

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais -  
PPGEM

Modelamento Matemático da Instabilidade Magnetohidrodinâmica em Cubas de Redução  
de Alumínio

Vanderlei Gusberti

Dissertação para obtenção do título de Mestre  
em Engenharia

Porto Alegre

2007

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais -  
PPGEM

Modelamento Matemático da Instabilidade Magnetohidrodinâmica em Cubas de Redução  
de Alumínio

Vanderlei Gusberti  
Engenheiro Mecânico

Trabalho realizado no Centro de Tecnologia da Escola de Engenharia da UFRGS, dentro  
do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais -  
PPGEM, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Metalurgia Extrativa

Porto Alegre  
2007

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Engenharia, área de concentração Metalurgia Extrativa e aprovada em sua forma final, pelo Orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.

**Orientador: Prof. Dr -Ing. Antônio Cezar Faria Vilela**

**Banca Examinadora:**

**Prof. Dr. Paulo Santos Assis**

Prof. Escola de Minas - UFOP

**Dr. Leonardo Barboza Trindade**

Diretor - Science Technology & Engineering - STE

**Prof. Dr. Ney Francisco Ferreira**

Prof. Departamento de Engenharia Mecânica - UFRGS

Prof. Dr.-Ing. Antônio Cezar Faria Vilela

Coordenador do PPGEM

Aos meus pais, Hilário Gusberti e Rita Binda Gusberti,  
que me propiciaram, além do amor e carinho familiar,  
o exemplo de conduta moral e profissional. Eles sempre  
acreditaram e investiram na capacidade de seus filhos.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço de maneira especial à minha esposa, Tomoe Hamanaka Gusberti, pelo apoio dispensado diariamente durante este trabalho.

Agradeço também aos meus pais, Hilário e Rita, e aos meus irmãos, Waldemar e Vilmar, de quem sempre recebi incentivo e confiança.

À sociedade brasileira, que disponibiliza um sistema de educação pública, gratuita e de qualidade. Que ela não desista de dar condições de crescimento intelectual aos seus cidadãos, independente de sua origem socioeconômica.

Ao professor Dr-Ing. Antônio Cezar Faria Vilela pelo estímulo e, principalmente, pelo espírito empreendedor demonstrado ao orientar um trabalho longe de suas atuais linhas de pesquisa dentro da UFRGS.

À PCE Engenharia, pelo apoio material e intelectual e, sobretudo, pelo incentivo e bom convívio que toda a equipe propiciou durante o trabalho.

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1. OBJETIVOS .....	3
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>4</b>
2.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....	4
2.1.1. Histórico e Princípios Fundamentais do Processo de Redução do Alumínio em Cubas Eletrolíticas .....	4
2.1.2. Estado Atual da Tecnologia e Tipos de Cubas .....	6
2.1.3. Físico-Química do Processo e Importância do MHD em Cubas.....	14
2.2. NOMENCLATURA E SISTEMA DE COORDENADAS ADOTADO .....	20
2.2.1. Nomenclatura de Cubas <i>Side-by-Side</i> em Relação ao Fluxo da Corrente Elétrica e Orientação na Linha de Cubas .....	20
2.2.2. Nomenclatura de Cubas <i>End-to-End</i> em Relação ao Fluxo da Corrente Elétrica e Orientação na Linha de Cubas.....	21
2.2.3. Sistema de Coordenadas Adotado .....	22
2.3. MODELAMENTO MATEMÁTICO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA DAS CUBAS .....	23
2.3.1. Histórico e Equações Gerais da Magnetohidrodinâmica Aplicada às Cubas de Redução de Alumínio.....	23
2.3.2. Modelos de Instabilidade Magnetohidrodinâmica.....	25
2.3.3. Mecanismo de Instabilidade .....	29
<b>3. METODOLOGIA: DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE INSTABILIDADE</b> .....	<b>32</b>
3.1. CONSIDERAÇÕES E SIMPLIFICAÇÕES .....	32
3.2. MODELO <i>SHALLOW WATER</i> PARA O SISTEMA BIFÁSICO BANHO-METAL .....	35
3.3. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES .....	40
3.4. CRITÉRIO DE INSTABILIDADE .....	40
<b>4. TESTES NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO DO MODELO</b> .....	<b>44</b>
4.1. TESTES RELATIVOS À EXATIDÃO NUMÉRICA .....	44
4.1.1. Validação da Solução da Equação de Onda .....	44
4.1.2. Validação da Solução da Equação de Difusão Elétrica .....	49
4.2. VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL: MEDIÇÕES DA QUEDA DE VOLTAGEM DA CUBA NA PLANTA COMPARADA AOS RESULTADOS NUMÉRICOS .....	50
<b>5. APLICAÇÕES DO MODELO: RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	<b>53</b>
5.1. CÁLCULO DA INSTABILIDADE NA INTERFACE BANHO-METAL EM UM PROJETO REAL DE CUBA .....	53
5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: RESULTADOS .....	58
5.2.1. Campos Magnéticos Básicos e sua Influência na Instabilidade .....	58
5.2.2. Desbalanço de $B_z$ e Instabilidade.....	62
5.2.3. Parâmetros Operacionais e Instabilidade .....	63

5.2.3.1. Corrente Total da Cuba e Instabilidade.....	64
5.2.3.2. Espessura do Metal Líquido e Instabilidade.....	65
5.2.3.3. Espessura do Banho e Instabilidade.....	66
5.2.4. Efeito da Seqüência de Troca de Anodos na Instabilidade da Cuba .....	67
<b>6. CONCLUSÕES .....</b>	<b>75</b>
<b>7. SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS.....</b>	<b>76</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>77</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Desenho esquemático em corte vertical de uma cuba eletrolítica de alumínio.....	5
Figura 2: Fluxograma de produção de uma planta de produção de alumínio. ....	6
Figura 3: Uma linha de cubas de 600 A em 1917 .....	7
Figura 4: Uma linha de cubas atual ~280.000 A .....	7
Figura 5: Representação esquemática da disposição de cada tipo de anodo na cuba (vista de topo). Söderberg (esquerda) e pré-cozidos (direita) .....	9
Figura 6: Representação esquemática de uma linha de cubas “end-to-end” .....	9
Figura 7: Representação esquemática de uma linha de cubas “side-by-side” .....	9
Figura 8: Linha de cubas <i>end-to-end</i> com apenas 1 <i>end riser</i> .....	10
Figura 9: Linha de cubas <i>end-to-end</i> com 2 <i>end risers</i> .....	11
Figura 10: Linha de cubas <i>side-by-side</i> com 2 <i>end risers</i> .....	11
Figura 11: Linha de cubas <i>side-by-side</i> com 4 <i>side risers</i> . ....	11
Figura 12: Linha de cubas <i>side-by-side</i> com 6 <i>side risers</i> e com barramento assimétrico para compensação magnética.....	12
Figura 13: Mecanismo de reoxidação (corte vertical) .....	17
Figura 14 : Concentração de metal no banho para vários casos teóricos e experimentais ..	18
Figura 15: Onda presente na interface banho-metal .....	19
Figura 16: Influência da ACD na eficiência de corrente para duas tecnologias diferentes .	19
Figura 17: Sistema de orientação para uma cuba <i>side-by-side</i> que possui um duto para remoção de gases em uma das cabeceiras e que realiza a extração de metal (chamada corrida) na outra. O <i>TE</i> localizado à direita (e o <i>DE</i> à esquerda) da cuba é típico de uma linha de redução anti-horária.....	21
Figura 18: Sistema de orientação para uma cuba <i>end-to-end</i> , possuindo o duto para remoção de gases no lado do círculo externo da linha, realizando a extração de metal (chamada corrida) no lado do círculo interno. Neste caso, o sentido da linha de redução é horário. ....	22
Figura 19: Sistema de coordenadas adotado para uma cuba <i>side-by-side</i> em uma linha anti-horária (à esquerda) e para uma cuba <i>end-to-end</i> também no sentido anti-horário (à direita).....	23



Figura 20: Condutividade elétrica relativa ( $\sigma_i/\sigma_b$ ) dos componentes de uma cuba – o banho é o grande resistor do sistema e o metal pode ser entendido como um equipotencial. ....	26
Figura 21: Perturbações na interface e suas conseqüências na corrente elétrica (aparecimento de corrente horizontal de acordo com a deformação da interface banho-metal). ....	26
Figura 22: Fluxograma mostrando as famílias de modelos de instabilidade encontrados na literatura. ....	27
Figura 23: Análogo mecânico à interface banho-metal .....	29
Figura 24: Descrição do comportamento das densidades de corrente (setas verdes), forças (setas vermelhas) e movimentação da placa no análogo mecânico (acima). Onda na interface em uma cuba real (abaixo).....	31
Figura 25: Resultado da simulação da instabilidade em um caso teste, uma cuba fictícia de 180 kA.....	41
Figura 26: Resultado da simulação da instabilidade (monitoramento da posição de um ponto da interface) em um caso teste, uma cuba fictícia de 180 kA, submetida a duas situações magnéticas diferentes.. ....	42
Figura 27: Evolução de $\eta_M$ para uma cuba teste (180 kA) submetida a 2 configurações diferentes de campo magnético, e cálculo de $G_R$ através do método dos mínimos quadrados. ....	43
Figura 28: Resumo de todas as entradas e saídas do modelo de instabilidade.....	43
Figura 29: Onda gravitacional na cavidade da cuba, para diversas combinações de $m_x$ e $m_y$ . ....	45
Figura 30: Deslocamento de um ponto na onda gravitacional ( $m_x=1$ , $m_y=0$ ) amortecida: taxa de amortecimento= $0,000113$ [1/s]. ....	47
Figura 31: Correlação entre os resultados analíticos e numéricos para o período das ondas gravitacionais. ....	48
Figura 32: Distribuição das correntes horizontais obtida num plano horizontal do meio da altura do metal para a Situação D. Máxima magnitude: $8773,32$ [A/m <sup>2</sup> ].....	49
Figura 33: Distribuição das correntes horizontais obtida no plano horizontal do meio do metal pelo modelo de instabilidade desenvolvido neste trabalho. Máxima magnitude: $8864,82$ [A/m <sup>2</sup> ].....	49

Figura 34: Monitoramento da voltagem (acima) e resistência da cuba (abaixo) durante o processo de crescimento de ondas instáveis, e subsequente controle através do aumento da ACD.....	50
Figura 35: Voltagem monitorada durante aparecimento de ondas instáveis.....	51
Figura 36: Instabilidade na voltagem, medida (acima) e calculada (abaixo), mostrando semelhança encontrada entre as frequências iniciais e finais das ondas.....	52
Figura 37: Distribuições das 3 componentes de $\vec{B}$ para o casco detalhado e $f_{An} = 3,0$ .....	53
Figura 38: Distribuição da corrente elétrica vertical que passa do metal líquido para o catodo, fornecida pelo modelo completo 3D.....	54
Figura 39: Onda instável na interface banho-metal induzida pela interação eletromagnética retro-alimentada na cuba de estudo (intervalo em cada frame=10s).....	55
Figura 40: Crescimento de $\eta_M$ ao longo do tempo (apenas fase final $\eta_M > 4e-4$ ).....	58
Figura 41: Configurações básicas de campos magnéticos testadas pelo modelo de instabilidade.....	59
Figura 42: Distribuição de $J_{Oz}$ usada nos testes relativos à configuração de campo magnético vertical.....	60
Figura 43: Onda instável da interface banho-metal encontrada nas simulações para os casos de campos magnéticos básicos.....	61
Figura 44 : Valores de $G_R$ obtidos para cada um dos campos magnéticos idealizados para uma cuba.....	62
Figura 45: Taxa de crescimento das ondas em função do campo $B_z$ adicionado a um campo pré-existente.....	63
Figura 46: Taxa de crescimento das ondas em função da corrente total da cuba, para um campo magnético anti-simétrico perfeitamente compensado (azul) e para o mesmo campo magnético somado a uma descompensação de 0,001 T (magenta).....	64
Figura 47: Taxa de crescimento das ondas em função da espessura da camada de metal, para um campo magnético anti-simétrico perfeitamente compensado (azul) e para o mesmo campo magnético somado a uma descompensação de 0,001 T (magenta).....	65
Figura 48: Taxa de crescimento das ondas em função da espessura da camada de banho sob os anodos (ACD), para um campo magnético anti-simétrico perfeitamente compensado (azul) e para o mesmo campo magnético somado a uma descompensação de 0,001 T (magenta).....	66

Figura 49: Corrente elétrica que passa pelo anodo novo após a troca, nas primeiras 72 horas em comparação com a corrente nominal esperada se todos os anodos possuísem igual desempenho.....	68
Figura 50: $B_x$ (horizontal longitudinal), $B_y$ (horizontal transversal) and $B_z$ (vertical) [G], para o caso ideal onde todos os anodos carregam a mesma corrente elétrica.....	69
Figura 51: Distribuição $J_{Oz}(x,y)$ na parte superior do catodo, fornecida pelo modelo eletromagnético detalhado [ $A/m^2$ ].....	69
Figura 52: Onda instável na interface banho-metal, calculada pelo modelo de instabilidade para o caso “ideal” ( todos os anodos carregam a mesma corrente elétrica). .....	70
Figura 53: Seqüência de troca de anodos (Rota 1). .....	71
Figura 54: Seqüência de troca de anodos (Rota 2). .....	71
Figura 55: Seqüência de troca de anodos (Rota 3). .....	71
Figura 56: Seqüência de troca de anodos (Rota 4). .....	71
Figura 57: <i>Growth Rate</i> ( $G_R$ ) calculado para cada troca para as quatro seqüências estudadas .....	72
Figura 58: $G_R$ médio para cada seqüência de trocas (Rota 1,2,3 e 4) e o caso “ideal” ( todos os anodos carregam a mesma corrente elétrica).....	73
Figura 59: Eficiência de corrente atingida pela linha de cubas durante o uso das seqüências testadas, Rotas 1, 2, e 3 (esquerda), $G_R$ médio calculado para cada uma dessas seqüências (direita).....	74

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

### ABREVIACÕES:

<i>AC</i>	corrente elétrica alternada
<i>ACD</i>	distância ânodo/cátodo, entre o ânodo e o alumínio líquido, [m]
<i>DC</i>	corrente elétrica contínua
<i>DE</i>	<i>duct end</i> , cabeceira onde está localizado (em determinadas tecnologias) o duto de extração de gases para a estação de tratamento
<i>DS</i>	<i>downstream</i> ou jusante, face ou região da cuba voltada para as cubas com menor potencial elétrico
<i>ETA</i>	deslocamento da interface entre 2 líquidos em relação à interface plana e não perturbada [m], o mesmo que “ $\eta$ ”
<i>IN</i>	<i>inboard</i> , lado da cuba voltado para o lado interno do <i>loop</i> de corrente (em tecnologias <i>end-to-end</i> ), também voltado para o centro do prédio
<i>MHD</i>	Magnetohidrodinâmica
<i>OUT</i>	<i>outboard</i> , lado da cuba voltado para o lado externo do <i>loop</i> de corrente (em tecnologias <i>end-to-end</i> ), também voltado para as janelas do prédio
<i>TE</i>	<i>tapping end</i> , face da cuba na qual se realiza (em determinadas tecnologias) a extração ou corrida do metal líquido para fundição
<i>US</i>	<i>upstream</i> ou montante, face ou região da cuba voltada para as cubas com maior potencial elétrico

### CONSTANTES E VARIÁVEIS:

<i>erro</i>	magnitude do erro admitido pela simplificação de <i>Shallow Water</i> em relação às equações de Navier-Stokes [-]
$\vec{g}$	vetor aceleração da gravidade, [m/s <sup>2</sup> ]
$h_{max}$	amplitude de uma onda em uma camada de líquido [m]
$k$	número de onda composto para o caso bidimensional [-]
$m_x$	número de onda longitudinal [-]

$m_y$	número de onda transversal [-]
$\vec{n}$	vetor normal a uma superfície, [-]
$\vec{r}$	vetor posição entre o centróide de um elemento condutor de corrente e um ponto onde deseja-se determinar $\vec{B}$ , [m]
$t$	tempo [s]
$volC$	volume de um elemento condutor de corrente, [m <sup>3</sup> ]
$x$	direção longitudinal da cuba
$y$	direção transversal da cuba
$z$	direção vertical da cuba
$\vec{B}$	vetor densidade de fluxo magnético, [T]
$C_m$	concentração de alumínio dissolvido no banho [-]
$E$	consumo de energia específico, [kW.h/kg de Alumínio]
$\vec{F}$	vetor Força de Lorentz, [N/m <sup>3</sup> ]
$\Delta G^\circ$	variação da energia livre de Gibbs, [kJ]
$G_R$	taxa de crescimento das ondas ( <i>Growth Rate</i> ) [1/s]
$H$	altura de uma camada de líquido [m]
$\Delta H^\circ$	variação de entalpia de um processo, [kJ]
$\Delta H_{\text{reac}}^\circ$	variação de entalpia de reação, [kJ]
$H_T^\circ - H_{298}^\circ$	variação de entalpia necessária para a elevação da temperatura de um composto a partir de 298 K, [kJ]
$\Delta H_{\text{tot}}^\circ$	variação de entalpia total, [kJ]
$I$	corrente elétrica de operação, [A]
$\vec{J}$	vetor densidade de corrente elétrica, [A/m <sup>2</sup> ]
$L_x$	comprimento da cuba, [m]
$L_y$	largura da cuba, [m]
$P$	pressão, [Pa]
$\Delta S^\circ$	variação de entropia, [kJ/K]
$T$	temperatura absoluta, [K]
$T_s$	Período da onda [s]
$\vec{V}$	vetor velocidade, [m/s]
$\chi$	eficiência de corrente, [-]

$\eta$	deslocamento da interface entre 2 líquidos em relação à interface plana e não perturbada [m], o mesmo que “ETA”
$\eta_M$	integração do deslocamento médio da interface entre dois líquidos em relação à interface não perturbada [m]
$\mu$	permeabilidade magnética, [T.m/A]
$\mu_{eff}$	viscosidade efetiva atuando no escoamento (laminar + turbulenta) [Pa.s]
$\pi$	razão entre o diâmetro e o comprimento de uma circunferência 3,1416
$\theta$	ângulo de giro em torno de um determinado eixo referente à placa do análogo mecânico [°]
$\rho$	massa específica, [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	condutividade elétrica, [ $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ]
$\Phi$	potencial elétrico, [V]
$\Psi$	variável genérica que pode ser decomposta linearmente em uma parte transiente e uma parte estacionária

### OPERAÇÕES MATEMÁTICAS:

$\nabla$	operador nabla
$\cdot$	referente ao produto escalar
$\times$	referente ao produto vetorial

### ÍNDICES:

$a$	índice relativo ao alumínio líquido
$b$	índice relativo ao banho líquido
$o$	índice relativo à parte estacionária de uma variável
$x$	índice relativo à direção longitudinal da cuba
$y$	índice relativo à direção transversal da cuba
$z$	índice relativo à direção vertical da cuba
$\perp$	índice relativo à quantidade gerada por campo vertical
$\parallel$	índice relativo à quantidade gerada por campo horizontal

## RESUMO

Com o advento das cubas eletrolíticas de alta amperagem para redução do alumínio, o estudo da instabilidade magnetohidrodinâmica tem se tornado cada vez mais importante, tanto no projeto de novas tecnologias quanto na melhoria da eficiência dos equipamentos já existentes. O objetivo central deste trabalho é desenvolver um modelo matemático de instabilidade magnetohidrodinâmica. O modelo deve ser sensível aos principais parâmetros de projeto e operacionais de uma cuba e capaz de servir como ferramenta na determinação de configurações mais favoráveis no que tange à instabilidade. No modelo, considera-se que o campo magnético gerado pelos condutores externos é conhecido. As equações diferenciais pertinentes à física do modelo são resolvidas utilizando-se diferentes métodos numéricos implementados em um software desenvolvido e dedicado para os objetivos deste trabalho. Alguns resultados de oscilação de voltagem foram comparados com os valores obtidos em cubas reais. Foram feitos estudos de sensibilidade na variação de parâmetros quanto à instabilidade, tais como: corrente elétrica de operação; distância anódica-catódica, nível de metal líquido e desbalanço do campo magnético vertical. Diferentes configurações básicas de campos magnéticos foram testadas de modo a definir-se qual delas é a mais indicada para obterem-se cubas mais estáveis. A influência da operação de troca dos anodos na instabilidade também foi estudada. Com o auxílio do modelo foi possível recomendar-se uma seqüência de trocas de anodo que minimize o distúrbio na instabilidade magnetohidrodinâmica de um específico projeto de cubas.

## **ABSTRACT**

With the advent of high amperage electrolytic cells for aluminum reduction, the study of the magnetohydrodynamics is becoming more and more important to the new technologies project, as well to the existent devices efficiency improvement. The main objective of this work is to develop a mathematical model of the cell's magnetohydrodynamic instability. The model shall be sensible to the main project and operational cells' parameters and able to be used as a tool for determining better configurations regarding cell instability. In the model, the magnetic field generated by the external conductors is considered as known. The differential equations regarding the model physics are solved using different numerical methods, implemented in a software developed and dedicated for the purposes of this work. Several oscillation voltage results were compared with the values obtained in real cells. Sensibility of some operational parameters variation on the instability such as: total operational electrical current, anode-cathode distance, liquid metal level, and unbalance of the vertical magnetic field were studied. Different magnetic field basic configurations were tested in order to define the most indicated for obtaining more stable cells. The influence of the anode changing operation on the instability was also investigated. With the help of the model, it was possible to recommend an anode changing sequence which minimizes the disturbance on the magnetohydrodynamic instability in a specific cell design.



## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente o alumínio é o metal não ferroso mais utilizado pela indústria mundial de bens de consumo, sendo que sua demanda tem crescido de maneira consistente nas últimas décadas. Sua aplicação é bastante variada, sendo empregado desde a fabricação de panelas e outros recipientes, condutores elétricos, automóveis, aviões e até espaçonaves. A produção mundial de alumínio metálico primário gira em torno de 34 milhões de toneladas por ano, (IAI, 2007), enquanto que a produção no Brasil é de aproximadamente 1,5 milhões de toneladas por ano (ABAL, 2007).

Embora o alumínio seja um dos elementos químicos mais abundantes da crosta terrestre, a sua forma metálica só veio a ser conhecida pelo ser humano depois da revolução industrial, no início do século XIX. Na natureza, o alumínio aparece na forma de óxidos, aluminatos e silicatos, de composição bastante estável. Somente com o advento da eletricidade em larga escala foi possível criar-se um processo economicamente viável de redução para a obtenção do alumínio metálico.

Assim, atualmente o alumínio metálico primário é obtido por um processo eletroquímico de redução da alumina chamado processo Hall-Héroult, desenvolvido independentemente em 1886 por C. M. Hall (EUA) e P. L. Héroult (França).

O princípio desse processo metalúrgico consiste em uma simples eletrólise que ocorre em uma mistura líquida de sais denominada “banho”. A alumina em pó é então dissolvida no banho e eletricamente reduzida a alumínio metálico. O processo acontece em temperaturas em torno de 960°C. Uma vez reduzido, o alumínio metálico possui densidade maior que o banho e é imiscível, depositando-se assim na camada inferior do reator chamado cuba eletrolítica.

Uma cuba eletrolítica, além de conter fisicamente as substâncias envolvidas na reação, tem a função de fornecer a corrente elétrica necessária para que ocorra a eletrólise e a geração do calor. Assim, faz-se necessária uma série de condutores elétricos capazes de prover correntes contínuas de até 350.000 A em cada cuba. Muitas cubas podem ser ligadas em série (algumas centenas, em geral) em uma planta de redução de alumínio.

Este processo foi desenvolvido há mais de um século e, conceitualmente, do ponto de vista termodinâmico, permanece inalterado até hoje. Os avanços tecnológicos colhidos ao longo desse tempo dizem respeito à melhoria dos equipamentos, produção, rendimento

do processo e controle de poluentes. Assim, foi possível aumentar a capacidade de corrente de 600 A (1917) para 350.000 A (atual). No início do século XX, o consumo específico de energia que era de 28 kWh/kg de alumínio produzido é hoje em torno de 13,5 kWh/kg.

O centro do funcionamento de uma cuba eletrolítica é a cavidade ocupada pelos líquidos. Estes são imiscíveis formando um sistema bifásico: o banho eletrolítico na parte superior, (doravante chamado apenas de “banho”) e o alumínio líquido na parte inferior (doravante chamado apenas de “metal”). Se a força da gravidade fosse a única presente neste sistema, a interface entre os dois líquidos seria perfeitamente plana e horizontal. Entretanto a presença de correntes elétricas atravessando o banho e o metal, acopladas com campos magnéticos gerados pelos condutores elétricos, resulta em forças eletromagnéticas, também chamadas de forças de Lorentz.

As forças eletromagnéticas promovem a movimentação dos fluidos e a deformação da interface banho-metal. Além disso, a configuração magnética das cubas favorece o mecanismo de excitação retro alimentado entre as forças e as ondas geradas por essas forças. Esse fenômeno é chamado de Instabilidade Magnetohidrodinâmica.

A instabilidade é um fator determinante na eficiência de operação de uma cuba. Quando a eficiência de corrente é alta, mais alumínio é fabricado com a mesma energia elétrica fornecida. Mesmo o aumento de 1% na eficiência de corrente representa economia da ordem de alguns MegaWatts em uma planta. A presença de ondas instáveis dentro de uma cuba favorece a reação de reoxidação, como será mostrado com detalhe mais adiante, reduzindo a eficiência de corrente, e em casos extremos, põe em risco a integridade dos operadores e dos equipamentos.

Nesse contexto, surge a necessidade de se saber em que situações a instabilidade da cuba é estimulada ou inibida e, desse modo, orientar os novos projetos de cuba quanto a sua configuração magnética, além de orientar a operação das mesmas na planta de redução. Mesmo que o fenômeno da instabilidade seja reconhecidamente importante para a eficiência da cuba, ele ainda é pouco compreendido, principalmente no âmbito industrial.

Tudo isto serve de motivação para o desenvolvimento de um modelo matemático de instabilidade magnetohidrodinâmica para cubas de redução do alumínio, algo inédito no âmbito nacional. A Magnetohidrodinâmica ou MHD é a ciência que estuda os escoamentos sob a ação de forças eletromagnéticas. As equações de MHD serão o ponto de partida para o entendimento e a construção desse modelo.

## 1.1. OBJETIVOS

### **O objetivo geral deste trabalho é:**

- Desenvolver um modelo matemático de instabilidade magnetohidrodinâmica capaz de avaliar o nível de instabilidade de uma cuba sujeita a um determinado campo magnético com uma determinada configuração de operação. Deve-se, também, validar o modelo com alguma medição feita durante a operação em cubas reais.

### **Especificamente, deseja-se:**

- Estudar qual tipo de campo magnético básico (simétrico, anti-simétrico, linear, constante, entre outros) é mais favorável à estabilidade da cuba, servindo de orientação para o projeto de barramentos;
- Investigar a sensibilidade do mecanismo de instabilidade quanto à variação do desbalanço do campo magnético vertical;
- Investigar a sensibilidade do mecanismo de instabilidade quanto à variação da corrente elétrica total da linha de cubas;
- Investigar a sensibilidade do mecanismo de instabilidade quanto à variação do nível de metal líquido depositado na cuba;
- Investigar a sensibilidade do mecanismo de instabilidade quanto à variação da ACD (distância anódica-catódica);
- Estudar o comportamento da instabilidade durante a seqüência de troca de anodos e, se possível, recomendar uma seqüência mais favorável à cuba.

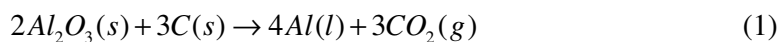
## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

#### 2.1.1. Histórico e Princípios Fundamentais do Processo de Redução do Alumínio em Cubas Eletrolíticas

Logo após a descoberta do elemento químico Alumínio em pleno século XIX, ficou claro que o metal dele advindo seria extremamente útil na indústria de manufatura, seja bélica ou de uso pacífico. O desafio, a partir de então, seria encontrar uma forma de produção do metal economicamente viável. Conforme descrito por Grjotheim e Welch (1988), já em 1825, H. C. Oersted conseguiu produzir alguns miligramas de alumínio metálico utilizando-se de um processo de redução térmica do cloreto de alumínio com amálgama de potássio. Novos esforços foram feitos e, em 1854, o francês St. Claire-Deville produziu alumínio metálico a partir da redução térmica de  $\text{NaAlCl}_4$ . Desta vez foi possível produzir artefatos domésticos, brinquedos e capacetes militares, causando muito interesse devido à sua leveza. Entretanto, os custos de produção continuavam extremamente altos.

Depois de alguns anos começou a ficar claro que a eletrólise seria o caminho para conseguir-se um processo economicamente viável. Então, em 1886, Hall (Estados Unidos) e Héroult (França) desenvolveram, de maneira independente, o processo eletrolítico de redução da alumina. Não por acaso, nessa época a eletricidade havia obtido rápido desenvolvimento estando agora disponível em escala industrial. Também é importante destacar o desenvolvimento do processo Bayer de purificação da alumina a partir da bauxita. Assim o processo Hall-Héroult de redução da alumina por eletrólise se consolidou como padrão e é usado até hoje nas plantas industriais. Como toda eletrólise, há a presença de anodo e catodo e atualmente ambos são basicamente compostos de carbono, sendo o anodo consumido no processo de redução com produção de  $\text{CO}_2$ , de acordo com a Equação (1).



O meio em que ocorre o processo é chamado de banho, que é uma solução salina, contendo, em sua maioria, sal de criolita ( $\text{Na}_3\text{AlF}_6$ ), fluoreto de Cálcio ( $\text{CaF}_2$ ) e fluoreto de Alumínio ( $\text{AlF}_3$ ). Alumina em pó ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) é adicionada periodicamente a esta solução enquanto o alumínio metálico decanta formando-se assim um sistema líquido bifásico, uma vez que alumínio e banho são imiscíveis. A temperatura termodinamicamente ideal para o processo fica em torno de  $960^\circ\text{C}$ . A criolita foi adotada como solvente desta reação devido a algumas de suas características peculiares:

- É um dos poucos bons solventes para a alumina encontrados na natureza (a maioria das reservas fica na Groenlândia);
- Possui maior voltagem de dissociação do que a alumina;
- Em seu estado líquido possui condutividade elétrica aceitável;
- Possui temperatura de fusão aceitável ( $\sim 960^\circ\text{C}$ );
- Não é reativa com o carbono ou alumínio, favorecendo assim com que a reação de eletrólise da alumina gere o alumínio em alto rendimento;
- Possui baixa pressão de vapor.

O banho e o metal são contidos pela cuba, que é um recipiente que deve isolar térmica e eletricamente os fluidos do ambiente. Assim o próprio banho em estado sólido e os tijolos refratários são os materiais isolantes mais utilizados. O anodo de carbono está em contato com o banho enquanto o fundo do metal fica em contato com o catodo. Tudo isto é contido tipicamente por um casco de aço.

A corrente elétrica contínua é provida por geradores centrais e distribuída através de condutores ligados em série chamados de *busbar* ou barramentos.

A disposição esquemática das principais partes da cuba eletrolítica é mostrada no corte vertical da Figura 1.

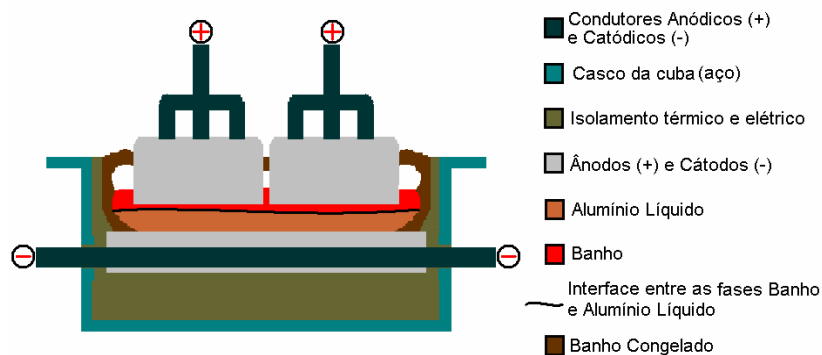


Figura 1: Desenho esquemático em corte vertical de uma cuba eletrolítica de alumínio

A Figura 2 mostra o fluxo de produção do alumínio a partir da alumina em uma planta. Como elementos de entrada são destacados: alumina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), anodo consumível (majoritariamente composto de carbono), fluoreto de alumínio ( $\text{AlF}_3$ ) e criolita, além de energia elétrica em corrente contínua. Entre os elementos de saída encontram-se o alumínio primário para a fundição e os resíduos gasosos:  $\text{CO}_2$ , fluoretos e outros poluentes. Os gases então passam por precipitadores eletrostáticos até a sua saída para a atmosfera através de chaminés.

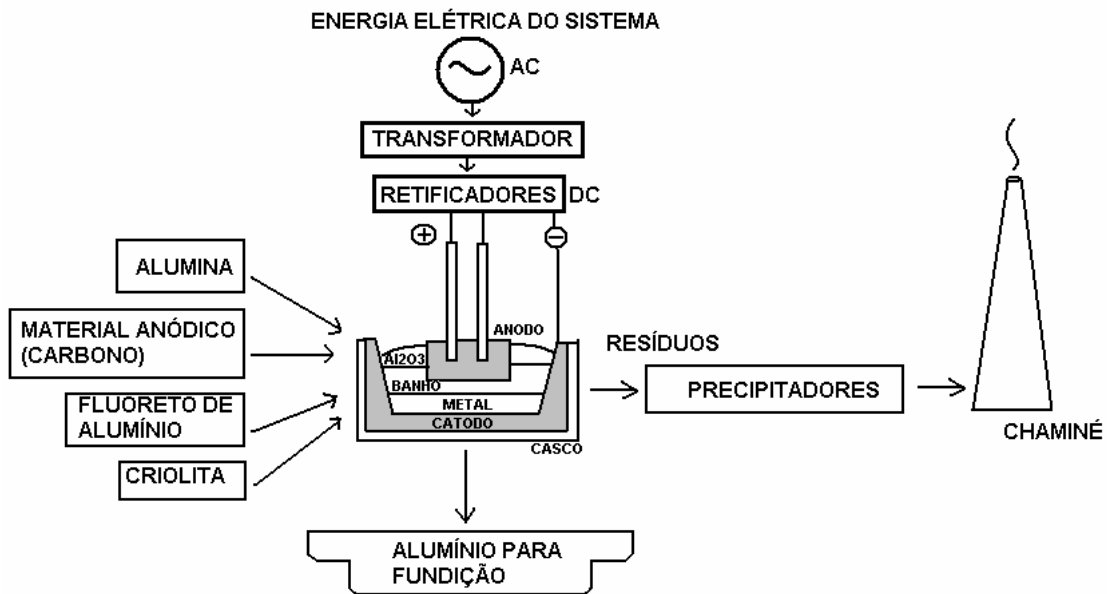


Figura 2: Fluxograma de produção de uma planta de produção de alumínio.

A concentração de alumina no banho deve ser conservada dentro dos limites termodinâmicos propícios para a redução. Assim, periodicamente são adicionadas pequenas quantidades de alumina no banho para compensar o seu consumo contínuo. Da mesma forma, o alumínio metálico produzido é retirado periodicamente no procedimento chamado vazamento ou *tapping*.

### 2.1.2. Estado Atual da Tecnologia e Tipos de Cubas

Conforme apresentado pela literatura (GRJOTHEIM e WELCH, 1988; KJAR et al., 2004), o processo Hall-Héroult ainda é o mesmo do ponto de vista termodinâmico, após mais de 120 anos. Entretanto a tecnologia de cubas eletrolíticas evoluiu significativamente desde então.

Primeiramente é possível destacar a evolução no tamanho das cubas e capacidade de produção, que é aproximadamente proporcional à sua corrente elétrica. Se no início do século XX as correntes utilizadas eram menores que 1.000 A, atualmente a corrente elétrica padrão já é de 350.000 A e já existem protótipos de cubas de 500.000 A. Um dos fatores de maior relevância na limitação do aumento de corrente em projetos de cubas é a instabilidade MHD da interface banho-metal. Em conjunto têm-se outros fatores, como por exemplo: limites do projeto térmico da cuba, limitações construtivas e operacionais.

A Figura 3 e a Figura 4 mostram, respectivamente, uma linha de cubas antiga (1917) e uma linha de cubas atual onde é possível notar visualmente o espetacular avanço tecnológico que possibilitou o aumento da capacidade de corrente de 600 A (1917) a 350.000 A (atual).



Figura 3: Uma linha de cubas de 600 A em 1917 – reproduzido de Grjotheim e Welch (1988).



Figura 4: Uma linha de cubas atual ~280.000 A - reproduzido de Grjotheim e Welch (1988).

Como partes principais presentes em uma cuba moderna pode-se destacar conforme a Figura 1:

- Barramento anódico: Leva a corrente elétrica provinda da cuba anterior para os anodos da cuba, a maioria dos condutores é de alumínio;
- Anodos de grafita: Na maior parte são compostos de carbono, que é consumido no processo em alguns dias;
- Banho: Solução onde ocorre a redução;
- Alumínio líquido: Depositado no fundo da cuba, é retirado periodicamente (uma vez a cada 1 ou 2 dias);
- Cátodo: Também composto majoritariamente de carbono, não é consumido no processo, podendo durar vários anos;
- Barramento catódico: Conduzem a corrente elétrica da cuba atual para a cuba seguinte (conectando-se ao barramento anódico da cuba seguinte), são em sua maioria condutores de alumínio;
- Isolamento térmico e elétrico: Separam os líquidos do processo (banho e metal) do meio ambiente e evita a perda de corrente do sistema.

Quanto ao tipo de anodo, há duas tecnologias em uso de larga escala: anodos Söderberg e anodos pré-cozidos.

O anodo tipo Söderberg é em geral composto de um bloco único e sinterizado na própria cuba, aproveitando o calor existente produzido por efeito Joule. Embora, à primeira vista, possa-se pensar que há ganho no aproveitamento energético da cuba, isto não acontece de fato comparando-se aos anodos pré-cozidos. Outro fator cada vez mais importante a considerar é que as emissões de gases tóxicos nos anodos Söderberg são bem maiores durante a sinterização do que nos anodos pré-cozidos. Tudo isto motivou o abandono da tecnologia Söderberg em cubas mais modernas.

Os anodos pré-cozidos, como o próprio nome diz, são sinterizados em fornos especialmente desenvolvidos para este processo. Outra vantagem econômica é que a energia fornecida para o cozimento vem da queima de combustíveis, mais barata que a energia elétrica do efeito Joule. Em cada cuba, muitos anodos são colocados em contato com o banho e quando um deles é consumido há a reposição por anodos novos. O rodízio de trocas dos anodos é sincronizado de forma que um anodo é trocado a cada determinado período de tempo (geralmente 1 a cada dia), uma vez que seu consumo é constante e



previsível no tempo. A Figura 5 apresenta esquematicamente o arranjo de cada tipo de anodo nas cubas em uma vista de topo.

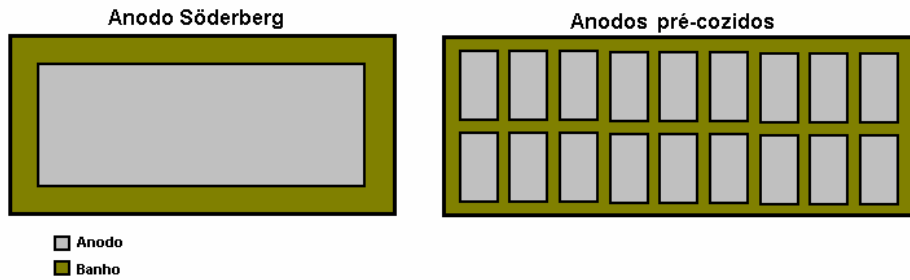


Figura 5: Representação esquemática da disposição de cada tipo de anodo na cuba (vista de topo). Söderberg (esquerda) e pré-cozidos (direita)

Outra opção testada apenas em caráter experimental é o caso do anodo inerte, uma vez que haveria vantagem operacional da eliminação do procedimento de troca. O carbono seria adicionado ao banho da mesma forma que a alumina. Entretanto esta tecnologia ainda não se mostrou viável em escala industrial.

Quanto à disposição geométrica dos barramentos e da linha, há também dois tipos de tecnologia largamente empregados: *end-to-end* e *side-by-side* conforme mostrado na Figura 6 e na Figura 7.

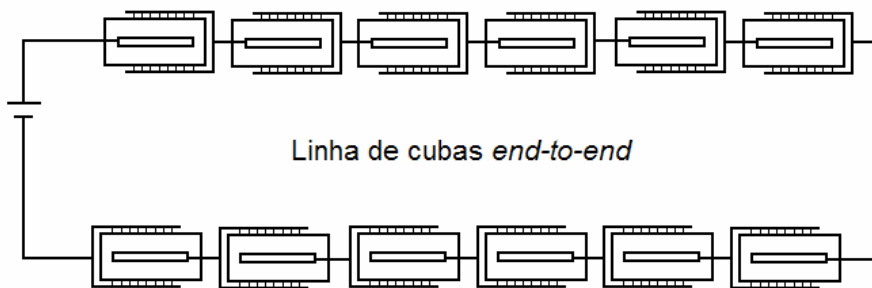


Figura 6: Representação esquemática de uma linha de cubas “end-to-end”

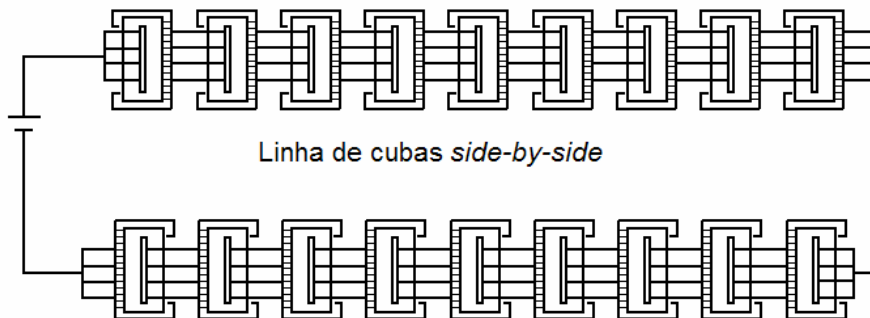


Figura 7: Representação esquemática de uma linha de cubas “side-by-side”

Historicamente, a tecnologia *side-by-side* foi a primeira a ser utilizada nas pequenas cubas do início do século XX. Conforme a corrente elétrica das cubas foi aumentando, se percebeu que as operações de troca de anodo e alimentação da cuba seriam facilitadas se as cubas fossem dispostas em série no sentido longitudinal. A partir da década de 1930 o design *end-to-end* passou a ser o padrão. Quando a corrente de operação chegou em torno de 170 kA no final da década de 1960, os problemas magnetohidrodinâmicos começaram a ganhar importância. Então, concluiu-se que o arranjo *side-by-side* produzia campos magnéticos menos intensos e esse tipo de arranjo possibilitaria um novo salto na corrente de operação, como de fato aconteceu. Além disso, a tecnologia de operação de cubas melhorou, e com a automatização de alguns procedimentos de alimentação da cuba, foi possível superar os empecilhos que outrora dificultavam o uso da tecnologia *side-by-side*.

Outra forma de classificação das cubas é quanto à disposição dos *risers*. Os *risers* são a parte do barramento anódico que efetivamente leva a corrente para a ponte anódica que por sua vez a distribui aos anodos. São condutores de grande porte que carregam dezenas de milhares de Amperes gerando fortes campos magnéticos nas cubas. Assim, o posicionamento dos *risers* tem grande importância no comportamento das cubas. Até o final da década de 1960, a maioria das cubas apresentavam apenas 1 ou 2 *risers*, posicionados nas cabeceiras das cubas, disposição conhecida por *end riser*. Depois, visando melhoria nos campos magnéticos, os *risers* passaram a ser posicionados na lateral da cuba, chamada de configuração *side riser*, acompanhando a tendência de uso da disposição *side-by-side*. O número de *risers* também aumentou para até 6, dependendo do tamanho da cuba. A Figura 8 até a Figura 12 mostram a evolução cronológica da disposição dos *risers* ao longo do desenvolvimento da tecnologia de cubas, associada à evolução da orientação das cubas na linha.

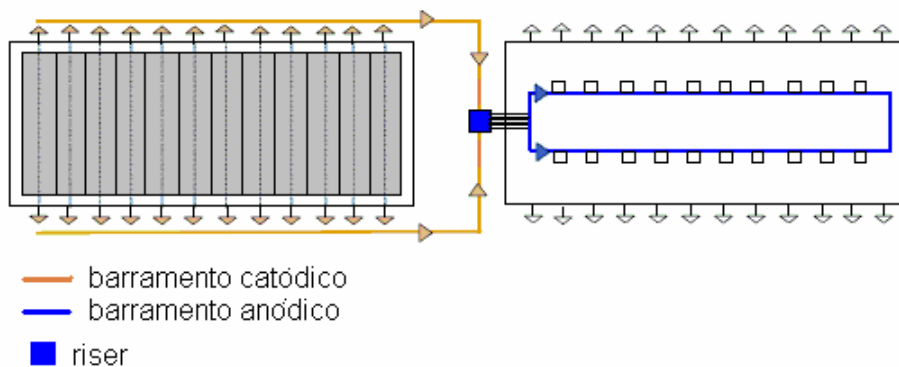


Figura 8: Linha de cubas *end-to-end* com apenas 1 *end riser*, adaptado de Kjar et al. (2004).

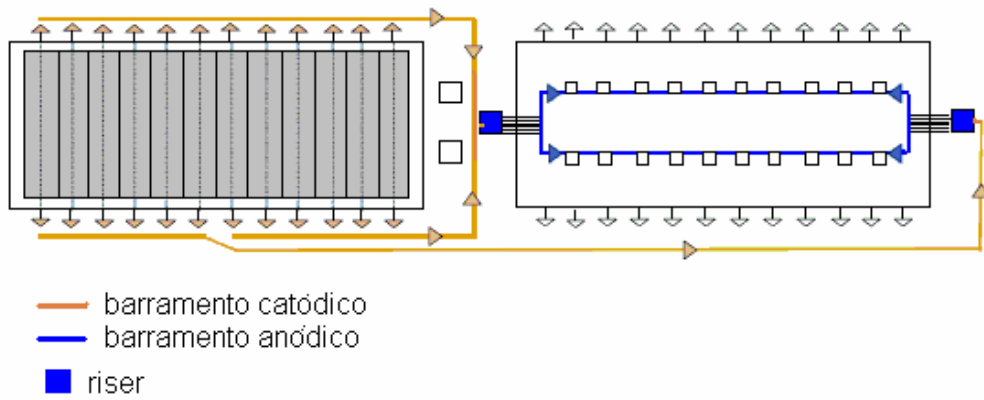


Figura 9: Linha de cubas *end-to-end* com 2 *end risers*, adaptado de Kjar et al. (2004).

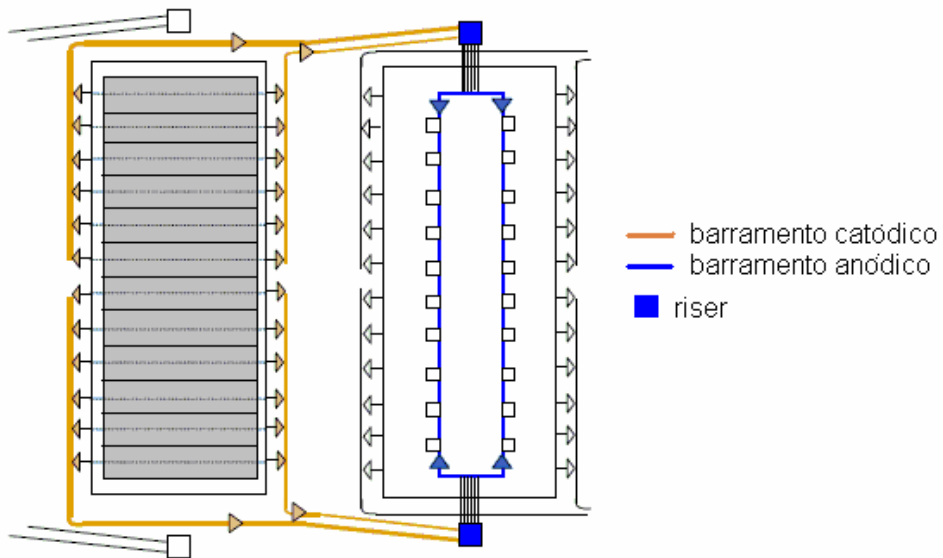


Figura 10: Linha de cubas *side-by-side* com 2 *end risers*, adaptado de Kjar et al. (2004).

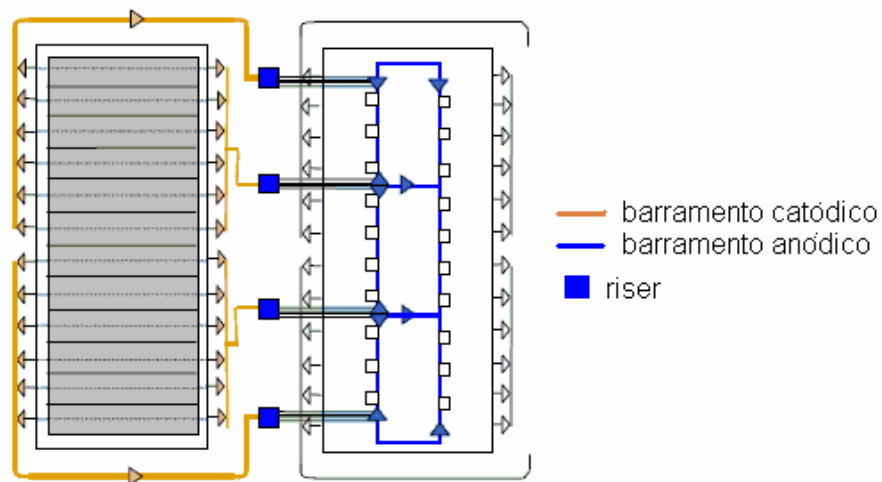


Figura 11: Linha de cubas *side-by-side* com 4 *side risers*, adaptado de Kjar et al. (2004).

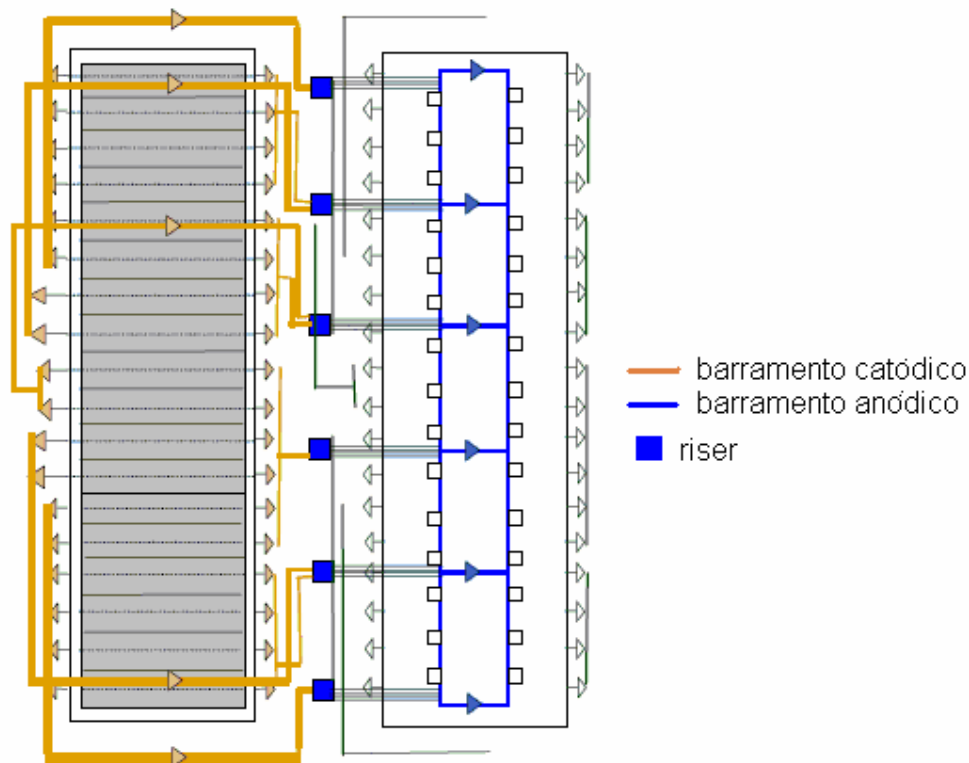


Figura 12: Linha de cubas *side-by-side* com 6 *side risers* e com barramento assimétrico para compensação magnética, adaptado de Kjar et al. (2004).

Com o crescimento da corrente elétrica fornecida à cuba e o conseqüente aumento do campo magnético, observou-se que a movimentação dos fluidos dentro da cuba passou a ser intensa e a influenciar seu desempenho. A partir da década de 1960, a magnetohidrodinâmica (MHD) passou a ser estudada e incluída como fator relevante em um projeto de uma cuba. Desde então, alguns projetos passaram a apresentar barramentos assimétricos, como mostra a Figura 12, tentando compensar o campo magnético advindo das linhas vizinhas. Esta compensação também pode ser feita através de *loop* externo (POTOČNIK, 1991).

O “estado da arte” na tecnologia atual de cubas corresponde então a *side-by-side* com anodos pré-cozidos e *risers* dispostos na configuração *side riser*, em número de 4 a 6. É interessante colocar alguns dados típicos presentes nessas cubas no que se refere ao design, desempenho e operação, que estão listados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados típicos de design, desempenho e operação para cubas modernas (estado da arte)  
(fonte: PCE Engenharia).

Tipo de anodo	Pré-cozido
Disposição da cuba na linha	Side-by-side
Posicionamento dos <i>risers</i>	Side Riser
Número de <i>risers</i>	4 - 6
Comprimento da cuba	~ 15m
Largura da cuba	~ 4m
Nº de anodos por cuba	24 - 40
Vida média de uma cuba	5 - 6 anos
Produção por dia	2100-2700 kgAl/dia por cuba
Corrente elétrica total	280-350 kA
Queda de potencial total por cuba	~ 4.1 V
Queda de potencial no anodo	~ 0.3 V
Queda de potencial no catodo	~ 0,25 V
Queda de potencial no barramento	~ 0,19 V
Queda de potencial no banho	~ 1,4 V
Potencial de decomposição químico	~ 1,2 V
Voltagem adicional ( <i>overvoltage + bolhas</i> )	~ 0.75 V
Espessura da camada de banho	3.5 cm – 4.5cm
Espessura da camada de Alumínio líquido	12 cm – 20 cm
Eficiência energética	13-13,5 kWh/kg alumínio
Eficiência de corrente (na eletrólise)	94,5% - 96%
Consumo de anodo	0,41 kg/ kgAl produzido
Pureza do Alumínio	99,85%
Temperatura de operação	955-965°C
Densidade de corrente no anodo	0,85-0,90 A/cm <sup>2</sup>

Surge agora a discussão sobre qual é a limitação na eficiência das cubas e qual parâmetro ainda pode ser melhorado. Diversos autores indicam (POTOČNIK, 1991; LA CAMERA, 1991; KJAR et al., 2004) que o aumento do tamanho das cubas e da eficiência de corrente é limitado principalmente por problemas de MHD. Por isso, serão abordados a seguir os processos que ocorrem na cuba e que são influenciados pelo MHD.

### 2.1.3. Físico-Química do Processo e Importância do MHD em Cubas

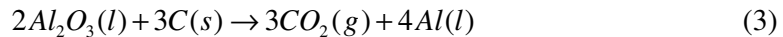
A eletrólise da alumina necessita de grande quantidade de energia elétrica para ser processada em escala industrial. Por isso as plantas de redução são localizadas em regiões do mundo onde a energia ainda é disponível e relativamente barata. Ao longo do tempo muitos esforços foram feitos no sentido de diminuir o custo energético da produção do alumínio. Como é mostrado por Grjotheim e Welch (1988), a energia necessária para ocorrer a eletrólise é calculada pela lei de Faraday. A quantidade de metal produzida é menor do que a teórica devido às reações parasitas de reoxidação. A razão entre a massa de metal obtida pela cuba e a massa teórica que poderia ser produzida segundo a lei de Faraday é definida como a eficiência de corrente  $\chi$ , de valor sempre entre 0 e 1. Assim a quantidade de energia necessária para a produção de 1 kg de alumínio é dada por:

$$E = \frac{2,980.\Delta\Phi}{\chi} \quad (2)$$

onde  $E$  é o consumo energético específico, [kW.h/kg de Alumínio];  $\Delta\Phi$  é a queda de tensão elétrica da cuba, [V]; e  $\chi$  é a eficiência de corrente da redução, [-].

Analisando-se a equação (2), percebe-se que é possível diminuir o consumo específico de energia de três maneiras: reduzindo-se a queda de voltagem da cuba ou aumentando-se a eficiência de corrente, ou ainda, produzindo-se ambas as situações simultaneamente.

A reação química dominante na temperatura de trabalho da cuba é expressa termodinamicamente por:



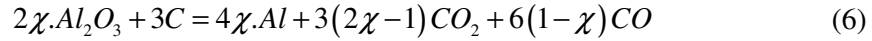
Assumindo que o banho está saturado com alumina, a entalpia e a energia livre de Gibbs da reação no estado padrão, para o número de mols da equação (3), são dadas respectivamente:

$$\Delta H^0 = [2249,56 - 0,0466T] \text{ kJ} \quad (4)$$

$$\Delta G^0 = [1679,92 - 0,433T] \text{ kJ} \quad (5)$$

, onde T é a temperatura absoluta em Kelvin.

Usando-se a equação (5) para uma temperatura de 960°C (1233,15 K) obtém-se a energia mínima teórica para a realização da reação de redução da alumina (5,64 kWh/kg de Alumínio). Substituindo-se esse valor na lei de Faraday chegar-se-ia a uma voltagem igual a 1,90V, considerando  $\chi=1$ . Para qualquer  $\chi$ , a equação (3) é modificada:



Agora, deve-se lembrar que na equação (3) têm-se reagentes não gasosos e produtos gasosos, causando mudança de entropia no sentido positivo descrita pela equação básica (7):

$$\Delta H^0 = \Delta G^0 + T\Delta S^0 \quad (7)$$

Deve-se considerar que numa cuba eletrolítica faz-se necessária a manutenção de uma reação isotérmica. Nesse caso a energia mínima necessária para o processo é  $\Delta H$ , pois apenas  $\Delta G$  não é suficiente para manter a temperatura da reação. A energia total necessária ao processo, sem ainda considerar perdas, mas já levando em conta o gasto em elevar a temperatura dos reagentes e manter a reação de forma isotérmica é dada pela equação (8).

$$\Delta H_{tot}^o = \frac{1000}{27} \left[ \Delta H_{reac,T}^o + \frac{1}{2} (H_T^o - H_{298}^o)_{Al_2O_3} + \frac{3}{4\chi} (H_T^o - H_{298}^o)_C \right] \quad (8)$$

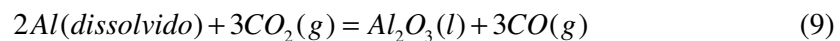
Admitindo-se  $\chi=1$  e  $T=960^\circ\text{C}$  (1233,15 K), obtém-se um consumo específico  $E=6,34$  kWh/kgAl. Considerando os dados da Tabela 1, observa-se que as melhores cubas do mundo alcançam  $E \sim 13$  kWh/kgAl. Percebe-se que metade da energia gasta ainda é em formas de perdas do sistema.

Considerando o processo, alguns fatores que influenciam essas perdas, sejam elas térmicas ou de reações parasitas, pode-se enumerar como mais importantes:

- O projeto do isolamento térmico da cuba, cujo estudo detalhado não será abordado aqui, pois seria merecedor de extensa atenção, tem grande importância nas perdas térmicas. Recomenda-se, para este tema, a literatura (SCHMIDT-HATTING et al., 1985; GRJOTHEIM e WELCH, 1988; BRUGGEMAN, 1998).

- A temperatura do banho deve estar na faixa ótima de trabalho (~960°C) para que a reação direta de eletrólise seja termodinamicamente favorecida ao máximo (equação (3)).
- A composição química do eletrólito (banho), que também deve favorecer ao máximo a reação direta.
- ACD (distância anódica-catódica, que é a espessura da camada de banho sob os anodos) atua tanto na perda térmica, pois possui alta resistividade elétrica e dissipa grande quantidade de calor, quanto na reação de reoxidação, pois se trata do meio onde ocorre a eletrólise e as outras reações químicas.
- O projeto dos barramentos elétricos, que geram os campos magnéticos responsáveis pelas forças de MHD que movem o banho e o metal, influenciando a cinética da reação de reoxidação.

O foco deste trabalho está relacionado majoritariamente com o último item: a cinética da reação de reoxidação. A principal reação de reoxidação que degenera a eficiência de corrente encontrada na cuba é encorajada pela dissolução de alumínio metálico no banho, conforme a equação (9).



É interessante agora estudar o mecanismo de transporte desse alumínio advindo da fase inferior (alumínio líquido) e penetrando no banho até a ocorrência da reoxidação a fim de relacioná-lo com os efeitos do MHD na cuba. Segundo Grjotheim e Welch (1988), pode-se dividir o mecanismo de reoxidação nas etapas enumeradas a seguir:

- i. Dissolução do alumínio líquido que está na fase inferior na interface banho-metal até a saturação;
- ii. Difusão do alumínio pela camada limite de concentração no banho, afastando-se da interface banho-metal;
- iii. Transporte do alumínio até a interface de reação com o CO<sub>2</sub>, que pode tanto estar dissolvido no banho quanto encontrar-se na fase gasosa geralmente nas imediações do anodo;
- iv. Reação de reoxidação do alumínio.

A Figura 13 mostra o local na cuba onde ocorrem as etapas enumeradas anteriormente.



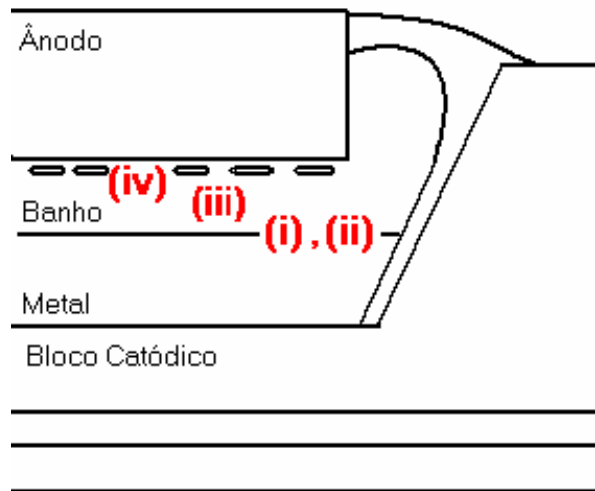


Figura 13: Mecanismo de reoxidação (corte vertical), adaptado de Grjotheim e Welch (1988).

Uma etapa de interesse é a que envolve o transporte convectivo (iii), visto que ela depende da agitação dos fluidos que por sua vez é feita por mecanismos de MHD. A concentração de alumínio é transportada por velocidades de até 0,2 m/s.

Além disso, as ondas na interface facilitam a interpenetração das fases, através de pequenas gotas que aumentam bastante a área de contato entre as fases, acelerando as etapas i e ii.

O diagrama da Figura 14 mostra a relação entre concentração de alumínio  $C_m$  dissolvido e a posição na altura da camada de banho da interface com metal no limite inferior até o contato com o anodo no limite superior. As curvas mostradas no diagrama divergem fortemente em seu comportamento de acordo com o mecanismo que controla o fenômeno de dissolução do alumínio no banho. O mecanismo controlador pode ser: movimentação do banho, dissolução do alumínio através da interface e camada limite, reação de oxidação, ou ainda uma combinação de mais de um dos citados.

As curvas (a), (b), (c), e (d), são situações teóricas e as curvas (e) e (f) representam resultados experimentais correlacionados às etapas dos mecanismos de transporte apresentados na Figura 13 (GRJOTHEIM e WELCH, 1988), que correspondem a:

- a) A transferência de metal dissolvido na camada limite é a etapa mais demorada controlando assim o processo de reoxidação, etapas i e ii;
- b) A etapa limitante é a advecção do alumínio dissolvido através do banho, etapa iii;

- c) A etapa que controla o processo é a reação de reoxidação em si, que necessita de  $\text{CO}_2$  encontrado nas imediações do anodo, etapa iv;
- d) Situação em que as etapas (b) e (c) têm igual relevância no controle do processo, etapas iii e iv.
- e) Curva experimental em que se encontrou grande relevância da ação convectiva no banho, etapa iii;
- f) Curva experimental onde se verificou grande relevância da dissolução do alumínio na camada limite, como no caso (a), etapas i e ii.

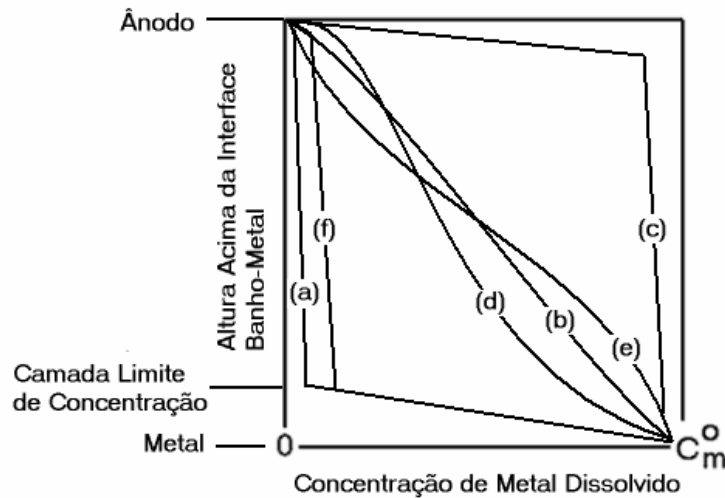


Figura 14 : Concentração de metal no banho para vários casos teóricos e experimentais, de acordo com Grjotheim e Welch (1988).

Os casos experimentais levam à conclusão que, em cubas onde a movimentação dos fluidos é fraca, esta deve controlar a cinética de reoxidação. A cinética da reação governada pela velocidade do banho e do metal é apresentada por Grjotheim e Welch (1988), e o escoamento permanente não será objeto de estudo deste trabalho. Já em cubas de movimentação intensa, que é o caso de cubas modernas com altas correntes, a transferência do alumínio através da interface e a sua dissolução na camada limite (etapas i e ii) controlam a cinética de reoxidação.

A instabilidade magnetohidrodinâmica da interface banho-metal é a fonte de geração das ondas e estas aumentam justamente a dissolução do alumínio na camada limite, além de acrescentar área da interface pela interpenetração dos dois fluidos (etapas i e ii). O controle da instabilidade se apresenta agora como ponto chave para o aumento da eficiência de corrente em cubas modernas. A Figura 15 mostra um corte vertical na cuba com a presença de uma onda na interface entre as duas fases.

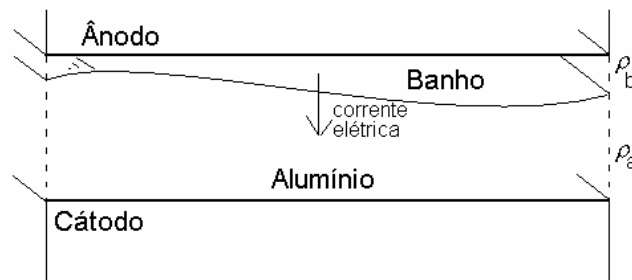


Figura 15: Onda presente na interface banho-metal

Como já foi comentado anteriormente, um dos parâmetros mais importantes da operação de cubas é a espessura da camada de banho, que tem influência importante nos fenômenos de perda térmica e eficiência de corrente. Conforme descrevem Urata et al. (1976), a espessura da ACD atua na cuba nas seguintes situações:

- A maior parte do calor fornecido à cuba através do efeito Joule acontece no banho devido à sua alta resistividade elétrica. Parte desta energia acaba sendo perdida para a atmosfera pela cuba diminuindo sua eficiência energética, vide equação (2). Neste sentido, quanto menor a espessura do banho, melhor a eficiência energética.
- Mas em contrapartida, se a camada de banho for demasiado fina, a eficiência de corrente relacionada com a reação de eletrólise começa a cair, uma vez que favorece a dissolução de alumínio metálico e deixa o  $\text{CO}_2$  produzido no anodo demasiado perto da interface favorecendo a reação de reoxidação, majoritariamente representada pela equação (9). Neste sentido, quanto maior a espessura do banho, menor é a chance da reoxidação ocorrer. A Figura 16 mostra a dependência da eficiência de corrente  $\chi$ , e, por conseguinte, da reação direta em relação à espessura da camada de banho (ACD).

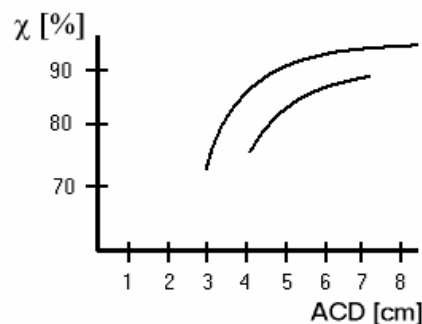


Figura 16: Influência da ACD na eficiência de corrente para duas tecnologias diferentes, reproduzido de Grjotheim e Welch (1988).

Conforme o exposto na Figura 16, o aumento da ACD favorece o aumento da eficiência de corrente, entretanto o consumo de energia térmica também aumenta, pois é no banho que se concentram as maiores perdas por efeito Joule. Conclui-se que deve haver uma espessura de banho ótima, representando o compromisso entre eficiência de corrente e térmica, que segundo os estudos publicados (URATA et al., 1976; GRJOTHEIM e WELCH, 1988), deve ficar entre 3,5 e 4,0 cm. Neste ponto é importante lembrar que esta espessura ótima se refere à interface banho-metal não perturbada, plana e estacionária.

A instabilidade magnetohidrodinâmica das duas fases (banho e metal) influencia fortemente a mínima espessura de banho (ou ACD) e a eficiência energética e de corrente de uma cuba. Além da questão da reação reversa apontada durante este capítulo, as perturbações da interface remetem a regiões na cuba com diferentes espessuras de banho ao longo do tempo, ora abaixo, ora acima da espessura ótima. Instabilidades podem ainda causar desequilíbrios elétricos em todo circuito, danosos à vida útil do equipamento, e em casos extremos, perigosos em relação aos operadores que por ventura estiverem nas proximidades. Assim, deve-se levar em conta, como será demonstrado mais adiante, que a diminuição da ACD aumenta o nível de instabilidade na cuba, reduzindo o rendimento do processo.

## 2.2. NOMENCLATURA E SISTEMA DE COORDENADAS ADOTADO

Com o objetivo de apresentar modelos e resultados com clareza, é importante apresentar todas as convenções adotadas nesta dissertação, tanto em relação ao sistema de coordenadas geral da cuba, quanto em relação às peculiaridades da geometria de uma cuba. Assim, adota-se a nomenclatura e o sistema de coordenadas consistente à apresentada por Schneider (2006), o qual será retomado neste capítulo, nos itens pertinentes a este trabalho, com o acréscimo de uma nomenclatura para cubas *end-to-end*.

### 2.2.1. Nomenclatura de Cubas *Side-by-Side* em Relação ao Fluxo da Corrente Elétrica e Orientação na Linha de Cubas

A orientação de uma cuba é primordialmente determinada pelo fluxo da corrente elétrica. Assim, têm-se como montante ou *upstream* (US) a aresta da cuba voltada para regiões de maior potencial elétrico ao passo que a aresta voltada para regiões de menor potencial é chamada de jusante ou *downstream* (DS). Nas cubas *side-by-side*, tanto o

*upstream* quanto o *downstream* são localizados nas laterais. Para as cabeceiras das cubas (lados de arestas menores), define-se como *duct end (DE)* a cabeceira acima da qual está instalado o duto que conduz os gases provenientes da reação para a unidade de tratamento.

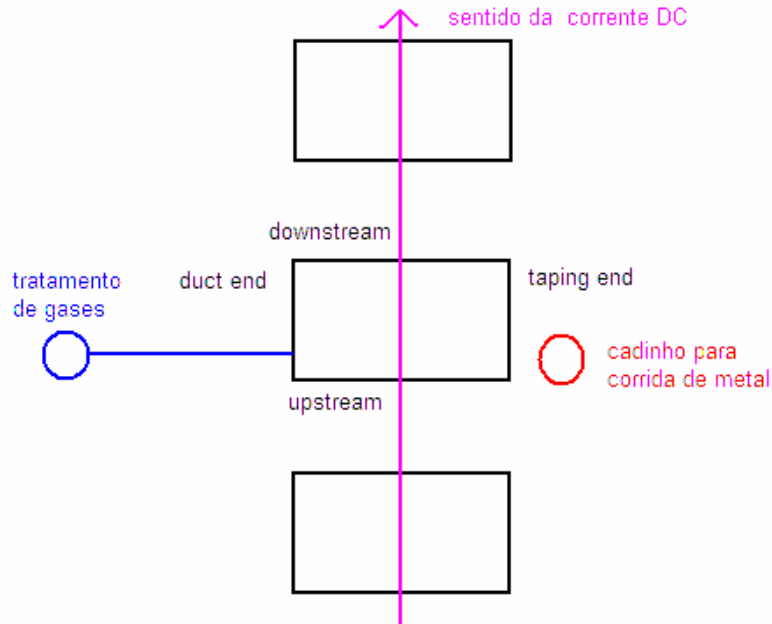


Figura 17: Sistema de orientação para uma cuba *side-by-side* que possui um duto para remoção de gases em uma das cabeceiras e que realiza a extração de metal (chamada corrida) na outra. O *TE* localizado à direita (e o *DE* à esquerda) da cuba é típico de uma linha de redução anti-horária (reproduzido de Schneider, 2006).

Em cubas em que extração do metal para fundição (operação chamada de corrida, vazamento ou *tapping*) é realizada através de uma das cabeceiras, esta recebe a denominação de *tapping end (TE)*. A Figura 17 apresenta esquematicamente o sistema de orientação de uma cuba *side-by-side* conforme descrito neste capítulo – onde o *duct end* encontra-se à esquerda e o *tapping end* à direita – típico de linhas de redução com corrente fluindo no sentido anti-horário.

### 2.2.2. Nomenclatura de Cubas *End-to-End* em Relação ao Fluxo da Corrente Elétrica e Orientação na Linha de Cubas

Em se tratando de cubas *end-to-end*, o *upstream* e o *downstream* são localizados nas cabeceiras das cubas. Define-se também como *inboard (IN)* o lado da cuba voltado para o círculo interno da linha de cubas, em frente à linha de retorno, é também o lado onde é realizada a operação de *tapping*. Já o lado do círculo externo da linha de cubas é

chamado de *outboard* (OUT), para onde também são direcionados os gases residuais da cuba. A Figura 18 mostra o sistema de orientação para as cubas *end-to-end*.

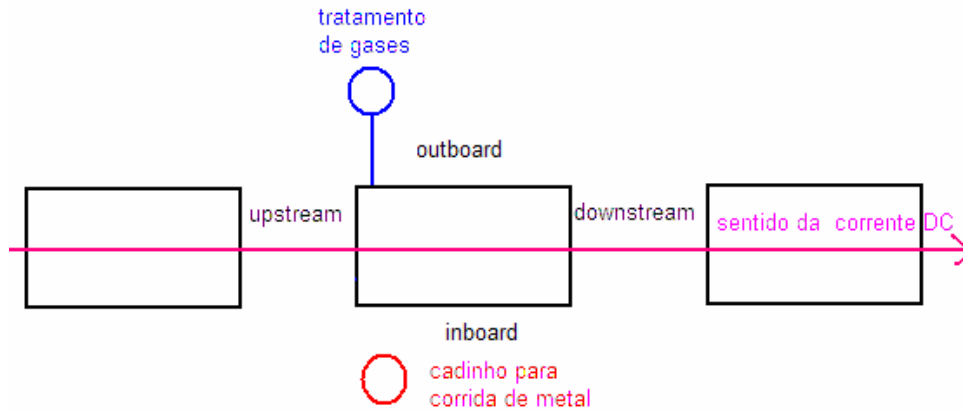


Figura 18: Sistema de orientação para uma cuba *end-to-end*, possuindo o duto para remoção de gases no lado do círculo externo da linha, realizando a extração de metal (chamada corrida) no lado do círculo interno. Neste caso, o sentido da linha de redução é horário.

### 2.2.3. Sistema de Coordenadas Adotado

Assim como descrito por Schneider (2006), o sistema de coordenadas adotado neste trabalho segue a regra da mão direita, sendo que sua origem encontra-se na interface entre o topo dos blocos catódicos e o fundo do metal, no meio do conjunto de blocos catódicos. O eixo dos  $y$  sempre é paralelo à menor dimensão horizontal da cuba (chamadas cabeceiras), o eixo do  $x$  também é horizontal e paralelo à maior aresta da cuba.

Assim, se a cuba for *side-by-side* em uma linha anti-horária (conforme Figura 19, à esquerda), o semi-eixo longitudinal positivo  $+x$  aponta para o *tapping end* e o negativo aponta para o *duct end*. O semi-eixo positivo transversal  $+y$  aponta para o *downstream* e o negativo para o *upstream*. Finalmente, o semi-eixo positivo vertical  $+z$  aponta para a ponte anódica enquanto que o semi-eixo negativo  $-z$  aponta para o fundo do casco de aço (vide Figura 21). Assim, determinam-se os quadrantes da cuba para o caso *side-by-side*:

- *USDE*:  $-L_x/2 \leq x \leq 0$  e  $-L_y/2 \leq y \leq 0$ ;
- *USTE*:  $0 \leq x \leq L_x/2$  e  $-L_y/2 \leq y \leq 0$ ;
- *DSDE*:  $-L_x/2 \leq x \leq 0$  e  $0 \leq y \leq L_y/2$ ;
- *DSTE*:  $0 \leq x \leq L_x/2$  e  $0 \leq y \leq L_y/2$ .

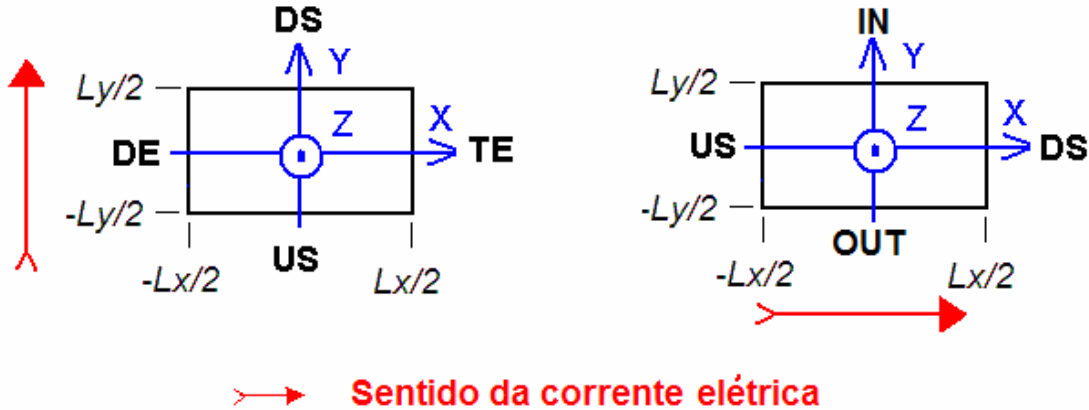


Figura 19: Sistema de coordenadas adotado para uma cuba *side-by-side* em uma linha anti-horária (à esquerda) e para uma cuba *end-to-end* também no sentido anti-horário (à direita).

Se a cuba for *end-to-end* em uma linha anti-horária (conforme Figura 19, à direita), o semi-eixo longitudinal positivo  $+x$  aponta para o *downstream* e o negativo aponta para o *upstream*. O semi-eixo positivo transversal  $+y$  aponta para o *inboard* e o negativo para o *outboard*. Finalmente, o semi-eixo positivo vertical  $+z$  aponta para a ponte anódica enquanto que o semi-eixo negativo  $-z$  aponta para o fundo do casco de aço (exatamente como nas cubas *side-by-side*). Assim, determinam-se os quadrantes da cuba para o caso *end-to-end*:

- *OUTUS*:  $-L_x/2 \leq x \leq 0$  e  $-L_y/2 \leq y \leq 0$ ;
- *OUTDS*:  $0 \leq x \leq L_x/2$  e  $-L_y/2 \leq y \leq 0$ ;
- *INUS*:  $-L_x/2 \leq x \leq 0$  e  $0 \leq y \leq L_y/2$ ;
- *INDS*:  $0 \leq x \leq L_x/2$  e  $0 \leq y \leq L_y/2$ .

### 2.3. MODELAMENTO MATEMÁTICO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA DAS CUBAS

#### 2.3.1. Histórico e Equações Gerais da Magnetohidrodinâmica Aplicada às Cubas de Redução de Alumínio

O modelamento numérico aplicado ao MHD em cubas começou a despertar nos meados dos anos de 1960 devido ao aparecimento de cubas com corrente elétrica cada vez

maior, ocasião em que se tornaram visíveis os problemas de MHD. Em 1960, Givry publicou um importante estudo sobre a deformação da interface estática banho-metal devido a forças eletromagnéticas. Em seguida, apareceram os primeiros trabalhos mostrando o cálculo do escoamento estacionário (GIVRY, 1967; TARAPORE, 1979). Em 1976 surgiu o trabalho de Urata et al., que foi o primeiro a propor um modelo matemático para a instabilidade da interface. Com o avanço das técnicas computacionais nas últimas décadas, os modelos vêm evoluindo no sentido de representar cada vez melhor a complexa física do MHD em cubas.

A seguir será apresentada de forma geral a descrição matemática do MHD encontrada nas cubas.

Como foi comentado anteriormente, altas densidades de corrente atravessam o banho e o metal, e estas correntes são disponibilizadas por condutores dispostos ao redor da cuba. O potencial elétrico é governado pela equação de Laplace (10) e a distribuição da densidade de corrente elétrica pode ser calculada pelo gradiente desse potencial multiplicado pela condutividade elétrica do meio material (11):

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = 0 \quad (10)$$

$$\vec{J} = -\sigma \nabla \Phi \quad (11)$$

Os condutores e a própria corrente elétrica dentro da cuba geram campos magnéticos, assim a densidade de fluxo magnético é dada pela lei de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} d(volC) \quad (12)$$

A densidade de corrente elétrica multiplicada pela densidade de fluxo magnético gera uma determinada força por unidade de volume (forças de Lorentz). Como os líquidos estão em movimento, há uma segunda componente de forças que é a componente gerada pela corrente induzida pela própria velocidade do fluido, assim a densidade de forças total fica:

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} + \sigma (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (13)$$



O foco deste trabalho direciona-se ao sistema banho-metal. As forças de Lorentz, normalmente muito maiores que as forças provocadas por correntes induzidas, promovem a movimentação dos fluidos lá presentes. Se não existissem essas forças a interface metal-banho seria plana e horizontal, mas este nunca é o caso em uma cuba em operação. A Magnetohidrodinâmica (MHD) é a ciência que estuda a influência de forças eletromagnéticas em escoamentos fazendo uso da equação de Navier-Stokes modificada para MHD:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla P + \mu_{eff} (\nabla^2 \vec{V}) + \rho \vec{g} + \vec{F} \quad (14)$$

e da equação da continuidade para escoamentos incompressíveis:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (15)$$

As equações (10), (11), (12), (14) e (15) são as equações gerais que governam todos os fenômenos de MHD presentes nas cubas.

### 2.3.2. Modelos de Instabilidade Magnetohidrodinâmica

Os efeitos magnetohidrodinâmicos presentes em uma cuba podem ser decompostos em uma parte estacionária, sempre presente e de valor constante no tempo, e uma parte transiente que descreve as respostas do sistema ao longo do tempo devido a uma perturbação qualquer. Dependendo do enfoque, o desenvolvimento dos modelos matemáticos segue por caminhos completamente distintos.

Especificamente neste trabalho, o interesse não é o estudo do estado estacionário do escoamento dentro da cuba, mas sim do que uma determinada perturbação sobre este equilíbrio pode provocar. A isto chama-se de estudo da instabilidade magnetohidrodinâmica.

Em geral, uma perturbação nas forças provoca uma deformação na interface banho-metal. A interface por sua vez, se estiver em movimento provoca perturbações na corrente elétrica em toda a cuba, pois como já foi visto anteriormente, a espessura do banho é determinante na resistência total do circuito elétrico, onde a interface estiver mais próxima do anodo haverá uma tendência de passar uma corrente maior do que onde ela estiver mais distante. Essas perturbações na corrente elétrica por sua vez influem diretamente nas forças

completando um ciclo retro-alimentado. Este ciclo só pode ser freado por efeitos viscosos já presentes na cuba, ou aumentando-se a espessura do ACD, o que é indesejável.

As principais formas de perturbação presentes numa cuba são:

- Trocas de anodo e outros tipos de manutenção;
- Impurezas provenientes das matérias-primas;
- Vazamento do alumínio produzido, encurtando a espessura da camada de metal na cuba;
- As cubas são ligadas em série, uma cuba pode induzir perturbações em outra cuba.

Devido à enorme diferença de condutividade elétrica entre banho e alumínio, ver Figura 20, o alumínio comporta-se como equipotencial elétrico, redistribuindo o fluxo elétrico através de correntes horizontais (Figura 21) que são fator determinante no aparecimento de instabilidades.

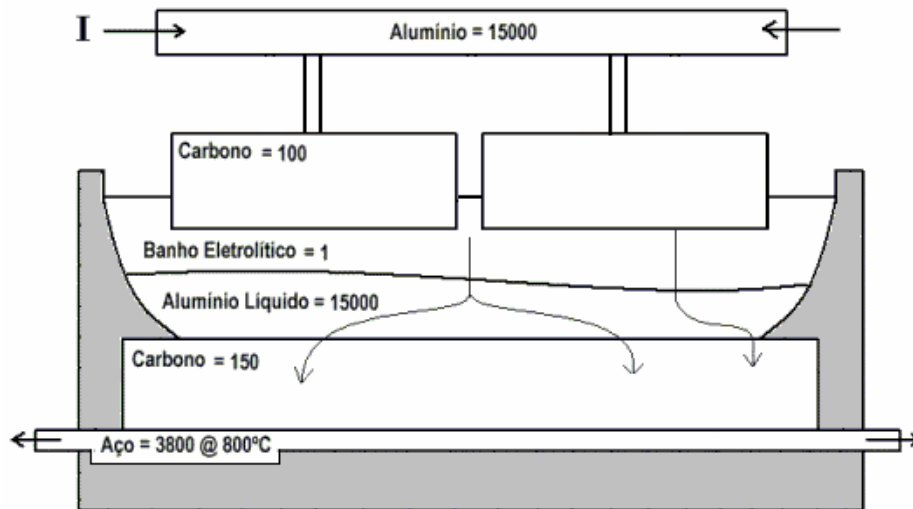


Figura 20: Condutividade elétrica relativa ( $\sigma_i/\sigma_b$ ) dos componentes de uma cuba – o banho é o grande resistor do sistema e o metal pode ser entendido como um equipotencial.

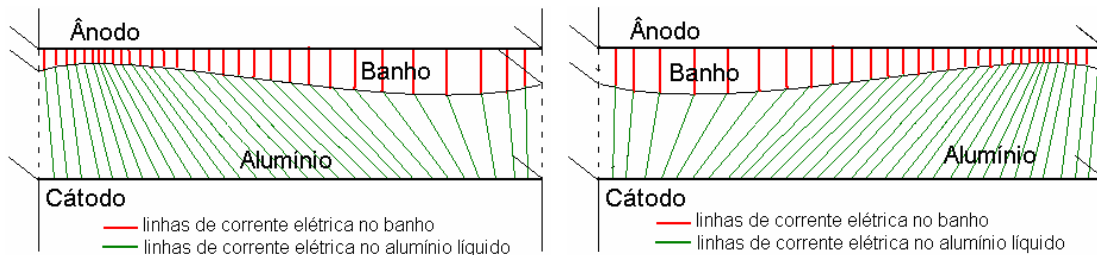


Figura 21: Perturbações na interface e suas consequências na corrente elétrica (aparecimento de corrente horizontal de acordo com a deformação da interface banho-metal), adaptado de Gusberti et al., 2007.

No trabalho de Urata et al. (1976), foi proposto pela primeira vez um modelo matemático para descrever a dinâmica da interface banho-metal. Desde então alguns modelos destinados a descrever o fenômeno da instabilidade MHD em cubas vêm sendo propostos. Em geral estes modelos podem ser classificados em 2 tipos: perturbação linear interfacial descrita através de métodos matriciais (URATA et al., 1976; SNEYD, 1992; EL-DEMERDASH et al., 1995; DROSTE et al., 1998; DAVIDSON e LINDSAY, 1998; ANTILLE et al., 1999), e análise direta de MHD transiente utilizando-se volumes finitos ou diferenças finitas. A análise direta transiente pode ser subdividida em 2 tendências: utilizando-se a aproximação de *Shallow Water* (LEBOUCHER et al., 1999; ZIKANOV et al., 2000; ZIKANOV et al., 2004; GUSBERTI et al., 2007) ou partindo-se para modelos completamente tridimensionais (POTOČNIK, 1989; SEGATZ et al., 1993). Em todos os modelos citados há diferenças e avanços em relação à descrição da física do problema.

A Figura 22 mostra o fluxograma da evolução das famílias dos modelos de instabilidade mencionados anteriormente.

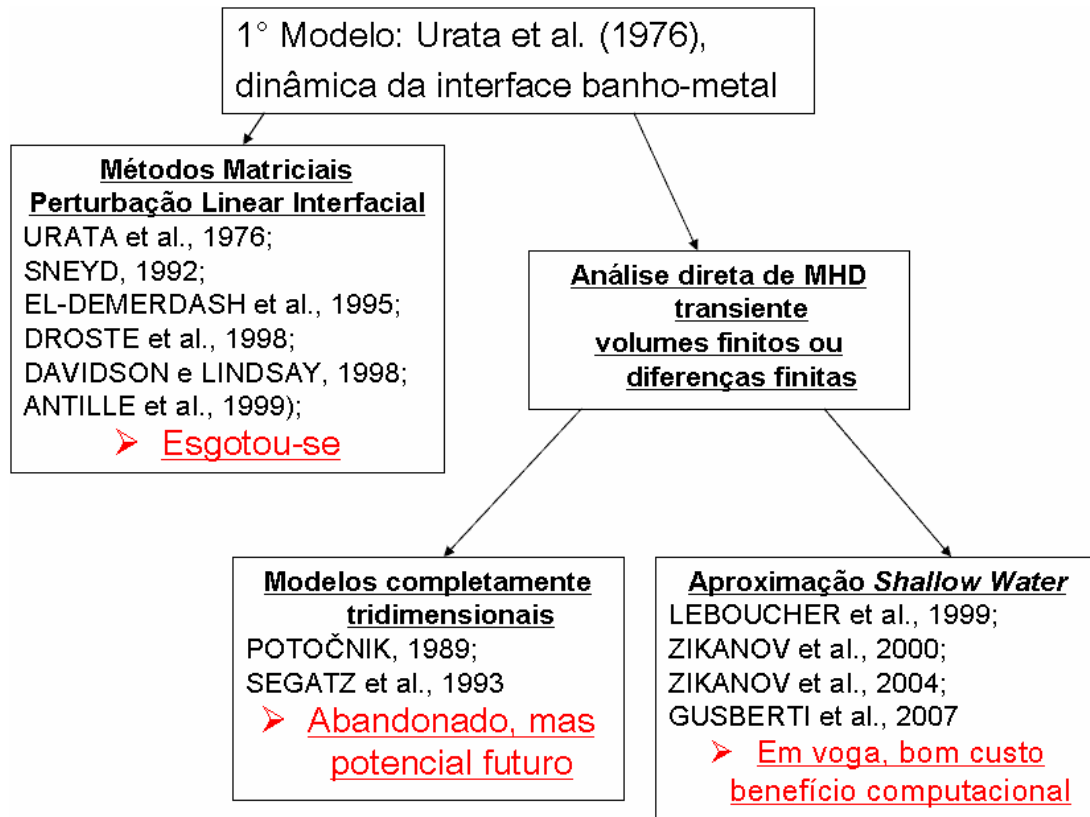


Figura 22: Fluxograma mostrando as famílias de modelos de instabilidade encontrados na literatura.

A simplificação das equações de Navier-Stokes, chamada de *Shallow Water*, foi desenvolvida para casos em que uma dimensão do domínio líquido é muito menor do que as outras duas, como por exemplo, em ondas no oceano (PEDLOSKY, 1979 *apud* DAVIDSON e LINDSAY, 1998]. Já foi mostrado que a espessura das fases líquidas somadas dentro da cuba não deve passar de 25 cm enquanto o comprimento e a largura da cavidade na cuba são da ordem de alguns metros. É possível calcular-se a ordem do erro induzido por esta simplificação [MEI, 1989, *apud* LEBOUCHER et al., 1999] valendo-se da seguinte relação:

$$erro \cong \left( \frac{h_{\max}}{H_0} \right)^2 + \frac{h_{\max} H_0}{L_x^2} \quad (16)$$

A magnitude do erro encontrado é pequena ( $\sim 1\%$ ) para ondas de até 10% da altura da cavidade. Como o interesse é na formação das instabilidades (pequenas amplitudes de ondas), pode-se dizer que a simplificação é válida, não havendo prejuízo na representação dos fenômenos físicos relevantes da instabilidade. Como será visto a seguir, a simplificação de *Shallow Water* é muito conveniente no sentido de viabilizar a construção de um modelo de perturbação com solução numérica rápida e eficaz. Por isso será utilizada neste trabalho, já que assim permite que um grande número de testes seja efetuado dentro de um esforço computacional aceitável.

As equações de Navier-Stokes e continuidade na simplificação de *Shallow Water* possuem o formato a seguir, não havendo mais variações na direção  $z$  para uma mesma fase.

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) + \rho g \nabla H = -\nabla P + \mu_{\text{eff}} (\nabla^2 \vec{V}) + \vec{F} \quad (17)$$

$$\nabla \cdot (H \vec{V}) = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (18)$$

Lembrando que as equações nesta forma deixam de ser 3D e passam a ser 2D (horizontal em relação à cuba, sendo que há duas camadas distintas, alumínio e banho), apesar de algumas variáveis serem campos na direção vertical ( $H$ , altura instantânea da interface em relação a altura não perturbada).

### 2.3.3. Mecanismo de Instabilidade

O mecanismo da instabilidade magnetohidrodinâmica foi explicado por Davidson e Lindsay (1998), fazendo uso de uma analogia mecânica. Segundo esta analogia, uma placa metálica (que representa a interface banho-metal) está imersa em um campo magnético puramente vertical  $B_z$  e de valor constante no tempo e no espaço, conforme Figura 23. A placa é ligada a uma parede horizontal superior rígida através de um leve pivô que permite o giro da placa ao redor dos eixos  $x$  e  $y$ , formando assim um pêndulo bidimensional. A placa também está imersa em um fluido possuindo alta resistência elétrica, como o banho. A corrente elétrica vertical passa pelo fluido resistivo até chegar à placa. Como a placa é pouco resistiva, a corrente que chega se redistribui internamente até sair pela sua superfície inferior.

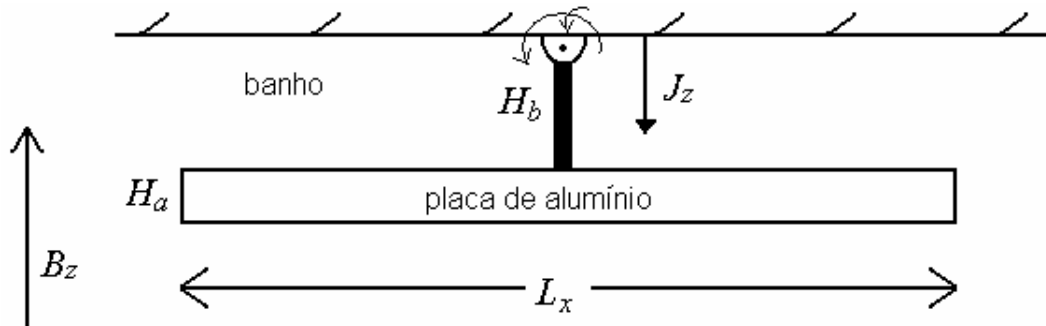


Figura 23: Análogo mecânico à interface banho-metal, proposto por Davidson e Lindsay (1998).

Assumindo-se agora que apareça um pequeno giro inicial da placa ao redor do eixo  $x$ :  $-\theta_x$  gerando uma inclinação da placa ao longo de  $y$ . Um dos lados da placa ( $-y$ ) se aproxima da parede superior, a corrente elétrica entra na placa preferencialmente por este lado para depois se redistribuir pela placa (devido sua alta condutividade elétrica), gerando assim uma densidade de corrente horizontal  $j_y$  dentro da placa. Nesse momento, ocorre o acoplamento entre  $j_y$  e  $B_z$ , gerando uma força na outra direção  $f_x$ .

A força  $f_x$  está em fase com o giro  $-\theta_x$ , esse giro teve de ser acompanhado por uma velocidade  $-v_y$ , que é perpendicular e está fora de fase em  $90^\circ$  com  $f_x$ . A força  $f_x$  gera um giro em torno do eixo  $y$ :  $-\theta_y$ , enquanto  $\theta_x$  e  $f_x$  voltam a ser zero. Com o aparecimento de  $-\theta_y$ , a placa se aproxima da parede superior em  $+x$ , recebendo maior concentração de linhas de corrente elétrica nessa região. A corrente se redistribui dentro da placa aparecendo  $-j_x$ , que combinado com  $B_z$  gera  $f_y$ .

A força  $f_y$  causará uma inclinação  $+\theta_x$  gerando o aparecimento da corrente  $-j_y$  dentro da placa enquanto a parte da placa localizada em  $+y$  se aproxima da parede superior. Nesse ponto,  $-j_y$  se acopla com  $B_z$  gera  $-f_x$ . Analogamente essa nova força induzirá o aparecimento de  $\theta_y$ , a placa se aproxima da parede superior em  $-x$ , aparecendo  $j_x$ , que combinado com  $B_z$  gera  $-f_y$ .

A força  $-f_y$ , por sua vez acarretará novamente um giro na placa em torno do eixo  $x$ ,  $-\theta_{x+\delta x}$ , que deve ser maior em módulo que o  $-\theta_x$  original (imposto no início do ciclo), pois assume-se que não há atrito ou dissipação viscosa e o giro causado pela nova força se soma à inércia de retorno do  $-\theta_x$  inicial. Assim o ciclo se repete indefinidamente, com amplitude sempre crescente. O movimento acoplado, ora na direção  $x$ , ora na direção  $y$ , descrevendo algo parecido com circunferências no plano é parecido com o que se observa na interface banho-metal em uma cuba real, que na literatura recebe o nome de *metal pad rolling*.

A Figura 24 mostra o comportamento das forças geradas dentro da placa pelas correntes elétricas e campo magnético vertical durante um ciclo do análogo mecânico, ilustrando o que foi explicado no parágrafo anterior. Na parte inferior da referida figura aparece uma onda na interface banho-metal conforme é observada dentro da cuba.

Deve-se lembrar que, no caso da cuba real, a oscilação se apresenta mais complexa devido ao fato de  $B_z$  não ser constante e a interface entre líquidos possuir infinitos graus de liberdade (o análogo mecânico só possui 2). Entretanto o mecanismo de formação da instabilidade da interface segue a mesma lógica exposta pelo análogo mecânico.

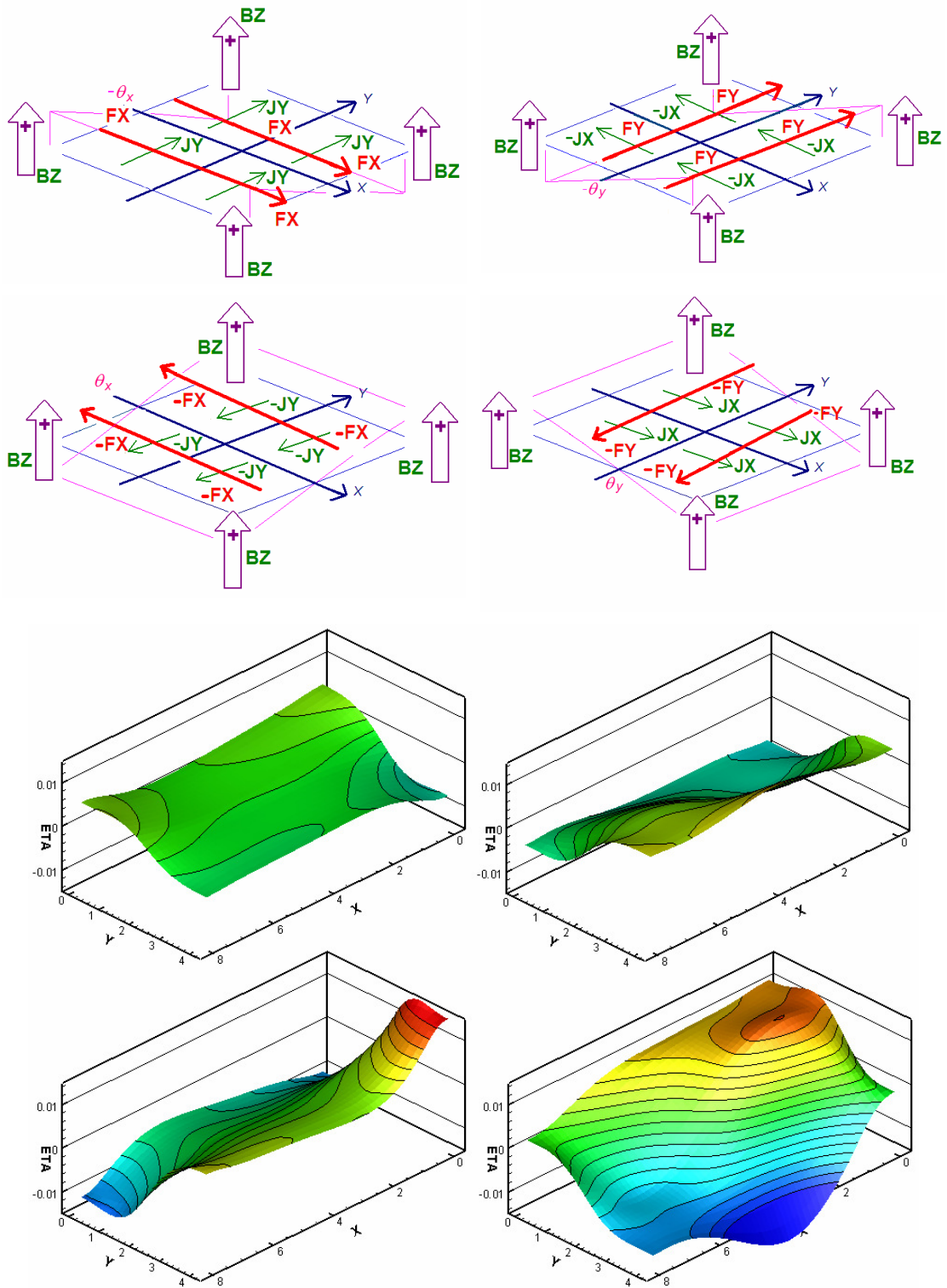


Figura 24: Descrição do comportamento das densidades de corrente (setas verdes), forças (setas vermelhas) e movimentação da placa no análogo mecânico (acima). Onda na interface em uma cuba real (abaixo).

### **3. METODOLOGIA: DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE INSTABILIDADE**

O modelo matemático proposto neste trabalho é derivado a partir das equações de MHD, com suas considerações e simplificações, apresentando alguns avanços na representação da física do problema em relação aos modelos da literatura. As equações diferenciais que fazem parte do modelo são resolvidas através de um algoritmo em programação FORTRAN, desenvolvido pelo autor.

O modelo deve apresentar, como resultado, o formato da interface banho-metal ao longo do tempo modificado pela evolução das forças eletromagnéticas, formando uma onda dentro da cuba eletrolítica.

Subseqüentemente, esses dados são analisados, obtendo-se a taxa de crescimento das ondas na interface entre os dois líquidos. Essa análise permite a delimitação do nível de instabilidade de uma cuba. Quanto mais rápido uma onda dentro da cuba evolui, mais instável é esta cuba. Esses valores de taxa de crescimento das ondas permitem que os objetivos gerais e específicos deste trabalho sejam atingidos.

A validação do modelo desenvolvido será feita em 3 fases, que serão apresentadas nos capítulos 4 e 5:

- Comparação com a solução exata em situações elementares em que existe solução analítica (período gravitacional da onda na interface entre dois líquidos em uma cavidade).
- Comparação com a solução numérica obtida por softwares comerciais já consagrados (para o caso do campo elétrico).
- E finalmente, comparação da oscilação de voltagem obtida pelo modelo e a oscilação de voltagem medida em uma cuba real.

#### **3.1. CONSIDERAÇÕES E SIMPLIFICAÇÕES**

Como já comentado no capítulo anterior, o objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento de um modelo matemático transiente que descreva o comportamento dos fluídos em consequência de uma dada perturbação. É conveniente então que todas as variáveis do sistema sejam decompostas linearmente em uma parte estacionária média



(letras maiúsculas com subscrito 0) e uma parte transiente (em letras minúsculas). Assim, por exemplo, pode-se representar uma variável total qualquer  $\Psi$  da seguinte forma:

$$\Psi = \Psi_0 + \psi(t) \quad (19)$$

As variáveis das equações da simplificação de *Shallow Water* (17) e (18) podem ser decompostas na parte estacionária e transiente:

$$\rho \left( \frac{\partial(\vec{V}_0 + \vec{v})}{\partial t} + (\vec{V}_0 + \vec{v}) \cdot \nabla(\vec{V}_0 + \vec{v}) \right) + \rho g \nabla(H_0 + h) = -\nabla(P_0 + p) + \mu_{eff} (\nabla^2(\vec{V}_0 + \vec{v})) + \vec{F}_0 + \vec{f} \quad (20)$$

$$\nabla \cdot (H_0(\vec{V}_0 + \vec{v}) + h(\vec{V}_0 + \vec{v})) = -\frac{\partial(H_0 + h)}{\partial t} \quad (21)$$

O sistema de equações acima pode ser separado em outros dois sistemas distintos, o primeiro para as variáveis estacionárias médias ( $\Psi_0$ ) onde não há dependência temporal e que deve ser satisfeito:

$$\rho (\vec{V}_0 \cdot \nabla \vec{V}_0) + \rho g \nabla H_0 = -\nabla P_0 + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}_0 + \vec{F}_0 \quad (22)$$

$$\nabla \cdot \vec{V}_0 = 0 \quad (23)$$

As equações (22) e (23) descrevem o escoamento estacionário, e foram utilizadas no trabalho de Severo et al (2005).

A seguir, tem-se o outro sistema de equações, para as os termos com dependência temporal, que é o sistema de interesse para este trabalho, e que também deve ser satisfeito:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \nabla \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{V}_0 + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) + \rho g \nabla h = -\nabla p + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{v} + \vec{f} \quad (24)$$

$$\nabla \cdot (H_0 \vec{v} + h \vec{V}_0 + h \vec{v}) = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (25)$$

Algumas simplificações físicas presentes em trabalhos anteriores serão também aqui adotadas:

- a) As perturbações na velocidade são muito pequenas. Esta simplificação permite a eliminação do termo de perturbação de 2ª ordem ( $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ ).
- b) O escoamento estacionário não tem influência comparável à variação das forças eletromagnéticas na instabilidade,  $\vec{V}_0 = 0$ . Sobre esta simplificação, Sun et al. (2005) mostraram que escoamentos estacionários muito diferentes podem influenciar a taxa de crescimento das ondas em até 10%, mas considerando comparações entre cubas em situações geométricas e magnéticas similares este efeito deve ser muito menor.
- c) A viscosidade não tem influência significativa na geração de instabilidades, por isso ela é negligenciada (URATA et al., 1976),  $\mu_{eff} = 0$ .
- d) Só existe corrente vertical no banho. Como foi comentado, vide Figura 21, isto é decorrência da baixa condutividade do banho em relação ao metal e ao ânodo,  $\vec{J}_b = (0, 0, J_{bz})$ .
- e) Não são incluídas correntes elétricas induzidas no modelo, pois estas são muito menores que as correntes elétricas principais calculadas pelo gradiente do potencial elétrico,  $\sigma(\vec{V} \times \vec{B}) = 0$ . Tradicionalmente os modelos de instabilidade encontrados na literatura fazem esta simplificação. Exemplos: Urata et al. (1976), Sneyd (1992), El-Demerdash et al. (1995), Droste et al. (1998), Davidson e Lindsay (1998), Antille et al. (1999), Leboucher et al. (1999) e Zikanov et al (2004).

Com as simplificações citadas e recordando a notação exemplificada pela equação (19), pode-se reorganizar as equações (24) e (25) da seguinte forma para uma camada de líquido:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho g \nabla h = -\nabla p + \vec{f} \quad (26)$$

$$H(\nabla \cdot \vec{v}) = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (27)$$

### 3.2. MODELO *SHALLOW WATER* PARA O SISTEMA BIFÁSICO BANHO-METAL

Deve-se ressaltar que há dois líquidos sobrepostos e que na interface entre eles as suas pressões são iguais ( $p_a = p_b = p$ ). A variação da altura da camada de banho deve ser igual à variação da camada de alumínio, pois se considera que não há interpenetração de fases ( $h_m = h_b = \eta$ , mas na fonte da equação da continuidade tem-se uma inversão de sinal, pois quando o alumínio sobe de nível há evasão do banho de mesma magnitude naquele ponto). Assim as equações (26) e (27) devem ser reescritas para o domínio do metal e também para o domínio do banho como segue (subscrito “a” relativo à fase alumínio e subscrito “b” relativo à fase banho):

Para a camada de alumínio:

$$\rho_a \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} + \rho_a g \nabla \eta = -\nabla p + \vec{f}_a \quad (28)$$

$$H_a (\nabla \cdot \vec{v}_a) = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (29)$$

Para a camada de banho:

$$\rho_b \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} + \rho_b g \nabla \eta = -\nabla p + \vec{f}_b \quad (30)$$

$$H_b (\nabla \cdot \vec{v}_b) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (31)$$

Aplicando-se o operador divergente nos dois lados das equações (28) e (30), obtém-se:

$$\rho_a \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{v}_a)}{\partial t} + \rho_a g \nabla^2 \eta = -\nabla^2 p + \nabla \cdot \vec{f}_a \quad (32)$$

$$\rho_b \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{v}_b)}{\partial t} + \rho_b g \nabla^2 \eta = -\nabla^2 p + \nabla \cdot \vec{f}_b \quad (33)$$

Os divergentes das velocidades podem ser substituídos utilizando-se as equações (29) e (31):

$$-\frac{\rho_a}{H_a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \rho_a g \nabla^2 \eta = -\nabla^2 p + \nabla \cdot \vec{f}_a \quad (34)$$

$$\frac{\rho_b}{H_b} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \rho_b g \nabla^2 \eta = -\nabla^2 p + \nabla \cdot \vec{f}_b \quad (35)$$

A variável pressão é matematicamente eliminada do sistema quando se subtrai a equação (34) da equação (35):

$$\left( \frac{\rho_a}{H_a} + \frac{\rho_b}{H_b} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (\rho_a - \rho_b) g \nabla^2 \eta = -\nabla \cdot (\vec{f}_a - \vec{f}_b) \quad (36)$$

O resultado é uma única equação de onda com termo fonte que descreve o fenômeno hidrodinâmico transiente para as duas fases com a condição de contorno para as paredes que circundam os fluidos:

$$\left( -(\rho_a - \rho_b) g \nabla \eta + (\vec{f}_a - \vec{f}_b) \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (37)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal apontando em direção às respectivas paredes laterais da cavidade. Esta condição de contorno é consequência da terceira lei de Newton: a força exercida pelos fluidos na parede é igual à reação produzida pela mesma sobre os líquidos, assim a onda que atinge uma parede é rebatida de volta para a cavidade.

A equação (36) é a mesma usada em trabalhos anteriores (URATA et al., 1976, DROSTE et al., 1998) e a condição de contorno (37) é a mesma proposta por Droste et al. (1998). Entretanto, para o cálculo do lado direito da equação (36), será usada uma aproximação mais completa do que nos trabalhos mencionados: será resolvida a equação de Poisson numericamente para o cálculo das correntes elétricas, em cada passo de tempo, ao contrário de trabalhos anteriores onde se utilizava uma equação analítica linear. Isto aumenta a carga computacional necessária, mas permite o cálculo da perturbação elétrica causada pelas ondas com amplitudes comparáveis à da ACD. Note-se também que, tradicionalmente, o termo de perturbação de força de 2ª ordem ( $j \times b$ ) é negligenciado, o que não é feito neste trabalho.

A parte estacionária do campo magnético é considerada conhecida e deve ser calculada por um modelo externo detalhando a geometria de uma linha de cubas (todos os

condutores elétricos internos e externos) e considerando a magnetização das partes de aço (casco da cuba). Este procedimento é abordado em detalhe por Severo et al. (2005) e Schneider (2006).

Procede-se então ao tratamento do termo fonte  $-\nabla \cdot (\vec{f}_a - \vec{f}_b)$  da equação (36) onde aparecem as perturbações nas forças eletromagnéticas. Utilizando a equação (13), com as simplificações (a), (b) e (e), obtêm-se:

$$\vec{F}_0 + \vec{f} = (\vec{J}_0 + \vec{j}) \times (\vec{B}_0 + \vec{b}) \quad (38)$$

Eliminando-se a parte estacionária e recordando-se a convenção apresentada pela equação (19), obtêm-se:

$$\vec{f} = (\vec{J}_0 \times \vec{b}) + (\vec{j} \times \vec{B}_0) + (\vec{j} \times \vec{b}) = (\vec{J} \times \vec{b}) + (\vec{j} \times \vec{B}_0) \quad (39)$$

Assim, a inclusão do termo de perturbação de força de 2ª ordem ( $j \times b$ ) torna a presente formulação mais completa que a apresentada pelos trabalhos anteriores.

Na interface, a densidade de corrente elétrica vertical é igual no banho e no metal (Figura 21) (URATA et al, 1976), tanto na parte estacionária como na transiente,  $J_{az}=J_{bz}=J_z$ , assim como todas componentes do campo magnético,  $\vec{B}_a = \vec{B}_b = \vec{B}$ .

As densidades de corrente elétrica, estacionárias e transientes, são calculadas através do método dos Volumes Finitos aplicado às equações (10) e (11). Lembrando que as componentes estacionárias do campo magnético são consideradas *a priori*, as componentes transientes dos campos magnéticos são calculadas a partir das componentes transientes das correntes elétricas pela lei de Biot-Savart, em cada passo de tempo:

$$\vec{b} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} d(volC) \quad (40)$$

Deve-se ressaltar que na aproximação de *Shallow Water*, as camadas de fluido são consideradas muito finas de modo que não há variação vertical de campo.

As correntes perturbadas do banho são puramente verticais, logo geram apenas perturbações magnéticas horizontais, tanto no banho, quanto no metal, o mesmo vale para as correntes perturbadas verticais do metal (conseqüência do produto vetorial que é a lei de

Biot-Savart). Já as correntes perturbadas horizontais do metal geram perturbações magnéticas verticais no próprio metal e no banho e perturbações magnéticas horizontais apenas no banho.

A montagem do produto vetorial que expressa as forças transientes está apresentada nas equações (41) e (42):

$$\vec{f}_a = (j_{ax}, j_{ay}, j_z) \times (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}) + (J_{ax}, J_{ay}, J_z) \times (b_{x\perp}, b_{y\perp}, b_{z\parallel}) \quad (41)$$

$$\vec{f}_b = (0, 0, j_z) \times (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}) + (0, 0, J_z) \times (b_{x\perp} + b_{x\parallel}, b_{y\perp} + b_{y\parallel}, b_{z\parallel}) \quad (42)$$

Assim, as perturbações nas forças eletromagnéticas podem ser expressas na forma bidimensional de interesse para as equações de *Shallow Water*:

$$\vec{f}_a = \begin{pmatrix} j_{ay}B_{0z} - j_zB_{0y} + J_{ay}b_{z\parallel} - J_zb_{y\perp} \\ j_zB_{0x} - j_{ax}B_{0z} + J_zb_{x\perp} - J_{ax}b_{z\parallel} \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\vec{f}_b = \begin{pmatrix} -j_zB_{0y} - J_zb_{y\parallel} - J_zb_{y\perp} \\ j_zB_{0x} + J_zb_{x\parallel} + J_zb_{x\perp} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Onde  $b_{x\perp}$ ,  $b_{y\perp}$  são perturbações no campo magnético devido à corrente vertical transiente ( $j_z$ ), e  $b_{x\parallel}$ ,  $b_{y\parallel}$ ,  $b_{z\parallel}$  são as perturbações magnéticas geradas pelas correntes horizontais transientes do metal ( $j_{ax}$ ,  $j_{ay}$ ).

Substituindo os vetores (43) e (44) no termo fonte, que é o lado direito da equação (36), e fazendo os devidos cancelamentos:

$$-\nabla \cdot (\vec{f}_a - \vec{f}_b) = -\nabla \cdot (j_{ay}B_{0z} + J_{ay}b_{z\parallel} + J_zb_{y\parallel}, -j_{ax}B_{0z} - J_{ax}b_{z\parallel} - J_zb_{x\parallel}) \quad (45)$$

Finalmente, operando o divergente do termo fonte, obtém-se a equação de onda utilizada pelo modelo de instabilidade aqui proposto, na sua forma escalar:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho_a}{H_a} + \frac{\rho_b}{H_b} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (\rho_a - \rho_b) g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = \\ & \frac{\partial (j_{ay}B_{0z} + J_{ay}b_{z\parallel} + J_zb_{y\parallel})}{\partial x} - \frac{\partial (-j_{ax}B_{0z} - J_{ax}b_{z\parallel} - J_zb_{x\parallel})}{\partial y} \end{aligned} \quad (46)$$

As condições de contorno, para as paredes da cavidade são:

$$\left(-(\rho_a - \rho_b)g\nabla\eta + (j_{ay}B_{0z} + J_{ay}b_{z\parallel} + J_z b_{y\parallel} - j_{ax}B_{0z} - J_{ax}b_{z\parallel} - J_z b_{x\parallel})\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (47)$$

Lembrando as equações para as correntes elétricas:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = 0 \quad (48)$$

$$J = -\sigma \nabla \Phi \quad (49)$$

Com as condições de contorno:

- No equipotencial anódico (viga anódica, o modelo elétrico inclui os anodos):

- 

$$\Phi = 0 \quad (50)$$

- Na fronteira do metal com o bloco catódico: o campo de  $J_{0z}$  fornecido externamente pelo modelo eletromagnético detalhado tridimensional, como apresentado por Schneider (2006). A corrente vertical nessa fronteira não varia com o tempo:

$$J_{0z} = J_{0z}(x, y) \quad (51)$$

$$j_z = 0 \quad (52)$$

- Nas paredes laterais (*ledge*) onde não há fluxo de corrente elétrica:

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (53)$$

A solução deste conjunto de equações (46) a (53), com o auxílio da Lei de Biot-Savart - equação (40) – é o modelo de instabilidade para cubas de redução do alumínio proposto por este trabalho, em que o algoritmo numérico também é desenvolvido por este autor.

### 3.3. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES

Este trabalho não objetiva uma discussão aprofundada sobre métodos numéricos de solução para equações diferenciais. Serão mencionadas sim, as estratégias e métodos utilizados no algoritmo de solução, que foi escrito em linguagem computacional FORTRAN.

Para as equações elétricas foi utilizado o método dos Volumes Finitos, já consagrado conforme mostrado na bibliografia (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 1995; MALISKA, 1995), as equações elétricas são resolvidas em cada passo de tempo. A lei de Biot-Savart foi calculada por integração numérica em cada ponto discretizado do modelo.

Para a equação de onda, um algoritmo de marcha conforme descrito por Versteeg e Malalasekera (1995) foi adotado e utilizou-se o tradicional método das Diferenças Finitas. Neste caso a solução da equação (que é a forma da onda) em cada passo de tempo depende da solução do passo anterior. Como resultado, obtém-se a deformação da interface ao longo do tempo.

### 3.4. CRITÉRIO DE INSTABILIDADE

Uma vez que o crescimento das ondas na interface banho-metal é calculado, deve-se adotar um critério objetivo para que se possam diferenciar as cubas mais estáveis das menos estáveis. O critério adotado por este trabalho já é bastante consagrado pela literatura (URATA, 1985; SNEYD, 1992; EL-DEMERDASH et al., 1995; DROSTE et al., 1998; ANTILLE et al., 1999), e consiste na taxa de crescimento das ondas dentro da cavidade.

Como a viscosidade foi considerada igual à zero, partindo-se de uma pequena perturbação na interface, as ondas seguem ganhando energia sem ocorrer dissipação, até o momento em que a amplitude da onda alcança a metade da dimensão da ACD. Neste ponto a simulação é concluída, pois as ondas maiores próximas à situação de curto-circuito (alumínio tocando o anodo) não devem ser calculadas por este tipo de modelo, devido à forte concentração de corrente que ocorre nesta situação.

Depois de concluída a simulação, avalia-se a velocidade com que as ondas crescem dentro da cuba. Uma cuba mais estável apresenta taxa de crescimento das ondas menor e demora mais tempo até atingir o ponto crítico da simulação (amplitude de corte).



A Figura 25 mostra um exemplo de evolução da interface desde seu estado não-deformado até a amplitude de corte. Nota-se a presença de um modo de vibração característico construído pela configuração eletromagnética da cuba. Os picos e vales movimentam-se no padrão circular que é o *metal pad rolling* mencionado na literatura.

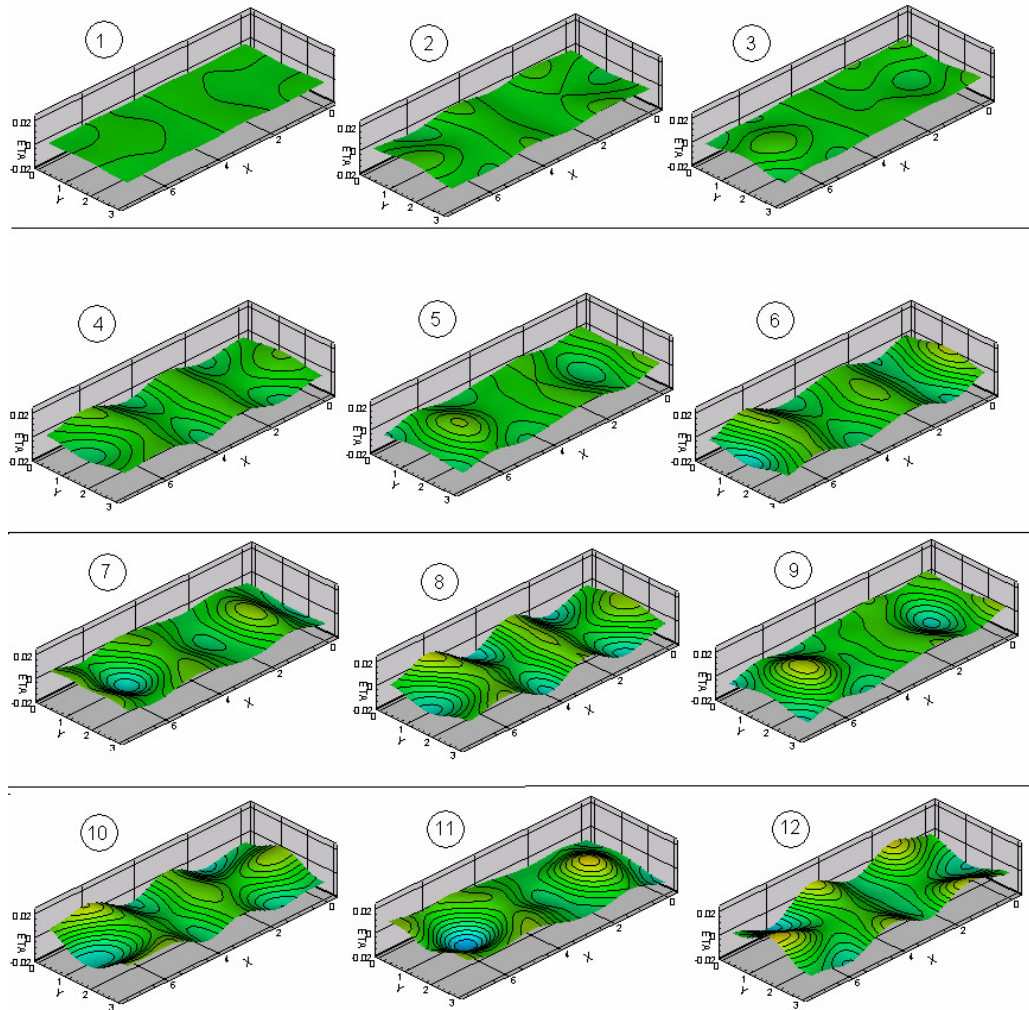


Figura 25: Resultado da simulação da instabilidade em um caso teste, uma cuba fictícia de 180 kA.

A Figura 26 mostra o comportamento de um ponto na interface para a mesma cuba submetida a dois campos magnéticos diferentes. O ponto considerado localiza-se no centro do quadrante dos “x” negativos e “y” negativos seguindo o sistema de coordenadas do capítulo 2. Nota-se a presença de uma onda com frequência bem definida e amplitude crescente em ambas as curvas, mas com a diferença de que no caso do campo magnético não compensado o crescimento é mais rápido.

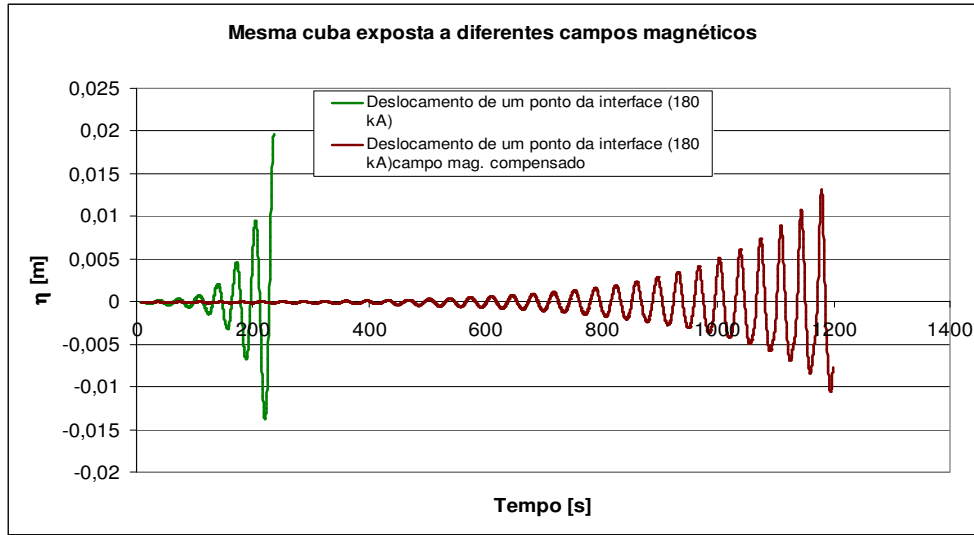


Figura 26: Resultado da simulação da instabilidade (monitoramento da posição de um ponto da interface) em um caso teste, uma cuba fictícia de 180 kA, submetida a duas situações magnéticas diferentes.

A taxa de crescimento das ondas, referida na literatura como *Growth Rate* é calculada, neste trabalho, a partir da resposta do modelo analisando-se a evolução da integração do deslocamento médio  $\eta_M$  da interface em relação à interface não perturbada que é dado pela equação (54):

$$\eta_M(t) = \frac{\int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} |\eta(x, y, t)| dx dy}{L_x L_y} \quad (54)$$

A curva  $\eta_M$  possui tipicamente a forma mostrada nas linhas azul e vermelha da Figura 27 que pode ser correlacionada com uma curva exponencial simples do tipo:

$$\eta_M(t) \cong A e^{G_R t} \quad (55)$$

Onde  $A$  e  $G_R$  são constantes calculadas através do método de aproximação dos mínimos quadrados.  $G_R$  é o fator exponencial da equação exprimindo assim o crescimento de  $\eta_M$  ao longo do tempo. Assim, encontra-se o parâmetro usado como critério de instabilidade  $G_R$  (*Growth Rate*) onde se podem comparar cubas diferentes com um único número.

A Figura 27 mostra o monitoramento do crescimento do deslocamento médio das ondas ( $\eta_M$ ) para a mesma cuba submetida a dois diferentes campos magnéticos. É evidente

que o campo não compensado produz uma taxa de crescimento maior que a do campo compensado, onde o gráfico de barras mostra os valores de  $G_R$  para os dois casos.

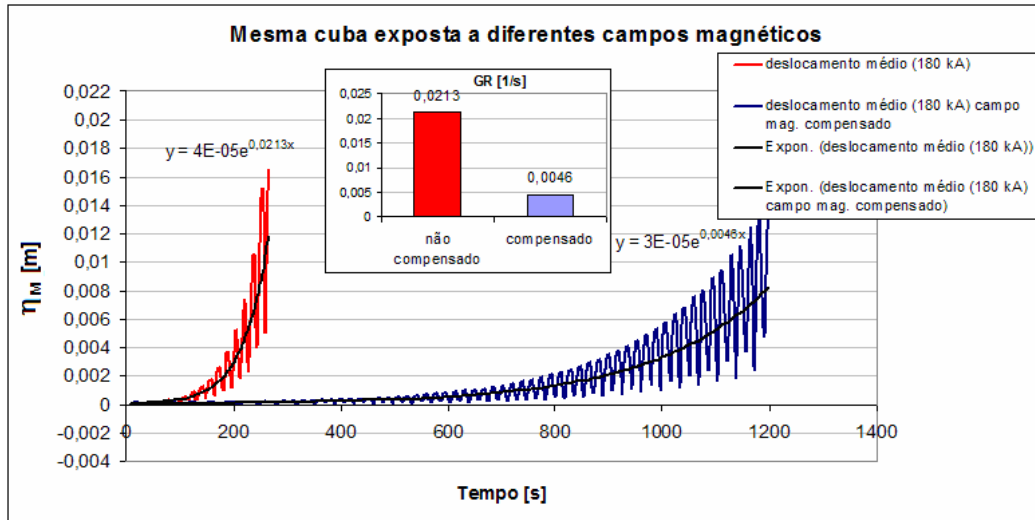


Figura 27: Evolução de  $\eta_M$  para uma cuba teste (180 kA) submetida a 2 configurações diferentes de campo magnético, e cálculo de  $G_R$  através do método dos mínimos quadrados.

Uma vez que toda a metodologia de funcionamento do modelo foi explanada, um resumo de todas as entradas e saídas relativas ao funcionamento do modelo é apresentado na Figura 28.

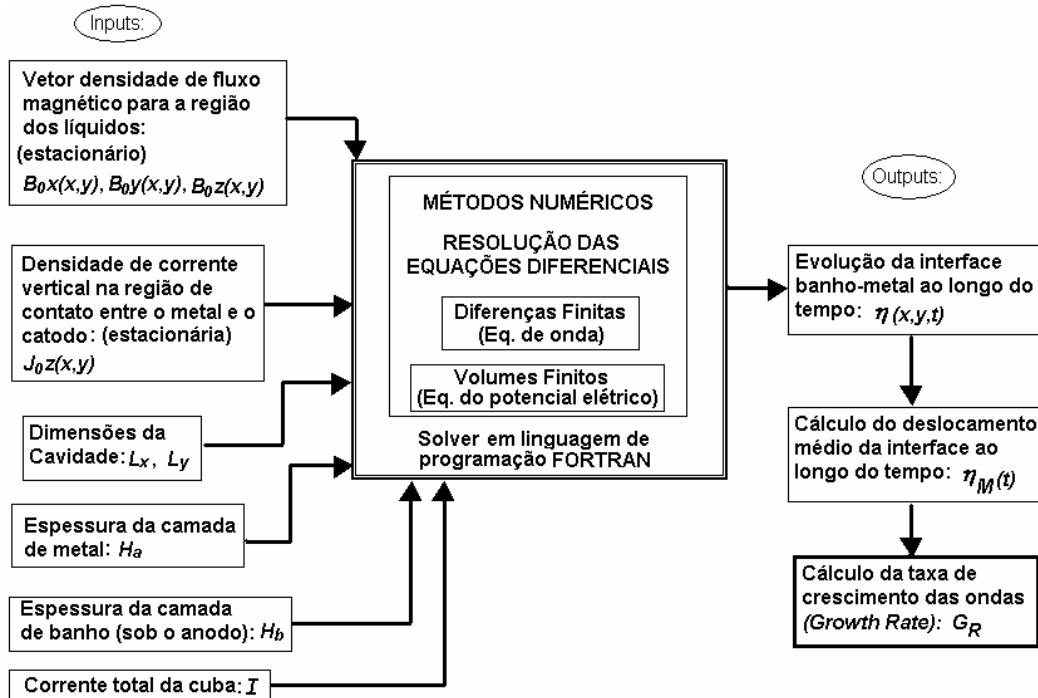


Figura 28: Resumo de todas as entradas e saídas do modelo de instabilidade.

## 4. TESTES NUMÉRICOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

### 4.1. TESTES RELATIVOS À EXATIDÃO NUMÉRICA

As duas equações diferenciais resolvidas simultaneamente no modelo são: uma equação de onda e uma equação de difusão elétrica. A seguir serão apresentadas comprovações de que a resposta dada pelo modelo é aproximadamente igual à que é obtida analiticamente ou por outros métodos numéricos consagrados.

#### 4.1.1. Validação da Solução da Equação de Onda

Um modo de testar o algoritmo de solução da equação transiente de onda é calcular numericamente os modos de ressonância gravitacionais para uma interface entre dois líquidos, conforme foi realizado por Potočnik (1989). Esses cálculos possuem soluções analíticas com as quais se podem comparar as respostas do modelo. Eles correspondem à solução da equação (46) com o termo fonte igual a zero (sem forças eletromagnéticas).

O período de oscilação das ondas gravitacionais em uma cavidade é dado por:

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_a \coth(kH_a) + \rho_b \coth(kH_b)}{kg(\rho_a - \rho_b)}} \quad (56)$$

Onde  $k$  é o número de onda para a interface dado por:

$$k = \pi \sqrt{\frac{m_x^2}{L_x^2} + \frac{m_y^2}{L_y^2}} \quad (57)$$

E  $m_x$  e  $m_y$  são números inteiros que representam os modos de ressonância (harmônicos) de cada direção horizontal da cavidade.

Considere-se um caso onde a cuba de interesse possui  $L_x=7,36$  m e  $L_y=2,92$  m com  $H_b=0.045$  m  $H_a=0.2$  m,  $\rho_a=2270$  kg/m<sup>3</sup> e  $\rho_b=2070$  kg/m<sup>3</sup>.

A Figura 29 mostra as ondas gravitacionais calculadas pelo modelo para diversos pares de números de onda. É importante ressaltar que as ondas da figura mencionada são idealizadas com o estrito objetivo de validação do algoritmo de solução numérica frente ao cálculo analítico. Nota-se que o software desenvolvido consegue descrever com precisão

tanto ondas longas (baixos números de onda) como ondas mais curtas (altos números de onda, par extremo testado: (9,5)).

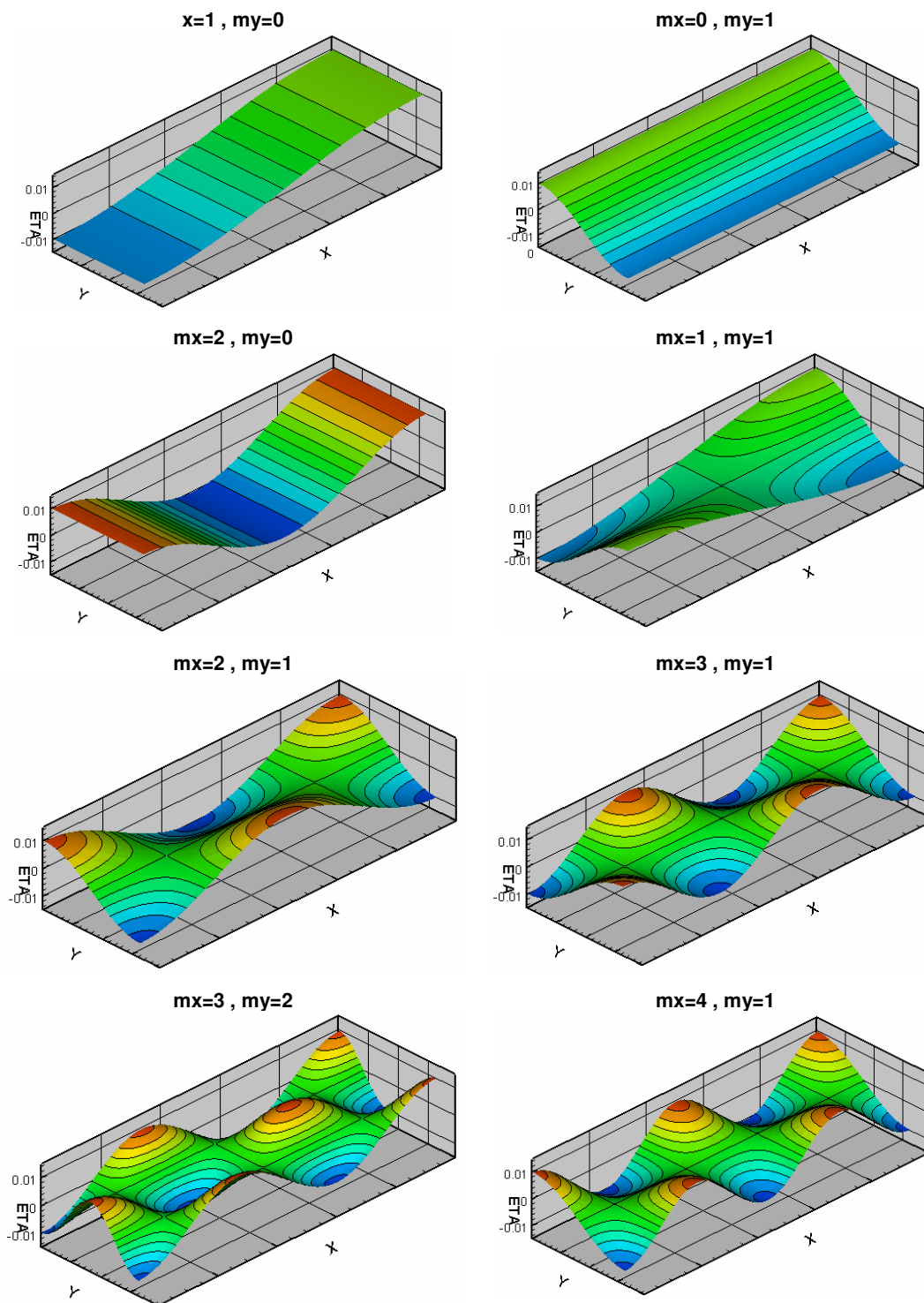


Figura 29a: Onda gravitacional na cavidade da cuba, para diversas combinações de  $m_x$  e  $m_y$ .

...continuação

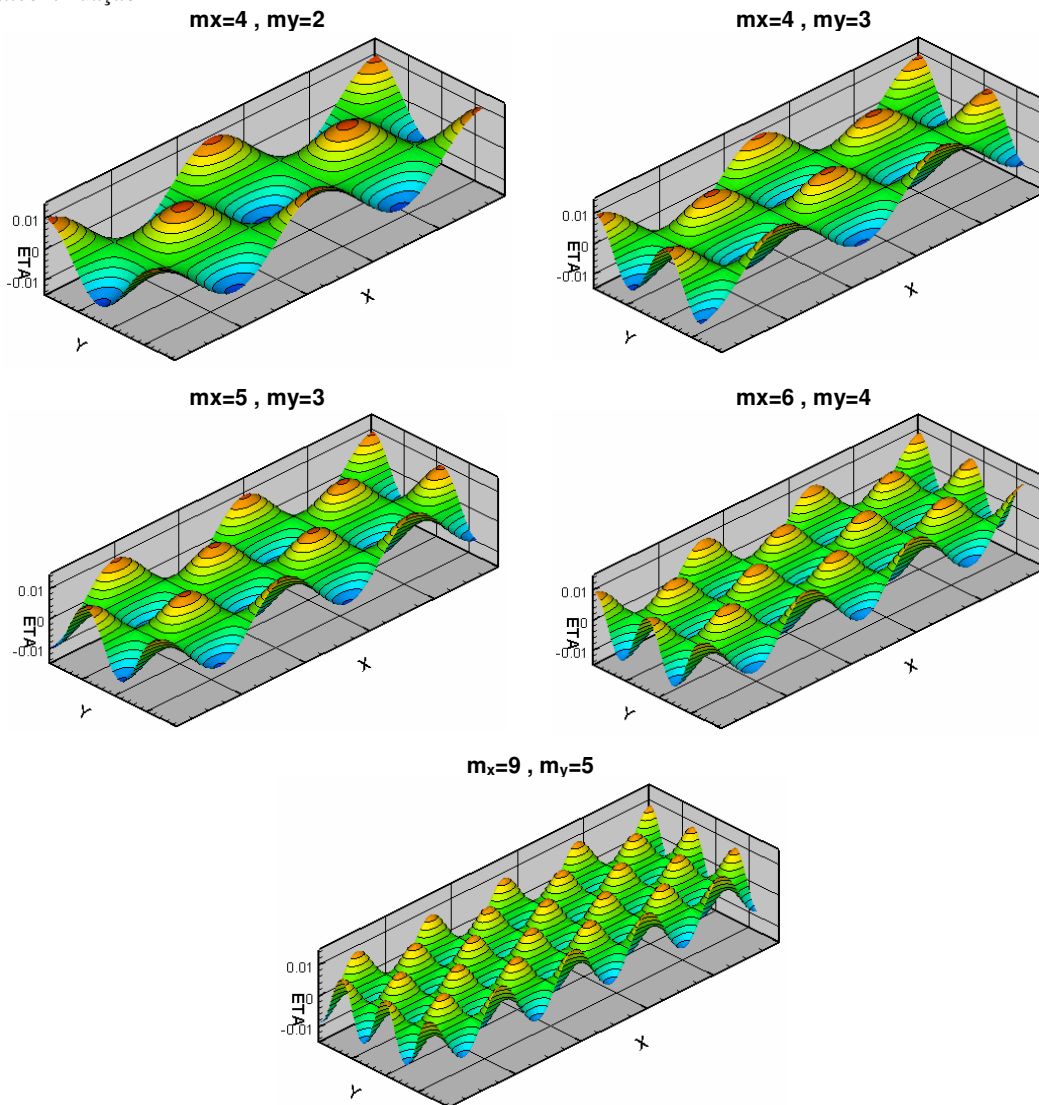


Figura 29b: Onda gravitacional na cavidade da cuba, para diversas combinações de  $m_x$  e  $m_y$ .

Quando uma cuba se torna instável, as ondas que aparecem geralmente formam uma superposição linear de alguns poucos modos de baixo número de onda ( $m_x=0, 1, 2, 3$  e  $m_y=0, 1, 2$ ) e o período dessa composição não é igual a nenhum modo gravitacional, pois ele é modificado pelas forças eletromagnéticas. No entanto, se o *software* é capaz de descrever adequadamente as ondas simples, também é capaz de descrever as situações mais complexas presentes na cuba real, pois computacionalmente e numericamente a exigência é a mesma.

Para a realização destes testes, a malha bidimensional utilizada possui 100 divisões na direção  $x$  e 40 divisões na direção  $y$ . O passo temporal utilizado foi de 0,001s. É

característica dos algoritmos de solução de marcha necessitar passos de tempo bem curtos, mas possuem a vantagem de possuir solução rápida e não iterativa para cada um desses passos de tempo. Caso houvesse interesse em maior exatidão numérica nos modos de vibração de curto período, a malha deveria ser refinada possibilitando melhor discretização espacial da onda na interface.

Como não há efeitos viscosos, quando a onda gravitacional está presente na cavidade ela não deve ser amortecida, a não ser pela viscosidade numérica (difusão) que deve ser mantida a menor possível, entretanto é impossível de ser evitada por completo, uma vez que é inerente aos métodos numéricos. A Tabela 2, que será apresentada a seguir, mostra o grau de difusão numérica presente em cada simulação.

A Figura 30 mostra uma onda calculada pelo modelo com leve amortecimento. A taxa de amortecimento calculada para os casos da Tabela 2 sempre ficou nas proximidades de 0,0002 [1/s] (aumentando, com a diminuição do período), o que foi considerado satisfatório. Como visto na Figura 27, por exemplo, a taxa de crescimento de ondas instáveis é da ordem de  $\sim 0,01$  [1/s]. A influência da difusão numérica no resultado final fica então em torno de 2%.

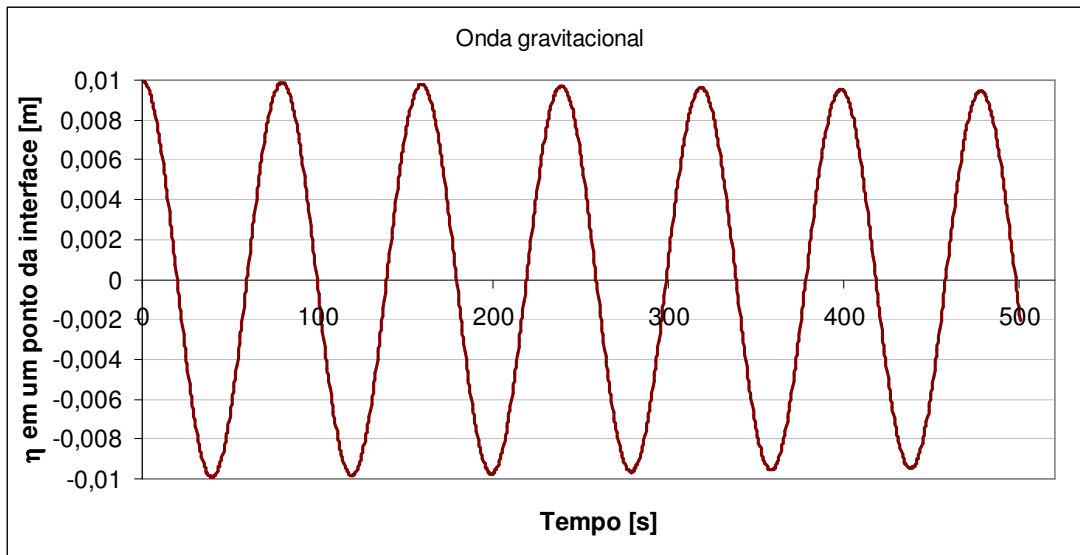


Figura 30: Deslocamento de um ponto na onda gravitacional ( $m_x=1, m_y=0$ ) amortecida: taxa de amortecimento=0,000113 [1/s].

A Tabela 2 mostra os resultados analíticos de alguns modos de ressonância calculados pela equação (56) para diversas combinações de  $m_x$  e  $m_y$  (definidos pela perturbação inicial imposta na interface), e também os mesmos casos calculados numericamente.

Tabela 2: Períodos das ondas gravitacionais calculados analiticamente e numericamente.

Número de onda longitudinal $m_x$	Número de onda transversal $m_y$	Período da onda $T_x$ [s] Solução exata	Período da onda [s] Solução numérica (modelo)	Diferença percentual	Amortecimento devido à difusão numérica [1/s]
1	0	79,61	79,58	-0,04%	0,000113
0	1	31,63	31,60	-0,09%	0,000151
1	1	29,41	29,41	0,00%	0,000172
2	0	39,84	39,83	-0,03%	0,000112
2	1	24,81	24,77	-0,16%	0,000179
3	1	20,40	20,32	-0,39%	0,000190
3	2	13,70	13,59	-0,80%	0,000189
4	1	16,94	16,85	-0,53%	0,000186
4	2	12,51	12,40	-0,88%	0,000199
4	3	9,49	9,34	-1,58%	0,000241
5	3	8,98	8,80	-2,00%	0,000246
6	4	7,04	6,81	-3,27%	0,000239
9	5	5,46	5,18	-5,13%	0,000358

Analisando-se os dados da Tabela 2 se percebe que a resposta do modelo numérico é próxima da solução exata, com a maior diferença ficando em -5,13% considerando-se os modos harmônicos testados. Vale lembrar que os modos de vibração normalmente experimentados por uma cuba possuem período entre 20 s e 80 s, dependendo do tamanho da cavidade de cada tecnologia, e os números de onda ( $m_x$  e  $m_y$ ) geralmente são menores que 3, casos em que o erro numérico sempre ficou abaixo de 0,2%. Na Figura 31 é apresentado um gráfico da correlação entre os dois resultados, onde se verificou um coeficiente de regressão linear superior a 0,9999 validando o algoritmo de solução para a equação de onda (46).

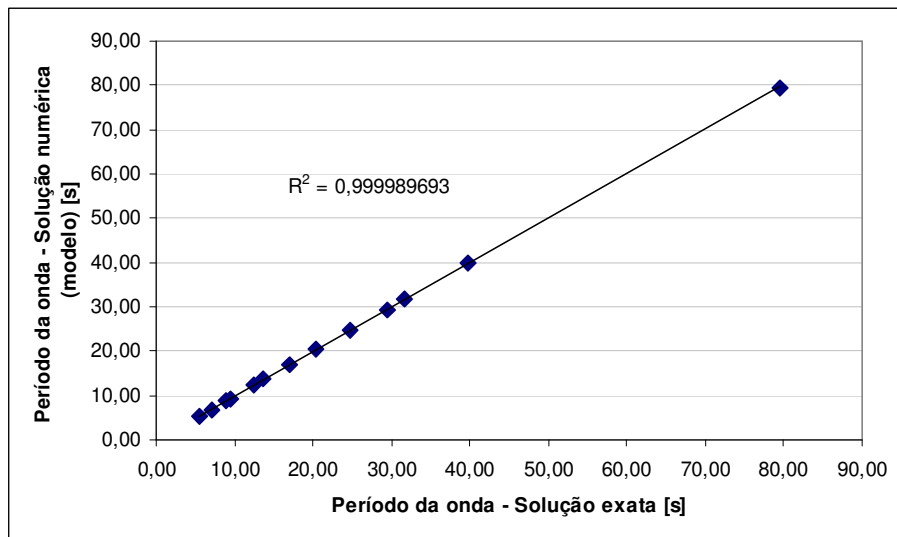


Figura 31: Correlação entre os resultados analíticos e numéricos para o período das ondas gravitacionais.



#### 4.1.2. Validação da Solução da Equação de Difusão Elétrica

Schneider (2006) calculou a densidade de corrente no metal pelo método dos Elementos Finitos tridimensional fazendo uso do software comercial ANSYS®. Assim, para validar os resultados da solução da equação elétrica, realizou-se a comparação desses resultados com os obtidos pelo modelo desenvolvido nesse trabalho.

Essa comparação é apresentada nas Figuras 32 e 33 onde primeiramente é reproduzido o campo vetorial de correntes horizontais no meio da altura do metal obtido pelo referido trabalho e depois é mostrado o mesmo resultado obtido por este autor.

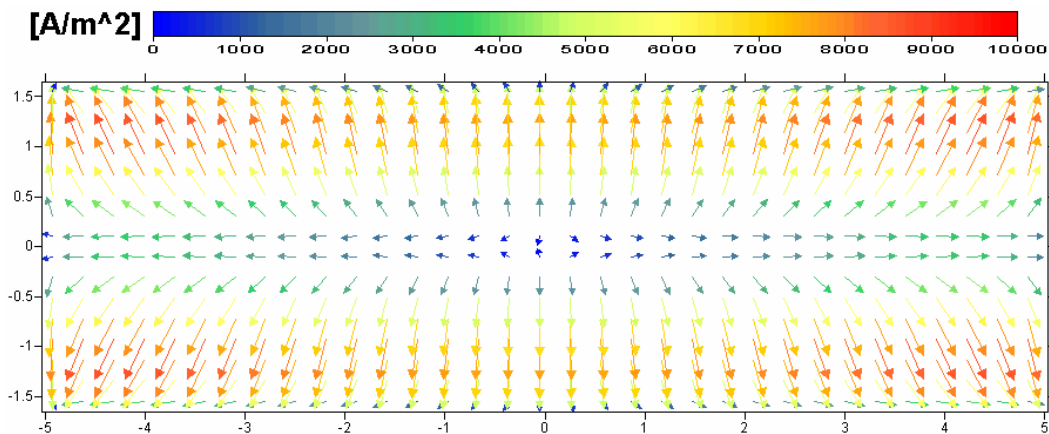


Figura 32: Distribuição das correntes horizontais obtida num plano horizontal do meio da altura do metal para a Situação D do referido trabalho (SCHNEIDER, 2006). Máxima magnitude: 8773,32 [A/m<sup>2</sup>].

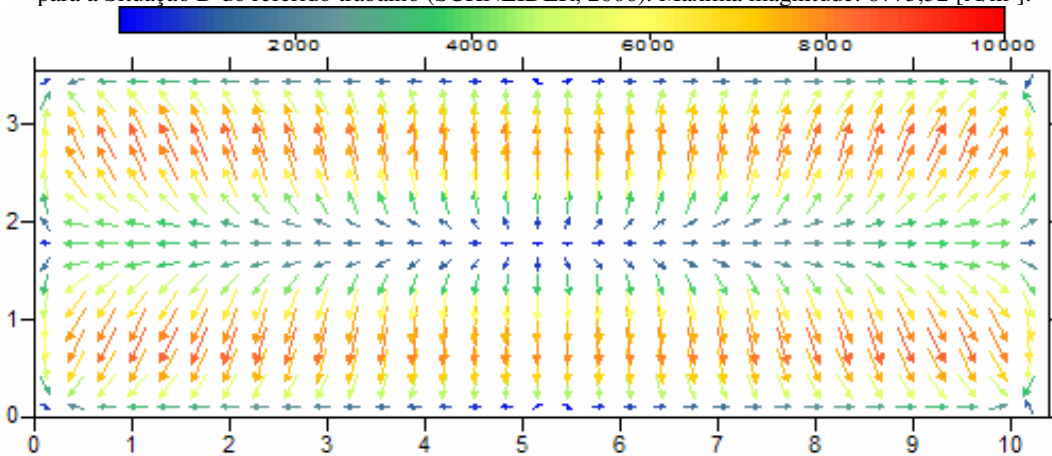


Figura 33: Distribuição das correntes horizontais obtida no plano horizontal do meio do metal pelo modelo de instabilidade desenvolvido neste trabalho. Máxima magnitude: 8864,82 [A/m<sup>2</sup>].

Observa-se que as duas figuras apresentam grande semelhança, encontrando-se aproximadamente 1% de diferença nos valores máximos. As diferenças devem-se aos efeitos 3D presentes no referido trabalho anterior. Sabe-se que o nível de diferença observado não é suficiente para modificar o padrão de instabilidade da cuba. Além disso,

muitas perturbações corriqueiras que ocorrem na cuba (imperfeições geométricas, trocas de anodo, desgaste nos catodos) causam distúrbios na corrente elétrica no metal muito mais pronunciados.

Assim, conclui-se que apesar de mais simplificado (bidimensional), o cálculo realizado pelo modelo de instabilidade representa bem as correntes elétricas dentro dos líquidos da cuba em relação ao cálculo efetuado pelo software tridimensional.

#### 4.2. VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL: MEDIÇÕES DA QUEDA DE VOLTAGEM DA CUBA NA PLANTA COMPARADA AOS RESULTADOS NUMÉRICOS

Em uma planta de redução de alumínio, o monitoramento da voltagem nas cubas é um procedimento rotineiro. Esse monitoramento é utilizado como variável de controle da ACD. Além disso, outra função desse monitoramento é a de detectar problemas de funcionamento tais como: efeito anódico (fenômeno que causa aumento demasiado da queda de voltagem na cuba) e aparecimento de ondas de excessiva amplitude na interface.

Quando as ondas atingem determinada amplitude, a cuba é declarada instável pelo sistema de controle da cuba, que age de modo a estabilizar a cuba novamente, aumentando a ACD. A Figura 34 mostra a voltagem de uma cuba durante o aparecimento da instabilidade da interface e de seu controle devido à ação do sistema, aumentando a ACD.

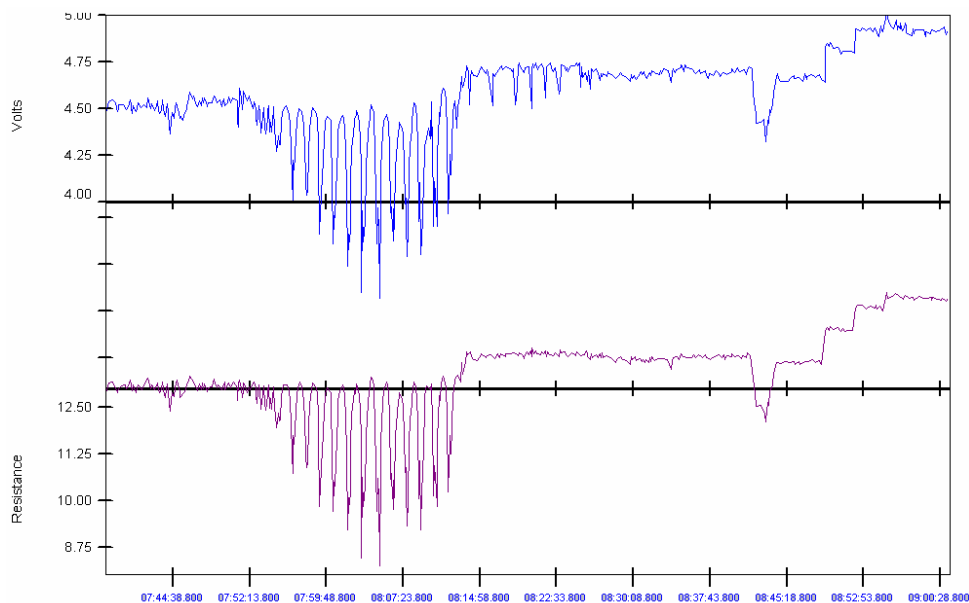


Figura 34: Monitoramento da voltagem (acima) e resistência da cuba (abaixo) durante o processo de crescimento de ondas instáveis, e subsequente controle através do aumento da ACD.

Estes dados são de uma planta localizada no Brasil, para mesma cuba utilizada para a validação do modelo magnético de Schneider (2006). O gráfico cobre o monitoramento de mais de uma hora de processo, tanto da voltagem quanto da resistência elétrica total da cuba.

O interesse do presente trabalho se concentra no surgimento da instabilidade e no crescimento das ondas ( $T_s \sim 20s$  a  $100s$ ), mostrado na Figura 35, que é uma ampliação do gráfico anterior na região de interesse.

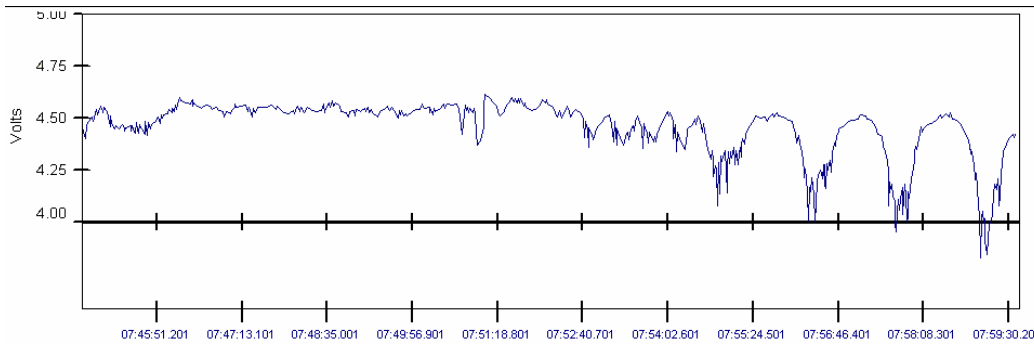


Figura 35: Voltagem monitorada durante aparecimento de ondas instáveis (região ampliada da Figura 34).

As ondas, quando em pequena amplitude, apresentam um determinado período governado pelo tamanho da cuba, espessura das camadas de fluido e campo magnético. Já em estágio de grandes amplitudes o período característico das ondas muda, em consequência das distorções locais na espessura dos fluidos e no campo magnético. Ativando-se a resolução do modelo considerando todas as componentes perturbadas das forças de Lorentz (ver equação (46), pág. 38), os resultados apresentam o mesmo comportamento quanto ao período das ondas em baixas e grandes amplitudes, como mostra a Figura 36.

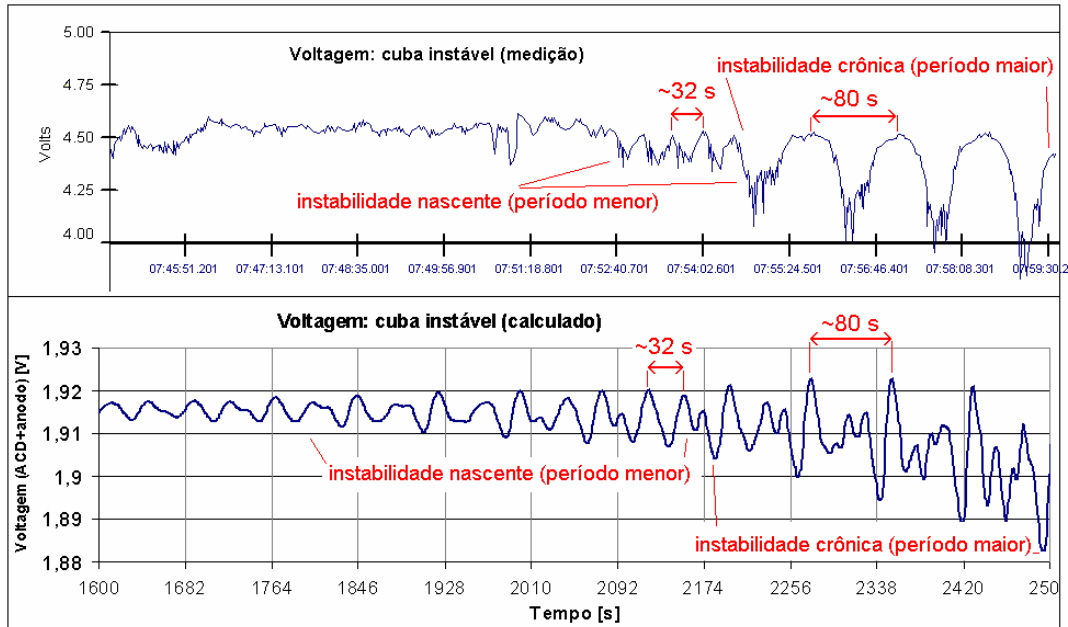


Figura 36: Instabilidade na voltagem, medida (acima) e calculada (abaixo), mostrando semelhança encontrada entre as frequências iniciais e terminais das ondas.

Deve-se ressaltar aqui que as oscilações de alta frequência ( $T_s \sim 0,5s$  a  $3,0s$ ) presentes no gráfico de medição são causadas pela formação e desprendimento de bolhas de  $CO_2$  na região do anodo (BEREZIN et al., 2003). Ondas nessa frequência nada têm a ver com instabilidade MHD da interface e não serão abordadas neste trabalho, apesar de estarem linearmente superpostas nos gráficos de medição de voltagem.

Mesmo considerando que o modelo de instabilidade contém várias simplificações no que tange à complexa física presente neste processo, obteve-se concordância nos períodos das oscilações encontrados, experimental e numericamente, durante a evolução da onda. Isso significa que toda a metodologia de cálculo foi implementada com consistência, desde o cálculo do campo magnético estacionário externo (que não é abordado aqui), até a evolução da onda instável da interface, passando pelo cálculo correto das densidades de corrente elétricas e das perturbações magnéticas geradas pelas mesmas. Pode-se concluir também, que as simplificações adotadas pelo modelo são razoáveis e não implicam em perda significativa da descrição do fenômeno de instabilidade.

## 5. APLICAÇÕES DO MODELO: RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, serão apresentados os resultados dos cálculos relativos aos objetivos gerais e específicos deste trabalho, além da discussão pertinente a estes resultados.

### 5.1. CÁLCULO DA INSTABILIDADE NA INTERFACE BANHO-METAL EM UM PROJETO REAL DE CUBA

A cuba real escolhida para a apresentação destes resultados é a mesma apresentada por Schneider (2006), cujos campos magnéticos foram calculados e apresentados naquele trabalho e estão reproduzidos na Figura 37:

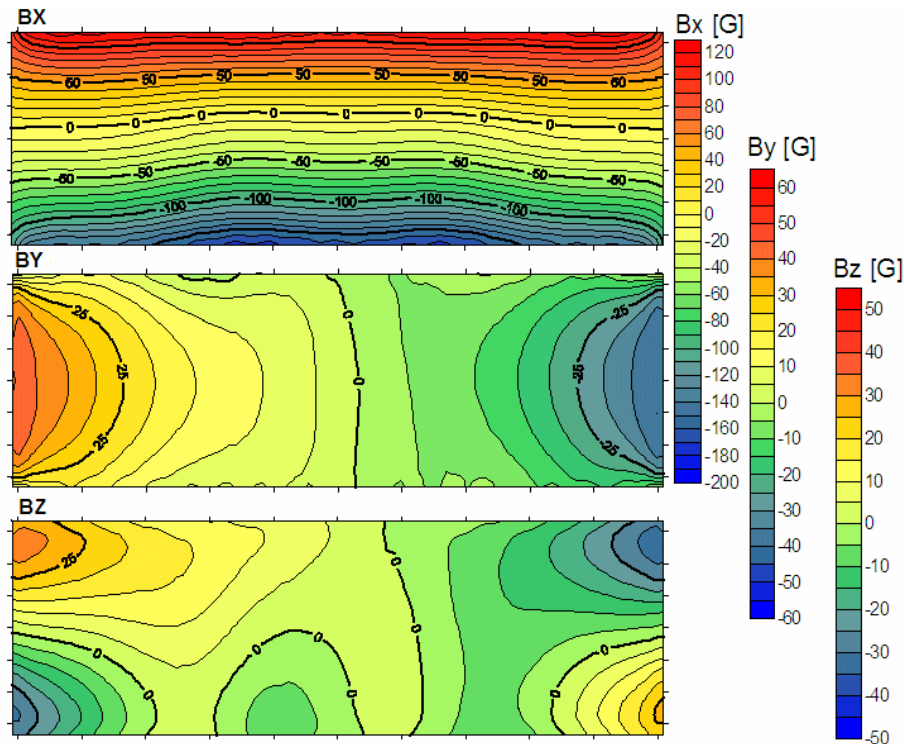


Figura 37: Distribuições das 3 componentes de  $\vec{B}$  obtida por Schneider (2006) para o casco detalhado e  $f_{An} = 3,0$ , daquele trabalho.

Trata-se de uma cuba *side-by-side*, com 4 *side risers* e que utiliza 24 anodos pré-cozidos. A corrente de operação é de 240 kA. As dimensões da cavidade são:  $L_x=10,13$  m e  $L_y=3,34$  m. A espessura da camada de metal é considerada igual à 20 cm e o ACD igual à 45 mm.

A distribuição de  $J_{0z}(x,y)$  na região do catodo que está em contato com o metal também é fornecida como condição de contorno externa calculada pelo modelo magnético tridimensional detalhado, mostrada na Figura 38 .

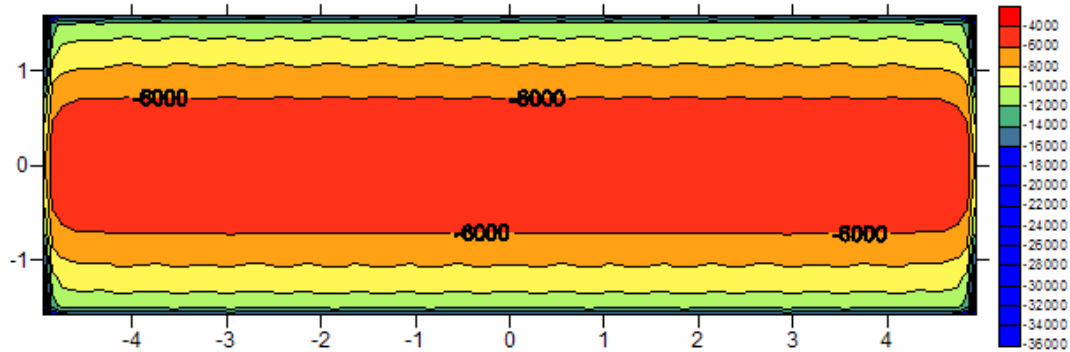


Figura 38: Distribuição da corrente elétrica vertical que passa do metal líquido para o catodo, fornecida pelo modelo completo 3D (SCHNEIDER, 2006).

Utilizando-se o modelo apresentado neste trabalho, observou-se o crescimento de ondas ao longo do tempo, conforme mostrado nas Figura 39. A simulação começa quando uma pequena perturbação na interface é imposta, a seguir ocorre o ganho retro-alimentado de energia dessa perturbação criando uma onda bidimensional na interface banho-metal de amplitude sempre crescente como se pode acompanhar na referida figura. Aparece um modo de vibração característico de cubas instáveis (*metal pad roll*) com os picos e vales mudando suas posições ao longo do tempo, formando 2 padrões circulares simétricos em cada lado da cuba (TE e DE).

O intervalo de tempo entre dois *frames* subsequentes é de 10 segundos, sendo que o período da onda resultante ficou em torno de 40 s.

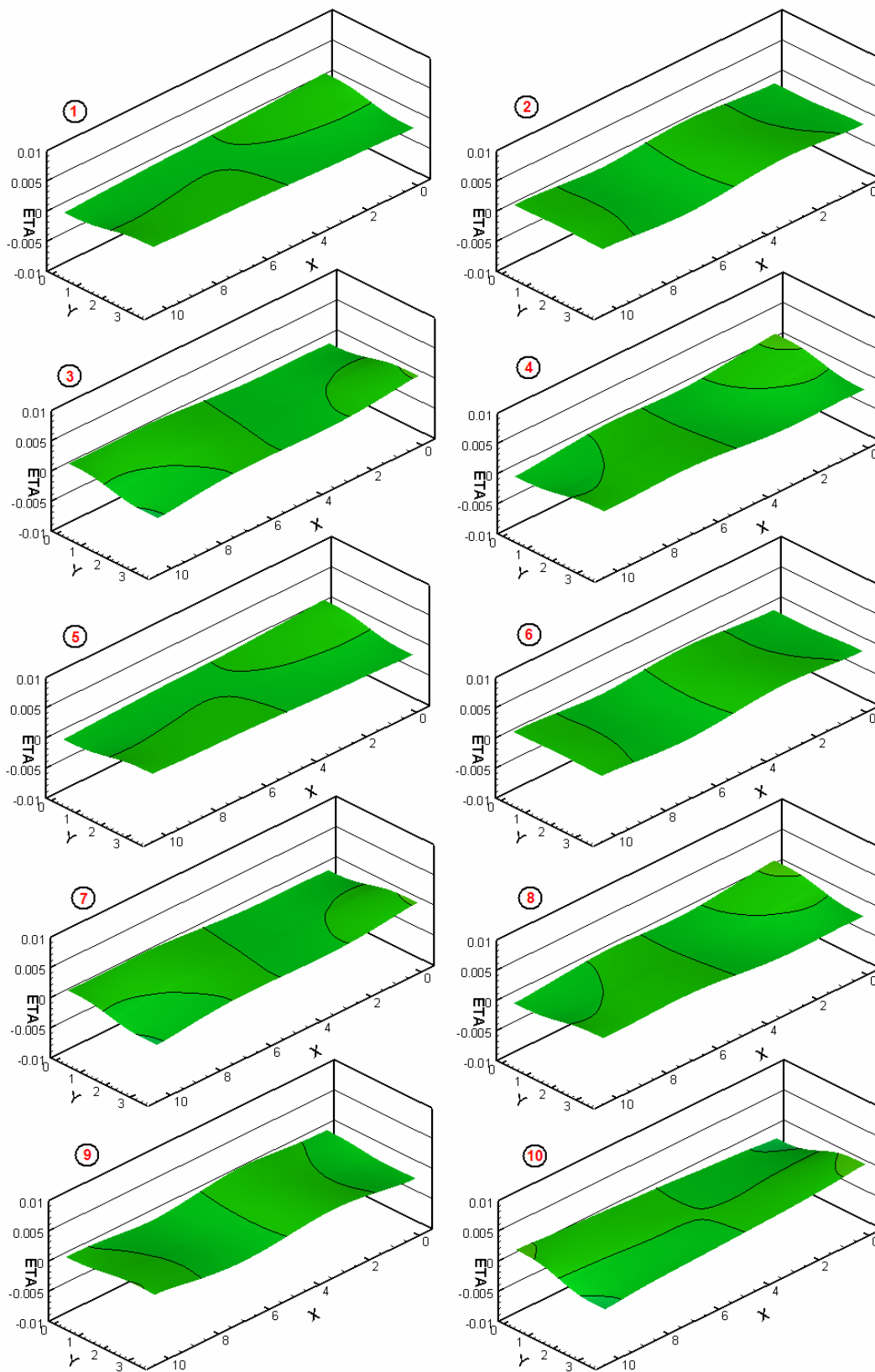


Figura 39a: Onda instável na interface banho-metal induzida pela interação eletromagnética retro-alimentada na cuba de estudo (intervalo em cada frame=10s).

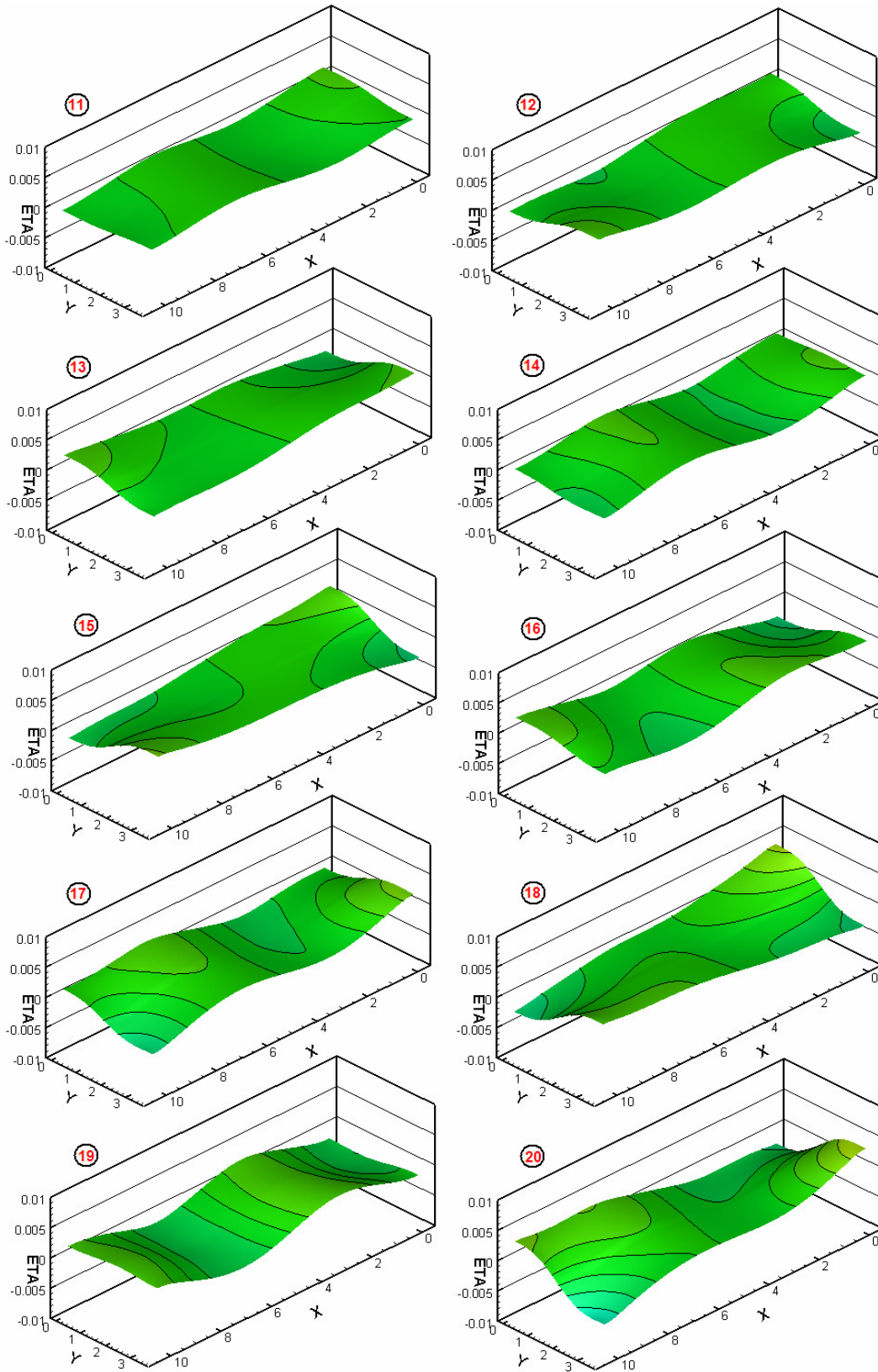


Figura 39b: Onda instável na interface banho-metal induzida pela interação eletromagnética retro-alimentada na cuba de estudo (intervalo em cada frame=10s). (continuação)



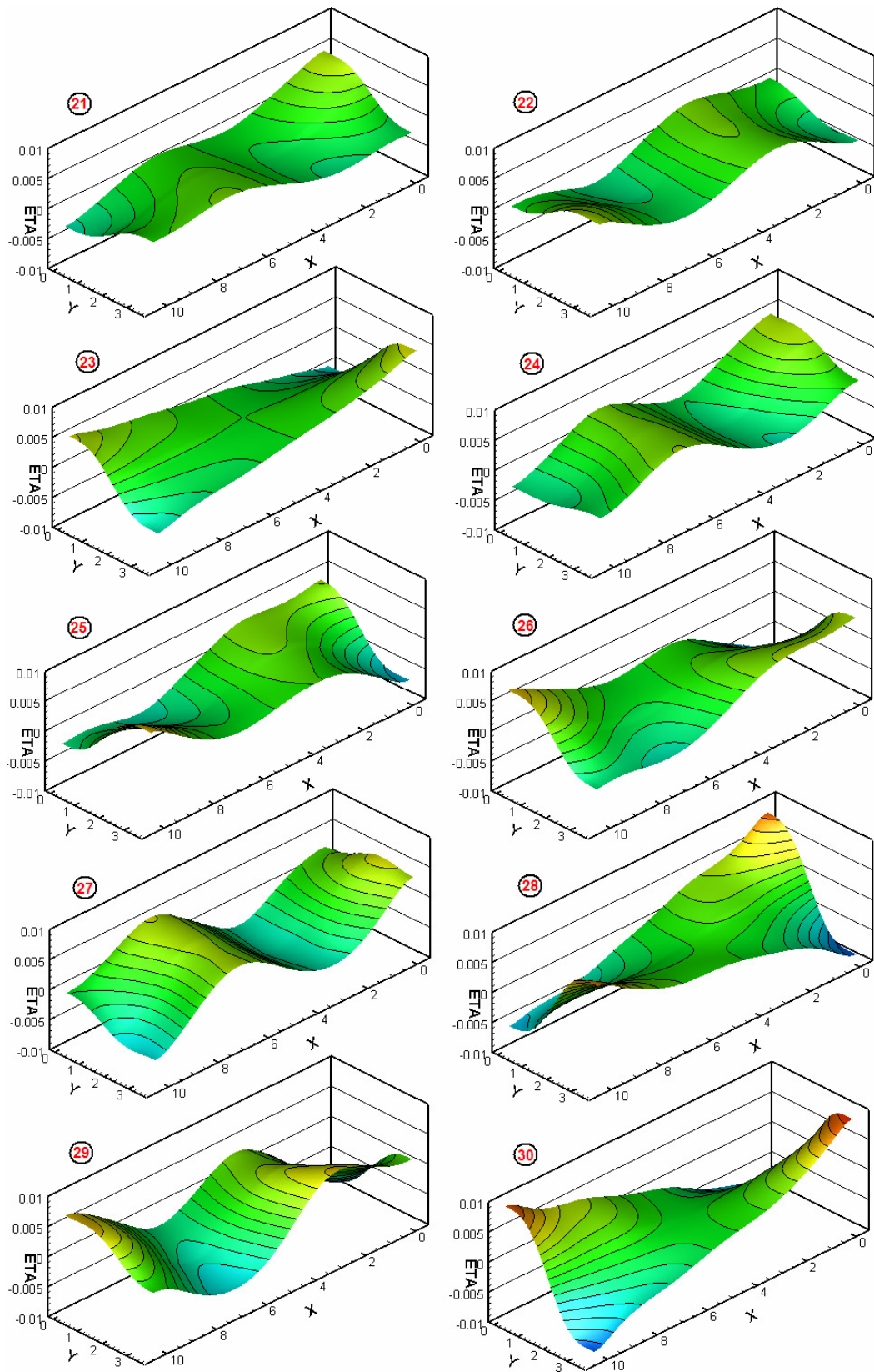


Figura 39c: Onda instável na interface banho-metal induzida pela interação eletromagnética retro-alimentada na cuba de estudo (intervalo em cada frame=10s). (continuação)

A Figura 40 mostra a evolução de  $\eta_M$  ao longo do tempo, onde se representa o deslocamento médio da interface no período simulado.

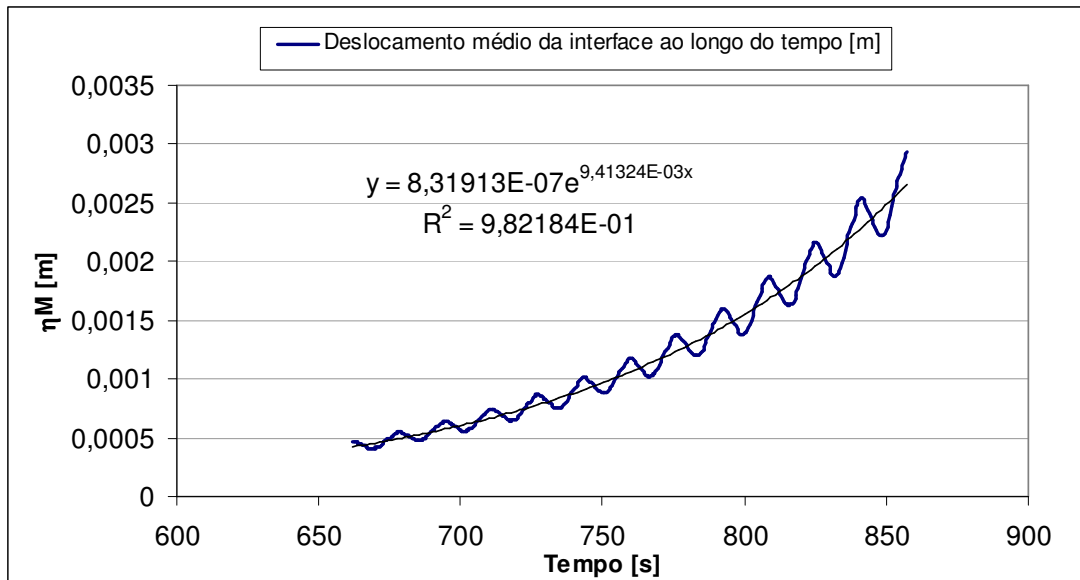


Figura 40: Crescimento de  $\eta_M$  ao longo do tempo (apenas fase final  $\eta_M > 4e-4$ ).

Para este caso foi calculado, através do método dos mínimos quadrados, o *Growth Rate* obtendo-se  $G_R = 0,00941$  [1/s], que representa a taxa de crescimento da onda instável dentro da cuba. Essa taxa de crescimento ( $G_R = 0,00941$  [1/s]) também pode ser entendida como a rapidez com que a onda consegue absorver energia do campo magnético existente no espaço dos fluidos.

## 5.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: RESULTADOS

### 5.2.1. Campos Magnéticos Básicos e sua Influência na Instabilidade

Nos projetos de barramentos para cubas modernas há grande preocupação em encontrar-se a configuração mais favorável em termos magnéticos para a cuba. Mas como deve ser a forma do campo magnético de modo a ser gerador do mínimo de instabilidades?

Neste trabalho são mostrados alguns tipos elementares de campos magnéticos verticais (pois como foi visto, são os grandes geradores de instabilidade) e sua resposta na instabilidade de uma cuba. Todos os campos  $B_z$  serão testados possuindo a mesma intensidade absoluta máxima, de modo a possibilitar uma válida comparação nas respostas do modelo.

Os campos magnéticos verticais testados serão os seguintes (Figura 41):

- $B_z$  com valor constante;
- $B_z$  linear na direção  $x$ ;
- $B_z$  linear na direção  $y$ ;
- $B_z$  com 4 ilhas positivas;
- $B_z$  com 2 ilhas negativas e 2 ilhas positivas, simétrico na direção  $x$ ;
- $B_z$  com 2 ilhas negativas e 2 ilhas positivas, simétrico na direção  $y$ ;
- $B_z$  com 2 ilhas negativas e 2 ilhas positivas, anti-simétrico.

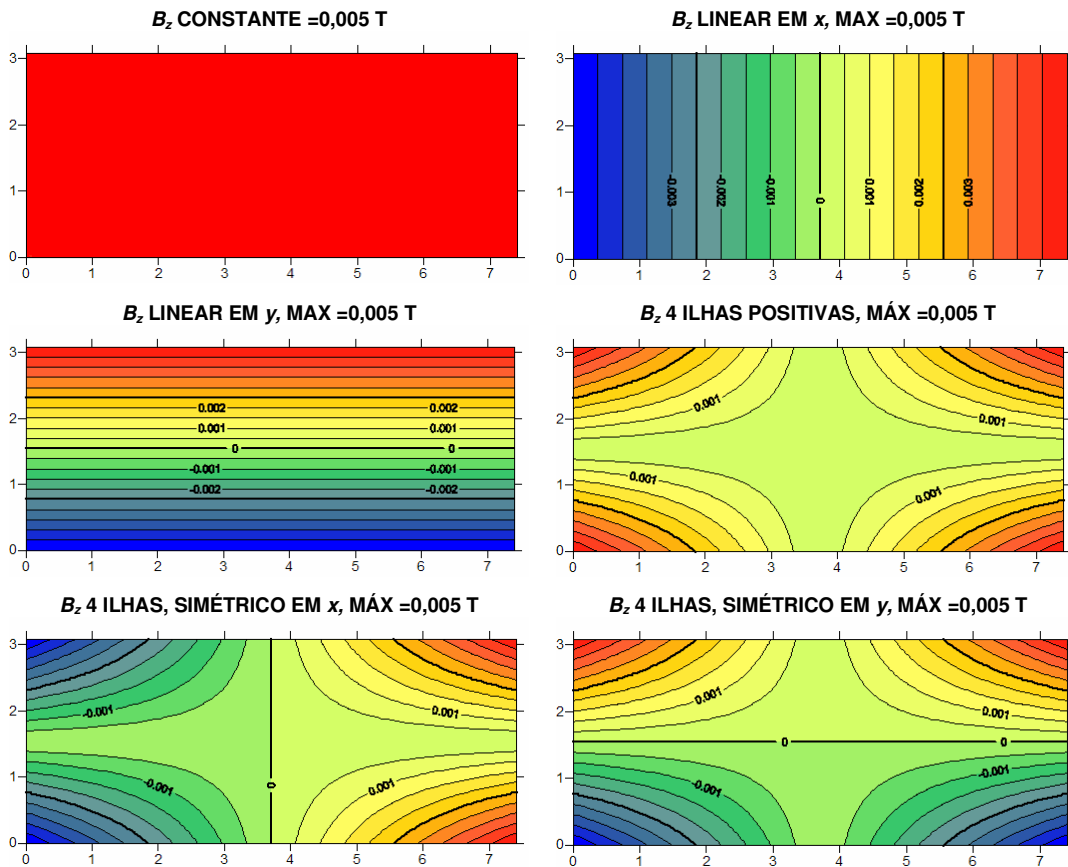


Figura 41a: Configurações básicas de campos magnéticos testadas pelo modelo de instabilidade.

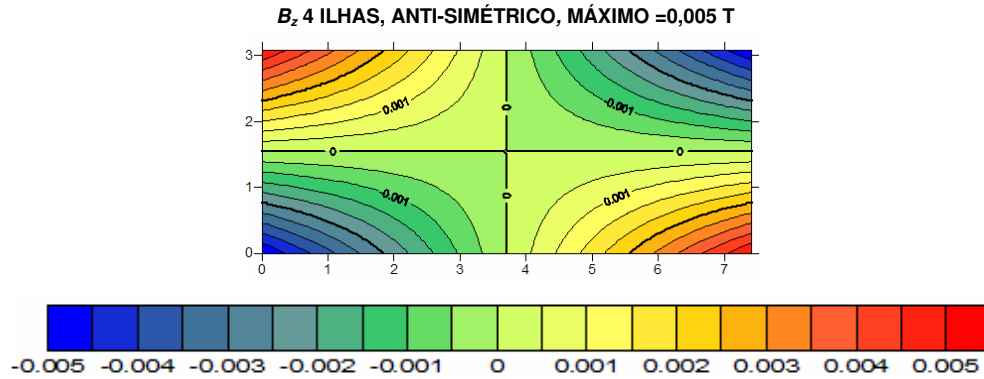


Figura 41b: Configurações básicas de campos magnéticos testadas pelo modelo de instabilidade. (continuação)

Para estes testes foi considerada uma cuba com corrente elétrica igual a 180 kA,  $H_b=0,04$  m,  $H_a=0,17$  m,  $L_x=7,57$ m e  $L_y=3,19$ m. A distribuição da corrente elétrica  $J_{0z}$  foi imposta conforme a Figura 42, que é a tipicamente encontrada para cubas deste porte.

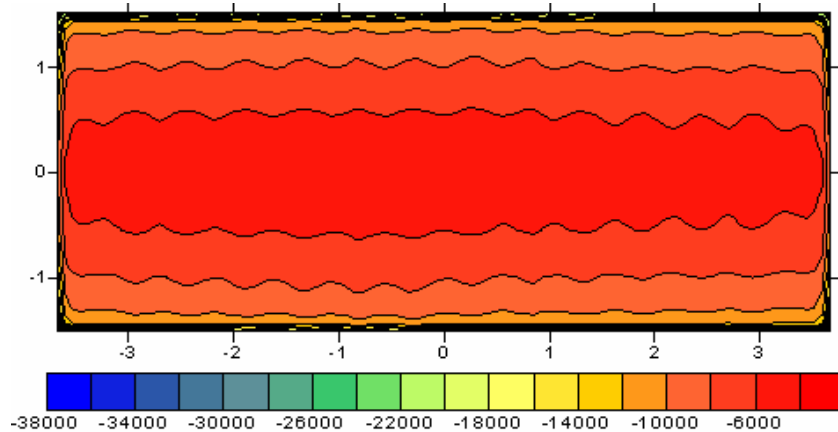


Figura 42: Distribuição de  $J_{0z}$  usada nos testes relativos à configuração de campo magnético vertical.

As oscilações encontradas como respostas do modelo, em cada caso relativo aos campos magnéticos da Figura 41, apresentam características diferentes como mostra a Figura 43. O maior comprimento de onda foi produzido pelo campo magnético constante, englobando toda a cavidade, semelhante a modos básicos de vibração (1,0) ou (1,1). Já para os casos linear em x, linear em y, 4 ilhas positivas, e simétrico em x, observam-se a presença de médios comprimentos de onda comparáveis aos modos: (2,0), (2,1), (2,1). Por fim, os campos magnéticos do tipo simétrico em y e anti-simétrico geraram ondas de menor comprimento, e conseqüentemente, maior freqüência, mais comparáveis a modos básicos (3,2) ou (4,2).

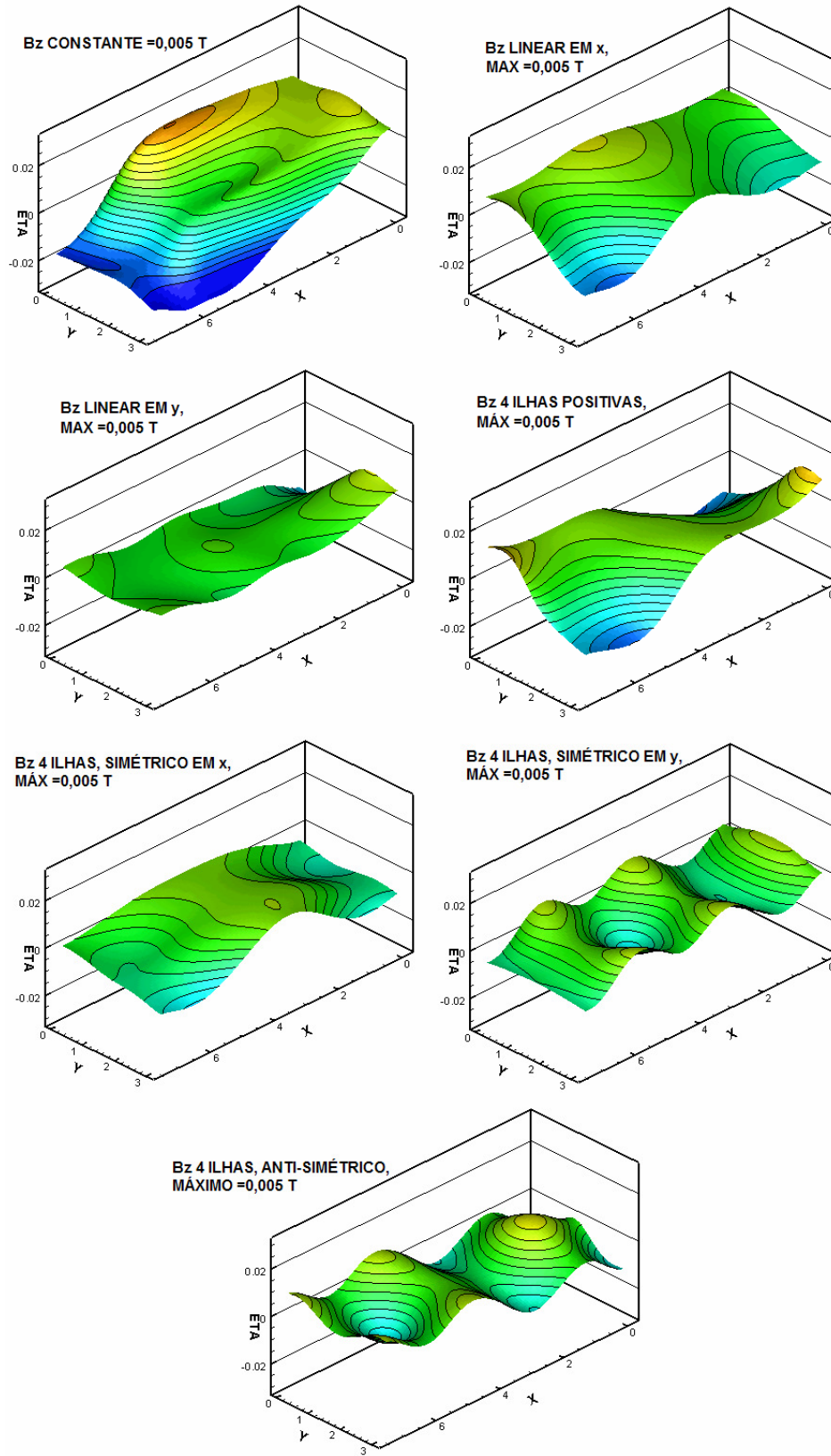


Figura 43: Onda instável da interface banho-metal encontrada nas simulações para os casos de campos magnéticos básicos.

Mas o parâmetro que avalia o nível de instabilidade gerada pelo campo magnético é taxa de crescimento das ondas. Os valores de  $G_R$  obtidos nas simulações são mostrados na Figura 44.

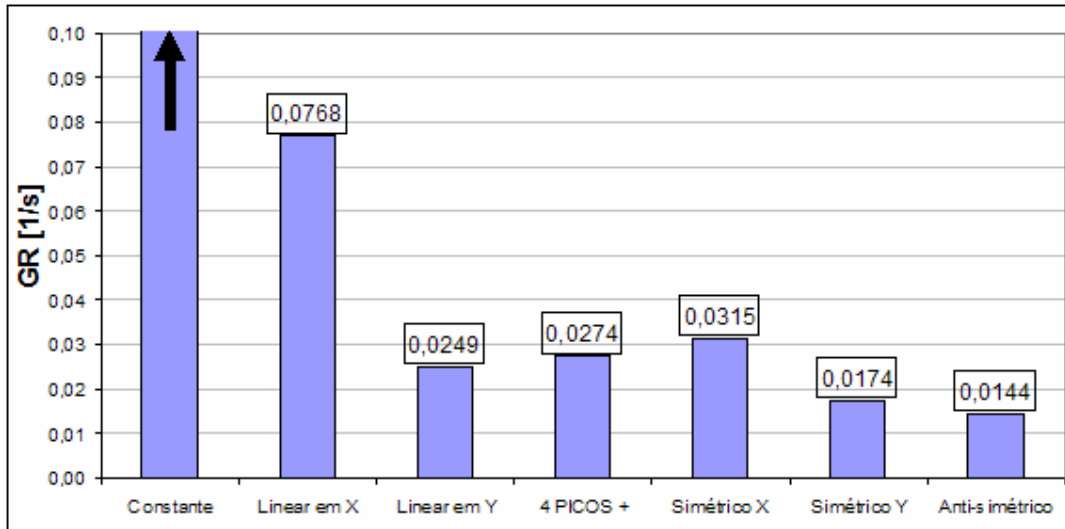


Figura 44 : Valores de  $G_R$  obtidos para cada um dos campos magnéticos idealizados para uma cuba.

Pode-se notar que a configuração de campo magnético anti-simétrico se mostra mais estável dentre todos os campos testados. Este fato já havia sido mencionado pela literatura (POTOČNIK, 1991), porém este trabalho apresenta comprovação matemática desta afirmação.

Em segundo lugar nota-se que os campos magnéticos simétricos na direção y são preferíveis na impossibilidade de uma configuração anti-simétrica, pois ainda possuem a característica de possibilitar um bom equilíbrio nas forças internas da cuba. Os resultados mostram que há relação entre o comprimento das ondas e a instabilidade. Nos casos em que o comprimento da onda é pequeno, observa-se também a presença de uma interface mais estável.

Já campos que possuem  $B_z$  médio diferente de zero devem ser evitados, como demonstrado por este estudo. É por isso que se justificam os esforços para compensação de campo que são feitos por muitas plantas ao redor do mundo.

### 5.2.2. Desbalanço de $B_z$ e Instabilidade

Como já havia sido comentado, o desbalanço no campo magnético vertical aumenta o nível de instabilidade. Considerando o campo magnético anti-simétrico da seção 5.2.1,

são adicionados valores constantes de  $B_z$  desde 0 até 3 mT em intervalos de 0,3 mT. Assim pode-se estudar o comportamento da presença de uma ou mais linhas de cuba vizinhas, que geram basicamente  $B_z$  constante. A Figura 45 mostra a curva de  $G_R$  em função do  $B_z$  adicionado ao campo magnético.

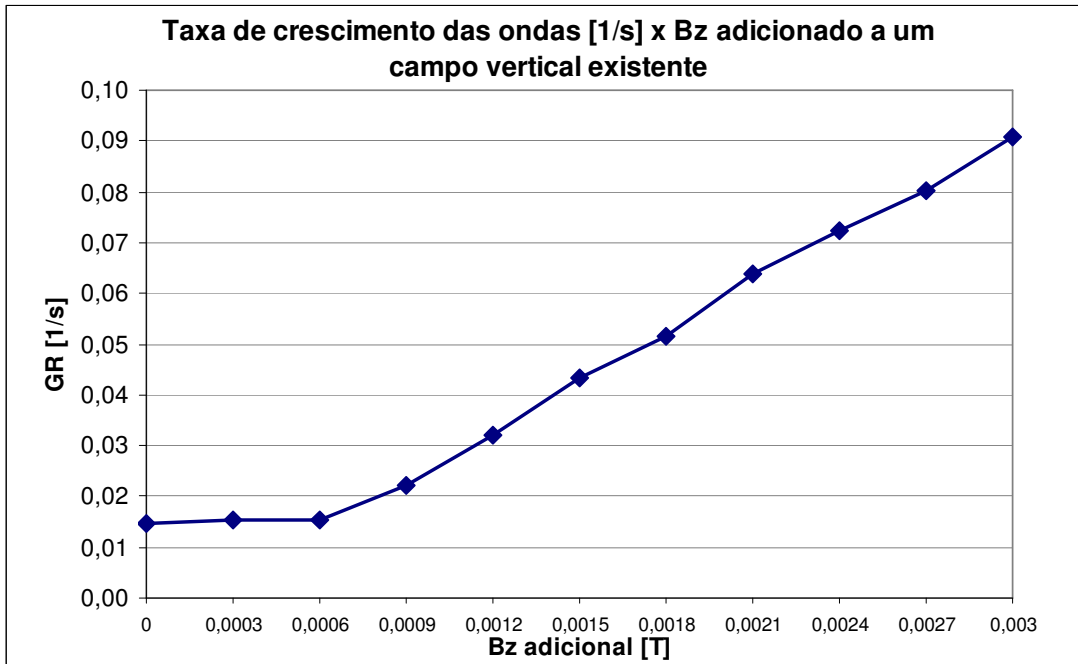


Figura 45: Taxa de crescimento das ondas em função do campo  $B_z$  adicionado a um campo pré-existente.

A forte inclinação da curva acima mostra a importância de uma boa compensação magnética no controle da instabilidade em cubas. Vale notar também que, se a descompensação se mantém abaixo de certo valor (0,0006 T, para este caso), ela não consegue influenciar a instabilidade de maneira importante.

### 5.2.3. Parâmetros Operacionais e Instabilidade

O objetivo deste tópico é investigar a influência de alguns parâmetros que podem ser controlados pela operação das cubas no comportamento da instabilidade interfacial dos dois líquidos. Assim, é possível descobrir meios de controlar a instabilidade pela própria operação da cuba sem recorrer à mudança de projeto ou reformas.

Os parâmetros estudados neste trabalho são:

- Corrente total da cuba;
- Espessura da camada de metal líquido;
- Espessura da camada de banho sob anodos (ACD).

Alguns parâmetros têm seus efeitos na instabilidade já conhecidos (como no caso da corrente da cuba), pelas observações feitas na própria indústria e por outros métodos. A quantificação desses efeitos, porém, consiste ainda em um campo de estudo em evolução. Assim, é importante estudar a sensibilidade da variação desses parâmetros através do modelo, propiciando um entendimento mais sólido desse fenômeno.

### 5.2.3.1. Corrente Total da Cuba e Instabilidade

A cuba escolhida para estes estudos é uma cuba fictícia com parâmetros básicos iguais ao da secção 5.2.1,  $I=180$  kA,  $H_b=0,04$  m,  $H_a=0,17$  m,  $L_x=7,57$ m e  $L_y=3,19$ m. O intervalo de variação da corrente elétrica de análise foi escolhido entre 160 kA e 210 kA. Assim a Figura 46 mostra o gráfico de  $G_R$  em função dessa corrente, com um ponto calculado a cada 5 kA.

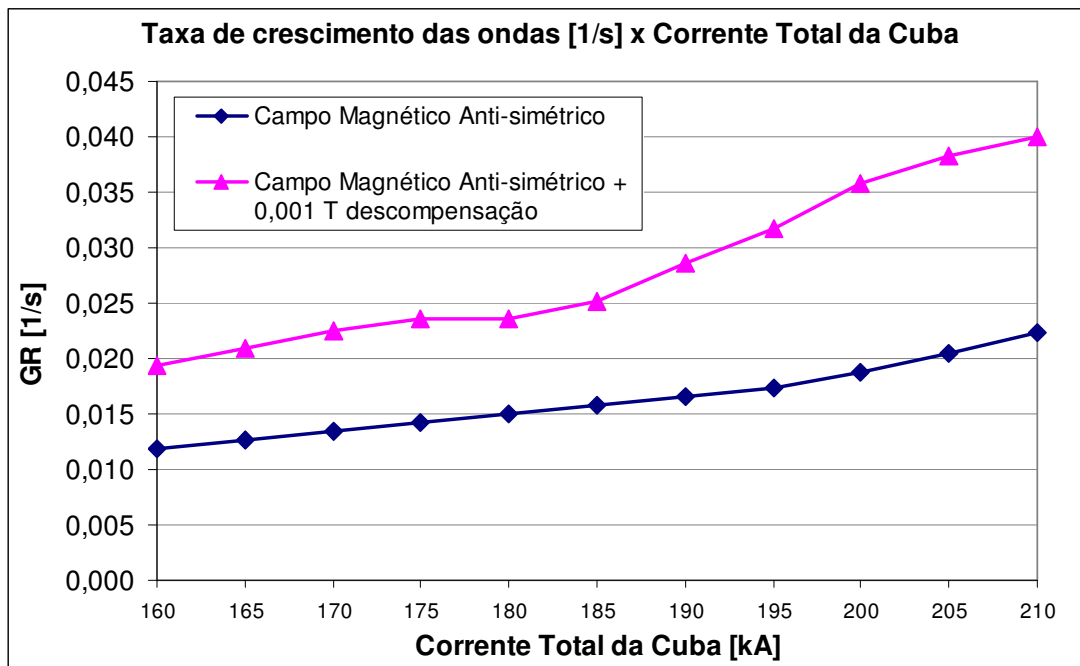


Figura 46: Taxa de crescimento das ondas em função da corrente total da cuba, para um campo magnético anti-simétrico perfeitamente compensado (azul) e para o mesmo campo magnético somado a uma descompensação de 0,001 T (magenta).

A figura anterior mostra que o aumento de corrente da cuba causa elevação no nível de instabilidade, demonstrando matematicamente o que foi comentado na introdução deste trabalho, que a instabilidade é fator limitante para o aumento de corrente em cubas modernas. Nota-se que a presença de descompensação no campo magnético potencializa



esse aumento de instabilidade, fazendo também com que o comportamento da curva seja mais complexo e não linear.

### 5.2.3.2. Espessura do Metal Líquido e Instabilidade

Assumindo que todos os outros parâmetros básicos sejam constantes, variou-se a espessura do metal desde 12 cm até 22 cm, que são valores típicos encontrados na operação de cubas, em intervalos de 1 cm. A Figura 47 mostra o resultado de  $G_R$  em função da altura da camada de metal.

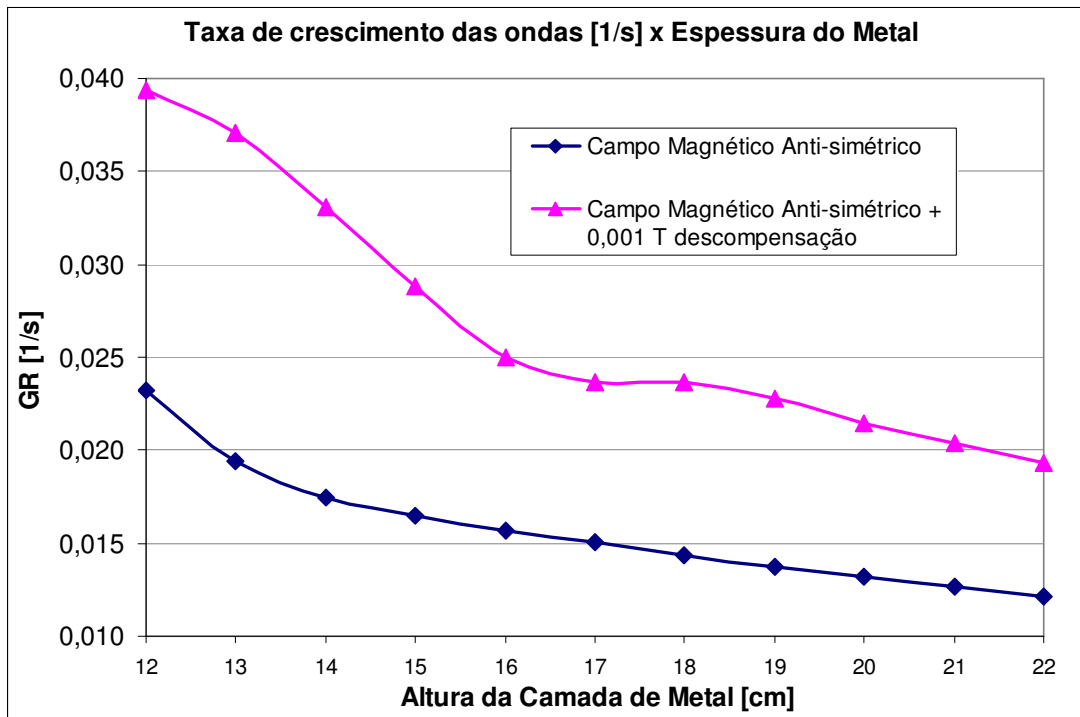


Figura 47: Taxa de crescimento das ondas em função da espessura da camada de metal, para um campo magnético anti-simétrico perfeitamente compensado (azul) e para o mesmo campo magnético somado a uma descompensação de 0,001 T (magenta).

Quanto menor a camada de metal, mais instável é a interface. Isto acontece porque a densidade de corrente elétrica horizontal aumenta quando a camada de metal diminui, vide resultados mostrados por Schneider (2006). Na realidade, as indústrias têm interesse em manter o nível de metal o mais baixo possível, pois o alumínio depositado na camada de metal é um estoque que poderia ser vendido para capitalização da empresa.

Novamente, percebe-se que a descompensação de 0,001 T no campo magnético potencializa esse aumento de instabilidade, fazendo também com que o comportamento da curva apresente menor linearidade.

### 5.2.3.3. Espessura do Banho e Instabilidade

Assumindo, novamente, que todos os outros parâmetros básicos sejam constantes como no item anterior, variou-se a espessura do banho desde 3,0 cm até 7,0 cm, que são valores típicos encontrados na operação de cubas, em intervalos de 0,5 cm. A Figura 48 mostra o resultado de  $G_R$  em função da altura da camada de banho.

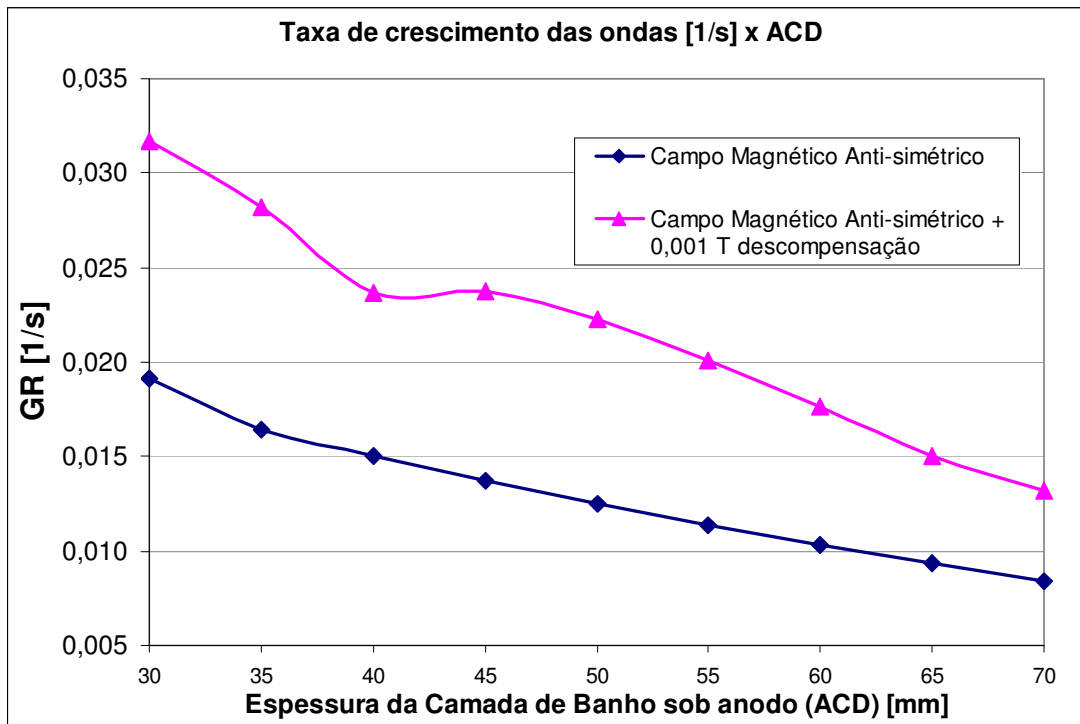


Figura 48: Taxa de crescimento das ondas em função da espessura da camada de banho sob os anodos (ACD), para um campo magnético anti-simétrico perfeitamente compensado (azul) e para o mesmo campo magnético somado a uma descompensação de 0,001 T (magenta).

Quanto menor a camada de banho, mais instável é a interface. Isto acontece porque o banho é a principal resistência do circuito elétrico. No momento que surge uma onda na interface, esta causa mais desequilíbrio elétrico se a camada de banho for fina, pois a fração da altura que oscila é maior e, conseqüentemente, a fração de resistência elétrica que oscila também é maior.

Assim, como nos casos anteriores, a descompensação no campo magnético aumentou fortemente os valores de  $G_R$ , apresentando uma curva complexa de variação em função da espessura da camada de banho sob os anodos.

Por ser mais viscoso que o metal, o aumento do banho também ajuda a amortecer as ondas. Este efeito existe na prática, mas não está incluído no modelo. Isto significa que a inclinação das curvas apresentadas na Figura 48 deve ser um pouco maior em cubas reais.

Também no caso do banho, as indústrias desejam que sua camada seja a mais fina possível. Grande parte da energia elétrica dissipada pela cuba é através de efeito Joule no banho. Vale lembrar também o que foi comentado no capítulo de conceitos fundamentais sobre a cinética do banho, uma camada fina favorece a reação de reoxidação.

#### **5.2.4. Efeito da Seqüência de Troca de Anodos na Instabilidade da Cuba**

Nesta seção, o modelo de instabilidade é usado para estudar algumas seqüências de trocas de anodo, conforme mostrado por Gusberti et al. (2007), para a cuba cuja tecnologia é chamada de EPT14, utilizada na planta de redução de alumínio TRIMET ALUMINIUM AG localizada em Essen (Alemanha).

Normalmente um ou dois anodos são trocados por dia neste tipo de cuba, o tempo total de consumo (o carbono é transformado em  $\text{CO}_2$ ) de um anodo é em torno de 26 dias. Deste modo, a cuba convive com anodos de diferentes idades, tendo diferentes alturas de carbono consumido e, conseqüentemente, diferentes resistências elétricas. Em função desse fato, e também do banho que resfria e congela nas proximidades de um anodo novo, as correntes elétricas que passam em cada anodo acabam por serem diferentes, função de sua idade, principalmente nos primeiros dias após a troca. Isto remete ao aparecimento de correntes horizontais no metal criando forças magnéticas que perturbam a interface banho-metal. A Figura 49 mostra a curva de corrente medida para um anodo no início de sua vida dentro da referida cuba.

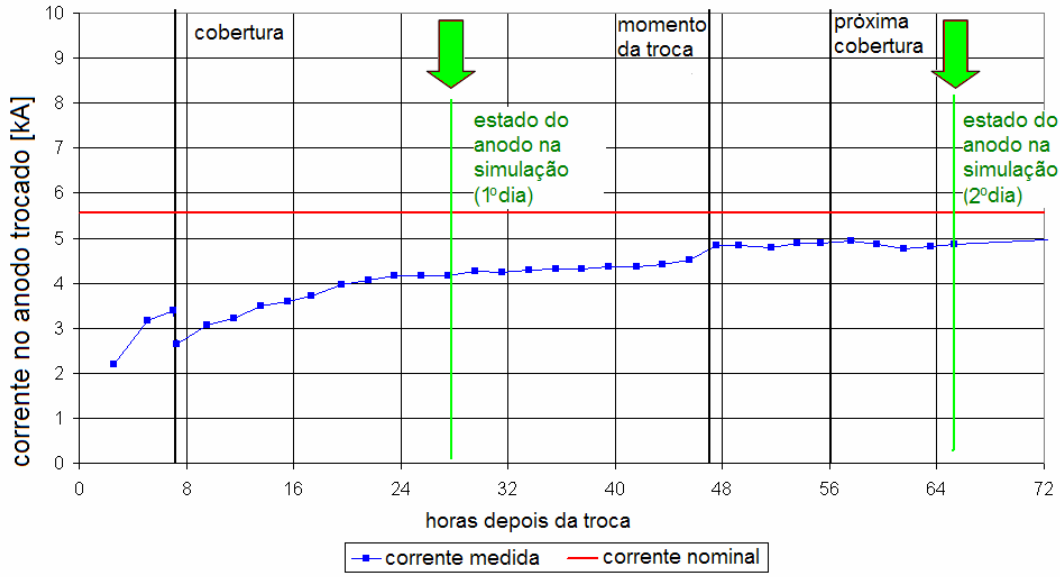


Figura 49: Corrente elétrica que passa pelo anodo novo após a troca, nas primeiras 72 horas em comparação com a corrente nominal esperada se todos os anodos possuíssem igual desempenho.

A posição em que os anodos mais velhos e mais novos estão na cuba influencia a distribuição da densidade de corrente no metal. Assim é possível que durante a operação da cuba existam determinadas situações nas quais a cuba é fortemente instabilizada.

Geralmente, quando a operação da planta decide por uma determinada seqüência de troca, ela o faz baseada em testes e observações. Este trabalho pode oferecer uma ferramenta adicional para auxiliar nesta decisão, que é o modelo numérico de instabilidade.

A simulação da instabilidade da cuba para cada situação de troca de anodo foi feita em três seqüências que foram testadas na cuba real e mais uma seqüência que foi proposta com a ajuda das conclusões do modelo. Em cada simulação, cada anodo da cuba possui corrente diferente em função da sua idade de acordo com a curva da Figura 49.

A cuba EPT14 é de tecnologia *end-to-end* e *end riser* (2 risers) e 26 anodos. Embora a tecnologia seja um tanto antiga, o barramento já passou por reformas propiciando compensação magnética. Isto permite que sua corrente de operação chegue a 160 kA. As dimensões cavidade da cuba são:  $L_x=7,45$  m e  $L_y=3,24$  m. A espessura da camada de metal utilizada nas simulações é igual à 20 cm, enquanto que o ACD utilizado é igual à 45 mm. A Figura 50 mostra as três componentes de campo magnético obtidas pelo modelo detalhado em Elementos Finitos utilizando o software ANSYS. A Figura 51 mostra a distribuição de densidade de corrente que entra no catodo, calculada pelo mesmo referido modelo.

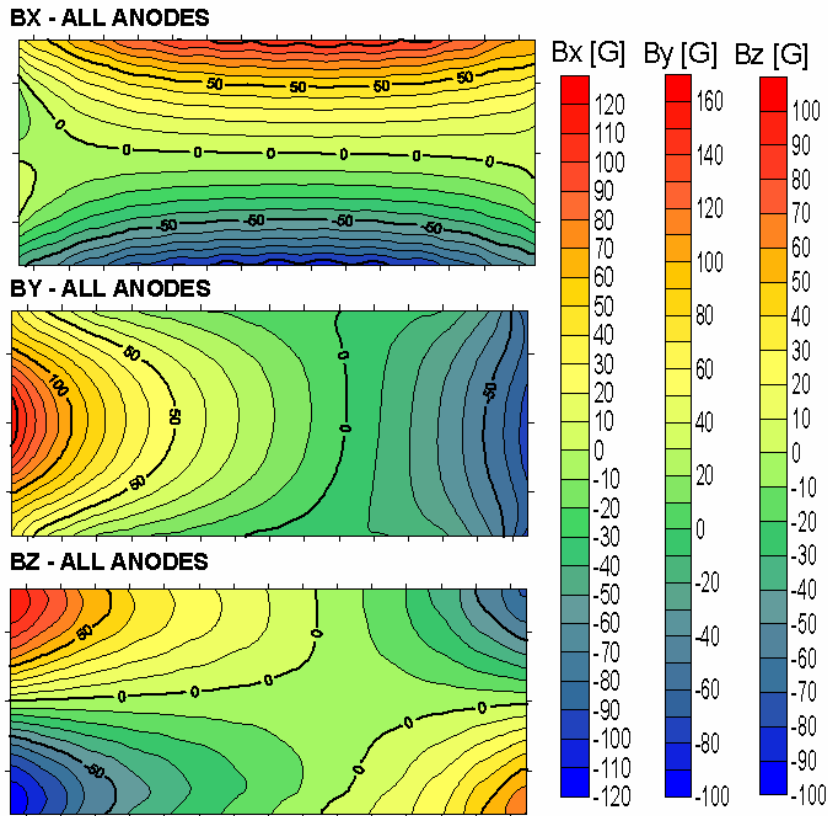


Figura 50:  $B_x$  (horizontal longitudinal),  $B_y$  (horizontal transversal) and  $B_z$  (vertical) [G], para o caso ideal onde todos os anodos carregam a mesma corrente elétrica.

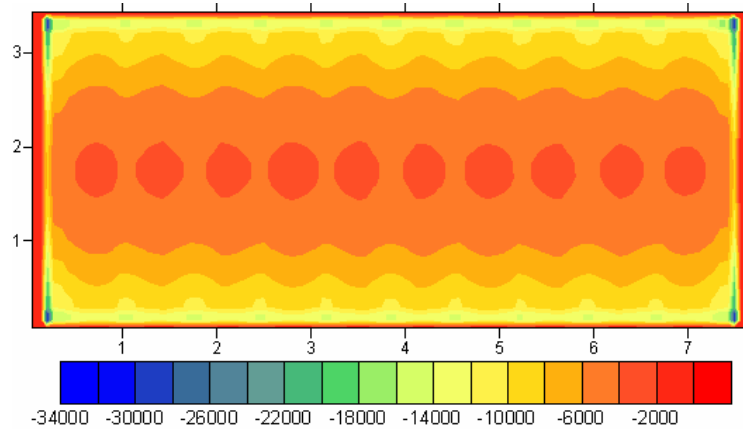


Figura 51: Distribuição  $J_{0z}(x,y)$  na parte superior do catodo, fornecida pelo modelo eletromagnético detalhado [ $A/m^2$ ].

A Figura 52 apresenta a evolução da oscilação da interface na cavidade da cuba para o caso que será doravante chamado de “ideal” em que todos os anodos fornecem igual corrente à cuba.  $G_R$  obtido para este caso foi de 0,0138 1/s.

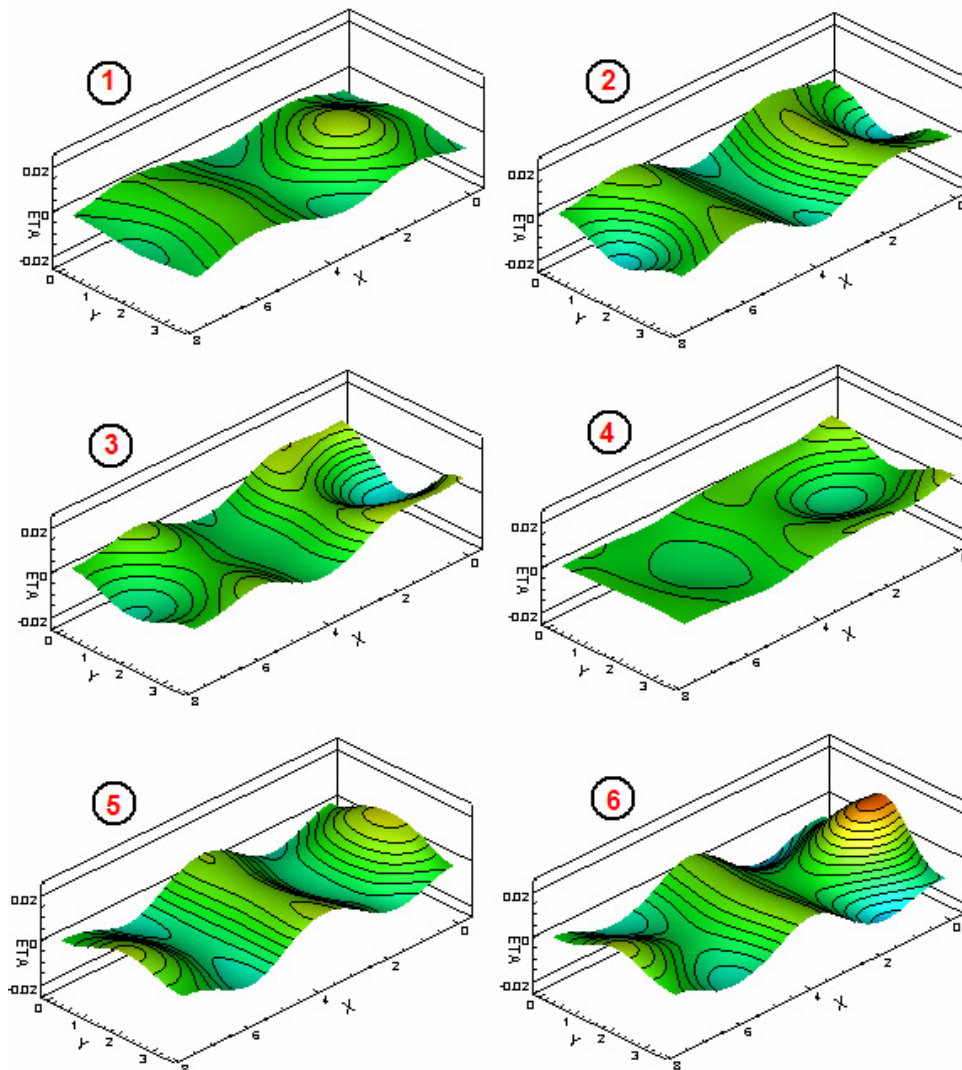


Figura 52: Onda instável na interface banho-metal, calculada pelo modelo de instabilidade para o caso “ideal” ( todos os anodos carregam a mesma corrente elétrica).

As três seqüências já testadas na planta receberam a denominação de Rota 1, Rota 2 e Rota 3 conforme publicado por Iffert et al. (2005). A nova seqüência proposta recebe o nome de Rota 4. Neste caso, a cuba possui 26 anodos e, na maior parte das trocas, 2 anodos são repostos por vez. Como o número de anodos em cada lado da cuba (*inboard* e *outboard*) é ímpar, há 2 trocas por ciclo em que apenas 1 anodo é repostos. As seqüências de troca são descritas pela Figura 53 até a Figura 56, respectivamente para Rota 1, Rota 2, Rota 3 e Rota 4.

A numeração acima de cada anodo ou par de anodos representa sua ordem na seqüência. As setas ajudam a compreender a lógica da troca, se em seqüência ou tentando evitar a vizinhança de um anodo recém trocado.

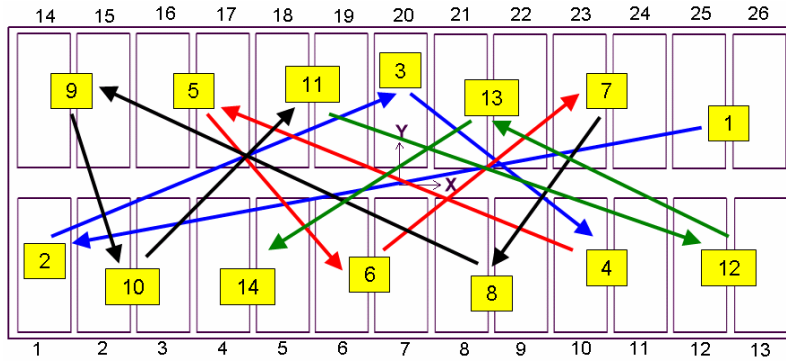


Figura 53: Seqüência de troca de anodos (Rota 1).

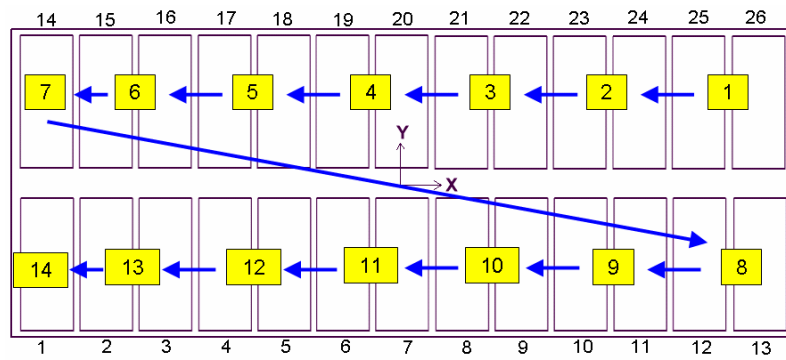


Figura 54: Seqüência de troca de anodos (Rota 2).

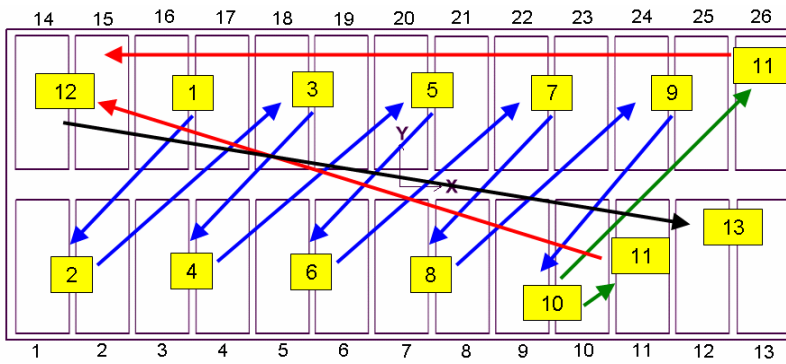


Figura 55: Seqüência de troca de anodos (Rota 3).

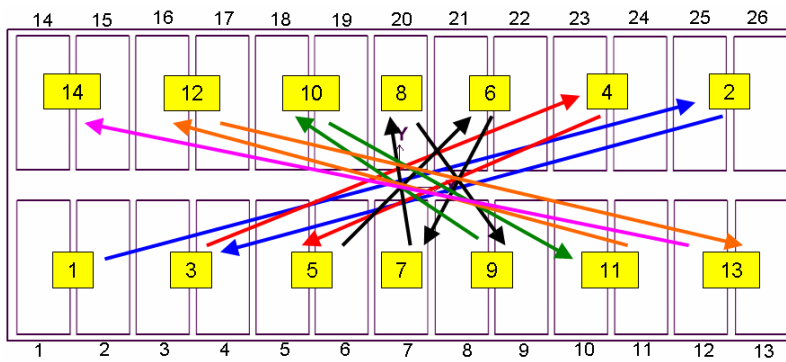


Figura 56: Seqüência de troca de anodos (Rota 4).

Repetindo o processo de cálculo (magnético estacionário no ANSYS e modelo de instabilidade deste trabalho) para cada uma das trocas de anodo, os valores de  $G_R$  foram obtidos para todas as situações. Esses resultados são mostrados em forma gráfica na Figura 57. Os números de 1 a 26 do eixo das abscissas representam o posicionamento dos anodos trocados na cuba: 1 a 13 estão no *inboard*, sendo o número 1 é o que está mais próximo ao *upstream* e 13 mais próximo ao *downstream*. Da mesma forma, de 14 a 26 são anodos do *outboard*, sendo que o 14 se encontra junto ao *upstream* e o 26 junto ao *downstream*.

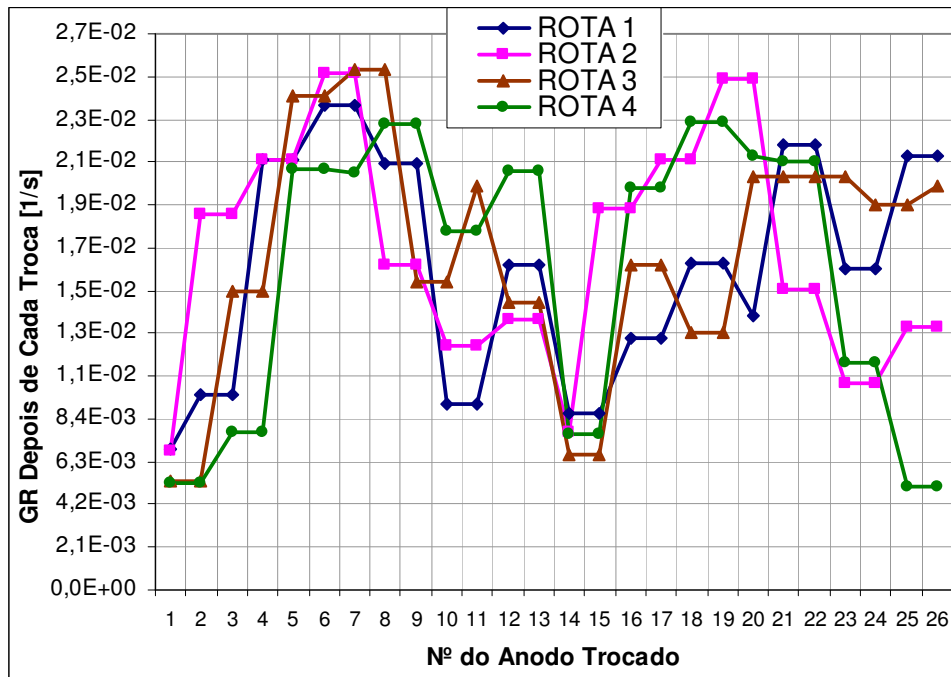


Figura 57: Growth Rate ( $G_R$ ) calculado para cada troca para as quatro seqüências estudadas

Analisando os resultados, é possível identificar a região mais crítica para troca de anodos no que se refere à instabilidade da interface, que fica nos anodos de 5 a 8 apresentando os mais altos valores de  $G_R$ . Os objetivos perseguidos no desenvolvimento da Rota 4 foram diminuir o  $G_R$  dessa região específica e ao mesmo tempo manter a media geral de  $G_R$  tão baixa quanto possível. A principal característica da lógica de troca para a Rota 4 é trocar o anodo sempre no quadrante oposto do plano da cuba em relação ao anodo trocado anteriormente. Desse modo, pode-se conseguir uma melhor equalização da densidade de corrente horizontal dentro do metal. Além disso, tentou-se manter uma lógica simples (semi-sequencial inversa) de troca para facilitar a manutenção de uma cobertura mais uniforme dos anodos.



O *Growth Rate* médio para cada Rota é mostrado no gráfico da Figura 58 e comparado à “situação ideal”, onde todos os anodos apresentariam mesma corrente elétrica e mesma vida dentro da cuba (o que nunca acontece em uma cuba real).

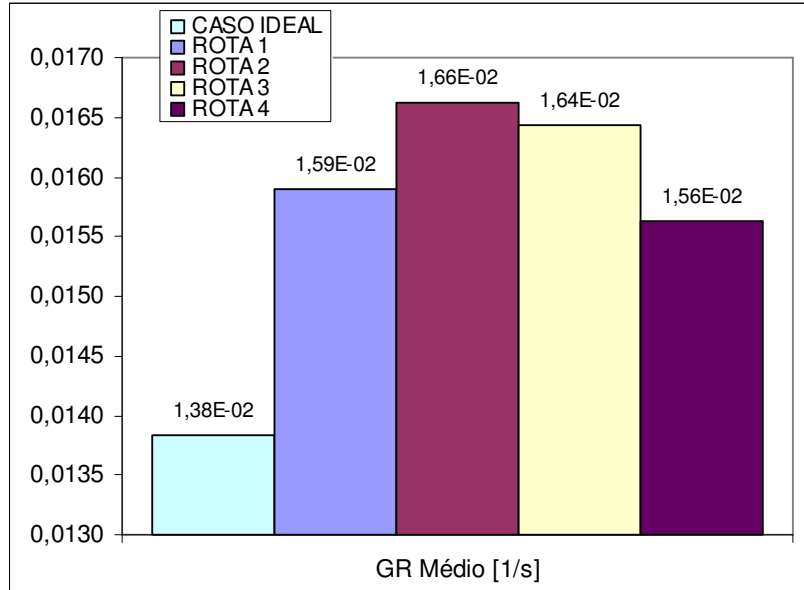


Figura 58:  $G_R$  médio para cada seqüência de trocas (Rota 1,2,3 e 4) e o caso “ideal” ( todos os anodos carregam a mesma corrente elétrica).

Outras seqüências poderiam ser propostas e testadas, e provavelmente seria possível conseguir resultados de instabilidade ainda melhores. Mas é importante ressaltar aqui que outros fatores devem ser levados em conta na tarefa de se encontrar uma melhor seqüência para trocas de anodo, principalmente o comportamento térmico durante a troca e questões relacionadas a custos operacionais.

As Rotas 1, 2 e 3 foram aplicadas à cubas pertencentes à mesma linha. Foram utilizadas 12 cubas para a Rota 2, 20 cubas para a Rota 3 e 40 cubas para a Rota 1. O período de testes foi de 6 meses, mais detalhes podem ser encontrados em Iffert et al. (2005). A Figura 59 mostra a eficiência de corrente média atingida pelos diferentes grupos de teste.

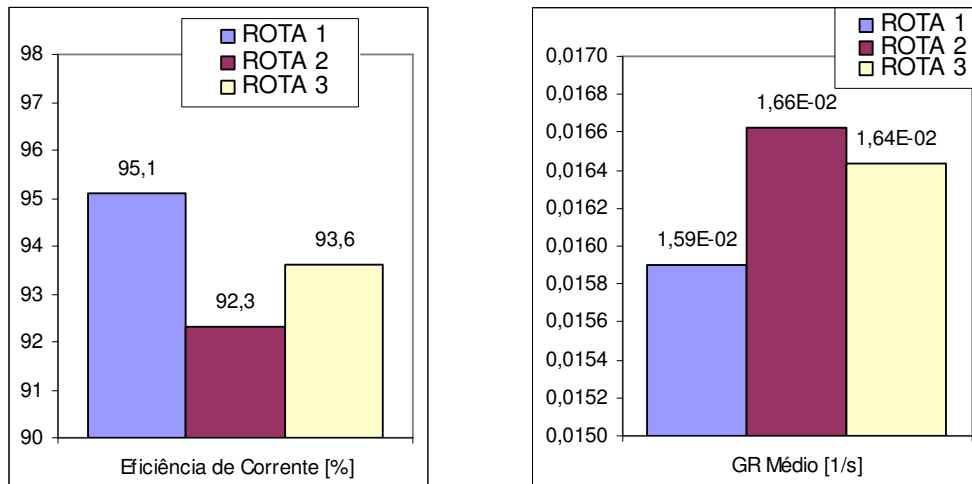


Figura 59: Eficiência de corrente atingida pela linha de cubas durante o uso das seqüências testadas, Rotas 1, 2, e 3 (esquerda),  $G_R$  médio calculado para cada uma dessas seqüências (direita).

Nos resultados acima, pode-se notar uma consistente correlação inversa entre o valor de  $G_R$  e a eficiência de corrente observada na prática para as populações de cubas testadas. Foi mostrado no capítulo 2 deste trabalho o mecanismo pelo qual as ondas na interface podem intensificar a reação de reoxidação do alumínio e assim afetar a eficiência de corrente do processo.

## 6. CONCLUSÕES

- A construção de um modelo numérico capaz de comparar a tendência à instabilidade de diferentes cubas em diferentes situações de operação foi realizada com sucesso desde a concepção até a implementação do algoritmo computacional.
- Cubas reais foram analisadas e os resultados encontrados concordam com o que é observado no comportamento das mesmas nas plantas.
- A configuração anti-simétrica de  $B_z$  é a mais indicada dentre as configurações básicas idealizadas, no objetivo de se obter uma cuba mais estável. Recomenda-se a observância desta característica quando da ocasião do projeto de novos barramentos.
- Demonstrou-se que a compensação do campo  $B_z$  é importantíssima para a operação estável da cuba. O valor de  $G_R$  aumenta rapidamente com o desbalanço em  $B_z$ .
- Um aumento na corrente elétrica da cuba causa elevação no nível de instabilidade da mesma. Demonstrou-se que o MHD é um fator limitante no aumento da corrente de operação.
- Cubas com espessura da camada de metal mais baixa tendem a ser mais instáveis. O mesmo ocorre com a camada de banho.
- A seqüência de troca dos anodos tem influência no nível de instabilidade de uma cuba real. As simulações mostraram que trocar anodos próximos sucessivamente é prejudicial ao nível de instabilidade, pois favorece o aparecimento de grandes densidades de corrente horizontais no metal. Foi possível propor uma seqüência de troca com resultados de  $G_R$  ainda melhores do que as já testadas na prática. Os resultados dos cálculos seguiram a tendência lógica esperada em comparação com os resultados obtidos em termos de eficiência de corrente nos testes em cubas reais.

## 7. SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

Para a realização de próximos trabalhos vinculados à produção primária de alumínio, sugerem-se:

- Desenvolvimento de um modelo hidrodinâmico permanente tridimensional para o metal e o banho.
- Implementação do efeito do escoamento estacionário no modelo de instabilidade da interface banho-metal apresentado neste trabalho.
- Extensão do modelo elétrico para inclusão do barramento anódico e catódico, contemplando assim possíveis efeitos das perturbações elétricas nessas partes da linha de cubas. O modelo atual considera, como simplificação, a viga anódica um equipotencial elétrico.
- Com o auxílio do modelo de instabilidade, estudar mecanismos alternativos para o controle da instabilidade nas cubas reais, visando melhorar a eficiência energética do processo.
- Executar testes na planta (tecnologia EPT14) referentes à seqüência de troca de anodos Rota 4, de modo a confirmar se o ganho previsto pelo modelo numérico é verificado na prática em forma de aumento na eficiência de corrente, ou em alguma outra medição do nível de instabilidade nas cubas reais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAL- Associação Brasileira de Alumínio. Site institucional. Disponível em: <http://www.abal.org.br/industria/perfil.asp>, acessado em: 24 de Novembro de 2007.

ANTILLE, J.; DESCLOUX, J.; FLUECK, M.; ROMERIO, M.V. **Eigenmodes and Interface Description in a Hall-Heroult Cell**, Light Metals, (1999), p. 333-338.

BEREZIN, A.I.; POLIAKOV, P.V.; RODNOV, O.O.; MEZHUBOVSKY, I.V.; GONEBNYY, I.V. **Neural Network Qualifier of Noises of Aluminium Reduction Cell**, Light Metals, (2003), p. 437-440.

BOJAREVICS, V.; ROMERIO, M.V. **Long waves instability of liquid metal-electrolyte interface in. aluminum electrolysis cells: a generalization of Sele's criterion**, Eur. J. Mech., B/Fluids, 13, (1994), p. 33-56.

BRUGGEMAN, J.N. **Pot Heat Balance Fundamentals**, Proceedings of 6<sup>th</sup> Australian Aluminum Smelting Workshop, (1998), p. 167-189.

DAVIDSON, P.A.; LINDSAY, R.I.; **Stability of Interfacial Waves in Aluminium Reduction Cells**, Journal of Fluid Mechanics, 362 (1998), p. 273-295.

DROSTE, Ch.; SEGATZ, M.; VOGELSANG, D. **Improved 2-Dimensional Model for Magnetohydrodynamic Stability Analysis in Reduction Cells**, Light Metals (1998), p. 419-428.

EL-DEMERDASH, M.F.; EL-RAGHY, S.M.; BASSUNY, Z. **Estimation of Aluminium Cell Stability for a given Bus-bar Design**, Light Metals, (1995), p. 289-294.

GIVRY, J. P. **Les effets Magnétiques dans les Cuves d'électrolyse d'aluminium**, La Metallurgia Italiana n.8 (1960), p. 503-509.

GIVRY, J.P. **Computer Calculation of Magnetic Effects in the Bath of Aluminum Cells**, Transactions of the Metallurgical Society of AIME – Volume 239 (AGO/1967), p. 1161-1166.

GRJOTHEIM, K.; WELCH, B.J. **Aluminium Smelter Technology** 2<sup>nd</sup>. Edition, Editora Aluminium-Verlag, Düsseldorf – Alemanha, 1988, p. 1-295.

GUSBERTI, V.; SEVERO, D.S.; SCHNEIDER, A.F.; PINTO, E.C.V.; VILELA, A.C.F. **Modeling the Effect of the Anode Change Sequence with a Non-Linear Shallow Water Stability Model**. Light Metals (2007), p. 317-322.

IAI- **International Aluminium Institute. Site institucional**. Disponível em: <http://www.world-aluminium.org/About+Aluminium/Story+of> , acessado em: 24 de Novembro de 2007.

IFFERT, M.; SKYLLAS-KAZACOS, M.; WELCH, B. **Challenges in Mass Balance Control**, Light Metals, (2005), p. 385-391.

KJAR, A.; KENNIRY, J.T.; SEVERO, D.S. **Evolution of Busbar Design for Aluminium Reduction Cells**, 8<sup>th</sup> Australasian Aluminium Smelting Technology Conference, 3<sup>rd</sup> – 8<sup>th</sup> October 2004, p. 358-384.

LA CAMERA, A.F.; ZIEGLER, D.P.; KOZAREK, R.L. **Magnetohydrodynamics in the Hall-Heroult Process, an Overview**, Magnetohydrodynamics in Process Metallurgy (1991), p. 91-98.

LEBOUCHER, L.; PERICLEOUS, K.; PANAITESCU I.; REPETTO, M. **A Finite-Volume Shallow Layer Method, for the MHD Instabilities in an Aluminium Production Cell**, Second International Conference on CFD in Minerals and Process Industries (Australia), 1999, p. 335-338.

MALISKA, C.R., **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional: Fundamentos e Coordenadas Generalizadas**, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1995, 424p.

MEI, C.C. **The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves**, World Scientific, 1989, p. 510.

PATANKAR, S. V., **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, McGraw Hill, New York, 1980, 210p.

PEDLOSKY, J. **Geophysical Fluid Dynamics**, Springer Verlag, New York, 1979, 624p.

POTOČNIK, V. **Modeling of Metal-Bath Interface Waves in Hall-Heroult Cells Using ESTER/PHOENICS**, Light Metals, (1989), p. 227-235.

POTOČNIK, V. **Principles of MHD Design Of Aluminum Electrolysis Cells**, Magnetohydrodynamics in Process Metallurgy (1991), p. 99-105.

SCHMIDT-HATTING, W.; BLANC, J.M.; BESSARD, J.C.; KAENEL, R.V. **Heat Losses of Different Pots**, Light Metals, (1985), p. 609-623.

SCHNEIDER, A. F. **Desenvolvimento e Validação de uma Metodologia de Análise Eletromagnética de Cubas de Alumínio Utilizando os Pacotes Comerciais ANSYS 9.0 e ALGOR 12.28**. Porto Alegre, 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais-(PPGEM), Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), 107p.

SEGATZ, M.; VOGELSANG, D.; DROSTE, Ch.; BAEKLER, P. **Modeling of Transient Magneto-Hydrodynamic Phenomena in Hall-Heroult Cells**, Light Metals, (1993), p. 361-368.

SEVERO, D.S.; SCHNEIDER, A.F.; PINTO, E.C.V.; GUSBERTI, V.; POTOČNIK, V. **Modeling Magnetohydrodynamics Of Aluminum Electrolysis Cells With ANSYS And CFX**", Light Metals, (2005), p. 475-480.

SNEYD, A.D. **Interfacial Instabilities in Aluminium Reduction Cells**, Journal of Fluid Mechanics, 236 (1992), p. 111-126.

SUN, H.; FINLAYSON, B.A.; ZIKANOV, O.; ZIEGLER, D.P. **The Influence of the Basic Flow and Interface Deformation on Stability of Hall-Heroult Cells**, Light Metals, (2005), p. 437-441.

TARAPORE, E.D. **Magnetic Fields in Aluminium Reduction Cells and their Influence on Metal Pad Circulation**, Light Metals, (1979), p. 541-550.

URATA, N.; MORI, K.; IKEUCHI, H. **Behavior of Bath and Molten Metal in Aluminium Electrolytic Cell**, Kaikinzo (Light Metals, Japan), 26, (1976), p. 573-583.

URATA, N. **Magnetics and Metal Pad Instability**, Light Metals, (1985), p. 581-591.

VERSTEEG, H.K. e MALALASEKERA, **An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method**, Longman Scientific & Technical, 1995, 239p.

ZIKANOV, O.; THESS, A.; DAVIDSON P.A.; ZIEGLER, D.P. **A New Approach to Numerical Simulation of Melt Flows and Interface Instability in Hall-Héroult Cells**, Metallurgical and Materials Transactions B, volume 31B, (dez/ 2000), p. 1541-1550.

ZIKANOV, O.; SUN, H.; ZIEGLER, D.P. **Shallow Water Model of Flows in Hall-Héroult Cells**, Light Metals, (2004), p. 445-451.