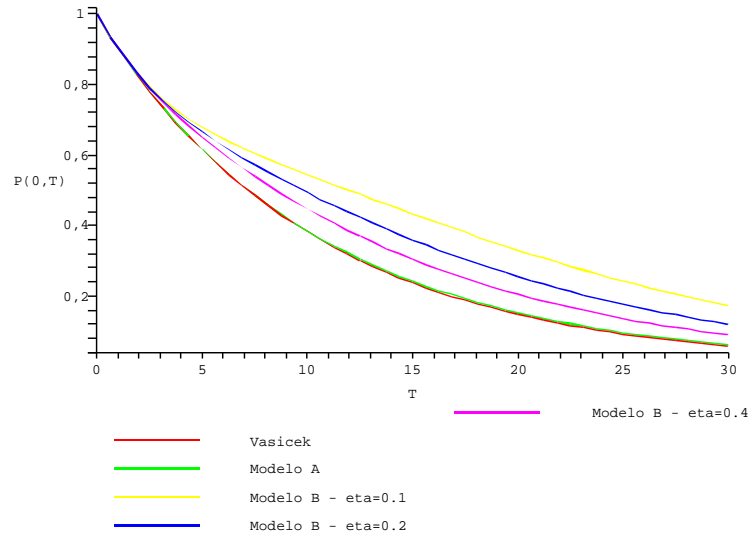


Figura 38: Aproximação até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{P}(0, T)$  ( $r_0 = 10.5\%$ )

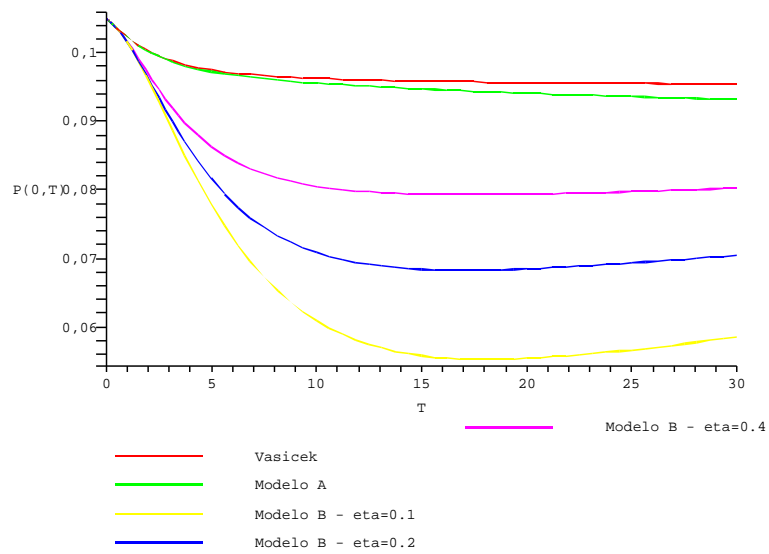


Figura 39: Aproximação até  $\mathcal{O}(\varepsilon^4)$  da ETTJ inicial -  $\hat{R}(0, T)$  ( $r_0 = 10.5\%$ )

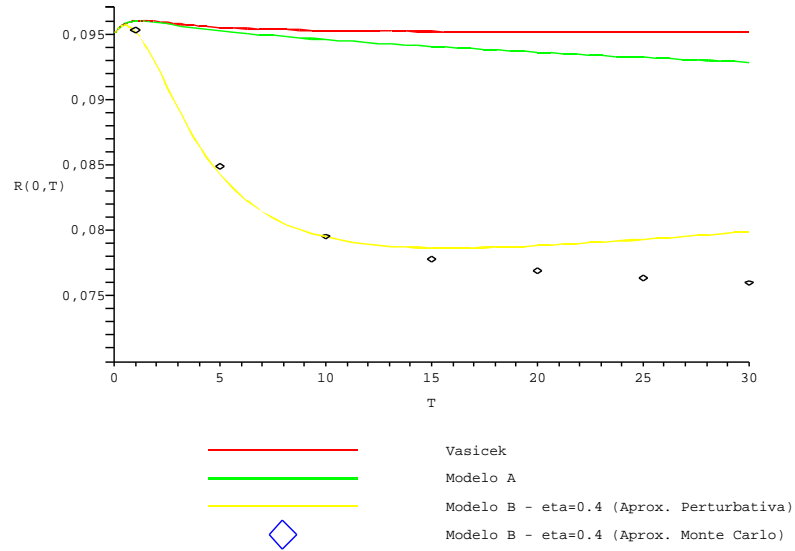


Figura 40: Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC:  
 $r_0 = 9.5\%$

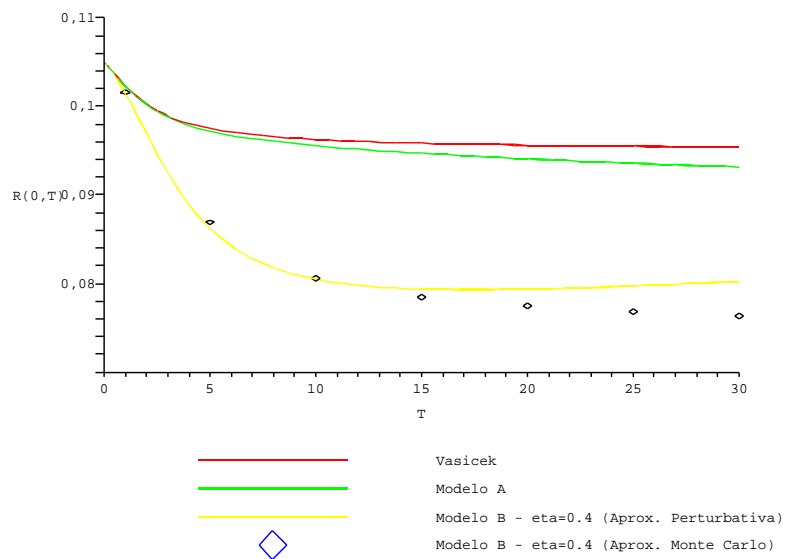


Figura 41: Comparação entre a Aproximação Perturbativa vs. Aproximação por MC:  
 $r_0 = 10.5\%$

## *Conclusão*

Depois de termos realizado uma revisão dos modelos de Vasicek e de Hull-White para a Estrutura a Termo da Taxa de Juro, derivando as suas soluções através da formulação probabilística e em termos do problema de Cauchy resultante da aplicação do Teorema de Feynman-Kac, obtemos uma aproximação perturbativa para suas soluções, considerando volatilidades pequenas. Através de simulações para o modelo de Vasicek, verificamos que a magnitude do erro desta aproximação, em relação à solução exata, foi da ordem de  $10^{-7}$  e  $10^{-11}$ , considerando correções de até ordem 2 e 4, respectivamente.. Além disto, verificamos empiricamente a ordem das correções como função da volatilidade da taxa de juro de curto prazo.

Depois disto feito, tratamos do modelo de Hull-White com volatilidade estocástica. No Modelo A consideramos o caso em que ela segue um movimento Browniano geométrico com *drift* nulo:

$$d\sigma_t = \varepsilon\beta\sigma_t dW_t^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

onde a volatilidade e a taxa de juro de curto prazo não são correlacionadas. Então obtemos uma aproximação perturbativa para a ETTJ, considerando que os parâmetros relacionados com a volatilidade são pequenos. Simulações considerando os parâmetros do modelo de HW constantes mostraram que a volatilidade estocástica resulta em preços de *Zero-coupon bonds* maiores do que os resultantes quando consideramos a volatilidade constante (Modelo de Vasicek), o que, por sua vez, implica em um *yield* menor. Apresentamos gráficos da ETTJ para algumas taxas de juro, onde observamos que o efeito da volatilidade estocástica cresce com a maturidade, e pudemos verificar que, qualitativamente, os resultados confirmam os encontrados na literatura. Também fizemos uma análise da ordem de magnitude das correções, mostrando que estas são de magnitudes decrescentes quando a ordem da correção cresce, para parâmetros envolvendo a volatilidade pequenos. Finalmente, validamos parcialmente a aproximação perturbativa através de simulações de Monte Carlo.

No Modelo B, em que volatilidade segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck com

reversão à média:

$$d\sigma_t = \varepsilon\eta(t)[m(t) - \sigma_t]dt + \varepsilon\beta(t)dW_t^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

também obtemos uma aproximação perturbativa, exemplificando para o caso de coeficientes constantes. Com este modelo pudemos reproduzir qualitativamente os resultados obtidos por Cotton *et al.*(2004), de que o *yield* é crescente para pequenas maturidades ( $0 \leq T \leq 3$ , aproximadamente), decrescente até maturidades intermediárias ( $T \approx 15$ ), e crescente novamente para maturidades maiores. Por fim apresentamos uma validação parcial através de simulações de Monte Carlo, observado que este método não apresentou o comportamento descrito acima, de que a volatilidade é crescente para maturidades maiores.

Finalizando, listamos alguns tópicos que ainda precisam ser desenvolvidos:

1. Calibrar o modelo de forma a se ajustar à Estrutura a Termo da Taxa de Juro inicial observada no mercado.
2. Validar a aproximação perturbativa através de outros métodos numéricos, como diferenças finitas, por exemplo.
3. Permitir correlação entre a taxa de juro de curto prazo e a sua volatilidade.
4. Considerar outros processos estocásticos para a volatilidade.
5. Obter aproximações perturbativas para outros modelos de taxa de juro, como o Cox-Ingersoll-Ross e Black-Karasinski, considerando a volatilidade estocástica.



## *Referências*

- BLACK, F. Interest Rates as Options, *Journal of Finance* 50-5, 1371-1376, 1995.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-659, 1973.
- BLACK, F.; DERMAN, E.; TOY, W. A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options, *Financial Analysts Journal*, 33-39, January-February 1990.
- BLACK, F.; KARASINSKI, P. Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal, *Financial Analysts Journal*, 52-59, July-August 1991.
- COTTON, P.; FOUQUE, J-P.; PAPANICOLAOU, G.; SIRCAR, R. Stochastic Volatility Corrections for Interest Rate Derivatives, *Mathematical Finance*, Vol. 14, No. 2, 173-200, 2004.
- COX, J. C.; INGERSOLL, J. E.; ROSS, S.A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, 385-407, 1985.
- DUFFIE, D. *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2<sup>nd</sup> Edition, Princeton University Press, USA, 1996.
- ELLIOTT, R. J.; KOPP, R. E. *Mathematics of Financial Markets*, Springer-Verlag, USA, 2000.
- EVANS, L. C. An Introduction to Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications, Version 1.2. [Citado em 10/01/2007]. Disponível em: <http://math.berkeley.edu/~evans/SDE.course.pdf>.
- FOUQUE, J-P.; PAPANICOLAOU, G.; SIRCAR, R. Financial Modeling in a Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility Environment, *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 1, 37-48, 1999.
- HIGHAM, D. J. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations, *SIAM Review*, Volume 43, Number 3, 525-546, 2001.
- HO, T. S. Y.; LEE, S. B. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance* 41, 1011-1029, December 1986.
- HOLMES, M. H. *Introduction to Perturbation Methods*, Springer-Verlag, USA, 1991.
- HULL, J. *Opções, Futuros e Outros Derivativos*, 3<sup>a</sup> Edição, BM&F, SP, 1998.

- HULL, J.; WHITE, A. Pricing Interest-Rate-Derivative Securities, *The Review of Financial Studies*, Volume 3, Number 4, 573-592, 1990.
- HULL, J.; WHITE, A. One Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities, *Journal on Financial and Quantitative Analysis* 28, 235-254, June 1993.
- JARROW, R. A. *Modeling Fixed-Income Securities and Interest Rate Options*. Stanford University Press. USA. 2002.
- KARATZAS, I.; SHREVE, S. E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer, USA, 2000.
- LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman Hall, UK, 1996.
- LONGSTAFF, F. A.; SCHWARTZ, E. S. Interest Rate Volatility and the Term Structures: A Two Factor General Equilibrium Model, *Journal of Finance* 47-4, 1259-1282, September 1992.
- LUND, J. Review of Continuous-Time Term-Structure Models - Part II: Arbitrage Free Models, *Working Paper*, April 1998. [Citado em 01/08/2007]. Disponível em: [http://www.jesperlund.com/fix98/download/ctmod1\\_2.pdf](http://www.jesperlund.com/fix98/download/ctmod1_2.pdf).
- NEFTCI, S. N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, USA, 1996.
- OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications*, Sixth Edition, Springer, Netherlands, 2005.
- SACK, B. Using Treasury STRIPS to Measure the Yield Curve, *Division of Monetary Affairs - Federal Reserve Board of Governors*, Washington, October 2000. Disponível em: <http://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2000/200042/200042abs.html>.
- SHIRYAEV, A. N. *Essentials of Stochastic Finance: facts, models, theory*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2000.
- SHREVE, S. E. *Stochastic Calculus for Finance - Continuous-Time Models*, Springer, USA, 2004.
- SIFMA (Securities Industry and Financial Markets Association). Research Quarterly, USA, February 2007. Disponível em: [http://www.archives1-sifma.org/assets/files/Research\\_Quarterly\\_0207.pdf](http://www.archives1-sifma.org/assets/files/Research_Quarterly_0207.pdf).
- TESOURO NACIONAL. Estatística da Dívida. Dezembro 2006. [Citado em 30/03/2007]. Disponível em: <http://www.tesouro.fazenda.gov.br>.
- TOURRUCÔO, F. *Perturbation Methods in Mathematical Finance: Zero-Coupon Bonds and Equivalent Volatilities*, Ph.D. Thesis, Department of Mathematical Sciences, University of Delaware, 2004.

TOURRUCÔO, F.; HAGAN, P. S.; SCHLEINIGER, G. F. Approximate Formulas for Zero-Coupon Bonds, *Applied Mathematical Finance* V. 14, n. 3, 107-226, July 2007.

TUCKMAN, B. *Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets*, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2002.

VASICEK, O. A. An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177-188, 1977.

VIEIRA NETO, C. A. *Modelagem da Estrutura a Termo da Taxa de Juros e Avaliação de Contratos Derivativos*, Tese de Doutorado, Departamento de Economia, Universidade de São Paulo, 1999.

VIEIRA NETO, C. A.; PEREIRA, P. L. V. Uma Resenha sobre os Principais Resultados da Teoria de Martingais Aplicada à Avaliação de Derivativos em Mercados Completos e Livres de Arbitragem, *Revista Brasileira de Econometria*, Volume 21, Número 2, Novembro de 2001.

# *A Conceitos Básicos de Probabilidade e Processos Estocásticos*

Neste apêndice iremos apresentar alguns resultados básicos de Teoria da Probabilidade e de processos estocásticos, não nos preocupando em demonstrar os resultados, considerando principalmente Evans(Version1.2). Esta revisão irá facilitar a leitura dos próximos apêndices. As provas destes resultados podem ser encontradas na referência supra-citada, ou em Karatzas & Shreve(2000) e Elliott & Kopp(2000).

## **A.1 Definições e Resultados Básicos de Probabilidade**

**Definição 1 ( $\sigma$ -álgebra)** - Seja  $\Omega$  um conjunto não vazio, que denominaremos de espaço amostral, e cujos elementos chamaremos de eventos. Então, uma coleção de sub-conjuntos  $\mathcal{F}$  de  $\Omega$  é uma  $\sigma$ -álgebra, se satisfaz as seguintes propriedades:

- i.  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ ;
- ii. Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ ;
- iii. Se  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ , então  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i, \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

**Definição 2 (Medida de Probabilidade)** - Seja  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra de sub-conjuntos de  $\Omega$ .  $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  é uma medida de probabilidade se:

- i.  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ ;
- ii. Se  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ , então:

$$\mathcal{P} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)$$

valendo a igualdade se os conjuntos  $A_i$  forem mutuamente disjuntos.

**Definição 3 (Espaço de Probabilidade)** - Uma tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  é um espaço de probabilidade se  $\Omega$  é qualquer conjunto,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de sub-conjuntos de  $\Omega$ , e  $\mathcal{P}$  é uma medida de probabilidade.

**Exemplo** - Seja  $\mathcal{B}$  uma  $\sigma$ -álgebra de Borel, ou seja, a menor  $\sigma$ -álgebra contendo todos os sub-conjuntos abertos do  $\mathbb{R}^n$ . Assuma que  $f$  é uma função integrável e não negativa, tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$ , e defina:

$$\mathcal{P}(B) := \int_B f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \forall B \in \mathcal{B}.$$

Então,  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mathcal{P})$  é um espaço de probabilidade, e  $f$  é chamada de função densidade da medida de probabilidade  $\mathcal{P}$ .

### Observações

- i. Um conjunto  $A \in \mathcal{F}$  é chamado de evento, e pontos  $\omega \in \Omega$  de pontos amostrais.
- ii.  $\mathcal{P}(A)$  é a probabilidade do evento  $A$  ocorrer.
- iii. Uma propriedade que é verdadeira, exceto por um evento de probabilidade zero, é dita valer *almost surely* (*a.s.*).

O espaço de probabilidade assim construído, embora seja a base matemática a ser considerada em qualquer modelagem probabilística, não é diretamente observável. Para tanto, introduzimos o conceito de variável aleatória  $\mathbf{X}$ , que nada mais é do que uma aplicação de  $\Omega$  no espaço observável  $\mathbb{R}^n$  (no nosso caso particular).

**Definição 4 (Variável Aleatória)** - Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  um espaço de probabilidade. Uma aplicação:

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é chamada de variável aleatória  $n$ -dimensional se, para cada  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\mathbf{X}$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável, isto é:

$$\mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Por convenção, ao invés de escrevermos  $\mathbf{X}(\omega)$  escrevemos simplesmente  $\mathbf{X}$ , omitindo a dependência de  $\omega \in \Omega$ . Da mesma forma, escrevemos a probabilidade de  $\mathbf{X}$  estar em  $B$ ,  $\mathcal{P}(\mathbf{X}^{-1}(B))$ , como  $\mathcal{P}(\mathbf{X} \in B)$ .

**Lema 1** - Seja  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma variável aleatória. Então a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathbf{X}$ :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) := \sigma \{ \mathbf{X}^{-1}(B) | B \in \mathcal{B} \}$$

é a menor sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$  com relação à qual  $\mathbf{X}$  é mensurável.

Em termos probabilísticos, este resultado nos diz que a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}(\mathbf{X})$  contém todas as informações relevantes sobre a variável aleatória  $\mathbf{X}$ .

**Definição 5 (Esperança)** - Seja  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma variável aleatória  $n$ -dimensional  $\mathbf{X} = (X^1, \dots, X^n)$ . A esperança (valor esperado ou valor médio) de  $\mathbf{X}$ , em relação à medida de probabilidade  $\mathcal{P}$ , é definida como:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}\} := \int_{\Omega} \mathbf{X} d\mathcal{P} = \left( \int_{\Omega} X^1 d\mathcal{P}, \dots, \int_{\Omega} X^n d\mathcal{P} \right)$$

onde as integrais são dadas no sentido de Lebesgue, em relação à medida de probabilidade  $\mathcal{P}$ .

**Definição 6 (Variância)** - A variância de  $\mathbf{X}$ , em relação à medida de probabilidade  $\mathcal{P}$ , é definida como:

$$\mathbb{V}\{\mathbf{X}\} := \int_{\Omega} |\mathbf{X} - \mathbb{E}\{\mathbf{X}\}|^2 d\mathcal{P}$$

onde  $|\cdot|$  é a norma Euclideana. Uma forma simples de calcular a variância é dada pela relação:

$$\mathbb{V}\{\mathbf{X}\} = \mathbb{E}\{|\mathbf{X} - \mathbb{E}\{\mathbf{X}\}|^2\} = \mathbb{E}\{|\mathbf{X}|^2\} - |\mathbb{E}\{\mathbf{X}\}|^2$$

**Definição 7A (Função Distribuição)** - A função distribuição de uma variável aleatória  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a função  $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  definida por<sup>1</sup>:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := \mathcal{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

**Definição 7B (Função Distribuição Conjunta)** - Se  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  são variáveis aleatórias, a sua função distribuição conjunta  $F_{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m} : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow [0, 1]$  é dada por:

$$F_{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) := \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{X}_m \leq \mathbf{x}_m), \quad \forall \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m.$$

**Definição 8 (Função Densidade)** - Suponha  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  variável aleatória e  $F = F_{\mathbf{X}}$  sua função distribuição. Se existe uma função integrável não-negativa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_n \dots dy_1$$

então,  $f$  é chamada de função densidade de  $\mathbf{X}$ . Segue daí que:

$$\mathcal{P}(\mathbf{X} \in B) = \int_B f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

<sup>1</sup>Notação: consideramos  $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$  ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ) se  $x_i \leq y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Lema 2** - Suponha  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  variável aleatória e assuma que a sua função distribuição  $F_{\mathbf{X}}$  possua função densidade  $f$ . Além disto, suponha  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e que  $Y = g(\mathbf{X})$  seja integrável. Então:

$$\mathbb{E}\{Y\} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Em particular, isto nos fornece uma maneira simples de calcular a esperança e a variância de qualquer variável aleatória  $\mathbf{X}$  que possua uma função densidade  $f$ :

$$\mathbb{E}\{\mathbf{X}\} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

e,

$$\mathbb{V}(\mathbf{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x} - \mathbb{E}\{\mathbf{X}\}|^2 f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Agora vamos apresentar um conceito fundamental em probabilidade: o de independência.

**Definição 9A (Eventos Independentes)** - Seja a coleção de eventos  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Estes eventos são independentes se, para todas as escolhas possíveis de  $1 \leq k_1 < \dots < k_m$ , temos que:

$$\mathcal{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_m}) = \mathcal{P}(A_{k_1})\mathcal{P}(A_{k_2}) \dots \mathcal{P}(A_{k_m})$$

**Definição 9B ( $\sigma$ -álgebras Independentes)** - Seja  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -álgebras,  $i \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  são independentes se, para todas as escolhas de  $1 \leq k_1 < \dots < k_m$  e de eventos  $A_{k_i} \in \mathcal{F}_{k_i}$ , termos que:

$$\mathcal{P}(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_m}) = \mathcal{P}(A_{k_1})\mathcal{P}(A_{k_2}) \dots \mathcal{P}(A_{k_m})$$

**Definição 9C (Variáveis Aleatórias Independentes)** - Sejam as variáveis aleatórias  $\mathbf{X}_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $(\mathbf{X}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  são independentes se, para todos os inteiros  $k \geq 2$  e todas as escolhas de conjuntos de Borel  $B_1, \dots, B_k \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}_1 \in B_1, \mathbf{X}_2 \in B_2, \dots, \mathbf{X}_k \in B_k) = \mathcal{P}(\mathbf{X}_1 \in B_1)\mathcal{P}(\mathbf{X}_2 \in B_2) \dots \mathcal{P}(\mathbf{X}_k \in B_k)$$

A seguir vamos tratar do conceito de esperança condicional, conceito este com muitas aplicações em finanças e muito utilizado no próximo apêndice.

**Definição 10A (Esperança Condicional)** - Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias. Então, a esperança condicional  $\mathbb{E}\{X|Y\}$ , isto é, a melhor estimativa para  $X$ , conhecido o

valor de  $Y$ , é uma variável aleatória  $\mathcal{F}(Y)$ -mensurável, tal que:

$$\int_A X dP = \int_A \mathbb{E}\{X|Y\} dP, \forall A \in \mathcal{F}(Y)$$

Observe que o que realmente importa nesta definição é a  $\sigma$ -álgebra gerada pela variável aleatória  $Y$ , e não o valor dela propriamente dito. Isto motiva a seguinte definição:

**Definição 10B (Esperança Condicional)** - Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  e suponha que  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$  seja uma  $\sigma$ -álgebra. Se  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma variável aleatória, definimos:

$$\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\}$$

como qualquer variável aleatória em  $\Omega$  tal que:

- i.  $\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\}$  é  $\mathcal{V}$ -mensurável;
- ii.  $\int_A X dP = \int_A \mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\} dP, \forall A \in \mathcal{V}$ .

Por teorema temos que a esperança condicional  $\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\}$  existe e é única, a não ser por conjuntos  $\mathcal{V}$ -mensuráveis de probabilidade nula.

A esperança condicional  $\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\}$  pode ser entendida como uma estimativa da variável aleatória  $X$ , dada a informação contida na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{V}$ . A condição (i) da Definição 10B requer que esta estimativa seja construída levando em consideração apenas a informação contida em  $\mathcal{V}$ . Já a condição (ii) requer que esta estimativa seja consistente com  $X$ , pelo menos no concernente à integração sobre os eventos de  $\mathcal{V}$ .

**Observação** - A esperança condicional  $\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\}$  também pode ser interpretada como uma variável aleatória  $\mathcal{V}$ -mensurável que é a melhor aproximação por mínimos quadrados de  $X$ , no espaço linear  $L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F})$  das variáveis aleatórias  $\mathcal{F}$ -mensuráveis  $Y$ , tal que:

$$\|Y\|_{L^2} < \infty.$$

### Propriedades da Esperança Condicional

- i. Se  $X$  é  $\mathcal{V}$ -mensurável, então  $\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\} = X$  *a.s.*
- ii. Se  $a, b$  são constantes, então:

$$\mathbb{E}\{aX + bY|\mathcal{V}\} = a\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\} + b\mathbb{E}\{Y|\mathcal{V}\} \text{ a.s.}$$

- iii. Se  $X$  é  $\mathcal{V}$ -mensurável, e  $XY$  é integrável, então  $\mathbb{E}\{XY|\mathcal{V}\} = X\mathbb{E}\{Y|\mathcal{V}\}$  *a.s.*
- iv. Se  $X$  é independente de  $\mathcal{V}$ , então  $\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\} = \mathbb{E}\{X\}$  *a.s.*



v. Se  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ , então:

$$\mathbb{E}\{X|\mathcal{W}\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\}|\mathcal{W}\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{X|\mathcal{W}\}|\mathcal{V}\} \text{ a.s.}$$

vi. A desigualdade  $X \leq Y$  a.s. implica que  $\mathbb{E}\{X|\mathcal{V}\} \leq \mathbb{E}\{Y|\mathcal{V}\}$  a.s.

## A.2 Definições e Resultados Básicos de Processos Estocásticos

**Definição 12A (Processo Estocástico Contínuo)** - Uma coleção  $\{\mathbf{X}(t)|t \geq 0\}$  de variáveis aleatórias é chamada de processo estocástico contínuo. A interpretação natural de  $t$  é como tempo.

**Definição 12B (Trajetória Amostral)** - Para cada ponto  $\omega \in \Omega$ , a aplicação  $t \mapsto \mathbf{X}(t, \omega)$  é a correspondente trajetória amostral do processo estocástico contínuo.

A interpretação desta definição é que, se fizermos um experimento e observarmos os valores aleatórios de  $\mathbf{X}(\cdot)$  enquanto o tempo se desenvolve, estamos de fato observando a trajetória amostral  $\{\mathbf{X}(t, \omega)|t \geq 0\}$  para algum  $\omega \in \Omega$  fixo. Se fizermos outro experimento, em geral observaremos uma trajetória amostral diferente.

**Definição 13 (Filtração)** - Considere um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Uma filtração  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  é uma família crescente de  $\sigma$ -álgebras contidas em  $\mathcal{F}$ .

**Definição 14 (Filtração Natural)** - Seja  $\mathbf{X}(\cdot)$  um processo estocástico contínuo em  $\mathbb{R}^n$ . Então a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias  $\mathbf{X}(s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ :

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{\mathbf{X}(s)|0 \leq s \leq t\}$$

é chamada de história (ou filtração natural) do processo até o tempo  $t$  (inclusive).

**Definição 15 (Processo  $\mathcal{F}_t$ -adaptado)** - Um processo estocástico  $\mathbf{X}(\cdot)$  é dito ser  $\mathcal{F}_t$ -adaptado (ou não-antecipativo) se, para todo  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{X}(t)$  for  $\mathcal{F}_t$ -mensurável.

Isto significa que, para todo  $t \geq 0$ , a variável aleatória  $\mathbf{X}(t)$  depende apenas da informação contida na  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$ , que é o conjunto das informações passadas, mas independente das informações futuras. Se considerarmos  $\mathbf{X}(t)$  o processo seguido pelo preço de um ativo, poderíamos interpretar que o seu preço atual é formado considerando apenas as informações passadas do processo, não havendo uma contaminação de informações futuras nesta formação.

**Definição 16 (Espaço de Probabilidade Filtrado)** - Uma quadrupla  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathcal{P})$  é um espaço de probabilidade filtrado se  $\Omega$  é qualquer conjunto,  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de sub-conjuntos de  $\Omega$ ,  $(\mathcal{F}_t)$  é uma filtração e  $\mathcal{P}$  é uma medida de probabilidade.

**Definição 17 (Martingale)** - Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  um espaço de probabilidade,  $X(\cdot)$  um processo estocástico contínuo em  $\mathbb{R}$  tal que  $\mathbb{E}\{X(t)\} < \infty$  para todo  $t \geq 0$ , e  $\mathcal{F}_t$  a filtração natural deste processo.

- i. Se  $X(s) = \mathbb{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\}$  *a.s.*,  $\forall t \geq s \geq 0$ , então  $X(\cdot)$  é chamado de martingale.
- ii. Se  $X(s) \leq \mathbb{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\}$  *a.s.*,  $\forall t \geq s \geq 0$ , então  $X(\cdot)$  é chamado de submartingale.
- iii. Se  $X(s) \geq \mathbb{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\}$  *a.s.*,  $\forall t \geq s \geq 0$ , então  $X(\cdot)$  é chamado de supermartingale.

**Definição 18 (Probabilidade Condicional)** - Se  $\mathcal{V}$  é uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ , então:

$$\mathcal{P}(A|\mathcal{V}) := \mathbb{E}\{\chi_A|\mathcal{V}\}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Ou seja,  $\mathcal{P}(A|\mathcal{V})$  é uma variável aleatória, definida como a probabilidade condicional de  $A$ , dado  $\mathcal{V}$ . Note que  $\chi_A$  é a função indicadora de conjunto.

**Definição 19A (Processo de Markov - Evans(Version 1.2))** - Um processo estocástico contínuo em  $\mathbb{R}^n$ , definido como  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ , sendo  $X_i(t)$  processos estocásticos contínuos reais unidimensionais  $\mathcal{F}_t$ -adaptados, é dito ser um processo de Markov se:

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}(t) \in B|\mathcal{F}_s) = \mathcal{P}(\mathbf{X}(t) \in B|\mathbf{X}(s)) \quad a.s.$$

para todo  $0 \leq s \leq t$  e todo subconjunto de Borel  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Ou seja, o conhecimento do valor presente  $\mathbf{X}(s)$  possibilita a predição das probabilidades de todos os valores futuros  $\mathbf{X}(t)$ , tão bem como se estivessemos considerando toda a história do processo antes de  $s$ .

**Definição 19B (Processo de Markov - Elliott & Kopp(2000))** - Um processo estocástico contínuo em  $\mathbb{R}^n$ , definido como  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ , sendo  $X_i(t)$  processos estocásticos contínuos reais unidimensionais  $\mathcal{F}_t$ -adaptados, é dito ser um processo de Markov se:

$$\mathbb{E}\{f(\mathbf{X}(t))|\mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}\{f(\mathbf{X}(t))|\mathbf{X}(s)\} \quad a.s.$$

para todo  $0 \leq s \leq t$  e toda função de Borel real e limitada, definida em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 20 (Movimento Browniano)** - Um movimento Browniano é um processo estocástico contínuo  $W(\cdot)$  em  $\mathbb{R}$ , que apresenta as seguintes propriedades:

- i.  $W(0) = 0$  *a.s.*;

- ii.  $W(t) - W(s)$  é  $\mathcal{N}(0, t - s)$ ,  $\forall t \geq s \geq 0$ ;  
 iii. para todos os tempos  $0 < t_1 < \dots < t_n$ , as variáveis aleatórias

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

são independentes.

**Lema 3** - Suponha que  $W(\cdot)$  é um movimento Browniano. Então:

$$\mathbb{E}\{W(t)W(s)\} = \min\{s, t\}, \quad t, s \geq 0.$$

**Definição 21 (Movimento Browniano  $m$ -dimensional)** - Um movimento Browniano  $m$ -dimensional é definido como:

$$\mathbf{W}(\cdot) = (W^1(\cdot), \dots, W^m(\cdot))$$

onde  $W^i(\cdot)$  são movimentos Brownianos unidimensionais.

## A.3 Integral de Itô Unidimensional

Para embasar matematicamente as equações diferenciais estocásticas, precisamos primeiro definir exatamente o que entendemos por integral estocástica.

**Definição 22A (Espaço  $\mathbb{L}^2(\mathbf{0}, T)$ )** - Denotamos por  $\mathbb{L}^2(0, T)$  o espaço formado por todos os processos estocásticos  $G(\cdot)$  progressivamente mensuráveis<sup>2</sup>, tais que:

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^T G^2 dt \right\} < \infty.$$

**Definição 22B (Espaço  $\mathbb{L}^1(\mathbf{0}, T)$ )** - Da mesma forma, denotamos por  $\mathbb{L}^1(0, T)$  o espaço formado por todos os processos estocásticos  $F(\cdot)$  progressivamente mensuráveis, tais que:

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^T |F| dt \right\} < \infty.$$

---

<sup>2</sup>Um processo estocástico  $\mathbf{X}(\cdot)$  é dito ser progressivamente mensurável em relação à filtração  $(\mathcal{F}_t)$  se a aplicação  $(s, \omega) \mapsto \mathbf{X}_s(\omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  é mensurável para cada  $t \geq 0$  (onde  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} := \sigma(\{A \times B | A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}\})$  é o produto de  $\sigma$ -álgebras). Se um processo é progressivamente mensurável, ele é mensurável e adaptado. Por teorema, se um processo for contínuo pela direita, ou pela esquerda, e  $\mathcal{F}_t$ -adaptado, então ele é progressivamente mensurável. (Karatzas & Shreve, 2000).

**Definição 23 (Processo Escada)** - Um processo  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$  é um processo escada se existe uma partição:

$$P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$$

tal que,

$$G(t) \equiv G_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (k = 0, \dots, m-1).$$

Como  $G$  é não-antecipativo (pois é progressivamente mensurável), cada  $G_k$  é uma variável aleatória  $\mathcal{F}(t_k)$ -mensurável.

**Definição 24 (Integral de Itô de Processos Escadas)** - Seja  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$  um processo escada, como definido acima. Então:

$$\int_0^T G dW := \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

é a Integral de Itô de  $G$  no intervalo  $[0, T]$ .

**Lema 4** - Para todas constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  e todos processos escadas  $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$  temos que:

- i.  $\int_0^T (aG + bH) dW = a \int_0^T G dW + b \int_0^T H dW$ ;
- ii.  $\mathbb{E} \left\{ \int_0^T G dW \right\} = 0$ ;
- iii.  $\mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^T G dW \right)^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T G^2 ds \right\}$ .

**Lema 5** - Se  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ , então existe uma sequência de processos escadas limitados  $G^n \in \mathbb{L}^2(0, T)$  tal que:

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^T |G - G^n|^2 dt \right\} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

Desta forma, podemos definir a Integral de Itô para qualquer processo em  $\mathbb{L}^2(0, T)$ .

**Definição 25 (Integral de Itô)** - Se  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ , tome uma sequência de processos escadas limitados  $G^n \in \mathbb{L}^2(0, T)$  convergindo a  $G$ . Então:

$$\mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^T (G^n - G^m) dW \right)^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (G^n - G^m)^2 ds \right\} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty$$

e assim, o limite:

$$\int_0^T G dW := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G^n dW$$

existe em  $\mathbb{L}^2(0, T)$ . Por fim, tomamos este limite como definição da Integral de Itô.

**Teorema 1 (Propriedades da Integral de Itô)** - Para todas constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  e todos processos  $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$  temos que:

- i.  $\int_0^T (aG + bH)dW = a \int_0^T GdW + b \int_0^T HdW$ ;
- ii.  $\mathbb{E} \left\{ \int_0^T GdW \right\} = 0$  (Propriedade Martingale da Integral de Itô);
- iii.  $\mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^T GdW \right)^2 \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T G^2 ds \right\}$  (Isometria de Itô);
- iv.  $\mathbb{E} \left\{ \int_0^T GdW \int_0^T HdW \right\} = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T GH ds \right\}$ .

**Definição 26 (Integral Indefinida de Itô)** - Seja  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ . Então, a integral indefinida de  $G(\cdot)$  é definida como:

$$I(t) := \int_0^t GdW, \quad t \in [0, T]$$

Note que  $I(0) = 0$ . Na realidade  $I(\cdot)$  é um martingale e possui trajetórias amostrais contínuas *a.s.*

**Definição 27 (Equação Diferencial Estocástica Unidimensional)** - Suponha que  $X(\cdot)$  é um processo estocástico real satisfazendo:

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r GdW$$

para alguma  $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$  e  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$  e todos os tempos  $0 \leq s \leq r \leq T$ . Dizemos que  $X(\cdot)$  tem a seguinte equação diferencial estocástica (EDE):

$$dX = Fdt + GdW$$

para  $t \in [0, T]$ . Observe que as diferenciais nesta equação são simples abreviações das formas integrais acima, não possuindo significado matemático próprio.

**Teorema 2 (Fórmula de Itô Unidimensional)** - Suponha que  $X(\cdot)$  tem a seguinte EDE:

$$dX = Fdt + GdW$$

para  $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$  e  $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ . Assuma que  $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua e que  $u_t, u_x, u_{xx}$  existam e sejam contínuas. Além disto, defina:

$$Y(t) := u(X(t), t)$$

Então,  $Y$  tem a seguinte EDE:

$$dY = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} GdW$$

ou, equivalentemente, em forma integral:

$$Y(r) = Y(s) + \int_s^r \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} G^2 \right) dt + \int_s^r \frac{\partial u}{\partial x} G dW \text{ a.s.}$$

Observe que  $X(\cdot)$  possui trajetórias amostrais contínuas *a.s.*

**Teorema 3 (Regra do Produto de Itô)** - Suponha:

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt + G_1 dW \\ dX_2 = F_2 dt + G_2 dW, \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

para  $F_i \in \mathbb{L}^1(0, T)$  e  $G_i \in \mathbb{L}^2(0, T)$ , ( $i = 1, 2$ ). Então:

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt$$

ou, em forma integral (que é a fórmula de integração por partes de Itô):

$$\int_s^r X_2 dX_1 = X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) - \int_s^r X_1 dX_2 - \int_s^r G_1 G_2 dt$$

Observe que  $G_1 G_2 dt$  é a correção introduzida pelo cálculo estocástico de Itô. Se  $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ , recuperamos a fórmula do produto (e integração por partes) do cálculo clássico.

## A.4 Integral de Itô $n$ -dimensional

**Definição 28A (Espaço  $\mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ )** - Um processo  $\mathbf{G} = ((G_{ij}))$  pertence a  $\mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$  se

$$G^{ij} \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

**Definição 28B (Espaço  $\mathbb{L}_n^1(0, T)$ )** - Um processo  $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^n)$  pertence a  $\mathbb{L}_n^1(0, T)$  se:

$$F^i \in \mathbb{L}^1(0, T), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Definição 29 (Integral de Itô  $n$ -dimensional)** - Se  $\mathbf{G} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ , então

$$\int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W}$$

é uma variável aleatória  $n$ -dimensional, cujo  $i$ -ésimo componente é dado por:

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T G^{ij} dW^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Lema 6 (Propriedades da Integral de Itô  $n$ -dimensional)** - Se  $\mathbf{G} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ , então:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} \right\} &= 0; \\ \mathbb{E} \left\{ \left( \int_0^T \mathbf{G} d\mathbf{W} \right)^2 \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^T |\mathbf{G}|^2 ds \right\}. \end{aligned}$$

sendo  $|\mathbf{G}|^2 := \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} |G^{ij}|^2$ .

**Definição 30 (EDE  $n$ -dimensional)** - Seja  $\mathbf{X}(\cdot) = (X^1(\cdot), \dots, X^n(\cdot))$  um processo estocástico em  $\mathbb{R}^n$  dado por:

$$\mathbf{X}(r) = \mathbf{X}(s) + \int_s^r \mathbf{F} dt + \int_s^r \mathbf{G} d\mathbf{W}$$

para algum  $\mathbf{F} \in \mathbb{L}_n^1(0, T)$  e  $\mathbf{G} \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$  e todos os tempos  $0 \leq s \leq r \leq T$ . Dizemos que  $\mathbf{X}(\cdot)$  tem a seguinte equação diferencial estocástica (EDE):

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F} dt + \mathbf{G} d\mathbf{W}$$

ou seja:  $dX^i = F^i dt + \sum_{j=1}^m G^{ij} dW^j$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Teorema 4 (Fórmula de Itô  $n$ -dimensional)** - Suponha a EDE

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F} dt + \mathbf{G} d\mathbf{W}$$

conforme definida acima. Seja  $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$  contínua e tal que  $u_t$ ,  $u_{x_i}$ ,  $u_{x_i x_j}$  existam e sejam contínuas ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Então,  $u(\mathbf{X}(\cdot))$  tem a seguinte EDE:

$$d(u(\mathbf{X}(t), t)) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^m G^{il} G^{jl} dt$$

## A.5 Teorema da Existência e Unicidade

**Definição 31 (EDE de Itô)** - Dizemos que um processo estocástico  $\mathbf{X}(\cdot)$  em  $\mathbb{R}^n$  é de Itô se é solução da equação diferencial estocástica de Itô:

$$\begin{cases} d\mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{W} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

ou, em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} dX^1(t) \\ dX^2(t) \\ \vdots \\ dX^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW^1 \\ dW^2 \\ \vdots \\ dW^m \end{pmatrix}$$

e,

$$\begin{pmatrix} X^1(0) \\ X^2(0) \\ \vdots \\ X^n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^1 \\ X_0^2 \\ \vdots \\ X_0^n \end{pmatrix}$$

em  $t \in [0, T]$ , e:

- i.  $\mathbf{X}(\cdot)$  é progressivamente mensurável em relação à  $\mathcal{F}(\cdot)$ ;
- ii.  $\mathbf{F} := \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}_n^1(0, T)$ ;
- iii.  $\mathbf{G} := \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2(0, T)$ ;
- iv.  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}, s) ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}, s) d\mathbf{W}$ , *a.s.*  $\forall 0 \leq t \leq T$ .

**Teorema 5 (Existência e Unicidade)** - Suponha que  $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{m \times n}$  sejam contínuas e satisfaçam as seguintes condições:

$$(i) \quad \begin{aligned} |\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}, t)| &\leq L|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}| \\ |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}, t)| &\leq L|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|, \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} |\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)| &\leq L(1 + |\mathbf{x}|) \\ |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)| &\leq L(1 + |\mathbf{x}|), \quad \forall t \in [0, T], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

para alguma constante  $L$ . Seja  $\mathbf{X}_0$  qualquer variável aleatória  $n$ -dimensional tal que:

$$(iii) \quad \mathbb{E}\{|\mathbf{X}_0|^2\} < \infty$$

$$(iv) \quad \mathbf{X}_0 \text{ é independente de } \mathcal{W}^+(0)$$

onde  $\mathbf{W}(\cdot)$  é um movimento Browniano  $m$ -dimensional.

Então, existe uma solução única  $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$  da EDE apresentada na Definição 31<sup>3</sup>.

A unicidade dada por este teorema deve ser entendida em probabilidade, i.e., dadas

---

<sup>3</sup>Este teorema estabelece a existência e unicidade de uma solução forte da EDE, conforme definição dada no Apêndice C.



duas soluções da EDE  $\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} \in \mathbb{L}_n^2(0, T)$  com trajetórias contínuas *a.s.*, então:

$$\mathcal{P}(\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}, \forall 0 \leq t \leq T) = 1.$$

Observe também que a hipótese (ii) segue de (i).

**Observação** - Esta solução  $\mathbf{X}$  é um processo de Markov (ver Elliot & Kopp(2000), pp 132).

## *B Modelo para Precificação de Títulos Contingentes*

Neste anexo apresentaremos o Modelo para Precificação de Títulos Contingentes em mercados completos que não apresentam oportunidades de arbitragem, também conhecido como *Risk-Neutral Pricing*. Este modelo é a base de todos os resultados obtidos ao longo desta dissertação. As principais ferramentas utilizadas nesta modelagem são o Cálculo Estocástico e a Teoria de Martingales.

Podemos definir um título contingente, ou contrato derivativo do tipo europeu, com vencimento  $T \in \mathbb{R}^+$ , *grosso modo* como um instrumento financeiro cujo valor  $V$  depende do valor  $S$  do ativo-objeto ao qual se refere, e cujo *payoff* no vencimento  $V(T, S(T))$  é conhecido. Estes ativos-objetos podem ser, por exemplo, ações, moedas estrangeiras, *commodities*, taxas de juros e índices de ações.

Assim, dadas as especificações de um título contingente, como vencimento e *payoff* no vencimento, estamos interessados em encontrar o valor deste título  $V(t, S(t))$  para  $t \in [0, T)$  e  $S \in [0, +\infty)$ .

O modelo aqui tratado nos permitirá precificar qualquer contrato derivativo do tipo europeu, como por exemplo uma opção de compra (ou de venda) com vencimento  $T$  e preço de exercício  $E$ , cujo *payoff* no vencimento é dado, respectivamente, pela função:

$$V(S, T) = \max(S - E, 0) \text{ (ou } V(S, T) = \max(E - S, 0)\text{)}.$$

Neste contexto mais geral, um *Zero-coupon bond* com maturidade igual à  $T$  seria um título contingente trivial, cujo valor no vencimento é igual à 1, ou seja,  $V(T) = 1$

Embora este modelo pareça abrangente demais para tratarmos de um caso tão simples, optamos por apresentá-lo porque o seu entendimento nos dará uma visão mais clara dos pressupostos que estão por trás da precificação de *Zero-coupon bonds*.

As referências utilizadas foram basicamente Vieira(1999), Vieira & Pereira(2001), Duffie(1996), Oksendal(2005) e Neftci(1996), onde podemos encontrar as demonstrações dos teoremas apresentados.

## B.1 Conceitos Fundamentais

Seja o conjunto  $\mathbb{T} = [0, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$ , o período de tempo considerado no modelo;  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$  um espaço de probabilidade filtrado, e o processo de preços da economia, também chamado simplesmente de economia, ou mercado:

$$\mathbf{P}(t, \omega) := (P_0(t, \omega), \dots, P_n(t, \omega))$$

onde  $P_i(t, \omega)$  é o preço do  $i$ -ésimo ativo da economia no tempo  $t$ , e estado da natureza  $\omega$ , dado pelo processo de Itô  $n$ -dimensional:

$$P_i(t, \omega) = P_i(0) + \int_0^t \mu_i(s, \omega) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(s, \omega) dW^j(s, \omega), \quad i = 0, \dots, n \quad (\text{B.1})$$

sendo  $P_i(0) \in \mathbb{R}$  o preço inicial do ativo  $i$ ,  $\mu_i(s, \omega) \in \mathbb{L}^1(0, T)$  e  $\sigma_{ij}(s, \omega) \in \mathbb{L}^2(0, T)$  ( $i = 0, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ).

Com o intuito de simplificar a notação, daqui para a frente vamos omitir a dependência de  $t$  e/ou  $\omega$  dos processos  $P_i(\cdot)$ ,  $W^j(\cdot)$ ,  $\mu_i(\cdot)$ , e  $\sigma_{ij}(\cdot)$ .

Neste modelo consideraremos o ativo  $i = 0$ , com valor inicial unitário  $P_0(0) = 1$ , como o ativo instantaneamente livre de risco, ou seja,  $\sigma_{0j} = 0$ , ( $j = 1, \dots, m$ ), cujo rendimento instantâneo será dado pela taxa de juro instantaneamente livre de risco  $r(\cdot)$ . Matematicamente:

$$P_0(t) := P_0(0) + \int_0^t \mu_0 ds = 1 + \int_0^t P_0 r ds$$

Este ativo será utilizado como numerário, isto é, como o preço de referência da economia.

Em resumo, o processo de preços seguido pelos ativos da economia  $\mathbf{P}(\cdot)$  é descrito por:

$$P_i(t) = \begin{cases} 1 + \int_0^t P_0 r ds, & \text{se } i = 0 \\ P_i(0) + \int_0^t \mu_i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij} dW^j, & \text{se } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

que pode ser escrito na forma:

$$dP_i(t) = \begin{cases} P_0 r dt, & \text{se } i = 0 \\ \mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j, & \text{se } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

A partir de agora, considere o espaço:

$$\mathcal{H}^2 := \left\{ x(t, \omega) \in \mathbb{L}^2 \left| \mathbb{E} \left\{ \int_0^T x(s, \omega)^2 ds \right\} < +\infty \right. \right\}$$

**Observação** - Seja o processo de preços da economia até a data de vencimento  $T$  dado por:

$$P_i(T) = P_i(0) + \int_0^T \mu_i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^T \sigma_{ij} dW^j, \quad \text{se } i = 1, \dots, n.$$

Note que, dado um tempo  $t < T$ , não conhecemos este processo em  $(t, T]$ . Assim, precisamos calcular a sua esperança condicional, dado o conjunto de informação conhecido até  $t$ : a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$ .

Assim, supondo que  $\sigma_{ij}(\cdot) \in \mathcal{H}^2$ , pela Propriedade Martingale da Integral de Itô, temos que:

$$\mathbb{E} \{P_i | \mathcal{F}_t\} = P_i(0) + \int_0^t \mu_i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij} dW^j$$

o que implica que:

$$P_i(T) = \mathbb{E} \{P_i | \mathcal{F}_t\} + \sum_{j=1}^m \int_t^T \sigma_{ij} dW^j \quad (\text{B.4})$$

o que significa que o preço do  $i$ -ésimo ativo da economia, visto do tempo  $t < T$  é constituído por uma parte esperada, representada pela esperança condicional no lado direito de (B.4), e por uma estocástica, representada pelo somatório de integrais de Itô, que podem ser interpretadas como os choques aleatórios que afetam os preços dos ativos da economia.

**Definição 1 (Mercado Normalizado)** - O processo  $(n + 1)$ -dimensional

$$\bar{\mathbf{P}}(\cdot) = (1, \bar{P}_1(\cdot), \dots, \bar{P}_n(\cdot)) := \left(1, \frac{P_1(\cdot)}{P_0(\cdot)}, \dots, \frac{P_n(\cdot)}{P_0(\cdot)}\right) \quad (\text{B.5})$$

é chamado de mercado normalizado.

**Definição 2 (Portfólio)** - Um Portfólio ou Estratégia no mercado  $\mathbf{P}(\cdot)$  (ou no mercado normalizado  $\bar{\mathbf{P}}(\cdot)$ ) é um processo estocástico  $(n + 1)$ -dimensional,  $\mathcal{F}_t$ -adaptado, de-

notado por  $\Theta(\cdot) := (\Theta_0(\cdot), \dots, \Theta_n(\cdot))$ .<sup>1</sup>

**Observação** -  $\Theta_i(\cdot)$  é a quantidade do ativo  $i$  no portfólio. Se  $\Theta_i(\cdot) > 0$ , dizemos que o investidor assumiu uma posição comprada (*long position*) no ativo  $i$ . Se  $\Theta_i(\cdot) < 0$ , dizemos que ele assumiu uma posição vendida (*short position*). Além disso, dizemos que  $\Theta_i(\cdot)$  é  $\mathcal{F}_t$ -adaptado para garantir que o investidor não utilize informação futura ao criar o portfólio no tempo  $t$ .

**Definição 3 (Valor de um Portfólio)** - O valor de um portfólio  $\Theta(\cdot)$  no mercado  $\mathbf{P}(\cdot)$  é o processo estocástico unidimensional definido por:

$$V^\Theta(t) := \sum_{i=0}^n \Theta_i(t)P_i(t). \quad (\text{B.6})$$

**Definição 4 (Portfólio Autofinanciável)** - Um portfólio  $\Theta$  é autofinanciável no mercado  $\mathbf{P}$  se o seu valor  $V^\Theta$  satisfazer a seguinte condição:

$$dV^\Theta = \sum_{i=0}^n \Theta_i dP_i \quad (\text{B.7})$$

Para que esta condição esteja bem definida, temos que ter:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \Theta_i, P_0 r \Theta_0 \in \mathbb{L}^1(0, T) \text{ e } \sum_{i=1}^n \Theta_i \sigma_{ij} \in \mathbb{L}^2(0, T), j = 1, \dots, m.$$

Um portfólio autofinanciável é um portfólio que não necessita de fluxos de caixa externos durante o período de tempo considerado pelo modelo, e também considera que todo o ganho obtido ao longo do tempo é reinvestido em algum dos ativos  $i$ .

**Definição 5 (Estratégia de Arbitragem)** - Uma estratégia de arbitragem no mercado  $\mathbf{P}$  é um portfólio  $\Theta$  autofinanciável tal que:

- i.  $V^\Theta(0) = 0$ ,  $V^\Theta(T) \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(V^\Theta(T) > 0) > 0$ ;
- ii.  $V^\Theta \in \mathcal{H}^2$  ou  $V^\Theta \in \mathbf{K}$ .

sendo

$$\mathbf{K} := \{x(t, \omega) \text{ } \mathcal{F}_t\text{-adaptado} \mid \exists k \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } x(t, \omega) > -k\}.$$

Ou seja, uma estratégia de arbitragem é uma estratégia que possui valor inicial nulo, não requer fluxos de caixa externos ao longo do tempo, e possui um valor maior que zero com probabilidade positiva no final do investimento, em  $T$ . Ou seja, é uma forma de obter lucro sem risco. A hipótese de que  $V^\Theta \in \mathbf{K}$  significa que o valor deste portfólio deve ser

---

<sup>1</sup>O que significa:  $\Theta(t, \omega) := (\Theta_0(t, \omega), \dots, \Theta_n(t, \omega))$ .

limitado inferiormente, pois a possibilidade de endividamento não é ilimitada.

**Definição 6 (Título Contingente)** - Um título contingente, ou contrato derivativo europeu, com data de vencimento  $T$ , é uma variável aleatória  $\mathcal{F}_T$ -mensurável<sup>2</sup> denotada por  $V$ .

Por exemplo, um *Zero-coupon bond* com maturidade  $T$  é um título contingente cujo *payoff* em  $T$  é conhecido com certeza, e é dado por  $V(T) \equiv 1$ . Uma opção de compra europeia, por outro lado, possui o *payoff*  $V(T) = \max(S(T) - E, 0)$ , onde  $S(T)$  é o preço do ativo-objeto da data de vencimento.

**Definição 7 (Título Contingente Atingível)** - Um título contingente  $V$  é atingível no mercado  $\mathbf{P}$  se existir um portfólio  $\Theta$  autofinanciável com  $V^\Theta \in \mathbf{K}$  ou  $V^\Theta \in \mathcal{H}^2$  e  $z \in \mathbb{R}$  tais que:

$$\begin{aligned} V = V^{\Theta,z}(T) &= z + \int_0^T \sum_{i=0}^n \Theta_i dP_i \\ &= z + \int_0^T dV^\Theta \end{aligned} \tag{B.8}$$

Assim, um título contingente é atingível se o seu valor em  $T$  puder ser reproduzido por uma estratégia autofinanciável satisfazendo as hipóteses do item ii da Definição 5, dada por seu valor inicial  $z$  mais o ganho auferido em  $[0, T]$ ,  $\int_0^T \sum_{i=0}^n \Theta_i dP_i$ .

**Observação** - Se não existe possibilidade de arbitragem na economia, o valor do título contingente e da estratégia autofinanciável que o replica devem ser iguais. Portanto, se for possível determinar o valor desta estratégia, será possível determinar o valor do título contingente.

**Definição 8 (Mercado Completo)** - Um mercado  $\mathbf{P}$  é completo se todo título contingente for atingível.

**Definição 9 (Medida de Probabilidade Martingale Equivalente)** - Uma medida de probabilidade martingale equivalente  $\mathcal{Q}$  é uma medida de probabilidade em  $(\Omega, \mathcal{F})$ , equivalente à  $\mathcal{P}$ , ou seja,  $\mathcal{P}(A) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{Q}(A) > 0$ , tal que processo de preços relativos  $\bar{\mathbf{P}}$  é martingale sob  $\mathcal{Q}$ .

---

<sup>2</sup>Isto significa que o seu valor pode ser determinado com o conjunto de informação disponível até  $T$ .

## B.2 Resultados Fundamentais

**Teorema 1 (Caracterização probabilística da inexistência de arbitragem)** -

Se existir uma medida de probabilidade martingale equivalente  $\mathcal{Q}$  no mercado  $\mathbf{P}$ , então não existe possibilidade de arbitragem neste mercado.

Neste contexto financeiro, a medida martingale equivalente  $\mathcal{Q}$  também é chamada de *Risk-Neutral Measure*.

**Teorema 2 (Invariância em relação ao numerário)** - Seja  $\Theta \in \mathcal{H}^2$  um portfólio e  $V$  um título contingente com data de vencimento  $T$ . Então:

- i.  $\Theta$  é autofinanciável em  $\mathbf{P} \Leftrightarrow \Theta$  é autofinanciável em  $\bar{\mathbf{P}}$ ;
- ii.  $\Theta$  é uma arbitragem em  $\mathbf{P} \Leftrightarrow \Theta$  é uma arbitragem em  $\bar{\mathbf{P}}$ ;
- iii.  $V$  é atingível em  $\mathbf{P} \Leftrightarrow V$  é atingível em  $\bar{\mathbf{P}}$ ;
- iv.  $\mathbf{P}$  é completo  $\Leftrightarrow \bar{\mathbf{P}}$  é completo.

**Definição 10 (Mercado Redutível)** - Dizemos que um mercado  $\mathbf{P}$  é redutível se existir um processo estocástico  $\mathcal{F}_t$ -adaptado  $\lambda : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  que seja solução do sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} - r(t) \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

e satisfaça as seguintes condições:

$$\lambda \in \mathbb{L}_m^2(0, T)$$

e

$$\mathbb{E} \left\{ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2 ds \right) \right\} < +\infty$$

Esta segunda condição é conhecida como condição de Novikov.

A existência de tal processo  $\lambda$  significa que existe uma relação de proporcionalidade entre o risco - representado por  $\sigma_{ij} (j = 1, \dots, m)$  - e o excesso de retorno sobre a taxa instantaneamente livre de risco  $(\mu_i - rP_i)$ , que é igual para todos os ativos da economia.

**Observação** - No caso em que consideramos apenas uma fonte de incerteza ( $m = 1$ )

temos que a condição de redutibilidade se reduz à:

$$\lambda = \frac{\mu_i - rP_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

ou seja:

$$\frac{\mu_i - rP_i}{\sigma_i} = \frac{\mu_j - rP_j}{\sigma_j}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Portanto, o excesso de retorno por unidade de risco é igual para todos os ativos da economia. Na literatura  $\lambda$  é chamado de *market price of risk*.

**Teorema 3 (Girnasov)** - Seja o processo de Itô

$$dP_i = \mu_i dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j, \quad i = 1, \dots, n$$

e suponha que exista um processo  $\boldsymbol{\lambda}$  com as propriedades descritas na **Definição 10**. Seja  $\rho(t, \omega)$  um processo definido por:

$$\rho(t, \omega) = \exp \left[ - \int_0^t \sum_{j=1}^m \lambda_j dW^j - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\lambda}|^2 ds \right] \quad (\text{B.10})$$

e  $\mathcal{Q}$  uma medida de probabilidade em  $(\Omega, \mathcal{F})$  tal que  $d\mathcal{Q} = \rho d\mathcal{P}$ . Então, o processo definido por  $\mathbf{W}^{\mathcal{Q}} = \mathbf{W} + \int_0^t \boldsymbol{\lambda} ds$  será um processo de Wiener  $m$ -dimensional no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ . Além disso, nesse espaço, o processo  $P_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) possuirá a representação:

$$dP_i = r dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} dW^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

onde  $r$  é o processo seguido pela taxa de juro de curto prazo, considerada na definição do *numeraire*.

**Observação** -  $\rho(t, \omega)$  é a derivada de Radon-Nicodym, uma função de  $\omega \in \Omega$  que, a partir da medida de probabilidade  $\mathcal{P}$ , redistribui a massa de probabilidades dos eventos de  $\mathcal{F}$  de forma a criar a medida  $\mathcal{Q}$ . Como  $\rho(t, \omega) > 0$ , temos que  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  são equivalentes.

**Teorema 4A** - Um mercado  $P$  não possui possibilidades de arbitragem se, e somente se,  $P$  for redutível.

**Teorema 4B** - Um mercado  $P$  não possui possibilidades de arbitragem se, e somente se, existir  $\mathcal{Q}$  medida de probabilidade martingale equivalente à  $\mathcal{P}$ .



**Teorema 5** - Seja a matriz de variâncias (a mesma utilizada em (B.1) e (B.9)):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nm} \end{pmatrix}$$

e suponha que exista  $\mathcal{Q}$ , medida de probabilidade martingale equivalente à  $\mathcal{P}$ . Então, o mercado  $\mathbf{P}$  é completo se, e somente se,  $\text{posto}[\boldsymbol{\sigma}] = m$ .

**Observação** - Se  $\text{posto}[\boldsymbol{\sigma}] = m$ , o sistema (B.9) possui solução única, e portanto, considerando o Teorema de Girnasov, temos que em um mercado completo a medida  $\mathcal{Q}$  também deve ser única.

De fato, em 1981 Harrison & Pliska demonstraram o seguinte teorema:

**Teorema 6** - Um mercado é completo se, e somente se, existir uma única medida de probabilidade martingale  $\mathcal{Q}$  equivalente à  $\mathcal{P}$ .

Agora apresentaremos o teorema fundamental para a precificação de títulos contingentes em mercados completos e livre de arbitragens.

**Teorema 7 (Precificação de Títulos Contingentes)** - Seja  $\mathbf{P}$  um mercado redutível e completo. Então, o preço livre de arbitragem, em  $t \in [0, T)$ , de qualquer título contingente  $V$  com data de vencimento  $T$ , denotado por  $\Pi_t(V)$ , é dado por:

$$\Pi_t(V) = P_0(t) \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \frac{V}{P_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \quad (\text{B.11})$$

### B.3 O Preço Livre de Arbitragem de um *Zero-coupon bond*

Considerando que o ativo  $P_0$  tenha a seguinte EDE (B.3):

$$P_0(t) = r(t)P_0(t)dt, \quad P_0(0) = 1, \quad t \geq 0$$

cuja solução é dada por:

$$P_0(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$$

e que, para um *Zero-coupon bond*,  $V \equiv 1$ , substituindo  $P_0(t)$  em (B.11), obtemos:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \Pi_t(1) = e^{\int_0^t r(s)ds} \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \frac{1}{e^{\int_0^T r(s)ds}} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde  $P(t, T)$  é o preço no tempo  $t$  de um *Zero-coupon bond* de maturidade  $T$ , e  $\mathcal{Q}$  é a medida martingale equivalente à  $\mathcal{P}$ .

Finalmente, como os processos estocásticos envolvidos na modelagem são markovianos (ver Elliott & Kopp(2000), pp 132-133), podemos reescrever (B.12) como:

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ e^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| r(t) = r_t \right\} \quad (\text{B.13})$$

e, para o modelo de dois fatores:

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ e^{-\int_t^T r(s, \sigma)ds} \middle| r(t) = r_t, \sigma(t) = \sigma_t \right\}. \quad (\text{B.14})$$

## *C O Teorema de Feynman-Kac*

Neste capítulo trataremos da relação entre equações diferenciais parciais e equações diferenciais estocásticas. O objetivo é reescrever a formulação probabilística do problema de precificação de um *Zero-coupon bond*, que é dado na forma de uma esperança condicional de uma expressão envolvendo uma ou duas variáveis de estado (no nosso caso, a taxa de juro de curto prazo e a volatilidade) regidas por uma EDE. Então, inicialmente vamos apresentar o resultado que nos possibilita tal transformação, que é o Teorema da Representação de Feynman-Kac, seguindo o livro de Karatzas & Shreve (2000) - onde podemos encontrar um tratamento rigoroso do assunto aqui exposto, precedido por algumas notas preliminares para detalhar as hipóteses do teorema, e estabelecer a notação utilizada. Em seguida vamos aplicá-lo para reescrever os problemas de precificação de *Zero-coupon bonds*, para os modelos de um e dois fatores, como problemas de Cauchy.

Começemos, então, com algumas preliminares que precedem a enunciação do teorema propriamente dito.

Sejam as funções Borel-mensuráveis

$$b_i(\mathbf{x}, t), \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m.$$

Considere o *vetor de drift* definido como:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) := \{b_i(\mathbf{x}, t)\}_{1 \leq i \leq n}$$

e a matriz de dispersão, ou matriz de variâncias, como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) := \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

Seja a EDE  $n$ -dimensional dada por:

$$dX_t^i = b_i(\mathbf{X}_t, t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(\mathbf{X}_t, t)dW_t^j, \quad i = 1 \dots n \quad (\text{C.1})$$

sendo  $\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_t | 0 \leq t < \infty\}$  um movimento Browniano  $m$ -dimensional e  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t | 0 \leq t < \infty\}$  um processo estocástico com trajetórias contínuas que seja solução do sistema acima. Reescrevendo (C.1) em notação matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \\ \vdots \\ dX_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \\ \vdots \\ dW_t^m \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Definamos agora a matriz de difusão  $\mathbf{a}$  (quadrada e  $n \times n$ ) deste sistema como:

$$a_{ij}(\mathbf{x}, t) := \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(\mathbf{X}_t, t) \sigma_{jk}(\mathbf{X}_t, t), \quad i, j = 1 \dots n \quad (\text{C.3})$$

que em notação matricial, fica como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{n1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1m} & \sigma_{2m} & \cdots & \sigma_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m \sigma_{1k}^2 & \sum_{k=1}^m \sigma_{1k} \sigma_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^m \sigma_{1k} \sigma_{nk} \\ \sum_{k=1}^m \sigma_{2k} \sigma_{1k} & \sum_{k=1}^m \sigma_{2k}^2 & \cdots & \sum_{k=1}^m \sigma_{2k} \sigma_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m \sigma_{nk} \sigma_{1k} & \sum_{k=1}^m \sigma_{nk} \sigma_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^m \sigma_{nk}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Definição 1 (Solução Forte)** - Uma **solução forte** de uma equação diferencial estocástica  $n$ -dimensional em um dado espaço de probabilidade filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ , em relação a um movimento Browniano fixo  $\mathbf{W}$ , e condição inicial  $\mathbf{X}_0$ , é um processo estocástico  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t | 0 \leq t \leq \infty\}$  com trajetórias contínuas, satisfazendo as seguintes propriedades:

- i.  $\mathbf{X}$  é  $\mathcal{F}_t$  - adaptado;
- ii.  $\mathcal{P}(\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0) = 1$ ;
- iii.  $\mathcal{P}\left(\int_0^t [|b_i(\mathbf{X}_s, s)| + \sigma_{ij}^2(\mathbf{X}_s, s)] < \infty\right) = 1, \forall i = 1 \dots n, j = 1 \dots m, \text{ e } 0 \leq t < \infty$ ;
- iv. A versão integral da equação diferencial estocástica (C.1),

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(\mathbf{X}_s, s) ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{ij}(\mathbf{X}_s, s) dW_s^{(j)} \quad (\text{C.4})$$

para  $0 \leq t < \infty$ ,  $i = 1 \dots n$ , vale *a.s.*

Ou seja, dados uma EDE com sua condição inicial, um espaço de probabilidade filtrado e um movimento browniano  $m$ -dimensional, o resultado é o processo estocástico  $\mathbf{X}$ .

**Definição 2 (Solução Fraca)** - Uma solução fraca de uma equação diferencial estocástica  $n$ -dimensional é uma tripla  $(\mathbf{X}, \mathbf{W}), (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}), \{\mathcal{F}_t\}$  onde:

- i.  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  é um espaço de probabilidade, e  $\{\mathcal{F}_t\}$  é uma filtração de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ ;
- ii.  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t, \mathcal{F}_t | 0 \leq t < \infty\}$  é um processo contínuo que toma valores em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_t, \mathcal{F}_t | 0 \leq t \leq \infty\}$  é um movimento Browniano  $m$ -dimensional;
- iii. idem solução forte;
- iv. idem solução forte.

Neste caso, dada a EDE e sua condição inicial, o resultado são os processos estocásticos  $(\mathbf{X}, \mathbf{W})$ , o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  e a filtração  $\{\mathcal{F}_t\}$ .

**Observação** - A existência de uma solução forte implica a existência de uma solução fraca.

Seja o operador diferencial de segunda ordem  $\mathcal{A}_t f$  definido por:

$$(\mathcal{A}_t f)(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \quad (\text{C.5})$$

com  $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ .

Dado  $T > 0$  arbitrário, e constantes apropriadas  $L > 0$  e  $\lambda \geq 1$ , vamos considerar as funções  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\kappa(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow [0, \infty)$  contínuas, que satisfaçam as seguintes condições:

- i.  $|f(\mathbf{x})| \leq L(1 + \|\mathbf{x}\|^{2\lambda})$  ou  $f(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
- ii.  $|g(\mathbf{x}, t)| \leq L(1 + \|\mathbf{x}\|^{2\lambda})$  ou  $g(\mathbf{x}, t) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$ ;

No que segue, consideremos a seguinte EDE:

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{x} + \int_t^s b(\mathbf{X}_{s'}, s') ds' + \int_t^s \sigma(\mathbf{X}_{s'}, s') d\mathbf{W}_{s'}, \quad t \leq s < \infty \quad (\text{C.6})$$

satisfazendo as seguintes hipóteses:

i. os coeficientes  $b_i(\mathbf{x}, t), \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuos, tal que,

$$\|\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\|^2 \leq K^2(1 + \|\mathbf{x}\|^2), \quad \forall 0 \leq t \leq \infty, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, K > 0;$$

ii. A EDE em forma integral possui solução fraca  $(\mathbf{X}, \mathbf{W}), (\Omega, \mathcal{F}, P)$  e  $\mathcal{F}_s$ ;

iii. a solução é única no sentido da Lei das Probabilidades.

**Teorema (Representação de Feynman-Kac)** - Considerando as preliminares anteriores, suponha que  $v(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua, de classe  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  satisfazendo o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} + \kappa v = (\mathcal{A}_t v) + g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ v(\mathbf{x}, T) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

e a seguinte condição de crescimento polinomial:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(\mathbf{x}, T)| \leq M(1 + \|\mathbf{x}\|^{2\mu}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{C.8})$$

para algum  $M > 0$  e  $\mu \geq 1$ . Então  $v(\mathbf{x}, t)$  admite a representação estocástica

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, T) = \mathbb{E}^{\mathbf{x}, t} \left\{ f(\mathbf{X}_T) \exp \left( - \int_t^T \kappa(\mathbf{X}_{s'}, s') ds' \right) + \right. \\ \left. + \int_t^T g(\mathbf{X}_s, s) \exp \left( - \int_t^s \kappa(\mathbf{X}_{s'}, s') ds' \right) ds \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

em  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ . Em particular, tal solução é única.

**Prova:** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Karatzas & Shreve (2000).

## C.1 Aplicando o Teorema de Feynman-Kac ao Problema de Precificação de *Zero-coupon bonds*

Nesta seção vamos aplicar o Teorema de Feynman-Kac para transformar a formulação probabilística do nosso problema de precificação de *Zero-coupon bonds*, conforme apresentada no Apêndice B, em uma equação diferencial parcial retroativa (*backward*), com sua respectiva condição final.

### C.1.1 Modelos com Um Fator

Nos modelos de um fatores, o preço de um *Zero-coupon bond* é da forma:

$$v(x, t; T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \kappa(X_s, s) ds \right) \middle| X_t = x \right\}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{C.10})$$

Neste caso, consideramos o Teorema de Feynman-Kac com  $n = m = 1$ . Assim, a EDE (C.2) pode ser escrita como:

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW \quad (\text{C.11})$$

e a matriz de difusão (C.3) se resume a:

$$\mathbf{a} = \sigma^2$$

O operador diferencial (C.5) é dado por:

$$(\mathcal{A}_t v)(x, t) = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{C.12})$$

Comparando (C.10) com (C.9), concluímos que:

$$f(\cdot) = 1$$

$$g(\cdot) = 0$$

e finalmente, aplicando o Teorema de Feynman-Kac, podemos escrever (C.10) como:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \kappa v = -\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \text{ em } \mathbb{R} \times [0, T) \\ v(x, T; T) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

### C.1.2 Modelos com Dois Fatores

No caso de modelos de dois fatores, o preço de uma *Zero-coupon bond* é dado pela esperança condicional:

$$v(x_1, x_2, t; T) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left\{ \exp \left( - \int_t^T \kappa(X_s^1, X_s^2, s) ds \right) \middle| X_t^1 = x_1, X_t^2 = x_2 \right\} \quad (\text{C.14})$$

Como estamos considerando duas fontes distintas de ruído, considerarmos  $n = m = 2$  no Teorema de Feynman-Kac. Assim, (C.2) se resume a:

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

e a matriz de difusão (C.3) a:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 & \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} \\ \sigma_{21}\sigma_{11} + \sigma_{22}\sigma_{12} & \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

Desta forma, o operador diferencial (C.5) é dado por:

$$(\mathcal{A}_t v)(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2}a_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + b_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad (\text{C.17})$$

Comparando (C.14) com (C.9), concluímos que:

$$f(\cdot) = 1$$

$$g(\cdot) = 0$$

e finalmente, aplicando o Teorema de Feynman-Kac, podemos escrever (C.14) como o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \kappa v = -\frac{1}{2}a_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{2}a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - b_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} - b_2 \frac{\partial v}{\partial x_2}, \text{ em } \mathbb{R}^2 \times [0, T) \\ v(x_1, x_2, T) = 1, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (\text{C.18})$$