

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS DE UM FLUIDO VISCOPLÁSTICO PELO
MÉTODO DE GALERKIN MÍNIMOS QUADRADOS

por

Ana Paula Schwarz

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, setembro de 2007

SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS DE UM FLUIDO VISCOPLÁSTICO
PELO MÉTODO DE GALERKIN MÍNIMOS QUADRADOS

por

Ana Paula Schwarz
Bacharel em Física

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Comissão de avaliação:

Prof. Ph.D. Antônio César Pinho Brasil Júnior, UnB

Prof. Ph.D. Francis Henrique Ramos França, PROMEC/UFRGS

Prof. Ph.D. Julio César Ruiz Claeysen, PROMEC/UFRGS

Prof. Ph.D. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 28 de setembro de 2007

"Se um dia tiver que escolher entre o mundo e o amor...
Lembre-se: Se escolher o mundo, ficará sem o amor,
mas se escolher o amor,
com ele conquistará o mundo!!"

Albert Einstein (1879 — 1955)

AGRADECIMENTOS

Embora uma dissertação seja, pela sua finalidade acadêmica, um trabalho individual, há muitas contribuições de naturezas diversas que não podem deixar de ser ressaltadas. Por essa razão, desejo expressar os meus mais sinceros agradecimentos:

À Deus, primeiramente, por ter me dado a vida e sustento, principalmente no dias difíceis.

Aos meus pais, Henrique e Nilve Schwarz, pelo amor incondicional, pelo apoio diário, pelo ombro sempre disponível e pelos princípios passados, por que tudo que conquistei até hoje devo a eles.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sérgio Frey, pela confiança depositada e pelo estímulo em seguir em frente.

Ao Fernando Machado, meu grande amigo e companheiro de empreitadas. Divido com ele o prazer diante do cumprimento dessa etapa em nossas vidas, vejo o quanto foi importante os obstáculos surgidos e a forma corajosa com a qual encaramos a todos. Agradeço pela companhia nos dias de luta, mas nos dias de alegria também, por cada palavra amiga e pelas muitas horas dispensadas em me ouvir. Obrigada pelos conhecimentos passados e especialmente pela sua amizade sincera;

À Profa. Dra. Flávia Zinani, colega, professora, mas acima de tudo amiga e conselheira. Obrigada por tudo, por dividir sempre seus conhecimentos e experiências, pela cumplicidade e por estar sempre presente, apoiando e incentivando.

Ao querido colega de laboratório Filipe Santis, para quem não poderia deixar de agradecer em particular, por sempre ser prestativo e atencioso. Um grande amigo que ganhei durante o mestrado, obrigada por tudo mesmo.

Aos demais colegas do LAMAC pelo companheirismo, em especial ao Daniel que apesar do pouco tempo no laboratório muito me ajudou.

À todos aqueles que me apoiaram de uma maneira ou outra, irmãos, amigos, tios, tias, ou seja, a todos que torceram e acreditaram em mim.

Por fim, agradeço à Capes pela concessão da bolsa de estudos que permitiu viabilizar a minha pesquisa.

RESUMO

O principal objetivo dessa dissertação consiste nas simulações numéricas de um escoamento de um fluido viscoplástico usando o método de elementos finitos. A modelagem mecânica empregada está baseada nas equações conservativas de massa e momentum acopladas ao modelo constitutivo recentemente proposto por Souza Mendes e Dutra – aqui chamado de SMD. A modelagem mecânica foi aproximada via método de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS), que é construído para superar a falha numérica do método clássico de Galerkin para formulações mistas sem danificar a sua consistência. Primeiro, a fim de checar o código computacional, um escoamento em uma cavidade forçada. Em seguida, dois escoamentos de fluidos viscoplásticos foram considerados: um fluido SMD escoando através de uma expansão seguida de uma contração abrupta e outro em torno de um cilindro circular. Os resultados numéricos gerados forneceram informações físicas dos fenômenos de viscoplasticidade estudados e se mostraram de acordo com a literatura.

ABSTRACT

“SIMULATION OF FLOWS OF A VISCOPLASTIC FLUIDS BY METHOD GALERKIN LEAST-SQUARES”

The main objective of this paper consists of numerical simulations of viscoplastic fluid flows using the finite element method. The mechanical modeling employed is based on the mass and momentum conservative equations coupled with the constitutive model recently proposed by Souza Mendes and Dutra - herein only named by SMD. The mechanical modeling was approximated via the Galerkin Least-Squares method (GLS) which is built to overcome the numerical shortcoming of the classical Galerkin method for mixed formulations without damaging its consistency. First, in order to check the computational code, a Newtonian leaky cavity flow. Next, two viscoplastic fluid flows has been considered: a SMD fluid flow through a sudden expansion followed by a contraction geometry and around a circular cylinder. The generated numerical results gave some physical information on the viscoplastic phenomena studied and are in accordance with the literature.

ÍNDICE

| | Pág. |
|---|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO | 01 |
| 1.1 MOTIVAÇÃO..... | 01 |
| 1.2 FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS..... | 02 |
| 1.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS | 03 |
| 1.3.1 Dificuldades em Métodos Numéricos | 04 |
| 1.3.2 Métodos Estabilizados | 05 |
| 1.4 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS VISCOPLÁSTICOS | 06 |
| 1.5 OBJETIVO E PLANO DA DISSERTAÇÃO..... | 8 |
| 2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO | 10 |
| 2.1 AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM TERMOS DE FLUXOS | 10 |
| 2.1.1 Conservação de Massa | 10 |
| 2.1.2 Conservação de Momentum | 12 |
| 3.COMPORTAMENTO MATERIAL | 15 |
| 3.1 VISCOSIDADE DO FLUIDO..... | 15 |
| 3.1.1 Fluido Newtoniano | 15 |
| 3.1.2 Fluido não-Newtoniano | 16 |
| 3.1.3 Fluido Newtoniano Generalizado | 19 |
| 3.2 FUNÇÕES VISCOSIDADE DOS FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS | 19 |
| 3.2.1 Fluido SMD..... | 21 |
| 4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS | 25 |
| 4.1 CONCEITOS E DEFINIÇÕES..... | 25 |
| 4.2 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO | 26 |
| 4.3 A FORMULAÇÃO DE GALERKIN..... | 27 |
| 4.4 A FORMULAÇÃO DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS | 28 |
| 4.5 SISTEMA DE RIGIDEZ ASSOCIADO – ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO | 30 |
| 4.6 DIFICULDADES ENVOLVIDAS EM ELEMENTOS FINITOS EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS..... | 32 |
| 4.7 ELEMENTO QUADRANGULAR BILINEAR..... | 38 |

| | |
|--|-----------|
| 5 RESULTADOS NUMÉRICOS..... | 42 |
| 5.1 ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO EM UMA CAVIDADE FORÇADA | 42 |
| 5.2 ESCOAMENTO DE FLUIDO SMD ATRAVÉS DE UMA EXPANSÃO SEGUIDA DE UMA CONTRAÇÃO ABRUPTA | 50 |
| 5.3 ESCOAMENTO DE FLUIDO SMD EM TORNO DE CILINDRO CIRCULAR..... | 57 |
| 6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS..... | 72 |
| 6.1 COMENTÁRIOS FINAIS | 73 |
| 6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS | 74 |
| 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 75 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|-------------------------|---|---------------------|
| \mathcal{C}_h | Partição do domínio Ω em elementos finitos..... | [-] |
| $\mathcal{C}^0(\Omega)$ | Espaço das funções contínuas em Ω | [-] |
| C_p | Número de Euler..... | [-] |
| \mathbf{D} | Tensor taxa de deformação..... | [s ⁻¹] |
| \mathbf{g} | Aceleração da gravidade | [m/s ²] |
| h_K | Parâmetro relacionado ao tamanho do elemento K..... | [m] |
| $H^1(\Omega)$ | Espaço de Sobolev formado pelas funções de $L^2(\Omega)$ | [-] |
| $H_0^1(\Omega)$ | Espaço das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em Γ_g | [-] |
| \mathbf{I} | Tensor identidade | [-] |
| J | Número de salto | [-] |
| K | Índice de consistência | [-] |
| L | Comprimento característico do problema da cavidade forçada | [m] |
| L | Comprimento da montante e da jusante do problema do contração-expansão..... | [m] |
| L | Comprimento do canal do problema do escoamento em torno docilindro..... | [m] |
| L_0 | Comprimento da cavidade do problema da expansão-contração..... | [m] |
| $L^2(\Omega)$ | Espaço das funções de quadrado integráveis em Ω | [-] |
| $L_0^2(\Omega)$ | Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula em Ω | [-] |
| m | Grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m | [-] |
| \mathbf{n} | Normal exterior unitária..... | [-] |
| n | Índice <i>power-law</i> | [-] |
| N | Número de dimensões espaciais do problema..... | [-] |
| N_a | Função de aproximação do nó global A da partição \mathcal{C}_h | [-] |
| N_A | Funções aproximação da velocidade | [-] |
| \tilde{N}_A | Funções aproximação da pressão..... | [-] |
| p | Pressão hidrostática do fluido | [Pa] |
| p^h | Aproximação do campo de pressão do fluido | [Pa] |
| P_m | Espaço polinomial de grau m para elemento triangular ou tetraédrico | [-] |
| P | Espaço funcional do campo de pressão | [-] |
| P_h | Aproximação por elementos finitos do campo de pressão | [Pa] |
| q^h | Função peso do campo de pressão | [-] |

| | | |
|----------------|--|---------------------|
| Q_m | Espaço polinomial de grau m para elemento quadrilátero ou hexaédrico | [-] |
| $Q1$ | Elemento quadrangular bilinear..... | [-] |
| \mathcal{R} | Espaço dos números reais | [-] |
| R | Raio de entrada | [m] |
| R_m | Espaço polinomial de grau m | [-] |
| R_l | Espaço polinomial de grau l | [-] |
| R_k | Espaço polinomial de grau k | [-] |
| Re | Número de Reynolds | [-] |
| Re_K | Número de Reynolds de malha | [-] |
| \mathbf{t} | Vetor tensão | [N/m ²] |
| t | Tempo | [s] |
| \mathbf{T} | Tensor tensão de Cauchy..... | [N/m ²] |
| \mathbf{T} | Tensor tensão adimensional..... | [N/m ²] |
| \mathbf{u} | Campo velocidade | [m/s] |
| u_i | Componente da velocidade na direção i | [m/s] |
| \mathbf{u}^h | Aproximação do campo de velocidades | [m/s] |
| \mathbf{U}_h | Aproximação do conjunto de variáveis \mathbf{U} | [-] |
| v^h | Função peso do campo de velocidades..... | [-] |
| \mathbf{v} | Velocidade de um elemento fluido infinitesimal..... | [m/s] |
| \mathbf{V} | Espaço funcional do campo de velocidade | [-] |
| \mathbf{V}_h | Subespaço de \mathbf{V} | [-] |
| \mathbf{x} | Posição em uma configuração deformada qualquer | [m] |

LETRAS GREGAS

| | | |
|------------|--|----------------------|
| Γ | Fronteira do domínio Ω | [-] |
| Γ_g | Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet..... | [-] |
| Γ_h | Parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Neumann | [-] |
| λ | Tempo característico do fluido..... | [s] |
| μ | Viscosidade absoluta do fluido Newtoniano..... | [kg/m.s] |
| μ_p | Viscosidade plástica | [kg/m.s] |
| ρ | Densidade do fluido | [kg/m ³] |

| | | |
|---------------------|--|---------------------|
| $\boldsymbol{\tau}$ | Tensor desviatório ou viscoso | [N/m ²] |
| τ | Tensor de cisalhamento..... | [N/m ²] |
| α | Parâmetro de estabilidade..... | [-] |
| τ_0 | Tensão limite de escoamento | [N/m ²] |
| Ω | Domínio do problema | [-] |
| $\bar{\Omega}$ | Domínio limitado fechado do problema | [-] |
| Ω_K | Domínio do elemento finito K..... | [-] |
| $\dot{\gamma}$ | Taxa de deformação por cisalhamento | [s ⁻¹] |
| $\dot{\gamma}_0$ | Taxa de cisalhamento na região onde começa o “salto” da tensão | [s ⁻¹] |
| $\dot{\gamma}_1$ | Taxa de cisalhamento na região onde começa a região de power-law | [s ⁻¹] |
| η | Função viscosidade | [Kg/m.s] |
| η_0 | Viscosidade para baixas taxas de cisalhamento..... | [Kg/m.s] |

SOBRESCRITO

| | | |
|---|--|-----|
| * | Símbolo que indica adimensionalização..... | [-] |
|---|--|-----|

SUBSCRITO

| | | |
|-----|--|-----|
| A | Número do ponto nodal do elemento | [-] |
| g | Condição de contorno essencial (Dirichlet)..... | [-] |
| h | Condição de contorno natural (Neumann) | [-] |
| k | Grau dos polinômios dos termos de velocidade | [-] |
| k | Elemento finito da partição C_h | [-] |

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

| | | |
|--------------------|--|------|
| $\nabla(\cdot)$ | Operador gradiente espacial | [-] |
| Δp | Queda de pressão..... | [Pa] |
| (\cdot, \cdot) | Produto interno de $L^2(\Omega)$ | [-] |
| $(\cdot, \cdot)_K$ | Produto interno de $L^2(\Omega_K)$ | [-] |

| | | |
|-------------------|--------------------------------|-----|
| $\ \cdot\ $ | Norma de $L^2(\Omega)$ | [-] |
| $\ \cdot\ _{0,K}$ | Norma de $L^2(\Omega_K)$ | [-] |

ÍNDICE DE FIGURAS

| Figura | Pág. |
|---|------|
| 3.1 Curvas de escoamento de um fluido Newtoniano | 17 |
| 3.2 Curvas de escoamentos de fluidos não-Newtonianos com e sem tensão de escoamento..... | 18 |
| 3.3 Curva de escoamento de uma solução aquosa de Carbopol 0,12%..... | 23 |
| 3.4 Simulações Excel da curva de escoamento de uma material viscoplástico | 24 |
| 4.1 Descrição do problema da cavidade forçada..... | 33 |
| 4.2 Problema da cavidade forçada - método de Galerkin para 10x10 elementos Q1/Q1: (a)vetores velocidade e (b) elevação da pressão..... | 33 |
| 4.3 Problema da cavidade forçada - método GLS para 10x10 elementos Q1/Q1: (a)vetores velocidade e (b) elevação da pressão..... | 34 |
| 4.4 Problema da cavidade forçada - método de Galerkin para 100x100 elementos Q1/Q1: (a)vetores velocidade e (b) elevação da pressão | 35 |
| 4.5 Problema da cavidade forçada - método GLS para 100x100 elementos Q1/Q1: (a)vetores velocidade e (b) elevação da pressão..... | 36 |
| 4.6 Problema da cavidade forçada - métodos de Galerkin e GLS para 10x10 elementos Q1/Q1: (a)perfil velocidade v_x e (b) perfil velocidade v_y | 37 |
| 4.7 Domínio de elemento quadrilátero bilinear no domínio aparente e ordenação nodal local. .. | 39 |
| 4.8 Funções de forma local (N_a) e global (N_A) do elemento quadrilátero bi-linear Q1..... | 41 |
| 5.1 Problema da cavidade forçada – Isobáricas, para 100x100 elementos Q1/Q1 (6.296 pontos nodais): (a) $Re \approx 0$; (b) $Re=100$; (c) $Re=400$ e (d) $Re=1000$ | 43 |
| 5.2 Problema da cavidade forçada – Linhas de corrente e iso-regiões de velocidade, para 100x100 elementos Q1/Q1 (6.296 pontos nodais): (a) $Re \approx 0$; (b) $Re=100$; (c) $Re=400$ e (d) $Re=1000$ | 46 |
| 5.3 Problema da cavidade forçada - Perfil de velocidade horizontal, em $x= 0,5$, para 100x100 elementos Q1/Q1 (6296 pontos nodais): (a) $Re \approx 0$; (b) $Re=100$; (c) $Re=400$ e (d) $Re=1000$ | 48 |
| 5.4 Problema da cavidade forçada - Perfil de velocidade vertical, em $y = 0,5$, para 100x100 elementos Q1/Q1 (6296 pontos nodais): (a) $Re \approx 0$; (b) $Re=100$; (c) $Re=400$ e (d) $Re=1000$ | 49 |
| 5.5 Escoamento de um fluido SMD através de e uma expansão seguida de uma contração: (a) geometria do problema e (b) teste de independência de malha | 50 |
| 5.6 Escoamento de um fluido SMD através de e uma expansão seguida de uma contração: detalhe da malha usada nas simulações (Malha #3 - 9.568 elementos Q1/Q1)..... | 52 |

| | |
|--|----|
| 5.7 Escoamento de um fluido SMD através de e uma expansão seguida de uma contração: comparação com os resultados do trabalho de Souza Mendes et al. (2007)..... | 53 |
| 5.8 Escoamento de um fluido SMD através de uma expansão seguida de uma contração, para $n=0.5$ - Iso-regiões de τ : (a) $J=1$; (b) $J=10^2$; (c) $J=10^4$ e (d) $J=10^6$ | 54 |
| 5.9 Iso-regiões do módulo do vetor velocidade para $Re = 2$ e $n = 0,2$: (a) $Cu = 0$, (b) $Cu = 10$, (c) $Cu = 25$, (d) $Cu = 50$, (e) $Cu = 75$ e (f) $Cu = 100$ | 56 |
| 5.10 Escoamento de um fluido SMD através de uma expansão seguida de uma contração, para $n=0,2,0,4, 0.7$ e $0,9$ e $J=10^3$ – Perfis de velocidade axial no plano de contração..... | 57 |
| 5.11 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular: descrição do problema e condições do contorno..... | 58 |
| 5.12 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular: teste de independência de malha para as razões de aspecto (a) $H/R=2$, (b) $H/R=4$, (c) $H/R=8$, (d) $H/R= 10$ e (e) $H/R= 20$.. | 59 |
| 5.13 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular: detalhe das malhas para as razões de aspecto (a) $H/R=2$, (b) $H/R=4$, (c) $H/R=8$, (d) $H/R=10$ e (e) $H/R=20$ | 62 |
| 5.14 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular para $H/R=8:1$ e $\bar{u}^* =1$ - Iso-regiões de τ para $n=0,5$: (a) $J=1$, (b) $J=10$, (c) $J=10^2$ e (d) $J=10^3$ | 64 |
| 5.15 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular – Iso-regiões de τ para $n=0,5$ e $J= 00$, $\bar{u}^* =1,0$ para (a) $H/R=2$, (b) $H/R=4$, (c) $H/R=8$, (d) $H/R=10$ e (e) $H/R=20$ | 65 |
| 5.16 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular - iso-regiões de τ para $H/R=2:1$, $n=0,5$, $J=100$ e (a) $\bar{u}^* =0,1$; (b) $\bar{u}^* =0,5$; (c) $\bar{u}^* =1,0$; (d) $\bar{u}^* =2,5$ | 67 |
| 5.17 Queda de pressão para $Re \approx 0$, $n = 0,5$, $\bar{u}^* = 1,0$ e $J=100$, variando a razão de aspecto..... | 68 |
| 5.18 Perfil velocidade axial na <i>vena contracta</i> sobre o cilindro para $Re \approx 0$, $n = 0,5$, $\bar{u}^* =1,0$ e $J=100$, para diferentes razões de aspecto..... | 69 |
| 5.19 Perfil velocidade axial para $Re \approx 0$, $n = 0,5$, $H/R=2$ e $J=100$: (a) a montante do escoamento e (b) sobre o cilindro..... | 71 |

ÍNDICE DE TABELAS

| | |
|--|------|
| Tabela | Pág. |
| 4.1 Coordenadas locais no espaço ξ | 40 |
| 5.1 Teste de independência de malha: Descrição das 19 malhas testadas para H/R : 2:1. 4:1. 8:1. 10:1. 20:1 | 59 |

1. INTRODUÇÃO

Equation Section 1

1.1. MOTIVAÇÃO

O comportamento dos escoamentos de fluidos não-Newtonianos tem sido largamente pesquisado, pelo fato desses fluidos possuírem grandes aplicações nos processos naturais e industriais. Alguns exemplos desses fluidos incluem determinados alimentos (como doce de leite e catchup), polímeros, o sangue, produtos farmacêuticos e cosméticos, lamas de perfuração e óleos pesados.

Muitos dos materiais que aparecem em processos de interesse nas indústrias são fluidos viscoplásticos, estes são fluidos não-Newtonianos que apresentam uma tensão limite de escoamento, que necessita ser excedida para que o material escoe. Os escoamentos de fluidos viscoplásticos vêm sendo estudados em diversas geometrias, pois estão presentes em vastas aplicações, principalmente na indústria petrolífera.

Agora, com a finalidade de caracterizar as propriedades viscosas dos fluidos escoando consideram-se os aspectos dinâmicos e cinemáticos de suas deformações. A caracterização local dos estados dinâmicos e cinemáticos locais de um fluido escoando é respectivamente dada pela tensão e taxa de deformação.

O problema fica muito mais simples se forem feitas limitações ao escoamento, ou seja, assumir componentes não nulas da velocidade em somente uma direção – o chamado escoamento puramente cisalhante. Para esses escoamentos, a medida do estado dinâmico e cinemático local de deformação é a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento, respectivamente. Durante o escoamento cisalhante de um fluido Newtoniano, essas duas quantidades são relacionadas pela lei de Newton da viscosidade [Slattery, 1999].

É importante ainda mencionar que o cumprimento da lei de Newton não é o único requerimento para um fluido ser classificado como Newtoniano. O fluido deve ainda não exibir efeitos de memória - resultando em elasticidade ou tixotropia - a primeira e a segunda diferenças de tensão normal do fluido devem ser iguais a zero e a razão entre as viscosidades extensional e cisalhante deve ser constante. Se algum desses requisitos não for cumprido, o fluido então é dito de não-Newtoniano.

1.2. FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Fluidos não-Newtonianos são encontrados tanto na Natureza como nas aplicações industriais, tais como alimentos, cosméticos, lamas usadas nas operações de perfuração e completação de poços de perfuração de petróleo, óleos pesados, dispersões de argila em água, tintas, emulsões concentradas de óleo em água e de água em óleo, polímeros fundidos e soluções poliméricas, pastas de cimento e asfaltos e misturas asfálticas.

Em importantes situações industriais, os fluidos não-Newtonianos podem exibir um comportamento reológico bastante complexo. Do ponto de vista pragmático, entretanto, a propriedade decisiva do fluido é freqüentemente sua viscosidade dependente da taxa de cisalhamento, a qual, para alguns fluidos, pode variar de várias ordens em grandeza.

Uma aproximação simples da viscosidade não-Newtoniana é dada pela generalização da lei linear de Newton para viscosidade [Astarita and Marrucci, 1974]

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.1)$$

onde η depende a magnitude da taxa de cisalhamento, $\dot{\gamma}$, e τ é a magnitude do tensor de cisalhamento.

Como os fluidos não-Newtonianos não apresentam uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento Eq.(1.1) - isto é, os valores da viscosidade mudam com a variação nos valores da taxa de cisalhamento – os valores de viscosidade podem aumentar ou diminuir, de acordo com as características de cada fluido.

Os fluidos cujos valores de viscosidade diminuem com o aumento da taxa de cisalhamento possuem um comportamento dito pseudoplástico. Já quando a viscosidade aumenta com aumento da taxa de cisalhamento, o material apresenta um comportamento dito dilatante. Os fluidos não-newtonianos que necessitam de uma tensão finita, conhecida como tensão limite para que ocorra o fluxo viscoso, possuem um comportamento dito viscoplástico.

A fim de descrever características pseudoplásticas e dilatantes dos fluidos não-Newtonianos, a função viscosidade *power-law* de Ostwald-Waele e de Carreau são as mais empregadas. Se o material exibe alguma tensão limite para que ocorra o escoamento, pode se considerar os modelos de plástico de Bingham, Herschel-Buckley e Casson [Bird et al., 1987]. Alguns exemplos de viscoplásticos de interesse são as lamas de perfuração, óleos pesados, maionese, pastas e cremes, dentre outros.

Neste trabalho foram realizadas aproximações de elementos finitos de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS) para escoamentos permanentes e isocóricos de um fluido viscoplástico recentemente proposto por Souza Mendes e Dutra (2004) – doravante denominado simplesmente como fluido SMD. Alguns escoamentos viscoplásticos distintos foram considerados. Primeiramente, a fim de checar o código computacional, foi aproximado o escoamento sem inércia em uma cavidade forçada de um fluido Newtoniano linear. Em seguida, foi investigado o escoamento de um fluido SMD através de uma geometria axissimétrica composta de uma expansão seguida de uma contração – para uma variação do expoente *power-law* de 0,2 a 0,9 e do número de salto do fluido de 1 a 10^6 – e o escoamento em torno de um cilindro circular – para a velocidade média adimensional do fluido na entrada do canal variando de 0,1 a 2,5, o número de salto do fluido variando de 1 a 10^3 e a razão de aspecto da geometria de 2 a 20.

1.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de elementos finitos consiste em uma valiosa técnica computacional para solução de equações diferenciais e integrais que surgem em vários campos da engenharia e ciência aplicada. O método é uma generalização dos métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin, que são baseados na idéia que a solução u de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus-de-liberdade desconhecidos d_A e funções de forma N_A selecionadas apropriadamente no domínio do problema. Os graus-de-liberdade d_A são determinados de forma que a equação governante do problema estudado seja satisfeita no sentido variacional. As funções N_A , chamadas de funções de aproximação, são selecionadas de modo a satisfazer as condições de contorno do problema. (As funções de aproximação são freqüentemente construídas usando os conceitos da teoria de interpolação, e, portanto são também chamadas de funções de interpolação.) [Reddy and Gartling, 1994]

Os métodos variacionais clássicos falham na construção de funções de aproximações que satisfaçam condições de contorno em problemas que apresentam geometrias complexas, tornando, portanto, difícil gerar funções de aproximação que satisfaçam diferentes tipos de condições de contorno.

A idéia básica do método de elementos finitos é aproximar o domínio do problema por um conjunto de formas geometricamente simples - chamadas elementos finitos - de modo que seja possível gerar sistematicamente as funções de aproximação necessárias na solução das equações governantes do problema pelo método variacional. As funções de aproximação são,

então, substituídas na forma variacional das leis de conservação, juntamente com as funções peso do problema, gerando, assim, um sistema de equações algébricas discretas para os problemas estudados [Johnson, 1987].

Assim descrito, o método de elementos finitos não inova em nada em relação aos métodos variacionais clássicos [Rektorys, 1975]. O que há de novo e poderoso na metodologia de elementos finitos é sua escolha particular das funções base, as quais utilizam funções polinomiais por partes de suporte compacto, construídas de modo a valerem um nos pontos nodais a elas associados e zero no restante do domínio. É esta importante característica do método que faz com que a matriz associada à formulação de Galerkin seja uma matriz de banda, reduzindo, assim, drasticamente os custos da solução numérica do sistema de equações algébricas associado.

1.3.1. Dificuldades em Métodos Numéricos

Na extensão do método de Galerkin – o mais usual dentre os métodos de elementos finitos - para problemas de escoamentos, algumas patologias numéricas foram detectadas em várias situações de interesse de engenharia. Constatou-se o surgimento de oscilações espúrias, sobre todo o domínio computacional, em problemas envolvendo operadores não simétricos, fazendo divergir as aproximações de escoamentos advectivo dominados. Em um primeiro momento, o refinamento da malha surgiu como uma primeira tentativa de eliminar o problema, mesmo acarretando no aumento do custo computacional. Em seguida, foram propostas novas estratégias, tais como o desenvolvimento de novos elementos finitos e a aplicação de regras de integração não convencionais [ver, por exemplo, Malkus and Hughes, 1978; Crouzeix and Raviart, 1973].

Alguns pesquisadores seguiram a linha da manutenção da formulação de Galerkin clássica com uso de elementos não conformes, enquanto, outros optaram pela manutenção de funções de interpolação usuais isoparamétricas com a alteração da formulação de Galerkin, visando adicionar ao problema a requerida estabilidade. Esta última opção gerou o que atualmente é conhecido como métodos estabilizados.

1.3.2 Métodos Estabilizados

A aproximação das equações de Navier-Stokes incompressível, via método de Galerkin, enfrenta duas grandes dificuldades. Primeiro, a necessidade de compatibilizar os sub-espacos de velocidade e pressão, satisfazendo, dessa maneira, a chamada condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Em seguida, tem-se a instabilidade inerente a esquemas de discretizações centrais, através da formulação de Galerkin ou através de esquemas de diferenças finitas na aproximação de escoamentos advectivo dominantes [Brooks and Hughes, 1982; Patankar and Spalding, 1972; Patankar, 1980]. O tratamento simétrico do termo de advecção pela formulação de Galerkin clássica, na qual as funções teste e peso pertencem ao mesmo espaço, é identificada como a fonte das instabilidades numéricas nos escoamentos de altos números de Reynolds.

Um grande passo no desenvolvimento de métodos estabilizados pode ser visto como a contribuição dada pelos trabalhos de Brooks and Hughes, 1982, e Hughes and Brooks, 1982, nos quais foi desenvolvido o método *streamline-upwind / Petrov-Galerkin*, ou, simplesmente, SUPG. Este método consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*) - a qual atua somente na direção das linhas de corrente - às funções clássicas do método de Galerkin. O método SUPG apresenta elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro ótimas ou quase-ótimas [Johnson et al., 1984] quando a solução exata é suficientemente regular.

Dentre as evoluções a partir do método SUPG, destaca-se o chamado método Galerkin/mínimos-quadrados (GLS), introduzido por Hughes et al., 1986 no contexto do problema de Stokes. Esta metodologia consiste na adição de termos dependentes da malha, ao método clássico de Galerkin. Estes termos de perturbação, analogamente ao método SUPG, são construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem, contudo, prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz aos resíduos de Euler-Lagrange. Dada a sua grande flexibilidade, a metodologia GLS vem sendo aplicada com sucesso a uma extensa gama de problemas de fluidos, como atestam os trabalhos de Hughes and Shakib, 1988; Franca and Hughes, 1988; Franca et al., 1992; Franca and Frey, 1992;; Franca and Hughes, 1993; Behr, Franca and Tezduyar, 1993, Harari and Hughes, 1994, Masud and Hughes, 1997, Franceschini and Frey, 2005, Pontaza and Reddy, 2006 and Zinani and Frey, 2006.

1.4. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS VISCOPLÁSTICOS

Papanastasiou (1987) estudou escoamentos permanentes bidimensionais de fluidos de Bingham modelados através de uma equação constitutiva modificada, válida para todo escoamento - seja nas regiões onde não há escoamento (doravante denominadas simplesmente por regiões de escoamento) como nas regiões onde praticamente o material não escoava (doravante denominadas de regiões rígidas). As equações de conservação e a relação constitutiva foram resolvidas simultaneamente via método de Galerkin clássico e o esquema iterativo de Newton. Essa estratégia numérica elimina a necessidade de rastrear superfícies do escoamento. Esta análise foi aplicada para o escoamento em um canal unidimensional, para o escoamento de uma camada limite bidimensional e para o escoamento de uma extrusão bidimensional. As aproximações de elementos finitos concordaram satisfatoriamente com soluções analíticas disponíveis para casos assintóticos.

Piau (1996) investigou escoamentos isocóricos complexos em um domínio delgado empregando o modelo clássico de Herschel–Bulkley. Este trabalho argumenta que não pode existir nenhuma superfície de escoamento contínua ao longo da direção do escoamento, tanto em escoamentos em canais abertos ou confinados. A análise de similaridade realizada mostrou que as tensões normais não podem ser negligenciadas ao longo desses escoamentos. Para escoamentos em canais abertos, a influência das tensões normais pode ser estimada através da comparação entre as tensões de escoamento e a pressão hidrostática no leito do canal. Neste trabalho o autor obteve as equações unidimensionais de *Barre´ de Saint Venant* generalizadas. A influência do valor da tensão limite de escoamento na velocidade de onda e nos escoamentos gradualmente variáveis e com profundidade crítica foram deduzidos.

Liu et al. (2002) estudou o escoamento lento ao redor de uma esfera sólida, o qual foi resolvido numericamente usando duas equações constitutivas regularizadas que foram aproximadas para um material Bingham. As superfícies de escoamento não puderam ser facilmente estabilizadas pelos contornos da tensão limite, obtidas com valores finitos do parâmetro de regularização, devido às restrições numéricas. A superfície de escoamento externa pode ser estimada pelos valores do segundo invariante da taxa de deformação e a solução limite para o escoamento lento de um material Bingham sobre uma esfera rígida foi conseguida.

Zisis e Mitsoulis (2002) estudaram um escoamento sem inércia de um plástico Bingham passando em torno de um cilindro entre placas paralelas. Foram feitas simulações numéricas para diferentes razões de aspecto (abertura do canal/raio do cilindro), as razões estudadas variaram de 2:1 a 50:1. A equação constitutiva de Bingham que foi utilizada apresenta uma modificação

apropriada, proposta por Papanastasiou, a qual é aplicada em toda parte no campo de escoamento em ambas as regiões - as regiões escoantes e praticamente rígidas. Este estudo enfatizou a determinação da extensão e da forma das regiões escoantes e rígidas com coeficiente de arrasto para uma larga variação do número de Bingham. As simulações numéricas apresentaram resultados para um escoamento sem inércia em um meio infinito e forneceram cálculos do coeficiente de arrasto em torno de um cilindro no caso dos efeitos de parede.

Reis et al (2003) investigou escoamentos de fluidos não-Newtonianos através de contrações e expansões, os quais são encontrados em diversos processos industriais. Neste trabalho, foram feitas simulações numéricas de escoamentos não-Newtonianos através de uma expansão seguida de uma contração axissimétricas. A solução numérica das equações de conservação de massa e momentum fora obtida via método de volumes finitos. A fim de modelar o comportamento do fluido não-Newtoniano, usaram a equação constitutiva do fluido Newtoniano generalizado, com a função viscosidade de Carreau. Os resultados obtidos mostraram a influência dos parâmetros reológicos nos testes padrões de escoamento.

Souza Mendes e Dutra. (2004) prepuseram uma nova função de viscosidade para líquidos com alta pseudoplasticidade ou com tensão limite de escoamento, como, por exemplo, pastas e lamas de perfuração. Essa função é contínua e apresenta um platô para baixas taxas de cisalhamento, seguido por uma queda brusca da viscosidade para valores da taxa de cisalhamento limiar (tensão limite), e uma subsequente região de *power-law*. A equação foi ajustada para os dados de duas soluções aquosas de Carbopol com diferentes concentrações, para fluidos de perfuração, para emulsão água/óleo e maionese comercial. A qualidade dos ajustes encontrada por eles foi plenamente satisfatória.

Mitsoulis et al. (2005) obtiveram novos resultados para escoamentos internos de plásticos Bingham, mostrando a forma da superfície de escoamento livre em simulações permanentes e seus efeitos nas regiões rígidas e de escoamento. Os resultados das simulações foram obtidos para geometrias planares e axissimétricas e para razões de aspecto variando entre 0,01 a 1. Foi verificado que as maiores razões de aspecto produzem mais movimento relativo nas superfícies livres para o raio do disco ou ao comprimento da placa, mas um menor movimento relativo para a abertura. Geometrias planares dão mais movimento a superfícies livres do que as axissimétricas. A viscoplasticidade reduz o movimento da superfície livre e a sua deformação. Em alguns casos - geometria planar e grandes razões de aspecto – surgem regiões rígidas nas superfícies livres, enquanto pequenas as regiões rígidas próximas ao centro dos discos ou pratos não são afetadas.

Souza Mendes et al. (2007) examinou o deslocamento de líquidos viscoplásticos em tubos capilares por injeção de gás. A viscoplasticidade altera a cinemática do escoamento e muda dramaticamente a quantidade de massa aderida à parede do tubo, quando comparado ao caso Newtoniano. As experiências com uma solução aquosa de Carbopol foram feitas para diferentes vazões. Uma função viscosidade recentemente proposta para líquidos viscoplásticos foi ajustada para dados reológicos da solução de Carbopol. Uma nova propriedade reológica adimensionalizada – o número de salto – foi introduzido na função viscosidade adimensional. Os resultados mostram o efeito do caráter da viscoplasticidade do líquido na forma de superfície livre e na espessura da película do líquido unido à parede. Essa espessura diminui com o número de salto e aumenta com a taxa de escoamento. Observa-se, também, que existe uma taxa de escoamento crítica adimensional abaixo da qual o descolamento do líquido da parede é aparentemente perfeito. Este comportamento mostra estar relacionado diretamente ao escoamento plenamente desenvolvido a jusante da interface ar-líquido.

Souza Mendes et al. (2007) analisaram o escoamento axissimétrico de um líquido viscoplástico através de uma expansão abrupta seguida de uma contração abrupta. Os autores obtiveram soluções numéricas permanentes, sem inércia, através da resolução das equações de conservação de massa e momentum empregando o método de volumes finitos. O comportamento viscoplástico do líquido foi modelado através de um modelo de líquido Newtoniano generalizado com uma função viscosidade recentemente proposta em 2004. Eles também realizaram experimentos de visualização com uma solução aquosa de Carbopol em diferentes concentrações. Superfícies geradas delimitando regiões rígidas e as regiões de não rígidas foram observadas para diferentes combinações de parâmetros governantes.

1.5 OBJETIVO E PLANO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação tem como objetivo a modelagem mecânica e simulação numérica via o método de Galerkin Mínimos-Quadrados, de escoamentos de fluidos viscoplásticos utilizando o modelo SMD.

Concluindo este primeiro capítulo, apresenta-se um plano geral dos capítulos com a finalidade de melhor entender esta dissertação:

- Capítulo 1: Introdução do trabalho, sua motivação e estado da arte do método de elementos finitos em fluidos e de escoamentos de fluidos viscoplásticos.

- Capítulo 2: Modelagem mecânica baseada nas leis de conservação de massa e momentum.
- Capítulo 3: Estudo do comportamento material dos fluidos viscoplásticos, em especial o estudo da teoria constitutiva do comportamento material do fluido SMD.
- Capítulo 4: Descrição das aproximações de elementos finitos de Galerkin Mínimos-quadrados para o escoamento de fluidos SMD.
- Capítulo 5: Apresentação dos resultados numéricos: validação do código computacional e simulação de dois problemas de interesse de escoamento de fluidos SMD.
- Capítulo 6: Principais conclusões obtidas, observações finais e perspectivas futuras para o trabalho.
- Capítulo 7: Referências bibliográficas citadas no texto.

2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

A mecânica dos fluidos não-Newtonianos consiste no estudo do comportamento material desses fluidos, a análise do fenômeno envolvido é baseada na solução simultânea de um conjunto de equações governantes que representam as leis físicas. Essas equações podem ser agrupadas em duas categorias diferentes. A primeira inclui as equações de balanço representando as leis físicas que são supostas válidas para todos os corpos mecânicos – chamadas de equações de conservação. Essas equações expressam matematicamente os quatro maiores princípios de conservação da mecânica, ou seja, princípio de conservação de massa, momentum, momentum angular e energia.

Neste capítulo, serão introduzidas as equações de balanço para os escoamentos isotérmicos. Essas equações serão apresentadas em termos de fluxo de massa e momentum, de modo a serem válidas para qualquer tipo de fluido.

2.1 AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO EM TERMOS DE FLUXOS

2.1.1 Conservação de Massa

Seja um escoamento material submetido a um espaço Euleriano com um sistema de referência. Assumindo que \mathbf{v} representa vetor velocidade, ρ a densidade do fluido, \mathbf{x} um ponto material e t tempo de observação do escoamento, com \mathbf{v} e ρ funções da posição e do tempo,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \rho &= \rho(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

O vetor $\rho\mathbf{v}$ representa o fluxo de massa (medido em unidades de massa por tempo) cruzando uma superfície diferencial ortogonal ao vetor \mathbf{v} . Aplicando-se o teorema de Gauss ao vetor $\rho\mathbf{v}$, tem-se que

$$\int_{\Omega} \text{div}(\rho\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma\tag{2.2}$$

onde Ω é o volume de uma região arbitrária de um espaço fechado pela superfície Γ e $\mathbf{nd}\Gamma$ o vetor que representa um elemento diferencial de superfície, direcionado para fora da região do espaço considerada. Como $\rho\mathbf{v}$ representa o fluxo de massa, então $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{nd}\Gamma$ é a vazão mássica através da superfície elementar $\mathbf{nd}\Gamma$ e a integral do lado direito da Eq.(2.2) representa o efluxo total de massa através da superfície Γ . Conseqüentemente, $\text{div}(\rho\mathbf{v})$ representa o efluxo de massa, por unidade de volume, para um volume diferencial na vizinhança do ponto arbitrário \mathbf{x} . Se cada volume diferencial é escolhido como um sistema termodinâmico, o princípio de conservação de massa estabelece que: “o afluxo líquido de massa na fronteira Γ do sistema Ω é igual ao aumento de massa no seu interior” [Slattery, 1999]. Matematicamente, este princípio pode ser expresso por

$$\partial_t \rho = -\text{div}(\rho\mathbf{v}) \quad (2.3)$$

Agora, transformando a Eq.(2.3) de maneira que a taxa de variação temporal da densidade em um ponto material apareça explicitamente, assume-se, então, que a trajetória de um ponto material é dada pela função $\mathbf{x}(t)$. Logo,

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \rho[\mathbf{x}(t), t] = \bar{\rho}(t) \quad (2.4)$$

onde a função $\rho(\)$ é diferente da função $\bar{\rho}(\)$, embora seus valores sejam iguais quando \mathbf{x} na distribuição $\rho(\)$ é expresso por $\mathbf{x}(t)$. Então, pode-se escrever:

$$\partial_t \bar{\rho} = \dot{\bar{\rho}} = \partial_t \rho + \nabla \rho \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (2.5)$$

onde a $\dot{\mathbf{x}}$ é definida como a velocidade \mathbf{v} e a derivada $\dot{\bar{\rho}}$ é a taxa de variação da densidade seguindo uma partícula material, também indicada pelo operador derivada substancial,

$$D_t \rho = \partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (2.6)$$

Expandindo, então, o lado direito da Eq.(2.3) obtém-se

$$\text{div}(\rho\mathbf{v}) = \rho \text{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\partial_t \rho \quad (2.7)$$

e levando em consideração a Eq.(2.6), a seguinte forma da equação de balanço de massa é obtida:

$$D_t \rho = -\rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad (2.8)$$

A Equação (2.3) é conhecida como a forma Euleriana e a Eq.(2.8) como a forma Lagrangeana da equação da continuidade. Para os fluidos em que densidade é considerada constante, ambas as formas da equação de balanço de massa reduzem-se a:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.9)$$

2.1.2 Conservação de Momentum

O princípio de conservação de momentum asserta que: “o afluxo de momentum que entra no sistema Ω , somado a resultante das forças gravitacionais e das forças de contato agindo sobre ele, é igual à taxa de aumento de momentum no seu interior” [Slattery, 1999]. Vale ressaltar que, diferentemente da equação da continuidade, Eq. (2.3), o princípio de conservação de momentum, assim enunciado, é válido somente para um referencial inercial de um espaço Euclidiano.

A fim de expressar o afluxo líquido de momentum na fronteira Γ do sistema Ω , introduz-se o tensor de segunda ordem denominado de fluxo de momentum, $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$. Pela definição de produto tensorial, tem-se que

$$(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma) \quad (2.10)$$

onde o termo entre parênteses no lado direito da Eq.(2.10) é a vazão mássica através do elemento de superfície considerado. Portanto, $\mathbf{n} d\Gamma \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma)$ representa o fluxo de momentum através do mesmo elemento de superfície. Isso identifica o produto tensorial $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ como fluxo de momento por unidade de área e tempo

A analogia com a Eq.(2.2) permite estabelecer

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.11)$$

o que identifica a divergência de $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ como o efluxo de momentum, por unidade de volume, cruzando a fronteira Γ do sistema Ω .

Em seguida, de modo a estabelecer a resultante das forças de superfície, emprega-se o teorema de Cauchy [Gurtin, 1981], o qual enuncia que a força de tensão $d\mathbf{t}$ agindo através de um elemento de superfície $\mathbf{n}d\Gamma$, e é dado por $d\mathbf{t}=\mathbf{T}\mathbf{n}d\Gamma$. Por analogia ao tensor fluxo de momentum $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$, pode-se escrever, a partir da Eq. (2.11), que

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T}) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{T}\mathbf{n}d\Gamma \quad (2.12)$$

onde o lado direito da Eq.(2.12) representa a resultante das forças de contato atuantes na superfície Γ do sistema Ω e o divergente de \mathbf{T} a resultante das forças de contato por unidade de volume.

A resultante das forças de corpo, quando expressa por unidade de volume do sistema Ω , é simplesmente dada por $\rho \mathbf{g}$, onde \mathbf{g} é a aceleração gravitacional na maioria das aplicações.

Finalmente, introduzindo as idéias apresentadas nos parágrafos acima no princípio de conservação de momentum, e lembrando que a taxa de aumento no interior de Ω , quando expresso por unidade de volume do sistema, é dada por uma derivada parcial temporal do vetor fluxo de massa $\rho \mathbf{v}$, chega-se à forma Euleriana conservativa da equação de movimento,

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})) = \text{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.13)$$

Substituindo-se a forma Euleriana da equação da continuidade, Eq.(2.3), na Eq.(2.13), obtém-se a forma Lagrangeana da equação de movimento¹,

$$\rho D_t \mathbf{v} = \text{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.14)$$

¹ Na derivação da forma Lagrangeana da equação de movimento, é necessário o emprego da seguinte identidade tensorial [Gurtin, 1981],

$$\text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

Para fluidos incompressíveis, a tensão total \mathbf{T} é obtida a menos de um tensor isotrópico aditivo arbitrário. Isto é usualmente obtido assumindo a decomposição

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.15)$$

onde p é definido como campo de pressão hidrostática, \mathbf{I} , o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$, o tensor deviatório ou viscoso, ou seja, $\text{tr}(\boldsymbol{\tau})=0$.

Substituindo a decomposição definida na Eq. (2.15) na equação de movimento, Eq.(2.14), obtém-se

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.16)$$

A parte da esquerda da Eq.(2.16) consiste nas forças de inércia devido à aceleração da partícula, que são iguais às forças de contato e de corpo nela agindo, estas aparecendo no lado direito da equação. Assim a Eq.(2.16) é reconhecida como a formulação direta da lei de Newton.

3. COMPORTAMENTO MATERIAL

3.1 VISCOSIDADE DOS FLUIDOS

As equações constitutivas pertencem a uma classe de equações que representam algumas leis físicas governantes do comportamento mecânico de um material mecânico. A forma dessas equações depende da classe material considerada, com o valor de seus parâmetros dependendo do material estudado. Para o caso particular de escoamentos isotérmicos, deve-se impor apenas uma equação termodinâmica de estado para o campo de pressão e uma equação constitutiva para o tensor tensão.

3.1.1 Fluido Newtoniano

A caracterização local do estado dinâmico do escoamento de um fluido é dada pelo tensor tensão, e a caracterização do estado cinemático pelo tensor taxa de deformação. Entretanto, esta caracterização é muito simplificada em determinadas classes de escoamento, como para os chamados de escoamentos puramente cisalhantes.

Considere o exemplo mais elementar de escoamento cisalhante, no qual ocorre um deslocamento relativo de planos paralelos infinitamente delgados do fluido, escoando em cisalhamento simples. Assumindo o sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , onde a direção x_1 é a direção do escoamento, a direção x_2 a direção da variação da velocidade do fluido, e a direção x_3 é uma direção neutra. Portanto, os componentes da velocidade são dados por

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_2) \\ u_2 &= u_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nesse caso, a medida do estado da deformação local é dado pelo tensor tensão de cisalhamento τ , representado, neste escoamento, por

$$\tau = \tau_{x_1 x_2} \quad (3.2)$$

e a medida do estado da cinemática local da deformação é dada pela taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$,

$$\dot{\gamma} = \frac{du_{x_1}}{dx_2} \quad (3.3)$$

Durante o escoamento cisalhante de um fluido Newtoniano tem-se que

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (3.4)$$

onde μ é a viscosidade Newtoniana do fluido, ou seja, uma medida da intensidade da dissipação da energia que é necessária para manter a deformação irreversível do fluido. A viscosidade μ de um fluido Newtoniano é constante, para uma dada temperatura e pressão, com a Eq. (3.4) conhecida como a lei de Newton da viscosidade. Esta relação constitutiva impõe que cada componente do tensor tensão de cisalhamento τ é proporcional ao gradiente de velocidade na direção normal a essa componente - a chamada taxa de deformação por cisalhamento fluido, $\dot{\gamma}$ - sendo a constante de proporcionalidade dada por sua viscosidade μ . [Ferguson and Kemblowski, 1991]

Para um escoamento geral, a equação constitutiva do tensor tensão \mathbf{T} , para um fluido Newtoniano incompressível, é expressa por

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (3.5)$$

onde p é a pressão hidrostática do fluido, \mathbf{I} como tensor unitário, $\boldsymbol{\tau}$ o tensor deviatório ou viscoso ($\text{tr}\boldsymbol{\tau}=0$) e $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ o tensor taxa de deformação, $\mathbf{D}(\mathbf{v})=\nabla\mathbf{v}+\nabla\mathbf{v}^T$.

3.1.2 Fluido não-Newtoniano

De acordo com a lei de Newton da viscosidade (Eq.(3.4)) o diagrama que relaciona a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento de um fluido Newtoniano é uma linha reta desde a origem (ver Fig.3.1). A inclinação dessa linha é igual à viscosidade μ do fluido e o diagrama do gráfico $\tau \times \dot{\gamma}$ é chamado de curva de escoamento (Fig. 3.1).

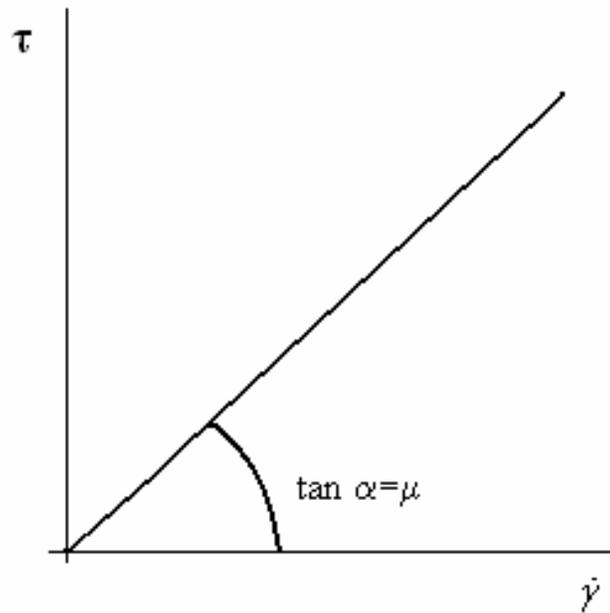


Figura 3.1 Curva de escoamento de um fluido Newtoniano.

Todos os fluidos que possuem uma curva de escoamento, $\tau = f(\dot{\gamma})$, não linear, da origem até uma dada temperatura e pressão, são chamados de fluidos não-Newtonianos. Esta definição em oposição ao comportamento Newtoniano foi originada quando as propriedades dos fluidos não-Newtonianos eram consideradas anômalas. Hoje em dia, a tendência é considerar os fluidos Newtonianos como um caso especial de uma categoria mais geral de fluidos.

Na Figura 3.2 são apresentadas algumas curvas de escoamento de fluidos não-Newtonianos. Uma classificação preliminar dessas curvas distingue as curvas que partem da origem, daquelas que apresentam uma interceptação no eixo da tensão cisalhante. A primeira categoria descreve fluidos que não possuem a chamada tensão limite de escoamento, e a segunda descreve fluidos que apresentam essa tensão limite. A tensão limite de escoamento consiste em uma tensão de cisalhamento limitante na qual o material começa a escoar.

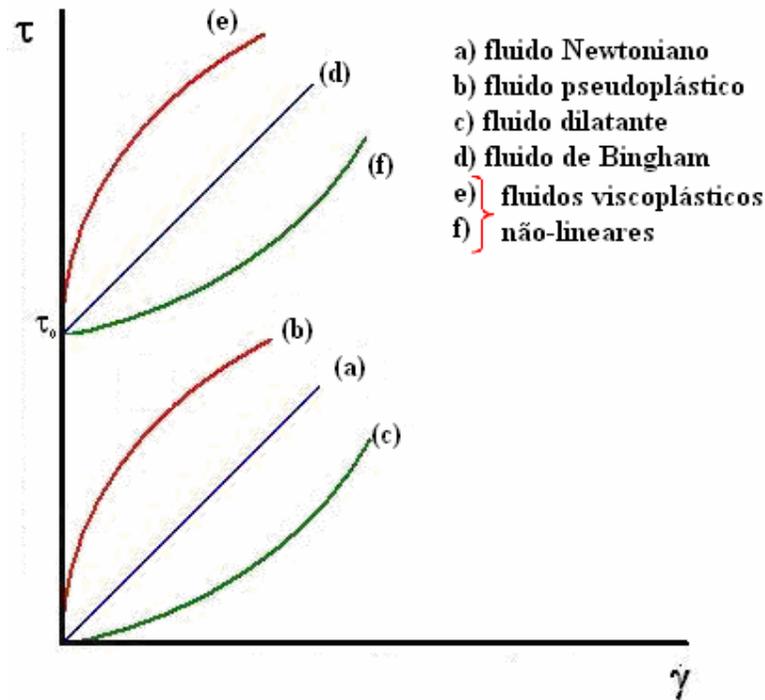


Figura 3.2 Curvas de escoamento de fluidos não-Newtonianos com e sem tensão limite.

As propriedades reológicas de fluidos que não apresentam tensão limite são descritas pelas curvas do tipo (a), (b) e (c). A curva (a) é uma curva de escoamento de um fluido Newtoniano, na qual a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de cisalhamento. Já a curva (b) caracteriza os fluidos na qual a tensão de cisalhamento tem um aumento proporcionalmente menor que o aumento da taxa de cisalhamento. Esses fluidos são chamados pseudoplásticos. E por fim, a curva (c) caracteriza os fluidos com um aumento da tensão de cisalhamento proporcionalmente maior do que o aumento da taxa de cisalhamento, denominados dilatantes.

As propriedades dos fluidos com uma tensão limite ou viscoplásticos, são descritos pelas curvas do tipo (d), (e) e (f). O caso mais simples consiste em uma reta que intercepta em o eixo tensão de cisalhamento em τ_0 , como mostrado na curva (d) da Fig.3.2. Fluidos cujas propriedades podem ser aproximadas para esta curva são chamados fluidos de Bingham. As curvas (e) e (f) descrevem materiais com uma tensão limite e uma curva de escoamento não linear, os chamados fluidos viscoplásticos não-lineares. [Ferguson and Kembrowski, 1991]

3.1.3 Fluido Newtoniano Generalizado

Todos os comportamentos não-Newtonianos apresentados pelos fluidos discutidos na Fig. 3.2 podem ser descritos pelo modelo de fluido Newtoniano generalizado (GNL), o qual generaliza a lei de Newton da viscosidade (Eq.(3.4)) permitindo que a viscosidade seja uma função dependente da taxa de cisalhamento do material. Matematicamente, tem-se que

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (3.6)$$

onde τ consiste na tensão de cisalhamento, $\dot{\gamma}$ na taxa de cisalhamento e η é a viscosidade dependente do cisalhamento,

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \neq \text{constante} \quad (3.7)$$

Generalizando a Eq.(3.6) para um escoamento geral de um fluido inelástico não-Newtoniano a forma tensorial fica:

$$\mathbf{T} = -2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (3.8)$$

3.2 FUNÇÕES VISCOSIDADE DOS FLUIDOS VISCOPLÁSTICOS

A viscoplasticidade, idealizada por Bingham em 1922, consiste em um fenômeno caracterizado pela existência de um valor residual para tensão de cisalhamento (tensão limite de escoamento), que precisa ser excedido para que o material apresente fluxo viscoso [Navarro, 1997].

As funções viscosidades são freqüentemente usadas para ajustar dados da viscosidade de materiais viscoplásticos. Primeiramente, Bingham propôs o modelo matemático,

$$\begin{cases} \tau = \tau_o + \mu_p \dot{\gamma}, & \text{se } \tau > \tau_o \\ \dot{\gamma} = 0, & \text{em caso contrário} \end{cases} \quad (3.9)$$

onde τ_o é a tensão limite e μ_p a viscosidade plástica do material.

No modelo definido pela Eq.(3.9), o fluido escoar com viscosidade constante somente se $\tau > \tau_o$. Caso a tensão limite for maior que a tensão de cisalhamento ($\tau < \tau_o$) não existirá escoamento, ou seja, o material possuirá viscosidade infinita. Contudo, para alguns fluidos, este tipo de modelo matemático não é muito adequado. Por exemplo, em sistemas poliméricos que exibem viscoplasticidade, um dos modelos mais adequados é o modelo proposto por Herschel-Bulkey, onde a tensão limite, τ_o , do material é adicionada à lei da potência, $K \dot{\gamma}^n$, onde K é uma constante [Navarro, 1997]. Matematicamente, o modelo Herschel-Bulkey pode ser expresso por

$$\begin{cases} \tau = \tau_o + K \dot{\gamma}^n, & \text{se } \tau > \tau_o \\ \dot{\gamma} = 0, & \text{em caso contrario} \end{cases} \quad (3.10)$$

onde K é o índice de consistência e n o índice do comportamento *power-law*.

Pode-se observar que o fluido Bingham (Eq.(3.9)) possui as mesmas características do modelo de fluido Newtoniano (Eq.(3.5)), porém apresenta uma tensão limite de escoamento. Já o modelo Herschel-Bulkey (Eq.(3.10)) consiste em um fluido de potência, que não irá escoar até que a tensão de cisalhamento seja maior que a tensão limite do material. Mas deve-se ainda ressaltar que, para outros sistemas viscoplásticos, nem o modelo de Bingham, nem o modelo de Herschel-Bulkey fornecem bons ajustes de dados reológicos de materiais viscoplásticos, daí a introdução de outros modelos viscoplásticos, como os modelos propostos por Casson e, recentemente por Souza Mendes e Dutra.

Visando aumentar a abrangência dos modelos viscoplásticos clássicos, Papanastasiou propôs uma regularização das funções viscoplásticas clássicas [Papanastasiou, 1987]. Ele estabeleceu um parâmetro de regularização, o qual, quando tende a zero, a função viscosidade regularizada pela equação de Papanastasiou tende à função viscosidade do modelo viscoplástico empregado, seja ele pseudoplástico, dilatante ou à viscosidade constante.

A regularização proposta por Papanastasiou tem a grande vantagem de gerar funções de tensão de cisalhamento e viscosidade viscoplásticas contínuas, válidas tanto para as regiões de escoamento como para as regiões rígidas.

No caso particular do modelo de Herschel-Bulkley, Eq.(3.10), a regularização proposta por Papanastasiou fornece a seguinte função de Herschel-Bulkley modificada

$$\tau = (1 - \exp(-\alpha \dot{\gamma})) \tau_o + K \dot{\gamma}^n \quad (3.11)$$

onde α é o parâmetro de regularização proposto por Papanastasiou.

Outro modelo proposto foi a função bi-viscosidade modificada, a qual apresenta um comportamento qualitativo bastante adequado para fluidos viscoplásticos [Soares, et al., 1999]. Matematicamente, o modelo bi-viscosidade é dado pela seguinte expressão:

$$\tau = \begin{cases} \tau_o + K\dot{\gamma}^n, & \text{se } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_o \\ \eta_o\dot{\gamma} & , \text{ se } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_o \end{cases} \quad (3.12)$$

onde η_o é a viscosidade do fluido para as baixas taxas de cisalhamento.

3.2.1 Fluido SMD

A função modificada de Papanastasiou para o modelo de Herschel-Bulkley (Eq.(3.9)) e a função da bi-viscosidade (Eq.(3.12)) são aplicadas para diferentes taxas da taxa de cisalhamento, sendo essas faixas delimitadas pela taxa de cisalhamento limite do material. Este fato, juntamente com a descontinuidade da primeira derivada dessas funções, pode vir a inviabilizar a obtenção de ajustes de boa qualidade de materiais viscoplásticos. [Souza Mendes e Dutra, 2004].

A partir destas dificuldades, Souza Mendes e Dutra propuseram uma nova função viscosidade, recentemente chamada de função SMD. Essa nova função viscosidade é contínua e possui primeira derivada também contínua, o que representa uma grande vantagem em relação aos modelos clássicos. Seu comportamento é qualitativamente igual às demais funções viscosidade viscoplásticas, ou seja, apresenta um platô de altas viscosidades a baixas taxas de cisalhamento, seguida de uma queda abrupta da viscosidade (em $\tau = \tau_o$) e, logo após, prescrever uma região *power-law* para o campo de viscosidade a altas taxas de cisalhamento.

O modelo viscosidade SMD introduz a seguinte expressão matemática para as tensões de cisalhamento:

$$\tau = (1 - \exp(-\eta_o\dot{\gamma}/\tau_o))(\tau_o + K\dot{\gamma}^n) \quad (3.13)$$

onde η_o a viscosidade a baixas taxas de cisalhamento.

A função viscosidade do modelo SMD, proposta para líquidos altamente pseudoplásticos ou sujeitos a um limite de escoamento, pode ser obtida a partir da Eq. (3.13) usando a definição de função viscosidade GNL, Eq. (3.7):

$$\eta = (1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right) \quad (3.14)$$

De acordo com a Eq.(3.13), quando a tensão de cisalhamento alcançar a tensão limite τ_0 , ocorre um aumento abrupto da taxa do cisalhamento, sem, contudo, considerável aumento na tensão. Logo, $\tau \approx \tau_0$ quando a taxa de cisalhamento “saltar” de um valor $\dot{\gamma}_0$ a um valor freqüentemente muito maior $\dot{\gamma}_1$, na vizinhança do início da região *power-law*. Portanto, pode-se definir

$$\dot{\gamma}_0 \equiv \frac{\tau_0}{\eta_0} \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}_1 \equiv \left(\frac{\tau_0}{K} \right)^{1/n} \quad (3.15)$$

O comportamento da função viscosidade SMD (Eq.(3.14)), bem como das definições (3.15), levaram os autores do modelo à introdução do seguinte número reológico adimensional, denominado por número de salto J ,

$$\begin{aligned} J &\equiv \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} \\ &= \frac{\eta_0 \tau_0^{1/n} - \tau_0}{K} - 1 \\ &= \frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}_0} - 1 \\ &= \frac{1 - \dot{\gamma}_0^*}{\dot{\gamma}_0^*} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Este número fornece a medida relativa da taxa de cisalhamento do salto que ocorre em $\tau = \tau_0$. Quando $n=1$, ele torna-se independente de τ_0 e reduz-se a $J = (\eta_0 / K) - 1$, isto é, $J + 1$ torna-se a razão entre η_0 e a viscosidade plástica K .

A função SMD pode ser adimensionalizada escolhendo τ_0 e $\dot{\gamma}_1$ como a tensão e taxa de cisalhamento características, ou seja, $\tau^* \equiv \tau/\tau_0$ e $\dot{\gamma}^* \equiv \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_1$. Assim, pode-se escrever as seguintes versões adimensionais para as Eq. (3.13) e (Eq. (3.14)), respectivamente:

$$\tau^* \equiv (1 - \exp[-(J+1)\dot{\gamma}^*]) (1 + \dot{\gamma}^{*n}) \quad (3.17)$$

$$\eta^* = \frac{\tau^*}{\dot{\gamma}^*} = \frac{\eta}{\eta_0} (J+1) = (1 - \exp[-(J+1)\dot{\gamma}^*]) \left(\frac{1}{\dot{\gamma}^*} + \dot{\gamma}^{*n-1} \right) \quad (3.18)$$

As normalizações empregadas na Eq. (3.13) e (Eq. (3.14)) somente envolvem propriedades materiais e, conseqüentemente as quantidades adimensionais resultantes são também propriedades materiais. Logo, ela é só conveniente para materiais viscoplásticos, visto as quantidades características τ_0 e $\dot{\gamma}_1$ serem nulas para líquidos Newtonianos e *power-law*. No mais, o parâmetro de regularização do modelo é uma medida de uma propriedade reológica para todos os líquidos viscoplásticos.

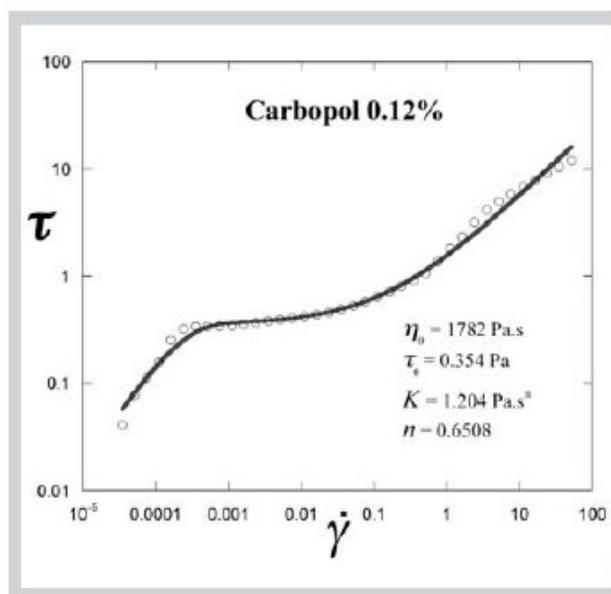


Figura 3.3 Curva de escoamento de uma solução aquosa de Carbopol 0,12% [Souza Mendes e Dutra, 2004].

A Figura 3.3 apresenta a curva de escoamento de um fluido viscoplástico real, uma solução aquosa de Carbopol 0,12% [Souza Mendes e Dutra, 2004]. Pode se notar que ela apresenta uma região inicial na qual ocorre um aumento da taxa do cisalhamento, sem variação

significativa na tensão. A tensão de cisalhamento fica próxima do valor de τ_0 quando ocorrer um salto no valor da taxa de cisalhamento de um valor em torno de $\dot{\gamma}_0$ para um valor maior na vizinhança, de $\dot{\gamma}_1$ - ou seja, onde começa a região que apresenta um comportamento *power-law*. Na Figura 3.4 são apresentadas simulações Excel da curva de escoamento de um material viscoplástico. Pode-se observar que, a medida relativa do salto da taxa de cisalhamento aumenta com a diminuição do número de salto J , ou seja, a taxa de cisalhamento aumenta enquanto a tensão de cisalhamento permanece aproximadamente igual a τ_0 até começar a região *power-law*.

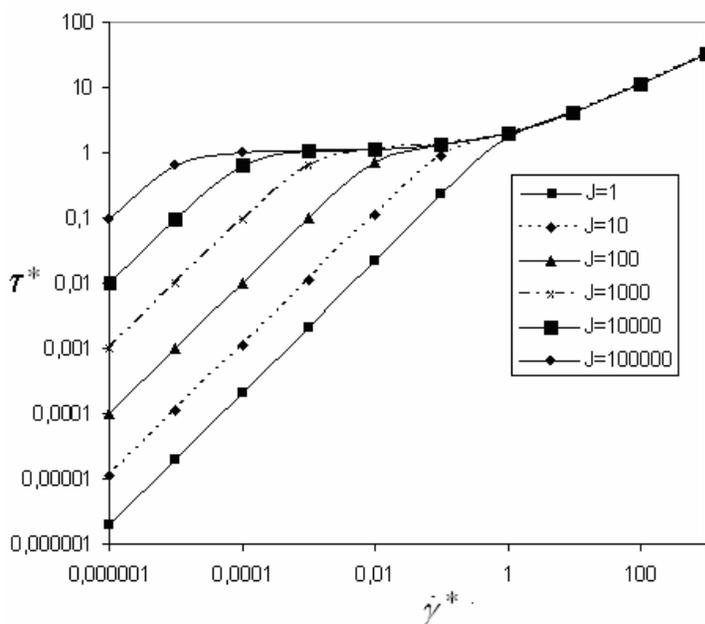


Figura 3.4 Gráfico Excel da curva de escoamento de um material viscoplástico.

4. APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Os princípios básicos do método de elementos finito para a solução de problemas de valor de contorno são o estabelecimento de uma formulação variacional do problema investigado e a solução aproximada das equações variacionais através do uso de funções de interpolação de elementos finitos.

Partindo de uma partição do domínio do problema em elementos finitos não superpostas, estas aproximações de elementos finitos para as variáveis primais são construídas como combinações de funções de forma de suporte compacto e graus-de-liberdade incógnitos, os quais serão determinados pela solução numérica do problema matricial associado.

4.1 CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Os problemas abordados são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$, sendo N o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com fronteira Γ poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Γ_g é a parte da fronteira Γ na qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e Γ_h a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais).

Sobre o domínio fechado $\overline{\Omega}$ realiza-se uma partição Ω_h de elementos finitos, com domínio elementar Ω_K na forma:

$$\begin{cases} \overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} \overline{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in \Omega_h \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, a aproximação de uma variável U por U^h , pertencente à discretização Ω_h , é então representada como uma expansão na forma:

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (4.3)$$

onde N_A e d_A são a função de base e o grau de liberdade associados ao ponto nodal global A da discretização Ω_h , respectivamente.

Para os espaços polinomiais, adota-se a notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ um triângulo ou tetraedro,} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ um quadrilátero ou hexaedro.} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $m \geq 0$, sendo m o grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m [Ciarlet, 1978].

Segundo Rektorys, 1975, sobre os espaços de funções tem-se que $L^2(\Omega)$ determina o espaço de funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω , $L_0^2(\Omega)$ o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre o domínio Ω , $H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω que se tornam zero em Γ_g .

Para finalizar, (\cdot, \cdot) representa o produto interno de L^2 no domínio Ω , $\|\cdot\|$ a norma das funções de L^2 em Ω , $(\cdot, \cdot)_K$ o produto interno de L^2 no domínio de cada elemento K e $\|\cdot\|_{0,K}$ a norma de L^2 no domínio de cada elemento K .

4.2 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

O problema forte é baseado através da particularização das equações de conservação de massa e momentum, Eqs. (2.3) e (2.16) respectivamente. Fisicamente, esta simplificação baseia-se nas hipóteses de escoamento em regime laminar e permanente para um fluido Newtoniano generalizado, Eq.(3.6). A formulação do problema forte é dada por:

$$\begin{aligned} \rho(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p - 2\eta(\dot{\gamma})\text{div}\mathbf{D} &= \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\ (-p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.5)$$

no qual ρ representa a massa específica do fluido, ∇p o vetor gradiente de pressão, \mathbf{u} o campo de velocidade admissível, \mathbf{D} o tensor taxa de deformação, \mathbf{g} a aceleração da gravidade, \mathbf{t}_h a força de superfície e o tensor tensão \mathbf{T} relacionando-se com a deformação do fluido através do modelo GNL,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ &= -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad \text{em } \Omega\end{aligned}\quad (4.6)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor deviatório de tensão.

Empregando a função viscosidade adimensional SMD, Eq. (3.14), e as normalizações propostas por Souza Mendes et al. (2007) para o campo de velocidade, tensão e pressão,

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 L_c} \quad ; \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\tau_0} \quad ; \quad p^* = \frac{p}{\tau_0} \quad (4.7)$$

sendo L_c um comprimento característico do escoamento.

4.3 A FORMULAÇÃO DE GALERKIN

O método de aproximações de elementos finitos, denominado método de Galerkin, também conhecido como Bubnov-Galerkin, caracteriza-se pelas funções peso e teste pertencentes ao mesmo espaço de funções. Os espaços de dimensão infinita empregados na formulação variacional são aproximados por subespaços de dimensão finita convenientes, ou seja, por exemplo, sendo P e \mathbf{V} , espaços funcionais dos campos de pressão e velocidade virtual, respectivamente, são aproximados pelos subespaços P^h e \mathbf{V}^h . Como os subespaços P^h e \mathbf{V}^h são subconjuntos dos espaços P e \mathbf{V} , pode-se escrever:

$$\begin{aligned}P^h &\subset P && \text{(ou seja, se } p^h \in P^h, \text{ então } p^h \in P) \\ \mathbf{V}^h &\subset \mathbf{V} && \text{(ou seja, se } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in \mathbf{V})\end{aligned}\quad (4.8)$$

o índice h faz referência à discretização do domínio, Ω_h , parametrizada por um comprimento característico dos elementos h . A Equação (4.8) define o que é conhecido em Teoria de Funções

como uma aproximação interna, uma característica orgânica dos métodos de elementos finitos, diferentemente dos métodos de diferenças finitas os quais, ao invés de aproximarem os espaços das funções empregadas, aproximam suas derivadas.

A aproximação de elementos finitos das Eqs. (4.5), portanto, é construída sobre as definições dos subespaços usuais da dinâmica dos fluidos para a aproximação dos campo de velocidade (\mathbf{V}^h) e pressão (P^h) [Ciarlet, 1976],

$$P^h = \{p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_{\Omega_K} \in R_l(\Omega_K), \Omega_K \in \Omega_h\} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{V}^h = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_{\Omega_K} \in R_k(\Omega_K)^N, \Omega_K \in \Omega_h\} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{V}_g^h = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_{\Omega_K} \in R_k(\Omega_K)^N, \Omega_K \in \Omega_{Kh}, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g\} \quad (4.11)$$

onde R_k , R_l denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k e l [Ciarlet, 1978]

A partir das definições dos sub-espaços de elementos finitos definidos pelas Eq.(4.9)-(4.11), a aproximação de Galerkin para o problema definido pela Eq. (4.5) pode ser dada por: Achar o par $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_g^h \times P^h$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times P^h \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde \mathbf{v} e q são campos de velocidade e pressão virtuais.

4.4 A FORMULAÇÃO DE GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS

Baseado nas definições dos subespaços de pressão e velocidade, Eqs. (4.9)-(4.11), pode-se escrever uma formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados para o problema definido pela Eq. (4.5), da seguinte maneira: Achar o par $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathbf{V}_g^h \times P^h$, tal que:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma + \sum_{K \in C_h} \int_{\Omega_K} \left(\rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h + \nabla p^h - 2\eta(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \right) \cdot \\
& \quad \cdot \alpha(\operatorname{Re}_K) \left(\rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h - \nabla q^h + 2\eta(\dot{\gamma}) \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) \right) d\Omega \\
& \quad (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}^h \times P^h
\end{aligned} \tag{4.13}$$

onde o parâmetro de estabilidade α , avaliado a nível de elemento, dado como em Franca e Frey, 1992, é representado por:

$$\alpha(\operatorname{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\operatorname{Re}_K) \tag{4.14}$$

$$\xi(\operatorname{Re}_K) = \begin{cases} \operatorname{Re}_K, & 0 \leq \operatorname{Re}_K < 1 \\ 1, & \operatorname{Re}_K \geq 1 \end{cases} \tag{4.15}$$

$$\operatorname{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\eta(\dot{\gamma})} \tag{4.16}$$

com $|\mathbf{u}|_p$ representa a norma p do \mathfrak{R}^N .

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |u_i|, & p = \infty \end{cases} \tag{4.17}$$

e o parâmetro m_k é proveniente da análise de erro da formulação GLS introduzida em Franca e Frey (1992).

Observações:

1. Tomando o parâmetro de estabilidade, α igual a zero, nas formulações GLS definidas pelas Eqs. (4.13)-(4.17), obtém-se novamente a aproximação clássica de Galerkin (Eq.(4.12)). Sua estabilidade, no contexto linear do problema se Stokes, é governada pelo Teorema de Brezzi [Ciarlet, 1978], que impõe, além da satisfação da condição de Babuška-Brezzi, que o problema discreto seja elíptico para toda velocidade pertencente ao subespaço \mathbf{K}_0^h ,

$$\mathbf{K}_0^h = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}^h \mid \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, q \in P^h \right\} \quad (4.18)$$

Visto que geralmente $\mathbf{K}_h^0 \not\subset \mathbf{K}^0$, apenas um número limitado de combinações de elementos irá satisfazê-las, criando assim uma séria limitação ao método de Galerkin. As combinações de elementos computacionalmente desejáveis como as de igual-ordem, ficam descartadas.

2. A expressão normalmente usada do número de Reynolds de malha [Johnson, 1987] foi modificada incluindo o parâmetro m_k na Eq. (4.16), de maneira que se possibilita levar em conta também o grau de interpolação empregado. Assim, as regiões advectivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $Re_K > 1$ e as difusivo-dominadas por $Re_K < 1$, independente do elemento considerado [Franca e Frey, 1992].

4.5 SISTEMA DE RIGIDEZ ASSOCIADO – ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

As discretizações das Eq.(4.13)-(4.16) são obtidas a partir das expansões das aproximações de elementos finitos dos pares (\mathbf{u}^h, p^h) e (\mathbf{v}^h, q^h) como uma combinação das suas respectivas funções de forma e graus de liberdade, assim, gerando um sistema residual de equações de rigidez não lineares,

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

onde \mathbf{U} é o vetor graus de liberdade das aproximações \mathbf{u}^h e p^h , e $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ é dado pelo conjunto de matrizes de rigidez,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{U}) = & \mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{N}_{\tau}(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})\mathbf{u} + [\mathbf{K}(\eta^*(\dot{\gamma}^*)) + \mathbf{K}_{\tau}(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})]\mathbf{u} + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_{\tau}(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})]\mathbf{p} \\ & + \mathbf{G}^T \mathbf{u} - \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\tau}(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Na Eq.(4.20), as matrizes $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{G}]$ são originadas, respectivamente, pelos termos difusivos e bórico da Eq.(4.13)-(4.17), e $\mathbf{N}(\mathbf{u})$, \mathbf{G}^T e \mathbf{F} pelos termos convectivos, incompressível e de forças de corpo. Já as matrizes $\mathbf{N}(\mathbf{u})_{\tau}$, $[\mathbf{K}]_{\tau}$, $[\mathbf{G}]_{\tau}$, $\mathbf{N}(\mathbf{u})_{\tau}$ e \mathbf{F}_{τ} na Eq.(4.20) são originados pelos termos mínimos quadrados da formulação GLS, Eq. (4.13)-(4.17).

A solução do sistema definido pela Eq.(4.19)-(4.20) pode ser obtida através de um algoritmo de quasi-Newton [Dahlquist and Bjorck, 1969], no qual a matriz jacobiana é atualizada somente a cada duas ou três iterações de Newton.

ALGORÍTIMO:

I. Estime o vetor \mathbf{U}^0 e defina o número de iterações (m) para atualização da matriz jacobiana, $\mathbf{J}(\mathbf{U})$.

II. Defina $k = 0$, $j = 0$, $\varepsilon = 10^{-7}$.

III. Se $k - \text{int}(k/m) * k = 0$, então $j = k$.

IV. Resolva o vetor incremental \mathbf{a}^{k+1} :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^j) \mathbf{a}^{k+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{U}^k) \quad (4.21)$$

onde $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ é dado pela Eq. (4.20) e $\mathbf{J}(\mathbf{U})$ definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{U}) = & \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{N}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{N}_\tau(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{N}_\tau(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \\ & + \mathbf{K}(\eta^*(\dot{\gamma}^*)) + \mathbf{K}_\tau(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{K}_\tau(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} + \mathbf{G} \\ & + \frac{\partial \mathbf{G}_\tau(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{p} + \mathbf{G}_\tau(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u}) + \mathbf{G}^T - \frac{\partial \mathbf{F}_\tau(\eta^*(\dot{\gamma}^*), \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.22)$$

IV. Compute o vetor \mathbf{U}^{k+1} :

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \mathbf{a}^{k+1} \quad (4.23)$$

V. Compute $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^k)\|_\infty$. Se $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^k)\|_\infty > \varepsilon$, então faça $k = k+1$ e vá para o passo III; caso contrário, armazene a solução \mathbf{U}^{k+1} e saia do algoritmo.

Comentário: Visando acelerar a convergência do método de quasi Newton definido no algoritmo acima, foi implementada uma estratégia de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva da equação de movimento da formulação GLS, definida nas

Eqs. (4.13)-(4.17). Como estimativa inicial, o algoritmo emprega campos nulos de velocidade e pressão [Franceschini e Frey, 2003b].

4.6 DIFICULDADES ENVOLVIDAS EM ELEMENTOS FINITOS EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

O lema de estabilidade da formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados definidas pelas Eq. (4.13)-(4.16), segundo Franca e Frey (1992), é dado por

$$B(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}, -p) \geq \frac{1}{2} \left(2\eta \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_0^2 + \|\alpha^{1/2} ((\nabla \mathbf{u})\mathbf{a} + \nabla p)\|_0^2 \right) \quad (4.24)$$

onde a forma bi-linear $B(;;;)$ é formada pelos termos do lado esquerdo do sinal de igual da Eq. (4.12) e \mathbf{a} denota um campo de velocidade convectivo conhecido. Nos escoamentos fortemente advectivos dominados, η tende a zero (Reynolds tende a infinito) e o parâmetro de estabilidade α – o qual independe de η – garante a estabilidade da formulação GLS. Já a estabilidade da formulação de Galerkin, obtida tomando-se $\tau=0$ na Eq. (4.13)-(4.16), fica seriamente comprometida para número de Reynolds muito elevados, acarretando oscilações espúrias nos campos de pressão e velocidade.

Em seguida, nas Fig. 4.2-4.5, serão apresentadas algumas comparações entre as formulações de Galerkin (Eq.(4.12)) e Galerkin Mínimos-Quadrados (Eq.(4.13)-(4.16)), para uma combinação de elementos de igual-ordem violando a condição de Babuška-Brezzi. O problema estudado consiste em um escoamento de um fluido Newtoniano em uma cavidade quadrada, num problema bi-dimensional (ver Fig. 4.1, para a descrição do problema). Foram impostas condições de não-deslizamento nas paredes inferior e laterais e uma velocidade uniforme $u_1 = 1$ e $u_2 = 0$ na direção de x_2 , prescrita na parede superior da cavidade. O comprimento característico do problema é $L=1$ e o número de Reynolds é desprezível ($Re_L \approx 0$). Foram utilizadas duas malhas de elementos finitos, a primeira malha com 10x10 elementos bilineares (Q1/Q1) e a segunda com 100x100 elementos bilineares (Q1/Q1).

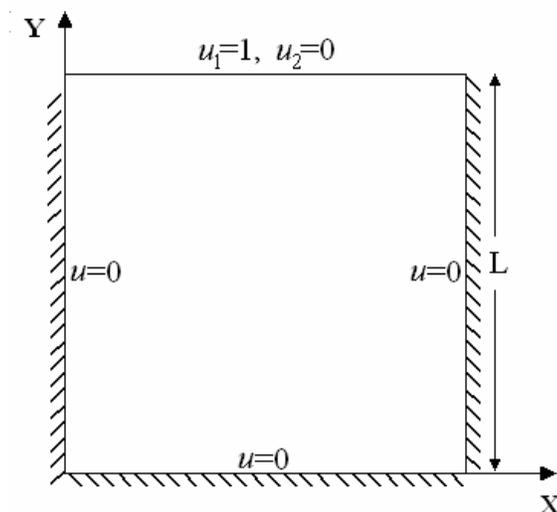


Figura 4.1 Descrição do problema da cavidade forçada.

Inicialmente, na Fig. 4.2, são apresentadas as aproximações de Galerkin (Eq.(4.12)) para os vetores velocidades (Fig. 4.2(a)) e a superfície de pressão (Fig. 4.2(b)), empregando a malha mais grosseira (10x10 elementos Q1/Q1). Conforme se observa na figura, tanto no campo de velocidade, mas principalmente no campo de pressão, a aproximação de Galerkin clássica gera oscilações espúrias à solução exata do problema, devido à combinação de elementos finitos empregada (Q1/Q1) satisfazer a condição de Babuška-Brezzi.

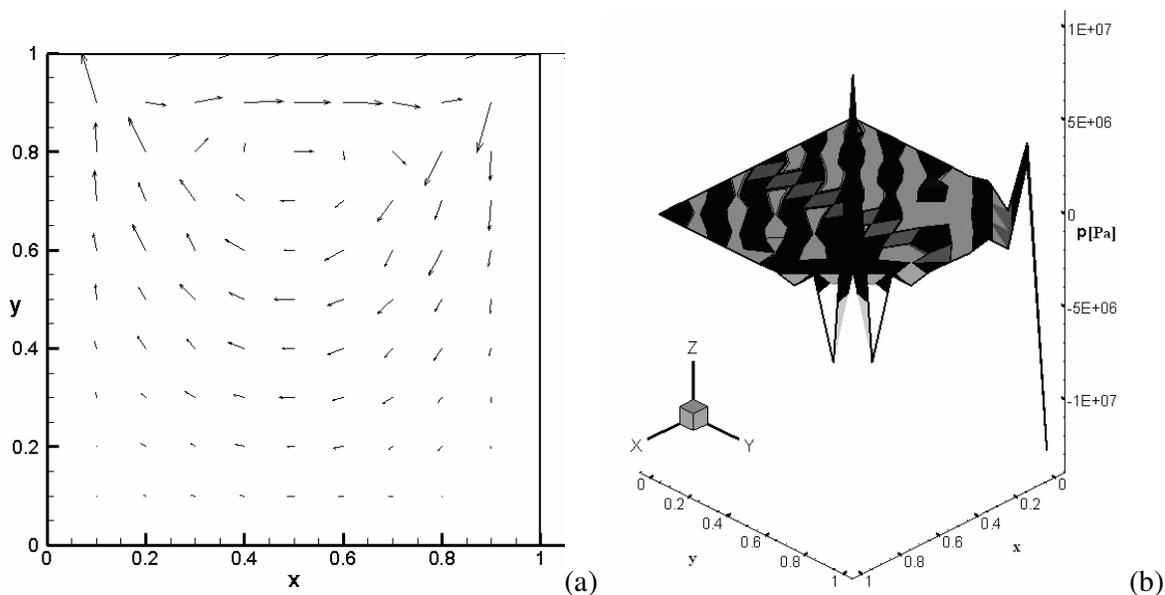


Figura 4.2: Problema da cavidade forçada - método de Galerkin para 10x10 elementos Q1/Q1:

(a)vetores velocidade e (b) elevação da pressão.

Na Fig. 4.3, são apresentadas as aproximações Galerkin Mínimos-quadrados (Eq.(4.13)-(4.16)) para os vetores velocidades (Fig. 4.3(a)) e a superfície de pressão (Fig.4.3(b)), empregando a mesma malha grosseira utilizada na Fig. 4.2. Conforme se verifica, mesmo para uma malha com apenas 100 elementos cuja combinação viola a condição Babuška-Brezzi tanto a aproximação GLS para o campo de velocidade como para o campo de pressão mostram-se isentas de oscilações numéricas.

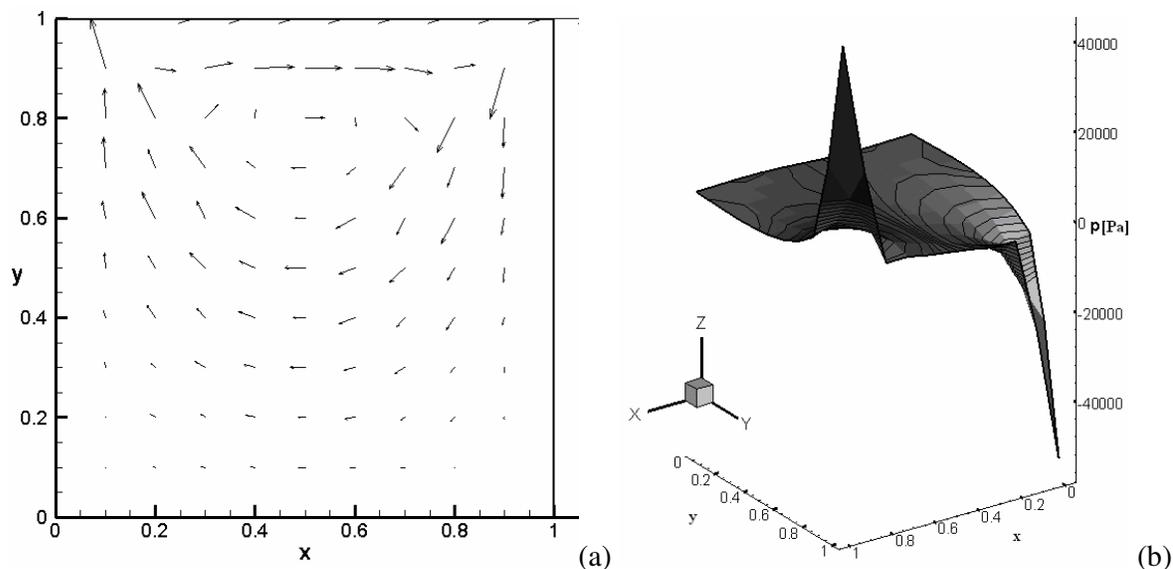


Figura 4.3: Problema da cavidade forçada - método GLS para 10x10 elementos Q1/Q1:
(a)vetores velocidade e (b) elevação da pressão.

Na Fig. 4.4, são apresentadas as aproximações de Galerkin (Eq.(4.12)) para os vetores velocidades (Fig. 4.4(a)) e a superfície de pressão (Fig. 4.4(b)), empregando a malha mais refinada (100x100 elementos Q1/Q1). Conforme se observa, a aproximação de Galerkin clássica para o campo de pressão continua a gerar oscilações espúrias, mesmo para uma malha exageradamente refinada para esta classe de problemas. Este resultado verifica a teoria de aproximação dos problemas mistos, a qual afirma que o refino de malha não elimina as oscilações no campo de pressão, se a combinação de elementos empregadas violar Babuška-Brezzi.

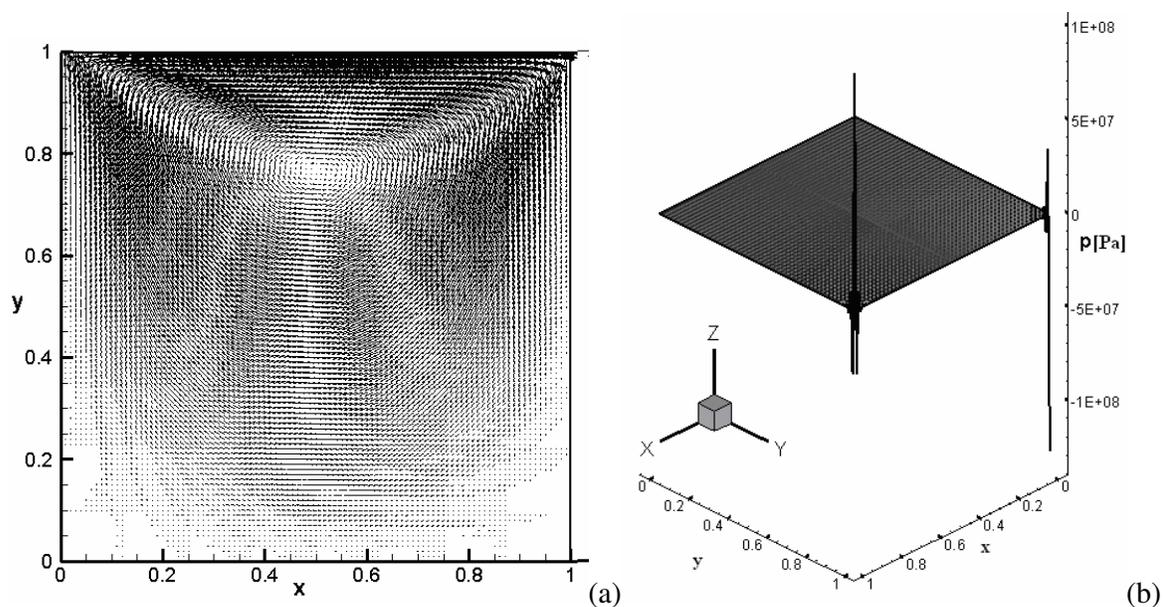


Figura 4.4: Problema da cavidade forçada - método de Galerkin para 100×100 elementos Q1/Q1:
(a) vetores velocidade e (b) elevação da pressão.

Na Fig. 4.5, são apresentadas as aproximações Galerkin Mínimos-quadrados (Eq.(4.13)-(4.16)) para os vetores velocidades (Fig. 4.5(a)) e a superfície de pressão (Fig. 4.5(b)), empregando a mesma malha refinada utilizada na Fig. 4.4. Conforme se nota na figura, a aproximação GLS tanto para o campo de velocidade como para o campo de pressão mostram-se isentas de oscilações espúrias – inclusive nas quinas superiores da cavidade, onde ocorrem elevados valores de pressão.

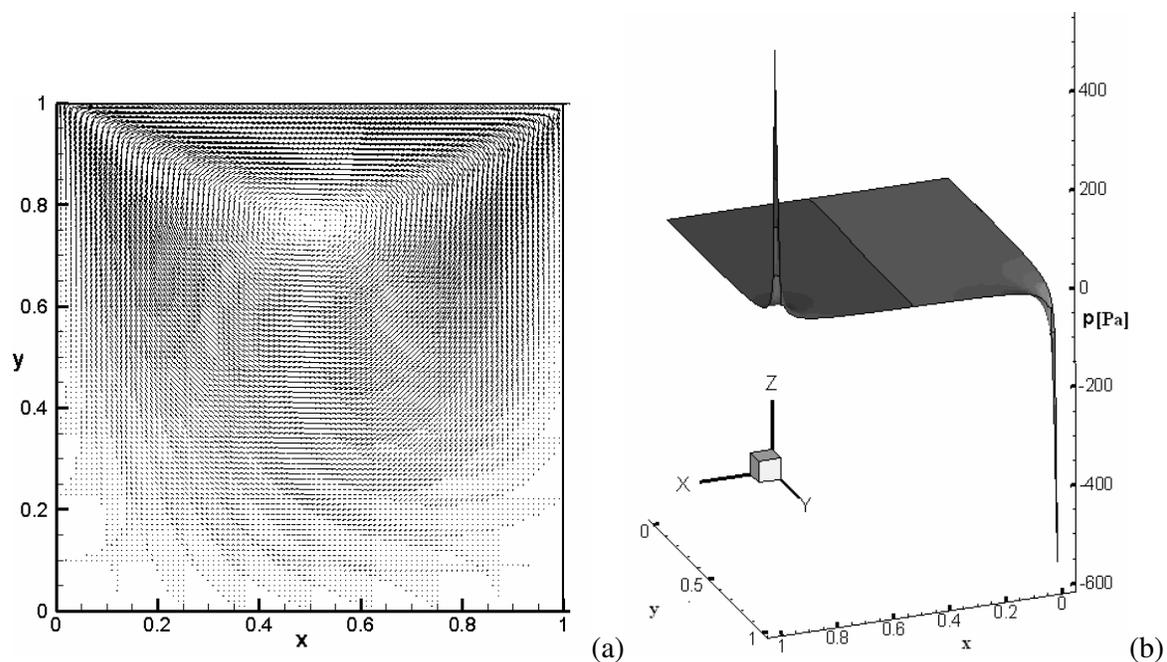


Figura 4.5: Problema da cavidade forçada - método GLS para 100x100 elementos Q1/Q1:
(a) vetores velocidade e (b) elevação da pressão.

Na Figura 4.6 são apresentados os perfis velocidade horizontal, em $x = 0,5$ (Fig.4.6(a)) e perfil velocidade vertical, em $y=0,5$ (Fig.4.6(b)), para a malha 10x10 elementos bilineares Q1/Q1. Nos perfis velocidade horizontal e vertical, apresentados na Fig. 4.6, nota-se nitidamente a instabilidade do método de Galerkin clássico quando comparado ao método estabilizado (GLS) – o que vai de encontro à teoria de interpolação dos métodos de elementos para problemas mistos, estabelecida com a introdução da condição de Babuška-Brezzi, ou condição LBB [Oden e Carey, 1983; Babuška, 1973; Brezzi, 1974].

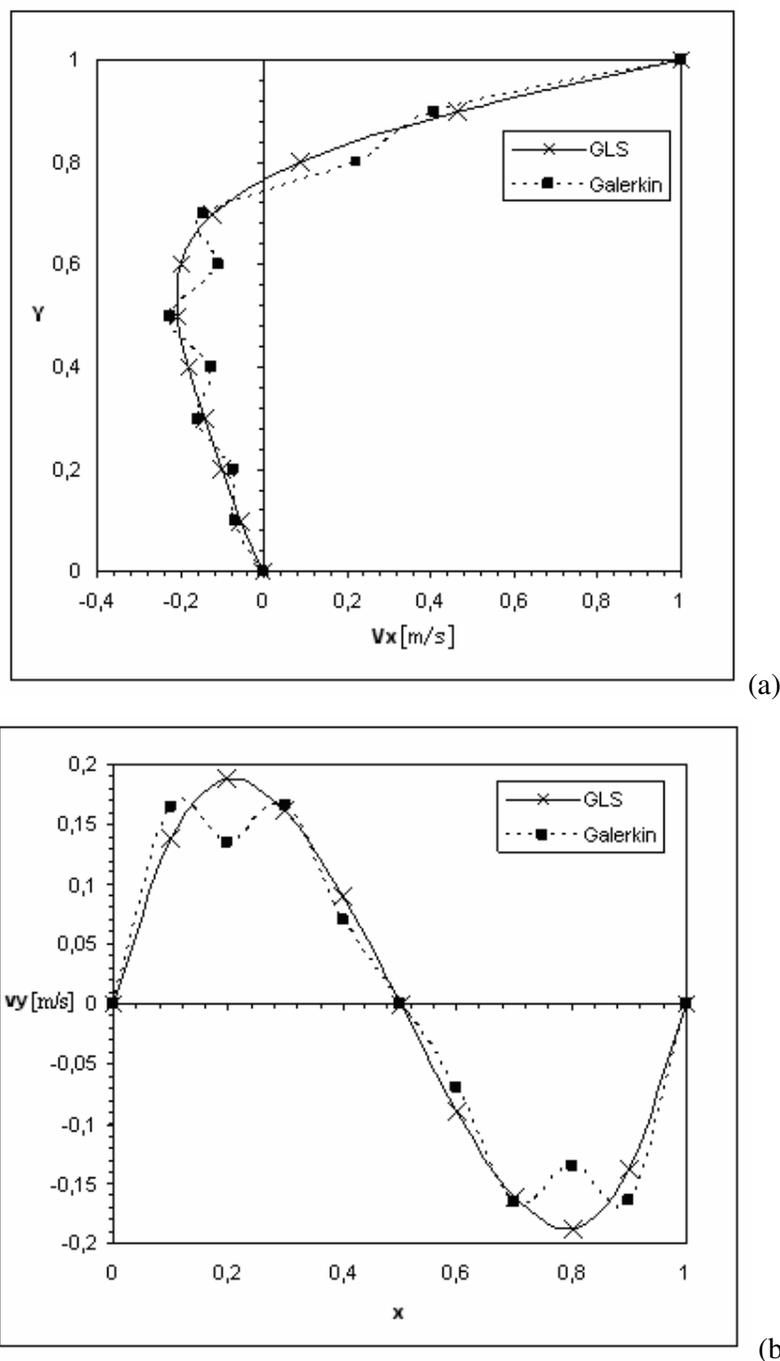


Figura 4.6: Problema da cavidade forçada - métodos de Galerkin e GLS para 10x10 elementos Q1/Q1: (a) perfil velocidade v_x e (b) perfil velocidade v_y .

Os tempos computacionais para as simulações realizadas utilizando o método de Galerkin e Galerkin Mínimos-Quadrados apresentaram-se, para a malha 10X10, quase que instantâneos, ou seja, com valores bem menores que 1 segundo (na ordem de centésimos de segundo). Já para a malha 100X100, o método Galerkin apresentou um tempo computacional de 53 segundos, enquanto o método GLS apresentou um tempo de 44 segundos. Logo, observou-se que o método

GLS além de apresentar melhores resultados - sem oscilações espúrias - apresenta um menor tempo computacional também.

4.7 ELEMENTO QUADRANGULAR BILINEAR

O elemento quadrangular bi-linear, denominado pelo símbolo Q1, é atribuído, segundo Hughes (1987), a Taig (1961). O domínio elementar global de um elemento quadrilátero Q1 é definido pela localização de seus quatro pontos nodais de coordenadas globais \mathbf{x}_a^K , $a = 1, \dots, 4$ no plano \mathfrak{R}^2 . Assume-se que os pontos nodais sejam numerados localmente no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 4.7. Através de uma transformação linear, relaciona-se o elemento global, cujas coordenadas de um ponto são $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$, com o elemento do ponto de vista local, um quadrilátero bi-unitário. O domínio do quadrilátero bi-unitário é denominado domínio aparente e é representado pelas coordenadas locais

$$\xi = \{ \zeta, \eta \} \quad (4.25)$$

no qual ζ e η são as chamadas coordenadas naturais, onde $-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$, mapeando em Ω_h segundo as transformações

$$\begin{aligned} x_1(\zeta, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\zeta, \eta) x_{1a}^K \\ x_2(\zeta, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\zeta, \eta) x_{2a}^K \end{aligned} \quad (4.26)$$

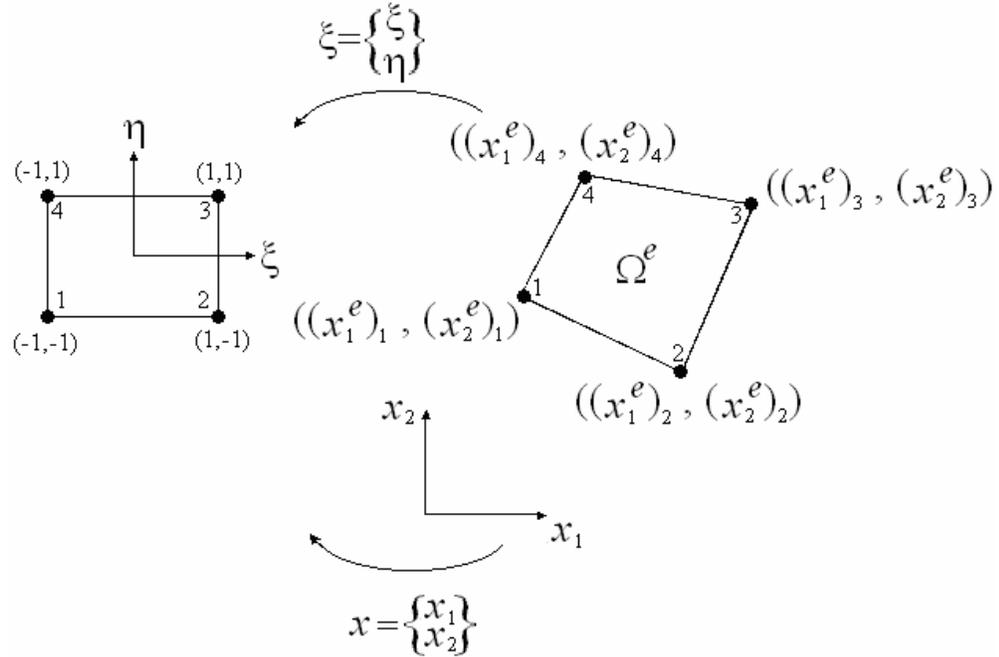


Figura 4.7 Domínio de elemento quadrilátero bilinear no domínio aparente e ordenação nodal local.

Vetorialmente, as expressões (4.26) podem ser escritas como;

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^4 N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a^K \quad (4.27)$$

As funções de base locais $N_a(\boldsymbol{\xi})$ empregadas com expressões bilineares das coordenadas ξ Eq. (4.27) podem ser determinadas assumindo, inicialmente, as expansões

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \\ x_2(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde α e β são coeficientes incógnitos a serem determinados. Em seguida, impondo que as Eqs. (4.28) satisfaçam, respectivamente, as condições do mapeamento;

$$\begin{aligned} x_1(\xi_a, \eta_a) &= x_{1a}^K \\ x_2(\xi_a, \eta_a) &= x_{2a}^K \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde η_a e ξ_a são definidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Coordenadas locais no espaço ξ

| A | ξ_a | η_a |
|-----|---------|----------|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | +1 | -1 |
| 3 | -1 | +1 |
| 4 | +1 | +1 |

As Eqs. (4.28)-(4.29) levam a um sistema de equações em α e β , na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{11}^K \\ x_{12}^K \\ x_{13}^K \\ x_{14}^K \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{21}^K \\ x_{22}^K \\ x_{23}^K \\ x_{24}^K \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Resolvendo-se os sistemas (4.30) e (4.31) para os coeficientes α e β , respectivamente, obtém-se a equação da função de forma bi-linear local $N_a(\xi)$:

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (4.32)$$

com os valores de ξ_a e η_a dados pela Tab. 4.1 e visualizadas na Fig. 4.8.

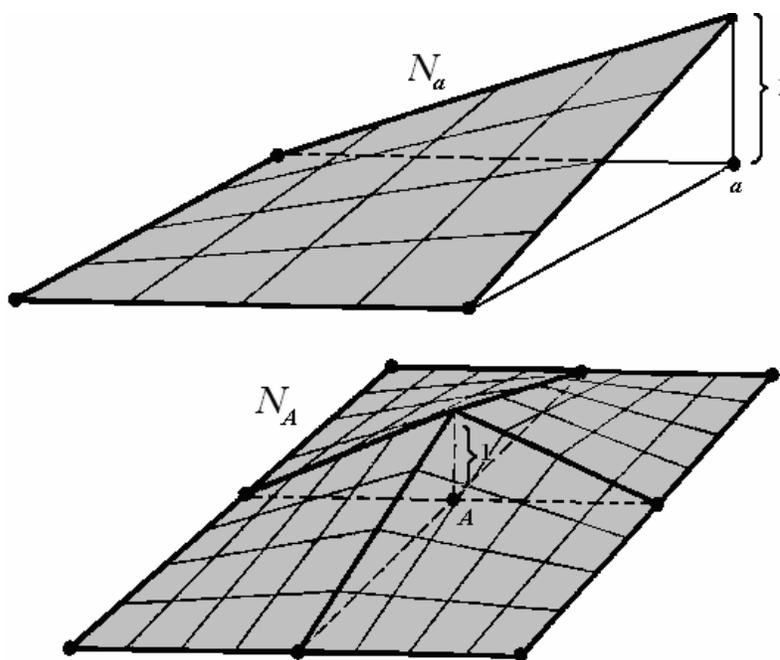


Figura 4.8: Funções de forma local (N_α) e global (N_A) do elemento quadrilátero bi-linear Q1.

Observações:

1. Esta forma é igual ao produto das funções de forma lineares unidimensionais nas direções ξ e η , o que caracteriza o elemento quadrangular bi-linear Q1, como um elemento Lagrangeano de baixa ordem.
2. Elemento quadrangular bi-linear é um elemento isoparamétrico, isto é, as funções de forma que definem o mapeamento global definido pela Eq. (4.27) são as mesmas funções de forma utilizadas na aproximação das variáveis primais da formulação GLS definida pelas Eqs. (4.13)-(4.16).
3. A importância dos elementos isoparamétricos é que, para estes elementos, as condições básicas de convergência do método de elementos finitos são virtualmente satisfeitas [Hughes, 1987], garantindo, desse modo, que a solução aproximada da formulação GLS definida pelas Eqs. (4.13)-(4.16) irá convergir para a solução exata do problema forte definido pela Eq. (4.5), quando o comprimento de malha h tender para zero. Além disso, do ponto de vista computacional, os elementos isoparamétricos são de implementação relativamente simples e concisa.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentadas simulações numéricas para três tipos de escoamentos. Um escoamento de um fluido Newtoniano em uma cavidade forçada, com a finalidade de validar o código computacional, comparando os resultados obtidos neste trabalho com outros trabalhos já publicados. E ainda, escoamentos de um fluido viscoplástico SMD através de uma expansão seguida de uma contração abrupta e em torno de um cilindro, devido a uma vasta gama de aplicações destes dois tipos de geometria principalmente na indústria petrolífera e também para fins de comparação com trabalhos já realizados. As simulações foram realizadas utilizando o método de elementos finitos, com aproximações de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS), Eqs (4.13)-(4.17), do problema de contorno definida pela Eq.(4.5). Os resultados computacionais alcançados foram obtidos com o código de elementos finitos NNFEM, em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

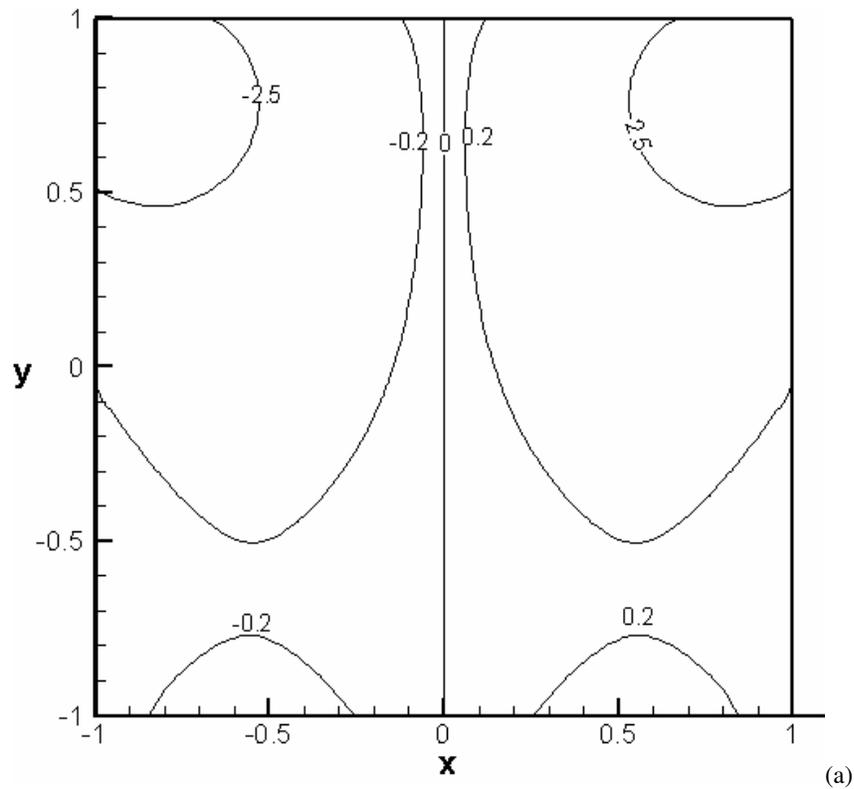
5.1 ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO EM UMA CAVIDADE FORÇADA

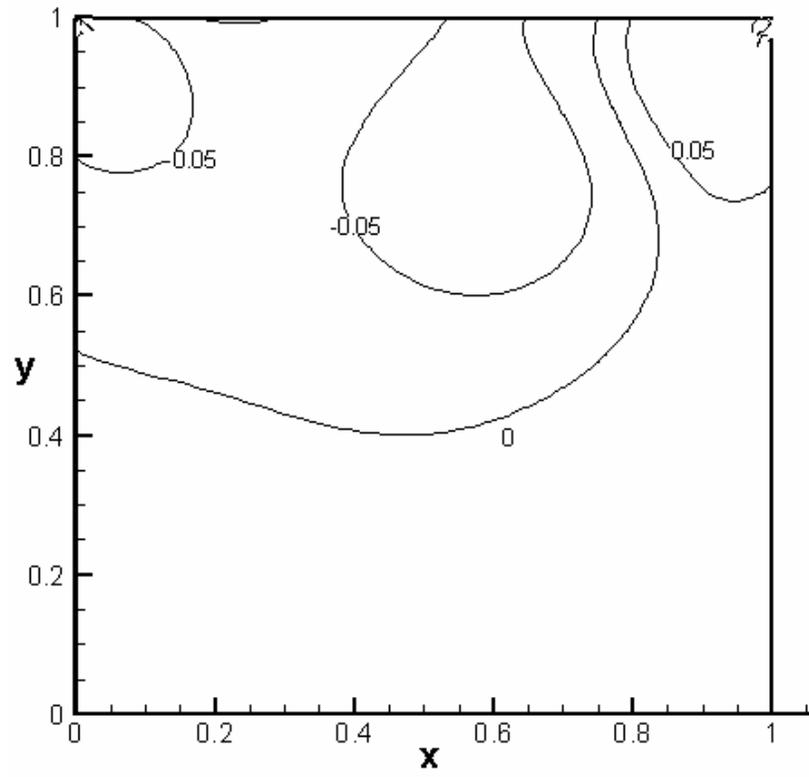
A fim de validar o código computacional da formulação GLS definida nas Eqs. (4.13)-(4.17) em problemas com não-linearidades geométricas, foram realizadas simulações do escoamento de um fluido Newtoniano no *benchmark* da cavidade forçada (ver Fig.4.1 para descrição do problema e condições de contorno).

Foi empregado o sistema de coordenadas cartesianas retangulares com a origem localizada no centro de uma cavidade bi-unitária para $Re_L \approx 0$ e, para números de Reynolds igual a 100, 400 e 1000 com origem localizada no canto esquerdo inferior (Figuras 5.1 e 5.2) –o número de Reynolds é dado da seguinte forma: $Re_L = \rho v L / \mu$, onde ρ é a densidade do fluido, v a velocidade do fluido, μ a viscosidade do fluido e L o comprimento característico da cavidade. O domínio computacional foi discretizado por 100x100 elementos bilineares (Q1/Q1), gerando um total de 10201 pontos nodais.

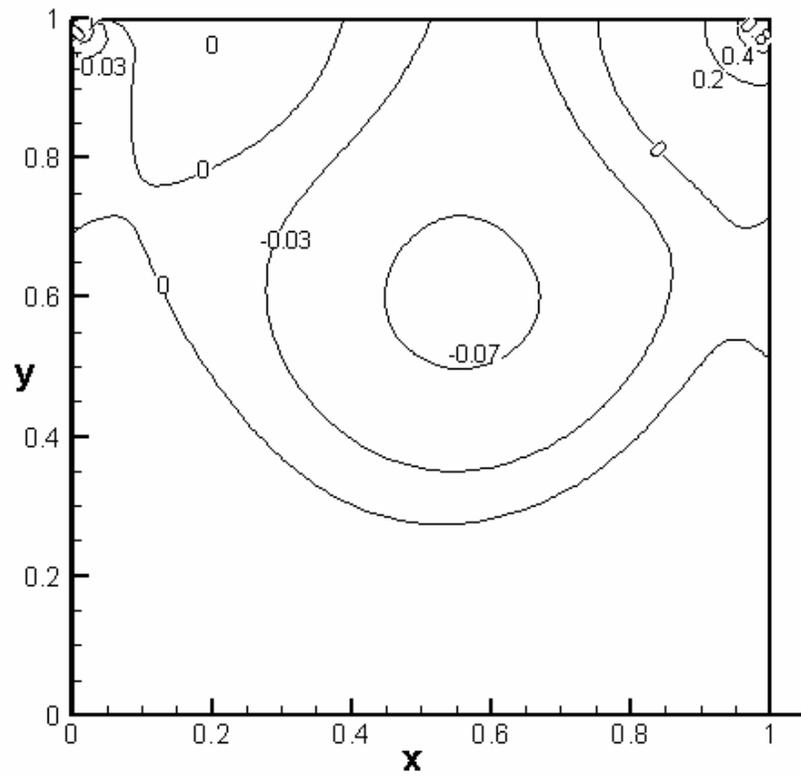
Nas Figuras 5.1 e 5.2 são apresentadas, respectivamente, as iso-regiões do campo de pressão e as linhas de corrente/magnitude da velocidade obtidas pela aproximação GLS (Eqs. (4.13)-(4.17)) do problema forte definido pelas Eq. (4.5), para diferentes números de Reynolds. Pode-se notar, na Fig.5.1(a) que o campo de pressão, para um número de Reynolds desprezível

($Re \approx 0$), é completamente estável, e, na Fig. 5.2(a), que o vórtice principal do escoamento está posicionado na linha de simetria horizontal. A mesma estabilidade é também alcançada pela formulação GLS para escoamentos inerciais, conforme ilustram tanto as isobáricas, como as linhas de corrente/magnitude de velocidade, para $Re_L = 100, 400$ e 1000 (Figs. 5.1(b)-5.1(d) e 5.2(b)-5.2(d)). Os resultados ilustrados nessas figuras indicam que a formulação GLS estabilizou satisfatoriamente o problema definido pelas Eq.(4.5), empregando uma combinação de elementos finitos (Q1/Q1) a qual viola a condição de Babuška-Brezzi e em escoamentos sujeitos a altos números de Reynolds.





(b)



(c)

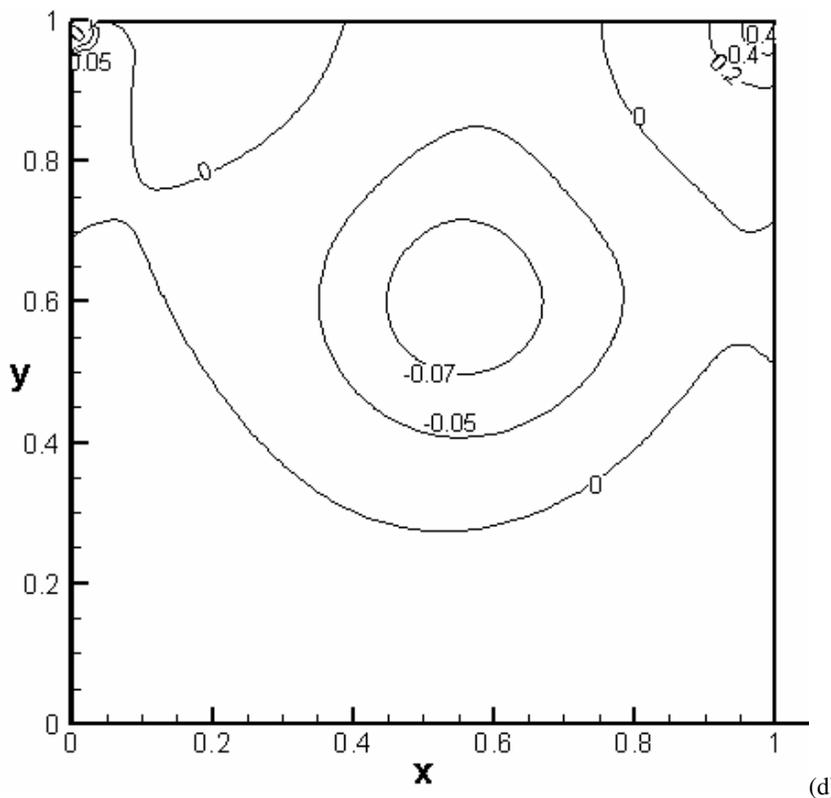
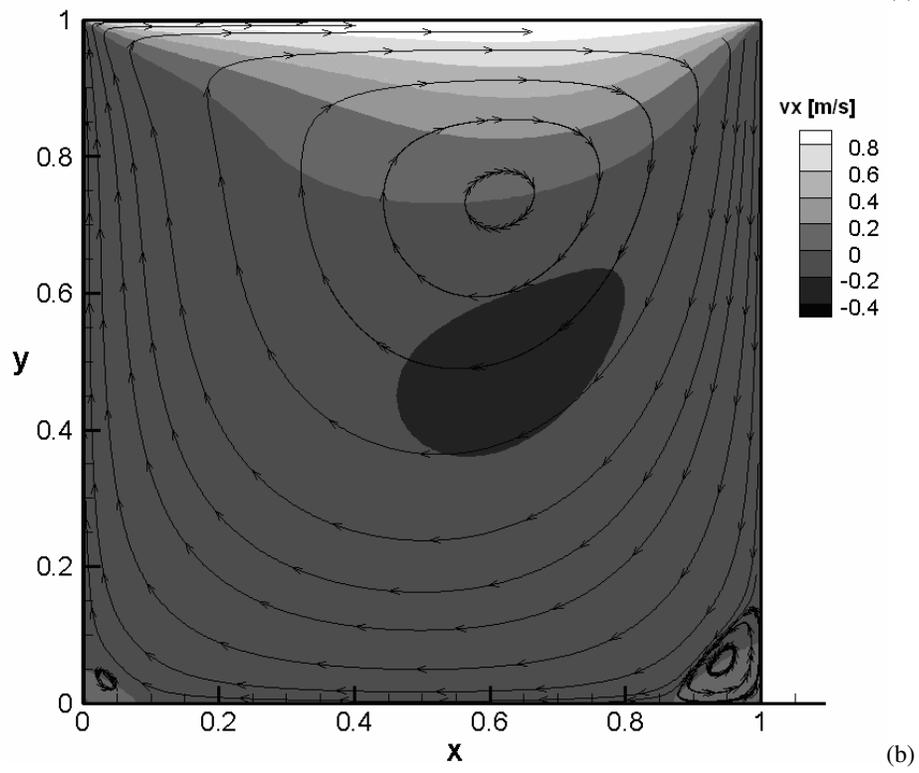
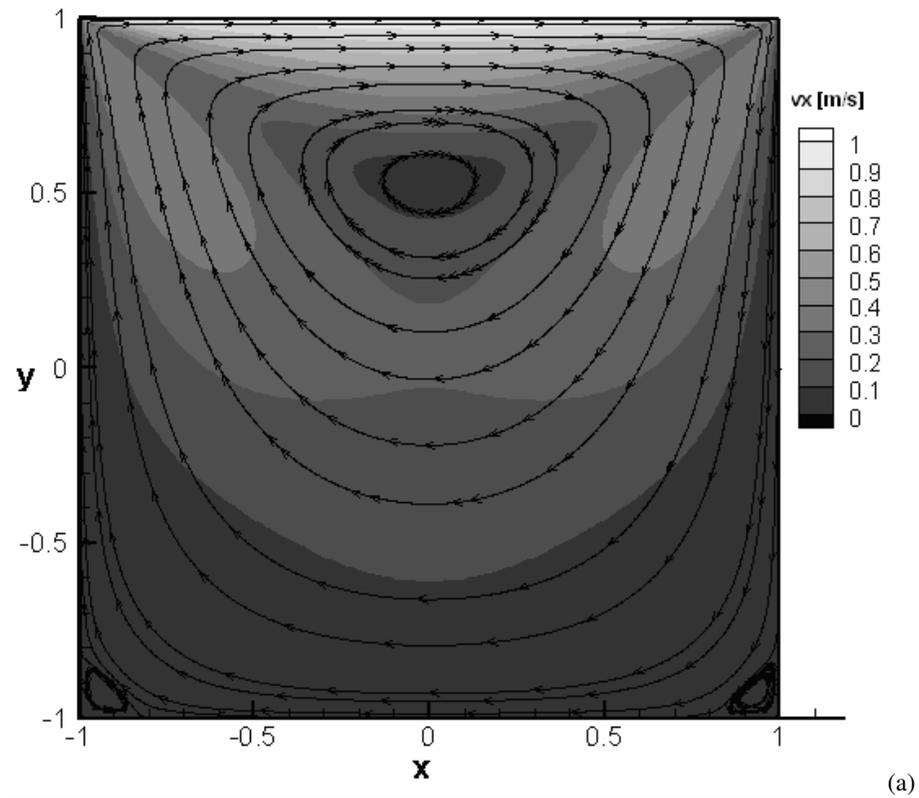
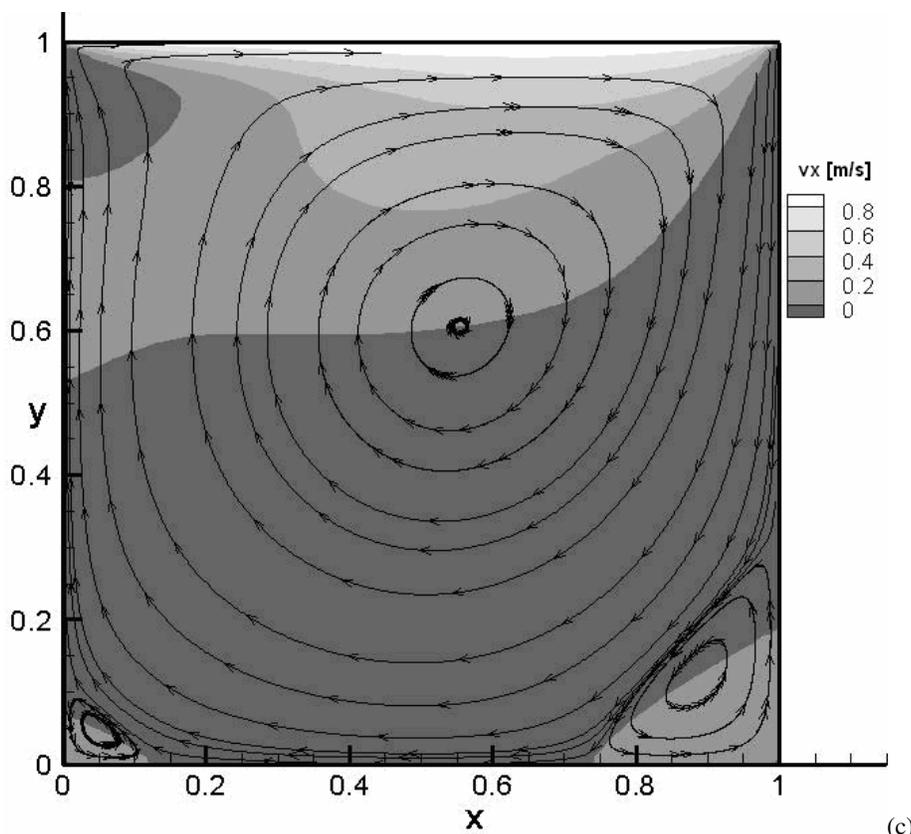


Figura 5.1 Problema da cavidade forçada – Isobáricas, para 100x100 elementos Q1/Q1 (6.296 pontos nodais): (a) $Re_L \approx 0$; (b) $Re_L = 100$; (c) $Re_L = 400$ e (d) $Re_L = 1000$.

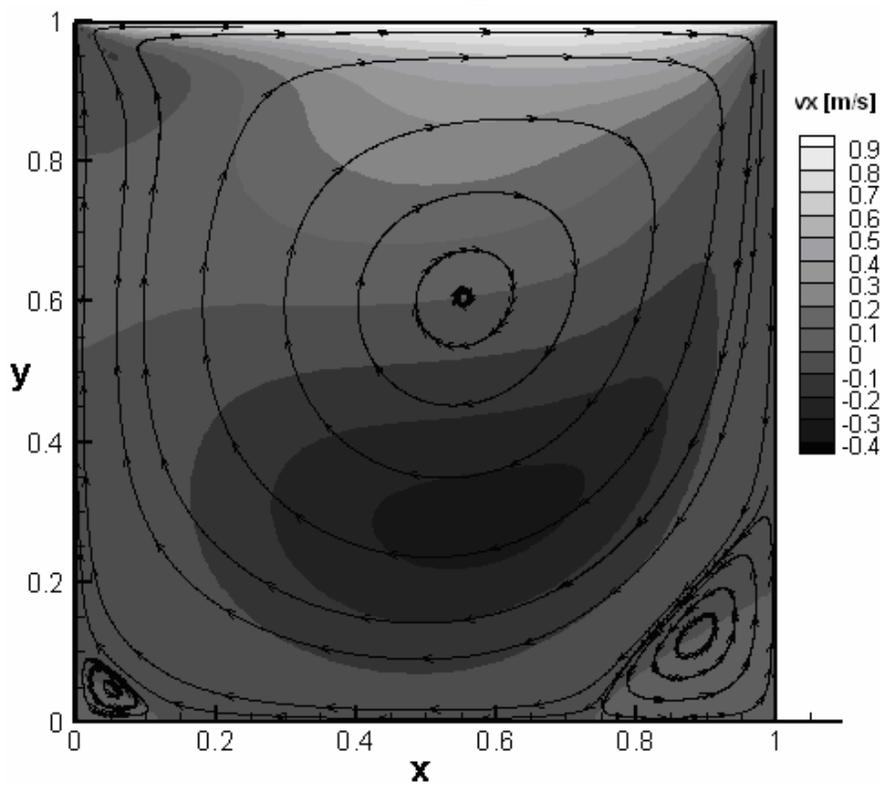
Quanto ao padrão de escoamento, fica claro, da análise das linhas de corrente apresentadas na Fig. 5.2(b)-5.2(d), que à medida que o número de Reynolds aumenta, a recirculação principal do escoamento tende a se deslocar para o centro da cavidade - não mais ficando restrita às vizinhanças da parede superior da cavidade quando $Re_L \approx 0$ (Fig. 5.2(a)). Isto se deve ao fato que, para as situações com inércia (Fig. 5.2(b)-5.2(d)), a região inferior da cavidade também irá recircular devido à diminuição da viscosidade do fluido, centralizando, assim, a recirculação do escoamento principal.

Este efeito também pode ser observado nas iso-regiões do campo de pressão, Fig. 5.1. Nestas figuras, o campo de pressão perde sua simetria inicial obtida para a situação sem inércia (Fig. 5.2(a)), criando, à medida que o número de Reynolds aumenta uma depressão no campo de pressão associada à recirculação principal do fluido, a qual se desloca para a região central da cavidade com o aumento do Reynolds (Fig. 5.1(b)-5.1(d)).





(c)



(d)

Figura 5.2 Problema da cavidade forçada – Linhas de corrente e iso-regiões de velocidade, para 100x100 elementos Q1/Q1 (6.296 pontos nodais): (a) $Re_L \approx 0$; (b) $Re_L = 100$; (c) $Re_L = 400$ e (d) $Re_L = 1000$.

Pode-se observar ainda da Figura 5.2 que, com o aumento do número de Reynolds, desenvolvem-se recirculações secundárias junto aos cantos inferiores da cavidade (Figs. 5.2(a)-5.2(d)), originadas pela perda de quantidade de movimento e conseqüente descolamento do fluido das paredes dos cantos vivos da parede inferior da cavidade.

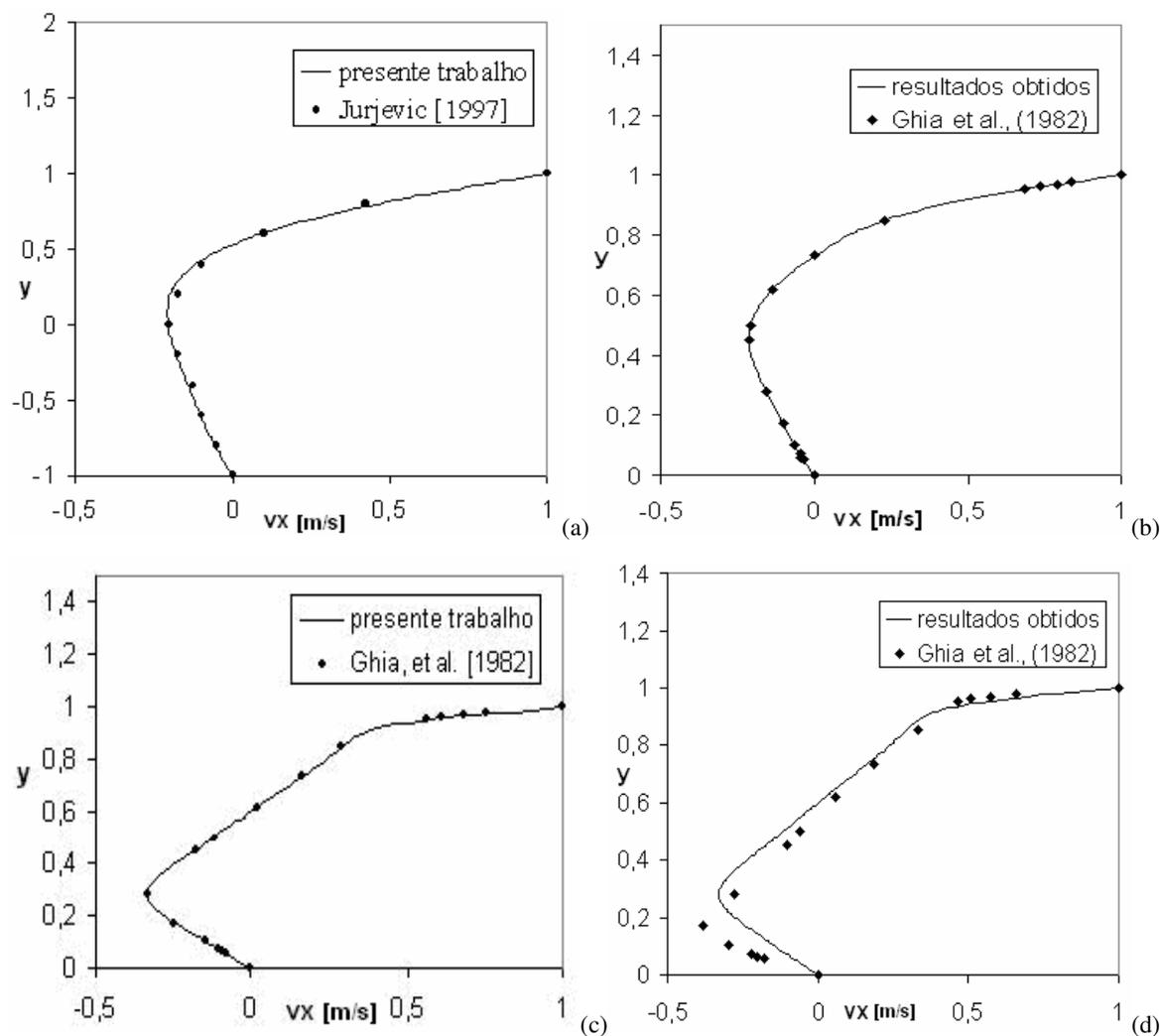


Figura 5.3 Problema da cavidade forçada - Perfil de velocidade horizontal, em $x_1 = 0,5$, para 100×100 elementos Q1/Q1 (6296 pontos nodais): (a) $Re_L \approx 0$; (b) $Re_L = 100$; (c) $Re_L = 400$ e (d) $Re_L = 1000$.

Por fim, nas Figuras. 5.3 e 5.4, são mostrados os perfis velocidade horizontal e vertical, respectivamente. Os resultados obtidos com a formulação GLS (Eqs. (4.13)-(4.17)) foram comparados com os resultados de Guia et al. (1982) – para as situações com inércia - e Jurjevic. (1999) – para a situação com inércia desprezível. Tanto o perfil de velocidade horizontal, como o

perfil de velocidade vertical, para $Re \approx 0$ (Figs 5.3(a) e 5.4(a)) estão em excelente acordo com os apresentados no trabalho de Jurjevic. (1999).

Já as situações advectivas dominadas, para $Re_L = 100, 400$ e 1000 , tanto o perfil de velocidade horizontal, em $x_1=0,5$ (Fig. 5.3(b)-5.3(d)), como o perfil de velocidade vertical, em $x_2=0,5$ (Fig. 5.4(b)-5.5(d)), apresentaram discrepância dos valores apresentados em Guia et al. (1982). Os resultados obtidos pela formulação GLS parecem, a primeira vista, mais difusivos, porém são considerados satisfatórios.

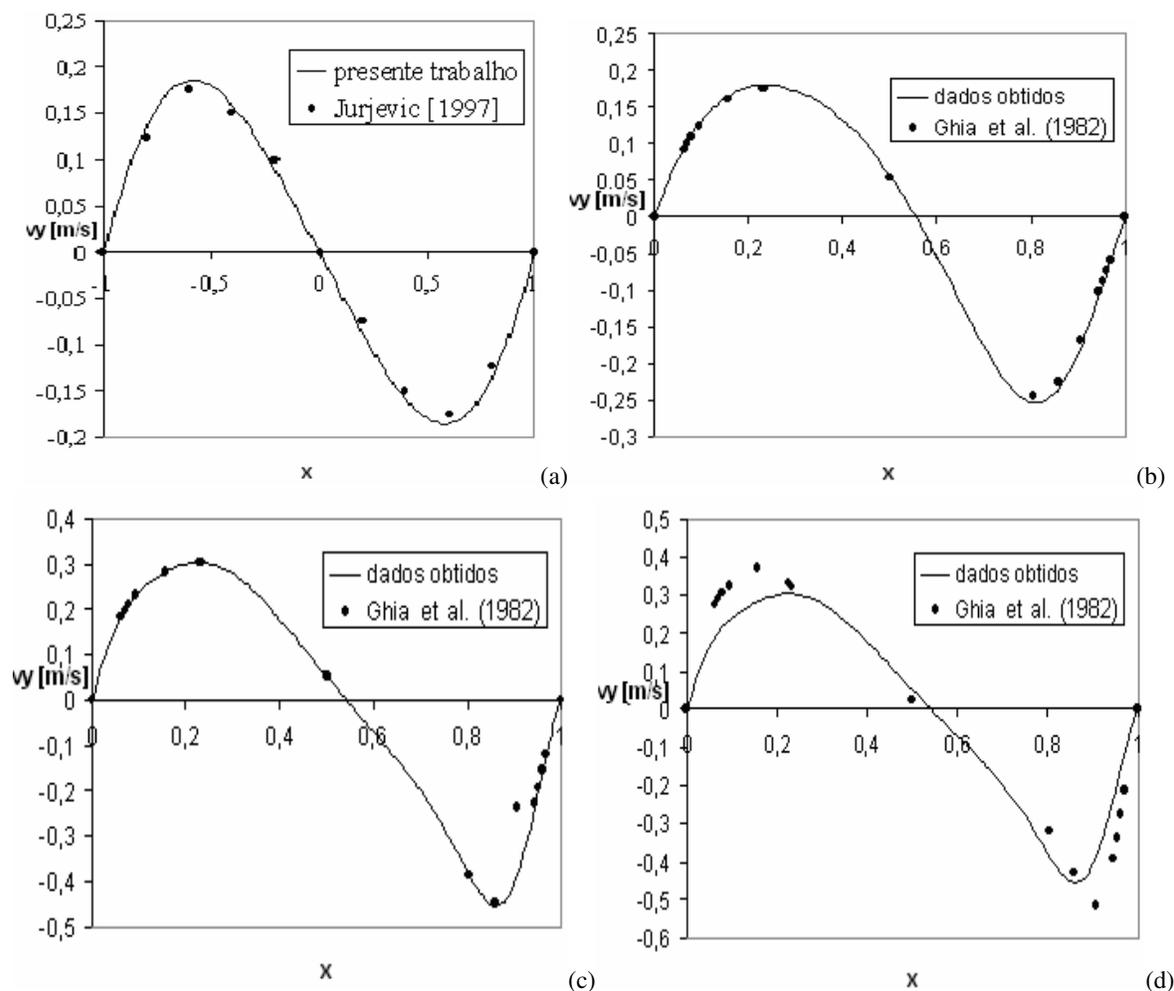


Figura 5.4 Problema da cavidade forçada - Perfil de velocidade vertical, em $x_2=0,5$, para 100×100 elementos Q1/Q1 (6296 pontos nodais): (a) $Re_L \approx 0$; (b) $Re_L = 100$; (c) $Re_L = 400$ e (d) $Re_L = 1000$.

5.2 ESCOAMENTO DE FLUIDO SMD ATRAVÉS DE UMA EXPANSÃO SEGUIDA DE UMA CONTRAÇÃO ABRUPTA

Nesta seção, será apresentada a aproximação GLS, definida pela E(4.13)-(4.17)) do problema forte definido pela Eq.(4.5), para o fluido proposto por Souza Mendes et al. (2007). A geometria do problema está ilustrada na Fig. 5.5(a), para coordenadas polares com origem na entrada do duto – a fim de minimizar os esforços computacionais, só foi considerado metade do domínio.

As condições de contorno da velocidade foram não deslizamento e impermeabilidade nas paredes dos dutos, perfil velocidade parabólico unitário uniforme na entrada e na saída do duto e condições de contorno de simetria na linha central do escoamento ($\partial_1 u_2 = u_1 = 0$).

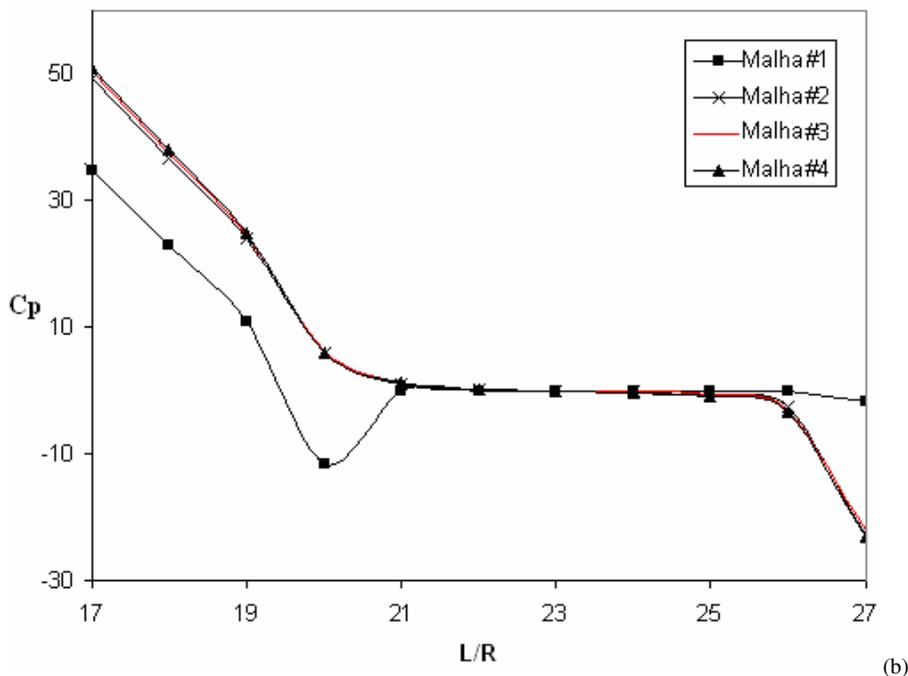
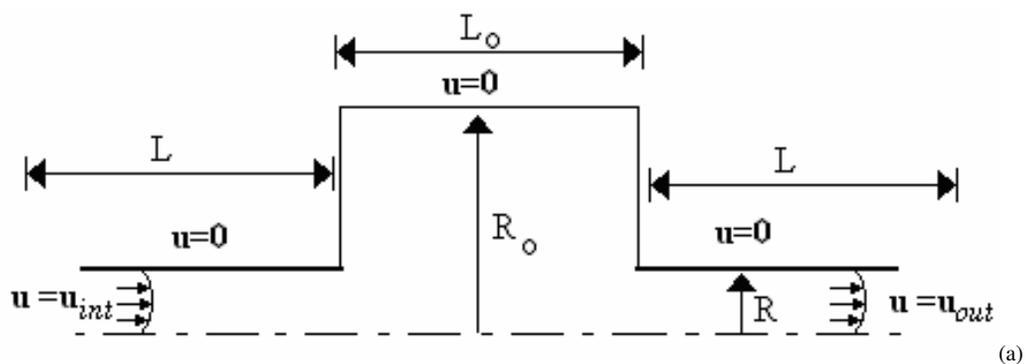


Figura 5.5 Escoamento de um fluido SMD através de e uma expansão seguida de uma contração: (a) geometria do problema e (b) teste de independência de malha.

A razão de aspecto do duto mostrado na Fig. 5.5(a) foi definida como a relação entre os raios R_0 e R , sendo fixada como 6,3. O comprimento do duto a montante e a jusante da expansão-contracção é suficiente para que o escoamento se desenvolva hidrodinamicamente, tanto na entrada do duto da expansão, como na saída do duto da contracção – a razão desses dutos foi escolhida como $L/R = 20$.

O fluido aqui estudado é um fluido Newtoniano generalizado (GNL), Eq. (3.6), com a tensão de cisalhamento e viscosidade do fluido dados pelas funções propostas por Souza Mendes et al. (2007), Eq. (3.17)-(3.18). Nas simulações numéricas realizadas, o valor do número de salto J (Eq.(3.16)) foi variado de 1 a 10^6 e o coeficiente de *power-law* n de 0,2 a 0,9. O número de Reynolds utilizado foi muito menor que a unidade ($Re \approx 0$), a fim de simular escoamento com inércia desprezível. O escoamento foi considerado axissimétrico e todas as suas propriedades supostas independentes da temperatura.

Foi realizado um processo de refinamento de malha, o qual objetivou testar a independência de malha dos resultados obtidos para a queda de pressão ao longo do duto. Foram empregadas quatro malhas distintas para o teste de independência de malha (ver Fig. 5.5(b)): (a) Malha #1, com 2.164 elementos bilineares (Q1/Q1); (b) Malha #2, com 5.969 elementos Q1/Q1; (c) Malha #3, com 9.568 elementos Q1/Q1 e (d) Malha #4, com 11.664 elementos Q1/Q1.

O refinamento de cada malha foi realizado tanto na direção axial como na radial, dando maior atenção à região entre a expansão seguida da contracção. O critério adotado no teste de independência de malha foi que a diferença entre a queda de pressão deveria ser menor do que 3% comparada com a malha mais refinada. O comprimento do canal foi adimensionalizado pela razão L/R e a queda de pressão foi calculada utilizando o número de Euler, freqüentemente chamado de coeficiente de pressão, que consiste na razão entre as forças de pressão estática e forças de inércia,

$$C_p = \frac{p - p_{ref}}{(1/2)\rho v_{ref}^2} \quad (5.1)$$

onde a pressão de referência p_{ref} foi tomada no centro do duto da cavidade formada entre a expansão e contracção e a velocidade de referência v_{ref} foi escolhida a velocidade média adimensionalizada na entrada.

De acordo com o critério acima estabelecido, a Malha #3 (Fig. 5.6) foi selecionada e o domínio computacional foi, então, discretizado por uma combinação de 9.568 elementos bilineares (Q1/Q1).

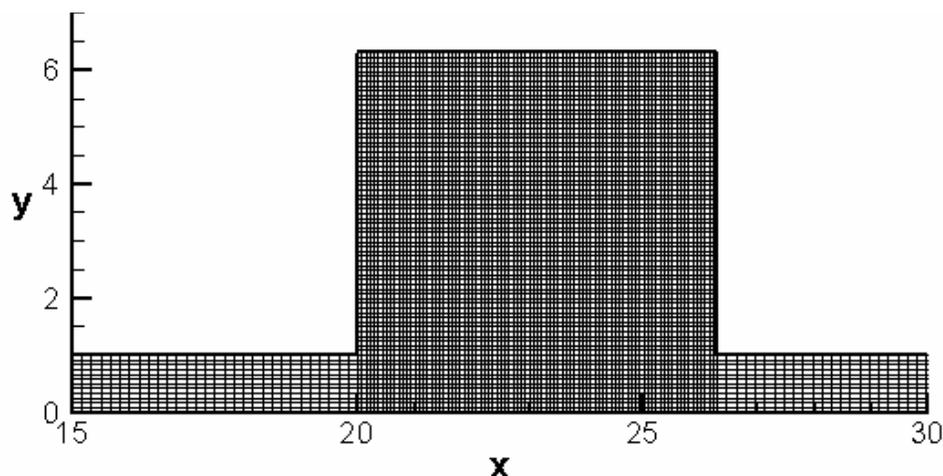


Figura 5.6 Escoamento de um fluido SMD através de e uma expansão seguida de uma contração: detalhe da malha usada nas simulações (Malha #3 - 9.568 elementos Q1/Q1).

Na Figura Fig.5.7 é apresentada a comparação entre os resultados obtidos nesta dissertação com resultados experimentais e numéricos obtidos por Souza Mendes et al. (2007) (Além de validar uma simulação numérica de interesse, esta comparação serve como validação e calibração do módulo de não-linearidade do código computacional NNFEM, empregado nesta dissertação.). Para essa comparação foi utilizada a geometria mostrada anteriormente (Fig. 5.5(a)), para as seguintes razões $R/R_0=6,3$ e $L_0/R_0=1$, o número de salto usado foi $J=18.000$, índice *power-law* $n=0,4$.

Conforme se verifica na Fig. 5.7, a formulação GLS gerou resultados aceitáveis se comparados com os resultados obtidos por Souza Mendes et al. (2007). Tanto a topologia como a localização da superfície de escoamento a região do duto entre sua expansão e contração mostraram uma concordância muito boa para um problema de tão alta não-linearidade material ($J=18 \times 10^3$).

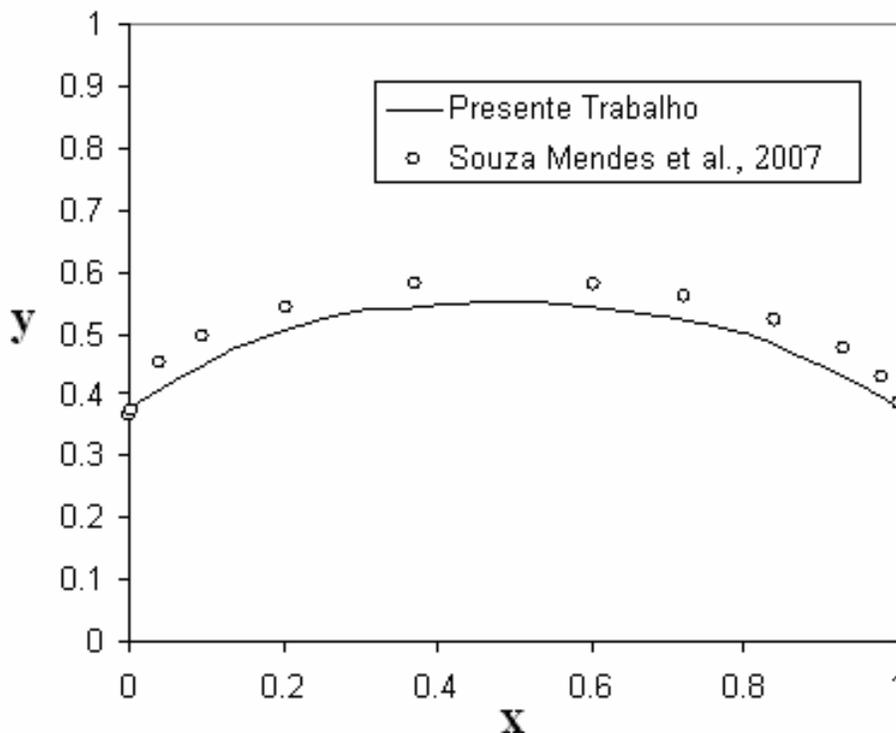
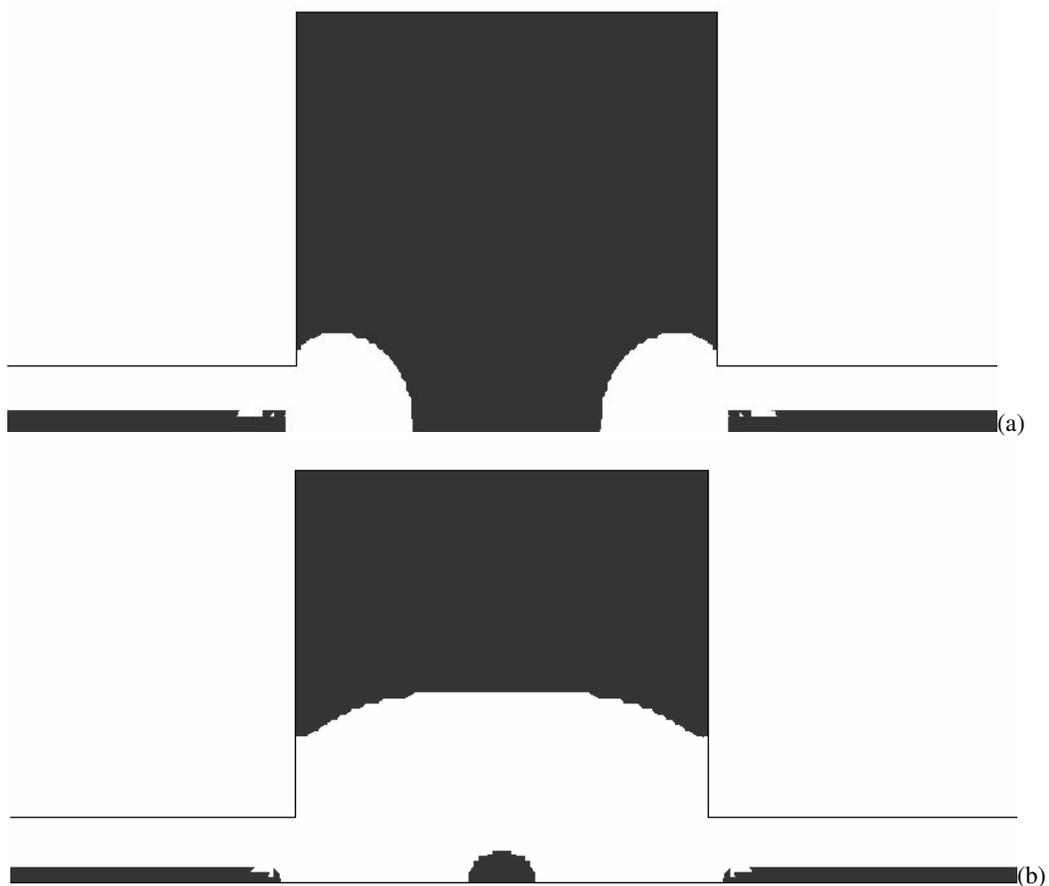


Figura 5.7 Escoamento de um fluido SMD através de e uma expansão seguida de uma contração: comparação com os resultados do trabalho de Souza Mendes et al. (2007).

Em seguida, nas Figuras 5.8(a)-5.8(d) são apresentadas as aproximação GLS para as iso-regiões da tensão de cisalhamento τ , para $n=0.5$ e $J=1, 10^2, 10^4$ e 10^6 . Na Figura, as zonas pretas indicam as regiões materiais rígidas - caracterizadas por $\tau < \tau_0$ - enquanto as regiões brancas representam regiões de escoamento apresentando $\tau > \tau_0$. Como se pode notar na figura, as regiões rígidas diminuem com o aumento do número de salto; para $J=1$ (Figura 5.8(a)), obteve-se a maior obstrução ao escoamento com a formação de uma grande zona estagnada, a qual foi retrocedeu à medida que o número de salto atingiu os valores $J=10^2$ (Figura 5.8(b)), $J=10^4$ (Figura 5.8(c)), $J=10^6$ (Figura 5.8(d)). Este comportamento pode ser bem entendido observando-se o efeito que o aumento do número de salto provoca nas simulações das curvas de escoamento apresentadas na Figura 3.4. Segundo esta figura, à medida que J cresce, os valores de $\dot{\gamma}_0$, valores nos quais a tensão de cisalhamento alcança o limite de cisalhamento do material, são cada vez mais deslocados para a esquerda. Assim, quanto maior o número de salto J , maiores serão as regiões sujeitas a muito baixas taxas de cisalhamento que alcançaram o valor da tensão τ_0 e, conseqüentemente, iniciarão o processo de escoamento (Observe que, contrariamente, o crescimento de J não altera os valores de $\dot{\gamma}_1$, conforme ficou verificado nas simulações da Figura

3.4. Isto é, o aumento de J não altera o valor da taxa de deformação $\dot{\gamma}_1$ na qual a tensão de cisalhamento experimentada pelo material passa a se comportar segundo a lei *power-law*, $\tau = K \dot{\gamma}_1^n$).

Vale também observar que a vizinhança da superfície do duto localizada entre a expansão e contração súbitas experimentam taxas de cisalhamento tão baixas – devido à virtual estagnação do material - que o aumento do número de salto foi incapaz de forçar essas regiões materiais rígidas a escoar. Nas Figuras 5.8(c) e 5.8(d), nota-se que, para valores muito altos de J – no caso investigado, para $J=10^4$ - não mais ocorrem mudanças significativas nas dimensões das regiões rígidas do material. O mesmo não se verifica com as regiões rígidas de *plug-flow* junto à linha de simetria do duto à montante da expansão e à jusante da contração. Estas regiões, sujeitas a taxas de cisalhamento mais elevadas do que as experimentadas na região entre a expansão e a contração súbitas, são fortemente afetadas com o crescimento experimentado pelo número de salto da Figura 5.8(c) – $J=10^4$ – e Figura 5.8(c) – $J=10^6$. Nessa última figura, o altíssimo valor de J literalmente quase elimina as regiões *plug-flows* do material.



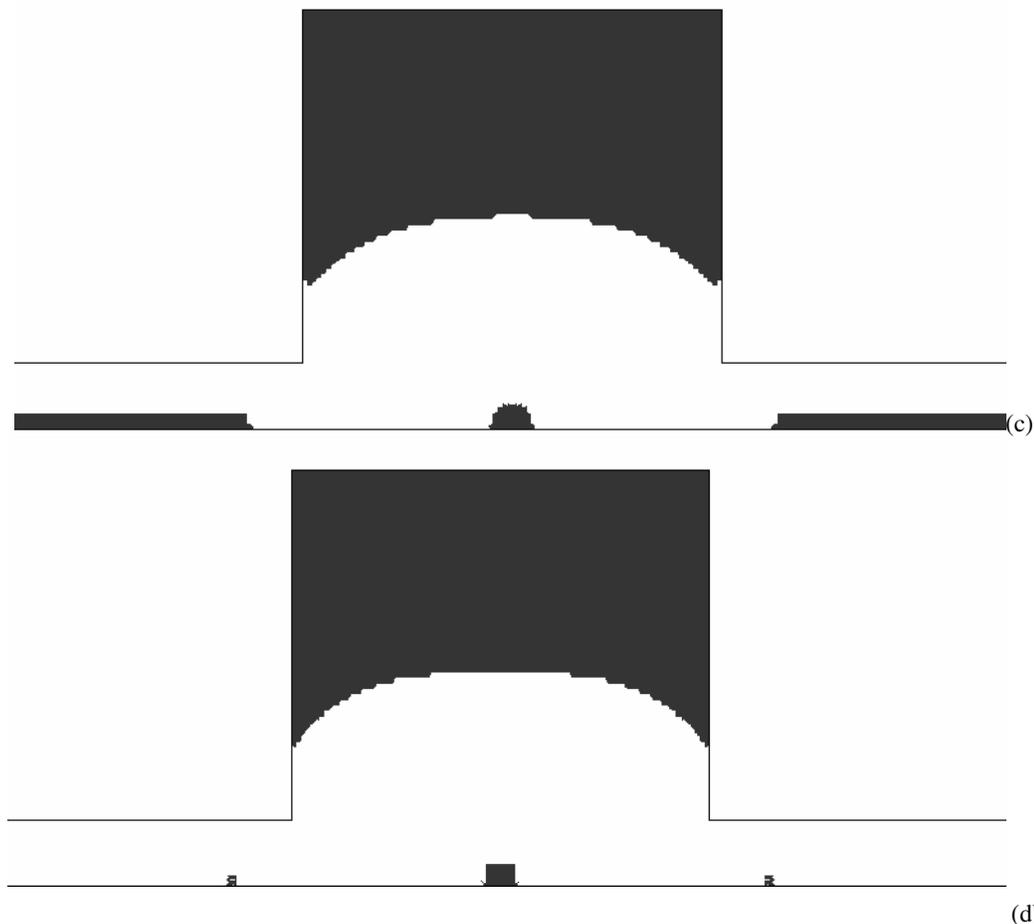


Figura 5.8 Escoamento de um fluido SMD através de uma expansão seguida de uma contração, para $n=0.5$ - Iso-regiões de τ : (a) $J=1$; (b) $J=10^2$; (c) $J=10^4$ e (d) $J=10^6$.

Nas Figura. 5.9 são apresentadas, as iso-regiões de τ para dois valores do expoente de *power-law*, $n=0,4$ e $n=0,9$, para um número de salto fixo, $J=12$. Observa-se que, a medida que o expoente de *power-law* diminui, as regiões materiais rígidas aumentam de dimensões, como já observado por Souza Mendes et al. (2007). Isto ocorre devido à redução dos níveis da tensão de cisalhamento experimentada com a queda do índice *power-law* de $n=0,9$ (Figura 5.9(a)) para $n=0,4$ (Figura 5.9(b)) - conforme prevê a Eq.(3.17). Portanto, a diminuição de n experimentada na figura - para um valor fixo de J - faz que o material passe a apresentar mais regiões sujeitas a tensões de cisalhamento menores do que a tensão limite de escoamento, ou seja, há um acréscimo das dimensões das suas regiões rígidas.

É interessante ainda comentar que o domínio computacional poderia ter sido reduzido a um quarto de sua real dimensão se fosse explorada a simetria axial que o escoamento apresenta - o que certamente resultaria em uma significativa redução dos esforços computacionais demandados pelas simulações numéricas do problema. Esta simetria axial, entretanto, não foi

explorada propositalmente, visando a testar a capacidade robustez do código computacional NNFEM em gerar iso-regiões da tensão de cisalhamento inteiramente simétricas axialmente em escoamento não-inercial fortemente não-linear – fato, este, verificado em todas as Figuras 5.8 e 5.9 e de acordo com a teoria dos escoamentos sem inércia de fluidos incompressíveis.

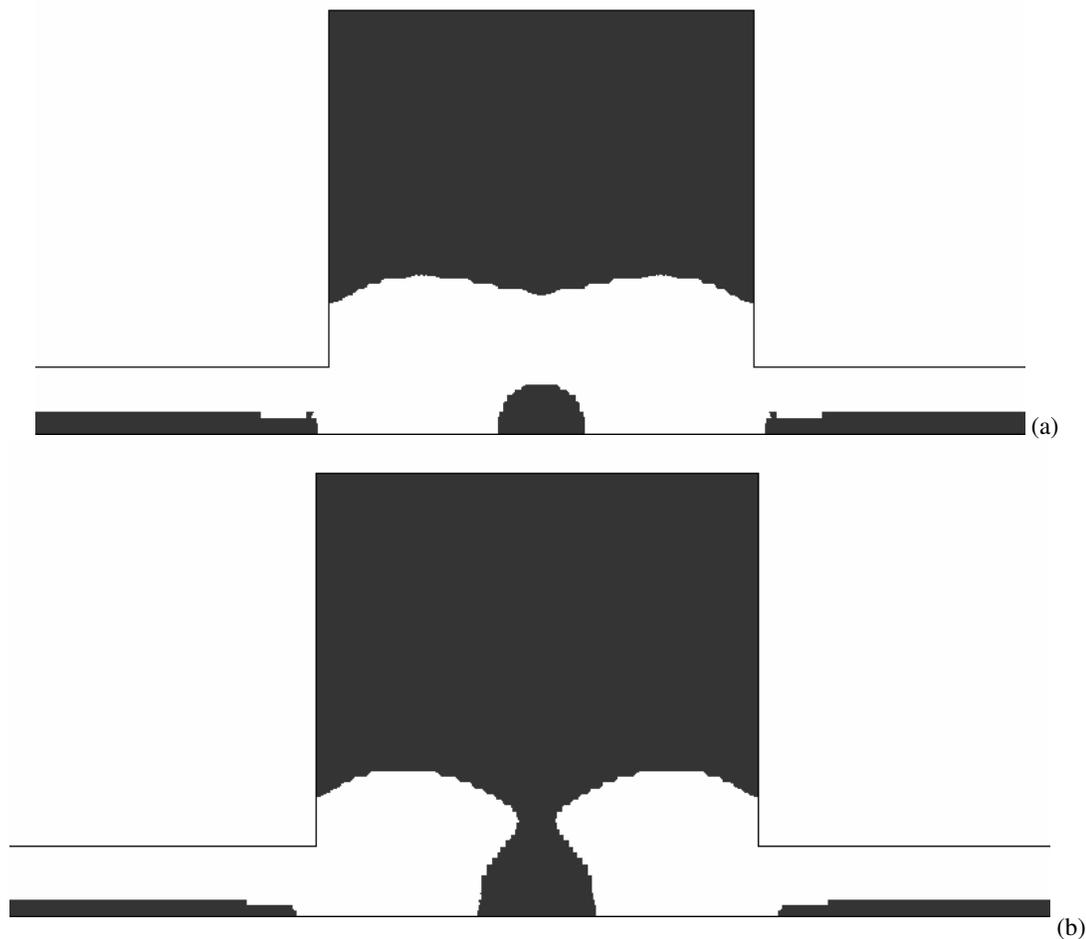


Figura 5.9. Escoamento de um fluido SMD através de e uma expansão seguida de uma contração, para $J=12$ – Iso-regiões de τ : (a) $n=0,9$ e (b) $n=0,4$.

Por fim, na Figura. 5.10, são apresentados os perfis velocidade axial no plano de contração do duto, para diferentes valores do expoente de *power-law* ($n= 0,2$ a $0,9$) e um valor fixo do número de salto, $J=10^3$ (As normalizações usadas para velocidade e coordenada radial foram, respectivamente: $v_1^* = v_1/u_{in}$ e $x_2^* = x_2/R$). Como se pode ver na Fig.5.10, o valor do índice n possui influência na forma do perfil velocidade axial. À medida que o expoente de *power-law* decai, o perfil velocidade axial torna-se cada vez mais uniforme, à exceção das vizinhanças da parede da contração do duto, a qual fica cada vez mais sujeita a uma camada devido à satisfação da condição de não-deslizamento e impermeabilidade ali impostas. Da figura 5.10, tem-se que

enquanto o perfil correspondente a $n=0,9$ praticamente reproduz o perfil de velocidade parabólico da teoria de escoamentos Newtonianos totalmente desenvolvidos – observe que o perfil para $n=0,9$ se afasta ligeiramente do formato parabólico, não tanto pelo seu pequeno grau de pseudoplasticidade, mas sim pelo fato da região do plano de contração não ser uma região desenvolvida hidrodinamicamente – os perfis para $n=0,4$ e $0,2$ já claramente indicam a existência de uma zona rígida do tipo *plug-flow*.- com o coeficiente $n=0,2$ gerando uma camada limite hidrodinâmica extremamente severa, a qual foi captada isenta de oscilações espúrias pela formulação GLS.

O comportamento dos perfis de velocidade axial ilustrado na Fig. 5.10 pode ser explicado pela já mencionada diminuição da tensão de cisalhamento acarretada pela queda do expoente de *power-law*, prescrito pela Eq. (3.17). Aumentam-se, assim, a ocorrência de regiões rígidas, nas quais a tensão de cisalhamento fica aquém da tensão limite do material, isto é, $\tau < \tau_0$.

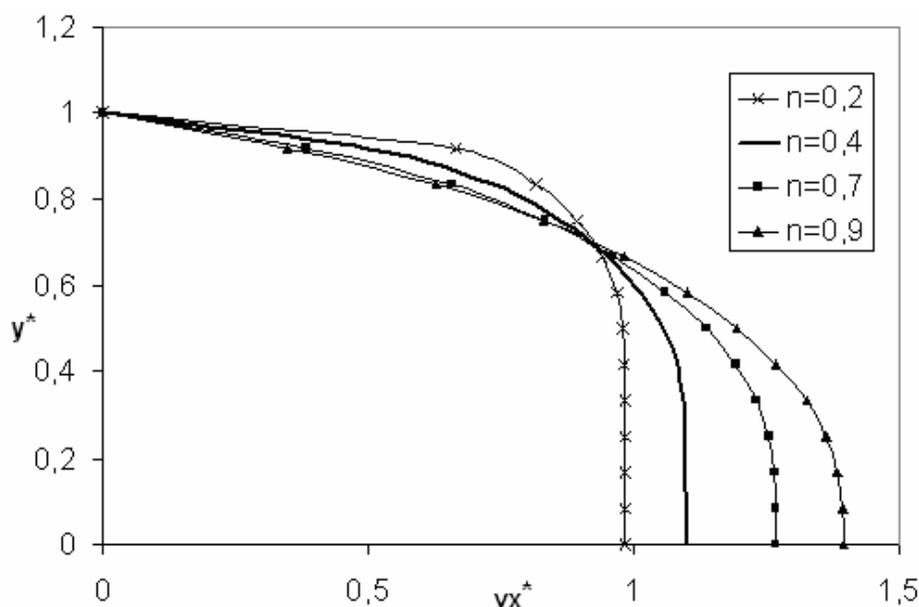


Figura 5.10. Escoamento de um fluido SMD através de uma expansão seguida de uma contração, para $n=0,2, 0,4, 0,7$ e $0,9$ e $J=10^3$ – Perfis de velocidade axial no plano de contração.

5.3 ESCOAMENTO DE FLUIDO SMD EM TORNO DE CILINDRO CIRCULAR

Nesta seção, com o intuito de simular escoamentos não-inerciais de um fluido SMD em torno de um cilindro circular confinado a um canal formado por duas placas paralelas, foi empregada a formulação GLS (Eq. (4.13)- Eqs (4.13)-(4.17)) do problema forte definido pela

Eq.(4.5). O problema estudado é mostrado na Fig. 5.11, para um sistema de coordenadas cartesianas com origem no centro do canal – com a finalidade de minimizar o esforço computacional, somente metade do domínio foi simulado. Não se optou por um quarto do domínio, como realizado por Zisis and Mitsoulis (2002), buscando verificar se o código computacional NNFEM seria capaz de gerar um campo de tensões de cisalhamento com total simetria axial (Cabe observar que o comprimento do canal empregado foi suficientemente longo para que o escoamento se desenvolvesse plenamente, conforme apresentado no trabalho de Zisis and Mitsoulis (2002)).

As condições de contorno impostas para velocidade foram perfis parabólicos na entrada e saída do canal, condição de não-deslizamento e de impermeabilidade nas suas paredes e na superfície do cilindro, e condição de simetria na linha central do canal ($\partial_2 u_1 = u_2 = 0$). No presente estudo foi investigado diferentes razões de aspecto, $H/R=2, 4, 8, 10$ e 20 , a velocidade média adimensional de entrada foi variada de $0,1 < \bar{u}^* = \bar{u} / \dot{\gamma}_1 \left(\frac{H}{2} \right) < 2,5$, o valor do número de salto J de 1 a 10^3 e número de Reynolds desprezível, $Re \approx 0$.

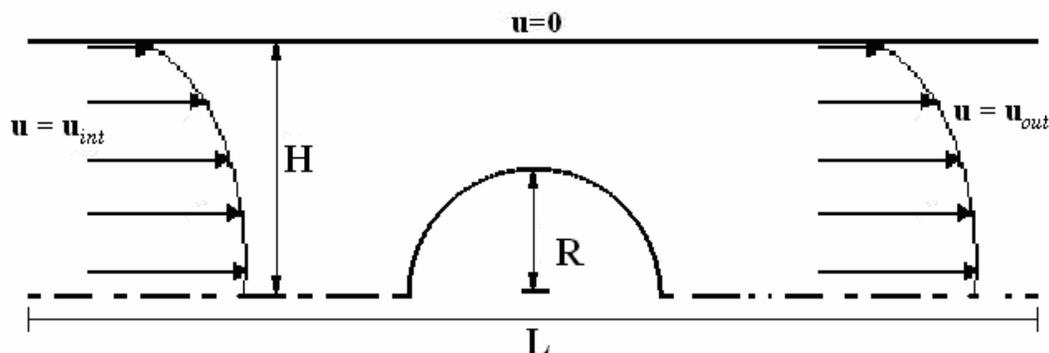


Figura 5.11. Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular: descrição do problema e condições do contorno.

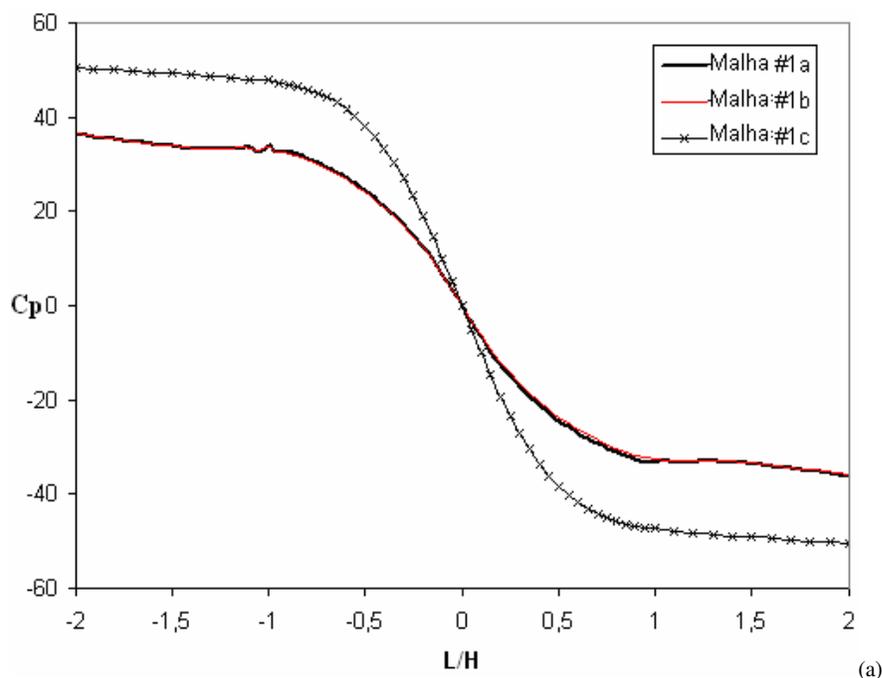
Um criterioso teste de independência de malha foi realizado com a finalidade de encontrar a malha que oferecesse resultados fisicamente realistas com o menor esforço computacional possível. Para este estudo foram construídas 19 malhas para as cinco diferentes razões de aspecto investigadas, $H/R: 2:1, 4:1, 8:1, 10:1, 20:1$. (ver Tabela 5.1). Cada refino de malha foi feito tanto na direção axial como na radial, dando maior atenção para a região em torno do cilindro. Para verificar a qualidade dos resultados obtidos com cada malha. Foi adotado o mesmo critério adotado na seção anterior: que seria selecionada a malha que apresentasse uma diferença de

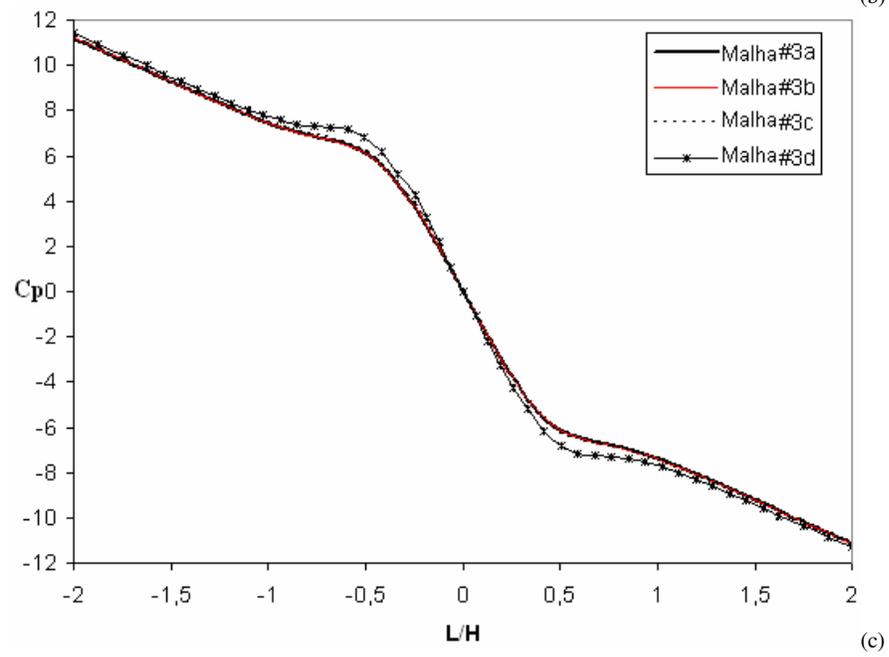
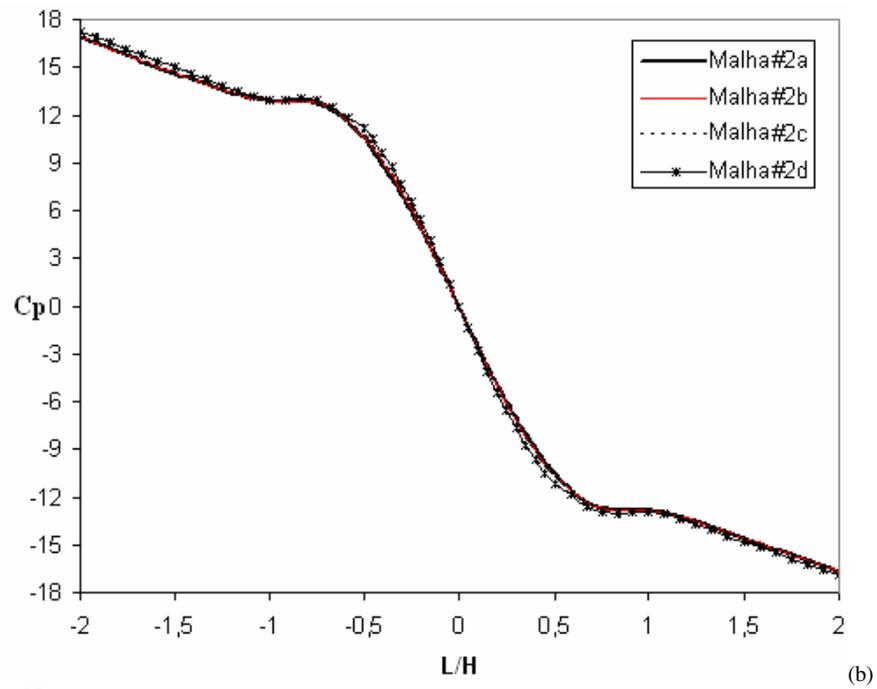
queda de pressão menor do que 3% comparada com a malha mais refinada, com a qual foi atingida a independência de malha.

Tabela 5.1 Teste de independência de malha: Descrição das 19 malhas testadas para H/R : 2:1. 4:1. 8:1. 10:1. 20:1.

| | H/R | L/R | Número de Elementos | | | | Número de Nós | | | |
|---------|-------|-------|---------------------|--------|--------|-------|---------------|--------|--------|-------|
| | | | a | b | c | d | a | b | c | d |
| Malha#1 | 2:1 | 24:1 | 9.200 | 5.800 | 2.800 | - | 9.531 | 6.051 | 2.976 | - |
| Malha#2 | 4:1 | 48:1 | 34.400 | 15.180 | 6.880 | 2.030 | 34.961 | 15.600 | 7.162 | 2.193 |
| Malha#3 | 8:1 | 96:1 | 57.000 | 16.000 | 4.530 | 876 | 57.725 | 16.398 | 4.751 | 980 |
| Malha#4 | 10:1 | 120:1 | 42.720 | 22.000 | 6.140 | 876 | 43.329 | 22.456 | 6.390 | 980 |
| Malha#5 | 20:1 | 200:1 | 77.160 | 42.000 | 14.000 | 3.050 | 77.979 | 42.636 | 14.406 | 3.231 |

A seguir, na Fig. 5.12, são apresentados os gráficos da queda de pressão adimensional ao longo do canal, obtidos com as 19 malhas para as 5 razões de aspecto investigadas (As malhas selecionadas para cada razão de aspecto investigada estão representadas por uma curva vermelha.). A queda de pressão foi adimensionalizada como na seção anterior, empregando-se o número de Euler (Eq. (5.1)), e o comprimento do canal foi normalizado pela adimensionalizado, pela sua altura (L/H).





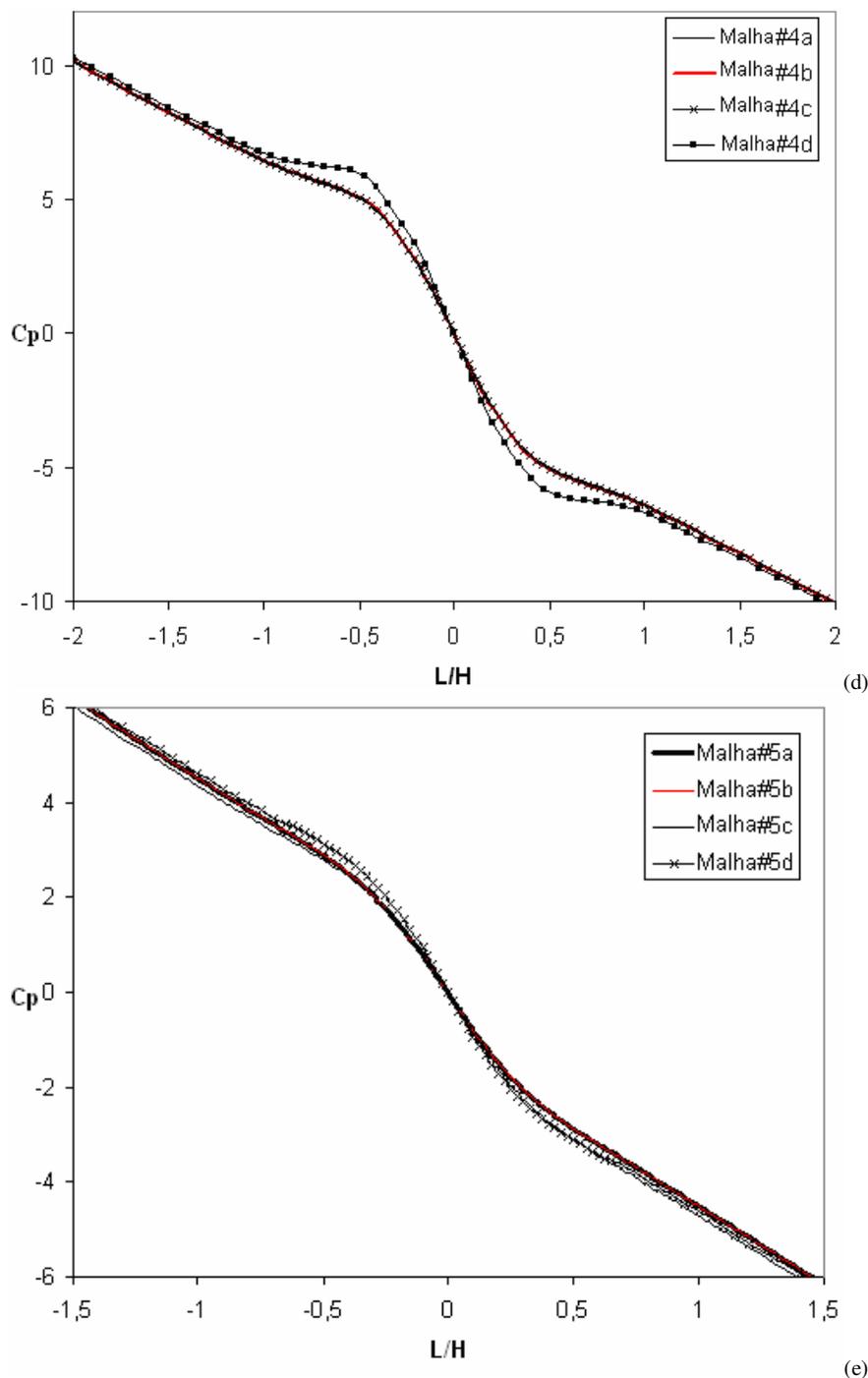


Figura 5.12 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular: teste de independência de malha para as razões de aspecto (a) $H/R=2$, (b) $H/R=4$, (c) $H/R=8$, (d) $H/R=10$ e (e) $H/R=20$.

Com base no critério adotado foram selecionadas as seguintes malhas (destacadas em vermelho na Fig. 5.12): (a) para a razão de aspecto $H/R=2:1$, a malha selecionada foi a Malha 1b com 5.800 elementos Q1/Q1 e 6.051 pontos nodais; (b) para a razão de aspecto $H/R=4:1$, a

malha selecionada foi a Malha 2b com 15.180 elementos Q1/Q1 e 15.600 pontos nodais; (c) para a razão de aspecto $H/R=8:1$, a malha selecionada foi a Malha 3b com 16.000 elementos Q1/Q1 e 16.398 pontos nodais; (d) para a razão de aspecto $H/R=10:1$, a malha selecionada foi a Malha 4b com 22.000 elementos Q1/Q1 e 22.456 pontos nodais e (e) para a razão de aspecto $H/R=20:1$, a malha selecionada foi a Malha 5b com 42.000 elementos Q1/Q1 e 42.636 pontos nodais. Na Figura 5.13, são apresentadas detalhes da metade das malhas selecionadas para as cinco razões de aspecto estudadas.

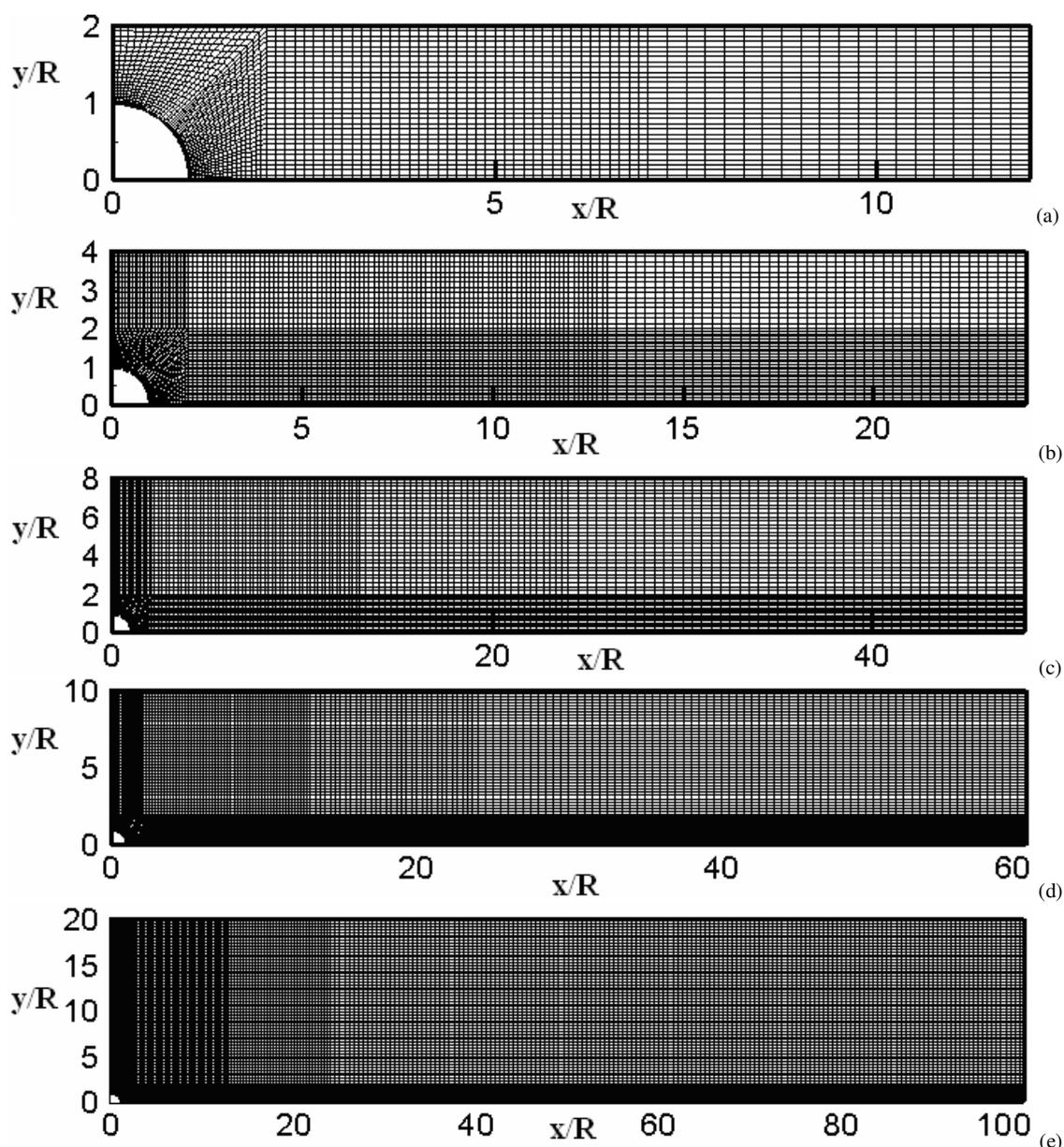


Figura 5.13 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular: detalhe das malhas para as razões de aspecto (a) $H/R=2$, (b) $H/R=4$, (c) $H/R=8$, (d) $H/R=10$ e (e) $H/R=20$.

Na Figura 5.14 são apresentadas as iso-regiões de τ , para o coeficiente *power-law*, $n=0,5$, a velocidade média adimensional de entrada, $\bar{u}^* = 1$ e o número de salto variando de 1 a 10^3 . As isobandas de τ são mostradas para a razão de aspecto $H/R=8$ (16.000 elementos bilineares (Q1/Q1)). Vale ressaltar que nas figuras apresentadas para a análise das isobandas de τ , as zonas pretas indicam as regiões materiais rígidas – ou seja, regiões com $\tau < \tau_0$ - já as regiões brancas representam regiões de escoamento, onde $\tau > \tau_0$. Logo, observa-se que, à medida que o número de salto cresce, as regiões rígidas retrocedem, em especial junto à parede superior do canal. Do valor de $J=1$ (Fig. 5.14(a)) ao $J=10^3$ (Fig. 5.14(d)), essas regiões experimentam uma diminuição contínua e proporcional à medida que J aumenta. Para essas regiões, sujeitas a taxas de deformação muito baixas, a diminuição do valor $\dot{\gamma}_0$ decorrente do crescimento de J , faz com que cada vez mais regiões alcancem a tensão limite do material, isto é $\tau > \tau_0$, iniciando o processo de escoamento.

As regiões localizadas ao longo do canal a montante e a jusante do cilindro experimentam taxas de cisalhamento tão baixas que a diminuição de valor $\dot{\gamma}_0$ associada ao aumento de J foi incapaz de forçar essas regiões rígidas a escoar. O mesmo se diz das regiões de escoamento que envolve a superfície do cilindro, regiões, essas, sujeitas a altas tensões de cisalhamento ($\tau > \tau_0$) decorrentes da satisfação das condições de contorno de não-deslizamento e impermeabilidade na superfície do cilindro. O aumento do número de salto foi incapaz de alargar significativamente essas regiões, só havendo um pequeno aumento entre o valor de $J=1$ (Fig. 5.14(a)) e $J=10$ (Fig. 5.14(b)); para $J=10^2$ (Fig. 5.14(c)) e $J=10^3$ (Fig. 5.14(d)), as regiões em torno do cilindro são absolutamente idênticas. Novamente os resultados obtidos mostraram-se coerentes: como essas regiões experimentam altas taxas de deformação e como o crescimento do número de salto só altera o valor $\dot{\gamma}_0$ - valor este característico de regiões de baixas taxas de cisalhamento – era de se esperar que as regiões em torno do cilindro ficassem insensíveis ao aumento dos valores do número de salto.

Por fim, é interessante comentar que, da mesma maneira como Souza Mendes e Dutra (2007) encontraram problemas de convergência ao realizar simulações numéricas para escoamentos com J muito elevado, a formulação GLS também encontrou dificuldades de convergência para número de salto superior a $J=10^3$, ao contrário da geometria estudada na seção anterior, para a qual foram realizadas simulações com $J=10^6$.

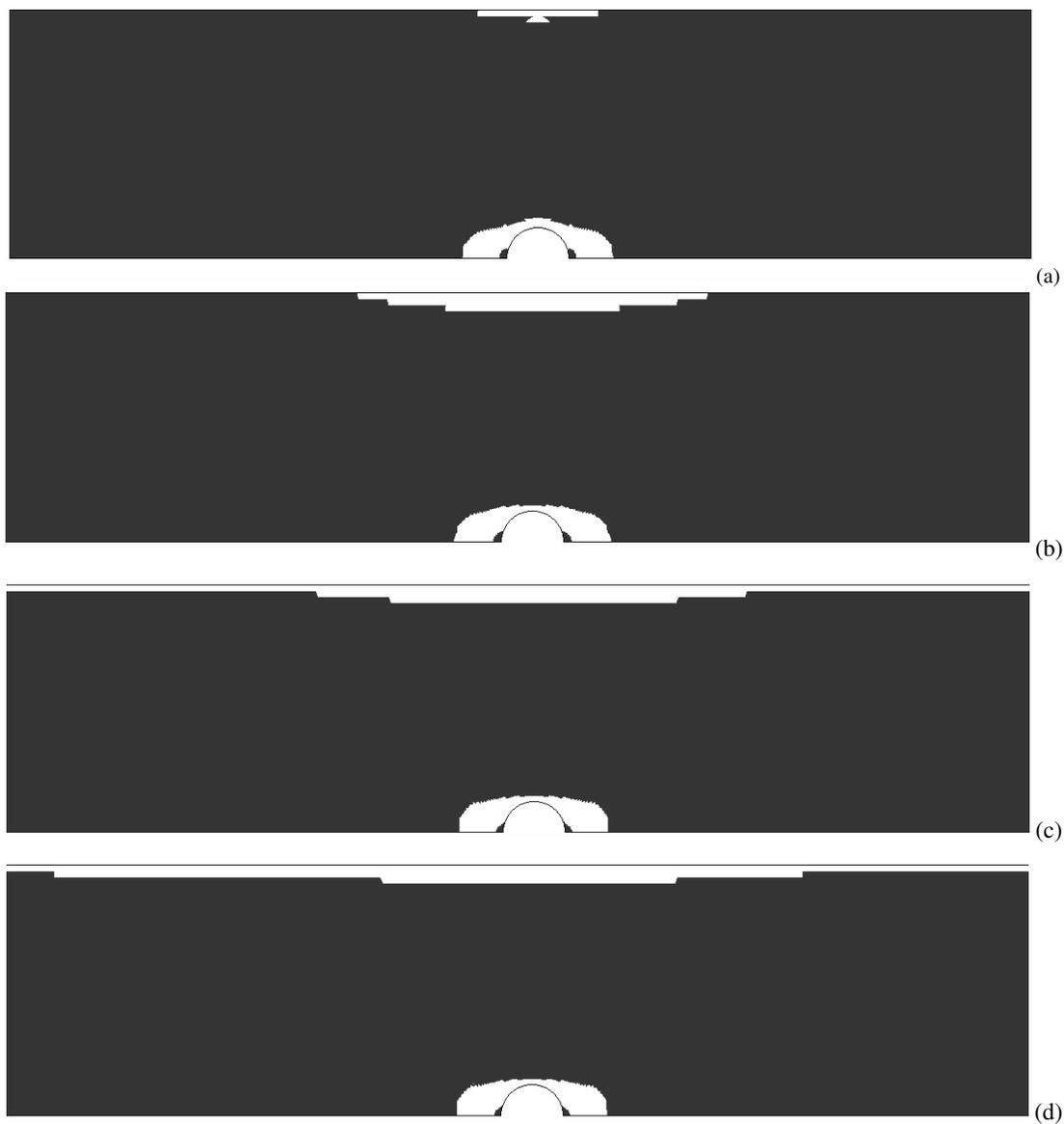


Figura 5.14 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular para $H/R=8:1$ e $\bar{u}^* = 1$ - Iso-regiões de τ para $n=0,5$: (a) $J=1$, (b) $J=10$, (c) $J=10^2$ e (d) $J=10^3$.

Na Figura 5.15 são apresentadas, as isobandas de τ , para coeficiente *power-law*, $n=0,5$, a velocidade média adimensional de entrada, $\bar{u}^* = 1$, número de salto $J=100$ e variando as razões de aspecto H/R de 2:1 a 20:1. Das Figuras, verifica-se que, a medida que a razão de aspecto aumenta, as regiões rígidas também o fazem, com as regiões de escoamento restringindo-se às regiões em torno do cilindro e próximas à parede superior do canal – para $H/R=2$ (Fig. 5.15(a)), $H/R=4$ (Fig. 5.15(b)), $H/R=8$ (Fig. 5.15(c)), $H/R=10$ (Fig. 5.15(d)). Já na maior razão de aspecto, $H/R=20:1$ (Fig. 5.15(e)), as regiões rígidas dominam todo o domínio do problema, à exceção da região que circunda o cilindro.

Este comportamento é devido a diminuição das tensões de cisalhamento acarretada pela queda nos níveis das taxas de deformação ao longo do canal (É importante lembrar que a velocidade média adimensional de entrada, $\bar{u}^* = 1$ é fixa para todas as razões de aspecto investigadas. Ou seja, a taxa de deformação imposta na entrada do canal é igual em todas as simulações apresentadas na Fig. 5.15.). Desse modo, à medida que H/R aumenta, mais regiões ficam sujeitas a $\tau < \tau_0$, tornando-se, dessa maneira, rígidas.

É importante observar que a topologia e padrões de comportamento - em relação à variação da razão de aspecto do canal - das superfícies rígidas e de escoamento obtidas nesta dissertação, estão de acordo com os resultados apresentados no trabalho de Zisis and Mitsoulis (2002).

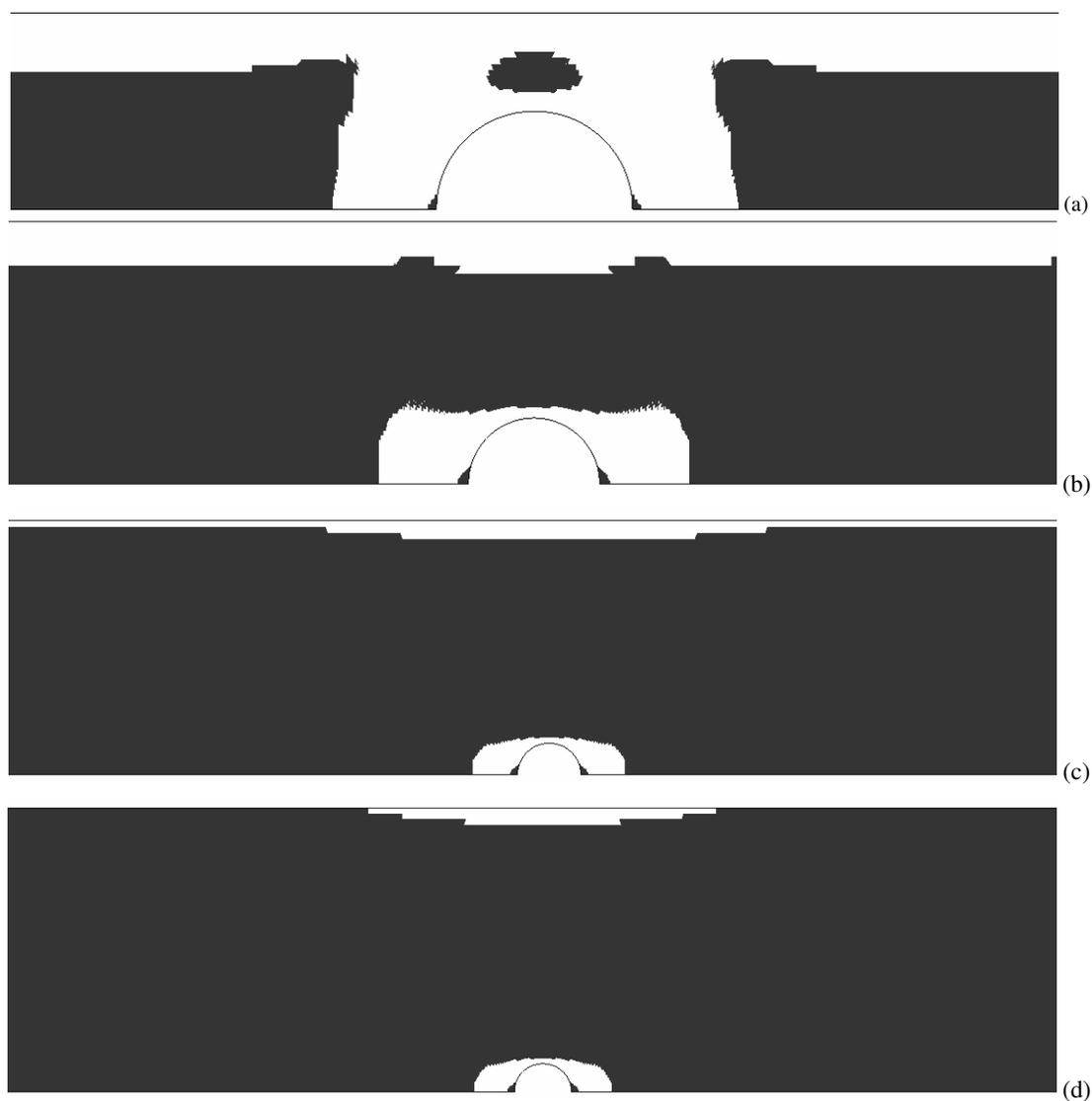




Figura 5.15: Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular – Iso-regiões de τ para $n=0,5$ e $J=00$, $\bar{u}^*=1$ para (a) $H/R=2$, (b) $H/R=4$, (c) $H/R=8$, (d) $H/R=10$ e (e) $H/R=20$.

Na Figura 5.16 são apresentadas as iso-regiões de τ para coeficiente *power-law* $n=0,5$, número de salto $J=100$, razão de aspecto $H/R=2$ (5800 elementos bilineares (Q1/Q1)) e variando a velocidade média adimensional na entrada \bar{u}^* de 0,1 a 2,5. Nesta figura pode-se ver que as regiões rígidas do material diminuem com o aumento da velocidade média adimensional \bar{u}^* . Apenas para $\bar{u}^*=0.1$ (Fig. 5.16(a)), há um padrão distinto das iso-regiões de τ . Nesta primeira figura as iso-regiões indicam que todo canal apresenta regiões rígidas à exceção de duas diminutas regiões de escoamento, uma localizada junto à parede superior do canal acima do cilindro e outra na camada limite ao redor da superfície do cilindro – nestas duas regiões a tensão de cisalhamento experimentada pelo material supera seu limite de escoamento. Já para $\bar{u}^*=0.5$, 1.0 e 2.5 (Fig. 5.16 (b)(c)(d)) as regiões rígidas e de escoamento do material apresentam o mesmo padrão de escoamento, apenas variando nas suas dimensões. Este padrão consiste de três regiões rígidas, duas regiões rígidas simétricas a montante e a jusante do cilindro, e uma outra situada na *vena contracta* entre o cilindro e a parede superior do canal. Conforme observado, todas estas zonas rígidas diminuem à medida que \bar{u}^* aumenta.

Esse comportamento material pode ser explicado pelo aumento da taxa de cisalhamento imposto pelo crescimento de \bar{u}^* . À medida que a vazão do escoamento é aumentada, aumentam seus níveis das taxas de deformação, o que acarreta no aumento da tensão de cisalhamento verificado nas figuras. Esse aumento de τ implica que mais regiões do canal estarão sujeitas a tensões de cisalhamento maiores do que a tensão limite do material, $\tau > \tau_0$. Finalmente, observa-se uma perfeita simetria axial em relação ao cilindro, o que está de acordo com a teoria dos escoamentos sem inércia de fluidos incompressíveis.

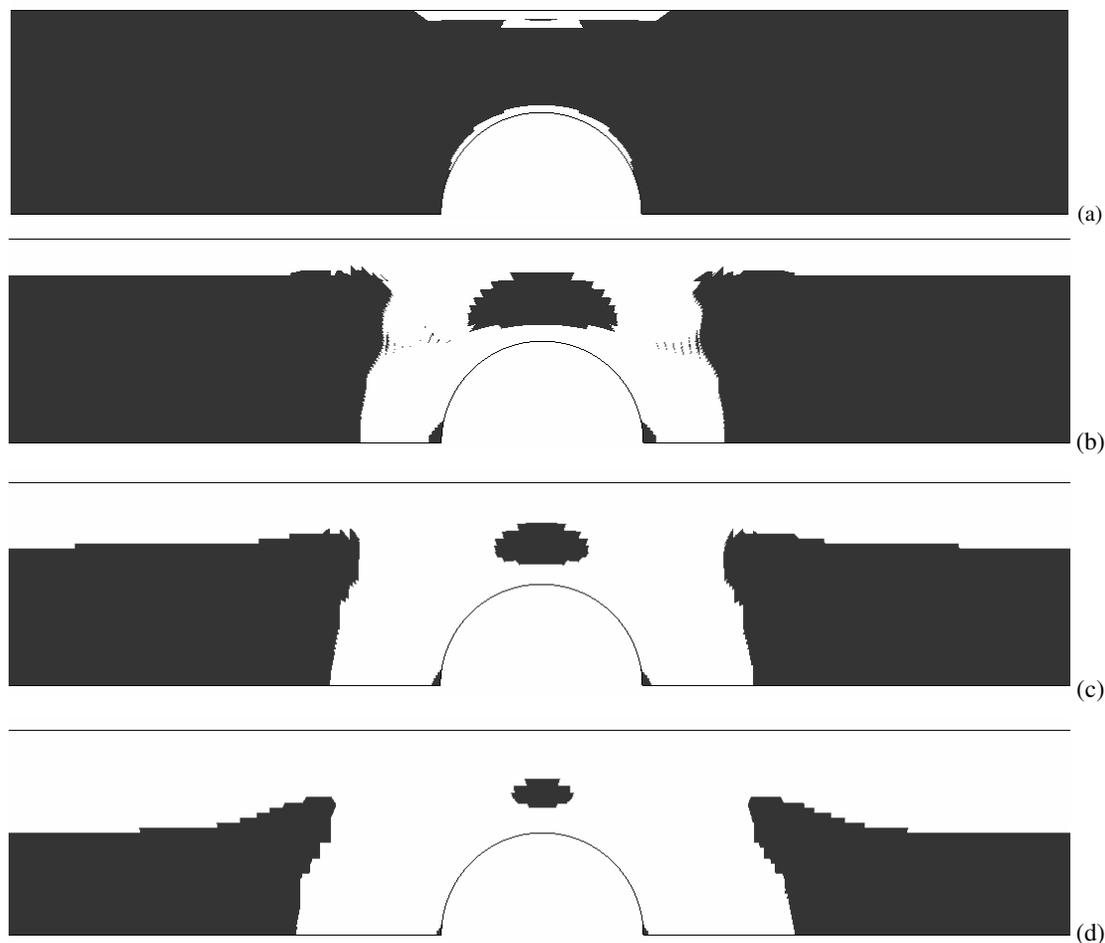


Figura 5.16 Escoamento de um fluido SMD em torno de um cilindro circular - iso-regiões de τ para $H/R=2:1$, $n=0,5$, $J=100$ e (a) $\bar{u}^* = 0,1$; (b) $\bar{u}^* = 0,5$; (c) $\bar{u}^* = 1,0$; (d) $\bar{u}^* = 2,5$.

Na Figura 5.17 são apresentadas as quedas de pressão adimensionalizadas ao longo do canal. Essas quedas de pressão são para um escoamento sem inércia, $Re \approx 0$, coeficiente *power-law*, $n = 0,5$, velocidade média adimensional na entrada, $\bar{u}^* = 1$, e número de salto, $J=100$, variando a razão de aspecto de 2 a 20. A queda de pressão foi adimensionalizada pelo número de Euler (Eq.(5.1)) e a direção axial pela razão entre o comprimento do canal e a altura do mesmo, L/H . Pode-se observar que para menores razões de aspecto há uma maior perda de carga ao longo do canal, devido a uma maior dissipação viscosa no fluido, gerando a chamada perda de carga distribuída. As maiores perdas de carga distribuídas ocorrem nas menores razões de aspecto devido a altura do canal ser menor, originando uma maior taxa de cisalhamento. Já as quedas de pressão mais acentuadas mostradas na Fig. 5.17 se dão devido a presença do cilindro, onde o escoamento sofre perturbações bruscas, e essa perda de carga é chamada localizada. Nota-se que o aumento da razão de aspecto no canal tende a eliminar a influência que a presença

do cilindro provoca no escoamento. Verifica-se também que os dois comprimentos do canal, tanto a montante como a jusante do cilindro, foram suficientes para desenvolver o hidrodinamicamente o escoamento – o que é determinado pela linearidade das respectivas quedas de pressão. Por fim, devido a perda de carga localizada, os níveis das quedas de pressão a jusante do cilindro se apresentam inferiores as quedas de pressão a montante do cilindro – efeito mais evidente para as menores razões de aspecto.

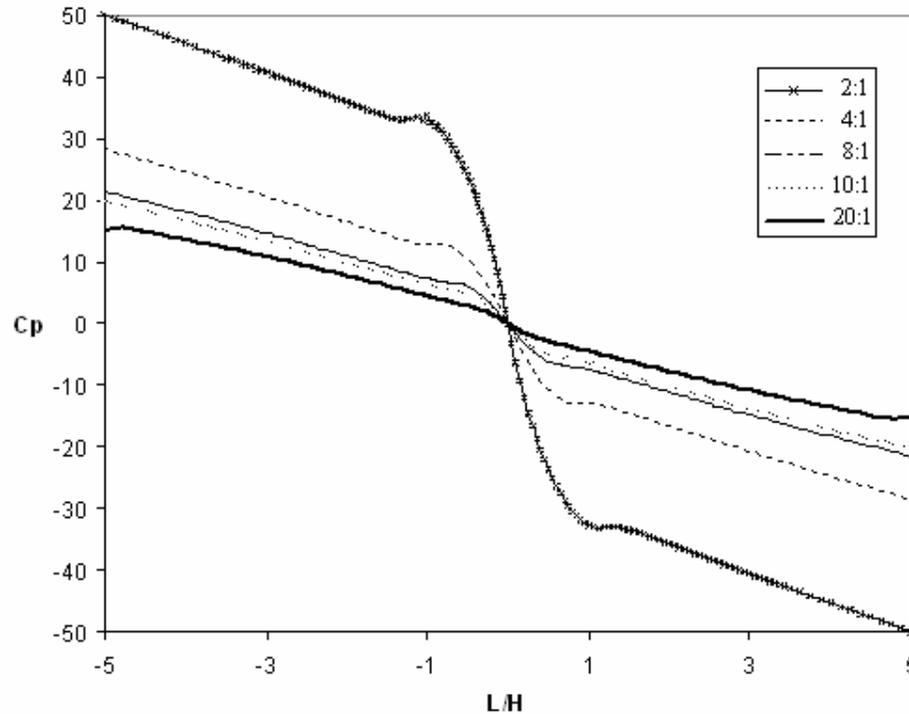


Figura 5.17: Queda de pressão para $Re \approx 0$, $n = 0,5$, $\bar{u}^* = 1,0$ e $J=100$, variando a razão de aspecto.

Na Figura 5.18 é apresentada uma análise da influência da variação da razão de aspecto sobre os perfis da velocidade axial. Nesta figura são apresentados os perfis de velocidade axial sobre o cilindro, na *vena contracta* formada entre o cilindro e a parede do canal (Fig. 5.18). Essa análise foi feita para um escoamento sem inércia, $Re \approx 0$, com coeficiente *power-law*, $n = 0,5$, e número de salto, $J = 100$, velocidade média adimensional na entrada, $\bar{u}^* = 1$, variando a razão de aspecto, H/R de 2 a 20. As adimensionalizações foram feitas tanto para a velocidade axial - $v_1^* = v_1/\bar{u}$ - como também para a direção vertical do escoamento - $x_2^* = (x_2 - R)/(H - R)$. Conforme pode se ver na Fig. 5.18, à medida que a razão de aspecto aumenta, as zonas sujeitas a tensão de cisalhamento inferior a tensão limite de escoamento aproximam-se cada vez mais do

formato de uma região de *plug-flow* clássica. Isto pode ser explicado porque as maiores razões de aspecto originam menores valores da vazão do escoamento, com a região ficando sujeita a menores taxas de deformação.

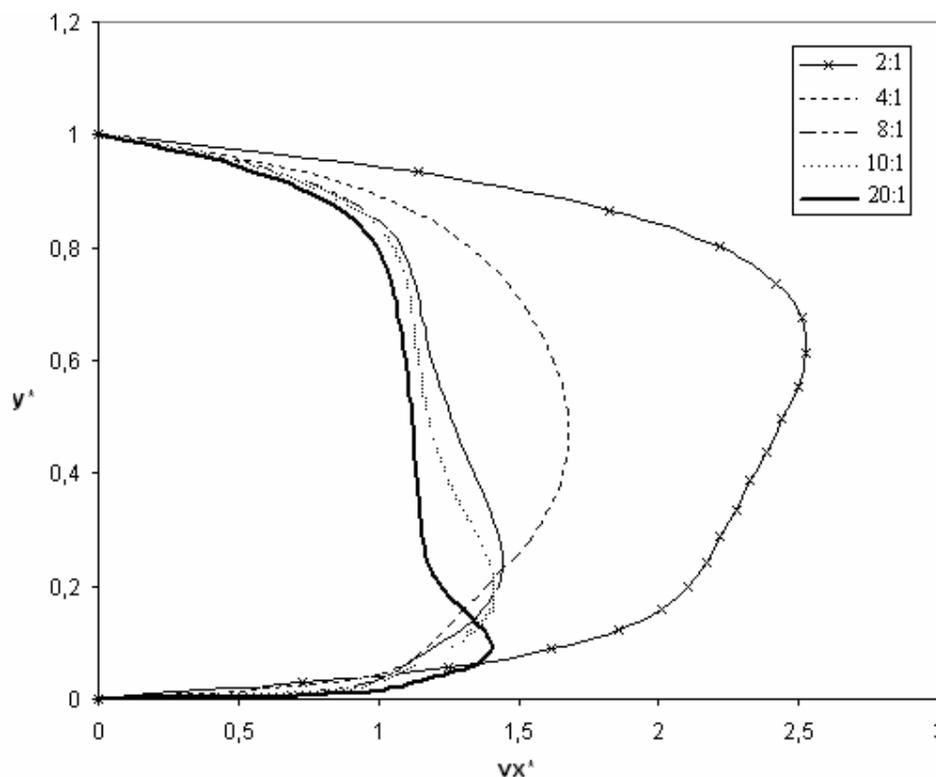
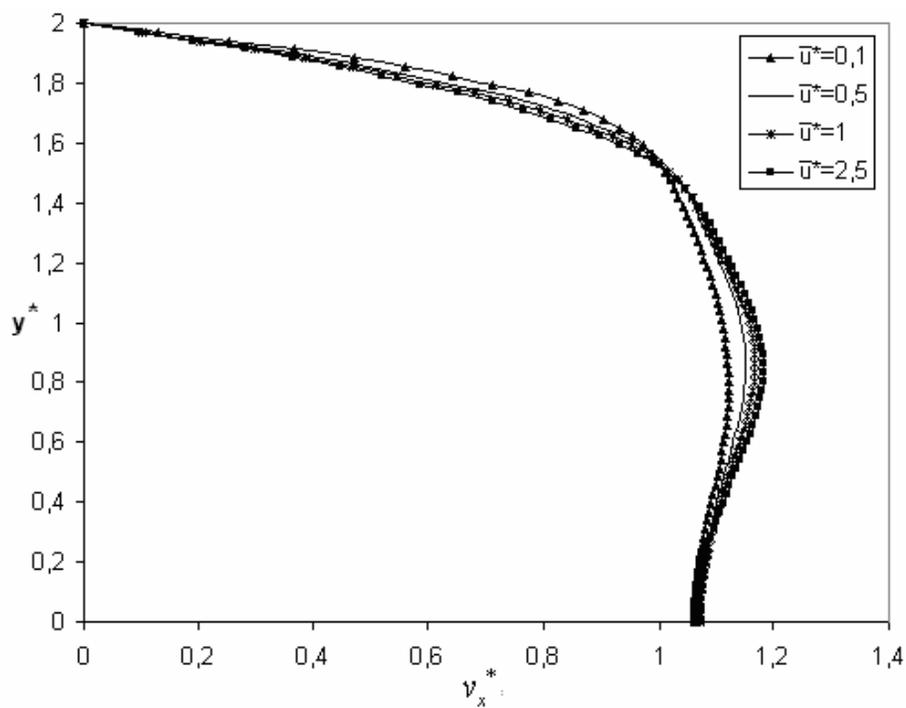


Figura 5.18: Perfil velocidade axial na *vena contracta* sobre o cilindro para $Re \approx 0$, $n = 0,5$, $\bar{u}^* = 1,0$ e $J = 100$, para diferentes razões de aspecto.

Nas Figuras 5.19 é analisada a influência da regularização do campo de tensão de cisalhamento introduzida pela função viscoplástica SMD em relação aos modelos clássicos descontínuos de viscoplasticidade. Na Figura 5.19 são apresentados os perfis de velocidade axial para duas diferentes posições axiais, a montante do escoamento próximo ao cilindro (Fig. 5.19(a)) e sobre o cilindro, na *vena contracta* formada entre o cilindro e a parede do canal (Fig. 5.19(b)). Os perfis apresentados são de um escoamento sem inércia, $Re \approx 0$, com coeficiente *power-law*, $n = 0,5$, razão de aspecto, $H/R = 2$, e número de salto, $J = 100$, variando a velocidade média adimensional na entrada, \bar{u}^* , de 0,1 a 2,5. Foram feitas adimensionalizações para a velocidade axial $v_1^* = v_1/\bar{u}$ como também para a ordenada vertical x_2 , $x_2^* = x_2/R$. Na Figura 5.19 estão ilustradas duas zonas materiais distintas, ou seja, uma região de escoamento ($\tau > \tau_0$) originada por uma camada limite próxima a uma fronteira sólida e outra por uma região rígida de *plug-flow* ($\tau < \tau_0$) junto a linha central do canal, originada pelos altíssimos valores de viscosidade

ali impostos pelo modelo SMD. Conforme se observa, principalmente na Fig. 5.19(b), chamar essas regiões rígidas de *plug-flow* é uma liberdade de expressão, pois como se pode notar na figura existem (pequenos) gradientes de velocidade na região, para todas as vazões investigadas. Este comportamento, que aproxima mais o modelo SMD dos fluidos viscoplásticos reais (ver, por exemplo, a curva de escoamento de uma solução aquosa de Carbopol a 12% apresentada na Fig. 3.3), é impossível de ser descrito pelos modelos clássicos de viscosidade como os modelos de Bingham, de Herschel-Bulkley e Casson. Os modelos clássicos prescrevem viscosidades infinitas para as regiões de tensão de cisalhamento inferior ao limite de escoamento material – nestes modelos precisamente denominadas regiões rígidas.

Por fim, é interessante ainda observar que os perfis sobre o cilindro, Fig.5.19(b), apresentam regiões menos rígidas comparadas aos perfis ilustrados na Fig. 5.19(a). Isto pode ser explicado por argumentos de conservação de massa, pois como a área efetiva do escoamento nesta região é menor se comparada a área do canal, as taxas de deformação ali experimentadas são maiores.



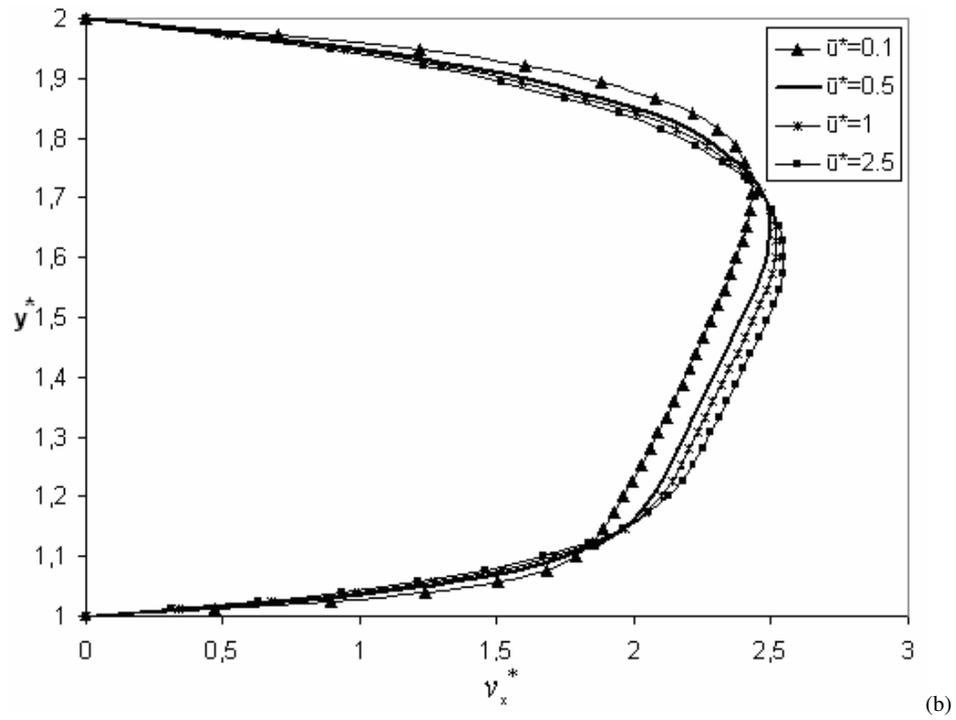


Figura 5.19: Perfil velocidade axial para $Re \approx 0$, $n = 0,5$, $H/R=2$ e $J=100$: (a) a montante do escoamento e (b) sobre o cilindro.

6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta dissertação objetivou a aproximação numérica, via método de elementos finitos de Galerkin Mínimos-Quadrados, de três escoamentos diferentes de um fluido SMD - em uma cavidade forçada, através de uma expansão seguida de uma contração abrupta axissimétrica e em torno de um cilindro circular.

O Capítulo 1 desta dissertação introduziu os princípios básicos da Mecânica dos Fluidos, a diferenciação do comportamento de um fluido não-Newtoniano de um Newtoniano, os princípios da aproximação de elementos finitos, as dificuldades encontradas nas aproximações de problemas de escoamentos de fluidos, o método estabilizado como alternativa ao método clássico de Galerkin utilizado nesta dissertação - a metodologia de Galerkin Mínimos Quadrados (GLS) - e, por fim, uma revisão de alguns artigos de interesse sobre a aproximação numérica de escoamentos de fluidos viscoplásticos.

No Capítulo 2 foi introduzida a modelagem mecânica utilizada nesta dissertação, formada pelas equações de conservação de massa e momentum. Inicialmente, essas equações foram expressas em termos de fluxo de massa que gerou a equação de continuidade em termos de fluxo de momentum levando a equação de movimento. Foram apresentadas as formas Lagrangeana e Euleriana destas equações.

O comportamento material dos fluidos puramente viscosos foi apresentado no Capítulo 3. Foi analisada a relação do tensor tensão com o tensor taxa de deformação para os chamados fluidos Newtonianos generalizados; como também apresentados modelos empíricos de funções viscosidades para fluidos viscoplásticos, através da generalização da viscosidade Newtoniana de modo a permitir que a viscosidade do fluido passe a depender da taxa de cisalhamento. Por fim, foi introduzida uma correlação empírica da função viscosidade: a função de viscosidade proposta por Souza Mendes e Dutra (2004) – a qual foi utilizada nas simulações numéricas desta dissertação.

No Capítulo 4, foi apresentada a aproximação numérica do modelo mecânico introduzido no Capítulo 3 - essa aproximação numérica foi realizada via método de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS). Os sub-espacos de elementos finitos do campo de velocidade e pressão foram definidos, e então foi introduzida a formulação GLS através da adição à formulação de Galerkin clássica, de termos estabilizados. Pelo fato desses termos serem inseridos na forma residual, a solução exata - ou soluções aproximadas obtidas a partir de malhas muito refinadas – anula estes termos, o que torna a formulação GLS muito mais consistente.

A análise dos resultados numéricos obtidos nesta dissertação a partir das simulações numéricas foi apresentada no Capítulo 5. Primeiramente, a implementação da formulação GLS foi validada para o problema da cavidade forçada, com os perfis de velocidade horizontal e vertical apresentando boa concordância com a literatura. Em seguida, foram realizadas as aproximações GLS do escoamento isocórico de um fluido viscoplástico SMD através de uma expansão seguida de uma contração abrupta axissimétrica abrupta com razão de aspecto 6,3, com análise das isobandas de tensão de cisalhamento, perfil de velocidade axial no plano de contração mostrando-se fisicamente realistas e concordantes com a literatura específica. Também foram realizadas simulações via método GLS de um escoamento isocórico de um fluido viscoplástico SMD em torno de um cilindro para diversas razões de aspecto, com análise das isobandas de τ , perfis de velocidade axial a montante do escoamento e na *vena contracta* formada entre a parede do canal e a superfície do cilindro, e queda de pressão ao longo do canal.

6.1 COMENTÁRIOS FINAIS

Sobre os comentários realizados no Capítulo 5, podem-se destacar os seguintes tópicos:

- O método Galerkin Mínimos-Quadrados se mostrou capaz de capturar os efeitos de pseudoplasticidade, assim como as regiões rígidas e escoantes;
- As isobandas de τ apresentaram simetria axial, apresentando concordância com a teoria para escoamentos de fluidos sem inércia;
- Para um índice de *power-law* fixo, o aumento do número de salto tem diminuído as regiões rígidas, ou seja, à medida que J cresce, maiores serão as regiões sujeitas a taxas de cisalhamento muito baixas que alcançarão o valor da tensão τ_0 ;
- Para o mesmo número de salto, à medida que o expoente de *power-law* diminui, as regiões materiais rígidas aumentam de dimensões, devido à redução dos níveis da tensão de cisalhamento;
- Para o número de salto e índice de *power-law* fixos, o aumento da velocidade média adimensional na entrada causou uma diminuição nas regiões rígidas; por causa do aumento da taxa de cisalhamento imposto pelo crescimento de \bar{u}^* ;
- Para um número de salto, um índice de *power-law* e uma velocidade média adimensional na entrada, todos fixos, ao aumentar a razão de aspecto, as regiões rígidas aumentam.
- Para as menores razões de aspecto ocorrem as maiores perdas de carga.

6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Para o prosseguimento da pesquisa em Dinâmica de Fluidos não-Newtonianos Computacionais, poder-se-ia sugerir como perspectivas futuras das simulações numéricas e análises realizadas nesta dissertação:

- realizar simulações tridimensionais para o escoamento em torno do cilindro, a fim investigar os efeitos de extremidades;
- visualizar escoamento através da iluminação a laser de uma expansão-contração 6,3:1 de acrílico, através da qual escoa uma solução aquosa diluída de Carbopol, visando a validação experimental dos resultados.
- calcular o coeficiente de arrasto na superfície do cilindro;
- realizar simulações com uma formulação multi-campos GLS ($\boldsymbol{\tau}$ - p - \mathbf{u}) para o escoamento através de uma expansão seguida de uma contração abrupta;
- investigar os efeitos de inércia no problema da expansão-contração e no escoamento em torno do cilindro.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astarita, G., Marrucci, G., 1974, “**Principles of non-Newtonian fluid mechanics**”, McGraw-Hill, Great Britain.

Babuška, I., 1973. “The finite element method with lagrangian multipliers”, **Numer. Math.**, vol. 20, pp. 179-192.

Billington, E.W., and Tate, A., 1981. “**The physics of deformation and flow**”, McGraw-Hill Inc, USA.

Bird, R. B. Armstrong, R. C. Hassager, O., 1987, “**Dynamics of polymeric liquids**”. v.1, John Wiley & Sons, U.S.A.

Brezzi, F., 1974. “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers”, **RAIRO Ser. Rouge** 8, pp. 129-151.

Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R., 1982. "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 32, pp. 199-259.

Ciarlet, P.G., 1978. "**The finite element method for elliptic problems**", North-Holland, Amsterdam.

Crouzeix, M., and Raviart, P.A., 1973. “Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations”, **RAIRO**, pp. 33-76.

Dahlquist, G., and Bjorck, A., 1969. “Numerical Methods”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

Ferguson, J., and Kemblowsky, Z., 1991. “**Applied Fluid Rheology**” Elsevier Applied Science, London.

Franca, L.P., and Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 99, pp. 209-233.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1988. “Two classes of mixed finite element methods”, **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 89-129.

Franca, L.P., and Hughes, T.J.R., 1993. “Convergence Analyses Of Galerkin Least-Squares Methods For Symmetrical Advective Diffusive Forms Of The Stokes And Incompressible Navier-Stokes Equations”. **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 2, pp. 285-298.

Franca, L.P., Frey, S., and Hughes, T.J.R., 1992. "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 95, pp. 253-276.

Franceschini, F.S., and Frey, S., 2003b. "Galerkin least-squares approximations for generalized newtonian flows", Preprint submitted to **Journal of Fluids Engineering**, USA.

Franceschini, F. S.; Frey, S.L., 2005. "Finite Element Approximation for Single-Phase Multicomponent Flows". **Mechanics Research Communications**, v. 32, n. 1, p. 53-64.

Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., 1982. "Hi-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method", **J. Comput Physics.**, vol. 48, pp. 387-411.

Gurtin, M.E., 1981. "**An Introduction to continuum mechanics**", Academic Press.

Harari, I., and Hughes, T.J.R., 1994. "Stabilized Finite-Element Methods For Steady Advection-Diffusion With Production", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 115, pp. 165-191.

Hughes , T.J.R., 1978. "**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Hughes, T.J.R., and Brooks, A., 1982. "A theoretical framework for Petrov-Galerkin Methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure", **Finite Elements in Fluids**, vol. 4.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 59, pp. 85-99.

Hughes. T.J.R., and Shakib, F., 1988. "Computational aerodynamics and the finite element method", **AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting**, USA.

Johnson, C., 1987. "**Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**", Cambridge University Press, Cambridge.

Johnson, C., Nävert, U., and Pitkäranta, J., 1984. "Finite element methods for linear hyperbolic problem", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 45, pp. 285-312.

Jurjevic, R., 1999. "Modelling of two-dimensional laminar flow using finite element method", **International Journal for Numerical ethods in Fluids**, vol. 31, pp. 601-626.

Liu, B.T. et al., 2002. "Convergence of a regularization method for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol. 102, pp. 179–191

Malkus, D.S., and Hughes, T.J.R., 1978. "Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts", **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 15, pp. 63-81.

Mitsoulis E., and Matsoukas, A., (2005) "Free surface effects in squeeze flow of Bingham plastics". **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 129, pp.182–187.

Navarro, R.F., 1997 "**Fundamentos de Reologia de Polímeros**" Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul.

Papanastasiou, T.C., 1987. "Flows of Materials with Yield", **Journal of Rheology**, vol. 31, pp.385-404.

Patankar, S.V, 1980. "**Numerical heat transfer and fluid flow**", McGraw-Hill, New York.

Patankar, S.V., and Spalding, D.B., 1972. "A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", **International Journal of heat transfer and mass transfer**, vol.15, pp. 1787-1806.

Piau, J.M., 1996. " Flow of a field stress fluid in a long domain. Application to flow on an inclined plane" **Journal Rheology**. vol.40, pp.711-723.

Potanza, J.P.and Reddy, J.N., 2006. "Least-squares finite element formulations for viscous incompressible and compressible fluid flows" **Computer Methods in Applied Mechanics and engineering**, vol 195, pp.2454-2494.

Reddy, J.N., and Gartling, D.K., 1994. "**The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**", CRC Press Inc., USA.

Reis Junior, L.A., and Naccache, M.F., 2003. "Analysis of non-Newtonian flows trough contractions and expansions", **In: XVII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecanica**, São Paulo/SP. vol. 1.

Rektorys, K., 1975. "**Variational methods in mathematics, science and engineering**", D Reidel Publishing Co.

Slattery, J.C., 1999. "**Advanced transport phenomena**", Cambridge University Press, Cambridge.

Soares, M., Naccache, M. F., Souza Mendes, P.R., 1999. "Heat Transfer to viscoplastic materials flowing laminarly in teh entrance region of tubes" **International Journal of Heat and Fluid Flow**, vol 20, pp. 60-67.

Souza Mendes, P.R. et al., 2004. "Viscosity function for Yield-Stress Liquids", **Applied Rheology**, vol. 14, -pp. 296 – 302.

Souza Mendes, P.R. et al., 2007. “Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions- contractions”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 142, pp. 207–217.

Souza Mendes, P.R. et al., 2007. “Gas displacement of viscoplastic liquids in capillary tubes”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol.145, pp.30-40.

Taig, I.C., 1961. “Structural analysis by the matrix displacement method”, **English Electric Aviation Report**, vol. S017.

Zinani, F., Frey, S. L., 2006. ”Numerical Investigation of a Galerkin Least-Squares Multi-Field Formulation for Viscous Flows in an Axisymmetric Domain.” **In: Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT 2006**, Curitiba. Proceedings of ENCIT 2006. vol: Único.

Zisis and Mitsoulis, 2002. “Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech**, vol. 105, pp.1-20.