UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Curso de Pós-Graduação em Matemática

SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO

$$f_y u_x - f_x u_y = g.$$

Elizabeth Ferreira da Costa Gomes

Tese de doutorado

Orientador: Prof. Marcos Sebastiani

Porto Alegre
1996

INTRODUÇÃO

É sabido que o teorema de Cauchy-Kowalewsky assegura a existência de soluções analíticas para equações diferenciais parciais sob condições bastante gerais, mas não garante a existência de tais soluções numa vizinhança de um ponto onde todos os hiperplanos são característicos.

O objetivo deste trabalho é classificar as soluções da equação

$$f_y u_x - f_x u_y = g \tag{1}$$

onde:

-f é uma função real analítica numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$, $f \geq 0$, $f > 0$ fora da origem e (0,0) é um ponto crítico isolado de f.

-g é uma função real analítica numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$.

A seguir apresentamos algumas definições que estão no corpo do trabalho, mas que acredito que sejam necessarias a compreensão desta introdução.

Dizemos que a solução u é:

-regular se u é analítica numa vizinhança da origem.

-singular se u é analítica numa vizinhança da origem exceto, talvez, na origem.

Definimos os espaços:

-$\sum$: espaço dos germes de funções g analíticas numa vizinhança da origem tais que a equação (1) tem solução singular.

-Γ : espaço dos germes de funções g analíticas numa vizinhança da origem tais que a equação (1) tem solução regular.

Vamos mostrar o seguinte resultado:

" Se o ideal jacobiano de f tem codimensão finita sobre $\mathbb{R}\{x,y\}$, então o quociente $T = \sum/\Gamma$ é um $\mathbb{R}\{t\}$−módulo livre de posto $<\mu$ (= número de Milnor da função f) ".

Como motivação, no primeiro capítulo, examinamos o caso particular: $f(x,y) = x^2 + y^2$

A equação (1), neste caso é

$$yu_x - xu_y = g \tag{2}$$

Temos os seguintes teoremas:
Teorema 1:

A equação (2) tem solução regular se e somente se

$$\int_{f\leq\epsilon} g dx dy = 0, \forall\epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.} \tag{3}$$

Teorema 2:

Se a eq. (2) tem uma solução de classe C^1em $B_\epsilon - \{(0,0)\}$, para algum $\epsilon > 0$, então tem uma solução regular.

Observação importante: A solução regular não é, necessariamente, uma extensão da solução C^1.

Motivados por este exemplo, tentamos relacionar a condição (3) com a equação (1), no caso geral. Isto é feito no capítulo II, onde temos o seguinte resultado:
Teorema:

A equação (1) tem solução singular se e somente se

$$\int_{f\leq\epsilon} g dx dy = 0, \ \forall\epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.}$$

Já não podemos mais garantir a existência de uma solução regular.

Sob a hipótese de que J_f (o ideal jacobiano de f) tem codimensão finita em $\mathbb{R}\{x,y\}$, no capítulo IV vemos que $\sum$ tem uma estrutura de $\mathbb{R}\{t\}-$módulo, $\Gamma \subset \sum$ como $\mathbb{R}\{t\}-$submódulo e que o posto do módulo $T = \sum/\Gamma < \mu$.

Para isto, observamos a relação entre a equação $f_y u_x - f_x u_y = g$ e a equação $g dx \wedge dy = -df \wedge du$. A partir daí, relacionamos o posto de $\sum/\Gamma$ com o posto de um $\mathbb{C}\{t\}-$módulo quociente no espaço dos germes de 2- formas diferenciais holomorfas numa vizinhança da origem em $\mathbb{C}^2$, supondo que f e g são restrições de funções analíticas numa vizinhança da origem em $\mathbb{C}^2$ que também serão denotadas por f e g. Indicamos por (x,y) as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e por (z,w) as coordenadas em $\mathbb{C}^2$. (Os resultados sobre formas utilizados neste capítulo se encontram no capítulo III).

Foi provado por Brieskorn e Sebastiani que o espaço

$$G = \frac{\Omega^2}{df \wedge d\Omega^0}$$

onde Ω^p é o espaço das p-formas diferenciais holomorfas numa vizinhança da origem em $\mathbb{C}^2$ é um $\mathbb{C}\{t\}-$módulo livre de posto μ, onde $\mu = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\{x,y\}/(f_x, f_y)$ é o número de Milnor da função f.

A aplicação

$$\begin{aligned} \sigma &: \mathbb{R}\{x,y\} \to G \\ \sigma(g) &= [g(z,w)dz \wedge dw] \end{aligned}$$

é linear e seu núcleo é o módulo Γ.

Definimos $S = \mathbb{R}\{x,y\}/\Gamma$ e $S_c = S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Como S é um $\mathbb{R}\{t\}-$módulo, S_c é um $\mathbb{C}\{t\}-$módulo.

Passamos σ ao quociente e definimos o isomorfismo de $\mathbb{C}\{t\}-$módulos

$$\tau : S_c \to G.$$

Como corolário, temos:

(1) S é um módulo livre de posto μ.
(2) T é um módulo livre de posto$<\mu$.

Mostramos ainda que

$$posto(T) = \dim_{\mathbb{R}} \sum / (\sum \cap J_f).$$

Agradeço a todos os professores e colegas que me incentivaram.

Em especial, agradeço ao Prof. Marcos Sebastiani, presença marcante em todo o meu trabalho, quer pelo estímulo à pesquisa, quer pela orientação segura e constante.

Agradeço ao Prof. Jean-Paul Brasselet pelas sugestões dadas ao trabalho e por todo apoio e auxilio dados por ocasião da preparação da defesa da tese.

Agradeço ao Prof. Márcio Soares pelo entusiasmo manifestado pelo trabalho e pelas sugestões ao mesmo.

Agradeço ao Prof. Jaime Bruck Ripoll pelo apoio constante.

CAPÍTULO I

0. INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estudar a existência de soluções analíticas numa vizinhança de um ponto singular, num caso particular.

A equação que vamos considerar é

$$xu_y - yu_x = g, \tag{1}$$

onde g é uma função real analítica numa vizinhança de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$.

1.PRELIMINARES

Usando as coordenadas polares $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, a equação (1) se transforma em

$$u_\theta = g,$$

que é bem mais fácil de ser resolvida. Porém, surge o seguinte problema : como a mudança de coordenadas não é analítica na origem, não há nada que nos garanta que a solução será. Portanto, vamos considerar o problema em $\mathbb{C}^2$, onde a singularidade é removível, e depois resolvê-lo em $\mathbb{R}^2$.

Mostraremos os seguintes teoremas :

Teorema 1: *A equação (1) tem solução analítica numa vizinhança de* $(0,0)$ *em* $\mathbb{R}^2$ *se, e somente se,*

$$\iint_{x^2+y^2\leq\epsilon^2} g(x,y)dxdy = 0,$$

para todo $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

Teorema 2: *Se a equação (1) tem uma solucão* C^1 *em* $D_\epsilon - \{(0,0)\}$ *(onde* D_ϵ *é o disco de centro na origem e raio* $\epsilon > 0$ *) para certo* $\epsilon > 0$*, então (1) tem uma solução analítica numa vizinhança de* $(0,0)$.

2. A MUDANÇA DE COORDENADAS $(\xi,\eta) \to (\xi\cos\eta, \xi\sin\eta)$ EM $\mathbb{C}^2$

Seja $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a mudança de coordenadas $\varphi(\xi,\eta) = (\xi\cos\eta, \xi\sin\eta)$.
A mudança de coordenadas φ tem as seguintes propriedades:

2.1. A imagem de φ está no conjunto

$$(\mathbb{C}^2 - \{x^2+y^2=0\}) \cup \{(0,0)\}.$$

2.2. $\varphi(\xi,\eta) = \varphi(\xi',\eta')$ se e somente se uma das seguintes condições se verifica :

$$\begin{array}{lll} (i) & \xi = & \xi' = 0, \\ (ii) & \xi = & \xi' \text{ e } \eta' = \eta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ (iii) & \xi = & -\xi' \text{ e } \eta' = \eta + (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

2.3. A imagem de φ é o conjunto

$$(\mathbb{C}^2 - \{x^2+y^2=0\}) \cup \{(0,0)\}.$$

De fato,
Qualquer que seja $\eta \in \mathbb{C}$, $\varphi(0,\eta) = (0,0)$.
Se $x^2+y^2 \neq 0$, existe um $\eta \in \mathbb{C}$, tal que $e^{2i\eta} = \frac{x+iy}{x-iy}$. Se definimos

$$\xi = e^{i\eta}(x-iy) = e^{-i\eta}(x+iy), \text{ temos}$$

$$x+iy = \xi e^{i\eta}, \text{ e } x-iy = \xi e^{-i\eta}.$$

Então,

$$x = \xi\frac{e^{i\eta}+e^{-i\eta}}{2} = \xi \ \cos\eta \text{ e } y = \xi\frac{e^{i\eta}-e^{-i\eta}}{2i} = \xi \ \sin\eta \ \bullet$$

2.4. Em $(\mathbb{C}^2 - \{x^2+y^2=0\}) \cup \{(0,0)\}$, φ tem a correspondência inversa

$$\begin{cases} \xi^2 = x^2+y^2 \\ \eta = -\frac{i}{2}\ln\frac{x+iy}{x-iy} = \frac{i}{2}\ln\frac{x-iy}{x+iy} \end{cases}$$

e $\varphi(\xi,\eta) = (0,0) \iff \xi = 0$.

Segue de 2.3 •

2.5. Sejam $\Lambda = \mathbb{C}^2 - \{\xi = 0\}$ e $\Omega = \mathbb{C}^2 - \{x^2+y^2 = 0\}$. $\varphi : \Lambda \to \Omega$ é sobrejetiva e é um isomorfismo analítico local.

Com efeito, de 2.3 segue que φ é sobrejetiva. Como seu jacobiano ξ é diferente de zero em Λ, φ é um isomorfismo analítico local em Λ •

2.6. Seja $B_r = \{\, |x|^2 + |y|^2 \langle r^2\}$. Definindo $A_r = \varphi^{-1}(B_r)$, $A_r = \{(\xi,\eta); |\xi|^2\, [1 + 2\sinh^2(Im\eta)]\langle r^2\}$ e A_r é conexo.

Seja $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, $\eta_1 , \eta_2 \in \mathbb{R}$.
Como

$$\begin{aligned} |\cos\eta|^2 + |\sin\eta|^2 &= \cosh^2\eta_2 + \sinh^2\eta_2 \\ &= 1 + 2\sinh^2\eta_2, \end{aligned}$$
$$|x|^2 + |y|^2 = |\xi|^2\, [1 + 2\sinh^2(Im\eta)].$$

Além disso, para $0 \leq t \leq 1$, $Imt\eta = tIm\eta$, e

$$|t\xi|^2\,(1 + 2\sinh^2 t\eta_2) \leq \left|\xi^2\right|(1 + 2\sinh^2\eta_2) < r^2.$$

Então, se $(\xi,\eta) \in A_r$ e $0 \leq t \leq 1$, $(t\xi, t\eta) \in A_r$.
Então, A_r é conexo •

2.7. Se $\tilde{u} : A_r \to \mathbb{C}$ é tal que $\tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(-\xi,\eta+\pi)$, então existe uma única função $u : B_r \cap \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{u}\,|_{A_r\cap\Lambda} = u \circ \varphi\,|_{A_r\cap\Lambda}$. Além disso, se $\tilde{u}$ é analítica, u também é.

Por **2.2** podemos passar $\tilde{u}$ ao quociente e definir u. Por **2.5**, se $\tilde{u}$ é analítica, u também é.

Como $\varphi : A_r \cap \Lambda \to B_r \cap \Omega$ é sobrejetiva (**2.5** e **2.6**), u é única •

3. A EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$xu_y - yu_x = g.$$

Antes de demonstrar o teorema 1, veremos alguns lemas que serão usados em sua demonstração.

Lema 1:

A mudança de coordenadas $x = \xi \cos \eta$, $y = \xi \sin \eta$ *em* $\mathbb{C}^2$, *transforma a equação* $xu_y - yu_x = g$ *em* $\tilde{u}_\eta = \tilde{g}$, *onde* $\tilde{g}(\xi, \eta) = g(\xi \cos \eta, \xi \sin \eta)$ *e* $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(\xi \cos \eta, \xi \sin \eta)$.

Lema 2:

Seja g *analítica na bola* B_r, *com centro* $(0,0)$ *e raio* r *em* $\mathbb{C}^2$. *Seja* $A_r = \varphi^{-1}(B_r)$. *A função*

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int_0^1 \eta \tilde{g}(\xi, t\eta) dt$$

é analítica em A_r *e* $\tilde{u}_\eta = \tilde{g}$.

Prova:

Integração por partes e **2.6.**

Lema 3:

Seja $W \subset \mathbb{C}^2$ *um conjunto aberto conexo, tal que* $W \cap \mathbb{R}^2 \neq \emptyset$. *Sejam* $\alpha, \beta : W \to \mathbb{C}$ *funções analíticas tais que* $\alpha|_{W \cap \mathbb{R}^2} = \beta|_{W \cap \mathbb{R}^2}$. *Então,* $\alpha = \beta$ *em* W.

Prova:

Se $p \in W \cap \mathbb{R}^2$, as séries de potências de α e β em p são idênticas, por hipótese. Então, $\alpha = \beta$ numa vizinhança de p em $\mathbb{C}^2$. Como W é conexo, daí segue que $\alpha = \beta$

•

Lema 4:

Se $\tilde{g} = g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ *e*

$$\int_0^\pi g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta = 0,$$

$|\rho| \langle \epsilon$, *para todo* $\epsilon \rangle 0$, *suficientemente pequeno, então a função* $\tilde{u}$ *definida no lema 2, verifica*

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(-\xi, \eta + \pi).$$

Prova:

Restringindo $\tilde{u}$ a $A_r \cap \mathbb{R}^2$, e denotando $\rho = Re\xi$ e $\theta = Re\eta$, pelo lema 2, temos,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\rho,\theta) &= \int_0^1 \theta\tilde{g}(\rho,t\theta)dt \\ &= \int_0^1 \theta g(\rho\cos t\theta, \rho\sin t\theta)dt \\ &= \int_0^\theta g(\rho\cos\nu, \rho\sin\nu)d\nu.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(-\rho,\theta+\pi) &= \int_0^{\theta+\pi} g(-\rho\cos t, -\rho\sin t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\theta} g(-\rho\cos(\nu+\pi), -\rho\sin(\nu+\pi))d\nu \\ &= \int_{-\pi}^{0} g(\rho\cos\nu, \rho\sin\nu)d\nu + \int_0^\theta g(\rho\cos\nu, \rho\sin\nu)d\nu \\ &= \tilde{u}(\rho,\theta), \text{ por hipótese.}\end{aligned}$$

Portanto, em $A_r \cap \mathbb{R}^2$, $\tilde{u}(\rho,\theta) = \tilde{u}(-\rho,\theta+\pi)$, e $\tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(-\xi,\eta+\pi)$ em A_r, pelo lema 3 •

Segue do lema acima e de **2.7** que a função $u : B_r \cap \Omega \to \mathbb{C}$, dada por $\tilde{u}\,|_{A_r\cap\Lambda} = u \circ \varphi\,|_{A_r\cap\Lambda}$ é analítica. Além disso, pelo lema 1, u é uma solução da equação $xu_y - yu_x = g$.

Porém esta ainda não é a solução que buscamos, pois pode não ser analítica em nenhuma vizinhança da origem. Vamos ver algumas condições que devem ser satisfeitas pela função g, para garantir a existência de soluções analíticas em alguma vizinhança da origem.

Lema 5:

Suponhamos que g seja limitada na bola B_r em $\mathbb{C}^2$, e que verifique as condições do lema 4. Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que, em $B_r \cap \Omega$,

$$|u(x,y)| \leq k\left(|x+iy|^{-\delta} + |x-iy|^{-\delta}\right),$$

para um certo δ, $0 < \delta < 1$. (Se necessário, podemos tomar r menor).

Prova:

Se g é limitada, segue do lema 2 que $|\tilde{u}(\xi,\eta)| \leq M\,|\eta|$, para algum $M \in \mathbb{R}$. Seja $\eta = \eta_1 + i\eta_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Como $\tilde{u}$ é periódica com período 2π em η, podemos considerar $0 \leq \eta_1 \leq 2\pi$. Então, $|\tilde{u}(\xi,\eta)| \leq M\,(4\pi^2 + \eta_2^2)^{1/2}$ e

$$\begin{aligned}
|u(x,y)| &= |\tilde{u}\circ\varphi^{-1}(x,y)| \\
&\leq M\left(4\pi^2+\ln^2\sqrt{\tfrac{|x-iy|}{|x+iy|}}\right)^{1/2} \\
&\leq 2\pi M + M\left(|x-iy|^{-\delta}+|x+iy|^{-\delta}\right), \text{ para um certo } \delta,\ 0<\delta<1 \bullet
\end{aligned}$$

Lema 6:

Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ um domínio, $X \subset U$ fechado tal que $(0,0) \in X$, e $w : U - X \to \mathbb{C}$ uma função analítica. Se existe uma função $f \neq 0$ analítica em U que satisfaz:

(i) o germe de f em $(0,0)$ é irredutível;

(ii) $f\,|_X = 0$;

(iii) $|w|\,|f|^\delta$ é limitada, para um certo $\delta, 0<\delta<1$;

então existe uma extensão analítica de w a uma vizinhança da origem.

Prova:

Denotando $v = wf$,

$$|v| = |w|\,|f| = |w|\,|f|^\delta\,|f|^{1-\delta}, v \text{ é analítica e limitada em } U - X, \text{ por } (iii).$$

Como X é um subconjunto fechado fino de U, existe uma única função analítica $\tilde{v}$ em U tal que at $\tilde{v}\,|_{U-X} = v$ ([1],Capítulo I,C.3). Além disso, como para todo $z_o \in X$, $\lim_{z\to z_0} v(z) = 0$, $\tilde{v}\,|_X = 0$.

Por (i), existe uma única função $\tilde{w}$, analítica numa vizinhança V de $(0,0)$ tal que $\tilde{v} = f\tilde{w}$. Como $f\tilde{w}\,|_{V-X} = fw$, $\tilde{w}$ é a extensão analítica de w a V $\bullet$

Teorema 1:

A equação

$$xu_y - yu_x = g$$

tem uma solução analítica numa vizinhança de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$, se e somente se

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq\epsilon^2} g(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Prova:

Suponhamos que a equação tenha uma solução analítica numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$.

Neste caso, $g(x,y) = div(-yu, xu)$ e, pelo teorema da divergência,

$$\iint_{x^2+y^2\leq\epsilon^2} div(-yu, xu)dxdy = \int_{x^2+y^2=\epsilon^2} (-yu, xu).\frac{1}{\epsilon}(x,y)ds = 0.$$

Suponhamos agora que

$$\iint_{x^2+y^2\leq\epsilon^2} g(x,y)dxdy = 0, \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno.}$$

Podemos supor que g é a restrição de uma função analítica $g_c : B_r \to \mathbb{C}$. Como g é analítica numa vizinhança V de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$, g é limitada em qualquer bola fechada contida em V. Portanto, pelos lemas 4, 5 e 6, se

$$\int_0^\pi g_c(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)d\theta = 0 \tag{2}$$

para $|\rho| < \epsilon$, a equação $xu_y - yu_x = g_c$ tem uma solução analítica u_c em alguma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^2$.

Se (2) se verifica, para todo $(x,y) \in U \cap \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = g_c(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y}u_c(x,y) - y\frac{\partial}{\partial x}u_c(x,y)$.

Existem funções analíticas $a, b : U \to \mathbb{R}$ tais que $u_c = a(x,y) + ib(x,y)$.

Como g é real e $g = x\frac{\partial}{\partial y}u_c - y\frac{\partial}{\partial x}u_c$, $xb_y - yb_x = 0$ em $U \cap \mathbb{R}^2$.

Definindo $u(x,y) = Reu_c(x,y) = a(x,y)$,

$$g(x,y) = xa_y - ya_x = xu_y - yu_x.$$

Para completar a prova do teorema, basta agora mostrar (2).

Vamos mostrar separadamente os casos em que g_c é par, g_c é ímpar na primeira variável e par na segunda, g_c é par na primeira variável e ímpar na segunda e, finalmente, o caso geral como consequência dos anteriores.

Caso 1: Se g_c é uma função par,

$$g_c(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_c(-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta), \text{ para todo } \rho \in \mathbb{R},$$

e

$$\int_0^\pi g_c(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g_c(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)d\theta = 0.$$

Caso 2: Se g_c é ímpar na primeira variável e par na segunda, usando a mudança de variável $\nu = 2\pi - \theta$, temos

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^\pi g_c(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)d\theta &= -\textstyle\int_{2\pi}^\pi g_c(\rho\cos\nu, -\rho\sin\nu)d\nu \\ &= \textstyle\int_\pi^{2\pi} g_c(\rho\cos\nu, \rho\sin\nu)d\nu. \end{aligned}$$

Da igualdade acima resulta,

$$\begin{aligned}2\int_0^{\pi} g_c(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta &= \int_0^{\pi} g_c(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} g_c(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} g_c(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta = 0.\end{aligned}$$

Caso 3: Se g_c é qualquer função par na primeira variável e ímpar na segunda,

$$\int_0^{2\pi} g_c(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta = 0. \tag{3}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\overline{x} = y$ e $\overline{y} = x$, a equação $xu_y - yu_x = g_c$ se transforma em $\overline{x}u_{\overline{y}} - \overline{y}u_{\overline{x}} = f(\overline{x},\overline{y})$, onde $f(x,y) = -g_c(y,x)$ é ímpar na primeira variável e par na segunda. Pelo caso 2 e pela equação (3), esta equação tem uma solução $\overline{u}$ analítica numa vizinhança da origem. A função u definida por $u(x,y) = \overline{u}(\overline{x},\overline{y})$ é, então, uma solução da equação (1), analítica numa vizinhança da origem.

Resulta dos casos 2 e 3 que, se g_c é uma função ímpar, a equação $xu_y - yu_x = g_c$ tem uma solução analítica numa vizinhança da origem, pois g_c pode ser escrita como soma de duas funções satisfazendo os casos 2 e 3, respectivamente.

Caso 4: Se g_c não é uma função par e nem ímpar, podemos escrever $g_c = g_1 + g_2$ onde g_1 e g_2 são funções par e ímpar, respectivamente. Daí,

$$\int_0^{2\pi} g_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} g_c(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\theta = 0, \text{ if } |\rho| < \epsilon.$$

Usando este resultado, a observação acima e o caso 1, a equação

$$xu_y - yu_x = g_i,\ i = 1,2,$$

tem uma solução analítica numa vizinhança da origem u_i, $i = 1,2$. A função $u = u_1 + u_2$ é uma solução da equação $xu_y - yu_x = g_c$, analítica numa vizinhança da origem.

Isto completa a prova do teorema 1 •

Exemplo:

Se $g(x,y) = y^2$, a equação $xu_y - yu_x = g$ não tem solução analítica real em nenhuma vizinhança da origem.

Com efeito,

Suponhamos que exista uma tal solução u, e seja

$$u(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \cdots$$

sua expansão em série de Taylor numa vizinhança da origem.

Suas derivadas parcias são as séries

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= a_{10} + a_{11}y + 2a_{20}x + \cdots \\ u_y(x,y) &= a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y + \cdots \end{aligned}$$

e então, a_{11} é igual a -1 e a 0, o que é impossível.

Observemos que, embora $g(x,y) = y^2$ seja analítica em todo$\mathbb{R}^2$,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq\epsilon^2} y^2 dxdy = \frac{\pi\epsilon^2}{4} \neq 0, \ \forall\epsilon > 0.$$

Teorema 2:

Suponhamos que a equação $xu_y - yu_x = g$ tenha uma solução de classe C^1 em $B_\epsilon - \{(0,0)\}$, para algum $\epsilon > 0$. Então ela tem uma solução analítica numa vizinhança da origem.

Prova:

Seja $u : B_\epsilon - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ uma solução da equação (1) de classe C^1.

Pelo teorema 1, é suficiente mostrar que

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq\sigma^2} g(x,y)dxdy = 0, \ \forall\sigma, \ 0 < \sigma < \epsilon.$$

Com efeito, definindo

$$D_{\sigma_1\sigma_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \sigma_1 \leq x^2 + y^2 \leq \sigma_2\},$$

onde $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \epsilon$; pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned} \iint_{D_{\sigma_1\sigma_2}} g(x,y)dxdy &= \tfrac{1}{\sigma_2}\int_{x^2+y^2=\sigma_2^2}(-yu,xu)\cdot(x,y)dxdy \\ &\quad -\tfrac{1}{\sigma_1}\int_{x^2+y^2=\sigma_1^2}(-yu,xu)\cdot(x,y)dxdy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\sigma_1 < \epsilon$ é arbitrário,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq\sigma_2} g(x,y)dxdy = \lim_{\sigma_1\to 0}\iint\limits_{D_{\sigma_1\sigma_2}} g(x,y)dxdy = 0 \bullet$$

Pelo teorema acima, se existe uma solução C^1, também existe uma solução analítica. Mas isto não significa que toda solução C^1 seja analítica.

Exemplo:

Considere a equação $xu_y - yu_x = 0$. Se Φ é qualquer função real de classe C^1 em $\mathbb{R} - \{0\}$, $\Phi(x^2 + y^2)$ é uma solução C^1 em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Consequentemente, a função u dada por $u(x,y) = \left(\sin \frac{\pi}{x^2+y^2}\right)^{4/3}$ é C^1. Porém, não é analítica em nenhuma vizinhança de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$.

CAPÍTULO II

Seja f uma função real analítica numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$. Suponhamos ainda que a origem seja um ponto crítico isolado da função f , que $f(0,0) = 0$ e que $f > 0$ fora da origem.

Seja g uma função real analítica numa vizinhança da origem. Vamos estudar o problema de existência de soluções da equação

$$f_y u_x - f_x u_y = g, \tag{1}$$

analíticas numa vizinhança da origem.

A solução analítica numa vizinhança da origem será chamada de solução regular.

A solução que for analítica numa vizinhança da origem, exceto talvez, na origem, será chamada de solução singular.

Vamos provar o seguinte teorema:

Teorema: *A equação* (1) *tem uma solução singular, se e somente se*

$$\int_{f \le \epsilon} g(x,y)dxdy = 0, \ \forall \epsilon > 0 \ \textit{suficientemente pequeno.}$$

Inicialmente vamos efetuar uma mudança de coordenadas que facilite a resolução da equação (1).

Uma vez que o problema é todo local, vamos supor em todo trabalho que as vizinhanças da origem consideradas são todas suficientemente pequenas.

Seja U uma vizinhança da origem onde f é analítica e onde não existem pontos críticos de f diferentes de $(0,0)$. Seja $V \subset U$ uma vizinhança simplesmente conexa da origem cujo fecho $\overline{V} \subset U$.

Lema 1:

Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, $f|_V = \epsilon$ é uma curva fechada simples em torno da origem.

Prova:

Seja $m = \min f|_{\partial V} > 0$.

Se $0 < \epsilon < m$, o conjunto $C_\epsilon = f^{-1}(\epsilon) \cap V$ é compacto. E daí, é uma variedade diferenciável compacta sem bordo de dimensão 1. Portanto, $C_\epsilon = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$, onde cada C_i é difeomorfa a S^1 e $C_i \cap Cj = \emptyset$, se $i \neq j$ ([4], Appendix) .

Como $(0,0)$ é o único ponto crítico de f em U, a origem é circundada pela curva fechada simples C_i, para todo i.

Consequentemente, $n = 1$, pois caso contrário existiria um ponto crítico da função f na região limitada por duas curvas distintas C_i •

Consideremos a função composta

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1 \xrightarrow{\sigma} C_\epsilon,$$

onde $\exp(x) = e^{2\pi i x}$ e σ é um difeomorfismo analítico. A curva analítica $\gamma = \sigma \circ \exp$ é periódica com período 1 e é uma parametrização da curva $f = \epsilon$.

Integrando o campo de vetores $-gradf$, obtemos:

$$\Phi : (-\lambda, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \lambda > 0, \text{ tal que}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,\theta) = -gradf(\Phi(t,\theta)) \text{ e } \Phi(0,\theta) = \gamma(\theta).$$

Lema 2:

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t,x) = (0,0).$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi)(t,x) &= \left\langle gradf(\Phi(t,x)), \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) \right\rangle \\ &= -\left|gradf(\Phi(t,x))\right|^2 \\ &< 0, \text{ em } U - \{(0,0)\}, \end{aligned}$$

f é uma função de Liapunov para $x' = -gradf$ ([5],capítulo VIII, 2.3). Isto prova o lema 2 •

Consideremos

$$\varphi : (0,\epsilon) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \text{ definida por}$$
$$\varphi(\rho,\theta) = \Phi(t,\theta), \text{ onde } t > 0 \text{ é tal que } f(\Phi(t,\theta)) = \rho, \text{ i.e., } f(\varphi(\rho,\theta)) = \rho.$$

Como para cada $(\rho, \theta) \in (0, \epsilon) \times \mathbb{R}$, existe um único $t \in (0, \infty)$ tal que $\Phi(t, \theta) = \rho$ (lema 2), φ está bem definida.

Além disso, φ é localmente injetora, pois $\varphi(\rho, \theta) = \varphi(\rho', \theta')$ se, e somente se, $\rho = \rho'$ e $\theta - \theta' \in \mathbb{Z}$.

Lema 3:

φ é uma função analítica real periódica na variável θ, com período 1.

Prova:

Consideremos a equação

$$(f \circ \Phi)(t, \theta) = \rho. \tag{2}$$

Se $\Phi(t, \theta) \neq (0,0)$, então $\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi)(t, \theta) = -|gradf(\Phi(t, \theta))|^2 < 0$. Daí, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança $V_{\rho,\theta}$ de (ρ, θ), onde a função analítica $t = t(\rho, \theta)$ é definda pela equação (2).

A função $\varphi(\rho, \theta) = \Phi(t(\rho, \theta), \theta)$ é, portanto, analítica em $(0, \epsilon) \times \mathbb{R}$ •

Lema 4:

φ é um difeomorfismo local.

Prova:

Fixando-se $\rho \in (0, \epsilon)$ e variando θ em $\mathbb{R}$, $\varphi(\rho, \theta)$ é a curva de nível $f = \rho$. Por outro lado, fixando-se $\theta \in \mathbb{R}$ e variando ρ em $(0, \epsilon)$, $\varphi(\rho, \theta)$ é a trajetória do campo $-gradf$ que verifica $\Phi(0, \theta) = \gamma(\theta)$. Como $gradf$, no ponto P, é normal à curva de nível de f por P, $d\varphi$ leva direções independentes em direções independentes •

Lema 5:

O difeomorfismo φ transforma a equação $du \wedge df = g dx \wedge dy$ em $\tilde{u}_\theta d\theta \wedge d\rho = -\tilde{g} J d\theta \wedge d\rho$, onde J é o jacobiano da mudança de coordenadas, $\tilde{u} = u \circ \varphi$ e $\tilde{g} = g \circ \varphi$.

Prova:

$$\begin{aligned} \varphi^*(du \wedge df) &= d(u \circ \varphi) \wedge d(f \circ \varphi) \\ &= d\tilde{u} \wedge d\rho, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi^*(g dx \wedge dy) &= (g \circ \varphi) d(x \circ \varphi) \wedge d(y \circ \varphi) \\ &= \widetilde{g} J d\rho \wedge d\theta.\end{aligned}$$

Portanto, $d\widetilde{u} \wedge d\rho = \widetilde{g} J d\rho \wedge d\theta$, em outras palavras,

$$\widetilde{u}_\theta d\theta \wedge d\rho = -\widetilde{g} J d\theta \wedge d\rho \bullet$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos supor que $h = -\widetilde{g}J$ é analítica em $(0, \epsilon) \times \mathbb{R}$. Além disso, h é periódica com período 1 na segunda variável.

Lema 6:
A função $\widetilde{u}(\rho, \theta)$ dada por

$$\widetilde{u}(\rho, \theta) = \int_0^1 \theta h(\rho, t\theta) dt,$$

é analítica em $(0, \epsilon) \times \mathbb{R}$, e satisfaz $\widetilde{u}_\theta = h$.

Prova:
Capítulo I, lema 2 $\bullet$

Lema 7:
Se

$$\int_0^1 h(\rho, \theta) d\theta = 0, \text{ para todo } 0 < \rho < \epsilon, \ \epsilon \text{ suficientemente pequeno,}$$

a função $\widetilde{u}$ do lema 6 é periódica em θ, com período 1.

Prova:
Com efeito,

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(\rho, \theta + 1) &= \int_0^1 (\theta + 1) h(\rho, t(\theta + 1)) dt \\ &= \int_0^{\theta+1} h(\rho, \nu) d\nu \\ &= \int_0^{\theta} h(\rho, \nu) d\nu + \int_\theta^{\theta+1} h(\rho, \nu) d\nu \\ &= \int_0^{\theta} h(\rho, \nu) d\nu + \int_0^{1} h(\rho, \nu) d\nu \\ &= \int_0^1 \theta h(\rho, t\theta) dt \\ &= \widetilde{u}(\rho, \theta) \bullet\end{aligned}$$

Teorema :

A equação

$$f_y u_x - f_x u_y = g \tag{1}$$

tem solução singular, se e somente se,

$$\int_{f\leq\epsilon} g(x,y)dxdy = 0,\ \forall\epsilon > 0 \textit{ suficientemente pequeno.} \tag{3}$$

Prova:

Suponhamos que (1) tenha uma solução singular u.

Seja $\epsilon > 0$ nas condições do lema 1 e tal que a curva $f = \epsilon$ esteja inteiramente contida na região onde u é regular.

Para $0 < \delta < \epsilon$,

$$\begin{aligned}\int_{\delta\leq f\leq\epsilon} g(x,y)dxdy &= \int_{\delta\leq f\leq\epsilon} (f_y u_x - f_x u_y)dxdy \\ &= \int_{f=\epsilon} udf - \int_{f=\delta} udf = 0.\end{aligned}$$

Então,

$$\int_{f\leq\epsilon} gdxdy = \lim_{\delta\to 0} \int_{\delta\leq f\leq\epsilon} gdxdy = 0.$$

Por outro lado, se (3) se verifica,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{f\leq\epsilon} gdxdy = \int_0^\epsilon\int_0^1 \tilde{g}Jd\theta d\rho = \int_0^\epsilon\int_0^1 -h(\rho,\theta)d\rho d\theta. \text{ E então,} \\ &\int_0^1 h(\rho,\theta)d\theta = 0, \text{ se } 0 < \rho < \epsilon.\end{aligned}$$

Pelos lemas 4,5, 6 e 7, existe $\tilde{u}$ analítica em $(0,\epsilon)\times\mathbb{R}$, periódica com período 1 em θ, que verifica a equação $\tilde{u}_\theta = -\tilde{g}J$. A função $\tilde{u}$ passa ao quociente e define u por $\tilde{u} = u\circ\varphi$. A função u é uma solução singular de (1) •

Observe que, se (3) se verifica, então equação (1) tem sempre uma solução singular que não pode ser extendida a uma solução regular. De fato, mesmo que a equação tenha uma solução regular u, a solução $v = u + 1/f$ não pode ser extendida a uma solução regular.

Vejamos um exemplo onde existe uma solução singular, e não existe solução regular.

Exemplo:

Consideremos a função

$$f(x,y) = x^2 + y^4.$$

f é analítica em $\mathbb{R}^2$, se anula na origem, é positiva fora da origem e $(0,0)$ é o único ponto crítico de $grad f$.

A função $g(x,y) = y$ é analítica em $\mathbb{R}^2$ e satisfaz (3).

A equação

$$4y^3 u_x - 2x u_y = y$$

tem uma solução singular (teorema) e não tem uma solução regular.

Com efeito, se u é uma solução regular, então

$$u(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{12}xy + \ldots,$$

em alguma vizinhança da origem. Portanto,

$$4y^3(a_{10} + a_{12}y + \ldots) - 2x(a_{01} + a_{12}x + \ldots) = y,$$

o que é um absurdo.

CAPÍTULO III

Seja f uma função analítica numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n, n \geq 2$, com uma singularidade isolada na origem.

Seja μ o número de Milnor do germe da função f em 0.

Denotando Ω_0^p o feixe de germes das p-formas holomorfas numa vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$, definimos

$$G = \frac{\Omega_0^n}{df \wedge d\Omega_0^{n-2}}.$$

Com operação

$$\circ : \mathbb{C}\{t\} \times G \longrightarrow G$$
$$\varphi(t) \circ [\omega] = [\varphi(f)\omega], \text{ onde } [\,] \text{ indica a classe em } G,$$

G tem a estrutura de um $\mathbb{C}\{t\}-$módulo.

Teorema 1 *(Brieskorn, Sebastiani)*

G é um $\mathbb{C}\{t\}-$módulo livre de posto μ.

([2], teorema 5.1).

Consideremos F o $\mathbb{C}\{t\}-$submódulo de G dado por

$$F = \frac{df \wedge \Omega_0^{n-1}}{df \wedge d\Omega_0^{n-2}}.$$

G/F é um submódulo de torsão.

Com efeito, existe um inteiro N tal que

$$f^{\mathrm{N}} = a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + a_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são funções analíticas numa vizinhança da origem. Então, se $\omega \in \Omega_0^n$, existe $\eta \in \Omega_0^{n-1}$ tal que

$$f^{\mathrm{N}}\omega = df \wedge \eta, \text{ i.e., } t^{\mathrm{N}} \circ [\omega] \in F.$$

Consequentemente, F é um submódulo livre de posto μ.

Definimos a conexão

$$\mathrm{D}: F \longrightarrow G$$
$$\mathrm{D}[df \wedge \theta] = [d\theta].$$

É claro que D está bem definida, pois se $df \wedge \alpha \in [df \wedge \theta]$, então existe $\beta \in \Omega_0^{n-2}$ tal que

$$df \wedge \alpha = df \wedge \theta + df \wedge d\beta.$$

Portanto, pelo lema de De Rham,

$$\alpha = \theta + d\beta + df \wedge \gamma, \text{ para um certo } \gamma \in \Omega_0^{n-2}.$$

Então, $d\alpha = d\theta - df \wedge d\gamma$ e $[d\alpha] = [d\theta]$.

É fácil ver que D é $\mathbb{C}$-linear e que, se $\varphi(t) \in \mathbb{C}\{t\}$, então

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\varphi(t) \circ [df \wedge \theta]) &= \mathrm{D}([df \wedge \varphi(f)\theta]) \\ &= [d(\varphi(f)\theta)] \\ &= [\varphi'(f)df \wedge \theta + \varphi(f)d\theta] \\ &= \varphi'(t) \circ [df \wedge \theta] + \varphi(t) \circ \mathrm{D}[df \wedge \theta]. \end{aligned}$$

Logo, D é uma conexão.

Mostremos que D é uma conexão bijetora:

Primeiramente observe que, se

$$\mathrm{D}[df \wedge \theta] = [d\theta] \in df \wedge d\Omega_0^{n-2}, \text{ então}$$
$$d\theta = df \wedge d\beta = -d(df \wedge \beta) \text{ para algum } \beta \in \Omega_0^{n-2}.$$

Isto é equivalente a $d(\theta + df \wedge \beta) = 0$. Portanto, existe $\gamma \in \Omega_0^{n-2}$ tal que $\theta + df \wedge \beta = d\gamma$, isto é,

$$df \wedge \theta = df \wedge d\gamma.$$

Logo, D é uma conexão injetiva.

Além disso, como $\omega \in \Omega_0^n$ é exata, D é sobrejetiva.

Dado $t \neq 0$, seja $\mathrm{X}_t = \mathrm{B}_\epsilon \cap f^{-1}(t)$, a fibra de Milnor da função f, onde B_ϵ é a bola de centro $(0,0)$ e raio $\epsilon > 0$ em $\mathbb{C}^n$. Seja, ainda, $0 < |t| < \delta << \epsilon$.

Se $\omega \in \Omega_0^n$ e $\mathrm{p} \in \mathrm{X}_t$, existe uma $(n-1)$-forma α holomorfa numa vizinhança de p tal que $\omega = df \wedge \alpha$ numa vizinhança de p e $\alpha|_{\mathrm{X}_t}$ está bem definida. Definimos $\frac{\omega}{df}$ desta maneira. $\frac{\omega}{df}$ é uma $(n-1)$- forma sobre cada fibra.

Seja $\gamma_t \subset \mathrm{X}_t, 0 < |t| < \delta$, um $(n-1)$ ciclo evanescente.

Se $N \subset G$ é o conjunto

$$N = \left\{ [\omega] \in G; \int_{\gamma_t} \frac{\omega}{df} = 0 \right\},$$

então $N \subset G$ como $\mathbb{C}\{t\}$−submódulo.

Observe que $\int\limits_{\gamma_t} \frac{\omega}{df}$ depende apenas da classe $[\omega] \in G$.

Seja $M = \mathrm{D}^{-1}(N)$. Queremos mostrar que se $[df \wedge \theta] \in M$, então $\int_{\gamma_t} \theta = 0$. Primeiramente vamos provar o seguinte lema:

Lema:

$$\int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{D}[df \wedge \theta]}{df} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \theta.$$

Prova:

Suponhamos que $d\theta = df \wedge \pi$, onde $\pi \in \Omega_0^{n-1}$. Por ([2], 4.3),

$$\int_{\gamma_t} \frac{d\theta}{df} = \int_{\gamma_t} \pi = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \theta. \tag{1}$$

Em geral, dado $\theta \in \Omega_0^{n-1}$, existe um inteiro N e $\eta \in \Omega_0^{n-1}$ tal que $f^{\mathrm{N}} d\theta = df \wedge \eta$. Para $\omega = f^{\mathrm{N}}\theta$, temos

$$d\omega = \mathrm{N} f^{\mathrm{N}-1} df \wedge \theta + f^{\mathrm{N}} d\theta = df \wedge \alpha.$$

Por (1),

$$\int_{\gamma_t} \frac{d\omega}{df} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \omega.$$

Por outro lado,

$$\int_{\gamma_t} \frac{d\omega}{df} = \int_{\gamma_t} \mathrm{N} f^{\mathrm{N}-1}\theta + \int_{\gamma_t} f^{\mathrm{N}} \frac{d\theta}{df} = \mathrm{N} t^{\mathrm{N}-1} \int_{\gamma_t} \theta + t^{\mathrm{N}} \int_{\gamma_t} \frac{d\theta}{df}$$

e

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \omega = \frac{d}{dt} t^{\mathrm{N}} \int_{\gamma_t} \theta = \mathrm{N} t^{\mathrm{N}-1} \int_{\gamma_t} \theta + t^{\mathrm{N}} \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \theta.$$

Como $t \neq 0$, das equações acima segue que

$$\int_{\gamma_t} \frac{d\theta}{df} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \theta.$$

Isto prova o lema •

Proposição 1:

$$M = \left\{ [df \wedge \theta] \in F; \int_{\gamma_t} \theta = 0. \right\}$$

Prova:

Por definição, $M \subset F$.

Se $\int_{\gamma_t} \theta = 0$, pelo lema,

$$\int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{D}[df \wedge \theta]}{df} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \theta = 0.$$

Em outras palavras, $\mathrm{D}[df \wedge \theta] \in N$, i.e., $[df \wedge \theta] \in M$.

Suponhamos que $[df \wedge \theta] \in M$. Existe $\omega \in \Omega_0^n$ tal que $[\omega] \in N$ e $\mathrm{D}^{-1}[\omega] = [df \wedge \theta]$. Então, pela definição de N e pelo lema,

$$0 = \int_{\gamma_t} \frac{\omega}{df} = \int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{D}[df \wedge \theta]}{df} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} \theta.$$

Daí segue que $\int_{\gamma_t} \theta$ é constante e portanto, $\int_{\gamma_t} \theta = 0$ ([2], 4.5) •

Proposição 2:

$$M = N \cap F.$$

Prova:

Da proposição 1 segue que M é um $\mathbb{C}\{t\}$−submódulo de G e que $M \subset N$.

Por outro lado, se $[\omega] \in N \cap F$, existe $\theta \in \Omega_0^{n-1}$ tal que $[\omega] = [df \wedge \theta]$. Daí segue que $[\omega] \in M$, uma vez que

$$\int_{\gamma_t} \theta = \int_{\gamma_t} \frac{df \wedge \theta}{df} = \int_{\gamma_t} \frac{\omega}{df} = 0 \bullet$$

Proposição 3:

N/M é um submódulo de torsão.

Prova:

Existe um inteiro m tal que $t^m \circ [\omega] \in F$, qualquer que seja $[\omega] \in N$, pois G/F é um submódulo de torsão. Segue da proposição 2 e do fato de que N é um $\mathbb{C}\{t\}$-módulo, que $t^m \circ [\omega] \in M \bullet$

Proposição 4:

$$\textit{posto de } M = \dim_{\mathbb{C}} N/(N \cap F).$$

Prova:

Vimos que $D: M \xrightarrow{\approx} N$ e que N/M é um submódulo de torsão (proposição 3). Pela fórmula do índice Malgrange ([2],teorema 2.3),

$$0 = \chi(D; M, N) = \textit{posto de } M - \dim_{\mathbb{C}} N/M.$$

Então, pela proposição 2,

$$\nu = \textit{posto de } M = \dim_{\mathbb{C}} N/(N \cap F) \bullet$$

<u>Observação:</u> Se γ_t é homólogo a zero, então $N = G$. Consequentemente, $M = F$ e

$$\dim_{\mathbb{C}} N/(N \cap F) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_0^n / df \wedge \Omega_0^{n-1} = \mu.$$

Reencontramos, neste caso particular, a fórmula

$$\textit{posto de } G = \textit{posto de } F = \mu.$$

CAPÍTULO IV

Seja

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função analítica numa vizinhança da origem, com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Suponhamos ainda que $f(0,0) = 0$, $f > 0$ para $(x,y) \neq (0,0)$ e que o ideal jacobiano da f, $J_f = (f_x, f_y)$, tem codimensão finita em $\mathbb{R}\{x,y\}$.

O número de Milnor da função f é

$$\mu = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\{x,y\} / (f_x, f_y)$$

Consideremos a equação

$$f_y u_x - f_x u_y = g \tag{1}$$

Usando as definições do capítulo II, sejam:

- Σ o espaço dos germes de funções reais analíticas g em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação (1) tem solução singular;

- Γ o espaço dos germes de funções reais analíticas g em $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação (1) tem solução regular.

Σ possui uma estrutura natural de $\mathbb{R}\{t\}$−módulo.

Com efeito, como

$$f_y(fu)_x - f_x(fu)_y = f(f_y u_x - f_x u_y) = fg,$$

definimos:

$$\phi(t) \circ g = \phi(f)g.$$

Analogamente, Γ é um $\mathbb{R}\{t\}$−submódulo.

Nosso objetivo é estudar o $\mathbb{R}\{t\}$−módulo $T = \Sigma/\Gamma$.

Podemos considerar f como a retrição a $\mathbb{R}^2$ de uma função analítica numa vizinhança da origem em $\mathbb{C}^2$, com uma singularidade isolada em $(0,0)$, que também será denotada por f.

Definimos os $\mathbb{C}\{t\}$−módulos G e F como no capítulo III.

Supriremos o subíndice 0 em Ω_0, pois estamos apenas interessados em funções e formas diferenciais holomorfas numa vizinhança da origem. Escreveremos, portanto,

$$G = \frac{\Omega^2}{df \wedge d\Omega^0} \text{ e } F = \frac{df \wedge \Omega^1}{df \wedge d\Omega^0},$$

onde Ω^0 é o espaço dos germes de funções analíticas na origem em $\mathbb{C}^2$.

Usaremos a notação (x, y) para as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e (z, w) para as coordenadas em $\mathbb{C}^2$.

Definimos $\Lambda = \mathbb{R}\{x, y\}$ e $S = \Lambda/\Gamma$.

É claro que Λ e S são $\mathbb{R}\{t\}$−módulos, que $\Gamma \subset \Sigma \subset \Lambda$ como $\mathbb{R}\{t\}$−submódulos, e que $T \subset S$ como $\mathbb{R}\{t\}$−submódulo.

Seja

$$\begin{gathered}\sigma : \Lambda \longrightarrow G \\ \sigma(g) = [gdz \wedge dw].\end{gathered}$$

Proposição:

$$\sigma \text{ é } \mathbb{R}\{t\}\text{−linear e } \ker\sigma = \Gamma.$$

Prova:

Trivialmente, $\Gamma \subset \ker\sigma$.

Se $g \in \ker\sigma$,

$$gdz \wedge dw = -df \wedge du, \text{ o que significa que}$$

$$g = f_w u_z - f_z u_w, \text{ para uma certa } u \in \mathbb{C}\{z, w\}.$$

Considerando a restrição de u a $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{gathered}u(x, y) = u_R(x, y) + iu_I(x, y), \text{ onde } u_R \text{ e } u_I \text{ são funções reais, e} \\ g = f_y(u_R)_x - f_x(u_R)_y + i\,[f_y(u_I)_x - f_x(u_I)_y]\,.\end{gathered}$$

Como g é uma função real, $f_y(u_I)_x - f_x(u_I)_y = 0$ e $g(x, y) = f_y(u_R)_x - f_x(u_R)_y$, isto é, $g \in \Gamma$•

Sejam $S_{\mathbf{c}} = S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $T_{\mathbf{c}} = T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Claramente $S_{\mathbf{c}}$ é um $\mathbb{C}\{t\}$−módulo e $T_{\mathbf{c}} \subset S_{\mathbf{c}}$ é um $\mathbb{C}\{t\}$−submódulo.

Teorema 1:

σ passa ao quociente e define um isomorfismo de $\mathbb{C}\{t\}$−módulos

$$\tau : S_{\mathbf{c}} \xrightarrow{\approx} G\ .$$

Prova:

Pelas definições de $S_{\mathbf{c}}$ e de G, τ é um homomorfismo sobrejetivo.

Sejam $g_1, g_2, ..., g_h \in \Lambda$, $\mathbb{R}$-independentes módulo Γ, e seja $[g_j]$ a classe de g_j em S, $j = 1, 2, ..., h$.

Suponhamos que

$$\tau\left(\sum_{j=1}^{h} c_j[g_j]\right) = 0,\ c_1, c_2, ..., c_h \in \mathbb{C}.$$

Então,

$$\left(\sum_{j=1}^{h} c_j g_j\right) dz \wedge dw = df \wedge du,$$

para certa u analítica numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^2$.

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{h} c_j g_j = f_z u_w - f_w u_z.$$

Sejam $c_j = a_j + ib_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ e $u|_{\mathbb{R}^2} = u_R + iu_I$, onde u_R e u_I são, respectivamente, as partes real e imaginária da função $u|_{\mathbb{R}^2}$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum a_j g_j &= f_x(u_R)_y - f_y(u_R)_x, \text{ e} \\ \sum b_j g_j &= f_x(u_I)_y - f_y(u_I)_x. \end{aligned}$$

Em outras palavras, $\sum a_j g_j$, $\sum b_j g_j \in \Gamma$. Consequentemente $\forall j, a_j, b_j = 0$, i.e. $c_j = 0$.

Logo, τ é um isomorfismo •

Corolário 1:

S é um $\mathbb{R}\{t\}-$módulo livre de posto μ, onde μ é o número de Milnor da função f em 0.([2], 3 e 5).

Corolário 2:

Se para algum $N \in \mathbb{N}$,

$$f_y u_x - f_x u_y = f^N g, \text{ tem solução regular,}$$

então,

$$f_y u_x - f_x u_y = g, \text{ tem solução regular.}$$

Corolário 3:

T é um $\mathbb{R}\{t\}$-módulo livre e $posto_{\mathbb{R}\{t\}}T$ =$posto_{\mathbb{C}\{t\}}T_{\mathbf{c}} \leq \mu$.

Corolário 4:

$$posto_{\mathbb{R}\{t\}}T < \mu.$$

Prova:
$[1] \in S$ e $[1] \notin T$, pois

$$\int_{f \leq \epsilon} dxdy > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Então, $S/T \neq \emptyset$.

Além disso, a classe de 1 em S/T não tem torsão. Com efeito, se

$$f_y u_x - f_x u_y = f^n, \ n = 1, 2, 3, ...,$$

tem solução singular, então, pelo teorema do capítulo II, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\int_{f \leq \epsilon} f^n dxdy = 0.$$

Isto é um absurdo, pois $f > 0$ fora da origem.

Logo, *posto de $T <$ posto de $S = \mu$* •

Para calcular o posto de T, precisamos calcular o posto η do $\mathbb{C}\{t\}-$ módulo livre $T_{\mathbf{c}}$.

Seja γ_ϵ a curva $f(x, y) = \epsilon$, isto é, γ_ϵ $=\mathrm{X}_\epsilon \cap \mathbb{R}^2$,onde X_ϵ é a fibra de Milnor da função f sobre ϵ.

γ_ϵ se prolonga a um ciclo evanescente (capítulo III).

Lema:

γ_ϵ não é homotópica a 0 em $\mathbf{X}_\epsilon$.

Prova:
Seja β= zdw. β é uma 1-forma fechada holomorfa em X_ϵ e

$$\int_{\gamma_\epsilon} \beta \ = \ \int_{\gamma_\epsilon} xdy = \int_{f \leq \epsilon} dxdy > 0, \text{ pois } f \geq 0 \text{ e } f > 0 \text{ fora de } 0.$$

Vamos relembrar a definição do $\mathbb{C}\{t\}-$submódulo N de G, dada no capítulo III:

$N = \left\{[\omega] \in G; \int_{\gamma_t} \frac{\omega}{df} = 0\right\}$, onde $\gamma_t \subset X_t$, para $0 < |t|$ suficientemente pequeno, é o ciclo evanescente definido acima.

Teorema 2:

$$\tau(T_c) = N.$$

Prova:
Seja $g \in \Lambda$ cuja classe em S pertence a T.
Existe $\eta \in \Omega^1$ tal que $\tau(g) = [gdz \wedge dw] = [d\eta]$.

$$\int_{\gamma_\epsilon} \eta \;=\; \int_{f \leq \epsilon} d\eta = \int_{f \leq \epsilon} gdx \wedge dy = 0, \text{ pelo teorema no capítulo II.}$$

$\int_{\gamma_t} \eta$ é uma função analítica multiforme de t. Como a igualdade acima vale para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\gamma_\epsilon = X_\epsilon \cap \mathbb{R}^2$, resuta que $\int_{\gamma_t} \eta = 0$, para todo $0 < |t|$ suficientemente pequeno.

Pelo capítulo III, proposição 2, $[df \wedge \eta] \in M = D^{-1}(N)$. Portanto, $D[df \wedge \eta] = [d\eta] \in N$, e daí, $[gdz \wedge dw] \in N$.

Por outro lado, se $[\omega] \in N$, existe $\theta \in \Omega^1$ tal que $[\omega] = D[df \wedge \theta]$ e $\int_{\gamma_\epsilon} \theta = 0$ (capítulo III, proposição 1). Além disso, pela definição de D, $[\omega] = [d\theta]$. Então,

$$\int_{f \leq \epsilon} \omega = \int_{\gamma_\epsilon} \theta = 0.$$

Seja $\omega = hdz \wedge dw$, $h \in \mathbb{C}\{z, w\}$. Considerando a retrição de h a $\mathbb{R}^2$, escrevemos

$$h|_{\mathbb{R}^2} = h_R + ih_I.$$

Temos,então,

$$0 \;=\; \int_{f \leq \epsilon} \omega = \int_{f \leq \epsilon} hdx \wedge dy = \int_{f \leq \epsilon} h_R dx \wedge dy + i \int_{f \leq \epsilon} h_I dx \wedge dy.$$

Portanto,

$$\int_{f \leq \epsilon} h_R dx \wedge dy = \int_{f \leq \epsilon} h_I dx \wedge dy = 0.$$

Como as classes de h_R e de h_I pertencem a T (capítulo II), a classe de h pertence a T_c e $\tau([h]) = [\omega]$ •

Corolário 1 :

$$\textit{posto de } T_c = \dim_{\mathbb{C}} N/(N \cap F) < \mu.$$

Prova:
Proposições 3 e 4 no capítulo III, e teorema 2.

Corolário 2:

$$\textit{posto de } T = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma/(\Sigma \cap J_f).$$

Prova:
Pelos teoremas 1 e 2, basta mostrar que

$$\dim_{\mathbb{R}} \Sigma/(\Sigma \cap J_f) = \dim_{\mathbb{C}} N/(N \cap F).$$

Se $g \in \Sigma$, $[g(z,w)dz \wedge dw] \in N$ (capítulo II, teorema).
Definimos

$$\begin{aligned} \lambda &: \Sigma \longrightarrow N/(N \cap F) \\ \lambda(g) &= [g(z,w)dz \wedge dw] = \text{classe de } \sigma(g). \end{aligned}$$

λ é um homomorfismo entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ cujo núcleo é $\Sigma \cap J_f$.
Com efeito,
Se $g \in \Sigma$ é tal que $g = af_x + bf_y$, para certos $a, b \in \mathbb{R}\{x,y\}$,

$$\begin{aligned} \lambda(g) &= [(a(z,w)f_z(z,w) + b(z,w)f_w(z,w))dz \wedge dw] \\ &= [df \wedge (a(z,w)dw - b(z,w)dz)] \in N \cap F. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $g \in \ker \lambda$, existe $\alpha = \alpha_1 dz + \alpha_2 dw \in \Omega^1$ tal que

$$gdz \wedge dw = df \wedge \alpha = (f_z dz + f_w dw) \wedge (\alpha_1 dz + \alpha_2 dw) = (f_z \alpha_2 - f_w \alpha_1) dz \wedge dw.$$

O que significa que $g(z,w) = (f_z\alpha_2 - f_w\alpha_1)(z,w)$.
Restringindo ao conjunto dos números reais,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (f_x\alpha_2 - f_y\alpha_1)(x,y) \\ &= f_x(x,y)(\alpha_{2_R}(x,y) + i\alpha_{2_I}(x,y)) - f_y(x,y)(\alpha_{1_R}(x,y) + i\alpha_{1_I}(x,y)), \end{aligned}$$

onde $\alpha_j |_{\mathbb{R}^2} = \alpha_{j_R} + i\alpha_{j_I}$, e $\alpha_{j_R}, \alpha_{j_I}$ são funções reais, $j = 1, 2$.
Como $g(x,y), f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ são números reais, $(f_x\alpha_{2_I} - f_y\alpha_{1_I})(x,y) = 0$.
Consequentemente,

$$g = \alpha_{2_R} f_x - \alpha_{1_R} f_y \in \Sigma \cap J_f.$$

λ passa ao quociente e define o homomorfismo 1-1,

$$\overline{\lambda} : \Sigma/(\Sigma \cap J_f) \longrightarrow N/(N \cap F).$$

Se $[\omega] \in N$, pelo teorema 2, existem $g_1, g_2 \in \Sigma$ tais que

$$[\omega] = \overline{\lambda}[g_1] + i\overline{\lambda}[g_2].$$

Daí,

$$\overline{\lambda}(\Sigma/\Sigma \cap J_f) + i\overline{\lambda}(\Sigma/\Sigma \cap J_f) = N/N \cap F.$$

Resta mostrar que $\overline{\lambda}(\Sigma/\Sigma \cap J_f) \cap i\overline{\lambda}(\Sigma/\Sigma \cap J_f) = \{0\}$.

Suponhamos que $g, h \in \Sigma$ e

$$[g(z,w)dz \wedge dw] = i[h(z,w)dz \wedge dw] \text{ em } N/N \cap F.$$

Então, $[(g(z,w) - ih(z,w))dz \wedge dw] \in F$, i.e., $g - ih = af_z + bf_w$ para certas funções $a, b \in \mathbb{C}\{z,w\}$.

Restringindo a $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g - ih &= (a_R + ia_I)f_x + (b_R + ib_I)f_y \\ &= (a_R f_x + b_R f_y) + i(a_I f_x + b_I f_y), \ a_R, a_I, b_R, b_I \in \mathbb{R}\{x,y\}. \end{aligned}$$

Portanto, $g, h \in \Sigma \cap J_f$.

Logo, *posto de* $T = \dim_{\mathbb{C}} N/(N \cap F) = \dim_{\mathbb{R}} \Sigma/(\Sigma \cap J_f)\bullet$

Exemplo:

Vamos calcular o posto de T no caso da função $f(x,y) = x^2 + y^4$.

No caso desta função, $\Sigma \cap J_f = \{ax + by^3 \in \Sigma; a, b \in \mathbb{R}\{x,y\}\}$.

Vimos no capítulo II que a função $(x,y) \longmapsto y$ pertence a Σ mas não pertence a $\Sigma \cap J_f$. Portanto,

$$1 \leq \textit{posto de } T \leq 2,$$

uma vez que o número de Milnor da função f é

$$\mu = (2-1)(4-1) = 3 \text{ ([3], 9,teorema 9.1)}.$$

Vamos mostrar que o posto de T é 1.

Se $g \in \Sigma$, escrevemos

$$g = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + ax + by^3, \text{ onde } c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e } a, b \in \mathbb{R}\{x,y\}.$$

Mostremos que $c_0 = c_2 = 0$.

Como
$$\int_{f\leq\epsilon} g dxdy = 0, \ c_0 = g(0,0) = 0.$$
Além disso, por simetria,
$$\int_{f\leq\epsilon} y dxdy = 0.$$
Então temos,
$$0 = \int_{f\leq\epsilon} g dxdy = c_2 \int_{f\leq\epsilon} y^2 dxdy + \int_{f\leq\epsilon} (ax + by^3) dxdy, \text{ i.e.,}$$
$$c_2 \int_{f\leq\epsilon} y^2 dxdy = \int_{f\leq\epsilon} (ax + by^3) dxdy \tag{2}$$
Estudemos as duas integrais separadamente:

I)
$$c_2 \int_{f\leq\epsilon} y^2 dxdy \ = \ 4 \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon}} y^2 dy \int_0^{\sqrt{\epsilon - y^4}} dx = 4 \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon}} y^2 \sqrt{\epsilon - y^4} dy.$$
Se $0 < \epsilon < 1$, e $|y| \leq \sqrt[4]{\epsilon} < 1$,
$$|c_2| \int_{f\leq\epsilon} y^2 dxdy \ \geq \ 4 |c_2| \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon}} y^3 \sqrt{\epsilon - y^4} dy = \tfrac{2}{3} |c_2| \epsilon^{3/2}. \tag{3}$$

II) Para estimar a integral $\int_{f\leq\epsilon}(ax + by^3)dxdy$, vamos considerar a expansão do integrando em série de potências.

Seja
$$ax + by^3 = \sum_{p,q} c_{p,q} x^p y^q$$
Como $a, b \in \mathbb{R}\{x, y\}$, p, q são inteiros não negativos tais que $q \geq 3$ se $p = 0$ e $p \geq 1$ se $q = 0$, e os $c_{p,q}$ são números reais.

Escolhamos $0 < \delta < 1$ tal que a série seja absolutamente convergente na região $|x| < \sqrt{\delta}$ e $|y| < \sqrt[4]{\delta}$.

Se $0 < \epsilon < \delta$, na região $f \leq \epsilon$ temos $|x| \leq \sqrt{\epsilon}$, $|y| \leq \sqrt[4]{\epsilon}$ e
$$\int_{f\leq\epsilon} (ax + by^3) dxdy = \sum_{p,q} c_{p,q} \int_{f\leq\epsilon} x^p y^q dxdy.$$
O valor da integral $\displaystyle\int_{f\leq\epsilon} x^p y^q dxdy$ depende de p e q :

(i) Se p ou q for ímpar,
$$\int_{f\leq\epsilon} x^p y^q = 0, \text{ por simetria.}$$

(ii) Se p e q forem ambos pares, e,

1) $p = 0$, então

$$
\begin{aligned}
\int_{f\leq\epsilon} y^q dxdy &= 4\int_0^{\sqrt{\epsilon}} dx \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon-x^2}} y^q dy = 4\int_0^{\sqrt{\epsilon}} dx \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon-x^2}} y^{q-1}.ydy \\
&\leq 4\epsilon^{\frac{q-1}{4}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} dx \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon-x^2}} ydy = 2\epsilon^{\frac{q-1}{4}} \int_0^{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\epsilon-x^2}dx \\
&= \tfrac{\pi}{2}\epsilon^{\frac{q+3}{4}+\frac{p}{2}} < 2\epsilon^{\frac{q+3}{4}+\frac{p}{2}}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

2) $p \geq 2$, então

$$
\begin{aligned}
\int_{f\leq\epsilon} x^p y^q dxdy &= 4\int_0^{\sqrt[4]{\epsilon}} y^q dy \int_0^{\sqrt{\epsilon-y^2}} x^p dx = 4\int_0^{\sqrt[4]{\epsilon}} y^q dy \int_0^{\sqrt{\epsilon-y^2}} x^{p-1}.xdx \\
&\leq 4\epsilon^{\frac{q}{4}}\epsilon^{\frac{p-1}{2}} \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon}} dy \int_0^{\sqrt{\epsilon-y^2}} xdx = 2\epsilon^{\frac{q}{4}+\frac{p-1}{2}} \int_0^{\sqrt[4]{\epsilon}} (\epsilon-y^4)dy \\
&= \tfrac{8}{5}\epsilon^{\frac{q+3}{4}+\frac{3}{4}} < 2\epsilon^{\frac{q+3}{4}+\frac{p}{2}}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Portanto,

$$\left|\int_{f\leq\epsilon}(ax+by^3)dxdy\right| = \left|\sum_{p,q} c_{p,q}\int_{f\leq\epsilon} x^p y^q dxdy\right| \leq \sum_{p,q}|c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon),$$

onde por (i), (4) e (5),

$$a_{p,q}(\epsilon) = \int_{f\leq\epsilon} x^p y^q dxdy < 2\epsilon^{7/4}. \tag{6}$$

Por (2),

$$|c_2|\int_{f\leq\epsilon} y^2 dxdy = \left|\int_{f\leq\epsilon}(ax+by^3)dxdy\right| \leq \sum_{p,q}|c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon).$$

Daí e de (3),

$$0 \leq \frac{2}{3}|c_2|\,\epsilon^{\frac{3}{2}} \leq \sum_{p,q}|c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon)\ .$$

Então,

$$|c_2| \leq \frac{3}{2}\epsilon^{-3/2}\sum_{p,q}|c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon) = \frac{3}{2}\sum_{p,q}|c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon)\epsilon^{-3/2}.$$

Como a inequação vale para todo $0<\epsilon<1$, suficientemente pequeno, se

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p,q}|c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon)\epsilon^{-3/2} = 0, \text{ então } c_2 = 0.$$

Portanto resta mostrar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sum_{p,q} |c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon)\epsilon^{-3/2} = 0.$$

Observe que, por (6),

$$0 \leq |c_{p,q}|\, a_{p,q}(\epsilon)\epsilon^{-3/2} < 2\,|c_{p,q}|\, \epsilon^{7/4}.\epsilon^{-3/2} = 2\,|c_{p,q}|\, \epsilon^{1/2},$$

que tende a 0 quando $\epsilon \to 0$.

Além disso, se $0 < \epsilon < \delta < 1$,

$$\begin{aligned} a_{p,q}(\epsilon) &= \int_{f \leq \epsilon} x^p y^q dx dy = \int_{f \leq \delta} (\tfrac{\epsilon}{\delta})^{p/2} \xi^p (\tfrac{\epsilon}{\delta})^{q/4} \eta^q d\xi d\eta \\ &= (\tfrac{\epsilon}{\delta})^{\frac{p}{2}+\frac{q}{4}+\frac{3}{4}} \int_{f \leq \delta} \xi^p \eta^q d\xi d\eta = (\tfrac{\epsilon}{\delta})^{\frac{p}{2}+\frac{q}{4}+\frac{3}{4}} a_{p,q}(\delta) \\ &\leq (\tfrac{\epsilon}{\delta})^{7/4} a_{p,q}(\delta) = \epsilon^{3/2}\delta^{-3/2}(\tfrac{\epsilon}{\delta})^{1/4} a_{p,q}(\delta). \end{aligned}$$

Daí,

$$|c_{p,q}|\, \epsilon^{-3/2} a_{p,q}(\epsilon) \leq |c_{p,q}|\, \delta^{-3/2} (\frac{\epsilon}{\delta})^{1/4} a_{p,q}(\delta) < |c_{p,q}|\, \delta^{-3/2} a_{p,q}(\delta),$$

e

$$\sum_{p,q} |c_{p,q}|\, \epsilon^{-3/2} a_{p,q}(\epsilon) \leq \delta^{-3/2} \sum_{p,q} |c_{p,q}|\, a_{p,q}(\delta) < \infty, \text{ pela escolha de } \delta.$$

Portanto, $c_2 = 0$.

Consequentemente,

$$g = c_1 y + ax + by^3, \text{ i.e., } \dim_{\mathbb{R}} \Sigma/(\Sigma \cap J_f) = 1 \bullet$$

Resulta deste exemplo que o posto do submódulo N, composto pelas classed $[\eta] \in G$ que verificam $\int_{\gamma_t} \frac{\eta}{df} = 0$, é 1 e N é gerado pela classe $[ydz \wedge dw]$.

BIBLIOGRAFIA:

1. GUNNING, Robert & ROSSI, Hugo - "*Analytic Functions of Several Complex Variables*", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, 19-22.

2. MALGRANGE, Bernard - "*Intégrales Asymptotiques et Monodromie*", Ann. Scient. Éc. Sup., 4^{e}série,t.7, 1974, p.405-430.

3. MILNOR, John - "*Singular points of Complex Hypersurfaces*", Annals of Mathematics Studies, number 61, Princeton University Press and the University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1968.

4. MILNOR, John - "*Topology from a Differentiable Viewpoint*", Univ. Virginia Press, 1965.

6. SOTOMAYOR, Jorge - "*Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*", Inst. de Mat. Pura e Aplicada (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 1979.