

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE ESTRUTURAS
DE CONCRETO ARMADO,
SOB ESTADO PLANO DE TENSÃO,
ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

MAURO DE VASCONCELLOS REAL

Tese apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA.

Porto Alegre
Julho de 2000

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil.

Prof. Américo Campos Filho
Orientador

Prof. Francisco de Paula S. L. Gastal
Coordenador do PPGEC

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Américo Campos Filho (Orientador)
Dr. - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Brasil

- Prof. Eduardo M. R. Fairbairn
Docteur Ingénieur - Université de Paris VI - France

- Prof. Jorge Daniel Riera
PhD - Princeton University - USA

- Prof. Sérgio Roberto Maestrini
PhD – North Carolina State University - USA

Dedico este trabalho
à minha esposa Beatriz
e aos meus filhos Eduardo e Antônio.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Américo Campos Filho, pela dedicada orientação.

Ao colega Prof. José Milton de Araújo, pela sincera amizade e valiosas sugestões.

A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	ix
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xvi
RESUMO	xiv
ABSTRACT	xv
1 – INTRODUÇÃO	1
2 – ANÁLISE DE PROBLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSÃO	6
2.1 – INTRODUÇÃO.....	6
2.2 – CONFIGURAÇÕES E DEFORMAÇÕES.....	8
2.3 – O PROBLEMA DAS TENSÕES.....	12
2.4 – O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.....	15
3 – APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	22
3.1 – INTRODUÇÃO.....	22
3.2 – ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO.....	22
3.2.1 – Geometria do elemento.....	21
3.2.2 – O campo de deslocamentos.....	24
3.2.3 – O campo de deformações.....	27
3.2.4 – Definição das tensões.....	32
3.2.5 – Definição das forças atuantes.....	33
3.2.6 – O Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	35
3.2.7 – Material elástico-linear no regime de pequenas deformações.....	37
3.2.8 – Matriz de rigidez do elemento.....	39
3.3 - ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA.....	40
3.3.1 – Modelo incorporado.....	40
3.3.2 – Formulação geométrica.....	41
3.3.3 – Determinação dos trechos da armadura.....	45
3.3.4 – Funções de forma para os elementos da armadura.....	47
3.3.5 – Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura.....	49
3.3.6 – Modelo não-linear geométrico para a armadura.....	53

3.4 – SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES	55
3.4.1 – O método de Newton-Raphson padrão.....	55
3.4.2 – O método de Newton-Raphson modificado.....	57
3.4.3 – O método BFGS.....	59
3.4.4 – O algoritmo incremental-iterativo	61
4 – MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	63
4.1 – MODELO CONSTITUTIVO BIDIMENSIONAL PARA O CONCRETO.....	63
4.1.1 – Equação constitutiva bidimensional ortotrópica.....	63
4.1.2 – Deformação uniaxial equivalente.....	64
4.1.3 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE.....	66
4.1.4 – Deformação correspondente à tensão máxima	67
4.1.5 – Curvas uniaxiais equivalentes	69
4.1.6 – Procedimento iterativo.....	71
4.2 – MODELO PARA O CONCRETO FISSURADO.....	71
4.2.1 – Critério de fissuração	72
4.2.2 – Equação constitutiva ortotrópica	72
4.2.3 – Deformação uniaxial equivalente.....	73
4.2.4 – Colaboração do concreto entre fissuras.....	73
4.2.5 – Módulo de deformação por corte reduzido.....	74
4.3 – MODELO PARA O CONCRETO ESMAGADO	75
4.3.1 – Critério de esmagamento.....	75
4.3.2 – Equação constitutiva ortotrópica	76
4.3.3 – Deformação uniaxial equivalente.....	76
4.3.4 – Comportamento do concreto pós-esmagamento.....	76
4.4 – EQUAÇÃO CONSTITUTIVA NO SISTEMA GLOBAL X0Y	77
4.4.1 – Cálculo das direções dos eixos de ortotropia	77
4.4.2 – Transformação das deformações do sistema xoy para os eixos de ortotropia..	79
4.4.3 – Transformação das tensões dos eixos de ortotropia para o sistema xoy	80
4.4.4 – Equação constitutiva no sistema xoy	81
4.5 – MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO.....	81
5 – COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO	83
5.1 – INTRODUÇÃO.....	83

5.2 – VIGAS DE CONCRETO ARMADO	84
5.3 – PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO	93
5.3.1 – Pilares de GOYAL e JACKSON.....	93
5.3.2 – Pilares de CLAESON e GYLLTOFT	96
5.3.3 – Viga-coluna de Zürich.....	97
5.4 – VIGA-PAREDE DE CONCRETO ARMADO.....	99
6 – SIMULAÇÕES – O MÉTODO DE MONTE CARLO	102
6.1 – INTRODUÇÃO.....	102
6.2 – GERAÇÃO DAS PROPRIEDADES ALEATÓRIAS DA ESTRUTURA.....	103
6.3 – GERAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS	103
6.4 – GERAÇÃO DO CAMPO ESTOCÁSTICO DAS PROPRIEDADES DO CONCRETO.....	109
6.4.1 – Definição das propriedades médias e coeficientes de variação	109
6.4.2 – Campo estocástico bidimensional: o método da representação espectral	110
6.4.3 – Introdução da correlação existente entre as propriedades do concreto	116
6.5 – GERAÇÃO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DA ARMADURA	118
6.6 – GERAÇÃO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA ESTRUTURA	118
6.7 – CARREGAMENTO	120
6.8 – O MÉTODO DE MONTE CARLO	121
6.9 – ANÁLISES ESTATÍSTICAS	123
7 – TESTES PARAMÉTRICOS	125
7.1 – INTRODUÇÃO.....	125
7.2 – PARÂMETROS AVALIADOS	125
7.2.1 – Propriedades do concreto	125
7.2.2 – Propriedades da armadura.....	132
7.2.3 – Propriedades geométricas.....	133
7.3 – ESTUDO DE VIGAS	136
7.4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA AS VIGAS.....	150
7.4.1 – Flecha sob carga de serviço das vigas	150
7.4.2 – Carga de ruptura das vigas	155
7.5 – ESTUDO DE PILARES MODERADAMENTE ESBELTOS	155
7.6 – ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA OS PILARES.....	166

7.6.1 – Resposta carga-deslocamento dos pilares.....	166
7.6.2 – Carga de ruptura dos pilares.....	170
8 – APLICAÇÕES.....	171
8.1 – INTRODUÇÃO.....	171
8.2 – ÍNDICE DE CONFIABILIDADE β	172
8.3 – ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE VIGAS.....	174
8.4 – ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE PILARES.....	193
9 – CONCLUSÕES.....	214
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	219

LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1 – Resistência à compressão do concreto e propriedades geométricas das vigas de DECANINI	85
TABELA 5.2 – Tensão de escoamento do aço e propriedades da armadura	86
TABELA 5.3 – Comparação da carga de ruptura medida experimentalmente com o valor determinado pelo modelo, para as vigas de DECANINI	92
TABELA 5.4 – Comparação entre a carga de ruptura teórica e a experimental para 26 pilares ensaiados por GOYAL e JACKSON.....	95
TABELA 7.1 – Variações das dimensões de vigas: MIRZA e MacGREGOR (1982).....	134
TABELA 7.2 – Variações das dimensões em pilares: MIRZA e MacGREGOR (1982)....	135
TABELA 7.3 – Variações das dimensões de vigas e pilares: UDOEYO e UGBEM (1995)	135
TABELA 7.4 – Propriedades mecânicas dos materiais para as vigas	138
TABELA 7.5 – Dimensionamento à flexão para as vigas VA, VB e VC	138
TABELA 7.6 – Armadura transversal (estribos) para as vigas VA, VB e VC	139
TABELA 7.7 – Propriedades mecânicas médias dos materiais para as vigas VA, VB e VC.....	139
TABELA 7.8 – Parâmetros e distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias analisadas, para as vigas VA, VB e VC	143
TABELA 7.9 – Resultados dos testes paramétricos para a viga VA	147
TABELA 7.10 – Resultados dos testes paramétricos para a viga VB.....	148
TABELA 7.11 – Resultados dos testes paramétricos para a viga VC.....	149
TABELA 7.12 – Propriedades mecânicas dos materiais para os pilares PA, PB e PC.....	156
TABELA 7.13 – Dados do dimensionamento dos pilares PA, PB e PC, à flexo-compressão normal.....	158
TABELA 7.14 – Propriedades mecânicas médias dos materiais para os pilares PA, PB e PC	158
TABELA 7.15 – Parâmetros e distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias analisadas, para os pilares PA, PB e PC	160
TABELA 7.16 – Resultados dos testes paramétricos para o pilar PA	163
TABELA 7.17 – Resultados dos testes paramétricos para o pilar PB.....	164
TABELA 7.18 – Resultados dos testes paramétricos para o pilar PC.....	165

TABELA 8.1 – Propriedades mecânicas dos materiais para as vigas V1, V2 e V3.....	175
TABELA 8.2 – Dimensionamento à flexão das vigas V1, V2 e V3	176
TABELA 8.3 – Dimensionamento ao esforço cortante para as vigas V1, V2 e V3	176
TABELA 8.4 – Combinações de ações para os Estados Limites de Serviço.....	177
TABELA 8.5 – Verificação dos Estados Limites de Serviço para as vigas V1, V2 e V3 ..	178
TABELA 8.6 – Parâmetros e distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias analisadas para as vigas V1, V2 e V3.....	180
TABELA 8.7 – Análise da flecha sob carga de serviço das vigas V1, V2 e V3.....	185
TABELA 8.8 – Análise estatística da carga de ruptura das vigas V1, V2 e V3	187
TABELA 8.9 – Definição do carregamento para as viga V1, V2 e V3	192
TABELA 8.10 – Análise de confiabilidade para as vigas V1, V2 e V3	192
TABELA 8.11 – Propriedades mecânicas dos materiais para os pilares analisados.....	194
TABELA 8.12 – Dimensionamento dos pilares com $\lambda = 26$, de P1 a P9	195
TABELA 8.13 – Dimensionamento dos pilares com $\lambda = 52$, de P10 a P18	195
TABELA 8.14 – Dimensionamento dos pilares com $\lambda = 78$, de P19 a P27	196
TABELA 8.15 – Parâmetros e distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias consideradas para os pilares de P1 a P27.....	197
TABELA 8.16 – Definição do carregamento para pilares com $\lambda = 26$	203
TABELA 8.17 – Definição do carregamento para pilares com $\lambda = 52$	203
TABELA 8.18 – Definição do carregamento para pilares com $\lambda = 78$	204
TABELA 8.19 – Análise de Confiabilidade para os pilares com $\lambda = 26$ (P1 a P9)	205
TABELA 8.20 – Análise de Confiabilidade para os pilares com $\lambda = 52$ (P10 a P18)	206
TABELA 8.21 – Análise de Confiabilidade para os pilares com $\lambda = 78$ (P19 a P27)	206

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Situação de estado plano de tensão.....	6
FIGURA 2.2 – Movimento de um corpo deformável	9
FIGURA 2.3 – O problema das tensões	13
FIGURA 2.4 – O Princípio dos Trabalhos Virtuais	16
FIGURA 3.1 – Discretização de uma estrutura plana em elementos finitos de 8 nós.....	23
FIGURA 3.2 - Geometria do elemento isoparamétrico quadrático.....	25
FIGURA 3.3 – Barra de aço inserida no elemento de concreto	42
FIGURA 3.4 – Coordenadas ao longo do eixo da barra de aço	43
FIGURA 3.5 – Curva que define a barra de aço	46
FIGURA 3.6 – Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.....	48
FIGURA 3.7 – O Método de Newton-Raphson padrão para o caso unidimensional.....	57
FIGURA 3.8 - O Método de Newton-Raphson Modificado para o caso unidimensional..	58
FIGURA 3.9 - O Método Quasi-Newton para o caso unidimensional.....	59
FIGURA 4.1 – Deformação uniaxial equivalente para um material linear	64
FIGURA 4.2 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE	66
FIGURA 4.3 – Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto	70
FIGURA 4.4 – Equação constitutiva para o concreto tracionado	74
FIGURA 4.5 – Deformações principais e eixos de ortotropia	79
FIGURA 4.6 – Modelo constitutivo bilinear para o aço	82
FIGURA 5.1 – Geometria e carregamento das vigas ensaiadas por DECANINI.....	85
FIGURA 5.2 – Malha de elementos finitos empregada nas análises das vigas de DECANINI.....	87
FIGURA 5.3 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-075-1	88
FIGURA 5.4 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-075-2.....	88
FIGURA 5.5 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-075-3.....	89
FIGURA 5.6 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-100-1	89
FIGURA 5.7 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-100-2.....	90
FIGURA 5.8 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-100-3.....	90

FIGURA 5.9 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-200-1	91
FIGURA 5.10 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-200-2	92
FIGURA 5.11 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-200-3	92
FIGURA 5.12 – Características geométricas dos pilares esbeltos	93
FIGURA 5.13 - Curva carga-deslocamento para os pilares P1 e P2 de GOYAL e JACKSON	94
FIGURA 5.14 - Curva carga-deslocamento para o pilar #32 de CLAESON e GYLLTOFT	97
FIGURA 5.15 - Curva carga-deslocamento para a viga-coluna de Zürich	98
FIGURA 5.16 – Detalhamento da viga-parede WT-3.....	99
FIGURA 5.17 – Malha de elementos finitos para a viga-parede WT-3.....	100
FIGURA 5.18 – Curvas carga-deslocamento para a viga-parede WT-3.....	101
FIGURA 6.1 – Função densidade de probabilidade para a distribuição normal.....	107
FIGURA 6.2 – Função densidade espectral $Sf_{\phi}(\kappa_1, \kappa_2)$, com $b_1 = b_2 = 10$ cm.....	112
FIGURA 6.3 – Função densidade espectral $Sf_{\phi}(\kappa_1, \kappa_2)$, com $b_1 = b_2 = 50$ cm.....	112
FIGURA 6.4 – Função densidade espectral $Sf_{\phi}(\kappa_1, \kappa_2)$, com $b_1 = b_2 = 100$ cm.....	113
FIGURA 6.5 – Função de autocorrelação $Rf_{\phi}(\xi_1, \xi_2)$, com $b_1 = b_2 = 10$ cm.....	113
FIGURA 6.6 – Função de autocorrelação $Rf_{\phi}(\xi_1, \xi_2)$, com $b_1 = b_2 = 50$ cm.....	114
FIGURA 6.7 – Função de autocorrelação $Rf_{\phi}(\xi_1, \xi_2)$, com $b_1 = b_2 = 100$ cm.....	114
FIGURA 6.8 – Campo estocástico $f(x,y)$, com $b_1 = b_2 = 10$ cm.....	115
FIGURA 6.9 – Campo estocástico $f(x,y)$, com $b_1 = b_2 = 50$ cm.....	115
FIGURA 6.10 – Campo estocástico $f(x,y)$, com $b_1 = b_2 = 100$ cm.....	116
FIGURA 6.11 – Características geométricas de uma estrutura plana de concreto armado	119
FIGURA 6.12 – Esquema do funcionamento do Método de Monte Carlo	122
FIGURA 7.1 – Histograma para concretos de mesma resistência média f_{cm}	127
FIGURA 7.2 – Histograma para concretos de mesmo f_{ck}	128
FIGURA 7.3 – Variação da resistência do concreto ao longo da altura de diversos elementos estruturais (BUNGEY, 1989, citado por GUTSCHOW, 1995).....	130
FIGURA 7.4 – Campo estocástico de f_c , $b_1 = b_2 = 50$ cm.....	131

FIGURA 7.5 – Campo estocástico de f_c , $b_1 = b_2 = 200$ cm.....	131
FIGURA 7.6 – Campo estocástico de f_c , $b_1 = b_2 = 10.000$ cm.....	132
FIGURA 7.7 – Geometria e carregamento para as vigas VA, VB e VC, para testes paramétricos.....	137
FIGURA 7.8 - Malha de elementos finitos para metade da viga: simetria geral	140
FIGURA 7.9 – Malha de elementos finitos para toda a viga: sem simetria.....	140
FIGURA 7.10 – Curva carga-deslocamento para a viga VA	141
FIGURA 7.11 – Curva carga-deslocamento para a viga VB	141
FIGURA 7.12 – Curva carga-deslocamento para a viga VC	142
FIGURA 7.13 – Convergência estatística do valor esperado da flecha central da viga VB.....	144
FIGURA 7.14 – Convergência estatística do coeficiente de variação da flecha central da viga VB.....	144
FIGURA 7.15 – Convergência estatística do valor esperado da resistência da viga VB.....	145
FIGURA 7.16 – Convergência estatística do coeficiente de variação da resistência da viga VB.....	145
FIGURA 7.17 – Pilar para testes paramétricos	150
FIGURA 7.18 – Curva carga-deslocamento para o pilar PA	153
FIGURA 7.19 – Curva carga-deslocamento para o pilar PB	154
FIGURA 7.20 – Curva carga-deslocamento para o pilar PC	154
FIGURA 7.21 – Convergência estatística do valor esperado da resistência do pilar PB	156
FIGURA 7.22 – Convergência estatística do coeficiente de variação resistência do pilar PB	156
FIGURA 7.23 – Relação $E[a] / a_o$ x carga, para a viga VA	160
FIGURA 7.24 – Relação $E[a] / a_o$ x carga, para a viga VB.....	161
FIGURA 7.25 – Relação $E[a] / a_o$ x carga, para a viga VC.....	161
FIGURA 7.26 – Evolução de V_a com o aumento da carga, para a viga VA	163
FIGURA 7.27 – Evolução de V_a com o aumento da carga, para a viga VB	163
FIGURA 7.28 – Evolução de V_a com o aumento da carga, para a viga VC	164

FIGURA 7.29 - Relação $E[a] / a_o$ x força normal, para o pilar PA	166
FIGURA 7.30 - Relação $E[a] / a_o$ x força normal, para o pilar PB	166
FIGURA 7.31 - Relação $E[a] / a_o$ x força normal, para o pilar PC	167
FIGURA 7.32 - Evolução de V_a com o aumento da força normal, para o pilar PA	168
FIGURA 7.33 - Evolução de V_a com o aumento da força normal, para o pilar PB	168
FIGURA 7.34 - Evolução de V_a com o aumento da força normal, para o pilar PC	169
FIGURA 8.1 – Variável normal reduzida margem de segurança normal reduzida e índice de confiabilidade β	174
FIGURA 8.2 – Viga biapoiada sob carga distribuída, de seção retangular, para análise probabilística.....	175
FIGURA 8.3 – Curvas carga-deslocamento para as vigas V1, V2 e V3	179
FIGURA 8.4 – Malha de elementos finitos empregada nas análises das vigas V1, V2 e V3	180
FIGURA 8.5 – Convergência estatística do valor esperado da flecha central das vigas V1, V2 e V3	181
FIGURA 8.6 – Convergência estatística do coef. de variação da flecha central para as vigas V1, V2 e V3.	181
FIGURA 8.7 – Histograma da flecha central para a viga V1	182
FIGURA 8.8 – Histograma da flecha central para a viga V2.....	183
FIGURA 8.9 – Histograma da flecha central para a viga V3.....	183
FIGURA 8.10- Gráfico de Probabilidade Normal para a flecha central da viga V1	184
FIGURA 8.11- Gráfico de Probabilidade Normal para a flecha central da viga V2.....	184
FIGURA 8.12- Gráfico de Probabilidade Normal para a flecha central da viga V3.....	185
FIGURA 8.13 – Convergência estatística da resistência, para as vigas V1, V2 e V3	186
FIGURA 8.14 – Convergência estatística do coeficiente de variação da resistência para as vigas V1, V2 e V3	187
FIGURA 8.15 – Histograma para a resistência última da viga V1	188
FIGURA 8.16 – Histograma para a resistência última da viga V2	188
FIGURA 8.17 – Histograma para a resistência última da viga V3	189
FIGURA 8.18 – Gráfico de Probabilidade Normal para a resistência última da viga V1..	189
FIGURA 8.19 – Gráfico de Probabilidade Normal para a resistência última da viga V2..	190

FIGURA 8.20 – Gráfico de Probabilidade Normal para a resistência última da viga V3..	190
FIGURA 8.21 – Geometria e carregamento dos pilares de P1 a P27.....	193
FIGURA 8.22 – Convergência estatística do valor esperado da resistência dos pilares P04, P17 e P26.....	197
FIGURA 8.23 – Convergência estatística do coeficiente de variação da resistência dos pilares P04, P17 e P26.....	198
FIGURA 8.24 – Histograma da resistência para o pilar P04	199
FIGURA 8.25 – Histograma da resistência para o pilar P17	199
FIGURA 8.26 – Histograma da resistência para o pilar P26	200
FIGURA 8.27 – Gráfico de Probabilidade Normal para a resistência do pilar P04.....	200
FIGURA 8.28 – Gráfico de Probabilidade Normal para a resistência do pilar P17.....	201
FIGURA 8.29 – Gráfico de Probabilidade Normal para a resistência do pilar P26.....	201
FIGURA 8.30 – Influência da taxa de armadura ρ no valor de β , para os pilares com $\lambda = 26$	207
FIGURA 8.31 – Influência da taxa de armadura ρ no valor de β , para os pilares com $\lambda = 52$	208
FIGURA 8.32 – Influência da taxa de armadura ρ no valor de β , para os pilares com $\lambda = 78$	208
FIGURA 8.33 – Influência da relação e_1/h no valor de β , para os pilares com $\lambda = 26$	209
FIGURA 8.34 – Influência da relação e_1/h no valor de β , para os pilares com $\lambda = 52$	210
FIGURA 8.35 – Influência da relação e_1/h no valor de β , para os pilares com $\lambda = 78$	210
FIGURA 8.36 – Influência do índice de esbeltez λ no valor de β , para pilares com $\rho = 0,80\%$	211
FIGURA 8.37 – Influência do índice de esbeltez λ no valor de β , para pilares com $\rho = 1,50\%$	212
FIGURA 8.36 – Influência do índice de esbeltez λ no valor de β , para pilares com $\rho = 3,0\%$	212

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

- A_c - área da seção transversal de concreto
- \mathbf{A}_{NL}^e - vetor de ações nodais não-lineares do elemento
- \mathbf{A}_{NL} - vetor de ações nodais não-lineares da estrutura
- $(\mathbf{A}_{NL})_S^e$ - vetor de ações nodais não-lineares da armadura, do elemento
- $(\mathbf{A}_L)_S^e$ - vetor de ações nodais lineares da armadura, do elemento
- A_s - área da seção transversal da armadura tracionada pela ação exclusiva do momento fletor
- A_s' - área da seção transversal da armadura comprimida pela ação exclusiva do momento fletor
- A_{sw} - área da seção transversal dos estribos
- \mathbf{A}_0 - matriz contendo derivadas dos deslocamentos em um ponto
- B_0 - configuração indeformada do corpo
- B_t - configuração deformada do corpo, no instante t
- \mathbf{B} - matriz de deformações completa
- \mathbf{BL} - matriz de deformações linear
- \mathbf{Bs} - vetor que contém as relações deformação-deslocamento para a armadura
- \mathbf{BNL} - matriz de deformações não-linear
- \mathbf{C}_{cte} - matriz de covariância entre a resistência à compressão, a resistência à tração e o módulo de deformação longitudinal do concreto
- \mathbf{D} - matriz constitutiva (matriz de constantes elásticas)
- \mathbf{E} - tensor de deformações de Green
- E_1, E_2 - módulos de deformação longitudinal secantes do concreto segundo os eixos de ortotropia 1 e 2
- E_{cm} - módulo de deformação longitudinal médio do concreto
- E_{cs} - módulo de deformação longitudinal secante do concreto

E_{co}	- módulo de deformação longitudinal na origem do concreto
E_{ij}	- componentes do tensor de deformações de Green
$(EI)_{IIo}$	- rigidez a flexão de uma viga no Estádio II puro
$E[]$	- valor esperado de uma variável aleatória
E_s	- módulo de deformação longitudinal da armadura
E_{s1}	- módulo de deformação longitudinal da armadura antes do escoamento
E_{s2}	- módulo de deformação longitudinal da armadura após o escoamento
F	- tensor gradiente de deformação
F_d	- valor de cálculo da força normal
F_k	- valor característico da força normal
$F_X(x)$	- função de distribuição de probabilidade da variável aleatória X
G	- matriz gradiente
G	- carga concentrada permanente
G_k	- valor característico da carga concentrada permanente
G_{12c}	- módulo de deformação por corte reduzido, no plano do esmagamento
G_{12r}	- módulo de deformação por corte reduzido, no plano da fissura
G_{co}	- módulo de deformação por corte na origem
H	- tensor gradiente dos deslocamentos
$H_j(\chi)$	- função de forma unidimensional para armadura
I	- matriz identidade
J	- matriz jacobiana
$ \mathbf{J} $	- determinante da matriz jacobiana
J	- determinante jacobiano
\mathbf{K}_L^e	- matriz de rigidez linear do elemento
\mathbf{K}_C	- contribuição do concreto para a matriz de rigidez do elemento
\mathbf{K}_L	- matriz de rigidez linear da estrutura
\mathbf{K}_S	- contribuição do aço para a matriz do rigidez do elemento
\mathbf{K}_T	- matriz de rigidez tangente da estrutura
L	- comprimento indeformado, comprimento do vão da viga ou do pilar

L	- matriz triangular inferior
M	- momento fletor, margem de segurança
N	- vetor normal unitário, na configuração indeformada do corpo, matriz de interpolação do elemento
N_1, N_2	- número de termos em uma série
N_j	- componentes do vetor normal unitário, na configuração indeformada do corpo
$N(\xi, \eta)$	- função de interpolação do elemento
P	- carga concentrada
P_f	- probabilidade de falha
P_d	- valor de cálculo da carga concentrada
P_k	- valor característico da carga concentrada
P_u	- carga de ruptura
P	- vetor de ações nodais da estrutura
P^e	- vetor de ações nodais do elemento
P_x, P_y	- carga concentrada atuando nas direções x e y , respectivamente
Q	- carga concentrada acidental
Q_k	- valor característico da carga concentrada acidental
R	- resistência ou carga de ruptura da estrutura
R_o	- valor da resistência ou carga de ruptura obtido com as propriedades médias
R_{fofo}	- função de autocorrelação do campo estocástico $f_o(x,y)$
S	- superfície indeformada do corpo, ação ou solicitação atuante
S_o	- superfície do corpo na configuração indeformada
S_t	- superfície do corpo na configuração deformada, no instante t
S_{fofo}	- função de densidade espectral do campo estocástico $f_o(x,y)$
$\bar{\mathbf{T}}$	- Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff
\bar{T}_{ij}	- componentes do Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff
T	- Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, vetor de tensões de Piola-Kirchhoff II
T_ε	- matriz de rotação do vetor de deformações do sistema xoy para o sistema $Io2$
T_{ij}	- componentes do Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff
U	- vetor de deslocamentos nodais
U^e	- vetor de deslocamentos nodais do elemento

V	- volume indeformado do corpo, coeficiente de variação de uma variável
$Var[]$	- variância de uma variável aleatória
V_d	- força cortante de cálculo
V_o	- volume na configuração indeformada
V_S	- volume
V_t	- volume na configuração deformada no instante t
V_a	- coeficiente de variação da flecha
\mathbf{X}	- vetor posição da partícula na configuração indeformada
X	- coordenada cartesiana na posição indeformada, variável aleatória genérica
X_1, X_2	- coordenadas cartesianas em notação indicial
Y	- coordenada cartesiana na posição indeformada

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a	- flecha, deslocamento transversal de vigas e pilares
a_o	- flecha determinada com as propriedades médias dos materiais e da geometria
$a_c(x,y)$	- componente aleatória da resistência à compressão do concreto
$a_t(x,y)$	- componente aleatória da resistência à tração do concreto
$a_e(x,y)$	- componente aleatória do módulo de deformação longitudinal do concreto
b	- largura da seção transversal retangular
b_n	- valor nominal da largura da seção transversal retangular
b_w	- largura da seção transversal da viga
b_1, b_2	- parâmetros proporcionais à distância de correlação do campo estocástico
$\bar{\mathbf{b}}$	- vetor de pseudo-forças por unidade de volume indeformado
\bar{b}_i	- componentes do vetor de pseudo-forças por unidade de volume indeformado
d	- altura útil da seção transversal, distância da armadura tracionada pela ação exclusiva do momento fletor ao bordo comprimido da seção transversal
d'	- distância da armadura comprimida pela ação exclusiva do momento fletor ao bordo comprimido da seção transversal
e	- excentricidade da força normal em pilares
e_1, e_2	- excentricidade de primeira ordem, excentricidade de segunda ordem

$f(x,y)$	- simulação do campo estocástico $f_o(x,y)$
$f_o(x,y)$	- campo estocástico bidimensional, de média zero e variância unitária
f_c	- resistência à compressão do concreto
f_{ck}	- resistência característica à compressão do concreto
f_{cm}	- resistência média à compressão do concreto;
f_{cd}	- resistência de cálculo à compressão do concreto
f_{ct}	- resistência à tração direta do concreto
f_{ctm}	- resistência média à tração direta do concreto
f_{pr}	- resistência prismática à compressão do concreto
$f_X(x)$	- função de densidade de probabilidade da variável aleatória X
f_y	- resistência ao escoamento do aço
f_{yd}	- resistência de cálculo ao escoamento do aço
f_{yk}	- resistência característica ao escoamento do aço
f_{ym}	- resistência média ao escoamento do aço
g	- carga distribuída permanente
g_k	- valor característico da carga distribuída permanente
h	- espessura da chapa ou placa, altura da seção transversal retangular
m	- variável aleatória normal padronizada margem de segurança
n	- relação entre a deformação última do concreto e a deformação que corresponde à tensão máxima, número de simulações de Monte Carlo
\mathbf{n}	- vetor normal unitário, na configuração deformada do corpo
p	- carga distribuída total
p_d	- valor de cálculo da carga distribuída total
p_k	- valor característico da carga distribuída total
p_u	- carga distribuída total de ruptura
q	- carga distribuída accidental
q_k	- valor característico da carga distribuída accidental
s	- coordenada ao longo do eixo da armadura
t	- tempo
\mathbf{t}	- vetor tensão, vetor de forças por unidade de superfície deformada
$\bar{\mathbf{t}}$	- vetor de pseudo-forças por unidade de superfície indeformada
t_x, t_y	- carga distribuída atuando nas direções x e y , respectivamente

u	- deslocamento na direção x
u_1, u_2	- deslocamento segundo as direções x e y , respectivamente; números randômicos de distribuição uniforme
u_i	- componentes do vetor de deslocamento
\mathbf{u}	- vetor de deslocamentos
v	- deslocamento na direção y
\mathbf{v}	- vetor de atualização do método BFGS
\mathbf{w}	- vetor de atualização do método BFGS
x	- coordenada cartesiana, coordenada cartesiana na posição deformada, valor assumido por uma variável aleatória
x_i	- componentes do vetor de coordenadas cartesianas na posição deformada
$\hat{\mathbf{x}}$	- função vetorial biunívoca
x_1, x_2	- coordenadas cartesianas, em notação indicial, da partícula na configuração deformada
x_{IIo}	- posição da linha neutra, em relação ao bordo comprimido pela ação exclusiva do momento fletor, no Estádio II puro
x_n, y_n	- coordenadas cartesianas na posição deformada
y	- coordenada cartesiana, coordenada cartesiana na posição deformada
z_1, z_2, z_3	- variável aleatória gaussiana, de média zero e variância unitária

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ	- incremento
Δb	- variação da largura da seção transversal em relação ao seu valor nominal
$\overline{\Delta b}$	- variação média da largura da seção transversal em relação ao seu valor nominal
Φ_{n1n2}	- ângulo de fase aleatório, de distribuição uniforme de probabilidade
Σ	- somatório

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α	- relação entre as tensões principais σ_1 e σ_2 , ângulo entre os estribos e o eixo da viga.
β	- índice de confiabilidade, ângulo entre o eixo da armadura e o eixo x
γ	- deformação por corte
γ	- vetor incremento de desequilíbrio
δ	- primeira variação de uma função (Cálculo Variacional)
δ	- vetor incremento de deslocamentos
δ_{ij}	- operador delta de Kroenecker (Cálculo Tensorial)
ε	- deformação específica axial
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	- deformações principais
$\varepsilon_{1u}, \varepsilon_{2u}$	- deformações uniaxiais equivalentes segundo as direções de ortotropia
$\varepsilon_{c1f}, \varepsilon_{c2f}$	- deformações correspondentes às tensões máximas, segundo as direções de ortotropia
ε_{ctu}	- deformação última para o concreto tracionado (tension-stiffening)
ε_{cu}	- deformação última para o concreto comprimido
$\mathbf{\varepsilon}$	- parcela linear do tensor de deformações de Green, vetor de componentes de deformação (elementos finitos)
$\mathbf{\varepsilon}_L$	- parcela linear do vetor de deformações
$\mathbf{\varepsilon}_{NL}$	- parcela não-linear do vetor de deformações
ε_{ij}	- componentes lineares do tensor de deformações de Green
$\varepsilon_s, \varepsilon_{su}$	- deformação axial ao longo do eixo da armadura, deformação de ruptura do aço
η	- coordenada curvilínea
$\boldsymbol{\eta}$	- parcela não-linear do tensor de deformações de Green
η_{ij}	- componentes não-lineares do tensor de deformações de Green
θ	- ângulo entre a direção l dos eixos de ortotropia e o eixo dos x
κ_1, κ_2	- números de onda, segundo as direções x e y , do campo estocástico
λ	- índice de esbeltez de pilares
ν	- coeficiente de Poisson, esforço normal reduzido (adimensional)
μ	- média (valor esperado) de uma variável aleatória

ξ	- coordenada curvilínea
ξ_1, ξ_2	- distância entre dois pontos do campo estocástico, segundo os eixos x e y
ρ	- taxa geométrica de armadura longitudinal de vigas e pilares
ρ_w	- taxa geométrica de armadura transversal (estribos) em vigas
σ_x	- desvio padrão de uma variável aleatória
σ_x^2	- variância de uma variável aleatória
σ	- tensão normal
σ_1, σ_2	- tensões principais
σ_{1f}, σ_{2f}	- tensões máximas segundo as direções de ortotropia
$\boldsymbol{\sigma}$	- tensor de tensões de Cauchy, vetor de tensões de Cauchy (elementos finitos)
τ	- tensão de corte
τ_{wd}	- tensão de corte de cálculo
ϕ	- diâmetro das barras da armadura
ϕ_t	- diâmetro da armadura transversal (estribos)
χ	- coordenada normalizada do eixo da armadura
$\boldsymbol{\psi}$	- vetor de forças desequilibradas, vetor de desequilíbrio
ψ_1	- fator de redução para combinação freqüente de ações para Estado Limite de Serviço
ψ_2	- fator de redução para combinação quase permanente de ações para Estado Limite de Serviço

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo para análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos. O modelo permite mostrar como as incertezas presentes nos principais parâmetros do comportamento de vigas e pilares afetam a variabilidade da resposta destas estruturas.

Inicialmente é desenvolvida, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, uma formulação para análise não-linear física e geométrica de estruturas, submetidas a um estado plano de tensão, utilizando-se a formulação Lagrangeana Total.

É apresentado um modelo para análise não-linear de estruturas de concreto através do método dos elementos finitos. O concreto é modelado através de elementos isoparamétricos bidimensionais, quadráticos, de oito nós, com dois graus de liberdade por nó. A armadura é representada através do modelo incorporado. Para resolver o sistema de equações não-lineares resultante, emprega-se o método BFGS, com o uso de “line-searches”.

O modelo constitutivo bidimensional para o concreto é baseado naquele proposto por DARWIN, empregando-se o conceito de deformação uniaxial equivalente e o critério de ruptura bidimensional de KUPFER e GERSTLE. Após a fissuração, o modelo inclui o efeito de tension-stiffening e a rigidez ao corte no plano da fissura. O aço é modelado como um material elasto-plástico perfeito ou com um endurecimento linear, após o escoamento.

É feita a comprovação experimental do modelo de elementos finitos, comparando-se análises numéricas com os resultados de ensaios de vigas, de pilares, e de uma viga-parede.

Para a análise probabilística de estruturas, através do método de Monte Carlo, as propriedades do concreto têm a sua variabilidade modelada através de um campo estocástico bidimensional, gerado através do método da representação espectral. As propriedades da armadura e as dimensões da estrutura são consideradas como variáveis aleatórias de distribuição normal.

São realizados testes paramétricos para vigas e pilares de concreto armado. O efeito da variação dos parâmetros estatísticos do concreto, da armadura e da geometria na resposta da estrutura é verificado.

Após a definição do índice de confiabilidade β , é feita uma análise probabilística de vigas e de pilares projetados de acordo com as prescrições da NBR-6118/1980. Estas estruturas têm o seu nível de segurança avaliado, para uma determinada distribuição de carregamento, tanto em relação aos Estados Limites de Serviço, como em relação aos Estados Limites Últimos.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a model for probabilistic analysis of reinforced concrete structures, under a plane stress state, through the finite element method. This model allows to show how the uncertainties that appear in the main parameters of the behavior of beams and columns affect the variability of the mechanical response of these structures.

Initially, it is developed, through the Principle of the Virtual Work, a formulation for physical and geometric nonlinear analysis of plane structures, submitted to a plane stress state, using the Total Lagrangean formulation.

A model is presented for nonlinear analysis of concrete structures through the finite element method. The concrete is modeled through two-dimensional isoparametric quadratic elements, with two degrees of freedom per node. The reinforcement is represented through the embedded model. To solve the resultant nonlinear system of equations, the BFGS technique is used, with additional line-searches.

The two-dimensional constitutive model for concrete is based on that proposed by DARWIN, using the concept of equivalent uniaxial strain and the two-dimensional failure criterion of KUPFER and GERSTLE. After the cracking of concrete, the model includes the tension-stiffening effect and the shear stiffness in the plane of the crack. The steel is modeled as a perfect elasto-plastic material or with a linear hardening after yielding.

The experimental validation of the finite element model is made, comparing the numerical analysis with tests results of beams, columns, and a shear-wall.

For the probabilistic analysis of structures, through Monte Carlo's method, the concrete properties have their variability modeled through a two-dimensional stochastic field, generated through the spectral representation method. Reinforcement properties and structure dimensions are considered as normal distribution random variables.

Parametric tests are accomplished for beams and columns of reinforced concrete. The effect of the variation of the statistical parameters of concrete, steel and dimensions in the structure response is verified.

After the definition of the reliability index β , a probabilistic analysis of beams and columns, designed in agreement with the prescriptions of NBR-6118/1980, is made. These structures have their level of safety evaluated for a fixed load distribution, for both Service and Ultimate Limit States.

1 – INTRODUÇÃO

Os últimos trinta anos assistiram a uma grande evolução nos métodos de análise e projeto de estruturas de concreto armado. Passou-se da tradicional análise elástica linear para modelos complexos de análise não-linear de estruturas, através do método dos elementos finitos.

Estes novos modelos permitem a inclusão de fenômenos como o da não-linearidade da relação tensão-deformação dos materiais; a fissuração, a fluência e a retração do concreto; o comportamento elasto-plástico da armadura; não-linearidades de origem geométrica; etc. Tal nível de sofisticação possibilita que se acompanhe a resposta de uma estrutura de concreto, desde os estágios iniciais de carga até as imediações da ruptura, com muito boa precisão (DARWIN, 1991).

Esta evolução nos processos de análise foi impulsionada em grande parte pelo enorme progresso atingido na fabricação de computadores digitais, notadamente o desenvolvimento de microcomputadores de uso pessoal (PC), com grande capacidade de processamento numérico. Este fato permitiu a utilização em larga escala de métodos numéricos na solução de problemas de engenharia, principalmente na área de Estruturas, além de incentivar o desenvolvimento de novas ferramentas de análise.

Contudo, a análise de estruturas de concreto, linear ou não-linear, normalmente ainda é feita com base em valores determinísticos adotados para as propriedades dos materiais e para as dimensões da estrutura. Usualmente são empregados os valores médios, entre os diversos dados obtidos experimentalmente, para as propriedades mecânicas dos materiais. Para as dimensões da estrutura costumam ser utilizados os valores nominais, especificados em projeto.

Porém, sempre existe alguma incerteza sobre que valor as propriedades mecânicas dos materiais irão assumir na estrutura, e sobre quais serão as suas características geométricas finais, após a construção. Portanto, as resistências dos materiais e as dimensões da estrutura são, na realidade, variáveis aleatórias que possuem um determinado valor médio, uma certa medida de dispersão (variância ou desvio padrão) e uma distribuição de probabilidade, que pode ser estimada.

Assim sendo, a resposta da estrutura a um determinado carregamento é, na verdade, uma função de diversas variáveis aleatórias, que afetam o seu desempenho. Desta forma, a

própria resposta da estrutura será também uma variável aleatória. Deslocamentos, deformações, tensões e esforços solicitantes são, por via de consequência, variáveis aleatórias, que podem ser caracterizadas por um valor esperado, desvio padrão e uma distribuição de probabilidade.

Portanto, embora uma análise feita com base nas propriedades médias dos materiais e nas dimensões nominais da construção produza uma boa estimativa do seu comportamento, é importante determinar-se o quanto a variabilidade destas propriedades e dimensões pode afetar a resposta da estrutura.

Uma maneira de se determinar o efeito da variabilidade da geometria e das propriedades dos materiais no comportamento da estrutura é a utilização do método de simulações de Monte Carlo (ANG e TANG, 1984). Em primeiro lugar, as variabilidades dos principais parâmetros que influem no comportamento da estrutura devem ser representadas através de distribuições de probabilidade matematicamente definidas. Em segundo lugar, deve-se dispor de um modelo matemático que relacione os principais parâmetros do comportamento da estrutura com o seu desempenho sob determinado carregamento.

Então, os dados de entrada podem ser gerados aleatoriamente e, através do modelo, a correspondente resposta da estrutura pode ser obtida. Cada análise, feita desta forma, chama-se de uma simulação. Após a realização de inúmeras simulações obtém-se uma amostra suficientemente grande de respostas da estrutura. Finalmente, através de uma análise estatística, pode-se estimar os principais momentos e a distribuição de probabilidade dos parâmetros da resposta da estrutura como deslocamentos, deformações, tensões, reações de apoio e carga de ruptura.

Deste modo, pode-se determinar como a dispersão dos parâmetros da estrutura influencia a variação de sua resposta. Este procedimento pode ser designado por análise probabilística de estruturas.

Os principais empecilhos à utilização do método de Monte Carlo são os recursos computacionais e o tempo de processamento necessários para a realização de numerosas simulações, para que se tenha a convergência estatística dos resultados. Contudo, dados os rápidos avanços que têm sido alcançados pela indústria da informática, estas dificuldades vêm sendo cada vez mais reduzidas, dia após dia, e o método de Monte Carlo firma-se como uma ferramenta poderosa para análise probabilística de estruturas (SHINOZUKA e DEODATIS, 1996).

Sob o ponto de vista do projeto de estruturas de concreto armado, também houve um grande progresso, quando se passou do método determinístico das tensões admissíveis, para o

método semi-probabilístico de cálculo, com a utilização de coeficientes de segurança parciais (FUSCO, 1977). O emprego do método semi-probabilístico no dimensionamento proporcionou a construção de estruturas ao mesmo tempo mais esbeltas, econômicas e seguras.

O projeto de estruturas de concreto armado, de acordo com a norma NBR-6118/1980, “Projeto e Execução de Obras em Concreto Armado” (ABNT, 1980b), é feito através de um processo semi-probabilístico. Assim, são utilizados valores nominais para as dimensões da estrutura, e valores característicos (correspondentes ao quantil inferior de 5%) para as resistências dos materiais concreto e aço. Para as cargas são empregados valores característicos correspondentes ao quantil superior de 5%. Aplicam-se coeficientes de minoração sobre as resistências e de majoração para as cargas, chegando-se a um determinado valor para a resistência da estrutura.

Contudo, como as resistências dos materiais e as dimensões da estrutura são variáveis aleatórias, existe sempre alguma incerteza sobre que valores assumirão na estrutura concluída. Isto faz com que a própria resistência da estrutura seja também uma variável aleatória.

Por outro lado, embora os valores característicos das cargas a serem utilizadas no dimensionamento estejam especificados na norma NBR-6120/1980, “Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações” (ABNT, 1980a), as ações, permanentes ou variáveis, que vão atuar sobre a estruturas são também variáveis aleatórias, que apresentam uma certa dispersão em torno de seu valor médio. Logo, o valor máximo da carga ao qual a estrutura estará submetida ao longo de sua vida útil também não pode ser previsto com exatidão.

Conseqüentemente, a margem de segurança, ou seja, a diferença entre a resistência da estrutura e a carga atuante, deverá sofrer oscilações. Portanto, um dos objetivos primordiais de uma norma técnica de projeto de estruturas é assegurar que a probabilidade da margem de segurança de uma determinada estrutura anular-se seja mínima.

Uma das formas de se avaliar o nível de segurança atingido no projeto de uma estrutura é determinar o índice de confiabilidade (β) (ANG e TANG, 1984), e a correspondente probabilidade de falha (P_f) associada a β , tanto no que se refere aos Estados Limites de Serviço, como aos Estados Limites Últimos.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo para análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob um estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos. Este modelo mostra como as incertezas presentes nos principais parâmetros do comportamento de vigas e pilares afetam a variabilidade da resposta da estrutura, sob um determinado carregamento.

No Capítulo 2, é desenvolvida, de forma analítica, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, uma formulação para análise não-linear física e geométrica de estruturas planas, submetidas a um estado plano de tensão. Para a inclusão dos efeitos de grandes deslocamentos é empregada a formulação Lagrangeana Total, que utiliza como sistema de referência a geometria indeformada da estrutura.

A análise não-linear física e geométrica de estruturas de concreto armado somente é possível através da utilização de métodos numéricos. Portanto, no Capítulo 3, é apresentado um modelo para análise não-linear de estruturas de concreto através do método dos elementos finitos. O concreto é modelado através de elementos isoparamétricos bidimensionais, quadráticos, de oito nós, com dois graus de liberdade por nó (OWEN e HINTON, 1980). A armadura é representada através do modelo incorporado, proposto por ELWI e HUDREY (1989). Cada barra de armadura é considerada como uma linha mais rígida dentro do elemento de concreto, que resiste apenas a esforços axiais. Para resolver o sistema de equações não-lineares resultante, emprega-se o Método BFGS, com o uso de “line-searches” (MATTHIES e STRANG, 1979).

No Capítulo 4, são descritos os modelos constitutivos adotados para os materiais concreto e aço. O modelo constitutivo bidimensional para o concreto é baseado no modelo proposto por DARWIN (1977), empregando-se o conceito de deformação uniaxial equivalente e o critério de ruptura bidimensional de KUPFER e GERSTLE (1973). Para o concreto tracionado, após a fissuração, adota-se uma curva de tension-stiffening, para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras na resistência à tração. A rigidez ao corte no plano da fissura também é considerada. O aço é modelado como um material elasto-plástico perfeito ou com um endurecimento linear, após o escoamento.

No Capítulo 5, é feita a comprovação experimental do modelo de elementos finitos comparando-se análises numéricas com os resultados experimentais obtidos para vigas, pilares, e uma viga-parede de concreto armado.

O Capítulo 6 trata da geração das propriedades aleatórias da estrutura e do método de Monte Carlo. As propriedades do concreto têm a sua variabilidade no espaço modelada através de um campo estocástico bidimensional, gerado através do método da representação espectral (SHINOZUKA e DEODATIS, 1996). As propriedades da armadura e as dimensões da estrutura são consideradas como variáveis aleatórias simples, de distribuição normal. O procedimento para a realização das simulações de Monte Carlo também é detalhado neste capítulo.

Para se ter uma idéia de como as variabilidades das propriedades geométricas e dos materiais, consideradas isoladamente, afetam o comportamento da estrutura, no Capítulo 7, são realizados testes paramétricos para vigas e pilares de concreto armado. A variação dos principais parâmetros das distribuições das propriedades do concreto, da armadura e das dimensões é considerada separadamente e seu efeito na resposta da estrutura verificado.

No Capítulo 8, são apresentadas algumas das possíveis aplicações do modelo desenvolvido neste trabalho. Inicialmente é apresentada a definição do índice de confiabilidade β . Após é feita uma análise probabilística de vigas, sendo em seguida realizada uma análise probabilística de pilares. Estas estruturas, que foram projetadas de acordo com as prescrições da NBR-6118/1980, têm o seu nível de segurança avaliado para uma determinada distribuição de carregamento, tanto em relação aos Estados Limites de Serviço como em relação aos Estados Limites Últimos.

As conclusões obtidas durante a elaboração e a aplicação deste modelo para análise probabilística de estruturas de concreto são resumidas no Capítulo 9. Também são sugeridos futuros desenvolvimentos para o modelo.

Entre os diversos estudos já realizados nesta linha, porém empregando diferentes modelos para a análise da estrutura e para as distribuições de probabilidade das propriedades dos materiais e da geometria, podem ser citados os de ALLEN (1970), GRANT et al. (1978), MIRZA e MACGREGOR (1982), TEIGEN et al. (1991a e 1991b), DUPRAT et al. (1993), RAJASHEKHAR e ELLINGWOOD (1995), REAL e CAMPOS FILHO (1995a, 1995b, 1999, 2000a, 2000b), GOMES et al. (1996), FRANGOPOL et al. (1996), os de ARAÚJO (1997 e 1998), e o de SOARES e VENTURINI (1999).

2 – ANÁLISE DE PROBLEMAS DE ESTADO PLANO DE TENSÃO

2.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma formulação para análise de estruturas que satisfaçam as condições de estado plano de tensão. Esta formulação permite a inclusão de um comportamento não-linear dos materiais e a possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos.

O problema característico do estado plano de tensão é o de uma chapa de pequena espessura, submetida a um carregamento externo contido no plano médio da placa, conforme é mostrado na FIGURA 2.1.

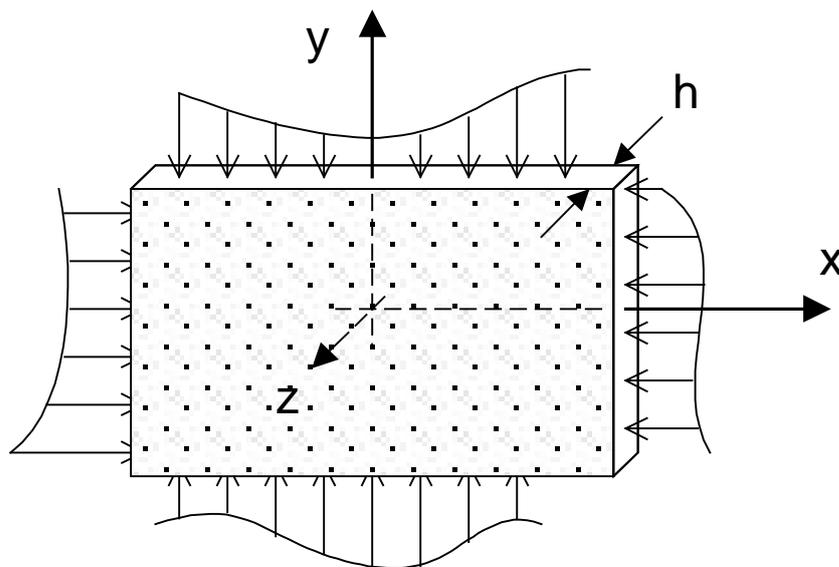


FIGURA 2.1 – Situação de estado plano de tensão

As componentes de tensão σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são nulas em ambas as faces da chapa, podendo admitir-se, em princípio, que são nulas também no interior da chapa. O estado de tensões fica definido apenas pelas componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} , e é denominado estado plano de tensão. Como uma aproximação, pode também ser considerado que estas três componentes são independentes de z , ou seja, elas são constantes ao longo da espessura. Tais componentes são, portanto, funções apenas de x e de y (TIMOSHENKO e GOODIER, 1980).

A formulação desenvolvida abaixo, para a situação de estado plano de tensão, poderá ser aplicada inclusive nos casos em que a espessura h não seja pequena. Contudo, é necessário que não existam cargas fora do plano xoy e que o carregamento atuante seja constante ao longo da espessura da chapa (DYM e SHAMES, 1973).

Na Teoria da Elasticidade, bem como na sua versão simplificada que é a Resistência dos Materiais, trabalha-se com a hipótese de comportamento elástico linear dos materiais. Embora esta simplificação permita resolver uma série de problemas de interesse prático, é bem sabido que diversos materiais, entre eles o concreto armado, apresentam um comportamento acentuadamente não-linear, para estágios mais avançados de carga, além de apresentarem deformações plásticas residuais quando descarregados.

Para poder modelar corretamente o comportamento físico real dos materiais é preciso lançar mão de equações constitutivas (leis tensão-deformação) mais sofisticadas que o simples modelo linear. Dentre os modelos não-lineares mais empregados pode-se citar os modelos baseados na Teoria da Elasticidade Não-linear e na Teoria da Plasticidade (CHEN, 1982).

A não-linearidade física, ou seja, a forma não-linear das relações tensão-deformação, impede o estabelecimento das equações de equilíbrio de forma direta. Torna-se, então, necessária a utilização de métodos alternativos como o Princípio dos Trabalhos Virtuais, que leva à equação de equilíbrio do sistema, sem envolver a equação constitutiva dos materiais.

Além da consideração de que o comportamento dos materiais é elástico linear, é comum também ser empregada a hipótese de que as deformações e os deslocamentos sofridos pela estrutura serão pequenos. Em termos práticos, isto significa que a configuração deformada do corpo carregado não difere em muito da sua forma inicial indeformada.

Este fato acarreta duas conseqüências muito importantes. A primeira é que se torna possível o emprego apenas das parcelas lineares das relações deformação-deslocamento. A segunda é que as equações de equilíbrio podem ser estabelecidas com relação à geometria indeformada do corpo, sem que se cometa grande erro com esta aproximação. Além disso, as tensões são calculadas com relação a um cubo de arestas de comprimento unitário e orientado segundo o sistema de eixos coordenados original.

Na prática ocorrem situações em que, mesmo quando as deformações permanecem pequenas, a configuração deformada do corpo pode afastar-se bastante de sua geometria inicial indeformada. Nestes casos, a determinação precisa dos deslocamentos exige a consideração dos termos não lineares das relações deformação-deslocamento e as equações de equilíbrio devem ser formuladas sobre a geometria deformada do corpo.

Ora, para se conhecer a geometria deformada de um corpo, é necessário adicionar às coordenadas iniciais de seus pontos os deslocamentos provocados pelo carregamento. No entanto, estes deslocamentos são justamente as incógnitas principais do problema.

Depreende-se daí, que o problema deve ser resolvido de forma incremental e iterativa marchando-se através de pequenos incrementos de tempo (ou de carga), e determinando-se configurações deformadas sucessivas até que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas. Trata-se, portanto, de um problema de não-linearidade de origem geométrica.

Além disso, o cubo que inicialmente servia de referência para as tensões se transforma. Ele sofre encurtamentos ou alongamentos em suas arestas e distorções angulares entre as mesmas. O mesmo pode, ainda, ser submetido a rotações de corpo rígido.

A tensão é uma força elementar que atua sobre um elemento de área orientado. Logo, para se chegar às tensões que são fisicamente corretas no corpo deformado (tensões de Cauchy), é necessário lançar-se mão de tensores de tensão auxiliares como o Primeiro e o Segundo tensores de Piola-Kirchhoff, que levam em conta as transformações sofridas pelo sistema de referência.

Para obter uma formulação que permita a análise de estruturas com grandes deslocamentos, será inicialmente feita uma descrição matemática da deformação do corpo. A seguir serão definidos os tensores de tensão de Cauchy e os de Piola-Kirchhoff, sendo também mostradas as relações existentes entre eles.

Finalmente, será desenvolvido o Princípio dos Trabalhos Virtuais, que permitirá o estabelecimento das condições de equilíbrio do corpo de forma independente do material constituinte do mesmo. Será empregada a formulação Lagrangeana Total, em que o sistema de referência é fixado na configuração indeformada do corpo e os deslocamentos são determinados sempre a partir deste ponto.

Como as equações de equilíbrio serão independentes do material, as mesmas poderão ser adaptadas a materiais de comportamento não-linear como o concreto e o aço, o que será feito posteriormente.

2.2 - CONFIGURAÇÕES E DEFORMAÇÕES

Nos desenvolvimentos teóricos mostrados a seguir será utilizada a notação clássica da Teoria da Elasticidade, conforme é utilizada no livro de TIMOSHENKO e GOODIER (1980). No entanto, para que certas deduções possam ser apresentadas de forma mais sintética, será

também empregada a notação indicial, que é usualmente empregada em textos mais modernos de Mecânica do Contínuo (DYM e SHAMES, 1973 e FUNG, 1965).

Como neste trabalho serão abordados apenas problemas de estado plano de tensão, fica subentendido que os índices poderão assumir apenas os valores 1 e 2, que estão associados aos eixos cartesianos x e y , respectivamente. Além disso, nas figuras que se seguem, os corpos serão representados apenas pelo seu plano médio, que é suposto coincidir com o plano xoy .

Inicialmente é feita a descrição do movimento de um sólido deformável, que passa de uma configuração inicial indeformada no tempo $t = 0$, para um estado deformado no instante t atual, conforme ilustra a FIGURA 2.2.

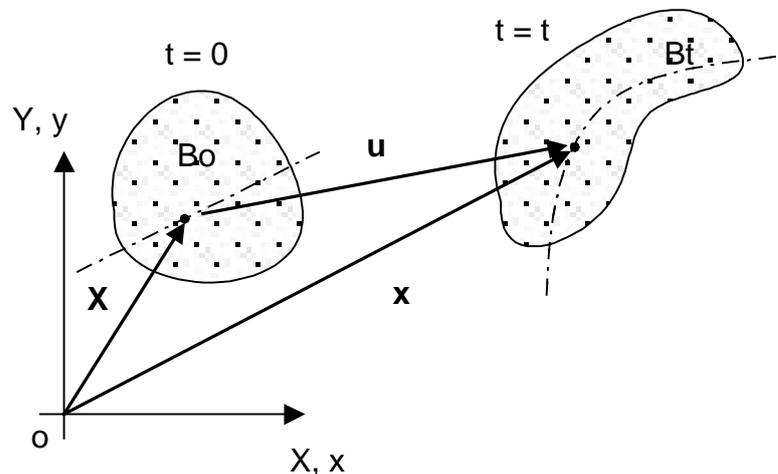


FIGURA 2.2 - Movimento de um corpo deformável

Definindo-se \mathbf{X} como o vetor posição da partícula na posição indeformada, dado por

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

e \mathbf{x} como o vetor posição da partícula na posição deformada, na forma,

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

o vetor deslocamento \mathbf{u} , será dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

A transformação de uma configuração em outra pode ser definida através de uma função vetorial biunívoca, que permite obter \mathbf{x} em função de \mathbf{X} e de t , na forma

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t). \quad (2.4)$$

É possível, então, definir-se o tensor gradiente de deformação \mathbf{F} , dado por

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

tal que

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.6)$$

O tensor \mathbf{F} não é necessariamente simétrico, em geral, tem-se que $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}^T$.

O determinante Jacobiano J é dado por

$$J = \det \mathbf{F} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right|, \quad (2.7)$$

sendo necessário que $J > 0$, para que uma transformação seja válida.

O determinante Jacobiano permite relacionar o elemento de volume deformado dv com o elemento de volume indeformado dV , através da equação

$$dv = J dV, \quad (2.8)$$

sendo

$$dV = h dS, \quad (2.9)$$

onde h é a espessura do corpo e dS é um elemento de superfície.

Com base nas definições anteriores é possível obter-se a expressão do tensor de deformações de Green, a partir da relação entre um elemento de linha no sistema deformado dl e outro no sistema indeformado dL . Ou seja,

$$dl^2 - dL^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} . \quad (2.10)$$

O tensor de deformações de Green \mathbf{E} será dado, então, por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.11)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade 2x2 (COIMBRA, 1981).

Expandindo-se (2.11), tem-se que:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x & E_{xy} \\ E_{xy} & E_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X} \right)^2 - 1 & \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} & \left(\frac{\partial x}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y} \right)^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde E_x e E_y são as deformações específicas axiais nas direções x e y , respectivamente e E_{xy} é a deformação específica de distorção.

Empregando-se a relação (2.3) é possível expressar-se o tensor de deformações de Green em função dos deslocamentos \mathbf{u} , na forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Ou ainda,

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\eta} \quad (2.15)$$

sendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ a parcela linear do tensor de deformações de Green dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\right) & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

e $\boldsymbol{\eta}$ a parcela não linear do mesmo dada por

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 & \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} & \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

No regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, o produto $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ pode ser desprezado em presença das demais parcelas de (2.13), restando

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T). \quad (2.18)$$

2.3 - O PROBLEMA DAS TENSÕES

Seja um elemento de um corpo sólido, que na sua configuração indeformada possui uma área elementar dS em sua face, cujo vetor normal unitário é \mathbf{N} , conforme é mostrado na FIGURA 2.3. Quando este corpo é carregado, este elemento se deforma passando a ter uma área elementar ds , cuja orientação é a do vetor normal unitário \mathbf{n} . Sobre este elemento deformado atua uma força elementar $d\mathbf{F}$.

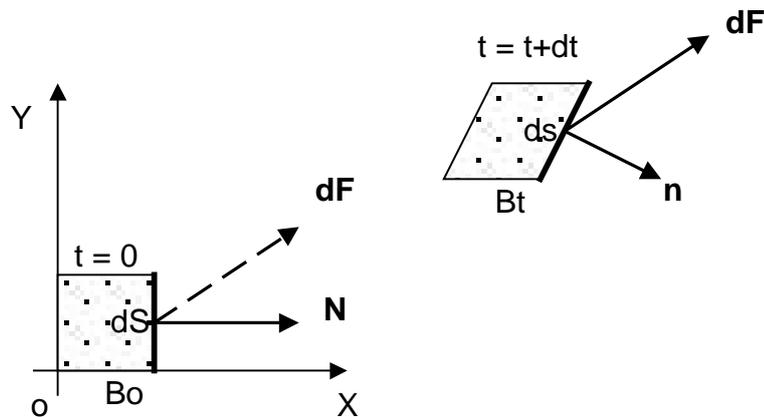


FIGURA 2.3 - O problema das tensões

Segundo sua definição clássica, o vetor tensão \mathbf{t} , atuante no sistema deformado, é dado por

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{F}}{ds} \quad (2.19)$$

De acordo com a Lei de Cauchy, o vetor tensão, também pode ser expresso na forma

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.20)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy, também chamado de tensor de tensões físicas ou verdadeiras, pois representam as forças elementares atuantes no sistema deformado por unidade de área da configuração deformada. São estas tensões que devem ser empregadas em critérios de plastificação e critérios de ruptura. O tensor $\boldsymbol{\sigma}$ em componentes cartesianas, para o problema de estado plano de tensão, é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Então, é válida a relação

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t} ds = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds . \quad (2.22)$$

Transladando-se, de modo fictício, as forças elementares atuantes no sistema deformado para a configuração indeformada, tem-se então pseudo-forças, e passa a valer a seguinte equação:

$$d\mathbf{F} = \bar{\mathbf{t}} dS = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{N} dS \quad (2.23)$$

onde o vetor de tensão fictício $\bar{\mathbf{t}}$ é paralelo ao vetor de tensão realmente atuante \mathbf{t} , porém seu módulo é ajustado de acordo com a mudança de área, para produzir a mesma resultante $d\mathbf{F}$ (CREUS, 1985).

O tensor de tensões fictícias $\bar{\mathbf{T}}$ é chamado de Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff, sendo normalmente empregado nas equações de equilíbrio.

Por equilíbrio deve ter-se que

$$d\mathbf{F} = \bar{\mathbf{t}} dS = \mathbf{t} ds , \quad (2.24)$$

então

$$\bar{\mathbf{T}} \mathbf{N} dS = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds . \quad (2.25)$$

Aplicando-se a Fórmula de Nanson, conforme se encontra em BATHE (1982), que relaciona um elemento de área ds no sistema deformado, com vetor normal unitário \mathbf{n} , com um elemento de área na configuração original indeformada dS , com vetor normal unitário \mathbf{N} (ver FIGURA 2.3), através da expressão

$$\mathbf{n} ds = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS , \quad (2.26)$$

resulta

$$\bar{\mathbf{T}} \mathbf{N} dS = \boldsymbol{\sigma} J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS , \quad (2.27)$$

donde

$$\bar{\mathbf{T}} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} . \quad (2.28)$$

A equação (2.26) expressa a relação existente entre o Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor de tensões de Cauchy, dela se conclui que aquele não possui a condição de simetria, ao contrário deste.

Para se obter um tensor de tensões fictícias simétrico, pré-multiplica-se $\bar{\mathbf{T}}$ por \mathbf{F}^{-1} , chegando-se a

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1} \bar{\mathbf{T}} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} . \quad (2.29)$$

O tensor \mathbf{T} é chamado de Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, possui a condição de simetria, e é próprio para ser utilizado em equações constitutivas. Sobre o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff também é possível afirmar que \mathbf{T} é obtido a partir de $\boldsymbol{\sigma}$, da mesma maneira que um elemento de linha deformado $d\mathbf{x}$ é transformado em um elemento de linha indeformado $d\mathbf{X}$ (BATHE, 1982).

Assim sendo, uma vez conhecidas as componentes do Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, é possível determinar-se as tensões de Cauchy através da expressão

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{bmatrix} . \quad (2.30)$$

2.4 - O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Na solução de problemas de equilíbrio em Mecânica dos Sólidos é largamente empregado o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), cujo enunciado, segundo DYM e SHAMES (1973), é:

“A condição necessária e suficiente para que um corpo deformável esteja em equilíbrio é que, para qualquer campo de deformação cinematicamente compatível (δu_i , δE_{ij}), o trabalho virtual externo, com forças de volume e de superfície estaticamente compatíveis, deve ser igual ao trabalho virtual interno.”

Este princípio possui a vantagem de permitir a obtenção das equações de equilíbrio para um determinado problema, sem que seja necessário o emprego da equação constitutiva do material. O sistema de equações assim determinado é bastante genérico e pode ser adaptado a materiais de comportamento linear e não-linear.

Na dedução do Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), para a situação de grandes deslocamentos será adotada a formulação Lagrangeana Total em que o movimento das partículas do corpo é medido a partir de um referencial fixado na configuração original indeformada (BATHE, 1982).

A FIGURA 2.4 serve para ilustrar algumas das grandezas envolvidas na dedução deste princípio.

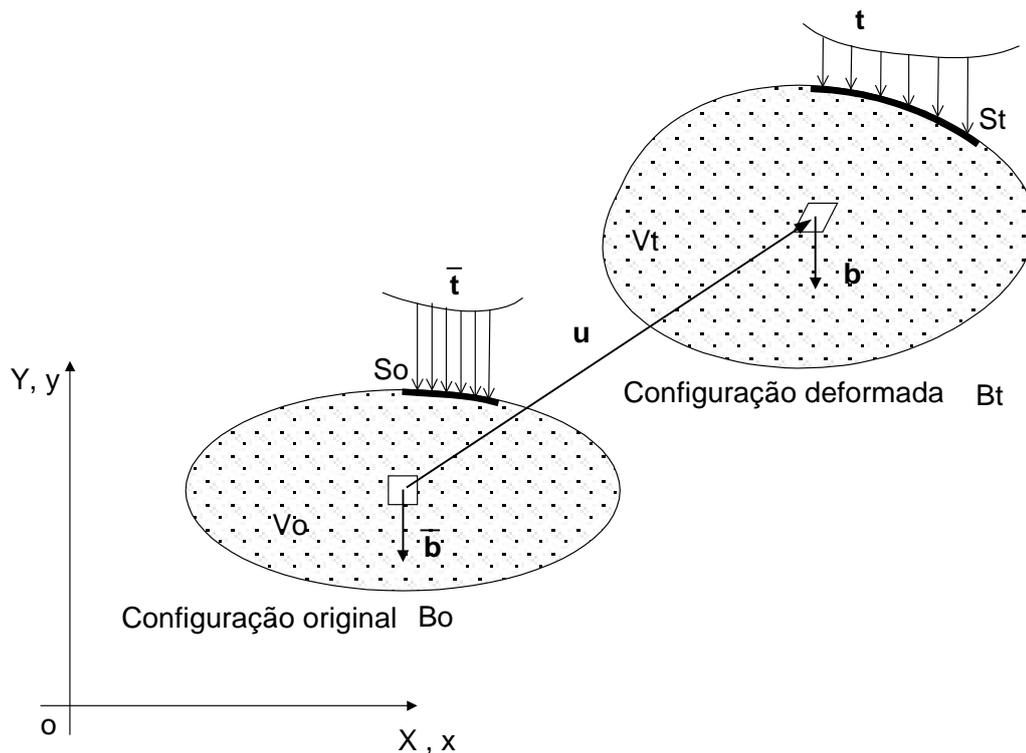


FIGURA 2.4 – O Princípio dos Trabalhos Virtuais

As equações de equilíbrio na configuração de referência B_0 são:

$$\bar{T}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0, \quad (2.31)$$

onde \bar{T}_{ij} é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e \bar{b}_i são as pseudo-forças de volume, ou seja, forças com a orientação do sistema deformado, aplicadas sobre um elemento de volume do sistema indeformado.

Introduzindo-se um campo de deslocamentos virtuais δu_i e integrando no volume de referência V_0 , obtém-se

$$\int_{V_0} \bar{T}_{ij,j} \delta u_i dV + \int_{V_0} \bar{b}_i \delta u_i dV = 0. \quad (2.32)$$

Aplicando a regra de derivação do produto na primeira parcela da equação acima, resulta,

$$\int_{V_0} \bar{T}_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_{V_0} (\bar{T}_{ij} \delta u_i)_{,j} dV + \int_{V_0} \bar{b}_i \delta u_i dV, \quad (2.33)$$

e, posteriormente, utilizando-se o Teorema de Gauss e a Lei de Cauchy (FUNG, 1965), dadas respectivamente por

$$\int_{V_0} (\bar{T}_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_{S_0} (\bar{T}_{ij} N_j) \delta u_i dS \quad (2.34)$$

e

$$\bar{t}_i = \bar{T}_{ij} N_j, \quad (2.35)$$

onde \bar{t}_i são as pseudo-forças por unidade de superfície, que são as forças com a orientação do sistema deformado aplicadas sobre um elemento de área do sistema indeformado, e N_j as componentes do vetor unitário normal ao elemento de área do sistema indeformado, conforme a FIGURA 2.3, chega-se a

$$\int_{V_0} \bar{T}_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_{S_0} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{V_0} \bar{b}_i \delta u_i dV \quad . \quad (2.36)$$

O Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff se relaciona com o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff (ver equação (2.29)) através da expressão

$$\bar{T}_{ij} = x_{i,k} T_{kj} \quad . \quad (2.37)$$

As coordenadas do sistema deformado são obtidas adicionando-se às coordenadas do sistema indeformado os deslocamentos sofridos pelo corpo durante o processo de carregamento, ou seja,

$$x_i = X_i + u_i \quad . \quad (2.38)$$

Calculando-se as derivadas desta última equação em relação as coordenadas cartesianas do sistema indeformado chega-se a

$$x_{i,k} = \delta_{ik} + u_{i,k} \quad , \quad (2.39)$$

onde δ_{ik} é o operador Delta de Kronecker (FUNG, 1965).

Substituindo-se as equações (2.37) e (2.39) na equação (2.36), resulta

$$\int_{V_0} (T_{ij} \delta u_{i,j} + u_{i,k} T_{kj} \delta u_{i,j}) dV = \int_{S_0} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{V_0} \bar{b}_i \delta u_i dV \quad . \quad (2.40)$$

Define-se o tensor de deformações de Green como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}] = \mathcal{E}_{ij} + \eta_{ij} \quad (2.41)$$

sendo \mathcal{E}_{ij} e η_{ij} , respectivamente, as parcelas linear e não-linear, dadas por

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] , \quad (2.42)$$

e

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} [u_{k,i} u_{k,j}] . \quad (2.43)$$

Calculando-se a primeira variação do tensor de deformações de Green, tem-se que

$$\delta E_{ij} = \delta \mathcal{E}_{ij} + \delta \eta_{ij} , \quad (2.44)$$

onde

$$\delta \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} [\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}] \quad (2.45)$$

é a primeira variação da parcela linear, e

$$\delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} [\delta u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \delta u_{k,j}] , \quad (2.46)$$

é a primeira variação da parcela não-linear.

Por outro lado, é interessante analisar os produtos tensoriais entre o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff e as parcelas da primeira variação do tensor de deformações de Green.

Em primeiro lugar observa-se o produto tensorial:

$$T_{ij} \delta \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} [T_{ij} \delta u_{i,j} + T_{ij} \delta u_{j,i}] . \quad (2.47)$$

Como o tensor T_{ij} é simétrico, resulta que

$$T_{ij} \delta \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} [T_{ij} \delta u_{i,j} + T_{ji} \delta u_{j,i}] = \frac{1}{2} [2T_{ij} \delta u_{i,j}] = T_{ij} \delta u_{i,j} , \quad (2.48)$$

pois os índices i e j são mudos, logo podem ser trocados.

Em segundo lugar estuda-se o produto tensorial:

$$T_{ij} \delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} T_{ij} \left[\delta u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \delta u_{k,j} \right] . \quad (2.49)$$

Tirando-se partido da simetria do tensor T_{ij} , tem-se que

$$T_{ij} \delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta u_{k,i} T_{ij} u_{k,j} + u_{k,i} T_{ij} \delta u_{k,j} \right] = \frac{1}{2} \left[\delta u_{k,i} T_{ij} u_{k,j} + u_{k,i} T_{ji} \delta u_{k,j} \right] , \quad (2.50)$$

e, sendo os índices i, j e k , todos mudos, resulta

$$T_{ij} \delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta u_{i,k} T_{kj} u_{i,j} + u_{i,k} T_{kj} \delta u_{i,j} \right] = u_{i,k} T_{kj} \delta u_{i,j} . \quad (2.51)$$

Substituindo-se as equações (2.48) e (2.51) na equação (2.40), chega-se a

$$\int_{V_o} (T_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + T_{ij} \delta \eta_{ij}) dV = \int_{S_o} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{V_o} \bar{b}_i \delta u_i dV , \quad (2.52)$$

e a

$$\int_{V_o} T_{ij} (\delta \varepsilon_{ij} + \delta \eta_{ij}) dV = \int_{S_o} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{V_o} \bar{b}_i \delta u_i dV . \quad (2.53)$$

Comparando-se o termo entre parênteses da equação (2.53) com a equação (2.44) obtém-se, finalmente,

$$\int_{V_o} T_{ij} \delta E_{ij} dV = \int_{S_o} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{V_o} \bar{b}_i \delta u_i dV , \quad (2.54)$$

que é a expressão analítica para o Princípio dos Trabalhos Virtuais, para a hipótese de grandes deslocamentos, segundo a formulação Lagrangeana Total.

Observe-se que os incrementos de cargas e tensões associados ao campo de deslocamentos arbitrário δu_i não aparecem na expressão analítica do princípio, o que permite aplicá-lo “*como se*” as forças e tensões permanecessem constantes. Por isto se chama ao campo de deslocamentos arbitrários δu_i de campo de deslocamentos virtuais e o princípio recebe o nome de Princípio dos Trabalhos “Virtuais” (P.T.V.).

Sendo o P.T.V. válido para campos de deslocamentos δu_i arbitrários, este princípio é equivalente às equações de equilíbrio e condições mecânicas de contorno, independentemente das equações constitutivas dos materiais envolvidos no problema (BIGNON, 1987).

O Princípio dos Trabalhos Virtuais, na forma em que foi em que foi apresentado, é especialmente útil na solução de problemas envolvendo não-linearidade física e geométrica através de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, por exemplo, o que será feito no capítulo seguinte.

3 – APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estabelecer uma formulação para análise não-linear de estruturas sob estado plano de tensão através do método dos elementos finitos, com solução em deslocamentos.

Inicialmente é feita uma descrição da formulação em deslocamentos para elementos isoparamétricos, para o concreto. A partir das relações deformação-deslocamento são obtidas as matrizes de deformação, linear e não-linear, do elemento. A seguir são definidos os vetores de tensão que serão utilizados. Finalmente aplica-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), na forma obtida no Capítulo 2, deduzindo-se o sistema de equações não-lineares de equilíbrio que governa o problema.

No que se refere à equação constitutiva para o material, poderão ser empregadas relações lineares ou não-lineares, conforme descritas no Capítulo 4.

A formulação para o caso particular importante do material elástico linear no regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos é deduzida. Esta formulação é útil como parte do processo de solução de sistemas de equações não-lineares.

Após, é descrito o modelo de elementos finitos para a armadura, que é designado por “modelo incorporado”.

Para a solução do sistema de equações não-lineares é apresentado o método de Newton-Raphson. Com o objetivo de acelerar a convergência do processo de solução é descrito o método BFGS. O esquema incremental-iterativo empregado na solução dos problemas não-lineares é mostrado no final do capítulo.

3.2 – ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

3.2.1 - Geometria do elemento

Seja a estrutura plana representada na FIGURA 3.1 (a) através de seu plano médio, que se encontra submetida a um carregamento formado pelas forças distribuídas t_x e t_y ,

atuando respectivamente nas direções x e y , bem como pelas cargas concentradas P_x e P_y , agindo correspondentemente nas direções x e y .

O procedimento inicial do método dos elementos finitos consiste em dividir-se o plano médio da estrutura a ser analisada em pequenos elementos de superfície (elementos finitos), que estão conectados entre si por meio de pontos nodais. Na solução em deslocamentos, as incógnitas do problema são os deslocamentos dos pontos nodais; sendo as deformações e tensões no interior do elemento e as reações de apoio calculadas a partir destes.

Na FIGURA 3.1 (b) é mostrada uma possível discretização de uma estrutura plana em elementos finitos de oito nós.

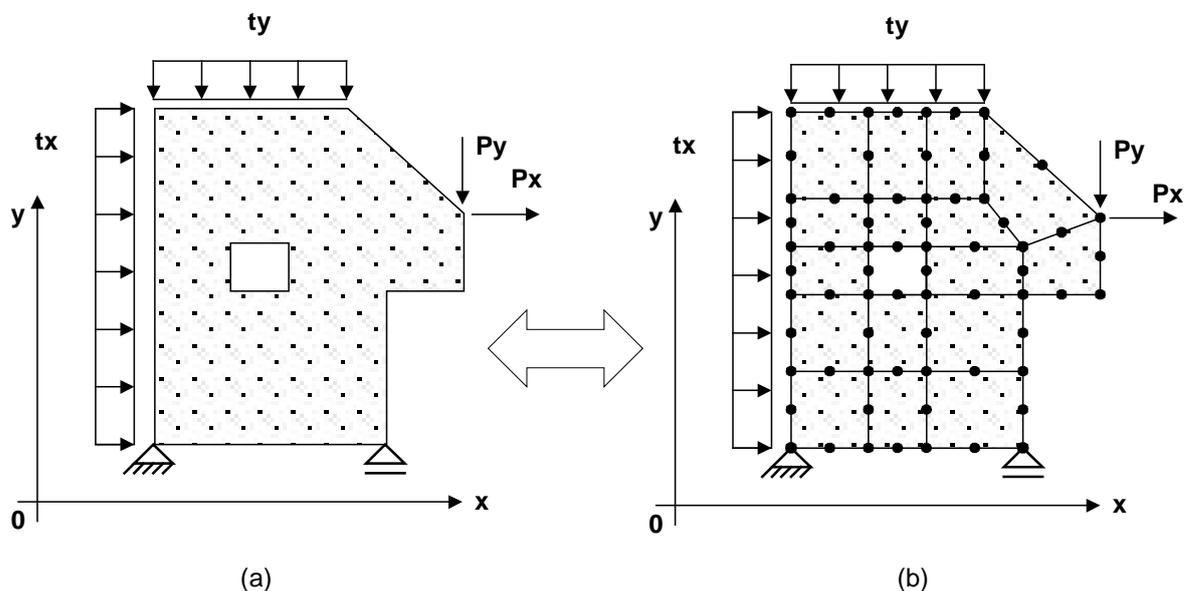


FIGURA 3.1 – Discretização de uma estrutura plana em elementos finitos de 8 nós

Neste trabalho são utilizados elementos isoparamétricos quadráticos, de 8 nós, da família Serendipity, cuja geometria se encontra descrita na FIGURA 3.2. Como sistema de referência local do elemento é adotado um sistema de coordenadas curvilíneas ξ e η . Os pontos nodais se encontram numerados de 1 a 8.

Os elementos isoparamétricos quadráticos são muito versáteis, pois permitem discretizar placas com contornos curvilíneos, além de sua excelente performance estar comprovada em diversos estudos (HINTON, 1977; OWEN, 1980; ZIENKIEWICZ, 1989, 1991).

3.2.2 – O campo de deslocamentos

O primeiro passo em uma análise de estruturas sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos, com solução em deslocamentos, é descrever de forma única o campo de deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos dos pontos nodais. Isto é feito mediante o emprego de funções de interpolação bidimensionais.

Conforme a formulação clássica do método dos elementos finitos apresentada em ZIENKIEWICZ (1989), o campo de deslocamentos no interior do elemento é obtido através dos deslocamentos nodais, mediante o emprego de funções de interpolação, a partir da expressão

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}^e, \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

é o vetor de deslocamentos nodais em um ponto qualquer do elemento, sendo u a componente na direção x , e v a componente na direção y .

A matriz \mathbf{N} , denominada matriz de interpolação do elemento, é da ordem de 2×16 , sendo definida por

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_i, \dots, \mathbf{N}_8] , \quad (3.3)$$

onde \mathbf{N}_i é uma submatriz 2×2 , dada pelo produto $N_i(\xi, \eta) \mathbf{I}_2$, no qual $N_i(\xi, \eta)$ é a função de interpolação correspondente ao nó “ i ” e \mathbf{I}_2 é uma matriz identidade 2×2 .

O vetor de deslocamentos nodais do elemento \mathbf{U}^e é definido por

$$\mathbf{U}^{e,T} = \{ \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_i, \dots, \mathbf{U}_8 \} , \quad (3.4)$$

onde \mathbf{U}_i é o vetor de deslocamentos do nó “ i ”, dado por

$$\mathbf{U}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}. \quad (3.5)$$

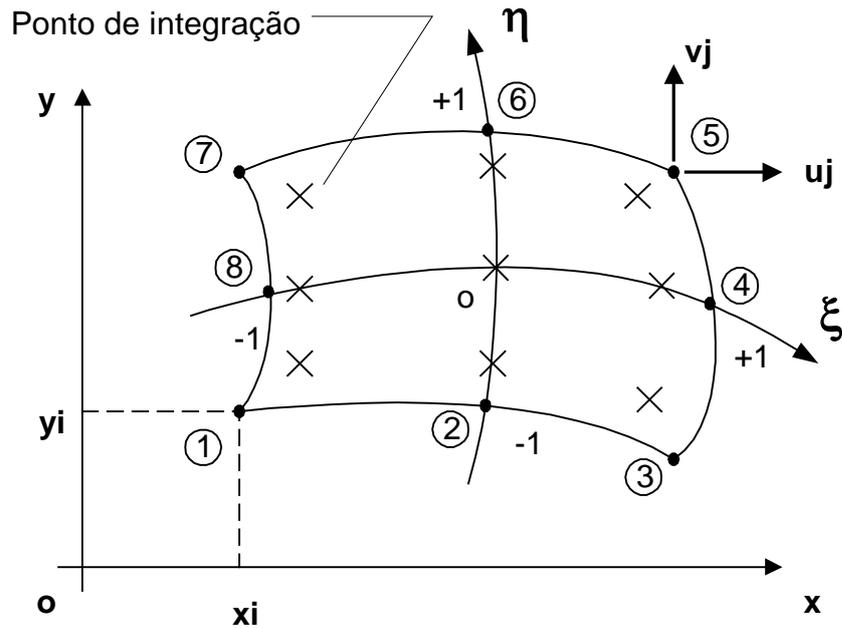


FIGURA 3.2 – Geometria do elemento isoparamétrico quadrático

As funções de interpolação quadráticas bidimensionais da família Serendipity $N_i(\xi, \eta)$, são as seguintes, conforme HINTON (1977), sendo que a numeração dos nós corresponde à da FIGURA 3.2:

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), \quad (3.6)$$

$$N_2(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad (3.7)$$

$$N_3(\xi, \eta) = +\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \quad (3.8)$$

$$N_4(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2), \quad (3.9)$$

$$N_5(\xi, \eta) = +\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad (3.10)$$

$$N_6(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad (3.11)$$

$$N_7(\xi, \eta) = +\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \quad (3.12)$$

$$N_8(\xi, \eta) = +\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2). \quad (3.13)$$

Cada função de interpolação deve assumir o valor unitário, quando são fornecidas as coordenadas naturais do nó que lhe corresponde e deve anular-se, quando forem dadas as coordenadas de outro nó. Em um ponto qualquer no interior do elemento, a soma dos valores das funções de interpolação para as coordenadas naturais deste ponto deve ser igual à unidade.

O elemento isoparamétrico é aquele no qual são empregadas as mesmas funções tanto para interpolar a geometria, como para interpolar os deslocamentos. Desta forma, adotando-se o sistema de coordenadas naturais (ξ, η) no elemento, as coordenadas cartesianas $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ em um ponto no interior do elemento são fornecidas pelas expressões

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad (3.14)$$

e

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i, \quad (3.15)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas cartesianas do nó “ i ”.

A matriz Jacobiana do elemento é definida pela seguinte expressão,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

sendo seu determinante, $|\mathbf{J}|$, dado por

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (3.17)$$

resultado este que será empregado mais adiante.

3.2.3 – O campo de deformações

O campo de deformações no interior do elemento é obtido através do campo de deslocamentos, empregando-se as relações deformação-deslocamento em sua forma completa ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} \quad , \quad (3.18)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad , \quad (3.19)$$

são as componentes de deformação para a situação de estado plano de tensão, e

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \quad , \quad (3.20)$$

é a parcela linear das relações deformação-deslocamento, e

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} \quad , \quad (3.21)$$

a parcela não-linear.

Levando-se em conta a equação (3.1) e as relações deformação-deslocamento dadas por (3.20) e (3.21), pode-se escrever, para as componentes de deformação no interior do elemento, a seguinte expressão

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{U}^e) \right) \mathbf{U}^e . \quad (3.22)$$

Para a parcela linear tem-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{B}_L \mathbf{U}^e , \quad (3.23)$$

onde

$$\mathbf{B}_L = [\mathbf{B}_{L1}, \dots, \mathbf{B}_{L8}] , \quad (3.24)$$

sendo

$$\mathbf{B}_{Li} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

a chamada matriz de deformações linear associada ao nó i .

A parte não linear das relações deformação-deslocamento será dada por (OWEN e HINTON, 1980) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{U}^e = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\theta \boldsymbol{\theta} , \quad (3.26)$$

onde

$$\mathbf{B}_{NL} = [\mathbf{B}_{NL1}, \dots, \mathbf{B}_{NL8}] , \quad (3.27)$$

sendo

$$\mathbf{B}_{\text{NLI}} = \mathbf{A}_\theta \mathbf{G}_i, \quad (3.28)$$

e

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

e

$$\theta = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{U}^e, \quad (3.30)$$

onde

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_8], \quad (3.31)$$

sendo a matriz gradiente \mathbf{G}_i , associada ao nó i , dada por

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Para que posteriormente possa ser desenvolvido o Princípio dos Trabalhos Virtuais, é necessário agora realizar o cálculo da primeira variação das componentes de deformação e, conseqüentemente, das relações deformação-deslocamento.

Assim, para a parcela linear das relações deformação-deslocamento tem-se que

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_L = \delta(\mathbf{B}_L \mathbf{U}^e) = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{U}^e \quad , \quad (3.33)$$

onde $\delta \mathbf{U}^e$ é a primeira variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Já para a parcela não-linear das relações deformação-deslocamento resulta a seguinte expressão

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{A}_\theta \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} [\delta \mathbf{A}_\theta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}_\theta \delta \boldsymbol{\theta}] \quad . \quad (3.34)$$

Contudo, após algum procedimento algébrico trabalhoso, é possível mostrar-se que,

$$\delta \mathbf{A}_\theta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}_\theta \delta \boldsymbol{\theta} \quad , \quad (3.35)$$

logo

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} [2 \mathbf{A}_\theta \delta \boldsymbol{\theta}] = \mathbf{A}_\theta \delta \boldsymbol{\theta} \quad . \quad (3.36)$$

Lembrando-se as equações de (3.27) a (3.32), resulta,

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{U}^e \quad . \quad (3.37)$$

Em síntese, tem-se que

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L + \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}^e = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}) \delta \mathbf{U}^e \quad . \quad (3.38)$$

Então, a matriz de deformações \mathbf{B} assume a forma

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_8] \quad , \quad (3.39)$$

sendo a matriz de deformações \mathbf{B}_i associada ao nó i , dada por

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Com o objetivo de alcançar-se uma forma mais sucinta para o cálculo da matriz \mathbf{B}_i , é útil lembrar-se que as componentes de deslocamento u e v podem ser obtidas subtraindo-se das coordenadas de um ponto na configuração deformada (x_n, y_n) as coordenadas originais da configuração indeformada (x, y) , ou seja,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (3.41)$$

Substituindo-se as definições das componentes de deslocamento dadas por (3.41), na equação (3.40), resulta uma forma mais abreviada para o cálculo da matriz \mathbf{B}_i , através da expressão

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

Para calcular-se a matriz \mathbf{B}_i , conforme a equação (3.42), é necessário antes determinar a matriz Jacobiana da transformação de coordenadas entre a configuração indeformada e a configuração deformada, designada por \mathbf{F} , dada por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} & \frac{\partial x_n}{\partial y} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} x_{ni} & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} x_{ni} \\ \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} y_{ni} & \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} y_{ni} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

O determinante da matriz \mathbf{F} é dado por

$$|\mathbf{F}| = \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial y_n}{\partial y} - \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial y_n}{\partial x}. \quad (3.44)$$

3.2.4 – Definição das tensões

Para serem utilizadas dentro da formulação do método dos elementos finitos, as componentes de tensão são organizadas na forma de um vetor.

Assim sendo, as tensões de Cauchy (ver Capítulo 2), organizadas vetorialmente, serão dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}. \quad (3.45)$$

Já as componentes de tensão de Piola-Kirchhoff II (ver Capítulo 2), dadas na forma de um vetor, assumem o seguinte aspecto

$$\mathbf{T} = \left\{ \begin{array}{c} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{array} \right\}. \quad (3.46)$$

As componentes de tensão de Cauchy se relacionam com as componentes de tensão de Piola-Kirchhoff II através da seguinte expressão

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{F}|} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x_n}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial x_n}{\partial y}\right)^2 & 2\frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial x_n}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial y_n}{\partial x}\right)^2 & \left(\frac{\partial y_n}{\partial y}\right)^2 & 2\frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial y_n}{\partial y} \\ \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial y_n}{\partial x} & \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial y_n}{\partial y} & \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial x_n}{\partial y} + \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial y_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.47)$$

que é o resultado final de uma elaboração algébrica da equação (2.30), que no Capítulo 2 foi dada na forma tensorial.

3.2.5 – Definição das forças atuantes

Neste trabalho, admite-se como hipótese que o carregamento da estrutura não seja alterado pela deformação da mesma.

A rigor, no regime de grandes deslocamentos, está hipótese somente é válida para cargas concentradas que não mudam de direção em função da deformação da estrutura (BATHE, 1982).

Para a definição das forças de superfície e das forças de volume é necessário um raciocínio mais elaborado.

Para as forças de volume é válida a seguinte relação:

$$\bar{\mathbf{b}} dV_o = \mathbf{b} dV_t, \quad (3.48)$$

onde

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}, \quad (3.49)$$

é o vetor de forças de volume atuando sobre um elemento de volume da configuração deformada dV_t , e sendo

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{Bmatrix} \bar{b}_x \\ \bar{b}_y \end{Bmatrix}, \quad (3.50)$$

o vetor de pseudo-forças de volume, que são as forças de volume atuando com a orientação do sistema deformado, aplicadas sobre um elemento de volume do sistema indeformado dV_o . Portanto, os vetores \mathbf{b} e $\bar{\mathbf{b}}$, possuem a mesma direção e o mesmo sentido, contudo os módulos são diferentes para que a variação de volume provocada pela deformação possa ser considerada.

Para as forças de superfície é válida a seguinte relação:

$$\bar{\mathbf{t}} dS_o = \mathbf{t} dS_t, \quad (3.51)$$

sendo

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad (3.52)$$

o vetor de forças de superfície agindo sobre um elemento de superfície da configuração deformada dS_t , e sendo

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix}, \quad (3.53)$$

o vetor de pseudo-forças de superfície, que são as forças de superfície atuando com a orientação do sistema deformado, aplicadas sobre um elemento de superfície do sistema indeformado dS_o . Logo, os vetores \mathbf{t} e $\bar{\mathbf{t}}$, possuem a mesma direção e o mesmo sentido, contudo os módulos são diferentes para que a variação de superfície causada pela deformação possa ser incluída (FUNG, 1965).

Para que se possa determinar os módulos dos vetores $\bar{\mathbf{b}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ é necessário conhecer previamente as variações de volume e de superfície que o corpo irá sofrer durante o carregamento. Ora, isto somente é possível com o conhecimento dos deslocamentos do corpo, que são justamente as incógnitas iniciais do problema. Esta situação indica que o problema deve ser resolvido de forma iterativa.

Neste momento, é importante observar que o objetivo de ser haver incluído neste trabalho a formulação para análise não-linear geométrica foi tornar possível a análise de pilares esbeltos de concreto armado.

Para este tipo de estrutura tem-se a situação de pequenas deformações, grandes deslocamentos e rotações moderadas. Neste caso, as variações de volume e de superfície da configuração original para a configuração deformada são pequenas, e podem, portanto, ser desprezadas.

Assim sendo, na definição das ações nodais equivalentes às forças de volume serão empregados os pesos específicos dos materiais e será considerado o volume indeformado do corpo. Da mesma forma, na definição das ações nodais equivalentes às forças de superfície serão empregados os valores iniciais das forças distribuídas sobre a superfície indeformada da estrutura.

3.2.6 – O Princípio dos Trabalhos Virtuais

Utilizando-se as definições feitas anteriormente, a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais, para a formulação Lagrangeana Total, dada por (2.54) em notação indicial, assume o seguinte aspecto, em uma notação matricial apropriada ao método dos elementos finitos:

$$\int_{V_o} \delta \mathcal{E}^T \mathbf{T} dV = \int_{S_o} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V_o} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} dV, \quad (3.54)$$

onde V_o e S_o referem-se respectivamente ao volume e à superfície carregada de um elemento finito no sistema indeformado.

Lembrando-se que a primeira variação do vetor de deslocamentos \mathbf{u} em um dado ponto do elemento será dada por

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{U}^e, \quad (3.55)$$

e que a correspondente variação das componentes de deformação será dada na forma

$$\delta \mathcal{E} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}^e, \quad (3.56)$$

resulta

$$\int_{V_o} \delta \mathbf{U}^{e,T} \mathbf{B}^T \mathbf{T} dV = \int_{S_o} \delta \mathbf{U}^{e,T} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V_o} \delta \mathbf{U}^{e,T} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV . \quad (3.57)$$

Porém, como a variação do vetor de deslocamentos nodais $\delta \mathbf{U}^e$ pode ser arbitrária, tem-se que

$$\int_{V_o} \mathbf{B}^T \mathbf{T} dV = \int_{S_o} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V_o} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV . \quad (3.58)$$

A equação (3.58) expressa a condição de equilíbrio na Formulação Lagrangeana Total para um elemento, no instante t . Esta equação é válida para qualquer material, uma vez que até o momento não se lançou mão de nenhuma equação constitutiva. Pode-se, também, colocá-la na forma

$$\mathbf{A}_{NL}^e(\mathbf{U}^e) = \mathbf{P}^e , \quad (3.59)$$

onde

$$\mathbf{A}_{NL}^e = \int_{V_o} \mathbf{B}^T \mathbf{T} dV \quad (3.60)$$

é o vetor de ações nodais não-lineares do elemento e

$$\mathbf{P}^e = \int_{S_o} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V_o} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV \quad (3.61)$$

é o vetor ações nodais equivalentes às cargas externas aplicadas sobre o elemento.

Somando-se, para cada nó de elemento em que foi discretizada a estrutura, para cada grau de liberdade, as contribuições dos elementos que para ele concorrem, chega-se a

$$\mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{P} , \quad (3.62)$$

que é a equação de equilíbrio global da estrutura no instante t , onde $\mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U})$ é o vetor de ações não-lineares da estrutura e \mathbf{P} é o vetor de cargas nodais aplicadas sobre a estrutura. Ou ainda,

$$\mathbf{P} - \mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad (3.63)$$

onde \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos nodais global da estrutura, e $\mathbf{0}$ é um vetor nulo, ambos com as dimensões $n \times 1$, sendo n o número de graus de liberdade total da estrutura.

Se o vetor \mathbf{U} , não for a solução exata para a equação (3.63), resultará um vetor de forças desequilibradas $\Psi(\mathbf{U})$, dado na forma:

$$\Psi(\mathbf{U}) = \mathbf{P} - \mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}). \quad (3.64)$$

O problema da análise não-linear física e geométrica de estruturas, através do Método dos Elementos Finitos, com solução em deslocamentos, consiste em encontrar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} , que torne o vetor de forças desequilibradas nulo, ou seja,

$$\Psi(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Para realizar esta tarefa existem diversos métodos de solução de sistemas de equações não-lineares, dados na forma da equação (3.65), tais como o método de Newton-Raphson, o método de Newton-Raphson modificado, o método BFGS, que serão descritos mais adiante.

3.2.7 – Material elástico-linear no regime de pequenas deformações

Para que se possa desenvolver o algoritmo de solução da equação (3.65), é necessário estabelecer a equação de equilíbrio da estrutura, para um material elástico linear, dentro do regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

Considerando que a estrutura seja formada por um material que obedeça à Lei de Hooke, cujo módulo de deformação longitudinal é E , e cujo coeficiente de Poisson é ν , a equação constitutiva para o problema de estado plano de tensão pode ser estabelecida na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.66)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de componentes de tensão de Cauchy, conforme definido em (3.45), que para o caso de pequenas deformações e pequenos deslocamentos coincide com o vetor de componentes de tensão de Piola-Kirchhoff II, conforme (3.47); $\boldsymbol{\epsilon}$ é o vetor de componentes de deformação, dado por (3.19), neste caso coincidente com o vetor de componentes lineares definido em (3.20); e

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

é a matriz constitutiva, ou matriz de constantes elásticas, para o problema de estado plano de tensão (HINTON, 1977).

Substituindo a equação (3.66) na equação (3.58), e fazendo uso da definição da primeira variação da parcela linear das relações deformação-deslocamento conforme (3.33), resulta

$$\int_{V_o} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \mathbf{U}^e = \int_{S_o} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V_o} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV, \quad (3.68)$$

ou ainda,

$$\mathbf{K}_L^e \mathbf{U}^e = \mathbf{P}^e, \quad (3.69)$$

onde a matriz

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{V_o} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV, \quad (3.70)$$

é denominada matriz de rigidez linear do elemento, possuindo a dimensão 16x16, sendo 16 o número total de graus de liberdade do elemento isoparamétrico quadrático de 8 nós, para o problema de estado plano de tensão.

Efetuada o somatório em cada grau de liberdade nodal da estrutura das contribuições dos elementos que incidem em um mesmo nó, segundo a equação (3.69), chega-se a

$$\mathbf{K}_L \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (3.71)$$

onde \mathbf{K}_L é a matriz de rigidez linear global da estrutura.

Resulta, então, um sistema de equações lineares de equilíbrio $n \times n$, onde n é o número total de graus de liberdade da estrutura; que, uma vez resolvido, fornece os deslocamentos nodais para o carregamento aplicado. A partir do vetor de deslocamentos nodais da estrutura \mathbf{U} , é possível montar-se o vetor de deslocamentos nodais do elemento \mathbf{U}^e . Pode-se, agora, calcular as deformações através de (3.23), e as tensões por meio de (3.66).

A equação (3.71) será empregada como parte do processo de solução do sistema de equações não-lineares dado por (3.65), conforme será mostrado adiante.

3.2.8 – Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez linear do elemento \mathbf{K}_L^e possui as dimensões 16×16 , pois existem oito nós, cada um com dois graus de liberdade. Para um elemento de estado plano de tensão, com espessura h constante, a equação (3.64) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{Se} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L h dS, \quad (3.72)$$

onde Se é a área do elemento contida no plano xoy e dS é um elemento infinitesimal desta mesma superfície.

A integral da equação (3.71) normalmente é calculada através de métodos numéricos, como a Quadratura de Gauss-Legendre. Para isso, introduz-se na equação (3.72) as coordenadas naturais do elemento ξ e η , passando a mesma a assumir o aspecto

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L h |\mathbf{J}| d\xi d\eta, \quad (3.73)$$

onde $|\mathbf{J}|$ é o determinante da matriz Jacobiana do elemento.

Neste trabalho a integral da equação (3.73) é resolvida através do método da Quadratura de Gauss-Legendre, empregando-se a regra com 3×3 pontos de integração.

3.3 – ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Na literatura sobre análise não-linear de estruturas de concreto armado encontram-se basicamente três métodos para a inclusão da armadura em um modelo de elementos finitos: o modelo distribuído, o modelo incorporado e o modelo discreto (DARWIN, 1991).

No modelo distribuído, considera-se que a armadura seja uniformemente distribuída no elemento de concreto. Adota-se a hipótese de aderência perfeita entre o aço e o concreto. Este modelo é apropriado para estruturas em que a armadura é composta por barras pouco espaçadas, formando malhas normalmente ortogonais.

No modelo discreto, representa-se a armadura através de elementos de barra de treliça plana, que se conectam à malha de elementos finitos para o concreto por meio de seus nós de extremidade. Neste modelo, a disposição das barras da armadura é limitada pela malha de elementos de concreto, e vice-versa. Além disso, sendo linear o campo de deslocamentos no elemento de treliça, para que haja compatibilidade rigorosa de deslocamentos, o elemento de concreto deve também ser do tipo linear.

No modelo incorporado, a armadura é considerada como uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto. Adotando-se a hipótese de aderência perfeita, os deslocamentos de um elemento de armadura serão os mesmos do elemento de concreto que o envolve, resultando em um único campo de deslocamentos. As barras de aço podem assumir uma posição arbitrária dentro do elemento de concreto.

Neste estudo foi empregado o modelo incorporado, devido a sua maior generalidade na disposição das armaduras em relação aos modelos distribuído e discreto, tendo por base os trabalhos de ELWI e HRUDEY (1989) e de PRATES JÚNIOR (1992).

3.3.1 – Modelo incorporado

No modelo incorporado para a armadura, considera-se que a barra de aço resiste apenas a esforços axiais e que os deslocamentos de qualquer ponto da barra são coincidentes com os do elemento de concreto na mesma posição. Desta forma, a barra de aço pode ser disposta de maneira arbitrária no interior do elemento de concreto, sem que sejam introduzidas incógnitas adicionais no problema.

As barras de aço são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos. Através destes elementos podem ser modeladas barras retas e curvas. Os deslocamentos ao

longo da barra de aço são determinados a partir dos deslocamentos nodais do elemento de concreto.

Deste modo, a matriz de rigidez da armadura possui as mesmas dimensões da matriz de rigidez do elemento de concreto, sendo a matriz de rigidez do concreto armado a soma das duas. A expressão para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de “concreto armado” é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{K}_{S_i}, \quad (3.74)$$

onde nb é o número de segmentos de barra de aço contidos no elemento de concreto.

A matriz de rigidez de cada barra de armadura é definida pela expressão

$$\mathbf{K}_S = A_S E_S \int_L \mathbf{B}_S \mathbf{B}_S^T ds, \quad (3.75)$$

onde L é o comprimento da barra de aço, A_S é a área da seção transversal da armadura, E_S é o módulo de deformação longitudinal do aço e \mathbf{B}_S é o vetor que contém as relações deformação-deslocamento para a armadura.

3.3.2 – Formulação geométrica

A geometria das barras de aço é definida em coordenadas cartesianas globais, independentemente da malha de elementos finitos. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos. Para as barras curvas são necessários três pontos para a sua definição.

O elemento de concreto, mostrado na FIGURA 3.3, é descrito utilizando-se coordenadas globais (x,y) . As coordenadas naturais locais do elemento são (ξ, η) . De acordo com o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais (x,y) de qualquer ponto no interior do elemento são obtidas através das funções de interpolação $N_i(\xi, \eta)$, na forma

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.76)$$

x_i e y_i são as coordenadas cartesianas do nó “i”.

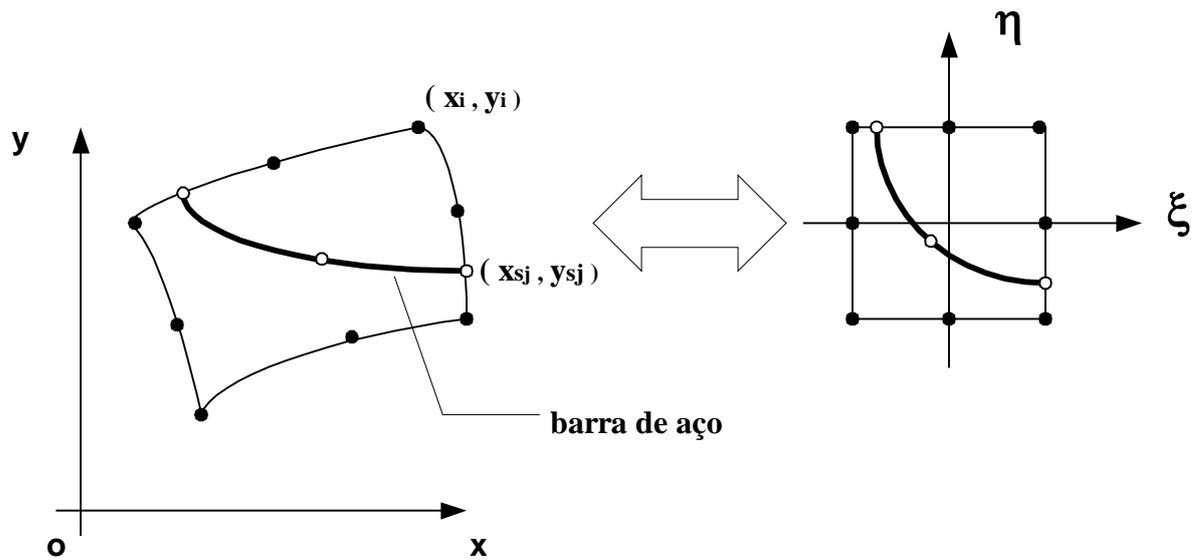


FIGURA 3.3 – Barra de aço inserida no elemento de concreto

As diferenciais das coordenadas cartesianas x e y , serão dadas por

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix}, \quad (3.77)$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana do elemento, conforme definida na equação (3.16).

Uma vantagem significativa desta formulação é que a localização e a geometria da barra de aço podem ser estabelecidas independentemente da malha global. Uma vez criada a malha de elementos de concreto, a armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais.

Para assegurar uma continuidade interelementar adequada, é necessário colocar nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o elemento de concreto. As coordenadas dos nós da barra de aço, posicionados entre os nós de definição da mesma, são obtidas por interpolação. Deste modo, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto.

Sendo x_{sj} e y_{sj} as coordenadas globais dos nós de uma barra de armadura associados a um dado elemento de concreto, as coordenadas de um ponto qualquer ao longo da barra, dentro deste elemento, são dadas por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} H_j(\chi) & 0 \\ 0 & H_j(\chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \end{Bmatrix}, \quad (3.78)$$

onde $H_j(\chi)$ são funções de interpolação unidimensionais, que são expressas em função de uma coordenada normalizada independente χ .

No cálculo da rigidez associada a uma barra de armadura, é necessário fazer integrações ao longo da mesma. Para isto é necessário determinar um elemento diferencial de comprimento ds , ao longo da armadura, que pode ser obtido de (3.78). Conforme a FIGURA 3.4, a orientação tangente à barra de aço é dada pelo ângulo β , onde

$$\cos \beta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}, \quad (3.79)$$

e

$$\sin \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds}, \quad (3.80)$$

sendo $\cos \beta$ e $\sin \beta$ os cossenos diretores da reta tangente a barra de aço no ponto considerado.

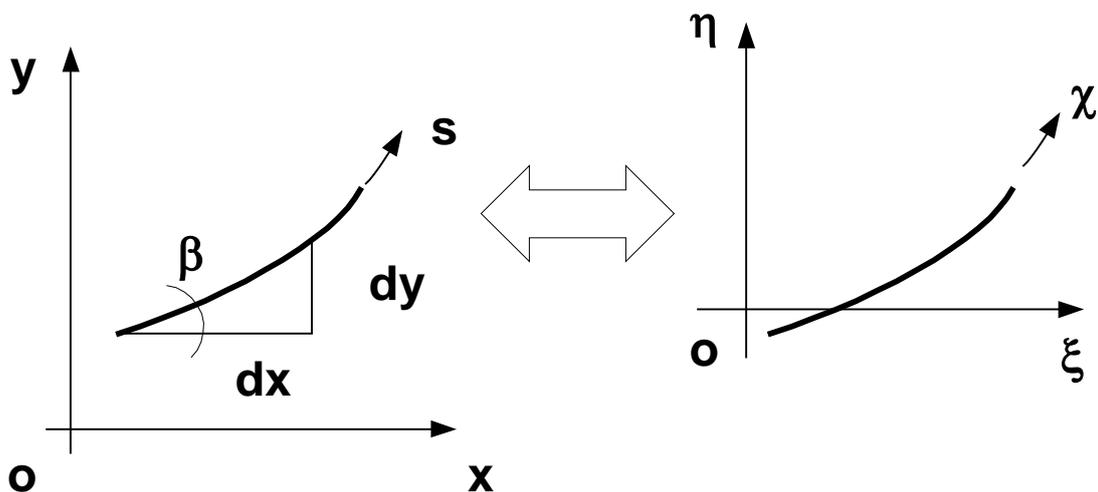


FIGURA 3.4 – Coordenadas ao longo do eixo da barra de aço

Lembrando-se que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (3.81)$$

resulta

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2}, \quad (3.82)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \end{Bmatrix}, \quad (3.83)$$

logo

$$\cos \beta = \frac{\frac{dx}{d\chi}}{\frac{ds}{d\chi}}, \quad (3.84)$$

e

$$\sin \beta = \frac{\frac{dy}{d\chi}}{\frac{ds}{d\chi}}. \quad (3.85)$$

Desta forma, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, assim como o fator $ds/d\chi$, podem ser facilmente determinados empregando-se as equações acima.

Um elemento de volume dV_S da barra de aço pode ser expresso por

$$dV_S = A_S ds. \quad (3.86)$$

Utilizando-se o fator descrito em (3.82), as integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada natural χ , como

$$\int_{V_S} f(\chi) dV_S = \int_{\chi} f(\chi) A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.87)$$

onde $f(\chi)$ é uma função de posição ao longo da armadura.

3.3.3 – Determinação dos trechos de armadura

As barras de aço são posicionadas dentro da estrutura de concreto através de suas coordenadas globais (x,y) . Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto+aço) de um determinado elemento, necessita-se saber quais barras interceptam este elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional.

A determinação dos segmentos de barras de aço que ficam no interior de um certo elemento de concreto é feita de forma automática através de uma subrotina computacional extraída do trabalho de PRATES JÚNIOR (1992). Uma vez encontrados estes trechos, é realizado o cálculo da matriz de rigidez da armadura.

A primeira etapa deste processo consiste na transformação das coordenadas globais $P_j(x_P, y_P)$, dos pontos de definição da geometria da barra, para as coordenadas naturais $P_j(\xi_P, \eta_P)$ dos mesmos. Para um dado ponto P_j de definição da barra de aço, é válida a seguinte relação

$$\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi_P, \eta_P) & 0 \\ 0 & N_i(\xi_P, \eta_P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \quad (3.88)$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas dos nós do elemento de concreto considerado.

A obtenção de uma forma explícita para ξ_P e η_P a partir da equação (3.88) não é tarefa simples de ser realizada. ELWI e HRUDEY (1989) sugerem a utilização do algoritmo de Newton-Raphson para a sua determinação numérica. Desta forma, a determinação de ξ_P e η_P está baseada no fato de que estas coordenadas são as raízes do seguinte sistema de equações não-lineares

$$\mathbf{f}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.89)$$

Empregando-se o método de Newton-Raphson, tem-se, após $k+1$ iterações,

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_P^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_P^k + \begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{Bmatrix}_P^{k+1}, \quad (3.90)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \end{Bmatrix}_P^{k+1} = [\mathbf{J}^k]^{T,-1} \left(\begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i(\xi_P^k, \eta_P^k) & 0 \\ 0 & N_i(\xi_P^k, \eta_P^k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right), \quad (3.91)$$

sendo $[\mathbf{J}^k]^{T,-1}$ a inversa da matriz Jacobiana transposta do elemento de concreto, na iteração k .

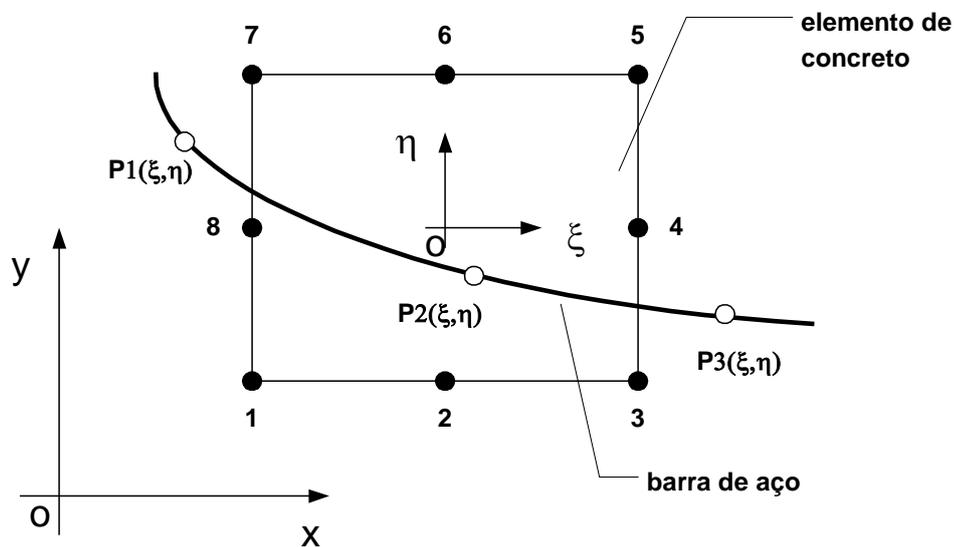


FIGURA 3.5 – Curva que define a barra de aço

A segunda etapa do processo, após a determinação das coordenadas naturais dos pontos $P_j(\xi_P, \eta_P)$, é a definição da curva que passa por estes pontos, conforme ilustrado pela FIGURA 3.5.

As coordenadas dos pontos da curva que define o eixo da barra de aço podem ser obtidas, mediante o emprego de polinômios interpoladores de Lagrange (ZIENKIEWICZ, 1989), através das seguintes expressões

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i, \quad (3.92)$$

e

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\xi) \eta_i, \quad (3.93)$$

onde, para os np pontos de definição da barra de aço, são calculadas as funções (polinômios de Lagrange)

$$f_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)}, \quad (3.94)$$

e

$$g_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}. \quad (3.95)$$

Esta forma de definir as coordenadas dos pontos da curva vem a facilitar o cálculo das intersecções desta com os bordos do elemento de concreto.

A terceira etapa consiste na determinação da intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_{np} com cada um dos quatro lados do elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$, do elemento de concreto, e calcula-se a coordenada η da intersecção lado do elemento de concreto - curva da barra. Caso $-1 \leq \eta \leq +1$, significa que a barra intercepta este lado do elemento. De forma análoga, fixa-se $\eta = \pm 1$, e se verifica se $-1 \leq \xi \leq +1$.

A quarta e última etapa do processo consiste em criar nós intermediários no segmento de armadura, no interior do elemento de concreto. Dependendo do grau da curva que define a barra, são criados zero, um ou dois nós intermediários, conforme é mostrado na FIGURA 3.6.

3.3.4 – Funções de forma para os elementos de armadura

As funções de interpolação para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange, definidos de acordo com ZIENKIEWICZ (1989), a partir da expressão

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \dots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_m)}{(\chi_k - \chi_1) \dots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_m)}, \quad (3.96)$$

que possui valor unitário para $\chi = \chi_k$, e anula-se para $\chi = \chi_i$, sendo $i \neq k$.

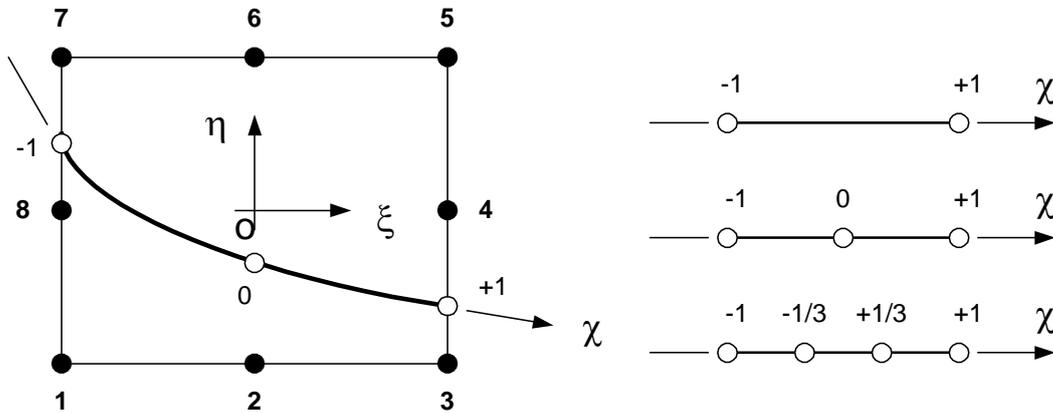


FIGURA 3.6 – Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

Para o elemento de 2 nós, tem-se as seguintes funções de forma:

$$H_1 = \frac{1 - \chi}{2}, \quad (3.97)$$

$$H_2 = \frac{1 + \chi}{2}. \quad (3.98)$$

Para o elemento de 3 nós, resultam as seguintes funções de forma:

$$H_1 = \frac{\chi^2 - \chi}{2}, \quad (3.99)$$

$$H_2 = 1 - \chi^2, \quad (3.100)$$

$$H_3 = \frac{\chi^2 + \chi}{2}. \quad (3.101)$$

Finalmente, para o elemento de 4 nós, as funções de forma são dadas pelas expressões:

$$H_1 = -\frac{1}{16}(9\chi^3 - 9\chi^2 - \chi + 1), \quad (3.102)$$

$$H_2 = +\frac{9}{16}(3\chi^3 - \chi^2 - 3\chi + 1), \quad (3.103)$$

$$H_3 = -\frac{9}{16}(3\chi^3 + \chi^2 - 3\chi - 1), \quad (3.104)$$

$$H_4 = +\frac{1}{16}(9\chi^3 + 9\chi^2 - \chi - 1). \quad (3.105)$$

3.3.5 – Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura

Considerando-se a hipótese de aderência perfeita entre o aço e o concreto que o envolve, o campo de deslocamentos da armadura é idêntico aquele do elemento de concreto no qual a barra de aço está inserida.

No entanto, formula-se também a hipótese de que uma barra de aço resiste apenas a esforços normais, na direção tangente ao seu eixo. Portanto, a deformação ao longo da armadura é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente ao eixo da barra.

Assim sendo, as componentes de deformação em um ponto do elemento de concreto, que coincide com um ponto por onde passa uma barra de aço, serão calculadas a partir da equação (3.23), dentro da hipótese de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. A deformação da armadura, na direção tangente ao seu eixo, será dada por (POPOV, 1984)

$$\varepsilon_S = \varepsilon_x \cos^2 \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta. \quad (3.106)$$

A equação anterior também pode ser colocada na forma

$$\varepsilon_S = \left(\cos^2 \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \text{sen } \beta \cos \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\text{sen } \beta \cos \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \text{sen}^2 \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (3.107)$$

donde, lembrando a definição do campo de deslocamentos do elemento de concreto, dada por (3.1), resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_S = & \sum_{i=1}^8 \left(\cos^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \text{sen } \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) u_i + \\ & \sum_{i=1}^8 \left(\text{sen } \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \text{sen}^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) v_i. \end{aligned} \quad (3.108)$$

A equação (3.108) também pode ser organizada na forma de um produto escalar entre dois vetores, ou seja,

$$\varepsilon_S = \mathbf{B}_S^T \mathbf{U}^e, \quad (3.109)$$

onde \mathbf{U}^e é o vetor de deslocamentos do elemento de concreto, e \mathbf{B}_S é o vetor das relações deformação-deslocamento para a armadura dado por

$$\mathbf{B}_S^T = \{ \mathbf{B}_{S1}^T, \mathbf{B}_{S2}^T, \dots, \mathbf{B}_{Si}^T, \dots, \mathbf{B}_{S8}^T \}, \quad (3.110)$$

onde um subvetor genérico \mathbf{B}_{Si} é fornecido pela expressão

$$\mathbf{B}_{Si} = \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \text{sen } \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \text{sen } \beta \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \text{sen}^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{array} \right\}. \quad (3.111)$$

Na equação (3.11), as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas naturais cartesianas x e y , são calculadas a partir das derivadas em relação às coordenadas naturais ξ e η , através da expressão

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (3.112)$$

A primeira variação da deformação na armadura é, então, dada por

$$\delta \varepsilon_S = \mathbf{B}_S^T \delta \mathbf{U}^e. \quad (3.113)$$

Na aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, a contribuição da armadura para o trabalho virtual interno pode ser calculada a partir da expressão

$$\delta W_S = \delta \mathbf{U}^{e,T} (\mathbf{A}_{NL})_S^e = \int_{V_S} \delta \varepsilon_S \sigma_S dV, \quad (3.114)$$

onde $(\mathbf{A}_{NL})_S^e$ é o vetor de ações nodais não-lineares equivalentes da armadura, σ_S é a tensão normal atuante na armadura e V_S é o volume da mesma.

Substituindo-se a equação (3.113) na (3.114), resulta

$$\delta \mathbf{U}^{e,T} (\mathbf{A}_{NL})_S^e = \int_{V_S} \delta \mathbf{U}^{e,T} \mathbf{B}_S \sigma_S dV. \quad (3.115)$$

Sendo a primeira variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto arbitrária, tem-se que

$$(\mathbf{A}_{NL})_S^e = \int_{V_S} \mathbf{B}_S \sigma_S dV, \quad (3.116)$$

ou ainda, lembrando-se a equação (3.87),

$$(\mathbf{A}_{NL})_S^e = \int_{\chi} \mathbf{B}_S \sigma_S A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.117)$$

que é a expressão que permite calcular as ações nodais equivalentes auto-equilibradas, correspondentes ao estado de tensão a que se encontra submetida a armadura.

Admitindo-se um comportamento elástico linear para o aço, o que normalmente acontece do início do carregamento até as imediações da ruptura da estrutura, a equação constitutiva para o aço assume a forma

$$\sigma_S = E_S \varepsilon_S, \quad (3.118)$$

onde E_S é o módulo de deformação longitudinal para o aço utilizado.

Fazendo-se a substituição de (3.118) em (3.117), e aplicando-se a equação (3.109), tem-se que

$$(\mathbf{A}_L)_S^e = \int_{\chi} \mathbf{B}_S E_S \mathbf{B}_S^T A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi \mathbf{U}^e, \quad (3.119)$$

onde $(\mathbf{A}_L)_S^e$ é o vetor de ações nodais lineares para a armadura. A equação (3.119) pode, ainda, ser escrita na forma

$$(\mathbf{A}_L)_S^e = \mathbf{K}_{SL}^e \mathbf{U}^e, \quad (3.120)$$

onde

$$K_{SL}^e = \int_{\chi} \mathbf{B}_S E_S \mathbf{B}_S^T A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.121)$$

é a definição da matriz de rigidez da armadura contida em um dado elemento de concreto.

A integral dada na equação (3.121) é calculada numericamente, através da Quadratura de Gauss-Legendre, empregando-se a fórmula

$$K_{SL}^e = \sum_{i=1}^{ng} (\mathbf{B}_S)_i E_S (\mathbf{B}_S^T)_i A_S \frac{ds}{d\chi} w_i, \quad (3.122)$$

onde ng é o número de pontos de integração de Gauss, as grandezas associadas ao índice "i", são calculadas na posição do ponto de integração "i", e w_i é o fator de peso de integração associado ao ponto de integração "i".

3.3.6 – Modelo não-linear geométrico para a armadura

Para tornar possível a análise de pilares esbeltos de concreto armado é necessário incluir a não-linearidade geométrica também no modelo para a armadura.

A deformação em um dado ponto ao longo da armadura (ε_S) continua a ser calculada a partir da equação (3.106). No entanto, agora passam a ser utilizadas as componentes de deformação no concreto (ε_x , ε_y e γ_{xy}), incluindo as suas parcelas linear e não-linear, calculadas a partir da equação (3.22).

A tensão neste ponto da armadura (σ_S) será obtida substituindo-se a deformação do aço neste ponto, na equação constitutiva adotada para o aço, que se encontra exposta no Capítulo 4.

Antes de realizar-se o cálculo das ações nodais não-lineares da armadura, é necessário calcular a primeira variação da deformação da armadura, incluindo a não-linearidade geométrica. Partindo-se da equação (3.106), chega-se a

$$\delta\varepsilon_S = (\cos^2 \beta) \delta\varepsilon_x + (\sin^2 \beta) \delta\varepsilon_y + (\sin \beta \cos \beta) \delta\gamma_{xy} =$$

$$\left\{ (\cos^2 \beta), (\sin^2 \beta), (\sin \beta \cos \beta) \right\} \delta \mathcal{E} \quad (3.123)$$

ou ainda, utilizando-se a equação (3.38),

$$\delta\varepsilon_S = \left\{ (\cos^2 \beta), (\sin^2 \beta), (\sin \beta \cos \beta) \right\} \delta \mathcal{E} =$$

$$\left\{ (\cos^2 \beta), (\sin^2 \beta), (\sin \beta \cos \beta) \right\} \mathbf{B} \delta \mathbf{U}^e, \quad (3.124)$$

donde vem

$$\delta \varepsilon_S = \left\{ \left(\cos^2 \beta \right), \left(\sin^2 \beta \right), \left(\sin \beta \cos \beta \right) \right\} \sum_{i=1}^8 \mathbf{B}_i \delta \mathbf{U}_i, \quad (3.125)$$

onde \mathbf{B}_i é a matriz de deformações completa (soma das parcelas linear e não-linear) associada ao nó “ i ” do elemento de concreto, conforme definida pela equação (3.42).

Reorganizando-se a equação (3.125), chega-se a

$$\delta \varepsilon_S = (\mathbf{B}_S)_{NL}^T \delta \mathbf{U}^e, \quad (3.126)$$

onde $(\mathbf{B}_S)_{NL}$ é o vetor de relações deformação-deslocamento para a armadura incluindo a não-linearidade geométrica, dado por

$$(\mathbf{B}_S)_{NL}^T = \left\{ (\mathbf{B}_S)_{NL1}^T, (\mathbf{B}_S)_{NL2}^T, \dots, (\mathbf{B}_S)_{NLi}^T, \dots, (\mathbf{B}_S)_{NL8}^T \right\}, \quad (3.127)$$

sendo

$$(\mathbf{B}_S)_{NLi} = \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \beta \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin^2 \beta \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \sin \beta \cos \beta \left(\frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \\ \cos^2 \beta \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sin^2 \beta \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \sin \beta \cos \beta \left(\frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \end{array} \right\} \quad (3.128)$$

o subvetor associado ao nó “ i ” do elemento de concreto.

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, de forma análoga ao que foi feito na equação (3.114), porém utilizando-se as definições de geometria, de deformações e de tensões próprias para a consideração da não-linearidade geométrica, chega-se a

$$(\mathbf{A}_{NL})_S^e = \int_{\chi} (\mathbf{B}_S)_{NL} \sigma_S A_S \frac{ds}{d\chi} d\chi, \quad (3.129)$$

que é a expressão para o cálculo das ações nodais não-lineares para a armadura, incluindo a possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos.

3.4 – SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.

Uma análise rigorosa de estruturas de concreto armado exige a consideração do comportamento mecânico não-linear dos materiais concreto e aço, além da possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos para estágios mais avançados do carregamento.

Através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, com a inclusão dos fatores supracitados, chega-se a um sistema de equações não-lineares dado pela equação (3.64). O objetivo deste item é apresentar um algoritmo numérico para a solução do sistema de equações (3.64), ou seja, encontrar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} para o qual se verifique o equilíbrio.

Inicialmente descreve-se o método de Newton-Raphson padrão, para a solução de sistemas de equações não-lineares. Com o objetivo de reduzir o custo computacional do processo, é introduzido o método de Newton-Raphson modificado, com matriz de rigidez na origem mantida constante durante toda a análise.

Como forma de acelerar a convergência do processo de solução adota-se o método BFGS. Os resultados obtidos com a aplicação deste processo, em termos de economia de tempo de computação, são significativos.

3.4.1 – O método de Newton-Raphson padrão

Conforme visto anteriormente, da aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de estruturas de concreto armado, resulta um sistema de equações não-lineares, dado na forma

$$\Psi(\mathbf{U}) = \mathbf{P} - \mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}). \quad (3.130)$$

Expandindo-se a equação (3.130) em série de Taylor, em torno do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U}_r , e retendo-se apenas até o termo que contém derivadas de primeira ordem, chega-se a

$$\Psi_{r+1} \cong \Psi_r + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{U}} \right)_r \Delta \mathbf{U}_r \quad (3.131)$$

onde Ψ_r é o vetor de desequilíbrio que resultou da iteração atual, ΔU_r é o incremento de deslocamentos dado na forma

$$\Delta U_r = U_{r+1} - U_r, \quad (3.132)$$

e onde o termo $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial U}\right)_r$ corresponde a uma matriz $n \times n$, sendo n o número de graus de liberdade da estrutura, cujo componente genérico da linha "i" e coluna "j" é dado por

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial U_j}\right)_r = -\frac{\partial (A_{NL})_i}{\partial U_j} = -K_{ij}, \quad (3.133)$$

em que K_{ij} representa um termo genérico da matriz de rigidez tangente da estrutura \mathbf{K}_T .

Agora, a equação (3.131) pode ser expressa matricialmente através da equação

$$\Psi_{r+1} \cong \Psi_r - (\mathbf{K}_T)_r \Delta U_r. \quad (3.134)$$

Sendo o objetivo do método de Newton-Raphson padrão anular o vetor de desequilíbrio da iteração seguinte, deve-se exigir que

$$\Psi_{r+1} \cong \Psi_r - (\mathbf{K}_T)_r \Delta U_r = \mathbf{0}, \quad (3.135)$$

donde provém a fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson padrão aplicado a solução de problemas de análise estrutural, dada na forma

$$\Delta U_r = (\mathbf{K}_T^{-1})_r [\mathbf{P} - \mathbf{A}_{NL}(U_r)], \quad (3.136)$$

e

$$U_{r+1} = U_r + \Delta U_r. \quad (3.137)$$

Conhecido o vetor de deslocamentos da iteração anterior \mathbf{U}_r , é possível calcular o vetor de ações não-lineares $\mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}_r)$ e a matriz de rigidez tangente da estrutura $\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_r)$. Através das equações (3.136) e (3.137), determina-se a solução \mathbf{U}_{r+1} , mais próxima da solução exata do sistema de equações (3.130).

Procede-se assim, iterativamente, até ser satisfeito o critério de convergência adotado. A FIGURA 3.7 ilustra este procedimento, para o caso unidimensional.

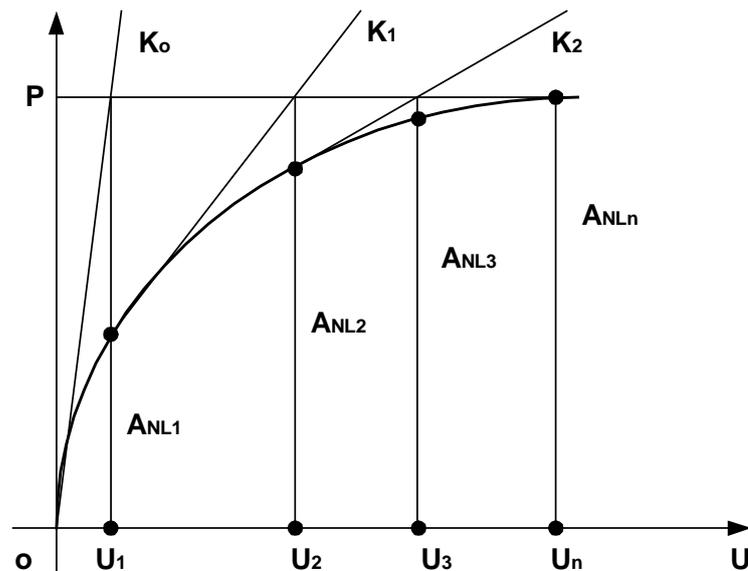


FIGURA 3.7 – O método de Newton-Raphson padrão para o caso unidimensional

A convergência deste método é de segunda ordem, porque envolve a função ψ , e sua derivada primeira \mathbf{K}_T . A atualização e a inversão (ou decomposição) da matriz de rigidez tangente em cada iteração tornam este processo computacionalmente oneroso, e, em problemas com muitos graus de liberdade, podem inviabilizar a sua utilização.

Esta dificuldade pode ser superada com o emprego do método de Newton-Raphson modificado, embora com sua adoção, se perca a propriedade da convergência quadrática.

3.4.2 – O método de Newton-Raphson modificado

O método de Newton-Raphson modificado consiste em realizar o cálculo e a inversão (ou decomposição) da matriz de rigidez apenas uma vez, no início do processo, trabalhando-se com a matriz de rigidez inicial \mathbf{K}_0 em todas as iterações. O algoritmo de recorrência fica sendo, então,

$$\Delta \mathbf{U}_r = (\mathbf{K}_o^{-1})_r [\mathbf{P} - \mathbf{A}_{NL}(\mathbf{U}_r)], \quad (3.138)$$

e

$$\mathbf{U}_{r+1} = \mathbf{U}_r + \Delta \mathbf{U}_r. \quad (3.139)$$

A utilização de uma matriz de rigidez inicial constante \mathbf{K}_o traz uma grande economia computacional, em relação a solução do sistema através do método de Newton-Raphson padrão, pois apenas torna-se necessário realizar substituições para diante e retrossubstituições sobre o vetor de forças desequilibradas ψ . Todavia, deve-se considerar o fato de, devido a matriz de rigidez não ser atualizada, o número de iterações deverá ser maior. A FIGURA 3.8 mostra o desenvolvimento deste processo para o caso unidimensional.

A convergência do método é de primeira ordem, porque se redefine apenas o vetor de forças desequilibradas ψ . A presença de patamares pronunciados dentro da resposta estática da laje pode gerar uma convergência muito lenta, com um número indefinido de iterações (BIGNON, 1987).

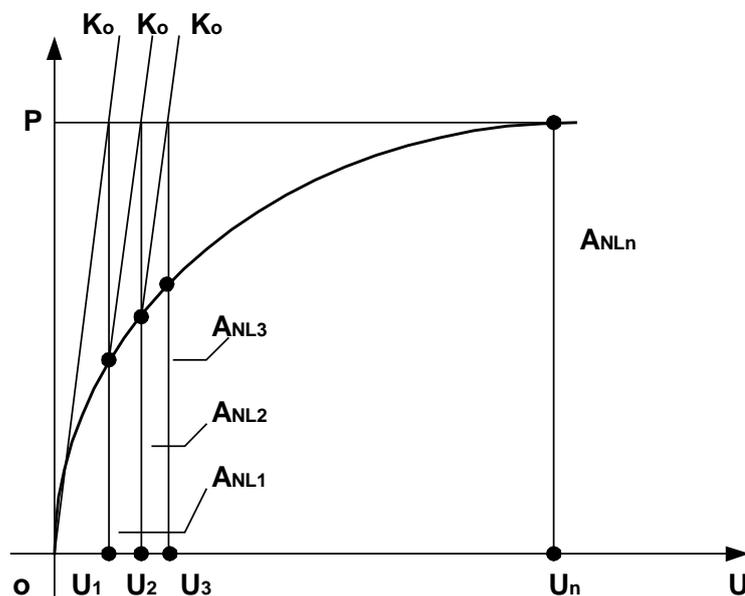


FIGURA 3.8 – O método de Newton-Raphson modificado para o caso unidimensional

3.4.3 – O método BFGS

Como alternativa para acelerar a convergência, surgem os métodos Quasi-Newton (STRICKLIN et al., 1973). Eles nascem da idéia de atualizar a matriz de rigidez tangente de uma maneira mais simples em cada iteração, ao invés de recalculá-la de forma completa (método de Newton-Raphson padrão) ou de mantê-la constante (método de Newton-Raphson modificado).

Existem diversas fórmulas para uma atualização simplificada da matriz tangente, contudo, algumas restrições devem ser impostas (MATTHIES e STRANG, 1979):

a) A nova matriz \mathbf{K}_r deve satisfazer a equação Quasi-Newton, dada na forma

$$\mathbf{K}_r \Delta \mathbf{U}_r = \Psi_r - \Psi_{r+1}, \quad (3.140)$$

que, para um problema unidimensional, equivale a aproximar a direção tangente por uma reta secante à curva em dois pontos sucessivos, conforme é ilustrado pela FIGURA 3.9.

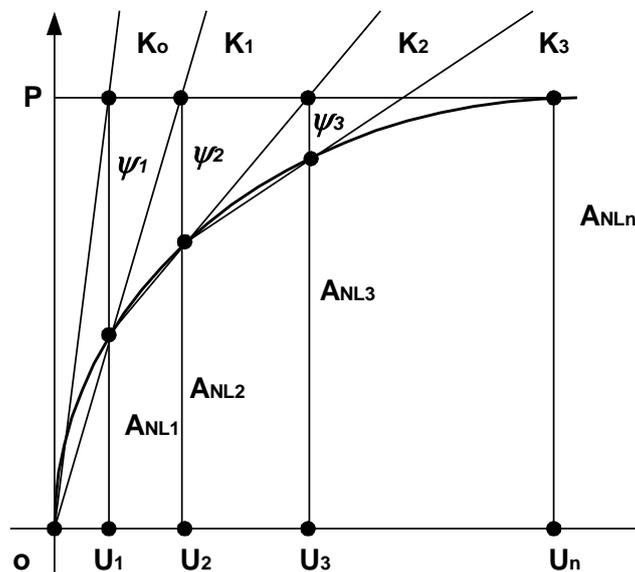


FIGURA 3.9 – O método Quasi-Newton para o caso unidimensional

- b) Se \mathbf{K}_{r-1} é simétrica, então, a nova matriz \mathbf{K}_r também deve ser simétrica.
 c) Se \mathbf{K}_{r-1} é uma matriz positivo-definida, então, a nova matriz \mathbf{K}_r também deve ser positivo-definida.

d) Como condição essencial, o novo vetor de incremento de deslocamentos $\Delta \mathbf{U}_r$ deve poder ser calculado com um pequeno custo computacional.

Uma fórmula de atualização da matriz tangente que satisfaz a todas as exigências fixadas acima é a atualização de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), que pode ser escrita de forma mais conveniente em termos de \mathbf{K}_r^{-1} , ao invés de ser dada em função de \mathbf{K}_r .

A atualização aproximada da matriz tangente inversa, segundo o método BFGS, pode ser dada na forma

$$\mathbf{K}_r^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{w}_r \mathbf{v}_r^T) \mathbf{K}_{r-1}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{v}_r \mathbf{w}_r^T), \quad (3.141)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade $n \times n$, sendo n o número de graus de liberdade da estrutura, e \mathbf{w}_r e \mathbf{v}_r são vetores de atualização, com n componentes, que serão definidos adiante. Observe-se que os requisitos de simetria e a condição de matriz positivo-definida são satisfeitos de forma imediata devido ao fato de que os fatores que multiplicam a matriz \mathbf{K}_{r-1}^{-1} serem um o transposto do outro.

Assim, é possível, partindo-se da matriz de rigidez tangente na origem \mathbf{K}_0 , obter-se sucessivas atualizações aproximadas da matriz de rigidez tangente a cada nova iteração. Substituindo-se o cálculo rigoroso da matriz de rigidez tangente por sua atualização aproximada dada por (3.141), pode-se utilizar-se a fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson padrão dada por (3.136) e (3.137).

Para evitar o processo de inversão da matriz de rigidez e acelerar o cálculo do novo vetor de deslocamentos, é interessante adotar-se o procedimento alternativo proposto por MATTHIES e STRANG (1979), ou ainda o algoritmo que se encontra em ARAÚJO e BIGNON (1993). Observe-se que MATTHIES e STRANG (1979) ainda propõem a adição de um processo de busca (*line search*), para definir o tamanho do passo na direção do vetor incremento de deslocamentos.

Para definir os vetores de atualização \mathbf{w}_r e \mathbf{v}_r , é interessante antes introduzir-se as diferenças

$$\delta_r = \mathbf{U}_r - \mathbf{U}_{r-1}, \quad (3.142)$$

e

$$\gamma_r = \Psi_{r-1} - \Psi_r. \quad (3.143)$$

Os vetores de atualização podem, então, ser escritos na forma

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\psi}_r - \boldsymbol{\psi}_{r-1} \left[1 + \sqrt{\frac{\boldsymbol{\delta}_{r-1}^T \boldsymbol{\gamma}_r}{\boldsymbol{\delta}_r^T \boldsymbol{\psi}_r}} \right], \quad (3.144)$$

e

$$\mathbf{w}_r = \frac{1}{\boldsymbol{\delta}_r^T \boldsymbol{\gamma}_r} \boldsymbol{\delta}_r. \quad (3.145)$$

A convergência dos métodos Quasi-Newton é denominada de superlinear, ou seja, superior à convergência de primeira ordem, e suas condições de convergência e estabilidade tem sido estudadas por diversos autores. A eficiência computacional varia de acordo com o problema, tendo sido observados ganhos de até 35% em relação ao método de Newton-Raphson (STRICKLIN et al., 1973).

3.4.4 – O algoritmo incremental-iterativo

A carga total a ser aplicada sobre a estrutura é dividida em um certo número de partes iguais, obtendo-se assim o vetor de incremento de carga $\Delta \mathbf{P}$, ou seja,

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{\mathbf{P}}{Netap}, \quad (3.146)$$

onde \mathbf{P} é o vetor de cargas externas total e $Netap$ é o número de etapas de carga que serão aplicadas na estrutura.

O vetor de cargas no final de cada etapa de carga \mathbf{P}_i é obtido adicionando-se o vetor de incremento de cargas ao vetor de cargas da etapa anterior \mathbf{P}_{i-1} , isto é

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta \mathbf{P}. \quad (3.147)$$

Cada etapa do processo de carregamento inicia-se com um desequilíbrio $\Delta \mathbf{P}$ entre o vetor de cargas aplicadas \mathbf{P}_i e o vetor de ações nodais não-lineares $(\mathbf{A}_{NL})_i$. Portanto, deve ser empregado um processo iterativo que permita determinar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} ,

para o qual seja estabelecido o equilíbrio entre cargas externas e esforços internos. Neste trabalho emprega-se o método BFGS, para o ajuste do equilíbrio em cada etapa de carga.

Em uma dada etapa do processo de solução do sistema de equações não-lineares, considera-se que tenha sido atingida a convergência, quando forem satisfeitas simultaneamente as duas condições abaixo, em uma dada iteração “ r ”

$$\frac{\|\Psi_r\|}{\|\Delta\mathbf{P}\|} \leq 0,01, \quad (3.148)$$

e

$$\frac{\|\Delta\mathbf{U}_r\|}{\|\mathbf{U}_r\|} \leq 0,01, \quad (3.149)$$

onde:

$\|\Psi_r\|$ é a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas;

$\|\Delta\mathbf{P}\|$ é a norma euclidiana do vetor de incremento de cargas;

$\|\Delta\mathbf{U}_r\|$ é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamentos;

$\|\mathbf{U}_r\|$ é a norma euclidiana do último vetor de deslocamentos obtido.

Quando o material chega ao esgotamento de sua capacidade de oferecer esforços resistentes que equilibrem o carregamento externo, é sinal que a estrutura atingiu a ruptura. Este fato é detectado pelo algoritmo, quando não é mais possível satisfazer o critério de convergência dado por (3.148) e (3.149), pois o vetor de desequilíbrio Ψ não pode ser reduzido a valores próximos de zero, por maior que seja o número de iterações.

Estudos numéricos realizados com o modelo aqui desenvolvido indicam que, quando o número de iterações em uma dada etapa de carga alcança um valor igual ou superior a 100, sem convergir, significa que a capacidade de resistência da estrutura foi esgotada.

Quando esta situação é atingida, o incremento de carga inicial é dividido por 2, retorna-se à configuração do início da etapa, e tenta-se novamente obter a convergência. Não sendo logrado êxito, divide-se o incremento inicial de carga por 4, volta-se a situação do início da etapa, e busca-se novamente um ponto de equilíbrio. Se após estas 3 tentativas uma configuração estável não for alcançada, admite-se que a estrutura tenha atingido o colapso. Este procedimento permite a determinação da carga de ruptura da estrutura com muito boa precisão.

4 – MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

4.1 – MODELO CONSTITUTIVO BIDIMENSIONAL PARA O CONCRETO

Neste trabalho é empregado um modelo constitutivo bidimensional para o concreto baseado naquele desenvolvido por DARWIN (DARWIN e PECKNOLD, 1977a e 1977b), que é apropriado para o emprego na análise não-linear de estruturas, através do método dos elementos finitos, sendo também recomendado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993).

4.1.1 – Equação constitutiva bidimensional ortotrópica

O concreto, antes de se ter atingido um estado de fissuração ou de esmagamento, é modelado como um material ortotrópico elástico linear, com os eixos de ortotropia coincidindo com os eixos principais de deformação, designados por 1 e 2 . A equação constitutiva, segundo as direções 1 e 2 , será dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde E_1 e E_2 são os módulos de deformação secantes segundo as direções 1 e 2 , respectivamente, e ν é o coeficiente de Poisson do concreto.

Então, a matriz constitutiva do material é definida em função das propriedades E_1 , E_2 e ν , que são consideradas como dependentes do estado de tensão e de deformação atual do ponto considerado. Os módulos secantes, E_1 e E_2 , segundo as direções principais de deformação, são determinados a partir de curvas tensão-deformação semelhantes à curva tensão-deformação obtida para o concreto sob solicitação uniaxial. O coeficiente de Poisson ν foi considerado constante, igual $0,20$.

4.1.2 – Deformação uniaxial equivalente

Em um estado biaxial de tensões, a deformação em uma direção não é função apenas da tensão naquela direção, mas sim, devido ao efeito de Poisson, dependente da tensão atuante na direção ortogonal. O conceito de deformação uniaxial equivalente fornece um meio de separar o efeito de Poisson das deformações acumuladas e permite uma representação conveniente dos resultados experimentais.

Para uma melhor compreensão da definição de deformação uniaxial equivalente, é útil analisar-se o comportamento de um material elástico linear, conforme é ilustrado pela FIGURA 4.1. Uma curva representa o gráfico tensão-deformação para a situação de compressão uniaxial. A outra curva representa a relação tensão-deformação segundo a direção mais comprimida, para um estado de compressão biaxial, onde $\sigma_1 = \alpha \sigma_2$. É possível, então, observar-se o efeito enrijecedor que a compressão transversal exerce.

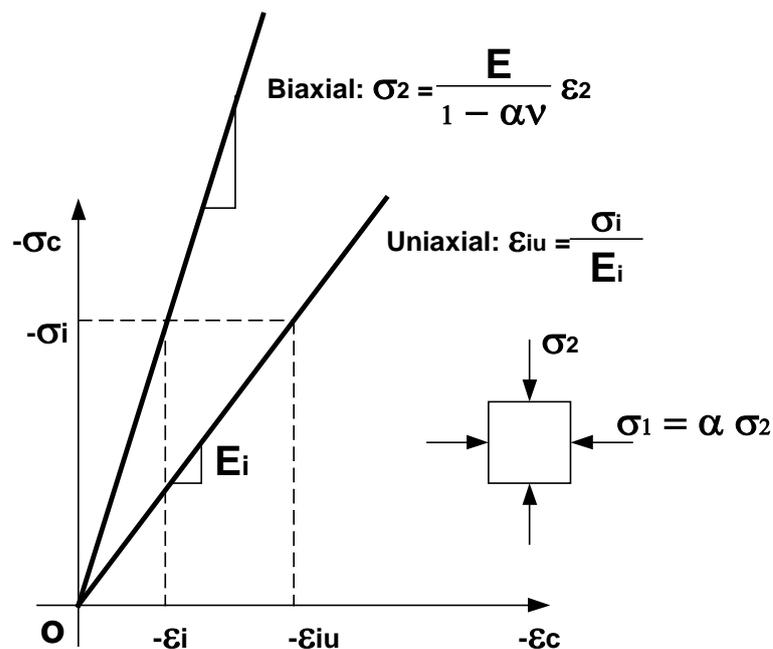


FIGURA 4.1 – Deformação uniaxial equivalente para um material linear

Para cada relação entre as tensões principais α , a verdadeira relação tensão-deformação terá uma inclinação diferente, enquanto que uma única curva uniaxial equivalente representa a resposta de um material elástico linear.

Para um material de comportamento não-linear, as deformações uniaxiais equivalentes, segundo as direções de ortotropia 1 e 2, são dadas por

$$\varepsilon_{1u} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_1 + \nu \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \varepsilon_2 \right), \quad (4.2)$$

e

$$\varepsilon_{2u} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_2 + \nu \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \varepsilon_1 \right), \quad (4.3)$$

onde ε_1 e ε_2 são as deformações principais.

Para um material não-linear, a deformação uniaxial equivalente representa a parcela da deformação (isto é, sem o efeito de Poisson) na i -ésima direção, que controla o comportamento do material, incluindo a redução progressiva da rigidez e a ruptura final.

Deve ser salientado que ε_{1u} e ε_{2u} não são realmente deformações, e, portanto, não se transformam como as deformações verdadeiras, sob uma rotação dos eixos de referência. Além disso, elas são determinadas nas direções principais de deformação, as quais geralmente vão variando durante o carregamento. Deste modo, ε_{1u} , por exemplo, não fornece uma “história de deformação” segundo uma direção fixa, mas sim em uma direção que muda continuamente e que corresponde à deformação principal ε_1 .

Contudo, a introdução destas variáveis permite representar o comportamento biaxial do concreto através de duas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes separadas, bastante semelhantes à curva correspondente à sollicitação uniaxial do material.

Empregando-se as equações (4.2) e (4.3), a equação (4.1) pode ser colocada na forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1u} \\ \varepsilon_{2u} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.4)$$

Observa-se, então, que as tensões principais podem ser obtidas de relações unidimensionais para o concreto, a partir das deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} . Isto é possível em virtude de a equação (4.4) estar na forma desacoplada. Entretanto, para se obter as deformações uniaxiais equivalentes, é necessário conhecer os módulos secantes que, por sua vez, depende das primeiras. Um processo iterativo torna-se, então, necessário para a solução do problema (ARAÚJO e CAMPOS FILHO, 1992). Felizmente, 4 ou 5 iterações são suficientes para se atingir a convergência dos módulos secantes E_1 e E_2 .

4.1.3 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE

As expressões analíticas do critério de ruptura bidimensional para o concreto, propostas por KUPFER e GERSTLE (1973) e recomendadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), servem de envoltória para as tensões máximas σ_{1f} e σ_{2f} , que podem ser atingidas pelo material, em cada uma das duas direções principais de tensão. O critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE é ilustrado pela FIGURA 4.2, onde as tensões principais estão normalizadas pelo módulo da resistência média à compressão cilíndrica uniaxial do concreto f_c .

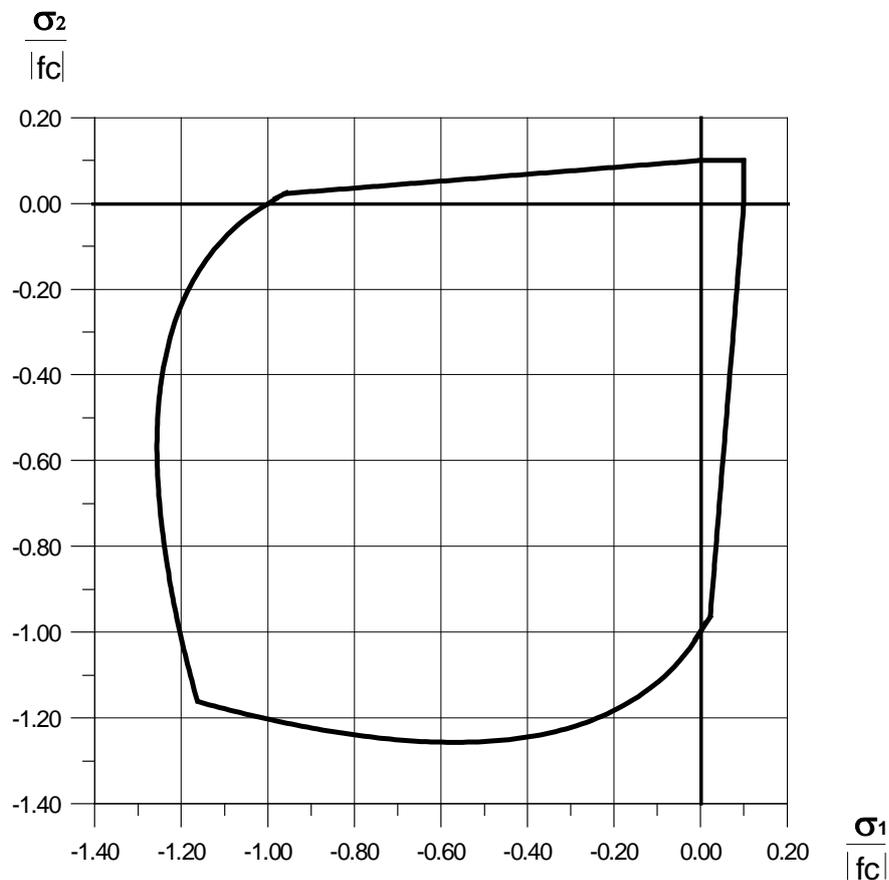


FIGURA 4.2 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE

Na situação de compressão-compressão ($\sigma_1 < 0$ e $\sigma_2 < 0$), ou na situação de tração-compressão ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$), com $\sigma_2 < -0,96 f_c$, valem as seguintes expressões:

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{2f} = -\frac{(1+3,80\alpha)}{(1+\alpha)^2} fc, \quad (4.6)$$

e

$$\sigma_{1f} = -fc. \quad (4.7)$$

Para o caso de tração-compressão ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$), com $\sigma_2 > -0,96 f_c$, são empregadas as expressões

$$\sigma_{2f} = -fc, \quad (4.8)$$

e

$$\sigma_{1f} = \left(1 + 0,8 \frac{\sigma_2}{fc}\right) fct, \quad (4.9)$$

sendo fct a resistência à tração uniaxial do concreto.

Na situação de tração-tração ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 > 0$), permanecem válidas as resistências uniaxiais, ou seja,

$$\sigma_{1f} = fct, \quad (4.10)$$

e

$$\sigma_{2f} = fct. \quad (4.11)$$

4.1.4 – Deformação correspondente à tensão máxima

Na situação de solitação biaxial, a deformação correspondente à tensão máxima em cada direção, ε_{1f} e ε_{2f} , devem ser determinadas conforme a combinação de tensões principais atuantes σ_1 e σ_2 (CEB, 1993).

Na compressão biaxial tem-se que, se $\sigma_{if} \leq -0,96 f_c$, então

$$\varepsilon_{cif} = -0,0022 \left(-3 \frac{\sigma_{if}}{f_c} - 2 \right), \quad (4.12)$$

senão

$$\varepsilon_{cif} = -0,0022 \left[-1,6 \left(-\frac{\sigma_{if}}{f_c} \right)^3 + 2,25 \left(-\frac{\sigma_{if}}{f_c} \right)^2 + 0,35 \left(-\frac{\sigma_{if}}{f_c} \right) \right], \quad (4.13)$$

onde o índice “i” pode assumir os valores 1 ou 2.

Na situação de tração-compressão, com $\sigma_2 \leq -0,96 f_c$, valem as seguintes equações

$$\varepsilon_{c2f} = -0,0022 \left(-3 \frac{\sigma_{2f}}{f_c} - 2 \right), \quad (4.14)$$

e

$$\varepsilon_{c1f} = 0,00015. \quad (4.15)$$

Para o estado de tensão de tração-compressão, com $\sigma_2 > -0,96 f_c$, adotam-se as fórmulas

$$\varepsilon_{c2f} = -0,0022 \left[-1,6 \left(-\frac{\sigma_{2f}}{f_c} \right)^3 + 2,25 \left(-\frac{\sigma_{2f}}{f_c} \right)^2 + 0,35 \left(-\frac{\sigma_{2f}}{f_c} \right) \right], \quad (4.16)$$

e

$$\varepsilon_{c1f} = 0,00015. \quad (4.17)$$

No caso de tração-tração, as deformações últimas permanecem as mesmas da situação de tração uniaxial, ou seja,

$$\varepsilon_{c1f} = 0,00015, \quad (4.18)$$

e

$$\varepsilon_{c2f} = 0,0015. \quad (4.19)$$

4.1.4 – Curvas uniaxiais equivalentes

Se as curvas tensão-deformação obtidas em ensaios de solitação biaxial para diferentes relações entre as tensões principais σ_1 e σ_2 são normalizadas em relação às tensões máximas e correspondentes deformações máximas observadas (ε_{cif} , σ_{if}), nota-se que as curvas resultantes são aproximadamente coincidentes. Portanto, é possível representá-las através de uma única expressão analítica para a curva tensão-deformação (DARWIN e PECKNOLD, 1977a).

Então, partindo-se de uma única expressão analítica, uma vez conhecidas as tensões máximas e correspondentes deformações máximas (ε_{cif} , σ_{if}), determinadas conforme o item anterior, pode-se estabelecer a uma curva uniaxial equivalente em separado para cada direção principal de deformação.

A partir destas curvas uniaxiais equivalentes, determinam-se os módulos de deformação secantes E_1 e E_2 , segundo as direções principais 1 e 2, que são requeridos pela equação constitutiva ortotrópica, definida pela equação (4.1).

Para representar o comportamento do concreto comprimido, até ser atingida a tensão de esmagamento, é empregada a equação tensão deformação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), que pode ser escrita na forma abaixo.

Se $\varepsilon_{iu} \geq \varepsilon_{cif}$, então

$$\sigma_i = \sigma_{if} \left[\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right], \quad (4.20)$$

onde

$$\eta = \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{cif}}, \quad (4.21)$$

sendo

$$k = \frac{E_{co}}{E_{csi}}, \quad (4.22)$$

e

$$E_{csi} = \frac{\sigma_{if}}{\varepsilon_{cif}}. \quad (4.23)$$

Na equação (4.22), E_{co} é o módulo de deformação longitudinal tangente à origem do diagrama tensão deformação. Já a variável E_{csi} representa o módulo de deformação secante do

concreto na direção principal “i”, associado à tensão limite σ_{if} e à deformação ε_{cif} , conforme é ilustrado pela FIGURA 4.3.

O concreto tracionado também é modelado conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), através das equações que se seguem. Quando $\sigma_i \leq 0,9 \sigma_{if}$, tem-se que

$$\sigma_i = E_{co} \varepsilon_{iu}, \quad (4.24)$$

porém, quando $0,9 \sigma_{if} \leq \sigma_i \leq \sigma_{if}$, vale a expressão

$$\sigma_i = \sigma_{if} - \frac{0,1\sigma_{if}}{0,00015 - 0,9 \frac{\sigma_{if}}{E_{co}}} (0,00015 - \varepsilon_{iu}). \quad (4.25)$$

sendo, evidentemente, E_{co} o módulo de deformação longitudinal na origem.

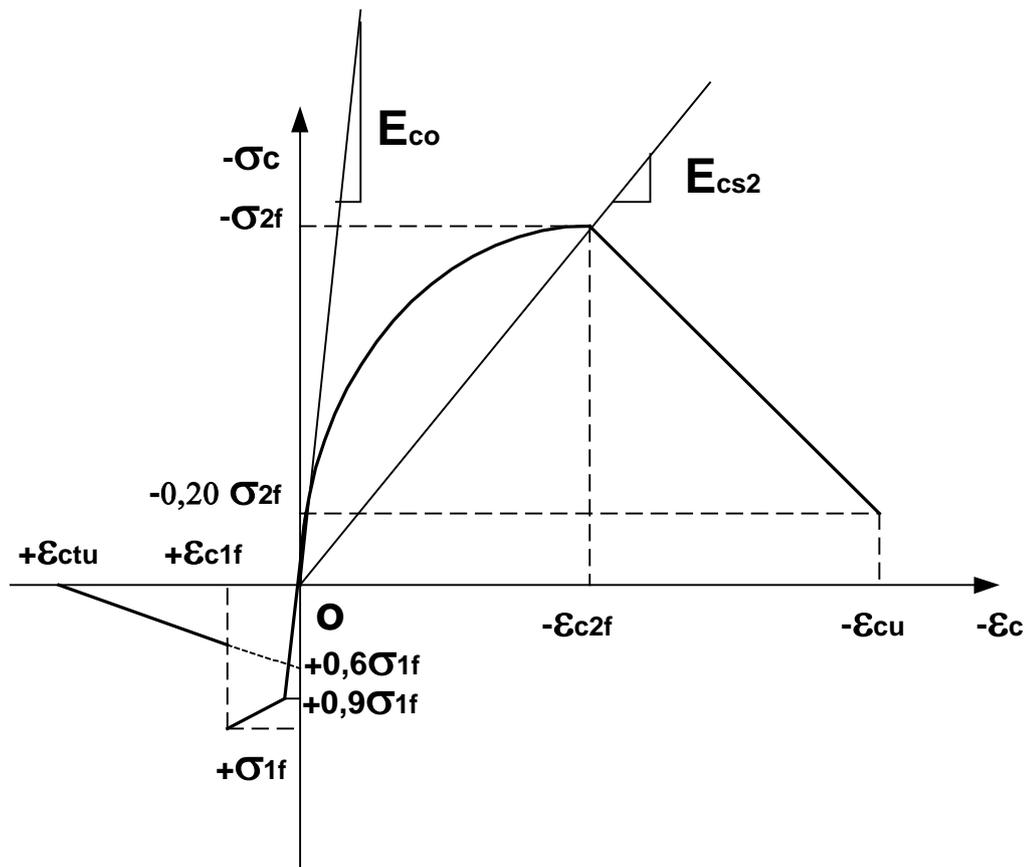


FIGURA 4.3 – Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto

4.1.6 – Procedimento iterativo

Para se determinar as tensões σ_1 e σ_2 a partir das deformações principais ε_1 e ε_2 , é necessário empregar-se um procedimento iterativo.

Inicialmente admite-se um comportamento isotrópico, com $E_1 = E_2 = E_{co}$. Calculam-se as deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} , a partir das equações (4.2) e (4.3).

Com a equação (4.4), calculam-se as tensões principais σ_1 e σ_2 , a partir de ε_{1u} e ε_{2u} .

Com estas tensões, ingressa-se no critério de ruptura bidimensional de KUPFER e GERSTLE, e extrai-se os valores para as tensões limites σ_{1f} e σ_{2f} . Com estas tensões máximas e suas correspondentes deformações, são definidas novas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes.

A partir destas curvas uniaxiais equivalentes para as direções 1 e 2, com as deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} , determinam-se os novos módulos secantes E_1 e E_2 .

Com estes novos módulos, ajustam-se os valores das deformações uniaxiais equivalentes a partir de (4.2) e (4.3). Com estas novas deformações uniaxiais equivalentes, determinam-se novas tensões principais, utilizando (4.4). Estas novas tensões geram novas curvas uniaxiais equivalentes através do critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE. Destas novas curvas são extraídos valores corrigidos para os módulos secantes E_1 e E_2 .

Procede-se assim, iterativamente, até que ocorra a convergência para os valores dos módulos de deformação secantes E_1 e E_2 . Se no decorrer do procedimento ocorrer a fissuração ou o esmagamento do concreto, o procedimento é abandonado, e passa-se a adotar o modelo correspondente ao concreto fissurado ou ao concreto esmagado, conforme descritos a seguir.

4.2 – MODELO PARA O CONCRETO FISSURADO

O concreto é um material que se caracteriza por possuir uma resistência à tração bastante inferior à sua resistência à compressão. A resistência à tração é apenas algo em torno de 10% da resistência à compressão. Este tipo de comportamento faz com que, mesmo para um nível de carga não muito elevado, surjam rupturas localizadas em pontos submetidos à tração, que são designadas por fissuras. A fissuração tem por efeito reduzir a rigidez das estruturas de concreto, sendo uma das principais causas do comportamento não-linear que as mesmas apresentam.

Neste trabalho um modelo de fissuras distribuídas é empregado. Este modelo tem a vantagem de não ser necessário redefinir-se a malha de elementos finitos a cada nova fissura que surge na estrutura. Apenas é necessário definir uma equação constitutiva adicional para o concreto no estado fissurado.

Se na região do ponto considerado houver a presença de armadura, a tensão de tração no concreto não é anulada após a fissuração. O esforço de tração é transmitido pela armadura ao concreto situado entre duas fissuras, que empresta sua colaboração na resistência à tração. Este efeito é conhecido na literatura internacional como “*tension-stiffening*”. Considera-se, então, uma tensão resistente fictícia, para levar em conta a colaboração que o concreto situado entre duas fissuras fornece na absorção dos esforços de tração.

Também é preciso levar em conta que uma certa parcela de esforço de corte continua a ser transmitida no plano da fissura, através dos mecanismos de engrenamento dos agregados e do efeito de pino da barra de armadura que atravessa a fissura. Para incluir este efeito, é necessário introduzir um módulo de deformação por corte reduzido para o concreto fissurado.

4.2.1 – Critério de fissuração

Durante o processo de análise de uma estrutura de concreto, se em algum ponto submetido à combinação de tensões de tração-tração, ou de tração-compressão, a tensão principal σ_1 ultrapassar a tensão limite determinada a partir da envoltória do Critério de Ruptura de KUPFER e GERSTLE, forma-se a primeira fissura neste local.

A partir deste instante, o ângulo em que se formou a primeira fissura é fixado e as direções perpendicular e paralela ao plano da fissura passam a ser consideradas como os eixos de ortotropia para o concreto.

4.2.2 – Equação constitutiva ortotrópica

Após ser formada a primeira fissura, as direções perpendicular ao plano da fissura, direção 1, e paralela ao plano da fissura, direção 2, são fixadas como sendo os eixos de ortotropia do material. Após a fissuração, o coeficiente de Poisson, ν , é anulado, e as direções 1 e 2 passam a funcionar de forma desacoplada.

A equação constitutiva incremental ortotrópica passa, então, a ser dada na forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1f} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.26)$$

onde E_{1f} é o módulo de deformação fictício na direção perpendicular ao plano da fissura, de valor negativo, incluído para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras; E_2 é o módulo de deformação tangente segundo a direção 2; e G_{12r} é o módulo de deformação por corte reduzido, incorporado ao modelo para representar a transmissão de esforço de corte no plano da fissura. As propriedades E_{1f} , E_2 e G_{12r} são dependentes do estado de tensão e do estado de deformação existentes no ponto considerado.

4.2.3 – Deformação uniaxial equivalente

Após a fissuração, o efeito de Poisson é desprezado. As deformações uniaxiais equivalentes axiais ε_{iu} , para as direções 1 e 2, passam a ser determinadas a partir da rotação do tensor de deformação, determinado no sistema de referência xoy , para o sistema de referência $1o2$. Da mesma forma, depois de o concreto haver fissurado, passa-se a determinar a deformação por corte no plano da fissura γ_{12} , a partir da rotação do tensor de deformação determinado no sistema de referência xoy , para o sistema de referência $1o2$.

4.2.4 – Colaboração do concreto entre fissuras

A colaboração do concreto entre fissuras na absorção dos esforços de tração, conhecida como “*tension-stiffening*”, é considerada através da inclusão de um ramo linear descendente no diagrama tensão-deformação do concreto tracionado, após a deformação de fissuração do concreto ε_{c1f} , conforme consta da FIGURA 4.4.

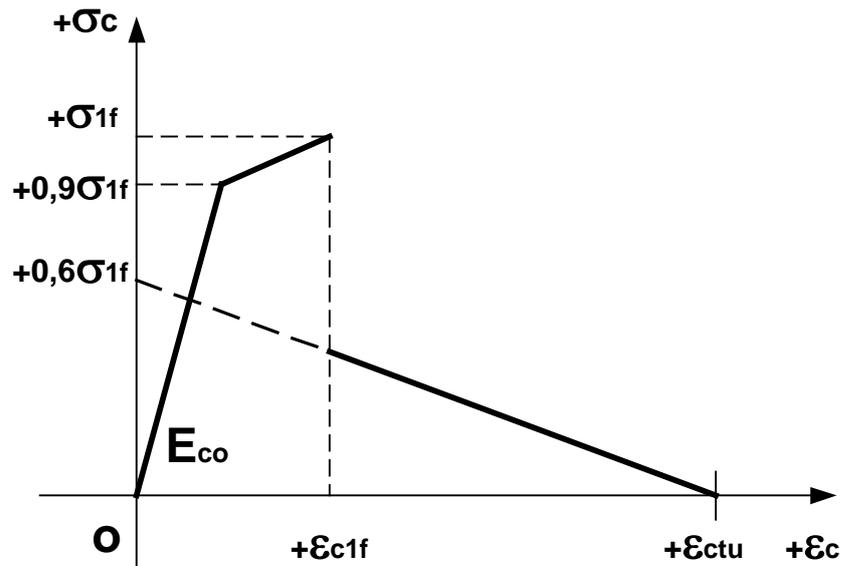


FIGURA 4.4 – Equação constitutiva para o concreto tracionado

A relação constitutiva para o concreto tracionado após a fissuração é a mesma que foi empregada com sucesso por PRATES JÚNIOR (1992), dada na forma

$$\sigma_{1u} = 0,6 \sigma_{1f} \left(1,0 - \frac{\varepsilon_{1u}}{\varepsilon_{ctu}} \right), \quad (4.27)$$

Na FIGURA 4.4, a variável ε_{ctu} indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Neste trabalho, adota-se para ε_{ctu} o valor 0,002.

4.2.5 – Módulo de deformação por corte reduzido

Para poder representar a transmissão de esforço cortante através do plano da fissura, adota-se um módulo de deformação por corte reduzido G_{12r} , cuja definição, na falta de maiores dados experimentais, é dada por (PRATES JÚNIOR, 1991)

$$G_{12r} = \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon_{1u}}{0,004} \right) \right] G_{co}, \quad (4.28)$$

sendo G_{co} o módulo de deformação por corte do concreto na origem, dado por

$$G_{co} = \frac{E_{co}}{2(1 + \nu)}. \quad (4.29)$$

Deste modo, a tensão tangencial, transmitida através do plano da fissura, será calculada pela fórmula

$$\tau_{12} = G_{12r} \gamma_{12}. \quad (4.30)$$

A equação (4.28) representa o produto de um fator de redução, contido entre colchetes, pelo módulo de deformação do concreto na origem. Observe-se que quanto maior a deformação na direção perpendicular ao plano da fissura, ε_{1u} , menor será a tensão de corte transferida através da fissura.

4.3 – MODELO PARA O CONCRETO ESMAGADO

4.3.1 – Critério de esmagamento

Durante o processo de carregamento incremental de uma estrutura de concreto, em algum ponto submetido à combinação de tensões de compressão-compressão ou à combinação de tração-compressão com $\sigma_2 < -0,96 f_c$, for atingida a resistência à compressão sob solitação biaxial, σ_{2f} , conforme determinada pelo Critério de Ruptura de KUPFER e GERSTLE, este ponto é considerado como esmagado na direção 2, e somente consegue suportar um acréscimo de deformação mediante um alívio da tensão de compressão aplicada. Este tipo de comportamento é designado por “*strain-softening*”.

Assim sendo, após ter sido ultrapassada a deformação ε_{c2f} , que corresponde a tensão limite σ_{2f} , adota-se para a equação constitutiva do concreto comprimido um ramo descendente, cujo módulo de deformação tangente, E_{2c} , será negativo.

O coeficiente de Poisson, após o concreto ter atingido o esmagamento em uma direção, é considerado nulo.

4.3.2 – Equação constitutiva ortotrópica

Uma vez que a resistência à compressão biaxial do concreto tenha sido atingida, as direções principais de deformação em que ocorreu o esmagamento são fixadas como sendo os eixos de ortotropia do material. A partir deste ponto o coeficiente de Poisson é anulado, e as duas direções são desacopladas.

A equação constitutiva incremental ortotrópica, com o eixo 2 associado à direção em que ocorreu o esmagamento do concreto, assume, então, o seguinte aspecto

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.31)$$

onde E_1 é o módulo de deformação secante do concreto na direção 1; E_2 é o módulo de deformação secante segundo a direção do esmagamento (direção 2); e G_{12c} é o módulo de deformação por corte do concreto após o esmagamento, considerado igual a

$$G_{12c} = \frac{G_{co}}{4}. \quad (4.32)$$

4.3.3 – Deformação uniaxial equivalente

Para o concreto esmagado as deformações uniaxiais equivalentes são determinadas através da rotação do tensor de deformação determinado em relação ao sistema de referência xoy , para o sistema $1o2$.

4.3.4 – Comportamento do concreto pós-esmagamento

A equação tensão-deformação adotada para o concreto, após o esmagamento, é dada por (CEB, 1993)

$$\sigma_2 = \sigma_{2f} \left(-\frac{\varepsilon_{2u}}{\varepsilon_{c2f}} \frac{0,8}{n-1} + \frac{n-0,2}{n-1} \right), \quad (4.33)$$

onde “ n ” é o fator que determina quantas vezes a deformação última do concreto ε_{cu} é maior que a deformação ε_{c2f} correspondente à tensão máxima σ_{2f} , ou seja,

$$\varepsilon_{cu} = n \varepsilon_{c2f}. \quad (4.34)$$

Este fator, que define a “ductilidade” do concreto após o esmagamento, é fornecido pelo Código Modelo CEB-FIP 1990, em uma tabela que o relaciona com a classe do concreto (f_{ck}). O valor de n varia entre 3,00, para o concreto C20, e 1,20, para o concreto C80.

É possível determinar-se uma função de interpolação, para obter o valor de n em função da resistência a compressão uniaxial média do concreto f_{cm} , na forma

$$n = 4,81(f_{cm} - 1,645 \sigma_{fc})^{-0,66}, \quad (4.35)$$

sendo f_{cm} e σ_{fc} (desvio padrão de f_c) fornecidos em kN/cm^2 .

O comportamento do concreto no regime pós-esmagamento se encontra ilustrado na FIGURA 4.3.

4.4 – EQUAÇÃO CONSTITUTIVA INCREMENTAL NO SISTEMA GLOBAL XOY.

Uma vez determinada a equação constitutiva segundo os eixos de ortotropia 1 e 2 , conforme o estado do concreto seja íntegro, fissurado ou esmagado, deve-se estabelecer a equação constitutiva para o sistema de referência global xoy . Isto é feito aplicando-se uma rotação na matriz constitutiva dos eixos de ortotropia $1o2$, para o sistema de referência global xoy .

4.4.1 – Cálculo das direções dos eixos de ortotropia

Conhecidas as componentes de deformação em um ponto, no sistema de referência xoy , ou seja, ε_x , ε_y e γ_{xy} , as deformações principais, ε_1 e ε_2 , podem ser calculadas através das expressões clássicas da Resistência dos Materiais (POPOV, 1984), quais sejam

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}, \quad (4.36)$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \quad (4.37)$$

A partir do conhecimento das deformações principais, é possível determinar-se os cossenos diretores e o ângulo θ , que a direção principal l forma com o eixo dos x , utilizando-se as seguintes equações, respectivamente

$$\cos(1, x) = \cos \theta = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}, \quad (4.38)$$

$$\cos(1, y) = \sin \theta = \frac{-(\varepsilon_x - \varepsilon_1)}{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}, \quad (4.39)$$

e

$$\theta = \arctan \left[\frac{\cos(1, y)}{\cos(1, x)} \right]. \quad (4.40)$$

A FIGURA 4.5 serve para ilustrar a questão das deformações principais e dos eixos de ortotropia.

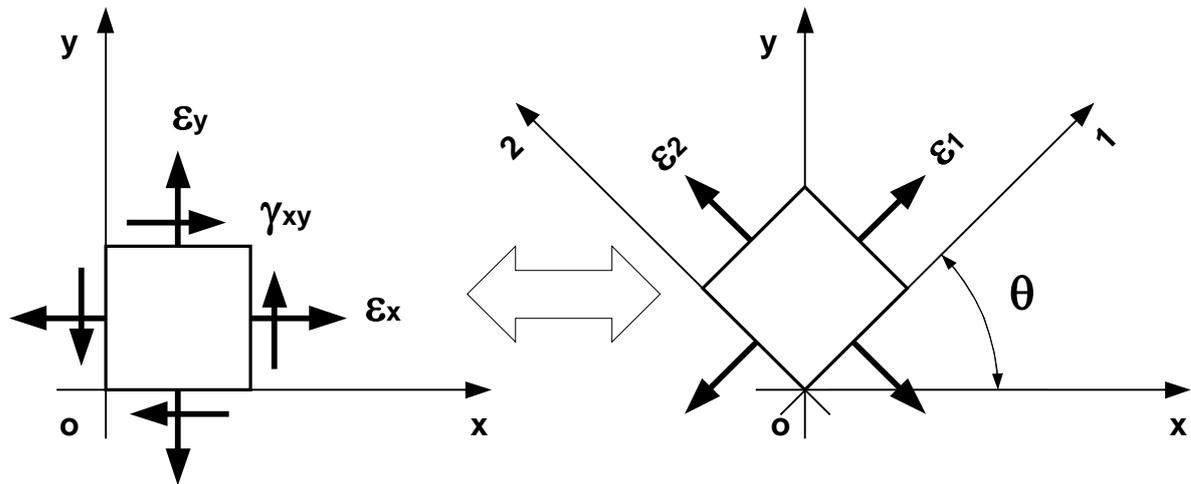


FIGURA 4.5 – deformações principais e eixos de ortotropia

Conforme afirmado anteriormente, os eixos de ortotropia do material são considerados coincidentes com as direções principais de deformação. Após a ocorrência de fissuração ou de esmagamento do concreto, em uma dada etapa de carga, os eixos de ortotropia passam a ser fixos, guardando-se as últimas direções principais que foram determinadas.

4.4.2 – Transformação das deformações do sistema xoy para os eixos de ortotropia

As componentes do tensor de deformação segundo as direções dos eixos de ortotropia podem ser calculadas em função das componentes do tensor de deformação determinadas para o sistema xoy , através de uma transformação de rotação. O resultado final desta transformação tensorial pode ser expresso matricialmente na forma (GILBERT e WARNER, 1978)

$$\mathcal{E}_{12} = \mathbf{T}_{\varepsilon} \mathcal{E}_{xy}, \quad (4.41)$$

onde

$$\mathcal{E}_{12}^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}\}, \quad (4.42)$$

$$\mathcal{E}_{xy}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}, \quad (4.43)$$

e

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

4.4.3 – Transformação das tensões dos eixos de ortotropia para o sistema xoy

As componentes do tensor de tensões segundo as direções dos eixos xoy podem ser determinadas em função das componentes do tensor de tensões calculadas para as direções dos eixos de ortotropia l_02 , através de uma transformação de rotação. O resultado final desta transformação tensorial pode ser colocado matricialmente na forma

$$\sigma_{xy} = \mathbf{T}_\varepsilon^T \sigma_{12}, \quad (4.45)$$

onde

$$\sigma_{12}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}, \quad (4.46)$$

$$\sigma_{xy}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}, \quad (4.47)$$

e

$$\mathbf{T}_\varepsilon^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin 2\theta \\ \frac{\sin 2\theta}{2} & -\frac{\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

4.4.4 – Equação constitutiva no sistema xoy .

Com base nas equações de (4.41) a (4.48), é possível demonstrar-se que a equação constitutiva no sistema xoy pode ser escrita na forma

$$\boldsymbol{\sigma}_{xy} = \mathbf{D}_{xy} \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}, \quad (4.49)$$

onde

$$\mathbf{D}_{xy} = \mathbf{T}_{\varepsilon}^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{T}_{\varepsilon}, \quad (4.50)$$

é a matriz constitutiva no sistema de referência xoy , que é obtida pela transformação de rotação da matriz constitutiva \mathbf{D}_{12} , que é estabelecida nos eixos de ortotropia do material, conforme o estado do concreto seja de íntegro, fissurado ou esmagado, de acordo com as equações (4.1), (4.26) e (4.31), respectivamente.

4.5 – MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

Conforme se encontra exposto no Capítulo 3, o modelo de elementos finitos incorporado para a armadura considera que as barras de aço resistam apenas a esforços normais, na direção tangente de seu eixo. Portanto, é necessário apenas um modelo constitutivo uniaxial para modelar o comportamento do aço.

O aço é modelado segundo um esquema elástico bilinear, com a inclusão de um artifício de descarga para a retenção de deformações plásticas após o escoamento. Até ser atingida a tensão de escoamento f_y , o módulo de deformação longitudinal é E_{s1} . A partir deste ponto é possível considerar-se um certo enrijecimento do material através do módulo E_{s2} , até ser alcançada a deformação de ruptura ε_{su} . As descargas após o escoamento seguem uma reta cuja declividade é E_{s1} .

O comportamento do material em compressão é simulado, por simplicidade, da mesma maneira que quando tracionado. O diagrama da FIGURA 4.6 é expresso analiticamente através das equações:

$$\sigma_s = E_{s2}(\varepsilon_s + \varepsilon_y) - f_y, \text{ se } \varepsilon_s \leq -\varepsilon_y, \quad (4.51)$$

$$\sigma_s = E_{s1} \varepsilon_s, \text{ se } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y, \quad (4.52)$$

e

$$\sigma_s = E_{s2}(\varepsilon_s - \varepsilon_y) + f_y, \text{ se } \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}, \quad (4.53)$$

onde ε_y é a deformação que corresponde ao escoamento da aço sob tração uniaxial, dada por

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_{s1}}. \quad (4.54)$$

Para os aços do tipo A, com patamar de escoamento bem definido, adota-se $E_{s2} = 0,00$, enquanto que para os aços do tipo B, cuja tensão de escoamento é convencional, considera-se para E_{s2} um valor igual a 5% de E_{s1} .

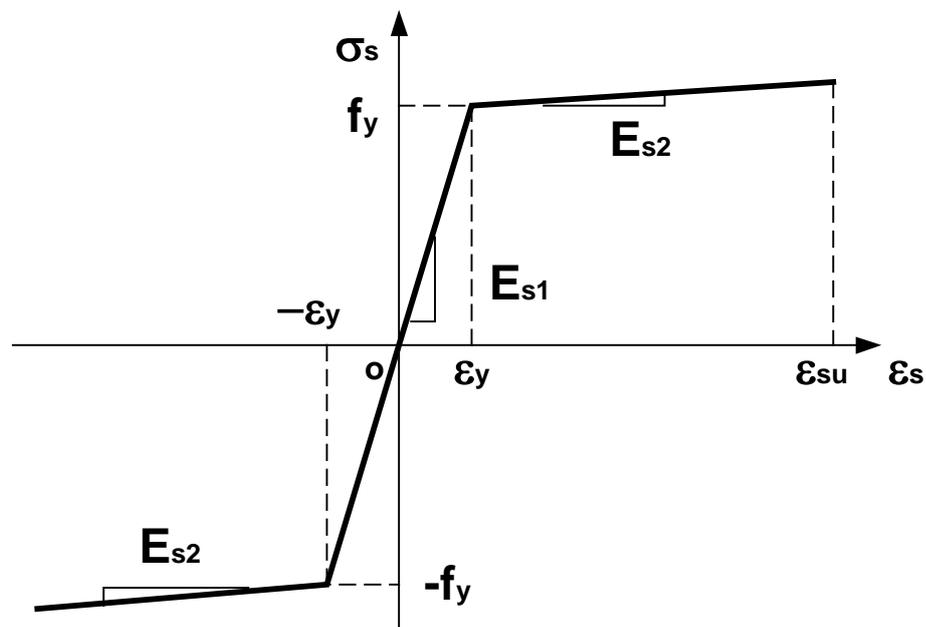


FIGURA 4.6 – Modelo constitutivo bilinear para o aço

5 – COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO

5.1 – INTRODUÇÃO

Conforme foi afirmado no Capítulo 1 - Introdução, um dos requisitos para a aplicação do Método de Simulações de Monte Carlo é dispor de um modelo determinístico que represente corretamente a resposta do problema que se deseja estudar.

Com o objetivo de verificar a eficiência do modelo para análise não-linear de estruturas de concreto, submetidas a um estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos, apresentado nos Capítulos 3 e 4, neste capítulo são mostrados exemplos de aplicação deste modelo na análise de algumas estruturas. Estas peças foram também estudadas experimentalmente. Da comparação dos resultados obtidos numericamente com os dados dos ensaios, podem-se tirar conclusões sobre a capacidade do modelo matemático simular o comportamento de estruturas reais.

O modelo numérico para estruturas de concreto, desenvolvido neste trabalho, permite analisar vigas, pilares submetidos à flexo-compressão normal, além de painéis e vigas-parede. Inicialmente são mostrados os resultados obtidos na análise de uma série de nove vigas, com diversas combinações de taxas de armadura longitudinal e transversal. Após são apresentados testes de pilares, cujos índices de esbeltez variam de 55 a 125. Finalizando este capítulo, é exposto o estudo realizado com uma viga-parede com relação vão/altura aproximadamente igual a 1.

Na avaliação dos resultados aqui apresentados, é preciso levar em conta as limitações do modelo utilizado nas análises. É bem sabido que as estruturas de concreto armado apresentam um comportamento mecânico não-linear. Dentre as causas deste comportamento podem ser citadas: as curvas tensão-deformação não-lineares dos materiais; a diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; a aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacente; os fenômenos da retração e da fluência do concreto; a fissuração do concreto e a transmissão de esforços entre fissuras; o comportamento não-linear geométrico da estrutura, etc.

Um modelo completo para análise de estruturas de concreto armado deveria levar em conta todos estes fatores. Contudo, é preciso estabelecer um compromisso, ainda mais quando o objetivo é realizar inúmeras simulações, entre a complexidade do modelo e os

recursos de computação necessários. Assim sendo, neste trabalho teve-se de buscar um modelo numérico computacionalmente o menos oneroso possível, que produzisse bons resultados. Desta forma, diversos dos fatores acima citados tiveram de ser descartados, o que por si só, impede o modelo de acompanhar exatamente os resultados experimentais.

Além disso, mesmo nos ensaios feitos em laboratório, existem incertezas quanto ao valor da carga atuante; as grandezas relativas aos materiais, em especial aquelas do concreto; em relação às condições de apoio da estrutura; e, finalmente, erros de construção podem produzir variações nas dimensões das peças estruturais. Portanto, os parâmetros de entrada utilizados nas análises (que normalmente são propriedades médias) poderão sempre diferir, em menor ou maior grau, das propriedades realmente existentes na estrutura ensaiada. Esta é outra razão fundamental pela qual os resultados de modelos matemáticos não coincidem com as respostas carga-deslocamento das estruturas.

Assim sendo, os resultados numéricos apresentados neste capítulo são apenas aproximações limitadas do comportamento real das estruturas analisadas, e como tais devem ser avaliados.

5.2 – VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Com a finalidade de obter dados experimentais sobre os fenômenos da deformação, fissuração e ruptura de vigas armadas com aços de alta aderência, DECANINI e colaboradores (DECANINI e GRILLO, 1970; SCHEGG e DECANINI, 1971) ensaiaram uma série de 9 vigas biapoiadas, de seção transversal nominal 15 x 24 cm, com 3,00 m de vão, sob a ação de duas cargas concentradas situadas a 0,75 m dos apoios, com diversas combinações de taxas de armadura longitudinal e transversal.

As peças foram divididas em 3 conjuntos de 3 vigas, conforme a taxa de armadura longitudinal. As vigas da série RC-075, possuem uma taxa de armadura longitudinal $\rho = 0,75\%$, as da série RC-100, têm $\rho = 1,00\%$, e as da série RC-200, têm $\rho = 2,00\%$.

A FIGURA 5.1 serve para ilustrar a geometria e o esquema de carregamento das vigas. A TABELA 5.1 contém a resistência à compressão cilíndrica do concreto e as propriedades geométricas das vigas ensaiadas. A TABELA 5.2 contém as propriedades das barras da armadura.

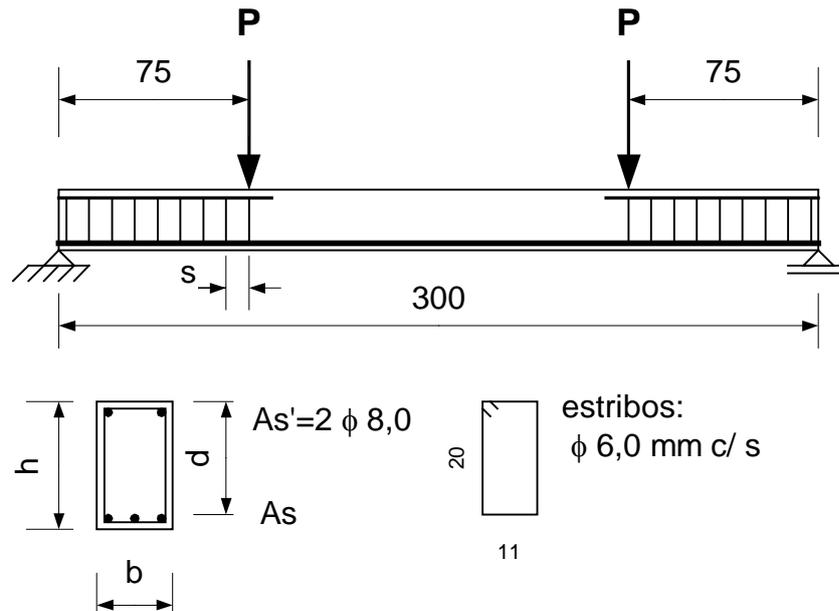


FIGURA 5.1 – Geometria e carregamento das vigas ensaiadas por DECANINI

TABELA 5.1 – Resistência à compressão do concreto e propriedades geométricas das vigas de DECANINI

Viga	f_{cm} (kN/cm^2)	b (cm)	h (cm)	d (cm)
RC-075-1	3,11	15,3	24,6	22,1
RC-075-2	2,82	14,9	24,7	21,9
RC-075-3	2,96	14,6	24,8	22,1
RC-100-1	3,22	15,0	23,9	21,7
RC-100-2	3,40	14,6	23,9	21,6
RC-100-3	2,74	15,0	23,9	21,7
RC-200-1	2,64	15,0	24,0	21,2
RC-200-2	2,96	14,8	24,0	21,0
RC-200-3	2,40	15,2	23,7	20,9

A resistência à tração média do concreto, em kN/cm^2 , foi obtida a partir a resistência à compressão característica, em kN/cm^2 , utilizando-se a equação

$$f_{ctm} = 0,14 \sqrt[3]{f_{ck}^2}, \quad (5.1)$$

sendo f_{ck} , a resistência característica à compressão do concreto, em kN/cm^2 , dada por

$$f_{ck} = f_{cm} (1 - 1,645 V_{fc}), \quad (5.2)$$

onde o coeficiente de variação V_{fc} , foi considerado igual a 0,11, conforme dados dos ensaios.

O módulo de deformação longitudinal do concreto na origem, em kN/cm^2 , foi determinado através da expressão

$$E_{cm} = 2.150 \sqrt[3]{f_{cm}}, \quad (5.3)$$

com f_{cm} em kN/cm^2 . As equações (5.1) e (5.3) foram obtidas no Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB-1993). Ambas expressões foram transformadas da unidade MPa, para a unidade kN/cm^2 .

TABELA 5.2 – Tensão de escoamento do aço e propriedades da armadura

Viga	f_y (kN/cm^2)	A_s (cm^2)	A_s' (cm^2)	A_{sw} (cm^2/m)
RC-075-1	54,90	2,35 (3 \varnothing 10 mm)	1,00 (2 \varnothing 8 mm)	6,02 (9 \varnothing 6 mm c/ 9,4 cm)
RC-075-2	53,80			
RC-075-3	54,80			
RC-100-1	43,80	3,39 (3 \varnothing 12 mm)	1,00 (2 \varnothing 8 mm)	8,32 (12 \varnothing 6 mm c/ 6,8 cm)
RC-100-2	42,70			
RC-100-3	42,50			
RC-200-1	48,40	6,28 (2 \varnothing 20 mm)	1,00 (2 \varnothing 8 mm)	10,47 (15 \varnothing 6 mm c/ 5,4 cm)
RC-200-2	47,10			
RC-200-3	48,70			

Aproveitando a simetria do problema em termos de geometria e de carregamento, foi discretizada apenas metade da viga. Foi utilizada uma malha de 5 elementos ao longo do comprimento, por 2 elementos ao longo da altura. Esta malha resulta num total de 10 elementos, 45 nós e 90 graus de liberdade. Nas integrações numéricas foi empregada a Quadratura de Gauss, com $3 \times 3 = 9$ pontos de integração por elemento, totalizando 90 pontos, nos quais são avaliadas deformações e tensões.

Nas análises das vigas das séries RC-075 e RC-100, foram empregados incrementos de carga de 1 kN, enquanto que para a série RC-200 foi utilizado um passo de 2 kN, iterando-se até ser atingido o equilíbrio ou a ruptura. A FIGURA 5.2 serve para ilustrar a malha de elementos finitos empregada nas análises das vigas.

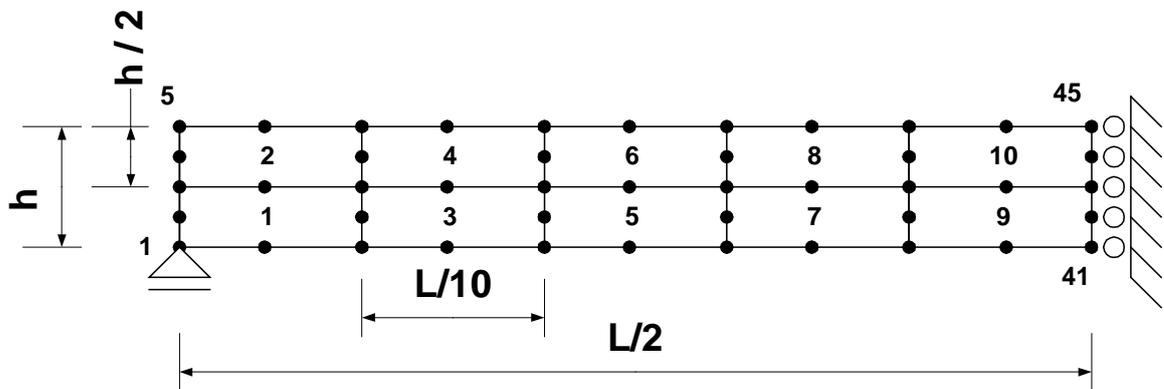


FIGURA 5.2 – Malha de elementos finitos empregada nas análises das vigas de DECANINI

As curvas carga-deslocamento obtidas numericamente são comparadas com os dados experimentais nas FIGURAS de 5.3 a 5.11. Nestas FIGURAS também é possível cotejar a carga de ruptura determinada pelo modelo com o valor determinado experimentalmente.

Observa-se que há uma boa concordância entre os deslocamentos previstos pelo modelo e aqueles medidos nos ensaios. A relação entre a carga de ruptura prevista pelo modelo e a carga de colapso de cada viga, medida experimentalmente, encontra-se na TABELA 5.3. O valor médio encontrado para esta relação foi igual a 1,03, com um coeficiente de variação igual a 0,029. O valor mínimo obtido foi 0,97 e o máximo 1,07.

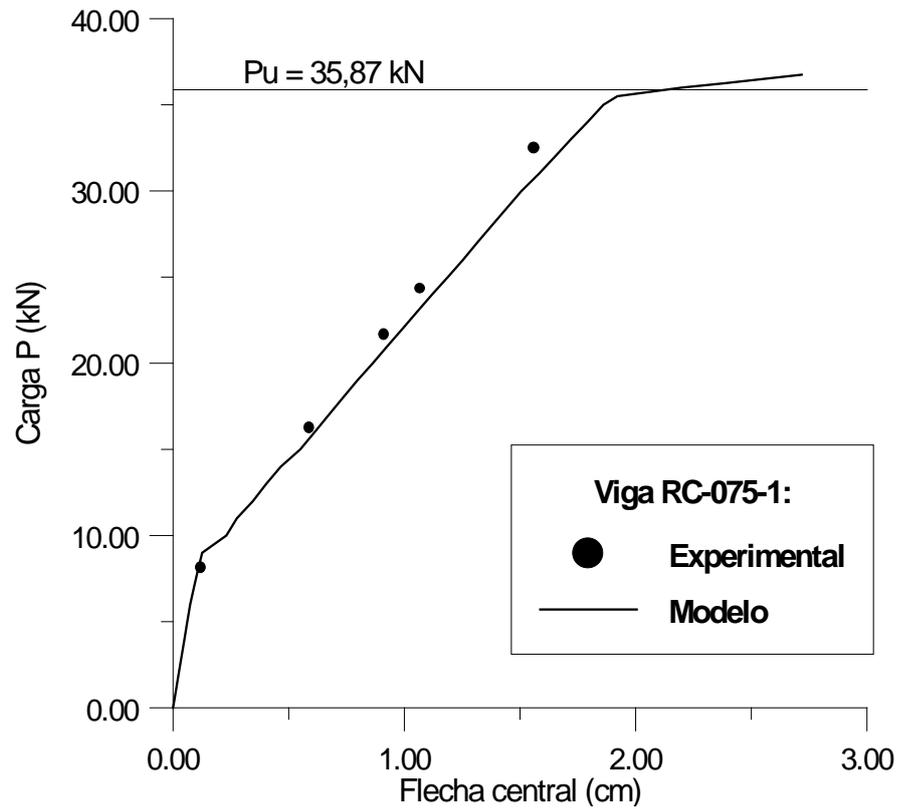


FIGURA 5.3 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-075-1

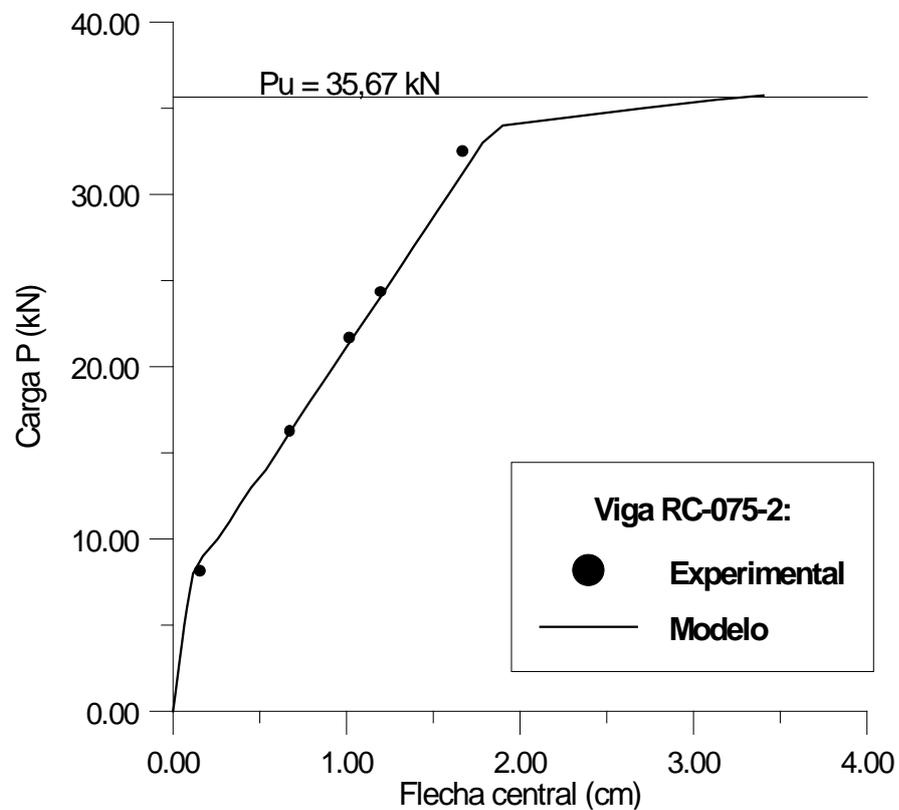


FIGURA 5.4 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-075-2

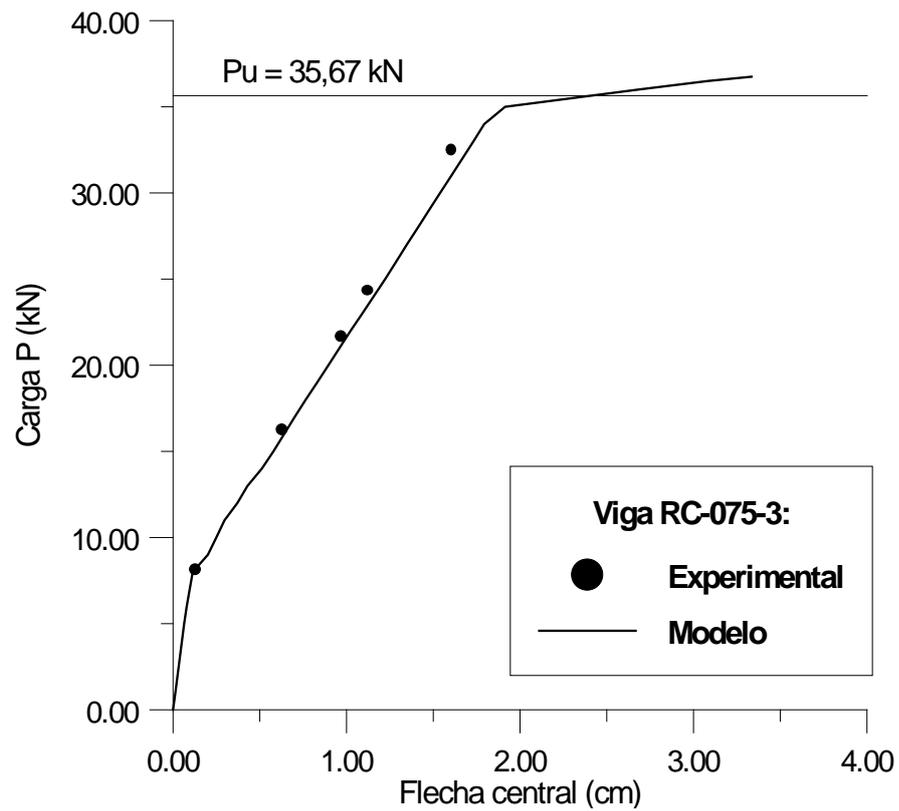


FIGURA 5.5 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-075-3

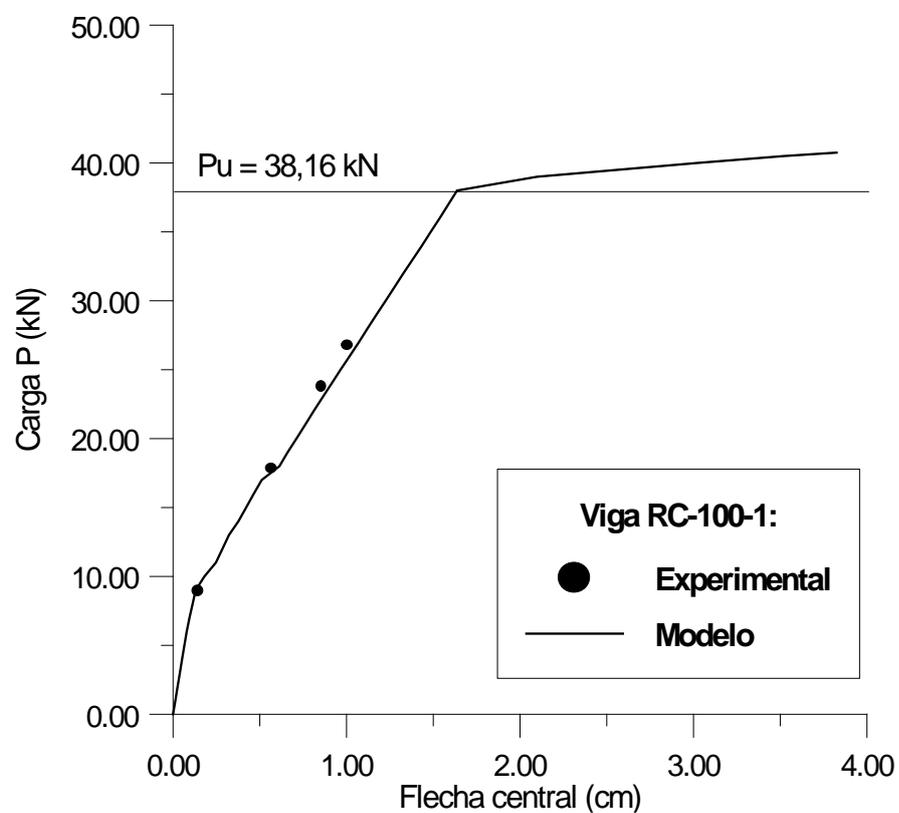


FIGURA 5.6 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-100-1

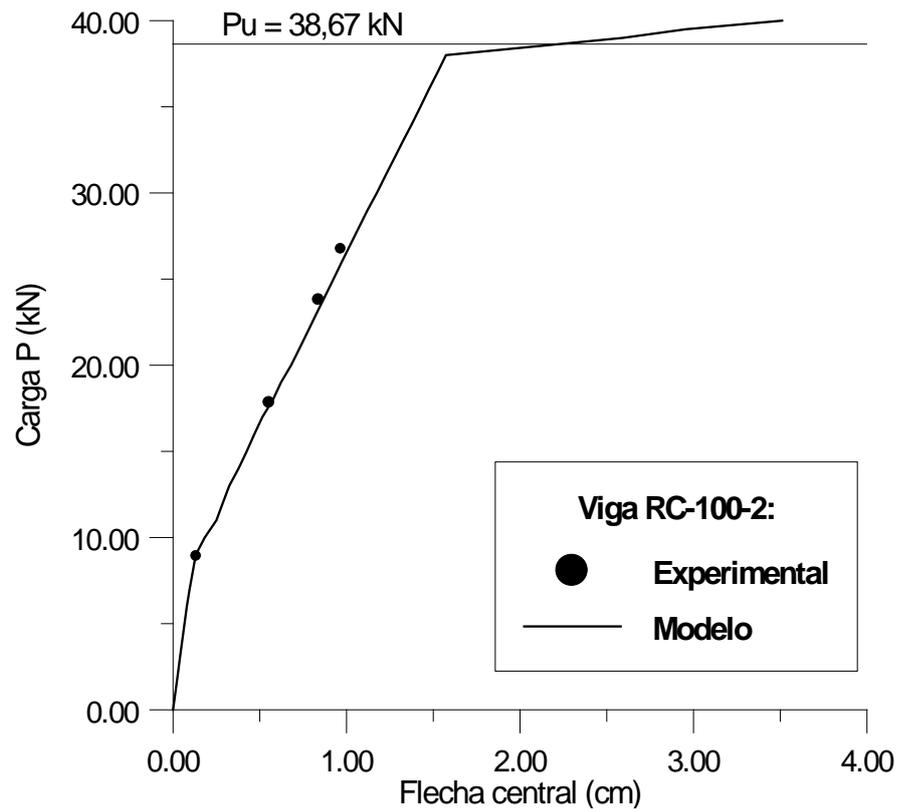


FIGURA 5.7 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-100-2

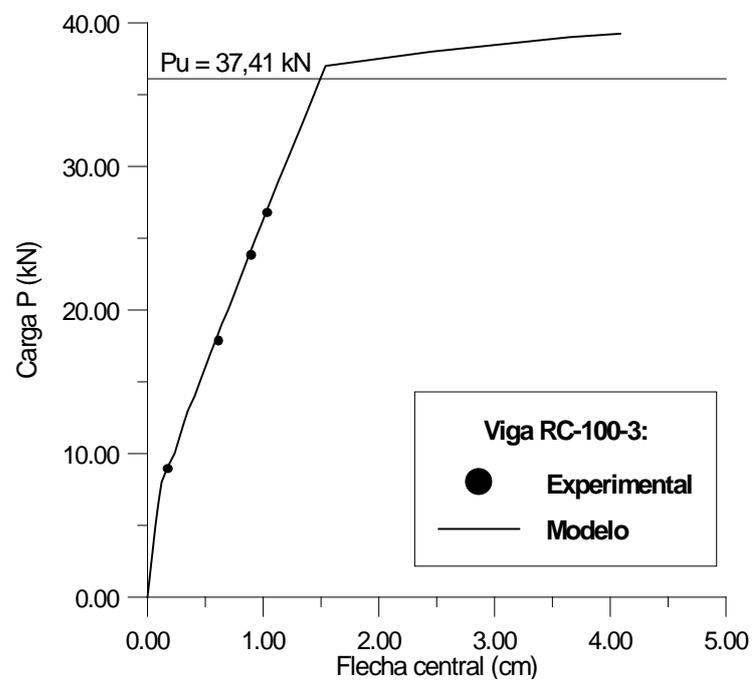


FIGURA 5.8 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-100-3

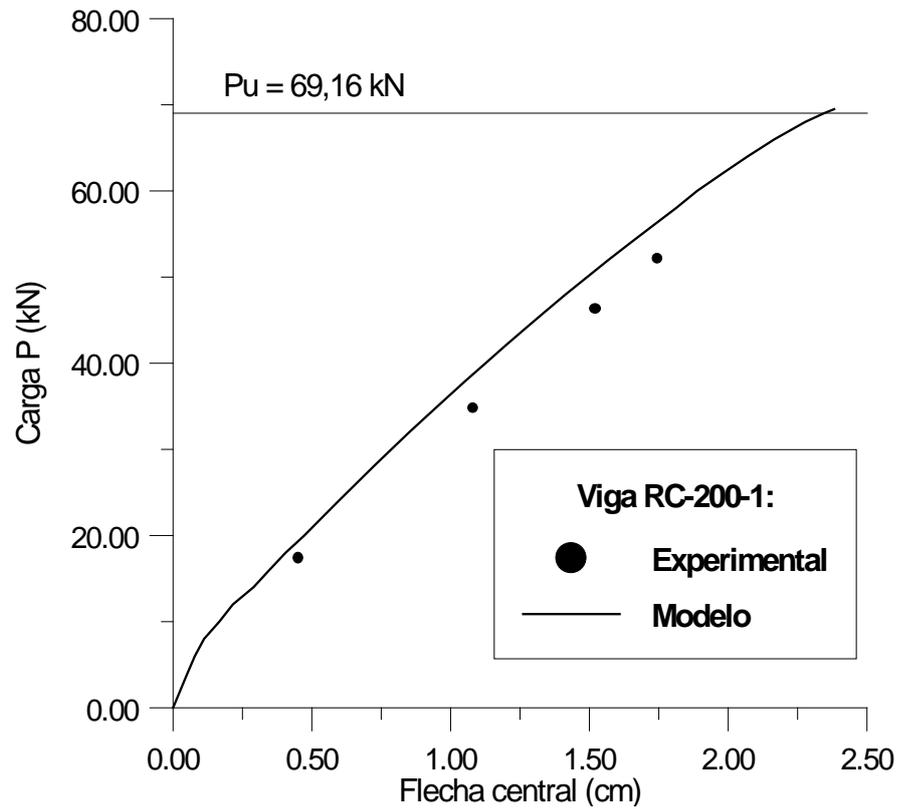


FIGURA 5.9 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-200-1

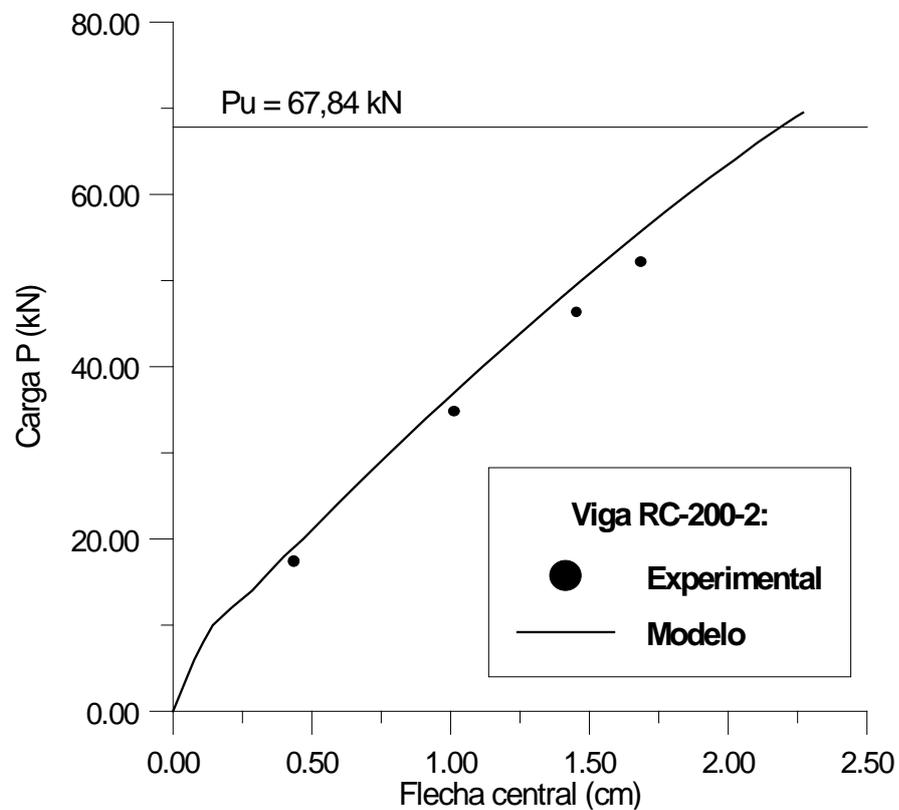


FIGURA 5.10 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-200-2

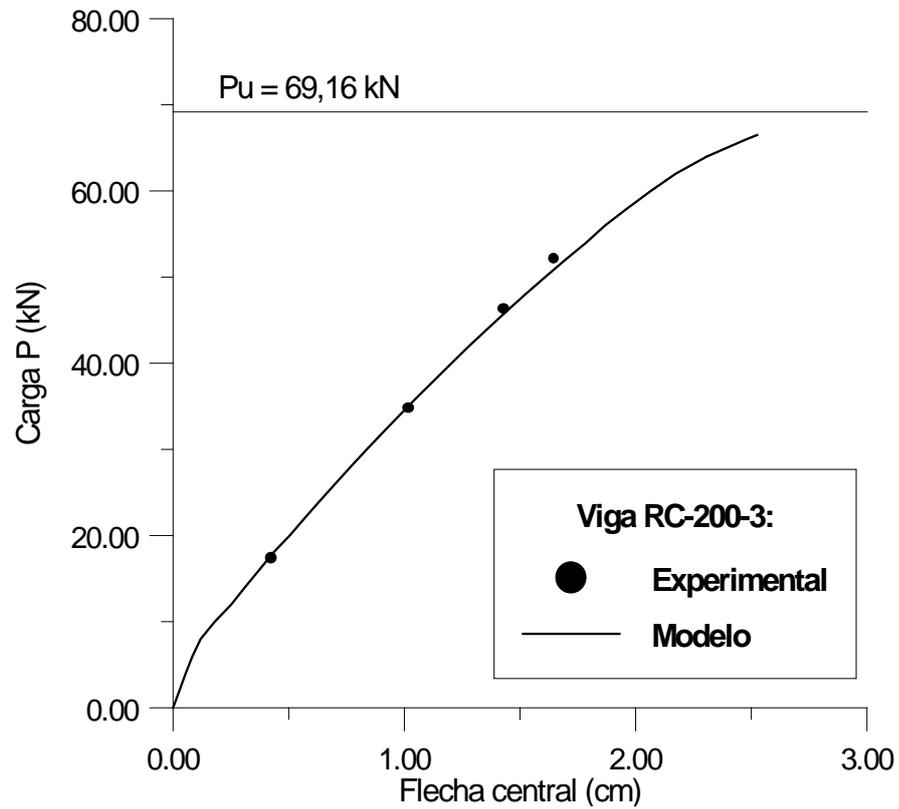


FIGURA 5.11 – Curva carga-deslocamento para a viga RC-200-3

TABELA 5.3 – Comparação da carga de ruptura medida experimentalmente com o valor determinado pelo modelo, para as vigas de DECANINI

Viga	P_u experimental (kN)	P_u modelo (kN)	$\frac{P_u \text{ mod}}{P_u \text{ exp}}$
RC-075-1	35,85	37,13	1,04
RC-075-2	35,67	35,88	1,01
RC-075-3	35,67	36,88	1,03
RC-100-1	38,16	40,88	1,07
RC-100-2	38,67	40,13	1,04
RC-100-3	37,41	39,38	1,05
RC-200-1	69,16	69,75	1,01
RC-200-2	67,84	69,75	1,03
RC-200-3	69,16	66,75	0,97

5.3 – PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

Para demonstrar a capacidade do modelo de analisar problemas que incluem, além do comportamento não-linear dos materiais, uma não-linearidade de origem geométrica, são apresentados estudos de pilares esbeltos de concreto armado. Estes pilares, birrotulados, foram submetidos à flexo-compressão normal. A FIGURA 5.12 mostra as principais características geométricas dos pilares esbeltos analisados.

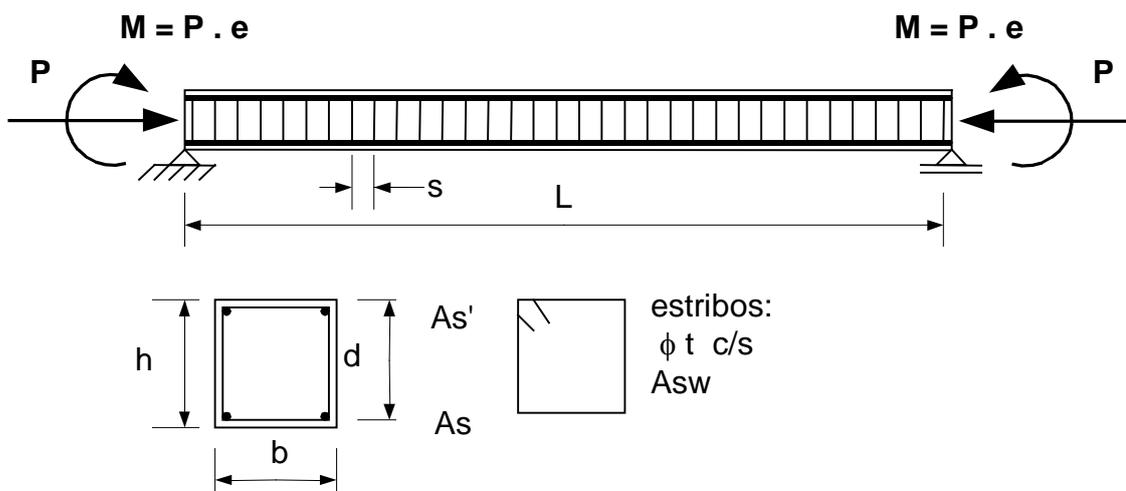


FIGURA 5.12 – Características geométricas dos pilares esbeltos

5.3.1 – Pilares de GOYAL e JACKSON

Com a finalidade de estudar o comportamento de pilares esbeltos de concreto armado, GOYAL e JACKSON (1971) ensaiaram uma série 46 de colunas, tanto sob carga de curta, como de longa duração. Todos os pilares eram birrotulados e tinham seção transversal quadrada, com $b = 7,62$ cm, $h = 7,62$ cm, $d = 6,35$ cm.

Foram considerados pilares com valores de índice de esbeltez λ iguais a 55, 83 e 125. Para um melhor controle dos resultados, ensaiaram-se pares de pilares com os mesmos valores nominais para as propriedades dos materiais e dimensões da estrutura.

Para a determinação da resistência à compressão do concreto foram ensaiados corpos de prova cilíndricos de 15 cm de diâmetro por 30 cm de altura; e prismáticos, com a mesma seção transversal dos pilares e com uma altura igual a 3 vezes o lado da base. Naturalmente, as resistências obtidas num e noutro corpo de prova foram diferentes. Nas análises numéricas foram adotados os valores para a resistência do concreto correspondentes aos corpos de prova

prismáticos, designados por f_{pr} , por retratarem melhor a forma e a seção transversal dos pilares. A resistência à tração e o módulo de deformação longitudinal foram determinados a partir da resistência à compressão, com equações propostas pela norma ACI-318-63, conforme recomendado por GOYAL e JACKSON (1971), para esta série de pilares.

Os pilares foram armados com uma barra longitudinal em cada quina, tendo sido utilizados estribos de mesma bitola que a armadura longitudinal, com espaçamento $s = 7,62$ cm.

O incremento de carga adotado nas análises foi de 1 kN. A malha de elementos finitos empregada foi a mesma que foi ilustrada pela FIGURA 5.2, e descrita no item anterior.

A FIGURA 5.13 apresenta a resposta carga-deslocamento para um pilar com as características dos pilares P1 e P2, obtida numericamente, comparando-a com os resultados dos ensaios experimentais.

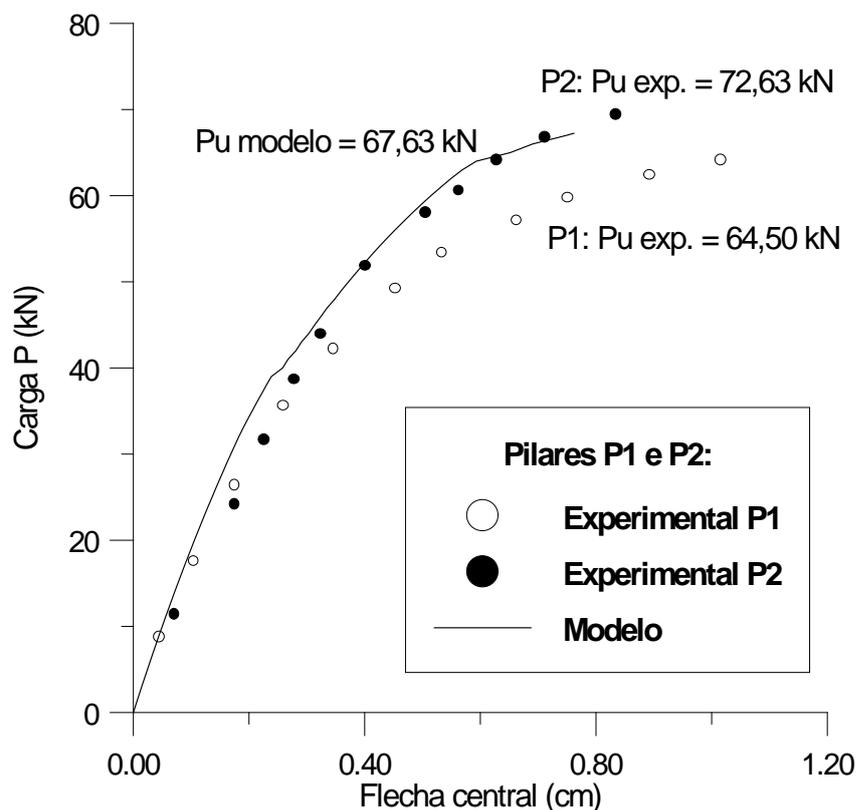


FIGURA 5.13 – Curva carga-deslocamento para os pilares P1 e P2, de GOYAL e JACKSON

Na TABELA 5.4 são comparados os resultados obtidos numericamente com os valores experimentais, relativos à carga de ruptura de 26 pilares ensaiados por GOYAL e JACKSON.

TABELA 5.4 – Comparação entre a carga de ruptura teórica e a experimental para 26 pilares ensaiados por GOYAL e JACKSON

Pilar	e_1/h	f_c (kN/cm ²)	Pu – exp. (kN)	Pu – mod. (kN)	$\frac{Pu \text{ mod}}{Pu \text{ exp}}$
$L = 182,88 \text{ cm}; A_s = A_s' = 0,71 \text{ cm}^2; f_y = 35,16 \text{ kN/cm}^2; \lambda = 83$					
A1	0,500	1,99	33,14	34,63	1,04
A2	0,500	1,99	33,36	34,63	1,04
C1	0,333	2,33	44,48	48,63	1,09
C2	0,333	2,33	46,80	48,63	1,04
E1	0,167	2,19	66,72	67,88	1,02
E2	0,167	2,19	65,39	67,88	1,04
G1	0,250	2,22	55,38	55,63	1,00
G2	0,250	2,22	53,02	55,63	1,05
$L = 182,88 \text{ cm}; A_s = A_s' = 0,50 \text{ cm}^2; f_y = 31,02 \text{ kN/cm}^2; \lambda = 83$					
I1	0,167	2,27	60,05	62,63	1,04
I2	0,167	2,27	57,38	62,63	1,09
K1	0,250	2,28	46,57	48,13	1,03
K2	0,250	2,28	45,59	48,13	1,06
M1	0,333	2,29	37,14	39,13	1,05
M2	0,333	2,29	37,01	39,13	1,06
$L = 121,92 \text{ cm}; A_s = A_s' = 0,50 \text{ cm}^2; f_y = 31,02 \text{ kN/cm}^2; \lambda = 55$					
O1	0,167	2,36	82,29	86,13	1,05
O2	0,167	2,36	92,39	86,13	0,93
P1	0,250	2,36	64,50	67,63	1,05
P2	0,250	2,36	72,73	67,63	0,93
Q1	0,333	1,99	51,38	49,88	0,97
Q2	0,333	1,99	48,93	49,88	1,02

TABELA 5.4 – Comparação entre a carga de ruptura teórica e a experimental para 26 pilares ensaiados por GOYAL e JACKSON (continuação)

Pilar	e_1/h	f_c (kN/cm ²)	Pu – exp. (kN)	Pu – mod. (kN)	$\frac{Pu \text{ mod}}{Pu \text{ exp}}$
$L = 274,32 \text{ cm}; A_s = A_s' = 0,50 \text{ cm}^2; f_y = 31,02 \text{ kN/cm}^2; \lambda = 125$					
R1	0,167	2,14	33,45	35,88	1,07
R2	0,167	2,14	31,14	35,88	1,15
S1	0,250	2,09	23,00	27,13	1,18
S2	0,250	2,09	24,33	27,13	1,12
T1	0,333	2,07	19,44	22,63	1,16
T2	0,333	2,07	20,55	22,63	1,10

Observe-se que, embora estes pares de pilares tivessem os mesmos valores nominais para as propriedades dos materiais e suas dimensões, na realidade, acabaram apresentando respostas distintas durante o ensaio. Este fato é devido a variações aleatórias sofridas por estes parâmetros, na estrutura construída.

O valor médio obtido para a relação entre a carga de ruptura determinada pelo modelo e aquela medida experimentalmente foi igual a 1,05, com um coeficiente de variação igual a 0,057. O valor mínimo obtido foi de 0,93 e o máximo de 1,18

5.3.2 – Pilares de CLAESON e GYLLTOFT

Em seu estudo sobre o comportamento de pilares executados com concreto de alta resistência, submetidos à flexo-compressão normal, CLAESON e GYLLTOFT (1998) ensaiaram também alguns pilares elaborados com concreto de resistência normal, para efeito de comparação de resultados. O pilar #32 NSC (Normal Strength Concrete), que pertence ao segundo grupo, será empregado na validação experimental do modelo desenvolvido neste trabalho.

O pilar #32 NSC possui as seguintes propriedades geométricas: $b = 20 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$, $d = 16,90 \text{ cm}$, $L = 400 \text{ cm}$, $A_s = A_s' = 4,00 \text{ cm}^2$, estribos de 8 mm, com $s = 24 \text{ cm}$. O índice de esbeltez λ deste pilar é aproximadamente igual a 70.

As propriedades mecânicas do concreto, fornecidas por CLAESON e GYLLTOFT (1998), são $f_{cm} = 3,70 \text{ kN/cm}^2$, $f_{ctm} = 0,37 \text{ kN/cm}^2$ e $E_{cm} = 2.750 \text{ kN/cm}^2$. As propriedades

mecânicas da armadura são $f_y = 63,60 \text{ kN/cm}^2$ e $E_s = 20.700 \text{ kN/cm}^2$, para as barras longitudinais, e $f_y = 46,60 \text{ kN/cm}^2$ e $E_s = 22.100 \text{ kN/cm}^2$, para os estribos.

A excentricidade do ponto de aplicação da carga em relação ao eixo geométrico do pilar, designada por e na FIGURA 5.12, é igual a 2,0 cm, ou seja, $0,10 h$. A malha de elementos finitos empregada foi a mesma que foi ilustrada pela FIGURA 5.2, e descrita no item 5.2. O incremento de carga utilizado no estudo numérico foi de 10 kN.

Na FIGURA 5.14 é mostrada a resposta carga-deslocamento para o pilar #32 NSC, obtida numericamente, comparando-a com os resultados do ensaio experimental. Para este pilar, a razão entre a carga de ruína prevista pelo modelo e aquela medida no ensaio foi igual a 1,04.

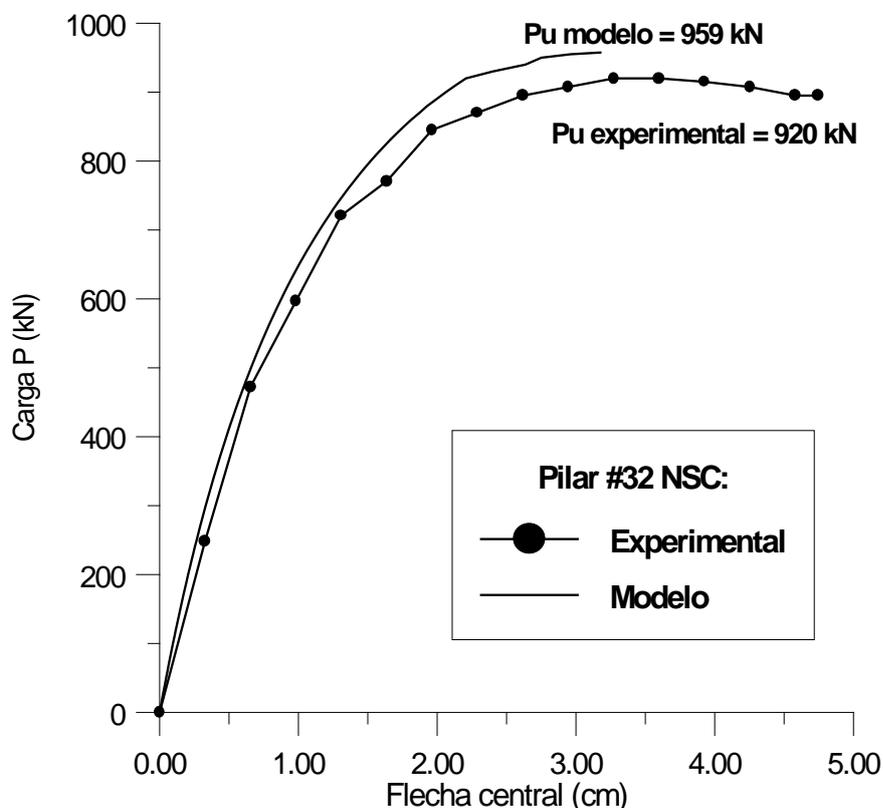


FIGURA 5.14 – Curva carga-deslocamento para o pilar #32 NSC, de CLAESON e GYLLTOFT

5.3.3 – Viga-coluna de Zürich

A viga-coluna de Zürich utilizada por VIANA (1984), na comprovação experimental de seu modelo numérico, é também empregada aqui com a mesma finalidade.

A viga-coluna de Zürich possui as seguintes propriedades geométricas: $b = 25$ cm, $h = 15$ cm, $d = 12,3$ cm, $L = 433$ cm, $A_s = A_s' = 3,14$ cm², sendo que a disposição dos estribos não é informada. O índice de esbeltez λ deste pilar é aproximadamente igual a 100.

As propriedades mecânicas do concreto, obtidas em VIANA (1984), são $f_{cm} = 2,80$ kN/cm², $f_{ctm} = 0,28$ kN/cm² e $E_{cm} = 2.350$ kN/cm². As propriedades mecânicas da armadura são $f_y = 45,00$ kN/cm² e $E_s = 21.000$ kN/cm².

A excentricidade do ponto de aplicação da carga em relação ao eixo geométrico do pilar, designada por e na FIGURA 5.6, é igual a 3,75 cm, ou seja, 0,25 de h . A carga foi incrementada de 10 em 10 kN.

A malha de elementos finitos empregada foi a mesma que foi ilustrada pela FIGURA 5.2, e descrita no item 5.2.

A FIGURA 5.15 serve para comparar os resultados obtidos pelo modelo numérico, para curva carga-deslocamento da viga-coluna de Zürich, com os dados do ensaio experimental. Para este pilar, a relação entre a carga de ruptura prevista pelo modelo e aquela medida experimentalmente foi igual a 1,08.

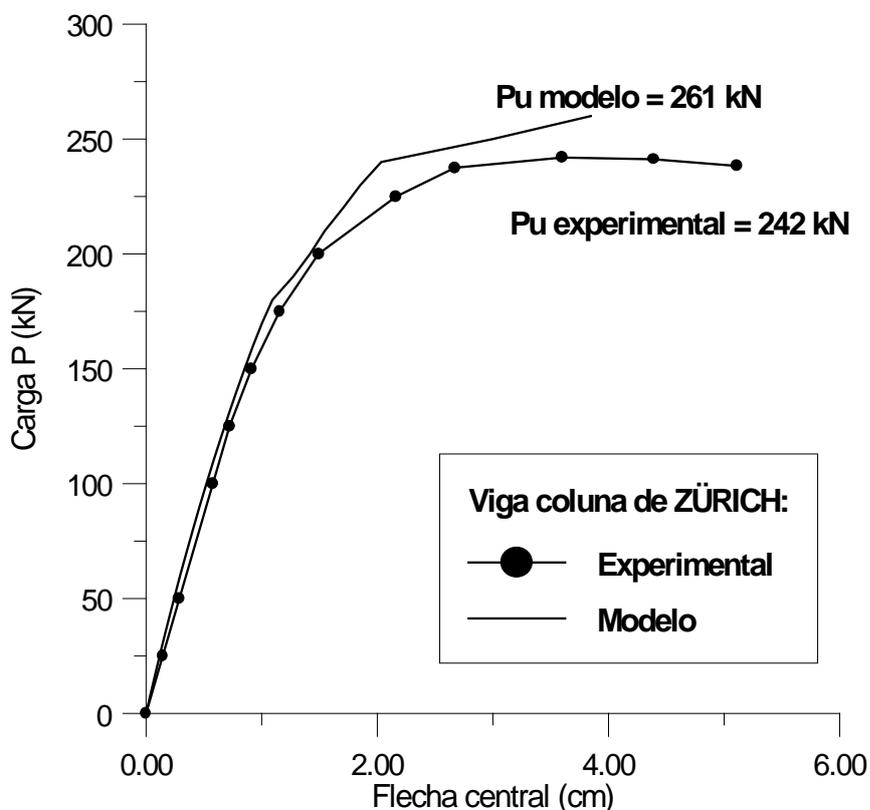


FIGURA 5.15 – Curva carga-deslocamento para viga-coluna de Zürich

5.4 – VIGA-PAREDE DE CONCRETO ARMADO

Para a mostrar a capacidade de o modelo simular estruturas submetidas a um estado de tensões tipicamente bidimensional, é apresentada a análise de uma viga-parede, de relação vão sobre altura aproximadamente igual a 1, que foi ensaiada por LEONHARDT e WALTHER (1966). A viga-parede estudada aqui, WT3, possui espessura constante e igual a 10 cm, no vão e sobre os apoios. A carga externa, uniformemente distribuída, é aplicada na face superior da peça, conforme é ilustrado pela FIGURA 5.16.

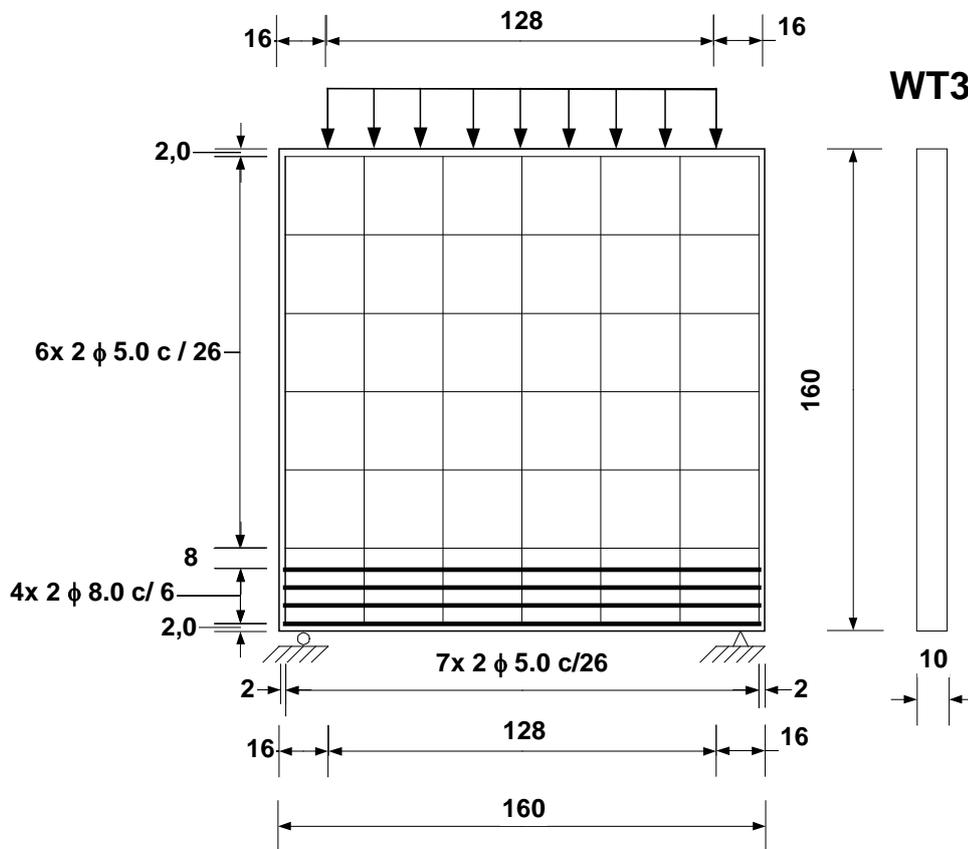


FIGURA 5.16 – Detalhamento da viga-parede WT3

O concreto da viga-parede WT3 apresentou uma resistência cilíndrica à compressão igual a $3,02 \text{ kN/cm}^2$. O módulo de deformação na origem médio E_{cm} , e a resistência à tração axial média f_{ctm} , foram obtidos respectivamente através das equações (5.2) e (5.1).

A armadura de flexão da viga-parede é composta por barras retas de 8 mm de diâmetro, de aço classe B, com tensão de escoamento igual a $f_y = 42,80 \text{ kN/cm}^2$. A viga-parede possui estribos, verticais e horizontais, de 5 mm de diâmetro espaçados a cada 26 cm.

O aço usado na armadura transversal é classe A, com tensão de escoamento igual a $f_y = 22,00$ kN/cm².

Tirando-se partido da simetria de geometria e carregamento do problema, a viga-parede foi analisada discretizando-se apenas metade da estrutura, empregando-se uma malha de elementos quadrados, com 5 elementos até o meio do vão, na direção horizontal, e 10 elementos ao longo da altura.

Esta malha resulta em 50 elementos finitos, com 181 nós e 362 graus de liberdade. O número total de pontos de integração de Gauss é igual a 450, pois adota-se a regra de $3 \times 3 = 9$ pontos por elemento. A FIGURA 5.17 mostra os detalhes da malha utilizada na análise da viga-parede WT3.

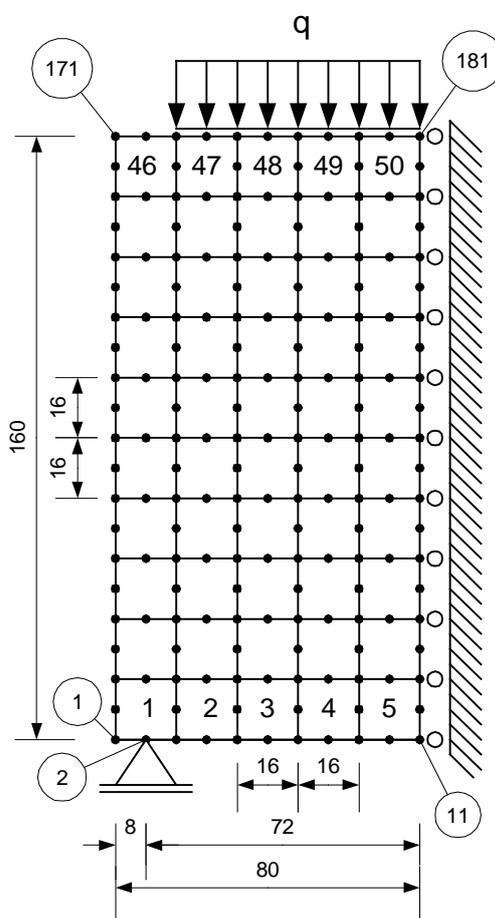


FIGURA 5.17 – Malha de elementos finitos para a viga-parede WT3

A FIGURA 5.18 permite comparar a resposta estrutural da viga-parede WT3 prevista pelo modelo com aquela determinada experimentalmente. O modelo aproxima razoavelmente bem a curva carga-deslocamento experimental, enquanto que a relação obtida entre a carga de ruptura prevista e aquela medida no ensaio foi igual a 0,99.

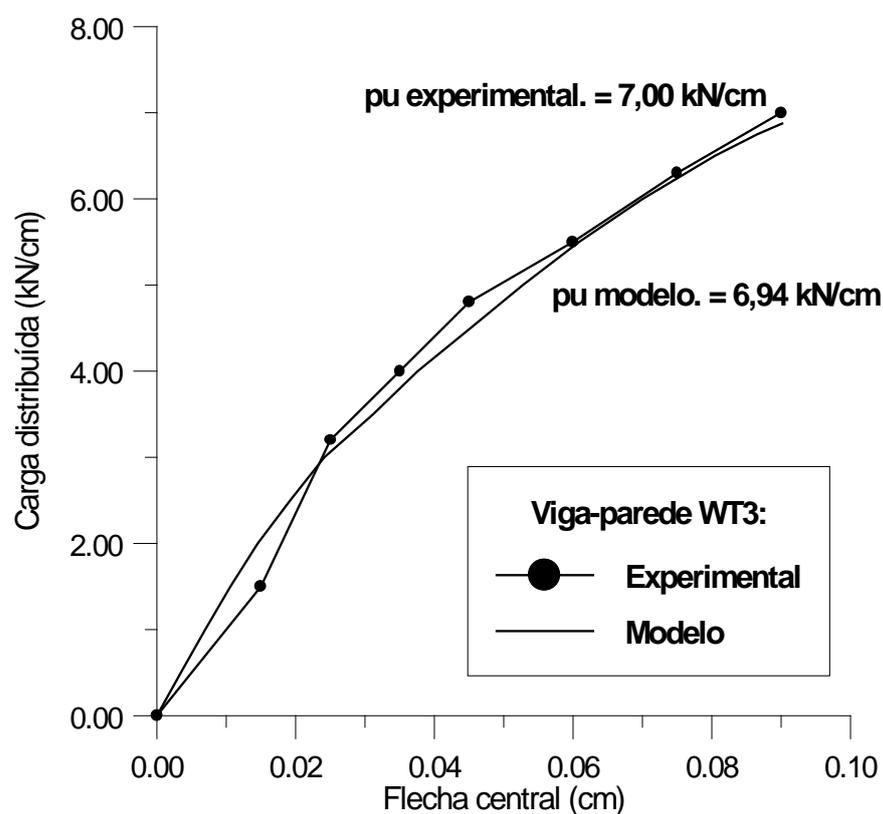


FIGURA 5.18 – Curvas carga-deslocamento para a viga-parede WT3

Contudo, para que se possa aplicar este modelo na análise probabilística de vigas-parede e painéis, com outras configurações de geometria, armadura e carregamento, são necessários estudos mais aprofundados sobre o comportamento deste tipo de estruturas. Trabalhos desta natureza foram desenvolvidos por GUPTA e MAESTRINI (1989a, 1989b) e por VECCHIO (1990), tal tarefa, no entanto, foge aos objetivos iniciais desta tese.

6 – SIMULAÇÕES – O MÉTODO DE MONTE CARLO

6.1 – INTRODUÇÃO

No decorrer dos últimos anos, vários modelos sofisticados têm sido desenvolvidos, para análise não-linear de estruturas de concreto. No entanto, todos os cálculos são normalmente feitos com base em valores determinísticos para a geometria da estrutura, para as propriedades mecânicas dos materiais e para o carregamento aplicado.

Na realidade, há sempre uma variabilidade nestes parâmetros de entrada dos programas. Existe incerteza quanto ao valor da carga atuante. As grandezas relativas aos materiais, em especial aquelas do concreto, apresentam uma certa dispersão em relação aos valores médios usualmente adotados. Finalmente, erros de construção podem produzir variações nas dimensões das peças estruturais.

Portanto, a resposta estática de uma estrutura é, na verdade, uma função de várias variáveis aleatórias, ou campos estocásticos, (carregamento, propriedades dos materiais e geometria, por exemplo), cujas distribuições de probabilidade são conhecidas ou podem ser estimadas.

Ultimamente, diversas tentativas têm sido feitas no sentido de incluir estas incertezas quanto aos parâmetros de entrada no processo de análise estrutural. Entre as principais técnicas utilizadas pode-se citar o método de Monte Carlo de simulação direta, o método da Expansão de Neumann e o método da Expansão em Série de Taylor em função das variáveis aleatórias. Esta última técnica, quando associada ao método dos elementos finitos, dá origem ao que se conhece por método dos elementos finitos probabilístico.

Uma descrição e um estudo comparativo destes métodos podem ser encontrados nos trabalhos de LIU, BELYTSCHKO e MANI (1986a-1986b), em YAMAZAKI e SHINOZUKA (1986), e em ARAÚJO e AWRUCH (1992). Dentre as diversas aplicações do método dos elementos finitos na análise probabilística de estruturas de concreto, pode-se citar os artigos de TEIGEN et al. (1991a e 1991b), DUPRAT et al. (1994), RAJASHEKHAR e ELLINGWOOD (1995), REAL e CAMPOS FILHO (1995a, 1995b, 1999, 2000a, 2000b), GOMES et al. (1996), FRANGOPOL et al. (1996), e os de ARAÚJO (1997 e 1998).

Neste trabalho, é empregado o método de Monte Carlo de simulação direta, sendo gerados aleatoriamente os dados de entrada do problema, realizada uma análise determinística

para cada conjunto de dados gerado e, depois, feito o processamento estatístico dos resultados, para determinação de valores esperados e variâncias de deslocamentos, reações, deformações e tensões.

Inicialmente, é apresentado o modelo para a geração de uma variável aleatória de distribuição normal. Aborda-se, a seguir, a geração de um campo estocástico para uma variável em um espaço bidimensional. Após é apresentada a aplicação do método de Monte Carlo na análise probabilística de estruturas de concreto armado, através do método dos elementos finitos, e as diversas análises estatísticas envolvidas.

6.2 - PROPRIEDADES ALEATÓRIAS DA ESTRUTURA

Neste estudo são consideradas como propriedades aleatórias da estrutura as seguintes grandezas: resistência à compressão do concreto (f_c), resistência à tração do concreto (f_{ct}), módulo de deformação longitudinal do concreto (E_c), tensão de escoamento do aço (f_y), módulo de deformação longitudinal do aço (E_s), largura da seção transversal (b), a altura da seção transversal (h), e o vão da estrutura (L).

As propriedades do concreto, tidas como correlacionadas entre si, são representadas através de um modelo de campo estocástico bidimensional. Assim sendo, as propriedades do concreto terão as suas variações ao longo do comprimento e da altura da estrutura levadas em conta.

As demais propriedades randômicas da estrutura serão geradas através de um modelo de variável aleatória, admitindo um único valor constante para toda a estrutura, sendo consideradas independentes umas das outras.

6.3 – GERAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS GAUSSIANAS

Antes de ingressar no método de Monte Carlo, é interessante rever alguns conceitos básicos da Teoria de Probabilidades e da Estatística.

Denomina-se evento a cada resultado possível de um fenômeno aleatório. O conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório chama-se espaço amostral.

Uma variável aleatória é uma função que associa um número real a cada resultado possível de um fenômeno aleatório (evento), ou seja, atribui um valor numérico para cada elemento de um determinado espaço amostral (ANG e TANG, 1975). Assim, por exemplo, a resistência à compressão de um corpo de prova cilíndrico de concreto (f_c) pode ser

considerada como uma variável aleatória, pois ela atribui um valor numérico a um evento aleatório, que é a tensão para a qual aconteceu a ruptura de um certo corpo de prova de concreto.

Como uma variável aleatória representa um evento, ela somente pode assumir um valor numérico associado a uma probabilidade de ocorrência deste evento. A lei que descreve a medida de probabilidade associada a cada um dos valores possíveis de uma variável aleatória é chamada de distribuição de probabilidade.

Nas considerações que se seguem, a variável aleatória genérica será designada por uma letra maiúscula, enquanto que uma realização desta variável será designada através de uma letra minúscula.

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X pode ser descrita através de sua função distribuição de probabilidade acumulada (FDPA), dada por

$$\Phi_X(x) = P(X \leq x), \quad (6.1)$$

para todos os valores possíveis de x .

Uma variável aleatória X é dita contínua se existe uma medida de probabilidade definida para qualquer valor de x . Sendo a variável aleatória X contínua, as probabilidades somente poderão estar associadas a intervalos definidos sobre a reta dos números reais. Assim, a probabilidade de a variável aleatória X estar contida no intervalo $x \leq X \leq x+dx$, é definida pela expressão

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f_X(x)dx, \quad (6.2)$$

sendo a função $f_X(x)$ definida como a função de densidade de probabilidade da variável X .

Com base em (6.2), é possível definir a função distribuição de probabilidade acumulada (FDPA) da variável aleatória X na forma

$$\Phi_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi)d\xi. \quad (6.3)$$

Como consequência direta de (6.3), tem-se que

$$f_X(x) = \frac{d\Phi_X(x)}{dx}, \quad (6.4)$$

ou seja, a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é igual à derivada da função de distribuição de probabilidade em relação à x .

Qualquer função escolhida para representar a função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X , deve satisfazer os axiomas da definição de probabilidade (ANG e TANG, 1975). Portanto, a função $\Phi_X(x)$ deve possuir as seguintes propriedades:

- a) $\Phi_X(-\infty) = 0$; $\Phi_X(+\infty) = 1,0$;
- b) $\Phi_X(x) \geq 0$, e não ser decrescente com x ;
- c) ser contínua com x .

Com base nas equações anteriores, a probabilidade de a variável aleatória X estar contida no intervalo $a \leq X \leq b$, é definida por

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = \Phi_X(b) - \Phi_X(a). \quad (6.5)$$

O valor esperado da variável aleatória X , $E[X]$ ou μ_X , é definido pela expressão

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx, \quad (6.6)$$

sendo a variância, $Var[X]$ ou σ_X^2 , dada por

$$Var[X] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx. \quad (6.7)$$

A função de distribuição de probabilidade mais conhecida e mais usualmente empregada é a distribuição normal, também conhecida por distribuição gaussiana, que é definida pela sua função densidade de probabilidade na forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2}, \quad (6.8)$$

onde σ_X é o desvio padrão da variável aleatória X , dado por

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}, \quad (6.9)$$

e e é a base dos logaritmos neperianos ($e = 2,718281\dots$).

Definindo-se a variável aleatória normal reduzida ξ na forma

$$\xi = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}, \quad (6.10)$$

a equação (6.8) assume o seguinte aspecto

$$f_\xi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \xi^2}, \quad (6.11)$$

que é a expressão da distribuição normal padronizada, de média zero e variância unitária.

A função densidade de probabilidade da distribuição normal, nas suas formas comum e padronizada, é ilustrada pela FIGURA 6.1.

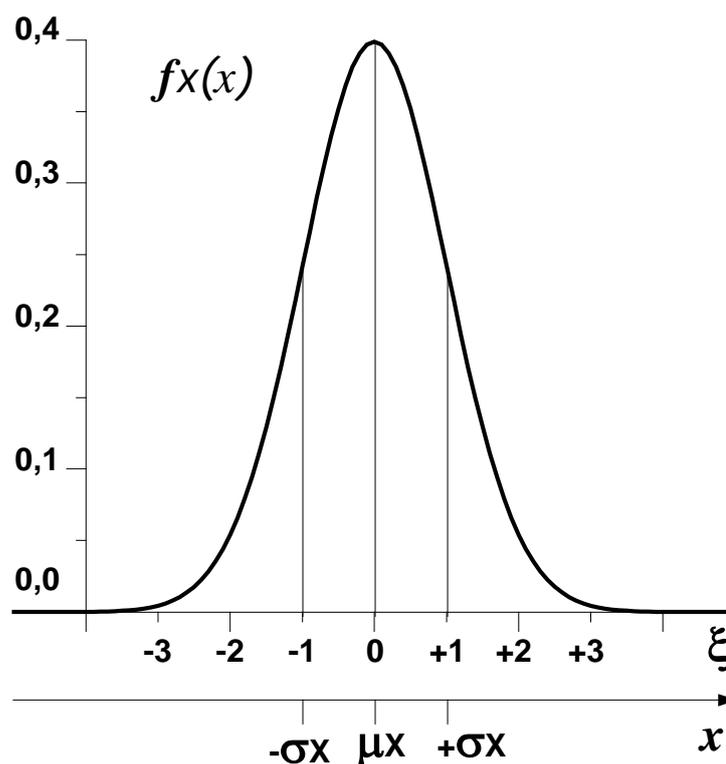


FIGURA 6.1 - Função densidade de probabilidade para a distribuição normal

Uma tarefa fundamental na utilização de simulações de Monte Carlo é a geração de valores apropriados para as variáveis aleatórias, de acordo com as distribuições de probabilidade que lhes foram atribuídas. Isto normalmente é feito através da geração digital de números randômicos.

Sendo X uma variável aleatória com uma função de distribuição de probabilidade $\Phi_X(x)$, então, para uma dada probabilidade acumulada $\Phi_X(x) = u$, o valor correspondente da variável X é

$$x = \Phi_X^{-1}(u). \quad (6.12)$$

Para uma variável aleatória U , de distribuição de probabilidade uniforme, entre 0,00 e 1,00, uma probabilidade acumulada u corresponde ao valor da variável u , ou seja,

$$\Phi_U(u) = u. \quad (6.13)$$

Portanto, para gerar um número randômico x , com uma função de distribuição de probabilidade $\Phi_X(x)$, primeiro gera-se um número randômico u , de distribuição de

probabilidade uniforme entre 0,00 e 1,00, e após aplica-se a equação (6.12). O problema deste método é que nem sempre é possível determinar-se uma forma explícita para a função inversa de $\Phi_X(x)$, sendo necessário recorrer-se a métodos numéricos iterativos para o cálculo de x . Este procedimento, também é conhecido como método da transformação inversa.

Para a geração de números randômicos de distribuição uniforme é empregada uma subrotina escrita na linguagem de programação FORTRAN, que contém um gerador congruencial multiplicativo, extraída do livro de GORDON (1969).

A distribuição normal de probabilidade padece do problema levantado anteriormente, ou seja, não é possível obter-se uma forma explícita para a função inversa de sua função de distribuição de probabilidade acumulada. Embora seja possível a obtenção de uma solução numérica para o problema da transformação inversa, quando a quantidade de números randômicos a ser gerada é muito grande, este tipo de procedimento torna-se computacionalmente oneroso.

Para contornar esta dificuldade, adota-se o procedimento proposto por Box e Miller, citado por ANG e TANG (1975), que permite gerar números randômicos com distribuição normal de probabilidade de forma mais rápida e eficaz.

Primeiramente são gerados dois números randômicos u_1 e u_2 , estatisticamente independentes, com distribuição de probabilidade uniforme entre 0,00 e 1,00. Após, um par de números randômicos estatisticamente independentes x_1 e x_2 , com distribuição normal de média μ_X e desvio padrão σ_X , pode ser obtido através das expressões

$$x_1 = \mu_X + \sigma_X \sqrt{-2 \ln u_1} \cos 2\pi u_2, \quad (6.14)$$

e

$$x_2 = \mu_X + \sigma_X \sqrt{-2 \ln u_1} \sen 2\pi u_2. \quad (6.15)$$

Para evitar a simulação de valores extremos de X com pequena probabilidade de serem encontrados na realidade, os valores gerados pelo procedimento descrito acima são limitados ao intervalo

$$\mu_X - 2,325\sigma_X \leq X \leq \mu_X + 2,325\sigma_X, \quad (6.16)$$

que possui uma probabilidade de ocorrência de 98% (Araújo, 1995).

6.4 - GERAÇÃO DO CAMPO ESTOCÁSTICO DAS PROPRIEDADES DO CONCRETO

A variação das propriedades do concreto ao longo da estrutura é considerada apenas em seu plano médio, considerado como contido no plano xoy . A variação das propriedades ao longo da espessura não é considerada, ou melhor, considera-se que o valor em cada ponto seja o valor médio ao longo da espessura.

6.4.1 - Definição das propriedades médias e coeficientes de variação

As propriedades mecânicas médias do concreto, resistência média à compressão (f_{cm}), resistência média à tração (f_{ctm}) e módulo de deformação longitudinal médio (E_{cm}) podem ser obtidas através de ensaios de laboratórios específicos para cada uma.

No entanto, o mais usual é determinar-se experimentalmente apenas a resistência média à compressão (f_{cm}), por ser este o ensaio mais simples de realizar, e calcular-se as demais propriedades a partir de fórmulas de correlação consagradas nas normas técnicas. Neste trabalho são adotadas as expressões recomendadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990.

Assim, o módulo de deformação longitudinal médio do concreto (em kN/cm^2) pode ser calculado em função da resistência à compressão média (em kN/cm^2), através da expressão:

$$E_{cm} = 2150 \sqrt[3]{f_{cm}} \quad (6.17)$$

O coeficiente de variação, razão entre o desvio padrão e a média, do módulo de deformação longitudinal do concreto é suposto igual ao coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto, ou seja,

$$V_{Ec} = V_{fc} \quad (6.18)$$

Já para calcular-se a resistência média à tração (em kN/cm^2), é primeiro necessário determinar-se a resistência à compressão característica (f_{ck}), através da equação usual, ou seja,

$$f_{ck} = f_{cm} (1,00 - 1,645 V_{fc}), \quad (6.19)$$

onde V_{fc} é o coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto considerado. Conhecido f_{ck} (em kN/cm²), a resistência à tração é obtida através da expressão:

$$f_{ctm} = 0,14 (f_{ck})^{\frac{2}{3}}. \quad (6.20)$$

O coeficiente de variação da resistência à tração do concreto é adotado igual a 1,20 vezes valor atribuído para o coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto, ou seja,

$$V_{fct} = 1,20 V_{fc}. \quad (6.21)$$

Isto é feito para levar em conta a maior variabilidade da resistência à tração do concreto em relação à resistência à compressão (CEB, 1993).

6.4.2- Campo estocástico bidimensional: o método da representação espectral

Um campo estocástico gaussiano, bidimensional e homogêneo $f_o(x,y)$, com média igual a zero e funções de autocorrelação $Rf_o f_o(\xi_1, \xi_2)$, do tipo quadrante, pode ser simulado pelas seguintes séries, quando N_1 e N_2 tendem ao infinito simultaneamente, (SHINOZUKA e DEODATIS, 1996),

$$f(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} A_{n_1 n_2} \left[\cos(k_{1n_1} x + k_{2n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)}) + \cos(k_{1n_1} x - k_{2n_2} y + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)}) \right] \quad (6.22)$$

onde

$$A_{n_1 n_2} = \sqrt{2 S_{fofo}(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2}) \Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2}, \quad (6.23)$$

sendo

$$k_{1n_1} = n_1 \Delta \kappa_1 \text{ e } k_{2n_2} = n_2 \Delta \kappa_2. \quad (6.24)$$

As variáveis $\Phi_{n1n2}^{(1)}$ e $\Phi_{n1n2}^{(2)}$ representam dois conjuntos independentes de ângulos de fase randômicos, distribuídos uniformemente no intervalo de 0 a 2π .

A função densidade espectral de potência $S_{fofo}(\kappa_1, \kappa_2)$, empregada neste trabalho é definida pela expressão

$$S_{fofo}(\kappa_1, \kappa_2) = \sigma^2 \frac{b_1 b_2}{4\pi} \exp \left[- \left(\frac{b_1 \kappa_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{b_2 \kappa_2}{2} \right)^2 \right], \quad (6.25)$$

onde σ é o desvio padrão do campo estocástico $f_o(x, y)$; e b_1 e b_2 são parâmetros proporcionais à distância de correlação do campo estocástico ao longo das direções x e y , respectivamente.

A função de autocorrelação $R_{fofo}(\xi_1, \xi_2)$, que forma um par de transformadas de Wiener-Khintchine com $S_{fofo}(\kappa_1, \kappa_2)$, é dada por

$$R_{fofo}(\xi_1, \xi_2) = \sigma^2 \exp \left[- \left(\frac{\xi_1}{b_1} \right)^2 - \left(\frac{\xi_2}{b_2} \right)^2 \right], \quad (6.26)$$

onde ξ_1 e ξ_2 são, respectivamente, as distâncias entre dois pontos, segundo as direções x e y .

O desvio padrão do campo estocástico $f_o(x, y)$, designado por σ , corresponde ao coeficiente de variação da propriedade, V_{fc} , no caso.

Assim, restam ser definidos os parâmetros b_1 e b_2 , para que o campo estocástico de f_c possa ser gerado. Para se poder avaliar o efeito da variação dos parâmetros b_1 e b_2 sobre a forma do campo estocástico, estudos paramétricos foram realizados para a geração de um campo estocástico de média zero e desvio padrão unitário, sobre uma região quadrada de 100 cm de lado. Foram considerados os valores $b_1 = b_2 = 10 \text{ cm}$, $b_1 = b_2 = 50 \text{ cm}$, e, finalmente, $b_1 = b_2 = 100 \text{ cm}$, ou seja, iguais a comprimento do lado da região.

As FIGURAS 6.2, 6.3 e 6.4 apresentam os gráficos da função densidade espectral de potência $S_{fofo}(\kappa_1, \kappa_2)$, para estes valores de b_1 e b_2 . As FIGURAS 6.5, 6.6 e 6.7 mostram os gráficos da função de autocorrelação $R_{fofo}(\xi_1, \xi_2)$, para estes valores de b_1 e b_2 . As FIGURAS 6.8, 6.9 e 6.10 indicam a conformação superficial assumida pelo campo estocástico, para os diversos valores de b_1 e b_2 .

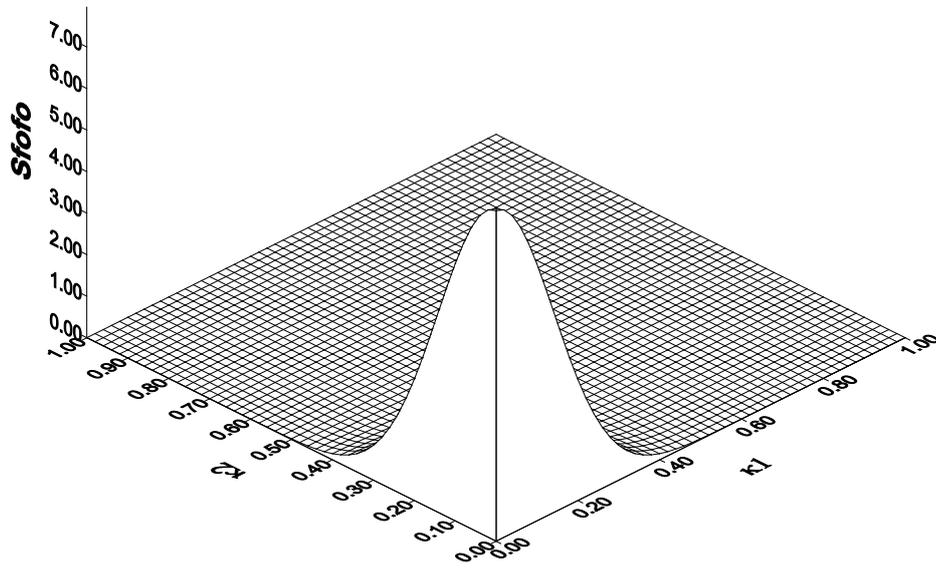


FIGURA 6.2 – Função densidade espectral $S_{f_0 f_0}(\kappa_1, \kappa_2)$, com $b_1 = b_2 = 10$ cm

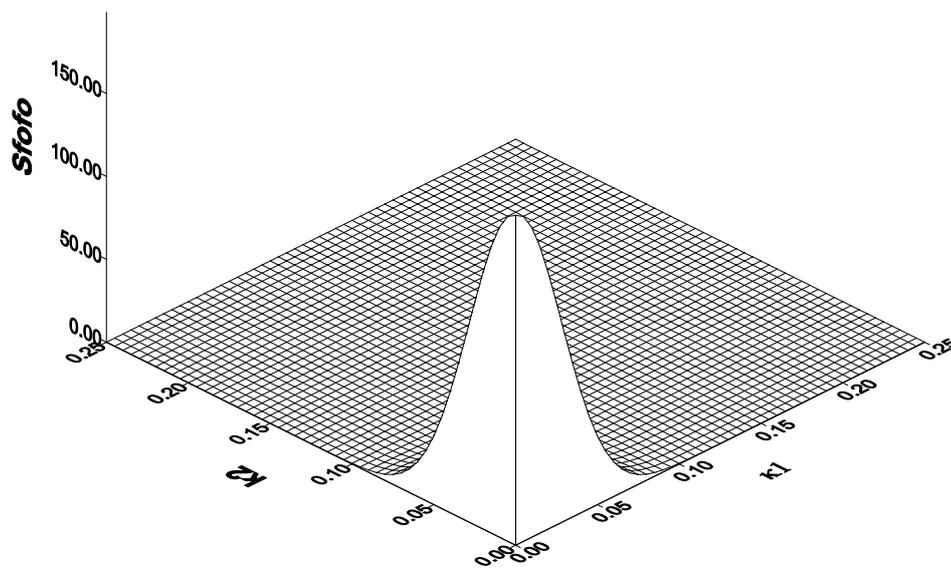


FIGURA 6.3 – Função densidade espectral $S_{f_0 f_0}(\kappa_1, \kappa_2)$, com $b_1 = b_2 = 50$ cm

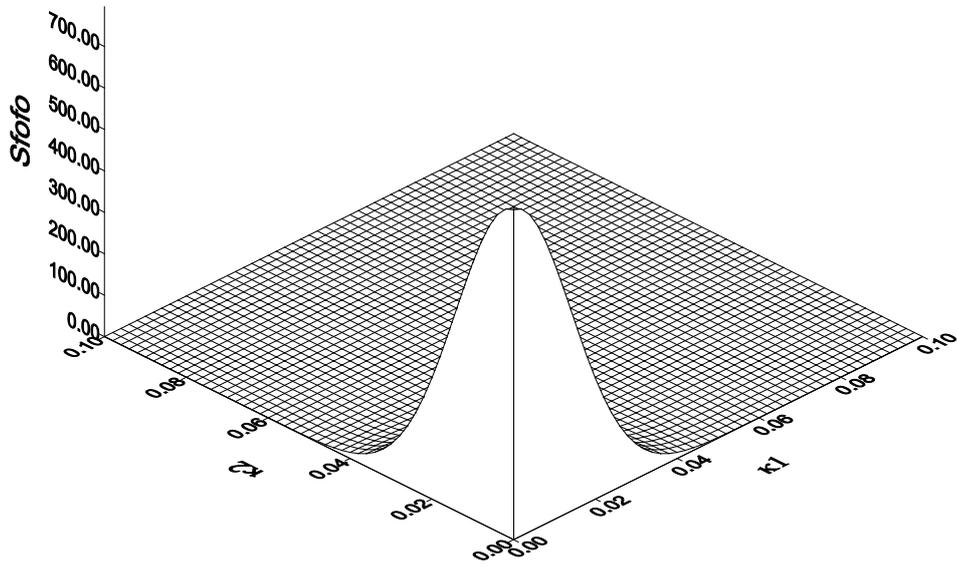


FIGURA 6.4 – Função densidade espectral $Sf_{fo}(\kappa_1, \kappa_2)$, com $b_1 = b_2 = 100$ cm

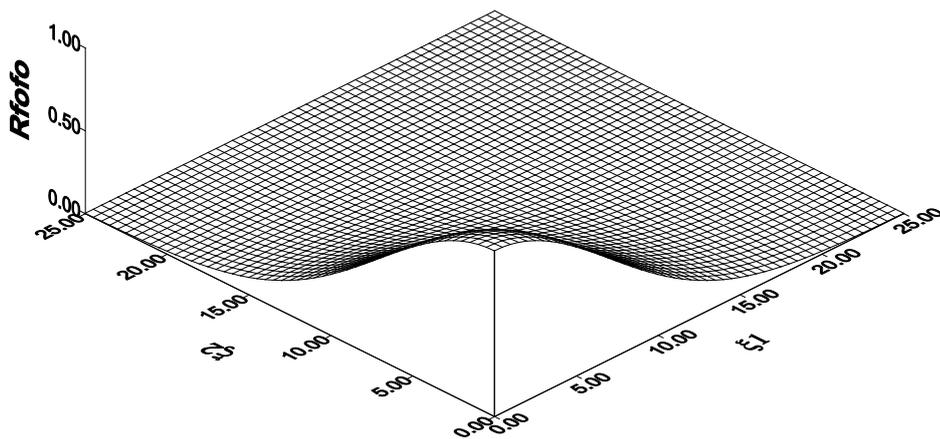


FIGURA 6.5 – Função de autocorrelação $Rf_{fo}(\xi_1, \xi_2)$, com $b_1 = b_2 = 10$ cm

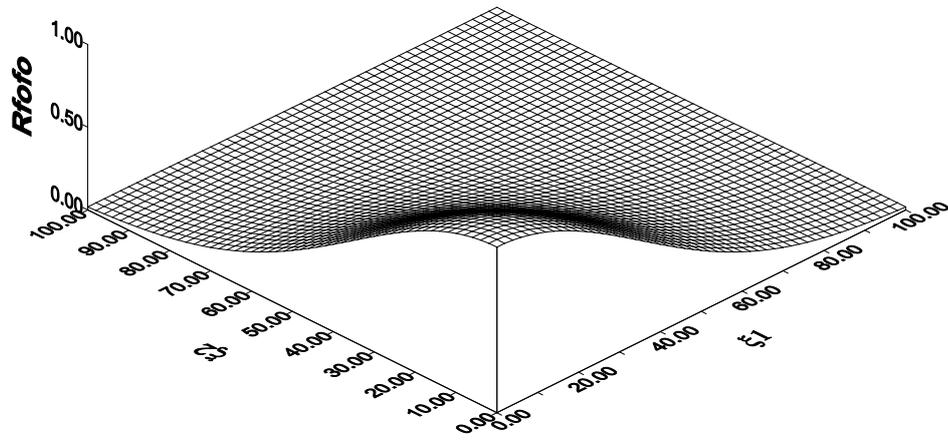


FIGURA 6.6 – Função de autocorrelação $Rf_{ofo}(\xi_1, \xi_2)$, com $b_1 = b_2 = 50$ cm

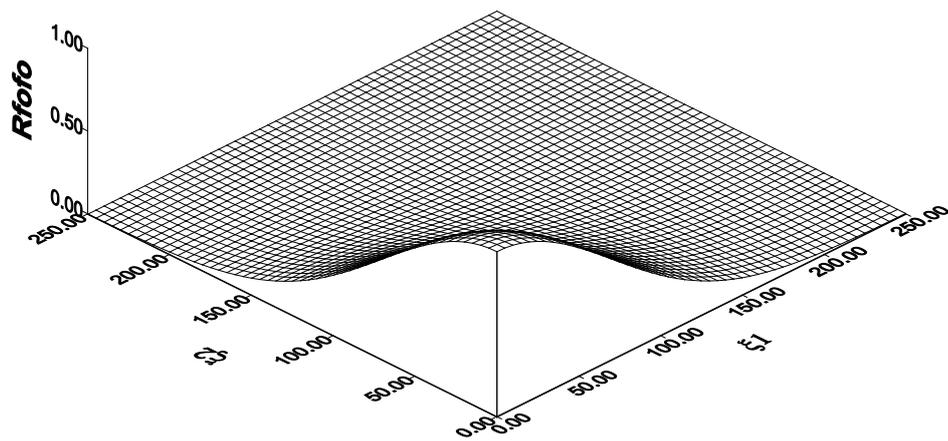


FIGURA 6.7 – Função de autocorrelação $Rf_{ofo}(\xi_1, \xi_2)$, com $b_1 = b_2 = 100$ cm

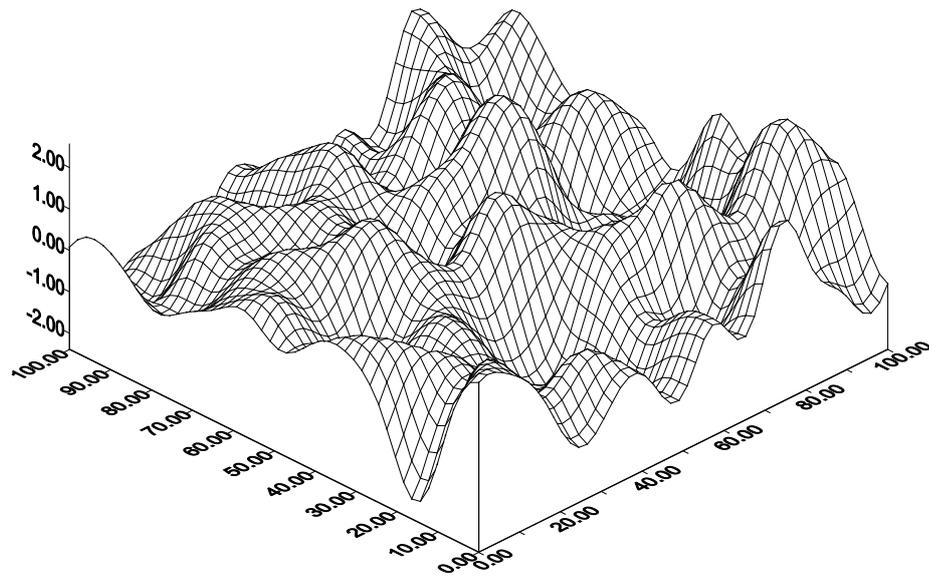


FIGURA 6.8 – Campo estocástico $f(x,y)$, com $b_1 = b_2 = 10$ cm

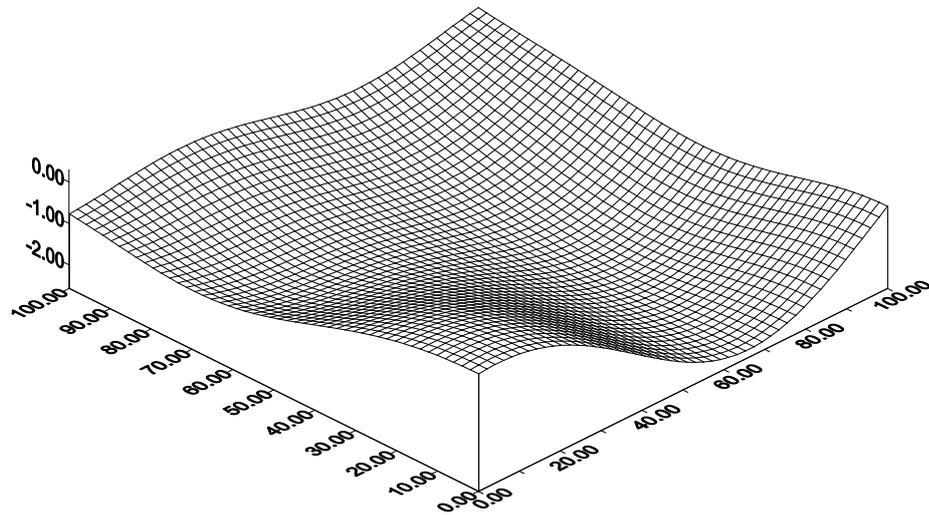


FIGURA 6.9 – Campo estocástico $f(x,y)$, com $b_1 = b_2 = 50$ cm

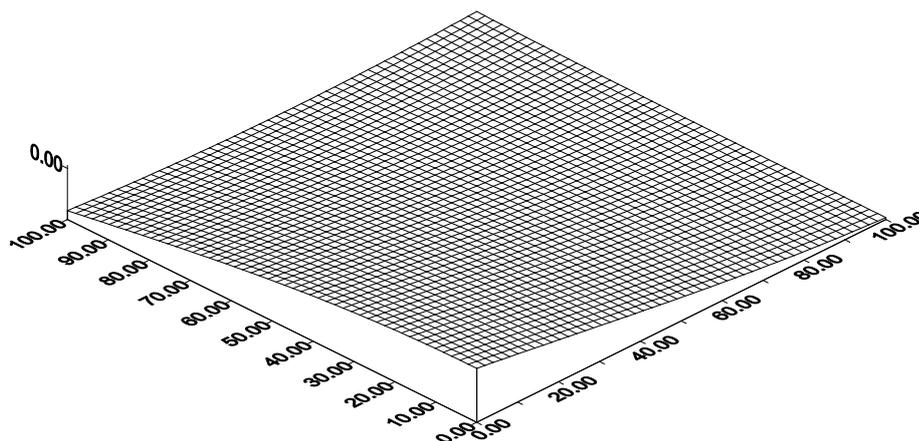


FIGURA 6.10 – Campo estocástico $f(x,y)$, com $b_1 = b_2 = 100$ cm

Observando-se as FIGURAS de 6.2 a 6.10, nota-se que quanto maiores forem os parâmetros b_1 e b_2 , menor será a faixa de números de onda abrangidos pela função de densidade espectral; conseqüentemente maior será a correlação existente, entre dois pontos afastados de uma certa distância; e, finalmente, menor será a variabilidade do campo estocástico.

6.4.3 - Introdução da correlação existente entre as propriedades do concreto

As propriedades mecânicas do concreto f_c , f_{ct} e E_c , não são três variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Sabe-se, através de estudos experimentais, que existe pelo menos uma dependência não-linear entre estas três grandezas.

Portanto, é necessário um modelo de geração de variáveis aleatórias que leve em consideração a correlação existente entre as variáveis resistência à compressão, resistência à tração e módulo de deformação longitudinal do concreto.

A primeira etapa deste processo consiste na geração de três variáveis aleatórias gaussianas, de média zero e desvio padrão unitário, para representar a parcela flutuante das propriedades f_c , f_{ct} e E_c , que são designadas respectivamente por $a_c(x,y)$, $a_t(x,y)$ e $a_e(x,y)$.

A seguir, define-se a matriz de covariância entre estas três variáveis aleatórias, dada na forma

$$\mathbf{C}_{cte} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2 & \rho_{ct}\sigma_c\sigma_t & \rho_{ce}\sigma_c\sigma_e \\ \rho_{ct}\sigma_c\sigma_t & \sigma_t^2 & \rho_{te}\sigma_t\sigma_e \\ \rho_{ce}\sigma_c\sigma_e & \rho_{te}\sigma_t\sigma_e & \sigma_e^2 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

onde σ_c , σ_t e σ_e são respectivamente o desvio padrão das variáveis a_c , a_t e a_e , ou ainda, os coeficientes de variação das propriedades f_c , f_{ct} e E_c ; e ρ_{ct} , ρ_{te} e ρ_{ce} são, correspondentemente, os coeficientes de correlação linear entre as propriedades f_c e f_{ct} , entre f_{ct} e E_c , e entre f_c e E_c . Neste trabalho consideram-se os seguintes valores: $\rho_{ct} = 0,80$, $\rho_{te} = 0,70$ e $\rho_{ce} = 0,90$, seguindo a orientação de MIRZA e MacGREGOR (1979).

Da decomposição de Cholesky da matriz de covariância entre as três variáveis resulta

$$\mathbf{C}_{cte} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad (6.28)$$

A parte flutuante das variáveis f_c , f_{ct} e E_c , na forma correlacionada é dada por

$$\begin{Bmatrix} a_c(x, y)^* \\ a_t(x, y)^* \\ a_e(x, y)^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_c(x, y) \\ a_t(x, y) \\ a_e(x, y) \end{Bmatrix}. \quad (6.29)$$

A geração das variáveis aleatórias f_c , f_{ct} e E_c , na sua forma correlacionada é feita a partir das seguintes expressões

$$f_c(x, y) = f_{cm} [1 + a_c(x, y)^*], \quad (6.30)$$

$$f_{ct}(x, y) = f_{ctm} [1 + a_t(x, y)^*], \quad (6.31)$$

e, finalmente,

$$E_c(x, y) = E_{cm} [1 + a_e(x, y)^*]. \quad (6.32)$$

As variáveis aleatórias definidas pelas equações (6.30), (6.31) e (6.32) é que são efetivamente empregadas para simular a variabilidade das propriedades mecânicas do concreto ao longo da estrutura.

6.5 - GERAÇÃO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DA ARMADURA

As propriedades mecânicas mais importantes do aço, dentro do modelo constitutivo adotado para a armadura, são a sua tensão de escoamento (f_y) e o seu módulo de deformação longitudinal (E_s).

A variabilidade de f_y é modelada através de uma variável aleatória de distribuição normal, de valor esperado f_{ym} e coeficiente de variação V_{fy} . A tensão de escoamento para um dado tipo de aço utilizado em uma dada peça estrutural (f_y) é obtida a partir da expressão

$$f_y = f_{ym}(1 + z_1 V_{fy}), \quad (6.33)$$

onde z_1 é uma variável aleatória de distribuição gaussiana, de média zero e variância unitária.

A dispersão de E_s é representada por meio de uma variável aleatória de distribuição normal, de média E_{sm} e coeficiente de variação V_{Es} . O módulo de deformação longitudinal para um dado tipo de aço utilizado em uma dada peça estrutural (E_s) é determinado a partir da equação

$$E_s = E_{sm}(1 + z_2 V_{Es}), \quad (6.34)$$

onde z_2 uma variável aleatória de distribuição gaussiana, de média zero e variância unitária.

6.6 - GERAÇÃO DAS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA ESTRUTURA

As características geométricas mais importantes, em se tratando de estruturas planas de concreto armado, são suas dimensões: comprimento (L), altura (h) e espessura (b); a posição das barras de aço da armadura; e as condições de vínculo existentes nos apoios.

A FIGURA 6.11 serve para ilustrar as principais características geométricas de estruturas planas de concreto armado.

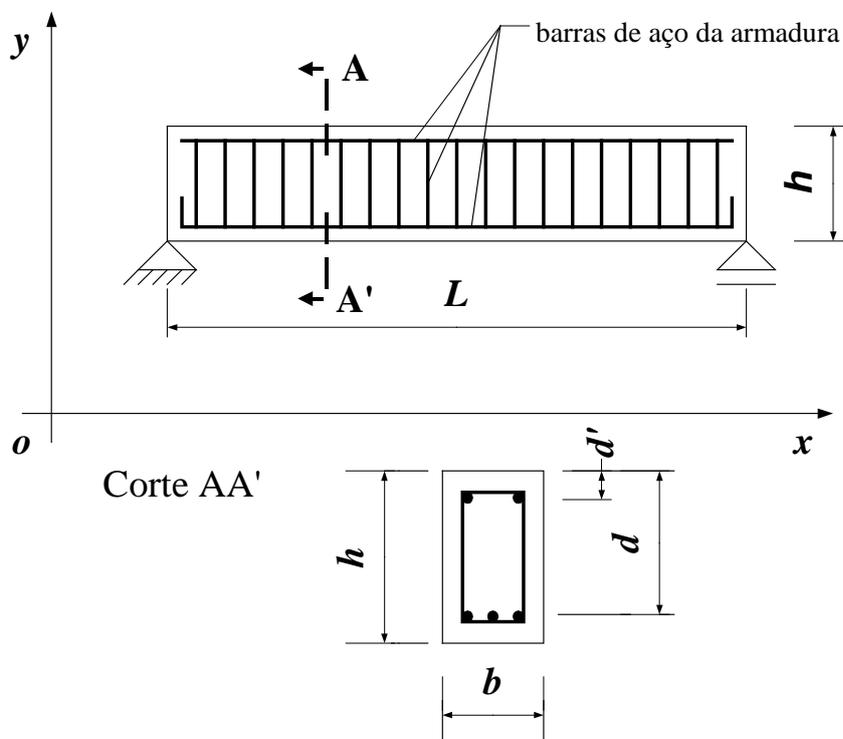


FIGURA 6.11 – Características geométricas de uma estrutura plana de concreto armado

As dimensões da estrutura de concreto armado, comprimento (L), altura (h) e espessura (b) são consideradas como variáveis aleatórias, sendo fornecidos como parâmetros de entrada do programa o seu valor nominal, a variação média e o desvio padrão da variação. Para cada simulação, valores diferentes destas variáveis são gerados aleatoriamente, conforme descrito a seguir.

Uma vez definidas as dimensões da estrutura para uma dada simulação, e escolhido o refinamento da discretização em elementos finitos a ser empregada na análise, a malha de elementos finitos para estado plano de tensão é gerada. Para esta finalidade é empregado um gerador automático de malhas retangulares, para elementos isoparamétricos quadráticos, incorporado ao programa.

A disposição das barras de aço da armadura é gerada através do fornecimento das coordenadas de seus pontos extremos em relação a um sistema de referência fixo xoy , ao qual também é referida a malha de elementos finitos para o concreto. Como a posição das barras da armadura é fixa em relação ao sistema xoy e as dimensões da estrutura no plano (comprimento

e altura) são variáveis aleatórias, a disposição das barras com relação aos bordos inferior e superior da estrutura e em relação aos seus extremos laterais também pode variar aleatoriamente.

Este mecanismo pode, então, ser utilizado para representar a variabilidade que existe na altura útil (d) e na distância da armadura comprimida em relação ao bordo da peça (d'), das armaduras longitudinais de vigas e pilares, devido a erros de construção.

As condições cinemáticas de contorno, que definem os deslocamentos impedidos nos pontos de apoio da estrutura, são consideradas como determinísticas, ou seja, estas condições são definidas no início do processo de análise e mantidas constantes durante todas as simulações.

Para representar as variabilidades de uma propriedade geométrica admite-se que a mesma possua um valor nominal de projeto b_n , por exemplo para a largura da seção, uma variação média em relação a este valor nominal $\overline{\Delta b}$, e que o desvio padrão desta variação seja dado por σ_b . Adota-se para a lei de distribuição de probabilidade da variação Δb a curva normal, de média $\overline{\Delta b}$ e desvio padrão σ_b (UDOEYO e UGBEM, 1995).

Então, uma variação aleatória, em relação ao valor nominal da dimensão, será dada pela expressão:

$$\Delta b = \overline{\Delta b} + z_3 \sigma_b, \quad (6.35)$$

onde z_3 é uma variável aleatória normal reduzida, de média zero e desvio padrão unitário.

O valor da propriedade geométrica a ser utilizado na simulação atual será dado por:

$$b = b_n + \Delta b. \quad (6.36)$$

Procede-se de maneira idêntica para a determinação da altura h da seção transversal e do vão L da estrutura, de forma aleatória.

6.7 – CARREGAMENTO

O objetivo primordial da aplicação do método de Monte Carlo, na análise não-linear de estruturas de concreto armado, através do método dos elementos finitos, é conhecer-se a

variabilidade da resposta da estrutura em presença da variabilidade dos parâmetros de entrada do sistema.

Assim sendo, o carregamento é aplicado de forma determinística sobre a estrutura, ou seja, a direção, o sentido e a forma de distribuição das cargas são fixados no início da análise, e apenas o módulo das cargas é aumentado incrementalmente até que a estrutura atinja a ruptura.

Uma vez conhecidas as estatísticas do comportamento resistente da estrutura, é possível realizar-se diversas análises quanto à segurança e à confiabilidade da mesma, combinando-se este conhecimento com os dados da variabilidade do carregamento. No entanto, este tipo de análise será abordado apenas no Capítulo 8, que trata das aplicações deste modelo.

6.8 – O MÉTODO DE MONTE CARLO

Simulação é o processo de tentar reproduzir o mundo real com base em um conjunto de hipóteses e modelos idealizados da realidade. Para fins de engenharia, a simulação pode ser aplicada para prever ou estudar a resposta de um sistema. Através de repetidas simulações, a sensibilidade da resposta do sistema à variação dos parâmetros de entrada pode ser avaliada. Para problemas envolvendo variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade conhecidas (ou supostas), emprega-se a técnica de simulação de Monte Carlo (ANG e TANG, 1975).

O princípio do método de Monte Carlo é desenvolver um modelo analítico, baseado em um programa de computador, capaz de reproduzir o comportamento do sistema. Sendo um ou mais parâmetros do sistema variáveis aleatórias, a análise do sistema é realizada várias vezes. Cada análise (chamada de ciclo de simulação ou tentativa) é baseada em um conjunto de parâmetros de entrada do sistema, obtidos de forma aleatória, de acordo com as distribuições de probabilidade que lhes foram atribuídas. Como resultado, diversas previsões de comportamento do sistema são obtidas. Então, métodos estatísticos são empregados para determinar os momentos e os tipos de distribuição de probabilidade das variáveis da resposta, que representam o comportamento do sistema. A FIGURA 6.12, adaptada de GRANT, L.H. et al. (1978), esquematiza o funcionamento do método de Monte Carlo.

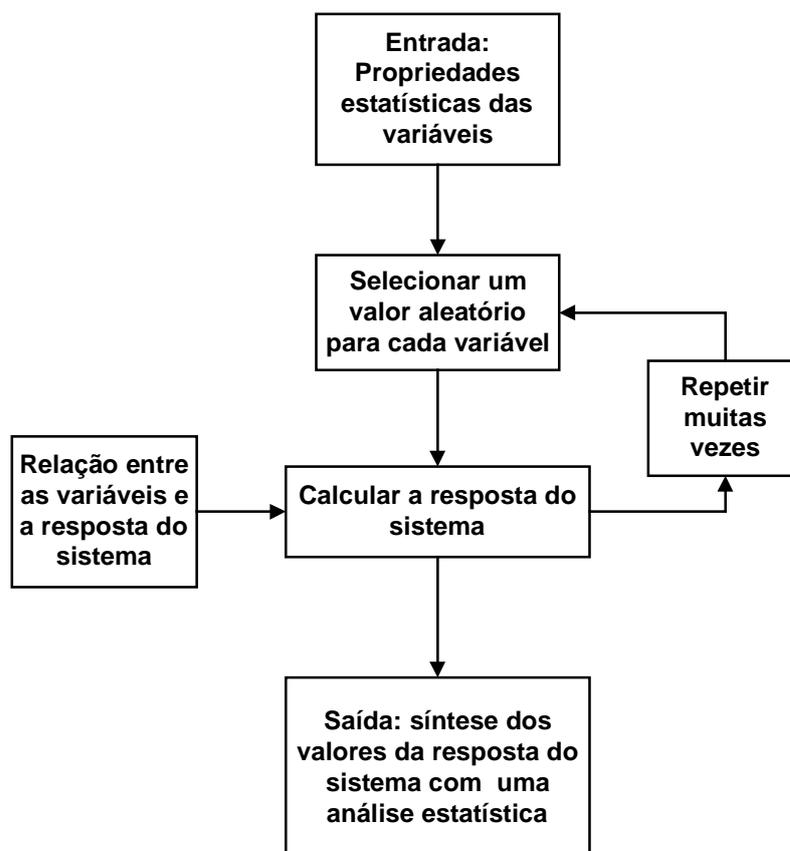


FIGURA 6.12 – Esquema do funcionamento do método de Monte Carlo

As etapas analíticas e computacionais que são necessárias para a realização de simulações de Monte Carlo são (AYYUB e MCCUEN, 1995):

- definição do sistema;
- geração das variáveis aleatórias de entrada do sistema;
- realização da análise do sistema através do modelo matemático elaborado;
- análise estatística da resposta obtida;
- estudo da eficiência e da convergência do método.

A definição do sistema deve incluir a definição de suas condições de contorno, parâmetros de entrada, parâmetros da resposta e o modelo que relaciona os dados de entrada com os resultados. A definição dos dados de entrada do sistema deve incluir suas características probabilísticas, isto é, o conhecimento de seus momentos estatísticos e o tipo de suas distribuições de probabilidade. Os parâmetros de entrada são, então, gerados e fornecidos ao modelo para a obtenção dos parâmetros da resposta. Através da repetição do

processo n vezes (para n ciclos de simulação), n conjuntos de parâmetros de resposta são obtidos. Métodos estatísticos podem ser agora empregados para determinar, por exemplo, o valor esperado (média), a variância, ou o tipo de distribuição de probabilidade dos parâmetros da resposta do sistema.

Neste trabalho os sistemas em análise são estruturas de concreto armado submetidas a um estado plano de tensão.

Os parâmetros de entrada do sistema são: a geometria da estrutura (dimensões: comprimento, altura e espessura), aí incluídas as condições cinemáticas de contorno e a disposição da armadura; as propriedades mecânicas dos materiais concreto e aço; e, finalmente, as características do carregamento, ou seja, o módulo, a direção, o sentido e a forma de distribuição das cargas aplicadas sobre a estrutura.

O modelo utilizado para representar o comportamento de estruturas de concreto armado consiste na aplicação do método dos elementos finitos, na análise não-linear de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão.

Os parâmetros da resposta da estrutura são os deslocamentos nos pontos nodais, as deformações e as tensões no concreto nos pontos de integração de Gauss, as reações de apoio, e as deformações e tensões ao longo da armadura.

Após a realização das simulações, é possível determinar-se para um parâmetro da resposta previamente escolhido, cujos valores obtidos durante as n simulações são armazenados, o valor esperado (média), o desvio padrão, o coeficiente de variação, a convergência do valor esperado e do desvio padrão com o aumento do tamanho da amostra, o intervalo de confiança com uma certa probabilidade de ocorrência, além de outras características estatísticas da resposta.

6.9 – ANÁLISES ESTATÍSTICAS

Após a realização de n simulações de Monte Carlo, tem-se à disposição um conjunto de dados representando a variabilidade dos parâmetros da resposta da estrutura.

Assim sendo, cada parâmetro da resposta (deslocamentos, reações de apoio, deformações e tensões no concreto e na armadura) pode ser agora tratado como uma variável aleatória, da qual se conhece uma amostra de n componentes. Mediante uma análise estatística desta amostra, torna-se possível caracterizar os principais momentos e o tipo de distribuição de probabilidade desta variável aleatória.

Abaixo seguem algumas características estatísticas de uma dada variável aleatória da resposta da estrutura, que podem ser determinadas após a realização de n simulações de Monte Carlo.

Uma estimativa justa do valor esperado (média) \bar{x} da variável aleatória X , obtida a partir da amostra com n elementos, é calculada pela expressão

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (6.37)$$

A estimativa justa do desvio padrão da variável aleatória X , calculada a partir da amostra, é, então, dada por

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (6.38)$$

Uma vez obtidas estimativas do valor esperado e do desvio padrão de X , seu coeficiente de variação V_X pode ser estimado pela relação

$$V_X = \frac{s}{\bar{x}} . \quad (6.39)$$

Calculadas as estatísticas acima, é possível, através do Teste de χ -quadrado ou do Teste de Kolmogorov-Smirnov, determinar se a distribuição de probabilidade da variável aleatória ajusta-se à distribuição normal de probabilidade. A utilização de gráficos de probabilidade normal, também permite avaliar se a distribuição de uma variável aleatória adapta-se a uma distribuição normal ou não. Análise estatísticas adicionais podem ser encontradas no livro de ANG e TANG (1975).

Concluindo, vale lembrar que as estimativas das propriedades de uma variável aleatória X , calculadas a partir de uma amostra com n elementos, serão tanto mais precisas quanto maior for o número n de componentes da amostra. Portanto, é conveniente verificar a convergência dos momentos da variável aleatória na medida em que o tamanho da amostra (n) cresce, para que se tenha a certeza de que o número de simulações realizadas é o suficiente.

7. TESTES PARAMÉTRICOS

7.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar uma série de testes paramétricos, que mostrem como a variabilidade das propriedades dos materiais, e a variabilidade das características geométricas da estrutura afetam os resultados fornecidos pelo modelo.

Quanto às propriedades do concreto, sua variabilidade é controlada pelo coeficiente de variação da resistência à compressão, que é um dos índices da qualidade de um concreto produzido. Outro fator importante é a distância de correlação, que determina o grau de variação das propriedades do concreto ao longo da extensão da estrutura.

No que se refere às propriedades da armadura, estuda-se o efeito da variabilidade da tensão de escoamento, determinada pelo seu coeficiente de variação, que é um indicador da qualidade do aço fabricado. Além disso, é analisado o efeito da pequena variação do módulo de deformação longitudinal nos resultados.

Consideram-se, também, os efeitos causados pela variação aleatória das dimensões da seção transversal, tanto para um tipo de construção com um bom controle de execução, como para uma construção com um controle de qualidade ruim das dimensões das peças.

Tendo em vista que uma mesma variação de uma propriedade pode produzir resultados diferentes, dependendo do tipo de estrutura analisada, são estudados vigas e pilares moderadamente esbeltos, com taxas de armadura distintas. No final, apresenta-se um estudo comparativo dos resultados obtidos para as diversas estruturas analisadas.

7.2 – PARÂMETROS AVALIADOS

7.2.1 - Propriedades do concreto

Conforme o modelo de geração de propriedades aleatórias do concreto, que foi apresentado no Capítulo 6, a variabilidade das propriedades do concreto é determinada por dois parâmetros, quais sejam: o coeficiente de variação da resistência à compressão e a distância de

correlação do campo estocástico de f_c . A importância de cada um destes parâmetros é discutida a seguir.

O principal parâmetro do concreto a ser especificado, quando se trata do projeto de uma estrutura em concreto armado, é a sua resistência característica à compressão (f_{ck}). A resistência característica é aquela que possui uma probabilidade de apenas 5% de serem obtidos valores inferiores a ela na obra. Admitindo-se que a resistência à compressão do concreto, medida em corpos de prova cilíndricos, tenha uma distribuição normal de probabilidade, a resistência característica será dada por:

$$f_{ck} = f_{cm} (1 - 1,645 V_{f_c}), \quad (7.1)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto, e V_{f_c} é o coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto, dado por:

$$V_{f_c} = \frac{\sigma_{f_c}}{f_{cm}}, \quad (7.2)$$

sendo σ_{f_c} o desvio padrão da resistência à compressão.

A partir da resistência característica especificada pelo projetista da estrutura, o engenheiro responsável pela tecnologia de produção do concreto, que conhece o desvio padrão do processo de produção, irá determinar a resistência média f_{cm} que deve ser atingida, para garantir o valor do f_{ck} desejado. O valor de f_{cm} necessário será o principal determinante da composição do concreto a ser utilizada, ou seja, consumo de cimento, proporção de agregados, fator água/cimento, etc.

O coeficiente de variação de f_c , V_{f_c} , relação entre o desvio padrão e a média, é uma medida do grau de dispersão existente na obtenção dos valores de f_c . Portanto, V_{f_c} é um parâmetro indicador do controle de qualidade adotado na produção do concreto. Quanto menor for V_{f_c} , mais concentrados em torno da média estarão os valores de f_c , indicando um bom controle de qualidade.

Conforme pode-se deduzir da equação (7.1), para um mesmo valor de f_{cm} , um concreto com maior valor de V_{f_c} , terá um menor valor de f_{ck} , e, conseqüentemente, terá uma qualidade inferior sob o ponto de vista estrutural. Este fato é ilustrado pela FIGURA 7.1, onde os concretos

1 e 2 possuem a mesma resistência média $f_{cm} = 3,00 \text{ kN/cm}^2$, porém o concreto 1 possui $V_{fc} = 0,10$ e $f_{ck} = 2,50 \text{ kN/cm}^2$, enquanto o concreto 2, que possui $V_{fc} = 0,30$, resulta com $f_{ck} = 1,52 \text{ kN/cm}^2$.

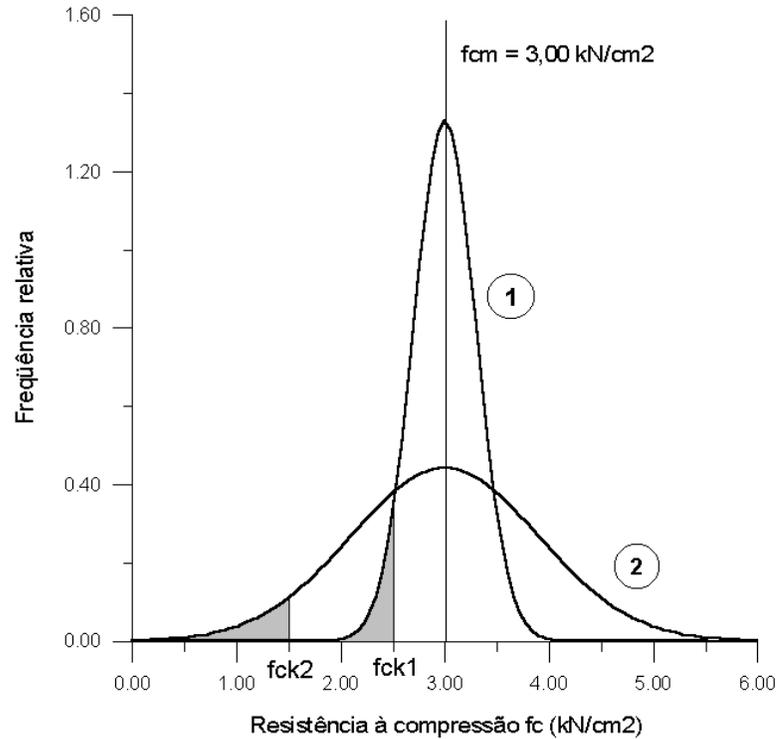


FIGURA 7.1 – Histograma para concretos de mesma resistência média f_{cm}

Por outro lado, fixado o valor de f_{ck} , um concreto cujo processo de produção apresente um valor elevado para V_{fc} , necessitará atingir uma resistência média f_{cm} mais alta, o que implica o aumento do consumo de cimento por m^3 , e um maior custo de produção. Esta situação é apresentada na FIGURA 7.2, onde os concretos 1 e 2 possuem o mesmo $f_{ck} = 2,00 \text{ kN/cm}^2$. O concreto 1 possui $V_{fc} = 0,10$, e uma resistência média $f_{cm} = 2,39 \text{ kN/cm}^2$. Porém, o concreto 2, que possui uma maior dispersão, com $V_{fc} = 0,30$, necessita atingir uma resistência média $f_{cm} = 3,95 \text{ kN/cm}^2$, para garantir o mesmo f_{ck} .

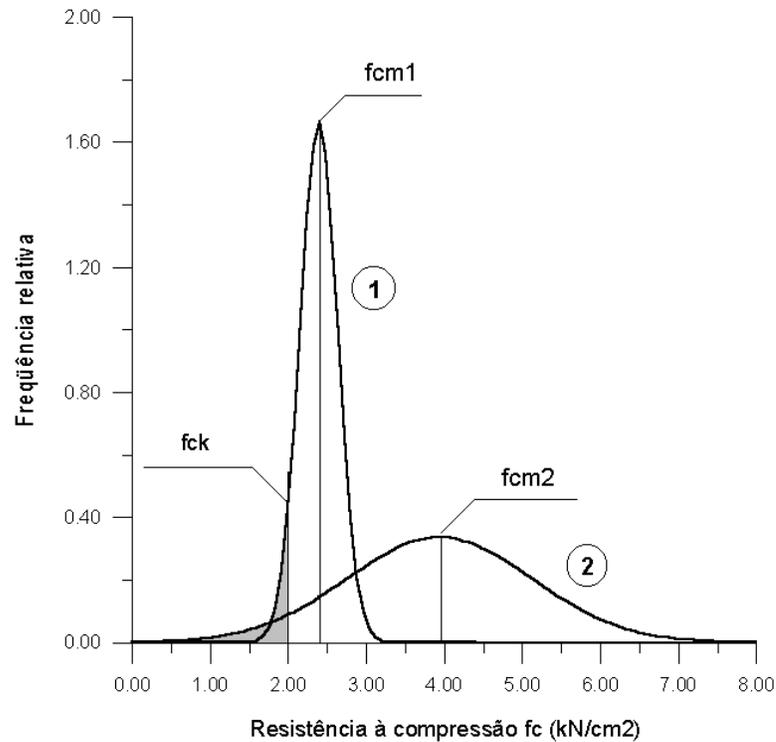


FIGURA 7.2 – Histograma para concretos de mesmo f_{ck}

Portanto, foram realizados testes paramétricos fixando-se o valor de f_{ck} , e fazendo-se V_{fc} assumir os valores 0,10, 0,15 e 0,20, observando-se de que forma esta variação afeta a resposta da estrutura. O valor de $V_{fc} = 0,10$ corresponde a um concreto produzido com um controle de qualidade rigoroso, $V_{fc} = 0,15$ corresponde ao concreto com um controle de qualidade médio, e $V_{fc} = 0,20$ corresponde ao um concreto com um controle de qualidade fraco (MIRZA et al., 1979c).

No Capítulo 6, foi apresentado um modelo de geração de campo estocástico para representar a variação da resistência à compressão ao longo da extensão da estrutura baseado na técnica da representação espectral (SHINOZUKA e DEODATIS, 1996).

A base para a geração de um campo estocástico gaussiano, bidimensional e homogêneo $f_o(x,y)$, é uma série de cossenos, cujos coeficientes dependem da função de densidade espectral adotada $S_{fofo}(\kappa_1, \kappa_2)$.

A função densidade espectral de potência $S_{fofo}(\kappa_1, \kappa_2)$, utilizada para definir os coeficientes da série é dada pela expressão

$$S_{f_o f_o}(\kappa_1, \kappa_2) = \sigma^2 \frac{b_1 b_2}{4\pi} \exp \left[- \left(\frac{b_1 \kappa_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{b_2 \kappa_2}{2} \right)^2 \right], \quad (7.3)$$

onde σ é o desvio padrão do campo estocástico $f_o(x,y)$; e b_1 e b_2 são parâmetros proporcionais à distância de correlação do campo estocástico ao longo das direções x e y , respectivamente.

Conforme já foi explicado no Capítulo 6, o desvio padrão σ do campo estocástico $f_o(x,y)$ corresponde ao coeficiente de variação da propriedade, V_{f_c} , no caso. Assim, restam ser definidos os parâmetros b_1 e b_2 , para que o campo estocástico de f_c possa ser gerado.

Este é um problema difícil de ser solucionado, pois a determinação correta da distância de correlação, para o campo estocástico da resistência à compressão, exige o conhecimento do valor de f_c em diversos pontos $P(x,y)$, ao longo tanto do comprimento como da altura da estrutura. Isto requer uma pesquisa experimental de vulto, a ser feita em laboratório ou em estruturas prontas, seja através de métodos não-destrutivos, como a esclerometria e o ultrassom, ou através da extração de testemunhos de pequeno diâmetro, para serem ensaiados à compressão.

Além disso, a resistência à compressão do concreto num elemento estrutural varia de maneira aleatória, de forma sistemática e em uma combinação de ambas (GUTSCHOW, 1995).

A variação aleatória da resistência se deve ao processo de produção do concreto, e ocorre em qualquer situação, diminuindo com o aumento do rigor do controle de qualidade do processo produtivo.

A variação sistemática da resistência à compressão do concreto é determinada pelo tipo de elemento estrutural considerado. Os principais elementos estruturais, lajes, vigas e pilares, possuem formas geométricas bem diferentes. Isto faz com que as condições de lançamento, compactação e cura alterem-se significativamente de peça para peça, levando a uma variação sistemática na resistência do concreto. A FIGURA 7.3, extraída por GUTSCHOW (1995) do trabalho de BUNGEY (1989), mostra as curvas de variação da resistência do concreto ao longo da altura de diversos elementos estruturais, determinadas por este último autor, através da análise de uma série de ensaios não-destrutivos.

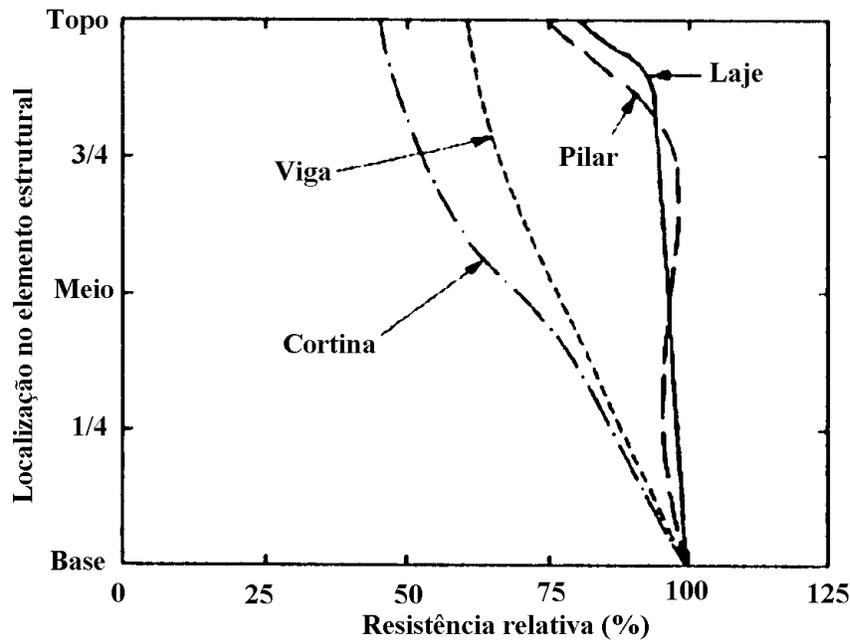


FIGURA 7.3 – Variação da resistência do concreto ao longo da altura de diversos elementos estruturais (BUNGEY, 1989, citado por GUTSCHOW, 1995, p. 16)

Nos trabalhos de GUTSCHOW (1995) e de BUNGEY(1989), são citados diversos estudos sobre a variação da resistência do concreto ao longo dos elementos estruturais. Estes estudos permitem formar uma idéia qualitativa, de como a resistência varia dentro da estrutura. Contudo, normalmente os resultados obtidos são muito pouco numerosos, para que se possa fazer uma determinação numérica da distância de correlação da resistência do concreto em lajes, vigas e pilares.

Assim sendo, os estudos paramétricos foram realizados, em primeiro lugar, para valores de b_1 e b_2 iguais à altura h da seção transversal. Estes valores permitem que a resistência do concreto varie tanto ao longo da altura, como ao longo do comprimento da peça estrutural.

Após, foram realizados testes com valores de b_1 e b_2 iguais a quatro vezes o valor da altura h da seção transversal. Estes valores produzem uma resistência à compressão praticamente constante ao longo da altura da seção, enquanto que uma variação ao longo do comprimento da estrutura ainda é permitida.

Finalmente estes resultados foram comparados com um modelo de correlação perfeita, ou seja, uma distância de correlação infinita, que produz valores constantes para f_c ao longo de toda a peça estrutural.

As FIGURAS de 7.4 a 7.6 ilustram o efeito que o aumento da distância de correlação exerce sobre a variabilidade do campo estocástico da resistência à compressão do concreto. Este concreto possui uma resistência média $f_{cm} = 2,66 \text{ kN/cm}^2$ e um coeficiente de variação $V_{f_c} = 0,15$. O campo foi gerado sobre uma região retangular, com 500 cm de comprimento e 50 cm de altura.

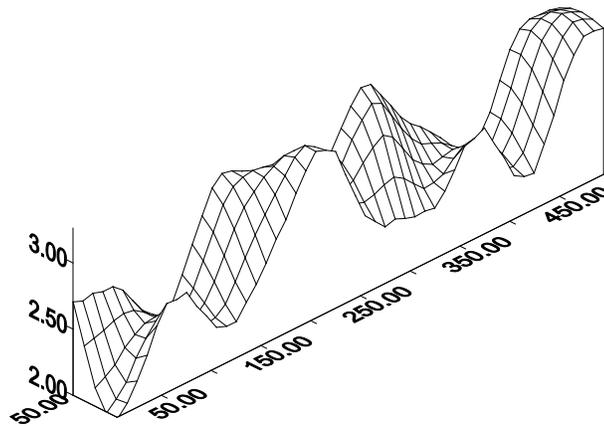


FIGURA 7.4 – Campo estocástico de f_c , com $b_1 = b_2 = 50 \text{ cm}$

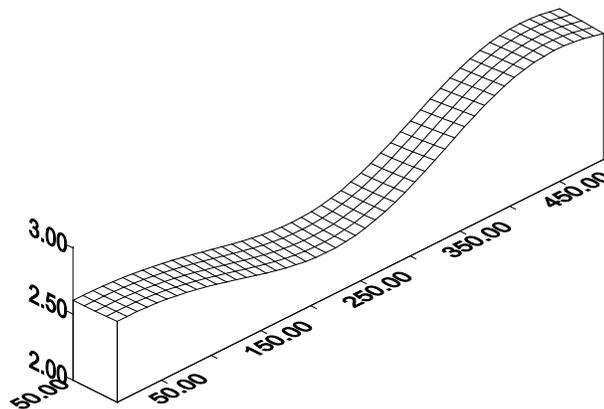


FIGURA 7.5 – Campo estocástico de f_c , com $b_1 = b_2 = 200 \text{ cm}$

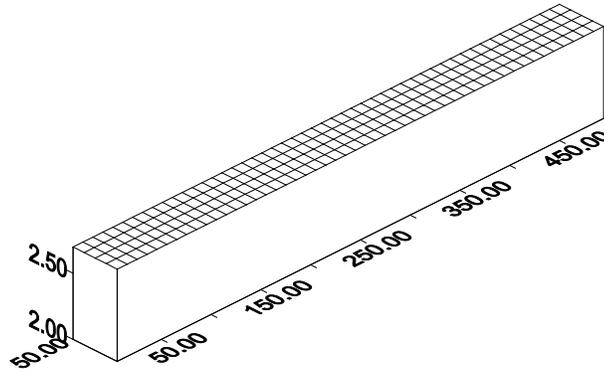


FIGURA 7.6 – Campo estocástico de f_c , com $b_1 = b_2 = 10.000$ cm

7.2.2 - Propriedades da armadura

A resistência ao escoamento do aço f_y , embora não afete o desempenho da estrutura sob cargas de serviço, é um fator determinante da carga de ruptura de estruturas de concreto armado, principalmente no caso de vigas subarmadas.

Então, a análise da dispersão desta variável, através do estudo do seu coeficiente de variação V_{fy} , é importante para a determinação do grau de dispersão da carga de ruptura de estruturas, que rompem por escoamento da armadura.

O aço, sendo um material produzido em indústria siderúrgica, sob um controle de qualidade rigoroso, normalmente apresenta coeficientes de variação bastante inferiores aos do concreto. Embora o coeficiente de variação da tensão de escoamento costume variar de bitola para bitola, sendo geralmente menor para as barras de maior diâmetro, podem ser adotados os valores básicos de $V_{fy} = 0,05$, para aços com um bom controle de qualidade, e $V_{fy} = 0,10$, para aços com controle de qualidade ruim. Estes valores estão de acordo com estudos sobre os aços produzidos no Brasil feitos por FUSCO (1977).

Admitindo-se uma distribuição normal de probabilidade para a resistência ao escoamento do aço, uma análise semelhante à que foi feita para o concreto pode ser feita para a armadura. Assim, para um valor fixado da resistência característica ao escoamento f_{yk} , um tipo de aço que apresente uma maior dispersão na fabricação (maior V_{fy}), deverá alcançar uma maior resistência média ao escoamento f_{ym} , para garantir o limite mínimo de escoamento, conforme se pode deduzir da equação (7.4), dada por:

$$f_{yk} = f_{ym} (1 - 1,645 V_{fy}), \quad (7.4)$$

sendo V_{fy} calculado por:

$$V_{fy} = \frac{\sigma_{fy}}{f_{ym}}, \quad (7.5)$$

onde σ_{fy} é o desvio padrão da resistência ao escoamento do aço.

Nos testes paramétricos serão adotados valores de $V_{fy} = 0,05$, e de $V_{fy} = 0,10$, tanto para o aço CA-50, como para o aço CA-60. A tensão característica de escoamento para o aço CA-50 é especificada como sendo $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$, enquanto que para o aço CA-60 tem-se o valor de $f_{yk} = 60 \text{ kN/cm}^2$.

Conforme dados apresentados por MIRZA e MacGREGOR (1979b), a variabilidade do módulo de deformação longitudinal do aço, E_s , é pequena. Seu coeficiente de variação, V_{Es} , é da ordem de 2% a 3%. Nos testes paramétricos será empregado um valor médio para E_s dado por $E_{sm} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$, e um valor fixo para o coeficiente de variação $V_{Es} = 2,5\%$.

O valor de E_s afeta o valor da rigidez da estrutura, sob cargas de serviço, e influi na definição da deformação que determina o início do escoamento do aço, ε_y , dada por

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s}. \quad (7.6)$$

7.2.3 - Propriedades geométricas

As variações das propriedades geométricas das estruturas de concreto decorrem das diferenças existentes entre os valores especificados nos projetos (valores nominais), para as dimensões da seção transversal e a posição das barras da armadura, e aqueles realmente encontrados na obra finalizada.

As variações nas dimensões da estrutura dependem do tamanho, da forma e da qualidade das fôrmas utilizadas, e, em parte, das operações de lançamento e vibração do concreto dentro

das fôrmas. Portanto, dependem da qualidade do controle de execução adotado, e, por este motivo, costumam variar de país para país.

Diversos autores têm se dedicado a quantificar a variabilidade das propriedades geométricas em estruturas de concreto armado. A fim de se uma idéia da ordem de grandeza dos valores encontrados, relacionam-se abaixo os resultados de pesquisas realizadas por MIRZA e MacGREGOR (1982), sobre estruturas construídas no Estados Unidos e Canadá, e os de UDOEYO e UGBEM (1995) sobre construções da Nigéria. Infelizmente, uma análise detalhada sobre as variações geométricas encontradas nas estruturas construídas no Brasil não pode ser localizada, na revisão bibliográfica feita pelo autor.

Assim, as TABELAS 7.1 e 7.2 apresentam os resultados obtidos por MIRZA e MacGREGOR (1982), para as variações geométricas em vigas e pilares. Estes autores recomendam a adoção de uma distribuição normal de probabilidade, para as variações das dimensões.

TABELA 7.1 – Variações das dimensões de vigas: MIRZA e MacGREGOR (1982)

Variação das dimensões das vigas em relação aos valores nominais de projeto.	Construção de qualidade média (peças moldadas in-loco)		Construção de excelente qualidade (peças pré-moldadas)	
	Média (cm)	Desvio padrão (cm)	Média (cm)	Desvio padrão (cm)
Largura da alma (bw)	+0,23	0,48	0,00	0,48
Altura total (h)	-0,30	0,64	+0,30	0,41
Altura útil (d)	-0,48	1,27	+0,30	0,86
Espaçamento dos estribos (s)	0,00	1,35	0,00	0,69
Espaçamento entre vigas e vão	0,00	1,75	0,00	0,86

TABELA 7.2 – Variações das dimensões em pilares: MIRZA e MacGREGOR (1982)

Variação das dimensões dos pilares em relação aos valores nominais de projeto.			
Construção de qualidade média (peças moldadas in-loco).		Média (cm)	Desvio Padrão (cm)
Altura total e largura		+0,15	0,64
Cobrimento para um pilar de 46 x 46 cm.	Barras exteriores	+0,81	0,43
	Barras interiores	+0,10	2,01

A TABELA 7.3 contém os resultados obtidos na Nigéria por UDOEYO e UGBEM (1995), para as variações dimensionais de vigas e pilares. Estes autores também recomendam a utilização da distribuição normal de probabilidade, para as variações de dimensão das estruturas de concreto armado.

TABELA 7.3 – Variações das dimensões de vigas e pilares: UDOEYO e UGBEM (1995)

Descrição da dimensão do elemento	Intervalo de variação nominal (cm)	Variação média em relação ao valor nominal (cm)	Desvio Padrão (cm)
Altura da seção do pilar (h)	30-83	+0,039	0,369
Largura da seção do pilar (b)	20-34	+0,079	0,549
Altura da seção da viga (h)	34-115	+0,235	0,618
Largura da seção da viga (bw)	23-40	+0,222	0,607
Altura útil da viga (d)	41	-0,068	0,872

Na falta de dados de campo sobre as construções brasileiras, nos testes paramétricos será adotado o critério utilizado por ÖSTLUND (1991), para determinar o efeito das variações geométricas na segurança das estruturas.

Considera-se que o valor médio da propriedade geométrica coincida com o seu valor nominal de projeto. Admite-se ainda que uma dimensão tenha um valor nominal, mais uma tolerância de construção, dada por: $X_n \pm t$, onde t é a tolerância de construção. Supõe-se ainda, que o desvio padrão de X , que depende do nível do controle de qualidade da construção, seja da ordem de $\frac{t}{2}$.

Para um nível de controle bom, uma tolerância limite de até 1,00 cm é razoável. Isto resulta em um desvio padrão para a variação geométrica em torno de 0,50 cm. Este valor está de acordo com a ordem de grandeza dos valores do desvio padrão apresentados nas tabelas acima. Este critério também foi empregado nos trabalhos de VISMAN e ZILCH (1995) e de GOMES, AWRUCH e ROCHA (1996).

Para um controle de qualidade fraco, tem-se uma tolerância limite da ordem de 2,00 cm. Então, o desvio padrão da variação dimensional seria da ordem de 1,00 cm. Este valor é bastante superior aos encontrados nas tabelas acima, indicando um controle de qualidade inferior.

A posição das barras da armadura, que são referenciadas de forma fixa em relação aos bordos extremos da seção transversal, sofre uma variação semelhante àquela atribuída à altura h da seção transversal.

7.3 – ESTUDO DE VIGAS

Para determinar o efeito da variabilidade das propriedades geométricas e dos materiais em vigas, foram estudadas três peças. Estas vigas foram projetadas de acordo com as prescrições da NBR-6118/1980, possuem seção transversal retangular 20 cm x 50 cm, com 5,00 m de vão, e encontram-se submetidas a uma carga uniformemente distribuída, conforme é ilustrado pela FIGURA 7.7.

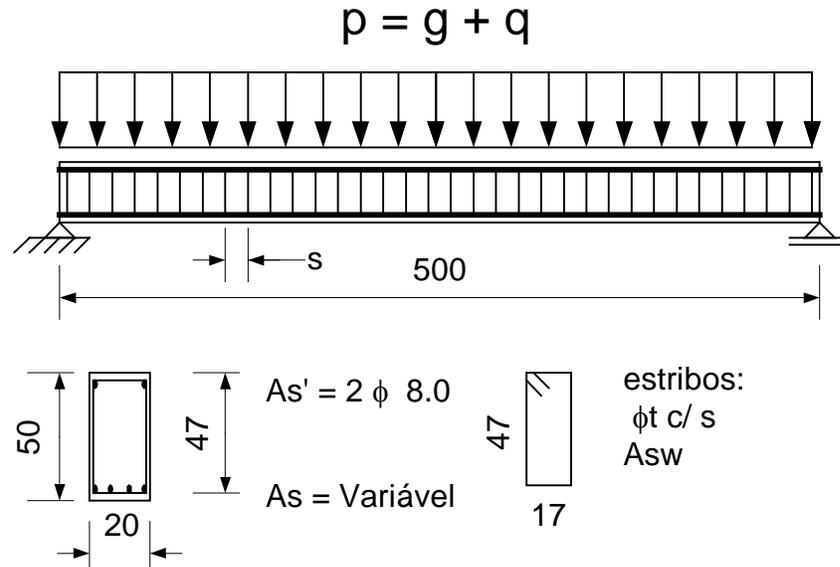


FIGURA 7.7 – Geometria e carregamento das vigas VA, VB e VC, para testes paramétricos

A primeira viga, designada por VA, foi dimensionada para uma carga $p_k = 10 \text{ kN/m}$, a segunda viga, VB, foi calculada para uma carga $p_k = 20 \text{ kN/m}$, e a terceira viga, VC, foi projetada para uma carga de serviço $p_k = 40 \text{ kN/m}$.

A TABELA 7.4 contém as propriedades mecânicas dos materiais, aço e concreto, utilizadas nas análises das vigas VA, VB e VC. As equações que constam desta tabela foram extraídas do Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), e transformadas para a unidade de kN/cm^2 .

A TABELA 7.5 contém os resultados do dimensionamento das três vigas para a flexão. Nesta TABELA, a taxa geométrica de armadura longitudinal é dada por:

$$\rho = \frac{As}{bd}. \quad (7.7)$$

Como todos os três dimensionamentos resultaram em armadura simples, adotou-se uma armadura superior, de montagem, $As' = 1,00 \text{ cm}^2$, formada por 2 barras de 8 mm de diâmetro, em todos os casos.

TABELA 7.4 – Propriedades mecânicas dos materiais para as vigas

CONCRETO	ARMADURA
$f_{ck} = 2,00 \text{ kN/cm}^2$	Longitudinal: CA-50 $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$
$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{(1 - 1,645 V_{fc})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Estribos: CA-60 $f_{yk} = 60 \text{ kN/cm}^2$
$f_{ctm} = 0,14 (f_{ck})^{\frac{2}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	$f_{ym} = \frac{f_{yk}}{(1 - 1,645 V_{fy})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$
$E_{cm} = 2.150 (f_{cm})^{\frac{1}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{sm} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$

TABELA 7.5 – Dimensionamento à flexão das vigas VA, VB e VC

Viga	p_k (kN/m)	p_d (kN/m)	A_s (cm ²)	ρ (%)
VA	10,00	14,00	2,24	0,24
VB	20,00	28,00	4,70	0,50
VC	40,00	56,00	10,78	1,15

Estas vigas foram dimensionadas ao esforço cortante de forma a atingir a ruptura para uma carga igual à sua resistência à flexão. A TABELA 7.6 contém a tensão convencional de cisalhamento $\tau_{wd} = V_d / bd$, e a quantidade de armadura transversal (estribos) para as vigas VA, VB e VC, que satisfazem o critério de dimensionamento anterior. Nesta TABELA, a taxa de armadura transversal ρ_w é dada por:

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b \cdot 100 \sin \alpha}, \quad (7.8)$$

sendo A_{sw} a quantidade de armadura transversal em cm^2/m , b a largura da viga em cm e α o ângulo que os estribos formam com o eixo longitudinal da viga, no caso fixado igual a 90° .

TABELA 7.6 – Armadura transversal (estribos) para as vigas VA, VB e VC

Viga	ρ (%)	p_k (kN/m)	V_d (kN)	τ_{wd} (kN/cm ²)	ρ_w (%)	A_{sw} (cm ² /m)
VA	0,24	10,00	35,00	0,04	0,14	2,80
VB	0,50	20,00	70,00	0,07	0,14	2,80
VC	1,15	40,00	140,00	0,15	0,24	4,79

Para se ter uma idéia do comportamento mecânico destas vigas, foram realizadas análises até ser atingida a carga de ruptura, obtendo-se a resposta carga-deslocamento completa. Estes resultados foram obtidos com uma análise não-linear através do método dos elementos finitos. Foram empregadas as propriedades mecânicas médias dos materiais, que constam da TABELA 7.7, e os valores nominais das dimensões da seção transversal.

TABELA 7.7 – Propriedades mecânicas médias dos materiais para as vigas VA, VB e VC

CONCRETO	ARMADURA
Resistência à compressão: $f_{cm} = 2,66 \text{ kN/cm}^2$ ($V_{fc} = 0,15$)	Longitudinal: CA-50 $f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$ ($V_{fy} = 0,05$)
Resistência à tração: $f_{ctm} = 0,22 \text{ kN/cm}^2$	Estribos: CA-60 $f_{ym} = 65,38 \text{ kN/cm}^2$ ($V_{fy} = 0,05$)
Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{cm} = 2.979 \text{ kN/cm}^2$	Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{sm} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$

Nestas análises foi empregada uma malha de $5 \times 2 = 10$ elementos isoparamétricos de oitos nós, para discretizar metade da viga, aproveitando-se as condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento, quando possível. Esta malha encontra-se ilustrada na FIGURA 7.8.

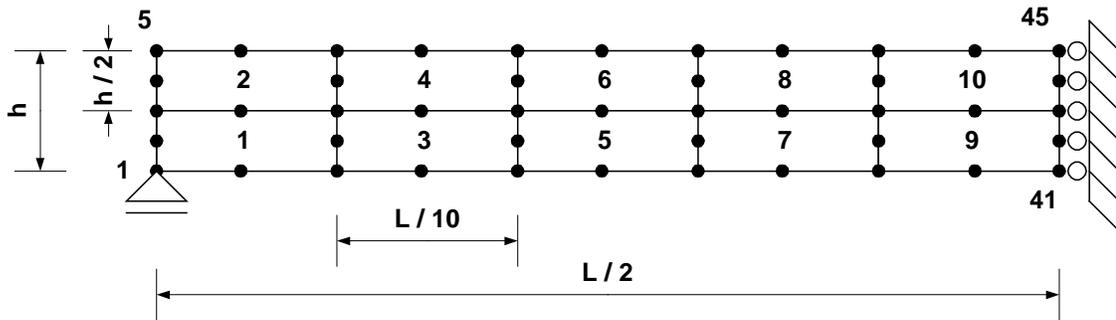


FIGURA 7.8 - Malha de elementos finitos para metade da viga: simetria geral

Contudo, quando se considera a variabilidade das propriedades do concreto ao longo da extensão da viga, não há mais simetria quanto às propriedades mecânicas dos materiais. Assim, nos casos em que se utiliza o modelo de campo estocástico para representar as propriedades do concreto, é necessário discretizar toda a viga, em uma malha de $10 \times 2 = 20$ elementos. A malha empregada com o modelo de campo estocástico é apresentada na FIGURA 7.9.

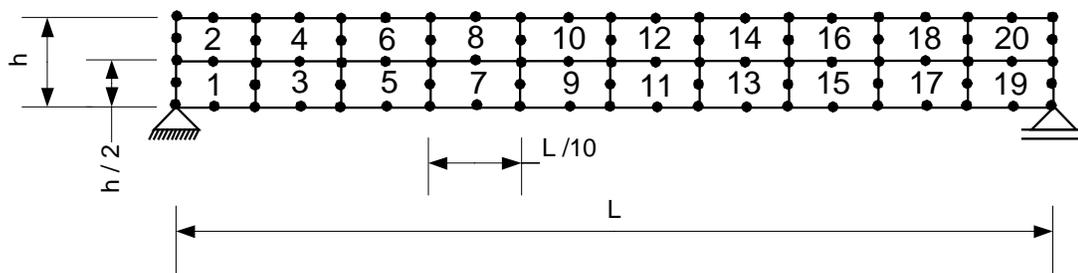


FIGURA 7.9 – Malha de elementos finitos para toda a viga: sem simetria

As curvas carga-deslocamento obtidas para as vigas VA, VB e VC encontram expostas nas FIGURAS 7.10, 7.11 e 7.12.

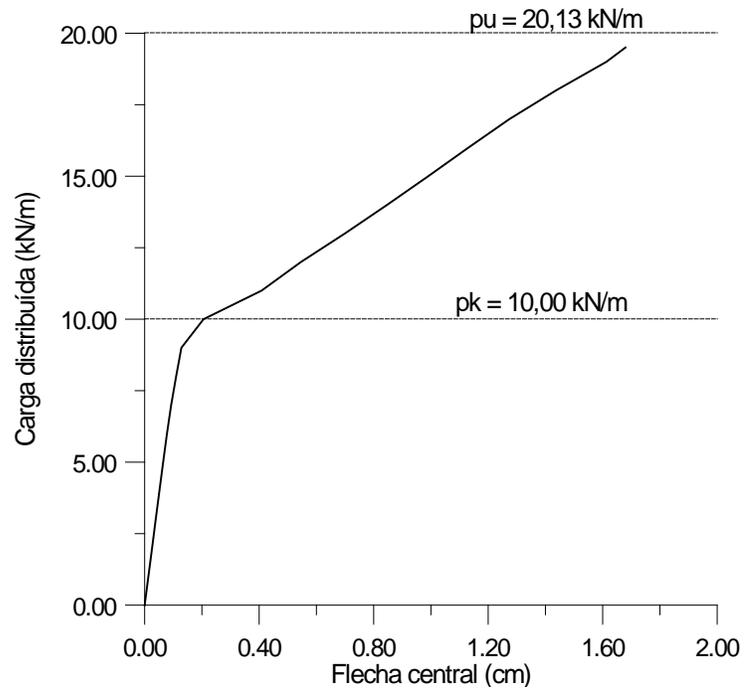


FIGURA 7.10 – Curva carga-deslocamento para a viga VA.

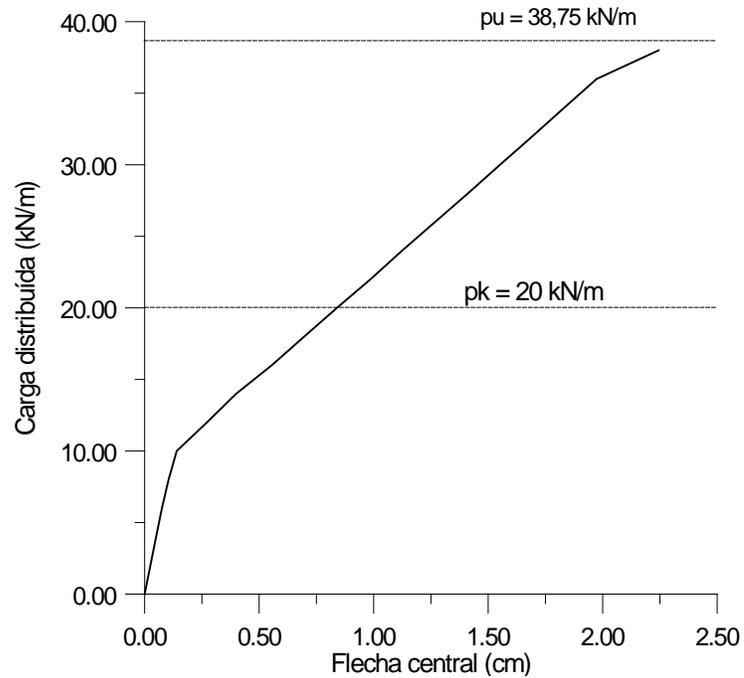


FIGURA 7.11 – Curva carga-deslocamento para a viga VB.

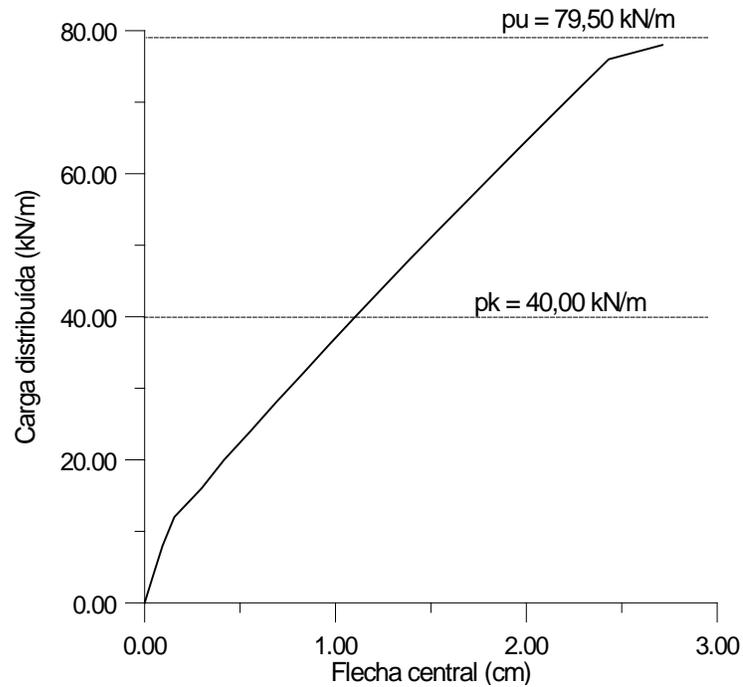


FIGURA 7.12 – Curva carga-deslocamento para a viga VC.

A fim de detectar a influência na resposta da viga da variabilidade de cada propriedade, foram realizadas 250 simulações de Monte Carlo. Este número de simulações mostrou-se suficiente para atingir a convergência estatística dos resultados, tanto para a flecha sob carga de serviço, como para a carga de ruptura. Em cada simulação a variável em estudo foi gerada aleatoriamente, e a viga levada até a ruptura sob carregamento sempre crescente.

As variáveis aleatórias cujas influências nos resultados foram analisadas, seus principais parâmetros e distribuições de probabilidade adotadas encontram-se resumidos na TABELA 7.8.

TABELA 7.8 – Parâmetros e distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias analisadas, para as vigas VA, VB e VC

Variável aleatória	Unidade	Distribuição de Probabilidade	Média μ	Desvio Padrão σ	Coef. de Variação V	Valor característico X_k
f_c	kN/cm ²	Normal	f_{cm}	-	0,10	f_{ck}
					0,15	
					0,20	
f_y	kN/cm ²	Normal	f_{ym}	-	0,05	f_{yk}
					0,10	
E_s	kN/cm ²	Normal	E_{sm}	-	0,025	-
b	cm	Normal	$b \text{ nominal}$	0,50	-	$b \text{ nominal}$
				1,00		
h	cm	Normal	$h \text{ nominal}$	0,50	-	$h \text{ nominal}$
				1,00		

Os gráficos das FIGURAS 7.13 e 7.14 mostram a convergência estatística do valor esperado e do desvio padrão da flecha sob carga de serviço, respectivamente, para a viga VB. Este gráfico foi obtido considerando um concreto com coeficiente de variação $V_{fc} = 0,15$, supondo-se que a resistência à compressão assuma um valor constante ao longo de toda a estrutura. As demais propriedades foram consideradas com seu valor médio.

Os gráficos das FIGURAS 7.15 e 7.16 apresentam a convergência estatística do valor esperado e do desvio padrão da carga de ruptura, respectivamente, para a viga VB. Na obtenção destes gráficos foi admitido um coeficiente de variação para a tensão de escoamento da armadura $V_{fy} = 0,05$. As demais propriedades foram consideradas com seu valor médio.

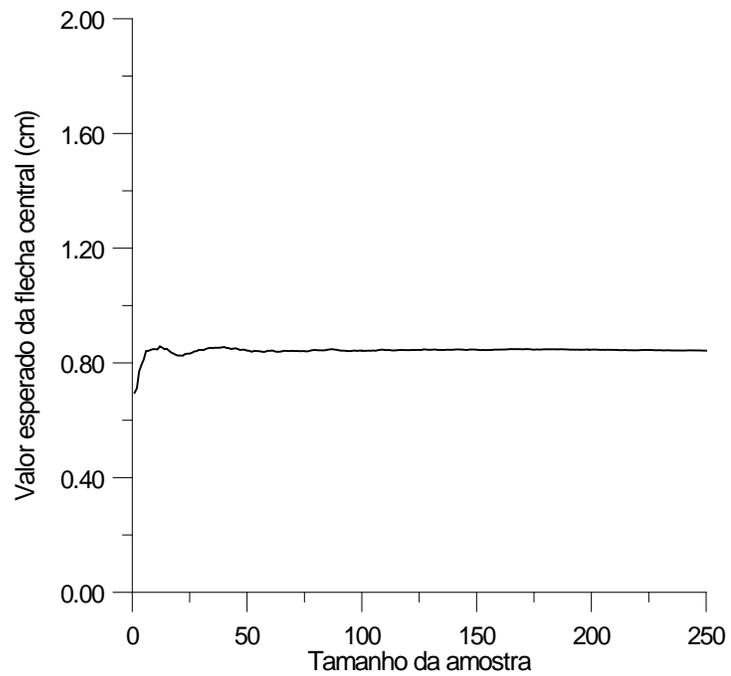


FIGURA 7.13 – Convergência estatística do valor esperado da flecha central da viga VB

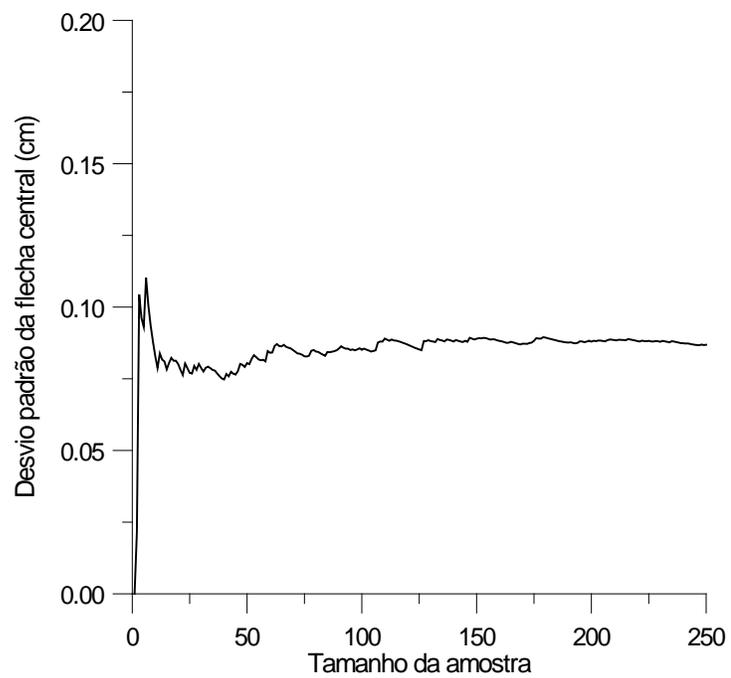


FIGURA 7.14 – Convergência estatística do desvio padrão da flecha central da viga VB

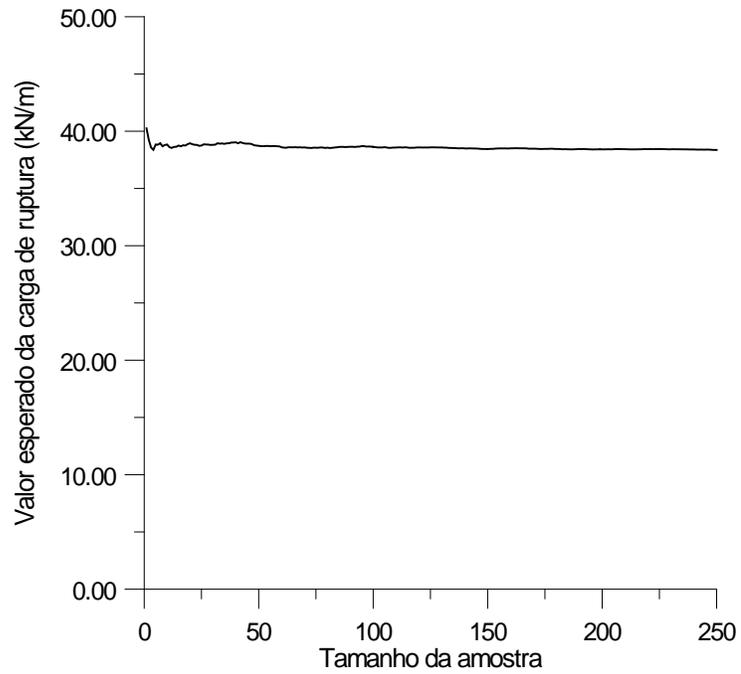


FIGURA 7.15 – Convergência estatística do valor esperado da carga de ruptura da viga VB

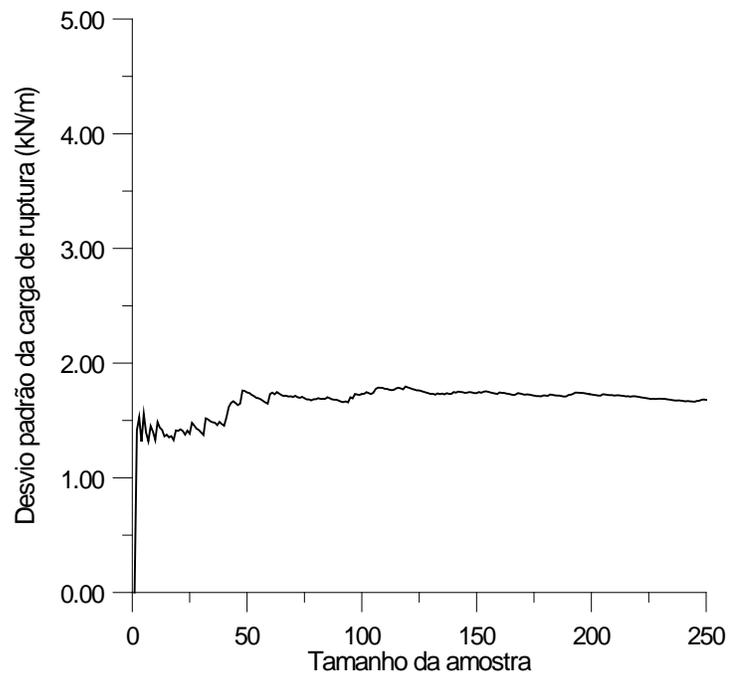


FIGURA 7.16 – Convergência estatística do desvio padrão da carga de ruptura da viga VB

A TABELA 7.9 reúne os resultados obtidos para a viga VA, tanto em termos de flecha sob carga de serviço, como para carga de ruptura, incluindo a influência da variabilidade das propriedades do concreto, das propriedades da armadura e das dimensões da seção transversal. Nesta TABELA, os símbolos μ_a e V_a representam respectivamente o valor esperado e o coeficiente de variação da flecha sob carga de serviço a . De modo análogo, os símbolos μ_R e V_R designam o valor esperado e o coeficiente de variação da carga de ruptura da viga R , correspondentemente.

O item 1 desta TABELA, Propriedades do concreto, mostra como a variação do coeficiente de variação da resistência do concreto (V_{fc}) afeta as estatísticas da flecha sob carga de serviço e da carga de ruptura. O valor de f_{ck} foi mantido fixo e foram considerados valores de V_{fc} iguais a 0,10, 0,15 e 0,20.

O item 2 desta TABELA, Campo estocástico, mostra a influência dos parâmetros b_1 e b_2 , que são proporcionais à distância de correlação do campo estocástico, na distribuição da flecha sob carga de serviço e da carga de ruptura da viga. O valor de f_{ck} foi mantido fixo e foi adotado um coeficiente de variação V_{fc} igual a 0,15. Foram considerados valores para os parâmetros b_1 e b_2 iguais a 50 cm, 200 cm e um valor infinito.

O item 3 desta TABELA, Propriedades da armadura, mostra como o coeficiente de variação da resistência ao escoamento da armadura (V_{fy}) afeta as estatísticas da flecha sob carga de serviço e da carga de ruptura. O valor de f_{yk} foi mantido fixo, tanto para o aço CA-50, como para o aço CA-60. Foram considerados valores de V_{fy} iguais a 0,05 e 0,10. O coeficiente de variação do módulo de deformação longitudinal do aço (E_s) foi mantido constante e igual a 0,025.

O item 4 desta TABELA, Propriedades geométricas da seção transversal, mostra como as variações da largura (b) e da altura (h) afetam as estatísticas da flecha sob carga de serviço e da carga de ruptura. Foi admitido que os valores médios das dimensões coincidem com os seus valores nominais de projeto. Foram considerados valores de desvio padrão para estas dimensões iguais a 0,50 cm e 1,00 cm.

As TABELAS 7.10 e 7.11 contêm os resultados dos testes paramétricos para as vigas VB e VC, de forma respectiva. Estas TABELAS foram montadas da mesma forma que a TABELA 7.9, conforme descrito acima.

TABELA 7.9 – Resultados dos testes paramétricos para a viga VA

Viga: VA		Taxa de armadura: $\rho = 0,24\%$	
1. Propriedades do concreto			
V_{fc}	0,10	0,15	0,20
μ_a (cm)	0,27	0,28	0,28
V_a	0,48	0,59	0,68
μ_R (kN/m)	19,55	19,42	19,29
V_R	0,02	0,02	0,02
2. Campo estocástico			
$b_1 = b_2$ (cm)	50	200	∞
μ_a (cm)	0,26	0,25	0,28
V_a	0,30	0,52	0,59
μ_R (kN/m)	19,35	19,23	19,42
V_R	0,02	0,02	0,02
3. Propriedades da armadura			
V_{fy}	0,05	0,10	$V_{Es} = 0,025$ Este valor permanece constante, enquanto V_{fy} varia entre 0,05 e 0,10.
μ_a (cm)	0,19	0,19	
V_a	0,09	0,10	
μ_R (kN/m)	19,52	21,13	
V_R	0,04	0,08	
4. Propriedades geométricas da seção transversal			
σ_b (cm)	0,50	1,00	Os valores médios das dimensões b e h coincidem com os valores nominais de projeto.
μ_a (cm)	0,20	0,22	
V_a	0,30	0,43	
μ_R (kN/m)	19,32	19,30	
V_R	0,02	0,03	

TABELA 7.10 – Resultados dos testes paramétricos para a viga VB

Viga: VB		Taxa de armadura: $\rho = 0,50\%$	
1. Propriedades do concreto			
V_{fc}	0,10	0,15	0,20
μ_a (cm)	0,86	0,84	0,81
V_a	0,07	0,10	0,16
μ_R (kN/m)	38,33	38,54	38,800
V_R	0,01	0,01	0,02
2. Campo estocástico			
$b_1 = b_2$ (cm)	50	200	∞
μ_a (cm)	0,84	0,85	0,84
V_a	0,04	0,09	0,10
μ_R (kN/m)	38,32	38,44	38,54
V_R	0,01	0,01	0,01
3. Propriedades da armadura			
V_{fy}	0,05	0,10	$V_{Es} = 0,025$ Este valor permanece constante, enquanto V_{fy} varia entre 0,05 e 0,10.
μ_a (cm)	0,84	0,84	
V_a	0,02	0,02	
μ_R (kN/m)	38,37	41,90	
V_R	0,04	0,09	
4. Propriedades geométricas da seção transversal			
σ_b (cm)	0,50	1,00	Os valores médios das dimensões b e h coincidem com os valores nominais de projeto.
μ_a (cm)	0,84	0,84	
V_a	0,04	0,09	
μ_R (kN/m)	38,45	38,51	
V_R	0,01	0,02	

TABELA 7.11 – Resultados dos testes paramétricos para a viga VC

Viga: VC		Taxa de armadura = 1,15%	
1. Propriedades do concreto			
V_{fc}	0,10	0,15	0,20
μ_a (cm)	1,14	1,11	1,10
V_a	0,04	0,07	0,09
μ_R (kN/m)	78,12	79,53	80,88
V_R	0,01	0,02	0,03
2. Campo estocástico			
$b_1 = b_2$ (cm)	50	200	∞
μ_a (cm)	1,11	1,11	1,11
V_a	0,02	0,05	0,07
μ_R (kN/m)	78,88	79,29	79,53
V_R	0,02	0,02	0,02
3. Propriedades da armadura			
V_{fy}	0,05	0,10	$V_{Es} = 0,025$ Este valor permanece constante, enquanto V_{fy} varia entre 0,05 e 0,10.
μ_a (cm)	1,11	1,10	
V_a	0,02	0,02	
μ_R (kN/m)	79,16	85,97	
V_R	0,04	0,08	
4. Propriedades geométricas da seção transversal			
σ_b (cm)	0,50	1,00	Os valores médios das dimensões b e h coincidem com os valores nominais de projeto.
μ_a (cm)	1,10	1,10	
V_a	0,03	0,06	
μ_R (kN/m)	79,63	79,71	
V_R	0,01	0,03	

7.4 – ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA AS VIGAS

7.4.1 – Flecha sob carga de serviço das vigas

A variabilidade das propriedades do concreto, dentre todos os parâmetros considerados, é o que mais afeta a distribuição da flecha sob carga de serviço.

Para um mesmo valor de f_{ck} , aumentando-se o coeficiente de variação V_{fc} , o que resulta em um valor maior para f_{cm} , o valor esperado da flecha, μ_a ou $E[a]$, para a viga VA manteve-se estável, enquanto que para as vigas VB e VC este valor diminuiu ligeiramente. A evolução da relação $E[a] / a_o$ com o aumento da carga, onde a_o é flecha correspondente à análise com as propriedades médias do concreto, é apresentada nas FIGURAS 7.23, 7.24 e 7.25, para as vigas VA, VB e VC, respectivamente.

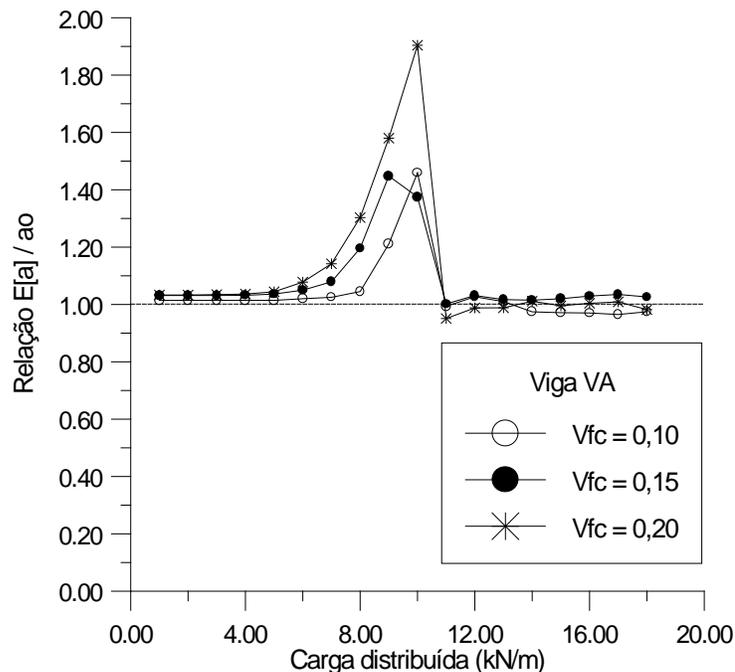


FIGURA 7.23 – Relação $E[a] / a_o$ x carga, para a viga VA

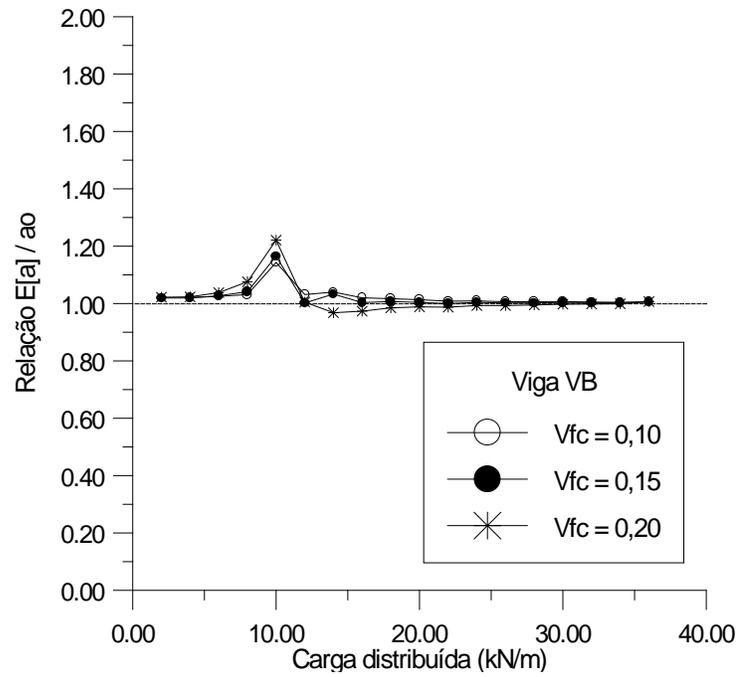


FIGURA 7.24 - Relação $E[a] / a_0$ x carga, para a viga VB

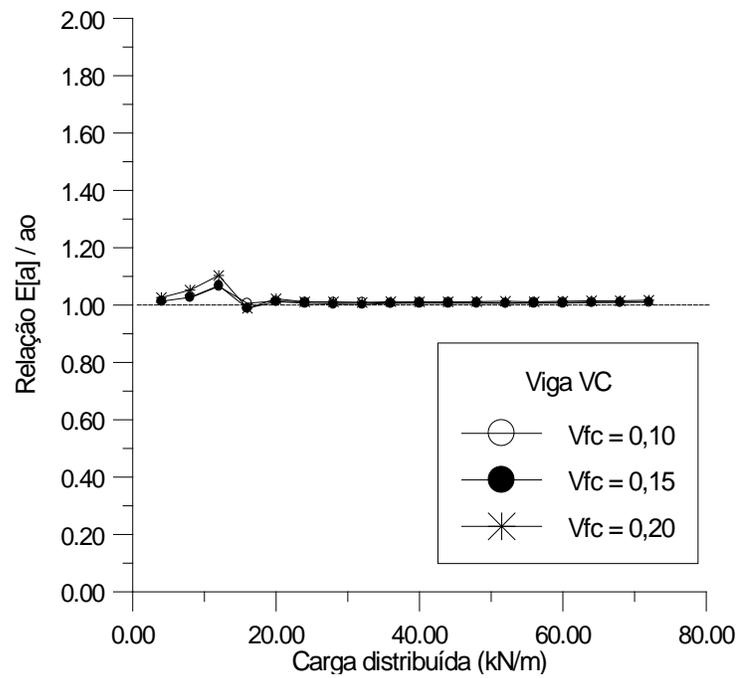


FIGURA 7.25 - Relação $E[a] / a_0$ x carga, para a viga VC

Observa-se que, à exceção do entorno da carga de fissuração, a relação $E[a] / a_o$ mantém-se próxima da unidade. Os afastamentos de $E[a] / a_o$ em relação à unidade diminuem com o aumento da taxa de armadura longitudinal, sendo maiores para a viga VA, que possui uma baixa taxa de armadura.

Conclui-se, então, que a resposta da estrutura obtida com as propriedades médias dos materiais e os valores nominais das dimensões da seção transversal é uma boa estimativa, para o valor esperado da resposta da estrutura. Porém, deve-se atentar para o fato de que, nas vizinhanças da carga de fissuração, a relação $E[a] / a_o$ tende a ser maior que a unidade.

Para as três vigas, o valor do coeficiente de variação da flecha central V_a aumenta com o crescimento de V_{fc} . Contudo, observa-se que os valores de V_a são muito maiores para a viga VA do que para as vigas VB e VC. Este fenômeno pode ser explicado pelo fato de que, para a viga VA, a carga de serviço encontra-se muito próxima da carga de fissuração da viga, conforme se pode observar na FIGURA 7.10. Assim, em uma dada simulação a flecha sob carga de serviço será obtida com a viga trabalhando no Estádio I, seção não-fissurada, enquanto que para outra, dependendo das propriedades geradas aleatoriamente, a flecha será determinada no Estádio II, com a viga fissurada em diversos pontos. Esta oscilação entre o Estádio I e o Estádio II, gera uma maior dispersão nos resultados.

Observando as FIGURAS 7.11 e 7.12, nota-se que a carga de serviço das vigas VB e VC é bastante superior à sua carga de fissuração, sendo, então, a flecha sob carga de serviço determinada sempre no Estádio II, com a fissuração já estabilizada, e por isso apresentando um menor coeficiente de variação para a .

Além disso, é interessante notar que o coeficiente de variação para a flecha não permanece constante durante a evolução do carregamento da viga. O seu valor é menor nos estágios iniciais de carregamento, quando a viga funciona praticamente no Estádio I, cresce bastante nas imediações da carga de fissuração, e diminui na medida em que a fissuração avança e a viga aproxima-se do escoamento da armadura. Este fenômeno pode ser observado para as vigas VA, VB e VC, através das FIGURAS 7.26, 7.27 e 7.28, respectivamente.

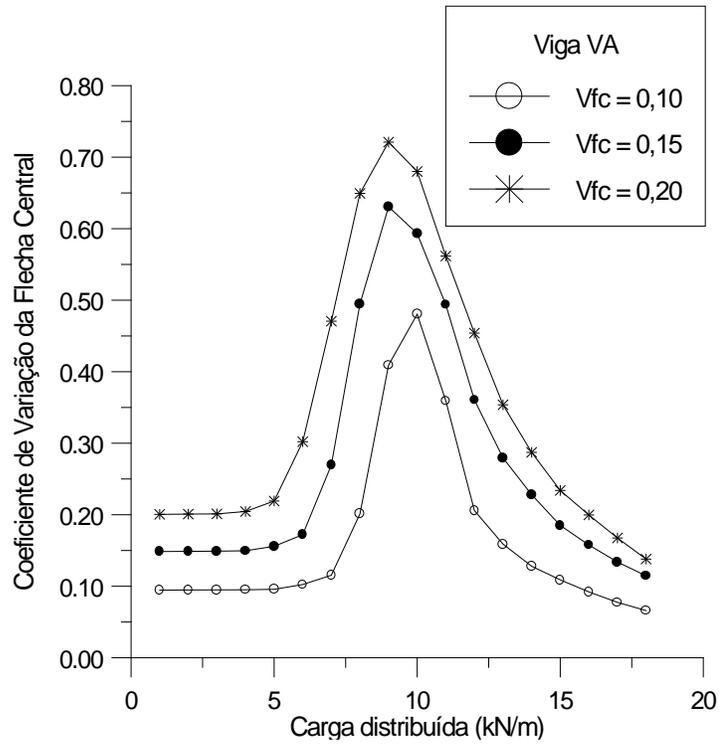


FIGURA 7.26 – Evolução de V_a com o aumento da carga, para a viga VA

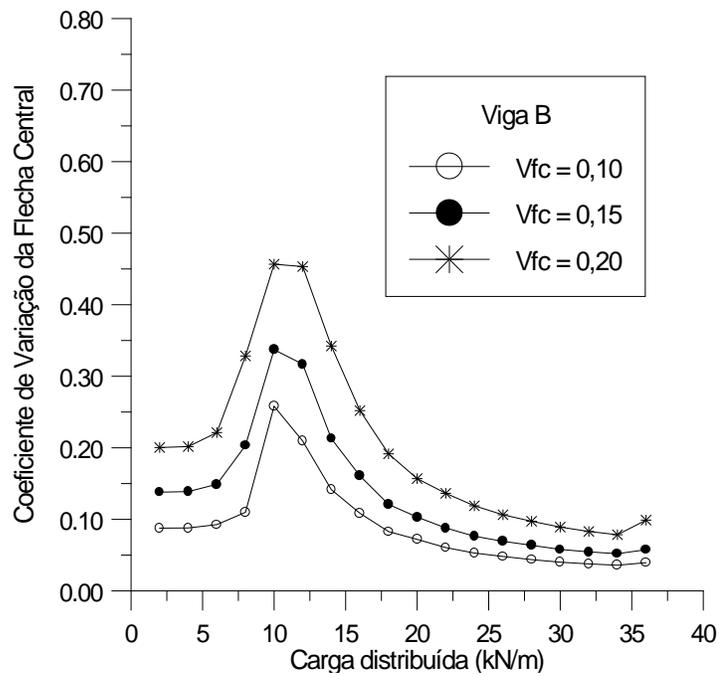


FIGURA 7.27 – Evolução de V_a com a carga, para a viga VB

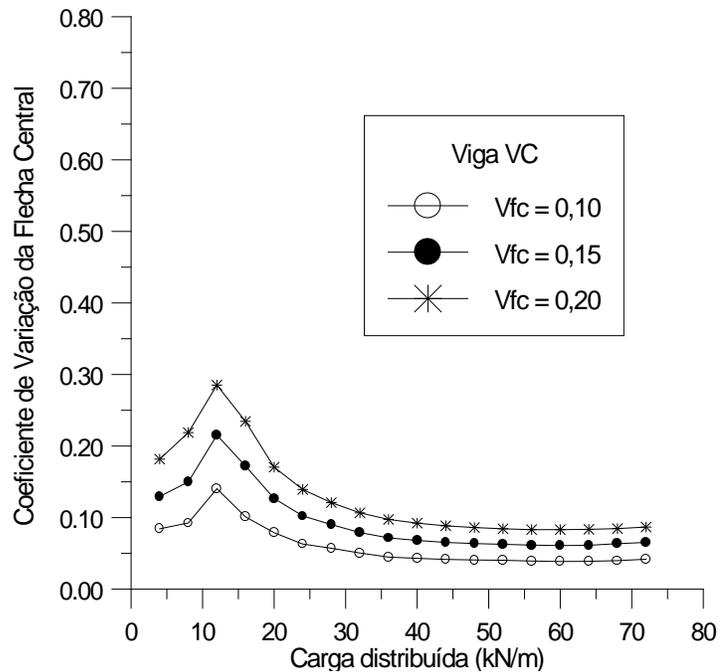


FIGURA 7.28 - Evolução de V_a com o aumento da carga, para a viga VC

Quanto à distância de correlação do campo estocástico de f_c , percebe-se que o valor esperado da flecha central sob carga de serviço não sofre alterações significativas, quando os parâmetros $b1=b2$ assumem os valores de 50 cm, 200 cm e um valor infinito. Por outro lado, o coeficiente de variação da flecha sob carga de serviço cresce com o aumento da distância de correlação. Este fato indica que a adoção da hipótese de correlação perfeita no espaço, para a resistência à compressão do concreto, deve produzir resultados conservadores quanto à segurança em relação ao Estado Limite de Utilização por deformação excessiva. A dispersão dos valores de a diminui com o aumento da taxa de armadura longitudinal ρ .

A variação das propriedades da armadura praticamente não altera o valor esperado da flecha central sob carga de serviço. À exceção da viga VA, em que a variação de E_s produziu coeficiente de variação para a flecha em torno de 10%, para as vigas VB e VC, o coeficiente de variação da flecha ficou em torno de 2%. Estes valores são bastante inferiores aos produzidos pela variação das propriedades do concreto.

Embora não afetem em muito o valor esperado da flecha central sob carga de serviço, as variações das dimensões da seção transversal fazem com que o seu coeficiente de variação cresça. Este efeito diminui com o aumento da taxa de armadura.

7.4.2 – Carga de ruptura das vigas

Os parâmetros da distribuição de probabilidade da tensão de escoamento da armadura, f_y , são as variáveis que mais influem na determinação da distribuição de probabilidade da carga de ruptura da viga.

A dispersão das propriedades do concreto não afeta significativamente, nem o valor esperado (maior variação por volta de 2%, em relação ao valor obtido com as propriedades médias), nem o coeficiente de variação (que se mantém em torno de 2%), da carga de ruptura das vigas, pois as mesmas foram projetadas para terem uma ruptura dúctil, controlada pelo escoamento da armadura.

A variabilidade de f_y tem bastante influência na carga de ruptura de vigas de concreto armado projetadas como subarmadas ou normalmente armadas, segundo a NBR-6118/1980. Para o aço CA-50, com $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$, quando se passa de um coeficiente de variação $V_{f_y} = 0,05$, para $V_{f_y} = 0,10$, a resistência média deve crescer de $f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$, para $f_{ym} = 59,84 \text{ kN/cm}^2$, um acréscimo de cerca de 10%. O valor esperado da carga de ruptura da viga, μ_R , também sofre um acréscimo proporcional, em torno de 9%. Quando V_{f_y} dobra, o coeficiente de variação da carga de ruptura, V_R , também dobra, passando de $V_R = 0,04$, para $V_R = 0,08$.

O efeito das variações sofridas pelas dimensões da seção transversal na distribuição da carga de ruptura das vigas é pequeno. O valor esperado da carga de ruptura praticamente não se altera, quando se passa de um desvio padrão para as dimensões b e h de 0,50 cm para 1,00 cm. O coeficiente de variação oscila entre um mínimo de 1% e um máximo de 3%.

7.5 – ESTUDO DE PILARES MODERADAMENTE ESBELTOS

Três pilares moderadamente esbeltos foram analisados, para estudar o efeito da variabilidade das propriedades geométricas e dos materiais na resposta destas estruturas. Estes pilares, birrotulados, foram projetados de acordo com as prescrições da norma NBR- 6118/1980. Sendo designados por PA, PB e PC, têm seção transversal quadrada de 30 cm x 30 cm, com 6,00 m de vão, e foram submetidos a duas cargas concentradas em seus apoios extremos, com uma excentricidade de 1ª ordem igual a 3 cm ($e_1/h = 0,10$), conforme é mostrado na FIGURA 7.17.

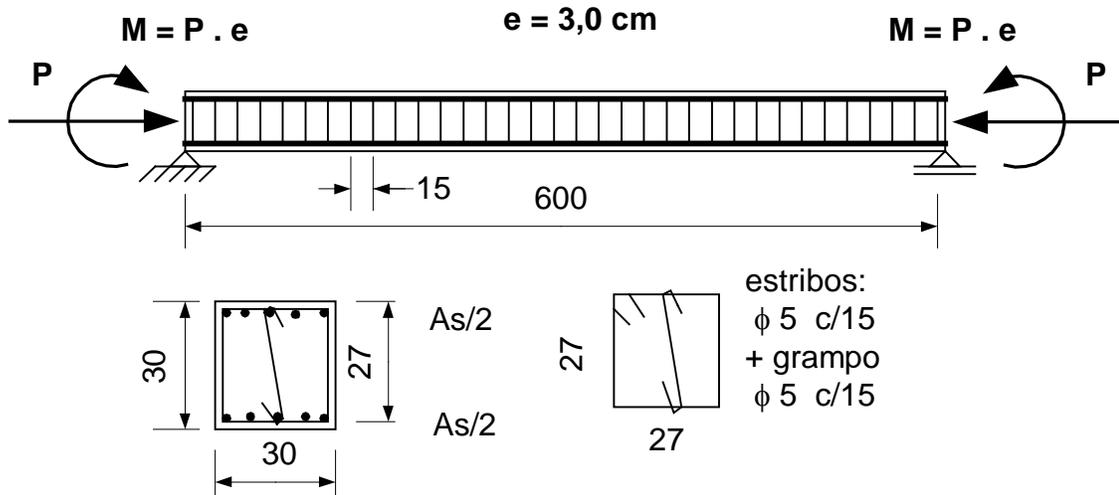


FIGURA 7.17 – Pilar moderadamente esbelto, para testes paramétricos

Estes pilares possuem uma relação $L / h = 20$, e um índice de esbelteza $\lambda = 69,28$, podendo ser considerados como pilares moderadamente esbeltos, para os quais os efeitos de 2ª ordem podem ser considerados de forma simplificada, segundo a NBR-6118/1980.

A TABELA 7.12 contém as propriedades mecânicas dos materiais aço e concreto, utilizadas nos testes paramétricos.

TABELA 7.12 – Propriedades mecânicas dos materiais para os pilares PA, PB e PC

CONCRETO	ARMADURA
$f_{ck} = 3,00 \text{ kN/cm}^2$	Longitudinal: CA-50 $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$
$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{(1 - 1,645 V_{fc})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Estribos: CA-60 $f_{yk} = 60 \text{ kN/cm}^2$
$f_{ctm} = 0,14 (f_{ck})^{\frac{2}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	$f_{ym} = \frac{f_{yk}}{(1 - 1,645 V_{fy})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$
$E_{cm} = 2.150 (f_{cm})^{\frac{1}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{sm} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$

Os pilares foram projetados para cargas características diferentes, mantendo-se constante a relação $e_1/h = 0,10$. Assim, o pilar designado como PA, foi dimensionado para uma carga característica $Pk = 675 \text{ kN}$, o pilar PB foi calculado com uma carga $Pk = 850 \text{ kN}$, e o pilar PC foi projetado para a carga $Pk = 1150 \text{ kN}$.

A excentricidade de 2ª ordem (e_2) foi determinada de forma simplificada, de acordo com o item 4.1.1.3C, da NBR-6118/1980, a partir da expressão:

$$e_2 = \frac{L_e^2}{10} \left[\frac{0,0035 + \frac{f_{yd}}{E_s}}{(\nu + 0,5)h} \right], \quad (7.9)$$

onde L_e é o comprimento de flambagem do pilar, no caso igual a 600 cm, f_{yd} é a tensão de escoamento de cálculo da armadura, E_s é o módulo de deformação longitudinal do aço e ν é o esforço normal reduzido, dado por

$$\nu = \frac{P_d}{A_c f_{cd}}, \quad (7.10)$$

sendo P_d a força normal de cálculo, A_c a área da seção transversal de concreto e f_{cd} a resistência à compressão de cálculo do concreto. Na equação (7.9), h é o lado da seção transversal paralelo à direção de e_1 .

A TABELA 7.13 mostra os principais dados e resultados do dimensionamento dos pilares PA, PB e PC, à flexo-compressão normal. Nesta tabela, o símbolo ρ representa a taxa de armadura longitudinal total do pilar, dada por

$$\rho = \frac{A_s}{A_c}, \quad (7.11)$$

onde A_s é a área de aço total da seção transversal.

TABELA 7.13 – Dados do dimensionamento dos pilares PA, PB e PC,
à flexo-compressão normal

Pilar	P_k (kN)	P_d (kN)	e_1 (cm)	e_2 (cm)	A_s (cm ²)	ρ (%)
PA	675	945	3,00	6,68	7,20	0,80
PB	850	1190	3,00	5,98	13,50	1,50
PC	1150	1610	3,00	5,01	27,00	3,00

A armadura transversal foi determinada de modo a garantir a proteção contra a flambagem das barras longitudinais, adotando-se $A_{sw} = 3,93 \text{ cm}^2/\text{m}$, formada por estribos e grampos de 5 mm de diâmetro, espaçados a cada 15 cm. Esta armadura transversal foi mantida constante para todos os pilares.

As FIGURAS 7.18, 7.19 e 7.20, mostram as curvas carga-deslocamento para os pilares PA, PB e PC, obtidas em uma análise não-linear. Foram empregadas as propriedades mecânicas médias dos materiais, que constam da TABELA 7.14, e os valores nominais das dimensões da seção transversal. Nestas análises foi utilizada a malha de elementos finitos da FIGURA 7.8.

TABELA 7.14 – Propriedades mecânicas médias dos materiais para os pilares PA, PB e PC

CONCRETO	ARMADURA
Resistência à compressão: $f_{cm} = 3,98 \text{ kN/cm}^2$ ($V_{fc} = 0,15$)	Longitudinal: CA-50 $f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$ ($V_{fy} = 0,05$)
Resistência à tração: $f_{ctm} = 0,22 \text{ kN/cm}^2$	Estribos: CA-60 $f_{ym} = 65,38 \text{ kN/cm}^2$ ($V_{fy} = 0,05$)
Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{cm} = 2.979 \text{ kN/cm}^2$	Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{sm} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$

As variáveis aleatórias cujas influências nos resultados foram estudadas, para os pilares PA, PB e PC, têm os seus principais parâmetros e distribuições de probabilidade apresentados na TABELA 7.15.

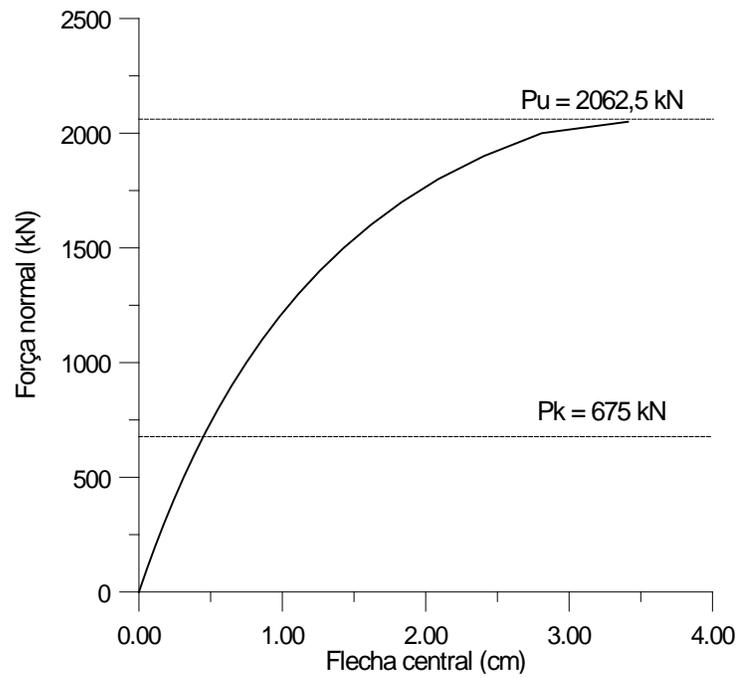


FIGURA 7.18 – Curva carga-deslocamento para o pilar PA

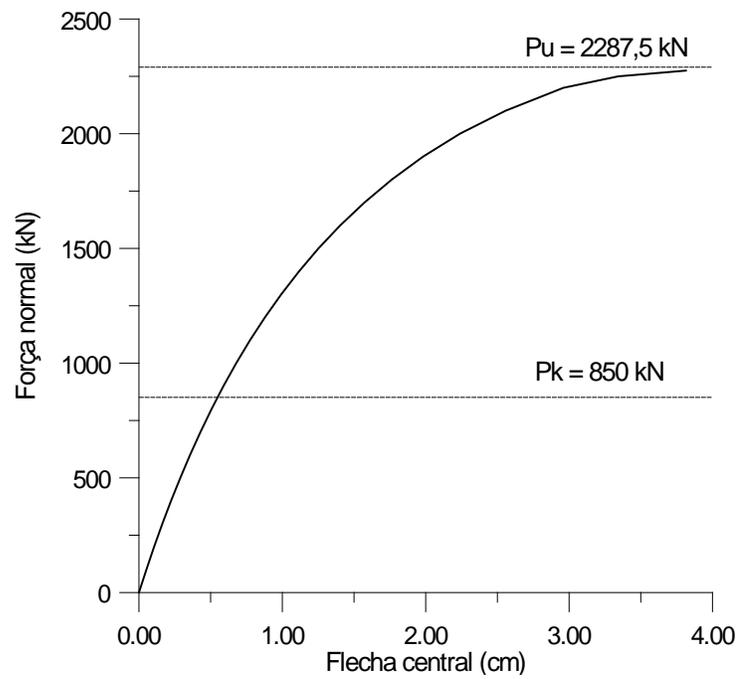


FIGURA 7.19 – Curva carga-deslocamento para o pilar PB

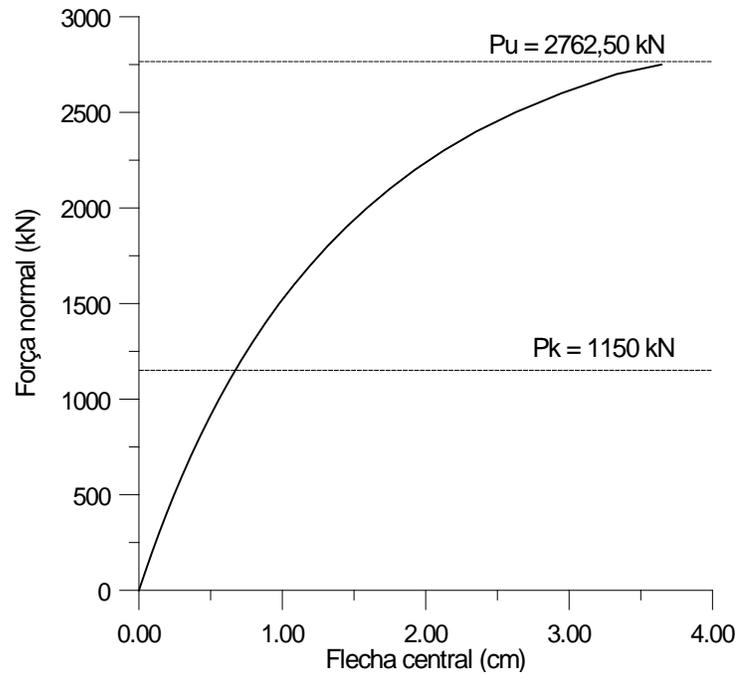


FIGURA 7.20 – Curva carga-deslocamento para o pilar PC

TABELA 7.15 – Parâmetros e distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias analisadas, para os pilares PA, PB e PC

Variável aleatória	Unidade	Distribuição de Probabilidade	Média μ	Desvio Padrão σ	Coef. de Variação V	Valor característico X_k
f_c	kN/cm ²	Normal	f_{cm}	-	0,10	f_{ck}
					0,15	
					0,20	
f_y	kN/cm ²	Normal	f_{ym}	-	0,05	f_{yk}
					0,10	
E_s	kN/cm ²	Normal	E_{sm}	-	0,025	-
b	cm	Normal	$b \text{ nominal}$	0,50	-	$b \text{ nominal}$
				1,00		
h	cm	Normal	$h \text{ nominal}$	0,50	-	$h \text{ nominal}$

Assim como no caso das vigas, para os pilares também foram realizadas 250 simulações de Monte Carlo. Este número de simulações mostrou-se suficiente, para atingir-se a convergência estatística dos resultados, para cada uma das propriedades cuja variabilidade foi estudada.

Os gráficos das FIGURAS 7.21 e 7.22 mostram a convergência estatística do valor esperado e do desvio padrão da carga de ruptura do pilar PB, para um concreto com $f_{ck} = 3,00$ kN/cm^2 e $V_{fc} = 0,20$.

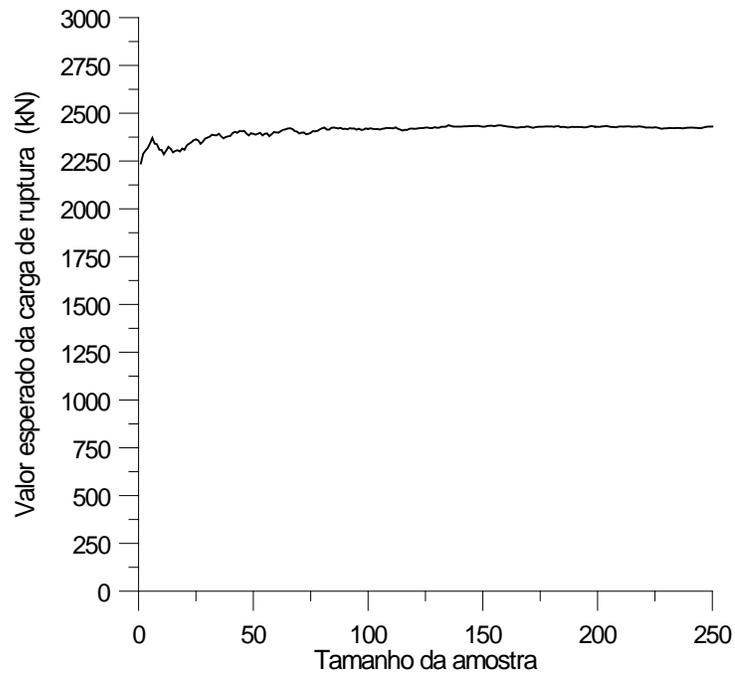


FIGURA 7.21 – Convergência estatística do valor esperado da carga de ruptura do pilar PB

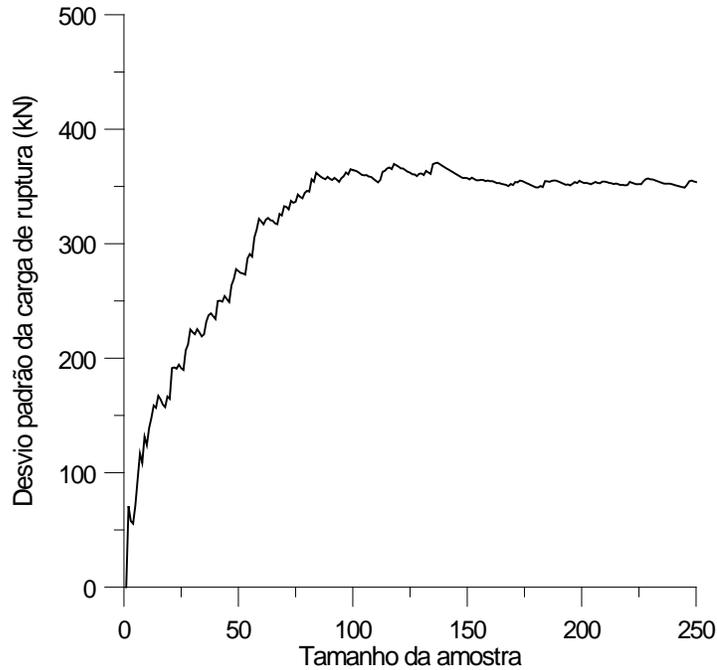


FIGURA 7.22 – Convergência estatística do desvio padrão da carga de ruptura do pilar PB

As TABELAS 7.16, 7.17 e 7.18 reúnem os resultados obtidos para os pilares PA, PB e PC, para a carga de ruptura, incluindo a influência da variabilidade das propriedades do concreto, das propriedades da armadura e das dimensões da seção transversal. Nestas TABELAS, os símbolos μ_R e V_R designam o valor esperado e o coeficiente de variação da carga de ruptura do pilar R , respectivamente.

O item 1 destas TABELAS, Propriedades do concreto, mostra como a variação do coeficiente de variação da resistência do concreto (V_{fc}) afeta as estatísticas da carga de ruptura. O valor de f_{ck} foi mantido fixo e foram considerados valores de V_{fc} iguais a 0,10, 0,15 e 0,20.

O item 2 destas TABELAS, Campo estocástico, mostra a influência dos parâmetros b_1 e b_2 , que são proporcionais à distância de correlação do campo estocástico, na distribuição da carga de ruptura do pilar. O valor de f_{ck} foi mantido fixo e foi adotado um coeficiente de variação V_{fc} igual a 0,15. Foram considerados valores para os parâmetros b_1 e b_2 iguais a 30 cm, 120 cm e um valor infinito.

O item 3 destas TABELAS, Propriedades da armadura, mostra como o coeficiente de variação da resistência ao escoamento da armadura (V_{fy}) afeta as estatísticas da carga de ruptura do pilar. O valor de f_{yk} foi mantido fixo, tanto para o aço CA-50, como para o aço CA-60. Foram

considerados valores de V_{fy} iguais a 0,05 e 0,10. O coeficiente de variação do módulo de deformação longitudinal do aço (E_s) foi mantido constante e igual a 0,025.

O item 4 destas TABELAS, Propriedades geométricas da seção transversal, mostra como as variações da largura (b) e da altura (h) afetam as estatísticas da carga de ruptura do pilar. Foi admitido que os valores médios das dimensões coincidem com os seus valores nominais de projeto. Foram considerados valores de desvio padrão para estas dimensões iguais a 0,50 cm e 1,00 cm.

TABELA 7.16 – Resultados dos testes paramétricos para o pilar PA

Pilar: PA		Taxa de armadura $\rho = 0,80\%$	
1. Propriedades do concreto			
V_{fc}	0,10	0,15	0,20
μ_R (kN)	1920,50	2063,40	2237,00
V_R	0,08	0,13	0,17
2. Campo estocástico			
$b_1 = b_2$ (cm)	30	120	∞
μ_R (kN)	1962,70	1999,10	2063,4000
V_R	0,04	0,09	0,13
3. Propriedades da armadura			
V_{fy}	0,05	0,10	$V_{Es} = 0,025$, é fixo, enquanto V_{fy} varia.
μ_R (kN)	2062,50	2062,50	
V_R	0,00	0,00	
4. Propriedades geométricas da seção transversal			
σ_b (cm)	0,50	1,00	Os valores médios de b e h são iguais aos valores nominais
μ_R (kN)	2062,70	2067,10	
V_R	0,03	0,06	

TABELA 7.17 – Resultados dos testes paramétricos para o pilar PB

Pilar: PB		Taxa de armadura $\rho = 1,50\%$	
1. Propriedades do concreto			
V_{fc}	0,10	0,15	0,20
μ_R (kN)	2101,50	2280,00	2430,90
V_R	0,07	0,11	0,15
2. Campo estocástico			
$b_1 = b_2$ (cm)	30	120	∞
μ_R (kN)	2178,20	2211,90	2280,00
V_R	0,04	0,08	0,11
3. Propriedades da armadura			
V_{fy}	0,05	0,10	$V_{Es} = 0,025$, é fixo, enquanto V_{fy} varia.
μ_R (kN)	2277,70	2278,10	
V_R	0,01	0,01	
4. Propriedades geométricas da seção transversal			
σ_b (cm)	0,50	1,00	Os valores médios de b e h são iguais aos valores nominais
μ_R (kN)	2274,80	2277,10	
V_R	0,02	0,05	

TABELA 7.18 – Resultados dos testes paramétricos para o pilar PC

Pilar: PC		Taxa de armadura $\rho = 3,00\%$	
1. Propriedades do concreto			
V_{fc}	0,10	0,15	0,20
μ_R (kN)	2601,50	2752,40	2967,4000
V_R	0,06	0,09	0,13
2. Campo estocástico			
$b_1 = b_2$ (cm)	30	120	∞
μ_R (kN)	2664,20	2705,90	2752,40
V_R	0,03	0,06	0,09
3. Propriedades da armadura			
V_{fy}	0,05	0,10	$V_{Es} = 0,025$, é fixo, enquanto V_{fy} varia.
μ_R (kN)	2766,60	2766,30	
V_R	0,01	0,01	
4. Propriedades geométricas da seção transversal			
σ_b (cm)	0,50	1,00	Os valores médios de b e h são iguais aos valores nominais
μ_R (kN)	2769,70	2760,00	
V_R	0,02	0,03	

7.6 – ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS PARA OS PILARES

7.6.1 – Resposta carga-deslocamento dos pilares

Para os pilares analisados, que trabalham sob flexo-compressão normal do início do carregamento até a ruptura, a variabilidade das propriedades do concreto mostrou-se como o fator determinante da distribuição da resposta estática da estrutura.

É interessante analisar o que ocorre com a variabilidade da resposta da estrutura, na medida em que o carregamento cresce. As FIGURAS 7.29, 7.30 e 7.31 mostram a evolução da relação entre o valor esperado da flecha, $E[a]$, e a_o , com o aumento da carga, para os pilares PA, PB e PC, de forma respectiva. Aqui, a_o representa o valor da flecha central do pilar, obtido com o emprego das propriedades médias dos materiais e os valores nominais das dimensões b e h .

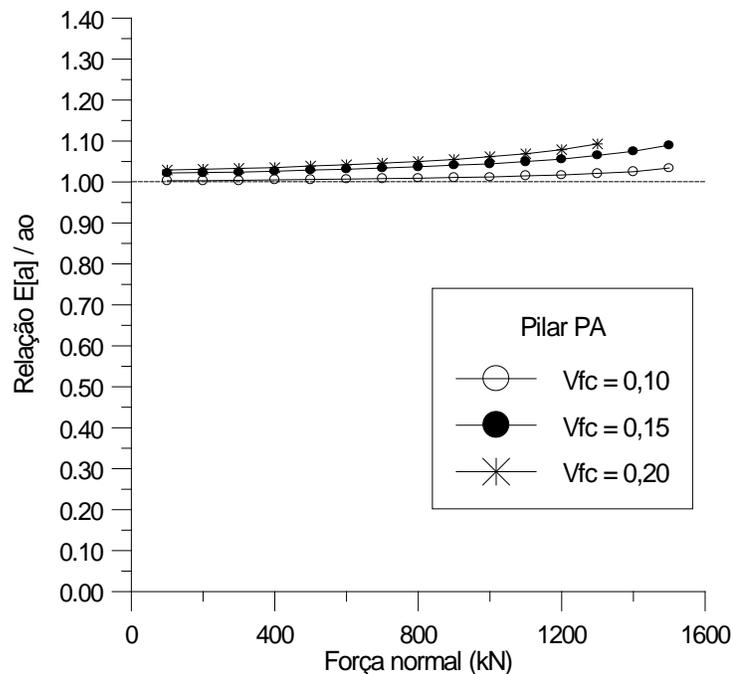


FIGURA 7.29 - Relação $E[a] / a_o$ x força normal, para o pilar PA

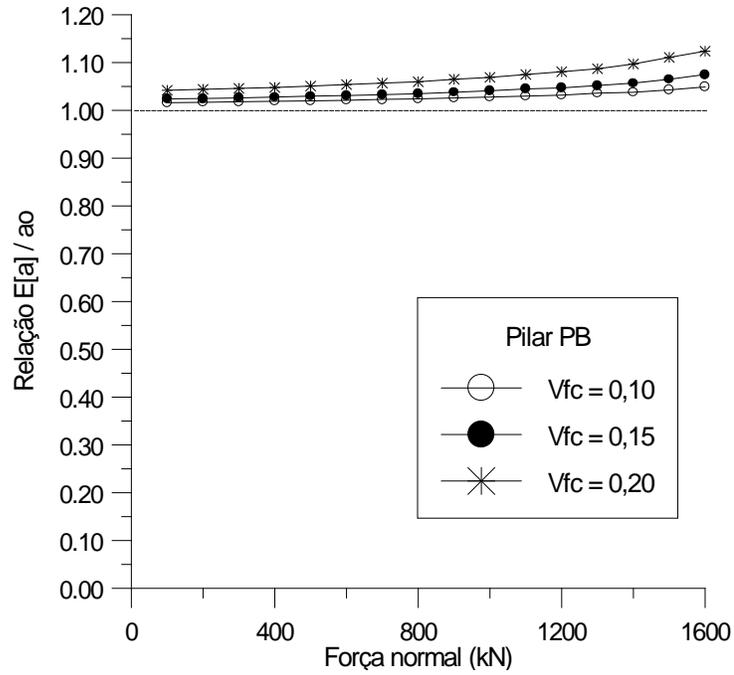


FIGURA 7.30 - Relação $E[a] / a_0$ x força normal, para o pilar PB

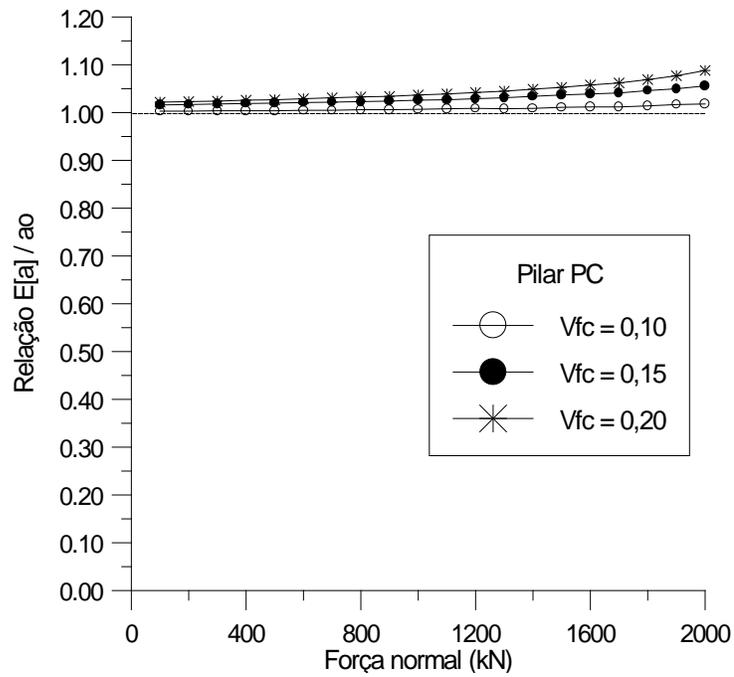


FIGURA 7.31 - Relação $E[a] / a_0$ x força normal, para o pilar PC

Nas FIGURAS 7.29, 7.30 e 7.31, observa-se que a relação $E[a]/a_o$ tende a afastar-se da unidade, na medida em que a força normal cresce. Isto pode ser explicado pelo fato de quanto mais avançado for o estágio de carregamento, maior será a não-linearidade do diagrama tensão-deformação do concreto comprimido, resultando numa maior dispersão dos resultados. Estas considerações são válidas para a relação $e_1/h = 0,10$, para a qual a totalidade da seção transversal permanece comprimida até as imediações da ruptura.

As FIGURAS 7.32, 7.33 e 7.34 mostram que o coeficiente de variação da flecha V_a também cresce na medida em que a força normal aumenta, fenômeno explicado pelas mesmas razões expostas acima.

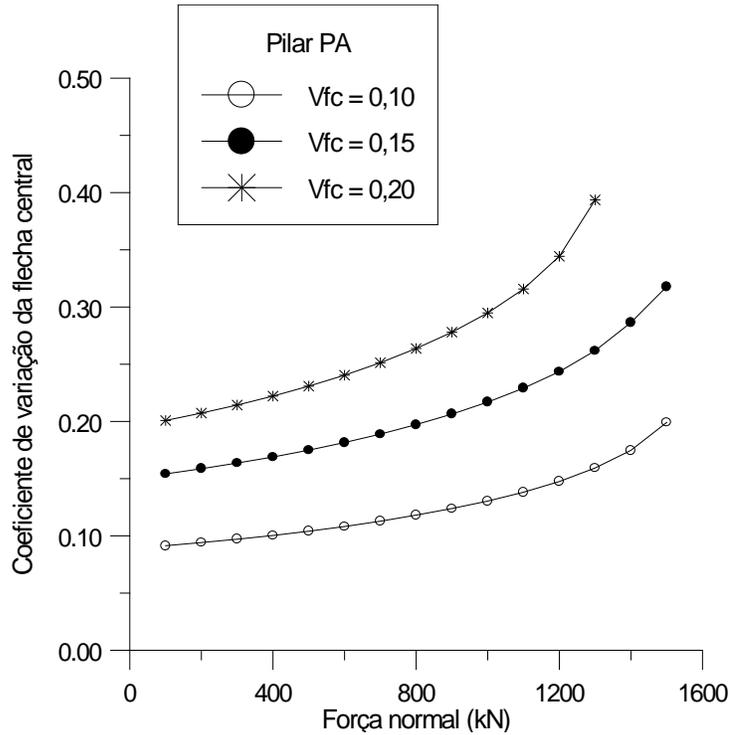


FIGURA 7.32 - Evolução de V_a com o aumento da força normal, para o pilar PA

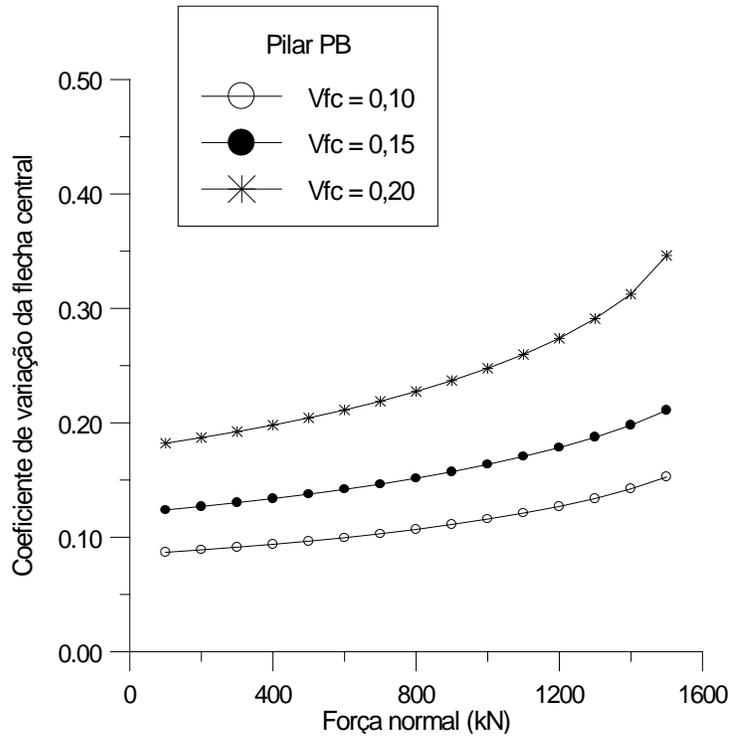


FIGURA 7.33 - Evolução de V_a com o aumento da força normal, para o pilar PB

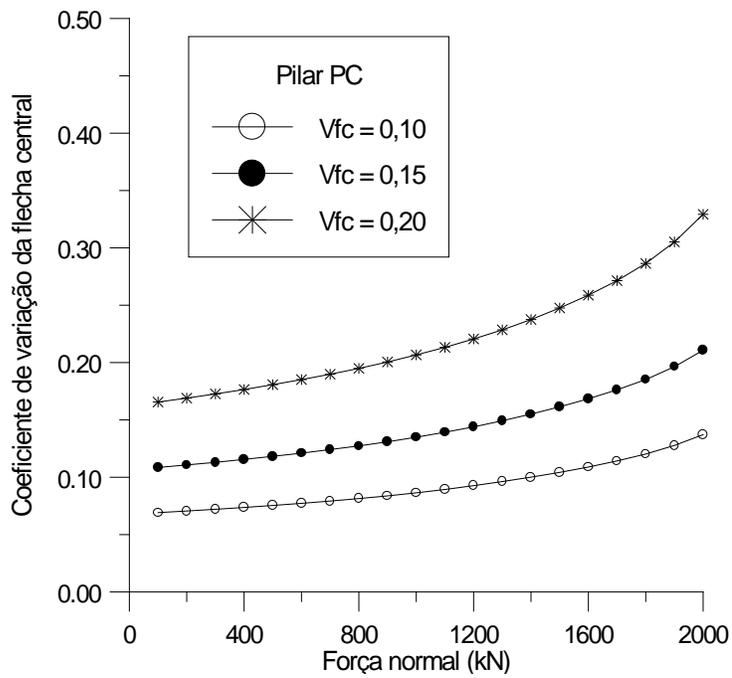


FIGURA 7.34 - Evolução de V_a com o aumento da força normal, para o pilar PC

7.6.2 – Carga de ruptura dos pilares

Mantendo o f_{ck} constante, e fazendo crescer o coeficiente de variação V_{fc} , e, conseqüentemente, aumentando-se a resistência média f_{cm} , o valor esperado da carga de ruptura do pilar μ_R cresce, porém o coeficiente de variação da carga de ruptura V_R também cresce. Este efeito diminui com o aumento da taxa de armadura ρ .

O valor esperado da carga de ruptura μ_R e o coeficiente de variação da carga de ruptura V_R crescem com o aumento da distância de correlação do campo estocástico de f_c . Contudo, quando se passa de um valor para o parâmetro $b_1=b_2= 30 \text{ cm}$, para $b_1=b_2= \infty$, a carga de ruptura média aumenta em torno de 5%, enquanto que o coeficiente de variação triplica de valor. Por este motivo, a consideração da correlação perfeita do campo estocástico de f_c no espaço é uma hipótese mais conservadora, no que se refere à segurança do pilar em relação ao Estado Limite Último.

Como a ruptura dos pilares é controlada pelo esmagamento do concreto, sem que o aço atinja a sua tensão de escoamento, pelo menos para a relação e_1/h considerada, variações da tensão de escoamento do aço f_y , e pequenas variações do módulo de deformação longitudinal E_s , praticamente não causam variações na carga de ruptura dos pilares.

Tomando para o valor médio das propriedades geométricas o seu valor nominal de projeto, sendo a variação média nula, as variações das dimensões da seção transversal praticamente não afetam o valor esperado da carga de ruptura μ_R . No entanto, o coeficiente de variação da carga de ruptura V_R cresce com o aumento do desvio padrão das dimensões da seção transversal. Quando o desvio padrão das dimensões dobra, o coeficiente de variação da carga de ruptura praticamente também dobra. O efeito das variações geométricas diminui com o aumento da taxa de armadura ρ do pilar.

8 – APLICAÇÕES

8.1 – INTRODUÇÃO

A finalidade deste capítulo é apresentar algumas das possíveis aplicações do modelo desenvolvido neste trabalho, para a análise probabilística de estruturas planas de concreto armado, através do método dos elementos finitos.

São estudados vigas e pilares projetados de acordo com os critérios da norma NBR-6118/1980, “Projeto e Execução de Obras em Concreto Armado” (ABNT, 1980). Foram consideradas as variabilidades existentes nas propriedades dos materiais, aço e concreto, e nas dimensões da seção transversal, em uma construção com um controle de qualidade médio.

De forma preliminar, é apresentada a definição do índice de confiabilidade β . Este parâmetro permite avaliar o grau de segurança oferecido pelos critérios de projeto da NBR-6118/1980, em relação a um Estado Limite Último, por exemplo, para diversas estruturas. Então, é possível realizar comparações entre os níveis de confiabilidade alcançados em cada uma delas.

Inicialmente são analisadas 3 vigas biapoiadas sob carga uniforme, de mesma seção transversal e mesmo vão, projetadas para 3 níveis de carga diferentes, o que resulta em taxas de armadura distintas. São determinadas as distribuições de probabilidade para a flecha sob carga de serviço, e para a carga de ruptura da viga. Estes resultados são comparados com as prescrições de projeto da norma NBR-6118/1980, tanto para os Estados Limites de Serviço, como para os Estados Limites Últimos. Também é feita uma análise de confiabilidade, quanto ao Estado Limite Último, para uma distribuição de carregamento hipotética.

Os pilares costumam ser as peças estruturais de maior responsabilidade no projeto estrutural de um edifício de concreto armado. Com o objetivo de avaliar o nível de segurança atingido no projeto de pilares de concreto armado, segundo a NBR-6118/1980, foram analisados ao todo vinte e sete pilares, de mesma seção transversal, com as mais variadas combinações de esbeltez, taxa de armadura e excentricidade de primeira ordem.

Estas análises fornecem linhas gerais sobre o comportamento de vigas e pilares de concreto armado no que se refere à segurança, tanto quanto aos Estados Limites de Serviço, como para os Estados Limites Últimos. Contudo, as mesmas não têm como finalidade esgotar o

assunto, ou estabelecer conclusões definitivas sobre o tema. Para ser atingido este objetivo seriam necessárias análises muito mais numerosas, e com a consideração das mais variadas combinações de geometria, propriedades dos materiais e carregamento. Trabalho de tal vulto, no entanto, foge do escopo desta tese.

8.2 – ÍNDICE DE CONFIABILIDADE β

Definindo-se a variável aleatória margem de segurança M (ANG e TANG, 1984), como sendo a diferença entre a resistência (carga de ruptura), R , da estrutura e a ação, S , à qual a estrutura é submetida, ou seja,

$$M = R - S, \quad (8.1)$$

uma vez fixadas as distribuições de R e de S , é possível determinar a distribuição da variável M .

Se a distribuição de probabilidade de R for normal, a distribuição de probabilidade de S também for normal, e, além disso, as variáveis R e S forem estatisticamente independentes, tem-se que o valor esperado da margem de segurança μ_M , será dado por:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S, \quad (8.2)$$

e que o desvio padrão da margem σ_M será obtido a partir da expressão:

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}. \quad (8.3)$$

É possível ainda definir uma variável aleatória normal padronizada para a margem de segurança, com média zero e desvio padrão unitário através da equação:

$$m = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M}. \quad (8.4)$$

O início da região de falha ou ruptura ocorre quando a margem de segurança M anula-se, ou seja, para uma margem de segurança padronizada m igual a:

$$m = - \frac{\mu_M}{\sigma_M}. \quad (8.5)$$

A distância deste ponto até o valor médio de m , ou seja, $m = 0,00$, tomada em valor absoluto, é um indicativo do grau de segurança contra a falha ou ruína da estrutura, e é designada por índice de confiabilidade β , dado por:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}. \quad (8.6)$$

A partir da FIGURA 8.1, observa-se que a probabilidade de falha para uma estrutura, que possua uma variável margem de segurança padronizada de distribuição normal, será calculada através da equação:

$$P_f = \Phi(-\beta), \quad (8.7)$$

onde Φ é a função distribuição normal de probabilidade acumulada da variável m .

Conclui-se, então, que quanto maior for o índice de confiabilidade de uma estrutura, em relação a um certo Estado Limite, menor será a sua probabilidade de falha em relação a este Estado Limite. Este parâmetro é útil, portanto, para poder comparar o nível de segurança atingido no projeto de diversas estruturas com relação a um determinado Estado Limite.

Neste trabalho, o índice de confiabilidade β , conforme definido acima, será empregado para avaliar o nível de segurança, em relação ao Estado Limite Último, de vigas e pilares de concreto armado, projetados de acordo com as prescrições da norma NBR-6118/1980.

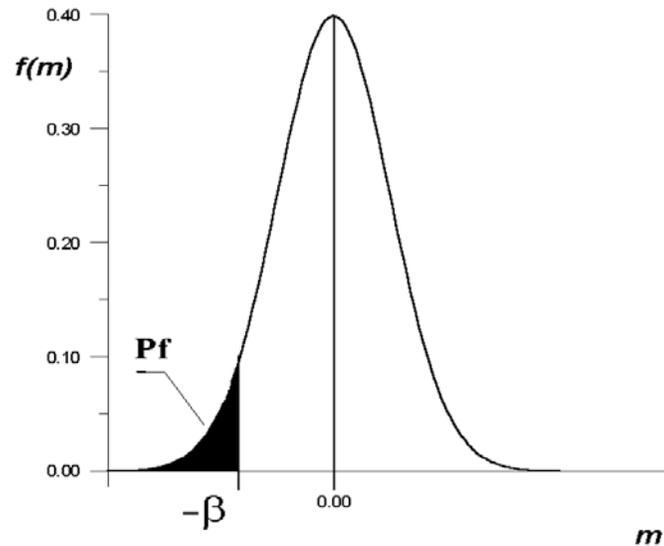


FIGURA 8.1 – Variável aleatória margem de segurança padronizada m , de distribuição normal, e índice de confiabilidade β

8.3 – ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE VIGAS ISOSTÁTICAS

Para exemplificar o efeito da variabilidade das propriedades geométricas e dos materiais sobre a segurança em relação aos Estados Limites de Serviço, e aos Estados Limites Últimos, foram estudadas três vigas de concreto armado. Estas vigas, biapoimadas, de seção transversal retangular 12 cm x 40 cm, com 4,00 m de vão, foram submetidas a uma carga uniformemente distribuída, conforme é ilustrado pela FIGURA 8.2.

Estas vigas foram denominadas de V1, V2 e V3. O projeto destas peças foi feito de acordo com as especificações da norma NBR-6118/1980, “Projeto e Execução de Obras em Concreto Armado”. Foram utilizadas cargas de serviço $p_k = g_k + q_k$, sendo a carga permanente g_k e a carga acidental q_k , respectivamente iguais a 10 kN/m, 15 kN/m e 20 kN/m. Para as três vigas foi estabelecida uma relação $g_k / (g_k + q_k) = 0,75$.

As propriedades mecânicas dos materiais, utilizadas nas análises das vigas V1, V2 e V3, são apresentadas na TABELA 8.1.

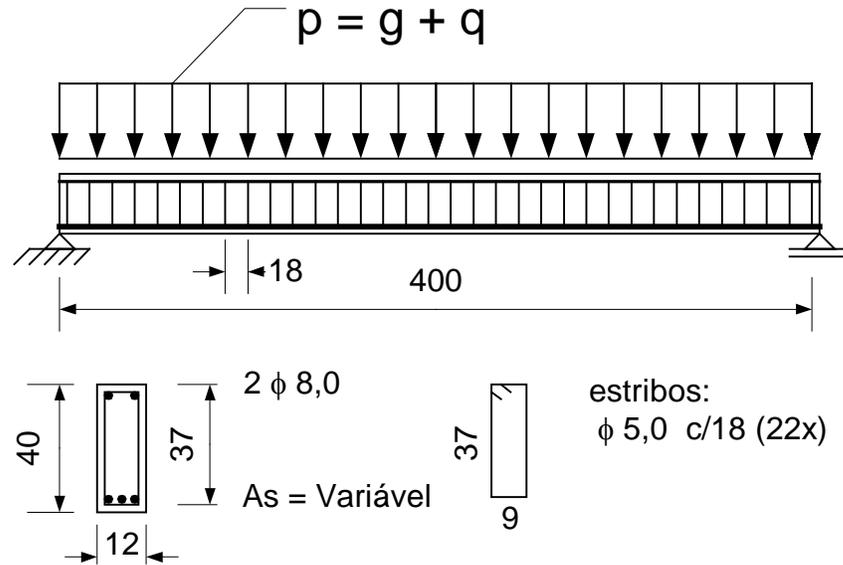


FIGURA 8.2 – Viga biapoiada sob carga distribuída, de seção retangular, para análise probabilística

TABELA 8.1 – Propriedades mecânicas dos materiais para as vigas V1, V2 e V3

CONCRETO	ARMADURA
$f_{ck} = 2,00 \text{ kN/cm}^2$	Longitudinal: CA-50 $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$
$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{(1 - 1,645 V_{fc})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Estribos: CA-60 $f_{yk} = 60 \text{ kN/cm}^2$
$f_{ctm} = 0,14 (f_{ck})^{\frac{2}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	$f_{ym} = \frac{f_{yk}}{(1 - 1,645 V_{fy})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$
$E_{cm} = 2.150 (f_{cm})^{\frac{1}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{sm} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$

A TABELA 8.2 contém os resultados do dimensionamento das três vigas para a flexão. Como todos os três dimensionamentos resultaram em armadura simples, adotou-se uma armadura superior, de montagem, formada por 2 barras de 8 mm de diâmetro, para todas as vigas.

TABELA 8.2 – Dimensionamento à flexão das vigas V1, V2 e V3

Viga	p_k (kN/m)	p_d (kN/m)	A_s (cm ²)	ρ (%)
V1	10,00	14,00	1,88	0,42
V2	15,00	21,00	2,97	0,67
V3	20,00	28,00	4,19	0,94

A TABELA 8.3 contém os resultados do dimensionamento ao esforço cortante, para estribos verticais, para as vigas V1, V2 e V3, para as mesmas cargas com que foi feito o dimensionamento à flexão.

TABELA 8.3 – Dimensionamento ao esforço cortante para as vigas V1, V2 e V3

Viga	ρ (%)	p_k (kN/m)	V_d (kN)	τ_{wd} (kN/cm ²)	ρ_w (%)	A_{sw} (cm ² /m)
V1	0,42	10,00	28,00	0,06	0,14	1,68
V2	0,67	15,00	42,00	0,10	0,14	1,68
V3	0,94	20,00	56,00	0,13	0,18	2,15

Como a NBR-6118/1980 limita o espaçamento dos estribos em $d/2$, onde d é a altura útil da seção transversal, foram adotados estribos de 5 mm a cada 18 cm, o que equivale a 2,18 cm² / m, cobrindo satisfatoriamente as armaduras determinadas pelo cálculo.

A verificação dos Estados Limites de Serviço, de Deformação Excessiva e de Abertura Excessiva de Fissuras, foi feita considerando-se o funcionamento da viga no Estádio II puro. Então, foi admitido que os materiais, aço e concreto, trabalham no regime elástico linear, e a

contribuição do concreto tracionado para a rigidez da viga não foi considerada, de acordo com as recomendações da NBR-6118/1980.

Segundo o Anexo da norma NBR-7197/1989, “Projeto de Execução de Estruturas em Concreto Protendido” (ABNT, 1989), que altera algumas disposições da NBR-6118/1980, a verificação do Estado Limite por Deformação Excessiva deve ser feita para a combinação quase-permanente das ações. Esta combinação inclui a totalidade da carga permanente g_k , e uma parcela $\psi_2 q_k$, da carga variável, sendo ψ_2 um coeficiente que depende da utilização da construção. Para edifícios residenciais, por exemplo, ψ_2 vale 0,20.

O mesmo Anexo define que a verificação do Estado Limite de Abertura Excessiva de Fissuras deve ser realizada com a combinação freqüente das ações. Esta combinação consiste na totalidade da carga permanente g_k , e uma parcela $\psi_1 q_k$, da carga variável, sendo ψ_1 um coeficiente que depende da uso da edificação. Para edifícios residenciais, por exemplo, ψ_1 vale 0,30.

Assim sendo, as cargas para as quais devem ser verificados os Estados Limites de Serviço são aquelas descritas pela TABELA 8.4.

TABELA 8.4 – Combinações de ações para os Estados Limites de Serviço

Viga	g_k (kN/m)	q_k (kN/m)	Deformação $g_k + \psi_2 q_k$ (kN/m)	Abertura de Fissuras $g_k + \psi_1 q_k$ (kN/m)
V1	7,50	2,50	8,00	8,25
V2	11,25	3,75	12,00	12,375
V3	15,00	5,00	16,00	16,50

A TABELA 8.5 reúne os resultados da verificação dos Estados Limites de Serviço para as Vigas V1, V2 e V3. Nesta TABELA, x_{IIo} e $(EI)_{IIo}$ são, respectivamente, a posição da linha neutra em relação ao bordo comprimido da seção transversal e a rigidez à flexão no Estádio II puro.

A flecha central imediata é designada por a_o . A consideração dos efeitos da fluência é feita de forma simplificada, de acordo com o item 4.2.3.1B da NBR6118/1980. Disto resulta a flecha central para ações de longa duração a_∞ .

A tensão na armadura mais tracionada é σ_s . A abertura de fissura é indicada por w . Estas grandezas foram calculadas de acordo com as determinações da NBR-6118/1980, e também em conformidade com o Anexo da NBR-7197/1989. Na verificação da fissuração, foram consideradas bitolas máximas de armadura iguais a 10 mm, 12,5 mm e 16 mm, correspondentemente, para as vigas V1, V2 e V3.

TABELA 8.5 – Verificação dos Estados Limites de Serviço para as vigas V1, V2 e V3

Viga	x_{IIo} (cm)	$(EI)_{IIo}$ (kNcm ²)	a_o (cm)	a_∞ (cm)	σ_s (kN/cm ²)	w (mm)
V1	7,80	39.611.996	0,67	0,95	25,54	0,18
V2	9,55	57.928.968	0,69	1,05	24,63	0,17
V3	11,06	76.154.073	0,70	1,12	23,61	0,18

Observando-se a TABELA 8.5, conclui-se que, as três vigas atendem tanto ao limite da flecha máxima admissível, igual a $L / 300 = 1,33$ cm, como ao limite de abertura máxima de fissura, tomado como igual a 0,30 mm.

Para se ter uma idéia do comportamento mecânico destas vigas, são apresentadas na FIGURA 8.3, as curvas carga-deslocamento obtidas em uma análise não-linear. Este gráfico apresenta as flechas imediatas, sem a consideração dos efeitos da fluência e da retração.

Estas curvas foram obtidas utilizando-se as propriedades médias dos materiais e os valores nominais para as dimensões da seção transversal. Na determinação das propriedades médias do concreto foi considerado um coeficiente de variação $V_{fc} = 0,15$, enquanto que para a armadura foi considerado um coeficiente de variação $V_{fy} = 0,05$, tanto para o aço CA-50, como para o aço CA-60, utilizando-se as equações que constam da TABELA 8.1.

Nota-se, a partir da FIGURA 8.3, que por possuírem as mesmas propriedades médias dos materiais, as três vigas apresentam cargas de fissuração muito próximas, em torno de 6,50 kN/m, o que mostra a pequena influência da taxa de armadura neste aspecto. Sob a carga de serviço, portanto, as três vigas trabalham no Estádio II, com várias seções fissuradas. Contudo, por apresentarem taxas de armadura de flexão diferentes, as cargas de ruptura são completamente distintas.

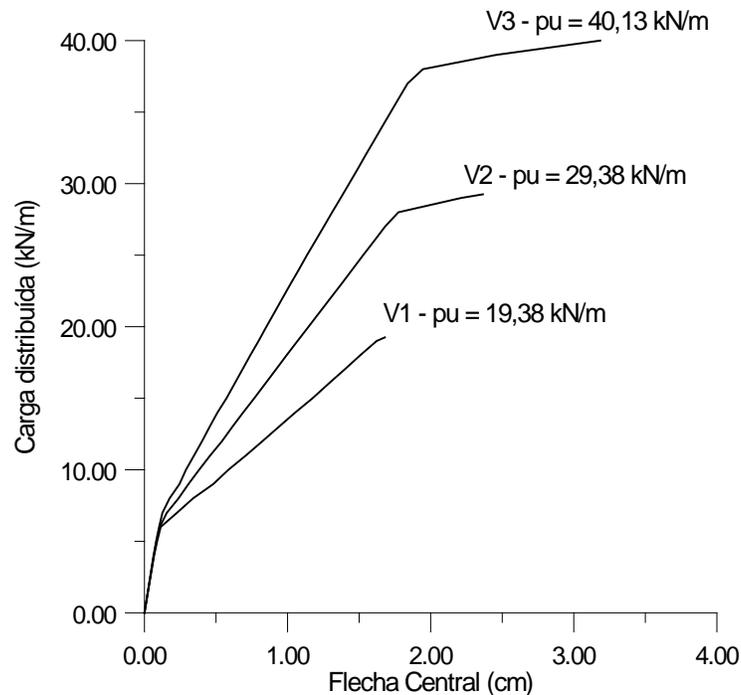


FIGURA 8.3 – Curvas carga-deslocamento para as vigas V1, V2 e V3

Para estas vigas foram realizadas 250 simulações de Monte Carlo. Para cada simulação foram geradas aleatoriamente as propriedades mecânicas dos materiais e as dimensões da seção transversal.

Dada a falta de resultados experimentais mais precisos sobre a distribuição da resistência à compressão do concreto em vigas, as propriedades do concreto foram consideradas como perfeitamente correlacionadas no espaço, ou seja, a distância de correlação foi considerada infinita. Além disso, esta hipótese mostrou-se a mais desfavorável no que se refere à dispersão dos resultados, tanto no que se refere às flechas, como em relação à carga de ruptura (ver Capítulo 7 – Testes Paramétricos).

As propriedades (variáveis aleatórias) cujas variabilidades foram analisadas, seus principais parâmetros e distribuições de probabilidade adotadas encontram-se resumidos na TABELA 8.6.

Nas análises, através do método dos elementos finitos, foi empregada uma malha de $5 \times 2 = 10$ elementos, discretizando-se apenas metade da viga, dadas as condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento. A malha de elementos finitos utilizada é representada na FIGURA 8.4.

TABELA 8.6 – Parâmetros e distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias analisadas, para as vigas V1, V2 e V3

Variável Aleatória	Unidade	Distribuição de Probabilidade	Média μ	Desvio Padrão σ	Coef. de Variação V	Valor característico X_k
f_c	kN/cm^2	Normal	f_{cm}	-	0,15	f_{ck}
f_y	kN/cm^2	Normal	f_{ym}	-	0,05	f_{yk}
E_s	kN/cm^2	Normal	E_{sm}	-	0,025	-
b	cm	Normal	b nominal	0,50 cm	-	b nominal
h	cm	Normal	h nominal	0,50 cm	-	h nominal

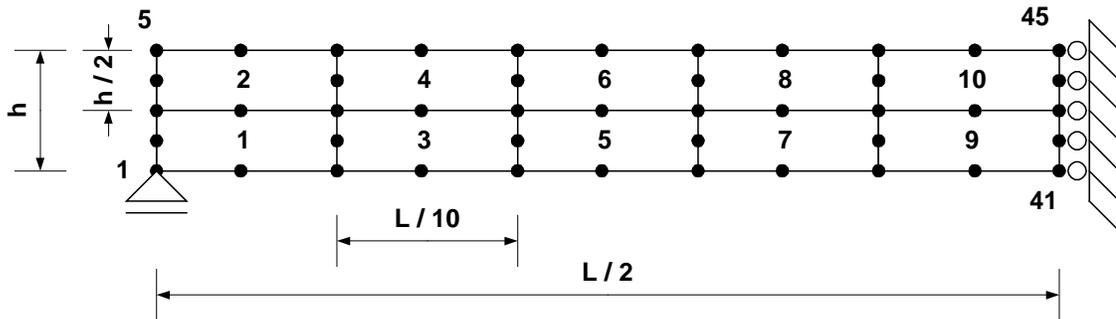


FIGURA 8.4 – Malha de elementos finitos empregada nas análises das vigas V1, V2 e V3

O gráfico da FIGURA 8.5 apresenta a convergência do valor esperado da flecha central imediata das vigas V1, V2 e V3, sob a combinação quase-permanente das ações, com o aumento do tamanho da amostra. O gráfico da FIGURA 8.6 mostra a convergência do desvio padrão da flecha imediata com o aumento do tamanho da amostra, para a mesma carga, para estas vigas.

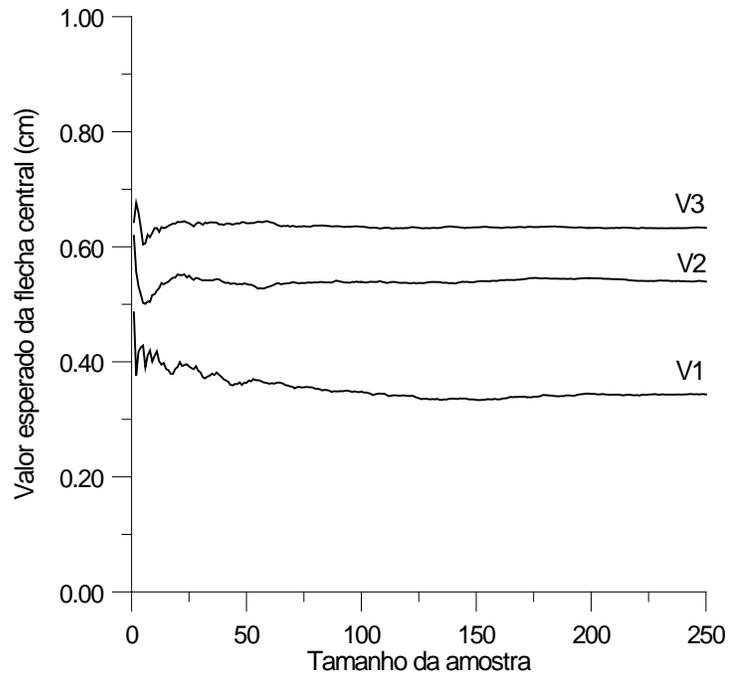


FIGURA 8.5 – Convergência estatística do valor esperado da flecha central, das vigas V1, V2 e V3

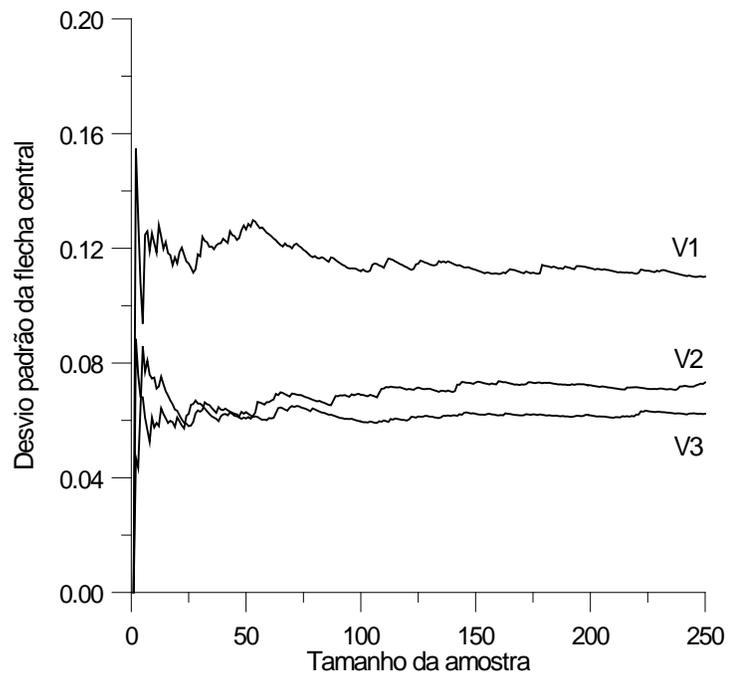


FIGURA 8.6 – Convergência estatística do desvio padrão da flecha central, para as vigas V1, V2 e V3

Das FIGURAS 8.5 e 8.6, pode-se observar que o aumento da taxa de armadura gerado pelo dimensionamento à flexão impede que o valor esperado do flecha imediata cresça proporcionalmente à carga de serviço; e, além disso, produz uma redução substancial no desvio padrão da flecha central.

As FIGURAS 8.7, 8.8 e 8.9 apresentam os diagramas de distribuição de frequência (histogramas) para a flecha sob carga de serviço, enquanto que as FIGURA 8.10, 8.11 e 8.12, mostram os Gráfico de Probabilidade Normal para a flecha, para as vigas V1, V2 e V3.

Examinando os gráficos das FIGURAS 8.7 a 8.12, conclui-se que a distribuição das flechas sob carga de serviço, para as vigas consideradas, pode ser aproximada por uma distribuição normal de probabilidade, cujos parâmetros são o valor esperado e o desvio padrão determinados através das simulações de Monte Carlo. Com base nesta hipótese, é possível estimar a probabilidade da flecha imediata sob carga de serviço, determinada de acordo com as recomendações da NBR-6118/1980, não ser ultrapassada. A TABELA 8.7 contém os resultados deste tipo de análise para as vigas V1, V2 e V3.

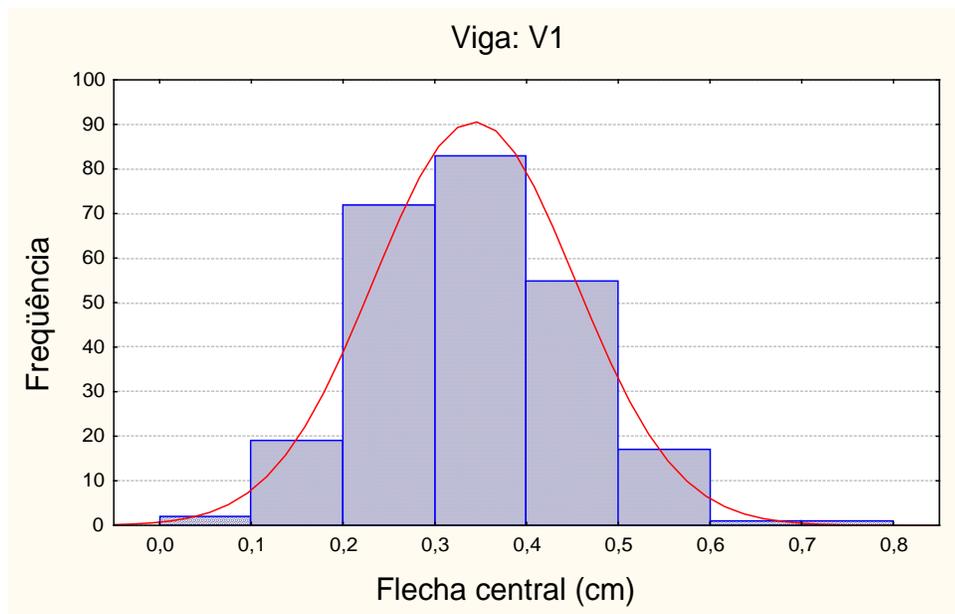


FIGURA 8.7 – Histograma da flecha central para a viga V1

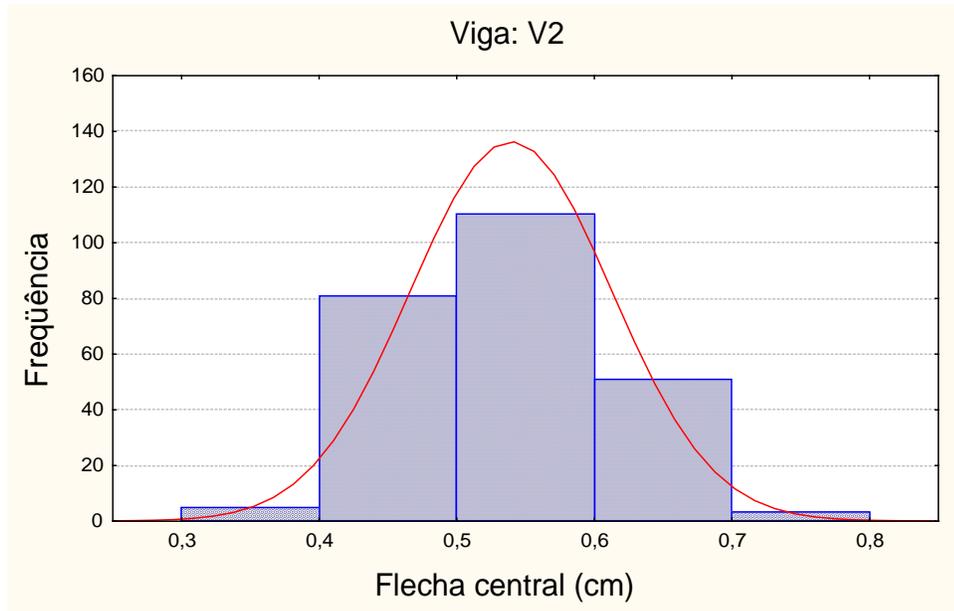


FIGURA 8.8 – Histograma da flecha central para a viga V2

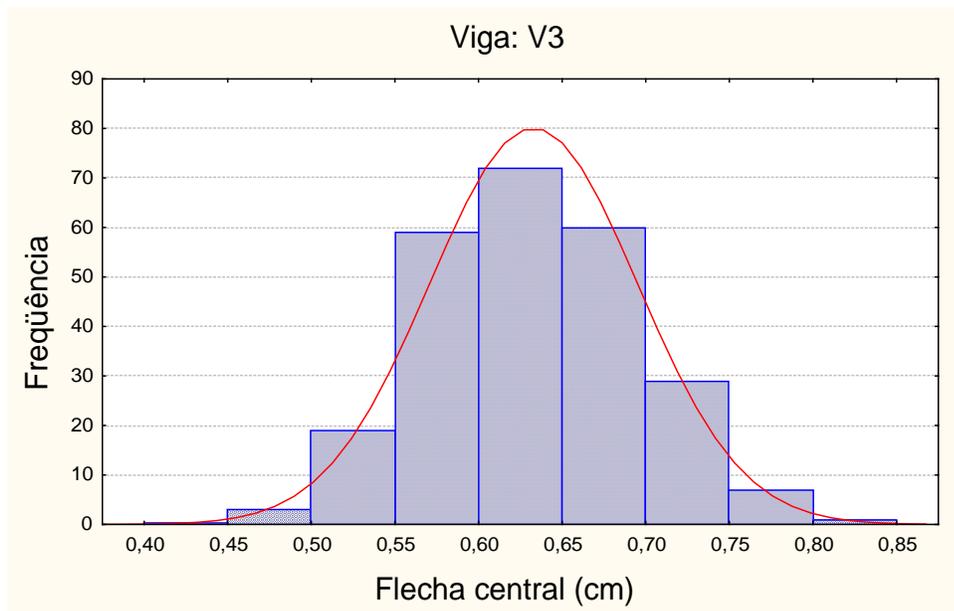


FIGURA 8.9 – Histograma da flecha central para a viga V3

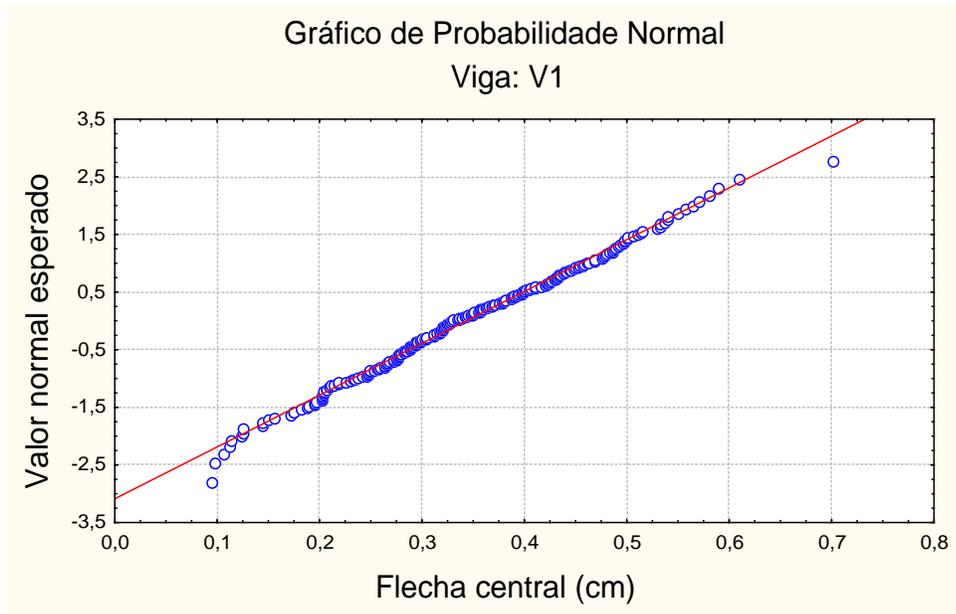


FIGURA 8.10- Gráfico de probabilidade normal, para a flecha central da viga V1

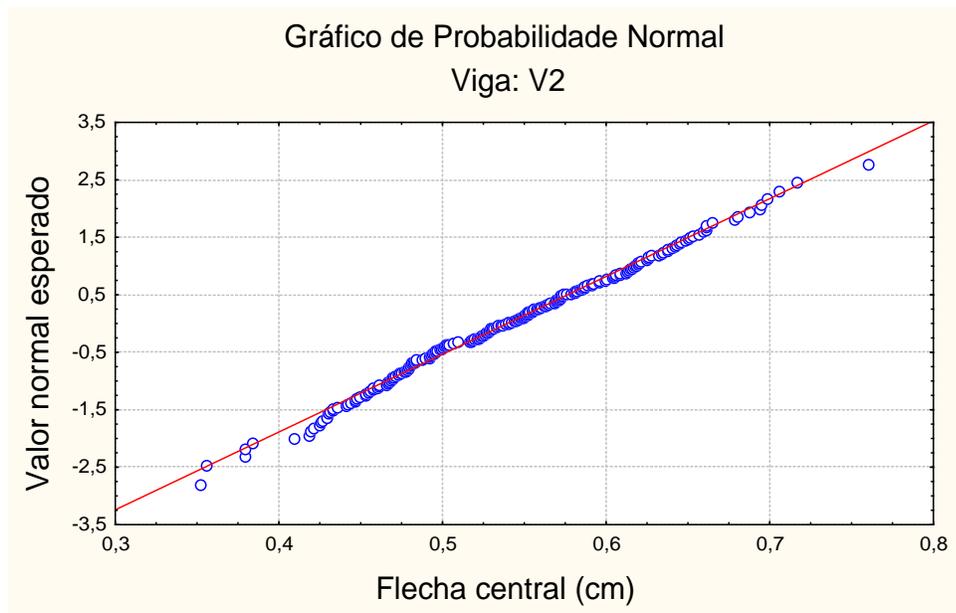


FIGURA 8.11- Gráfico de probabilidade normal para a flecha central da viga V2

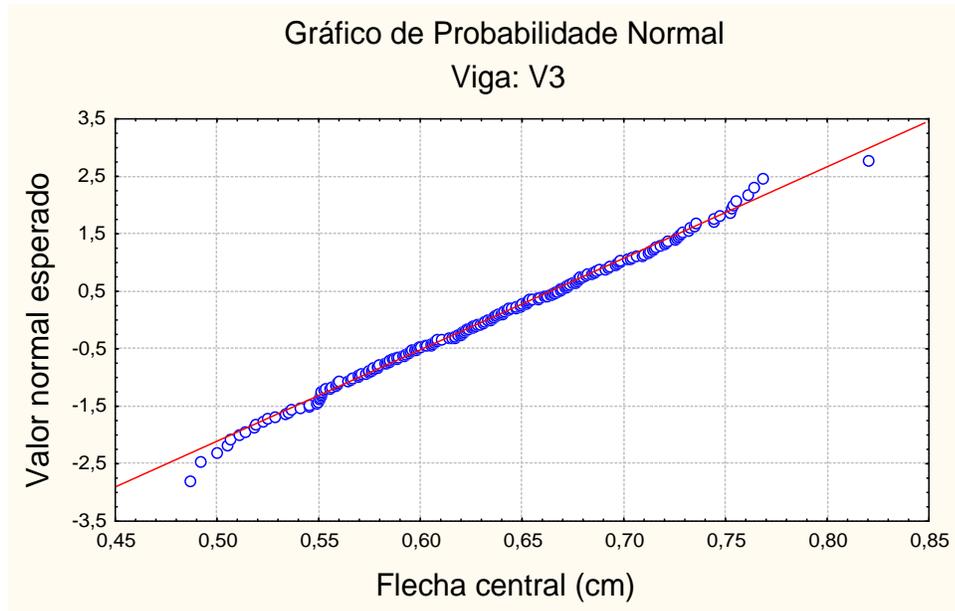


FIGURA 8.12- Gráfico de probabilidade normal para a flecha central da viga V3

TABELA 8.7 – Análise probabilística da flecha sob carga de serviço das vigas V1, V2 e V3

Viga	a_o (cm)	μ_a (cm)	σ_a (cm)	V_a	$P(a < a_o)$ (%)
V1	0,67	0,34	0,11	0,32	99,87
V2	0,69	0,54	0,07	0,14	98,39
V3	0,70	0,63	0,06	0,10	87,83

Uma análise da TABELA 8.7 revela que o modelo de previsão de flechas imediatas da NBR-6118/1980, baseado na rigidez da viga no Estádio II puro, produz valores elevados para a flecha, sob uma combinação de ações quase-permanentes. Há uma grande probabilidade de na obra serem encontrados valores inferiores ao previsto pela norma. Contudo, este efeito diminui com o aumento da taxa de armadura, e com o afastamento da carga de serviço em relação à carga de fissuração.

O gráfico da FIGURA 8.13 mostra a convergência estatística do valor esperado da resistência (carga de ruptura) das vigas V1, V2 e V3, com o aumento do tamanho da amostra. O gráfico da FIGURA 8.14 apresenta a convergência do desvio padrão da carga de ruptura com o aumento do tamanho da amostra, para as mesmas vigas.

Estas vigas projetadas para uma ruptura dúctil, por escoamento da armadura tracionada. Observa-se que, sendo o coeficiente de variação da tensão de escoamento da armadura $V_{fy} = 0,05$, a convergência do valor esperado da carga de ruptura com o aumento do tamanho da amostra é bastante rápida. Percebe-se também que o valor esperado da carga de ruptura da viga é muito próximo da carga de ruptura determinada em uma análise não-linear com as propriedades médias dos materiais e com as dimensões nominais da seção transversal, designada por R_o . Além disso, nota-se que o coeficiente de variação da carga de ruptura das três vigas aproxima-se bastante do coeficiente de variação atribuído a f_y . Estes resultados encontram-se resumidos na TABELA 8.8.

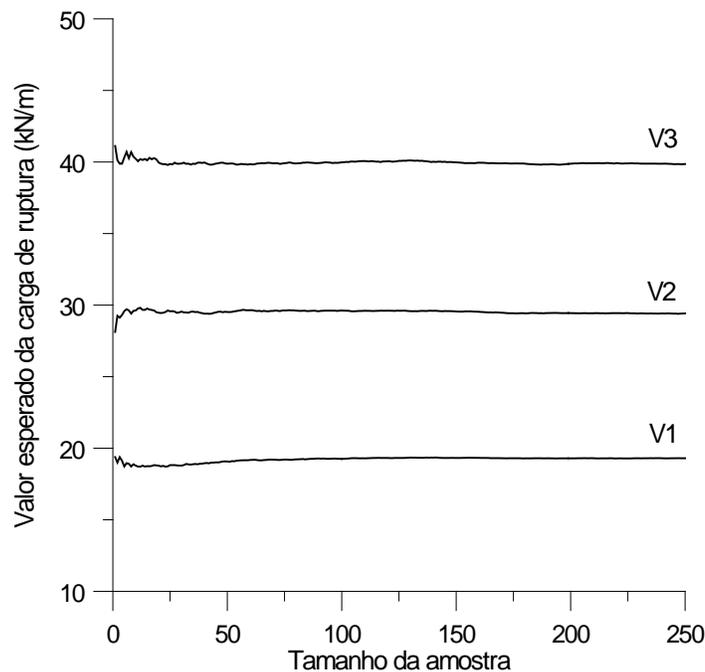


FIGURA 8.13 – Convergência estatística do valor esperado da carga de ruptura, para as vigas V1, V2 e V3

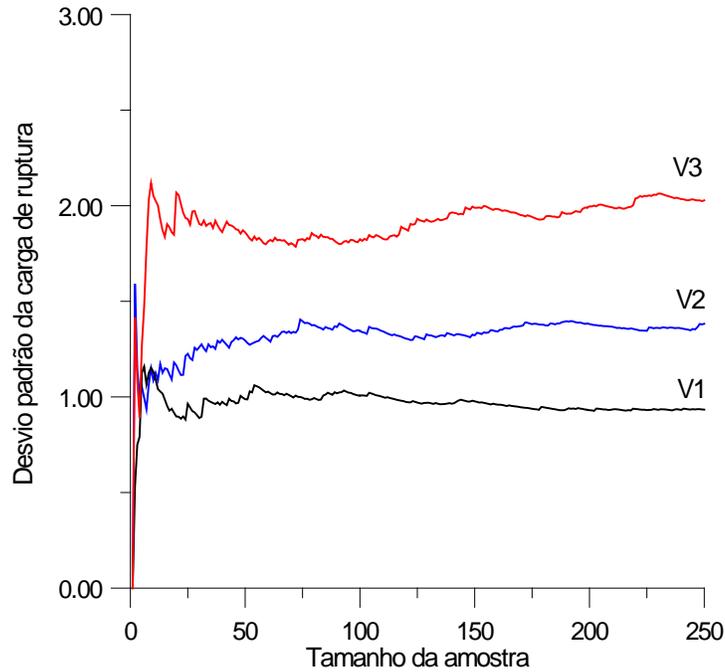


FIGURA 8.14 – Convergência estatística do desvio padrão da carga de ruptura, para as vigas V1, V2 e V3

TABELA 8.8 – Análise estatística da carga de ruptura das vigas V1, V2 e V3

Viga	R_o (kN/m)	μ_R (kN/m)	σ_R (kN/m)	V_R
V1	19,38	19,30	0,93	0,0484
V2	29,38	29,42	1,38	0,0470
V3	40,13	39,85	2,03	0,0509

As FIGURAS de 8.15 a 8.17 mostram os histogramas, para a carga de ruptura das vigas V1, V2 e V3. As FIGURAS de 8.18 a 8.20 apresentam os correspondentes gráficos de probabilidade normal.

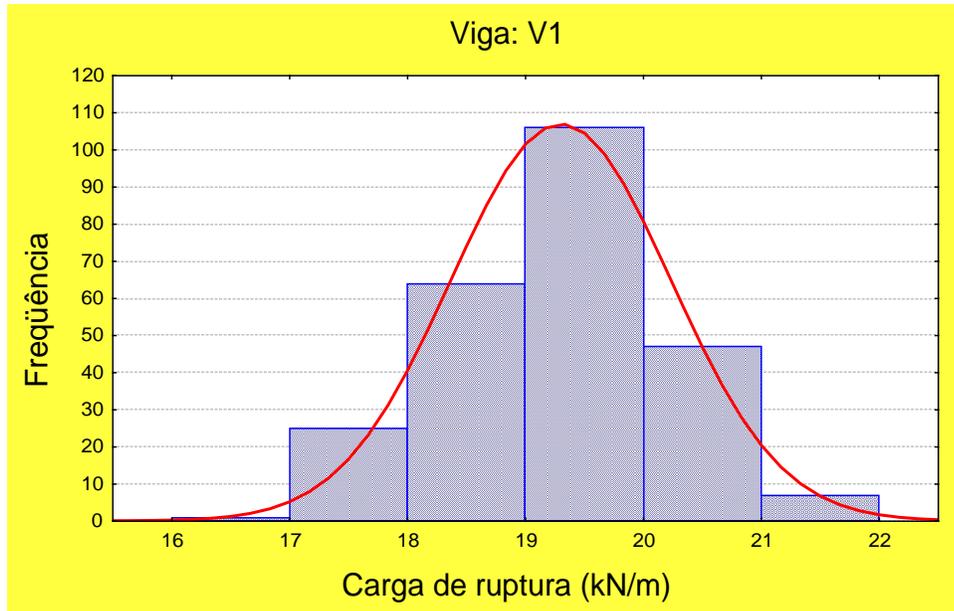


FIGURA 8.15 – Histograma para a carga de ruptura da viga V1

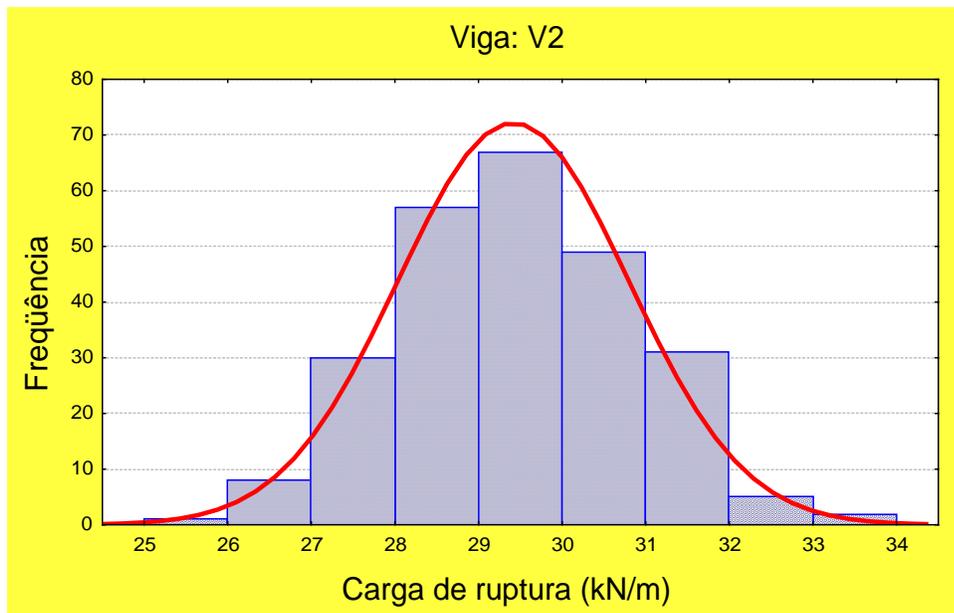


FIGURA 8.16 – Histograma da carga de ruptura da viga V2

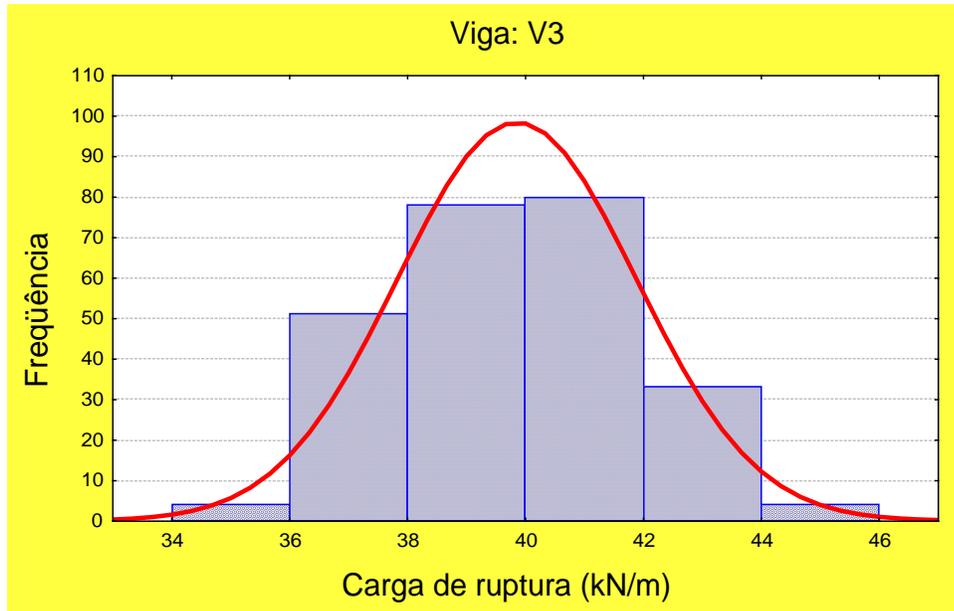


FIGURA 8.17 – Histograma da carga de ruptura da viga V3

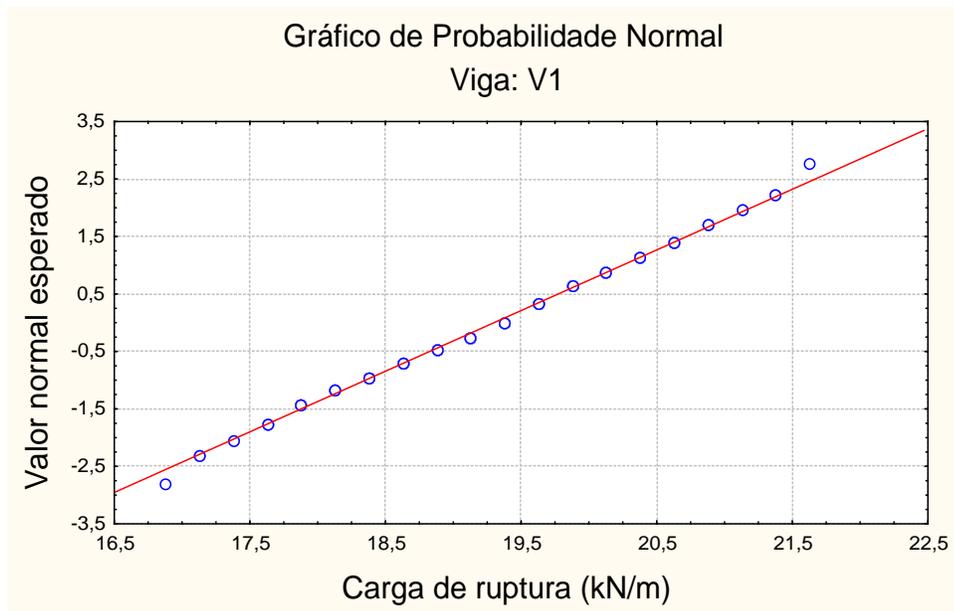


FIGURA 8.18 – Gráfico de probabilidade normal para a carga de ruptura da viga V1

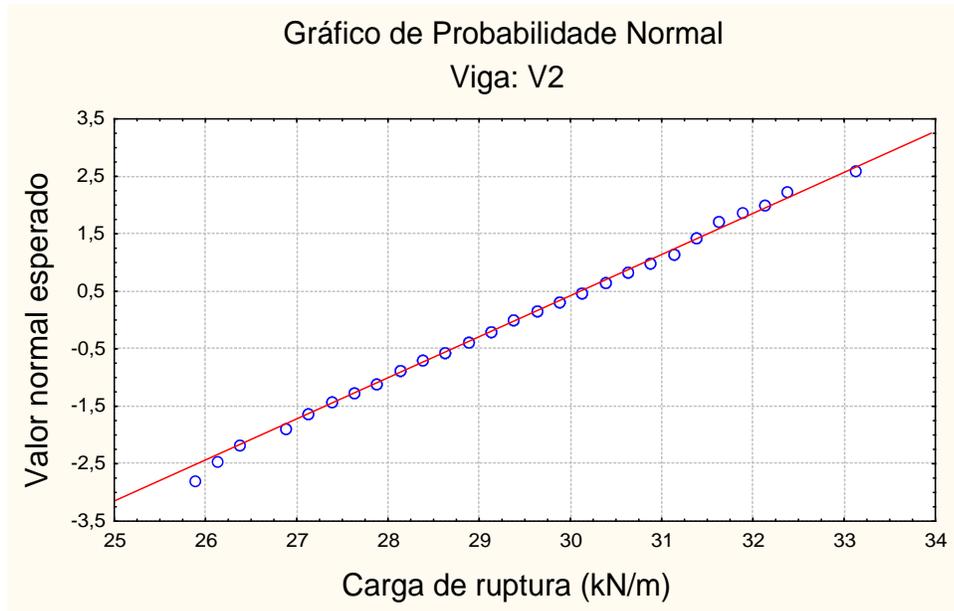


FIGURA 8.19 – Gráfico de probabilidade normal para a carga de ruptura da viga V2

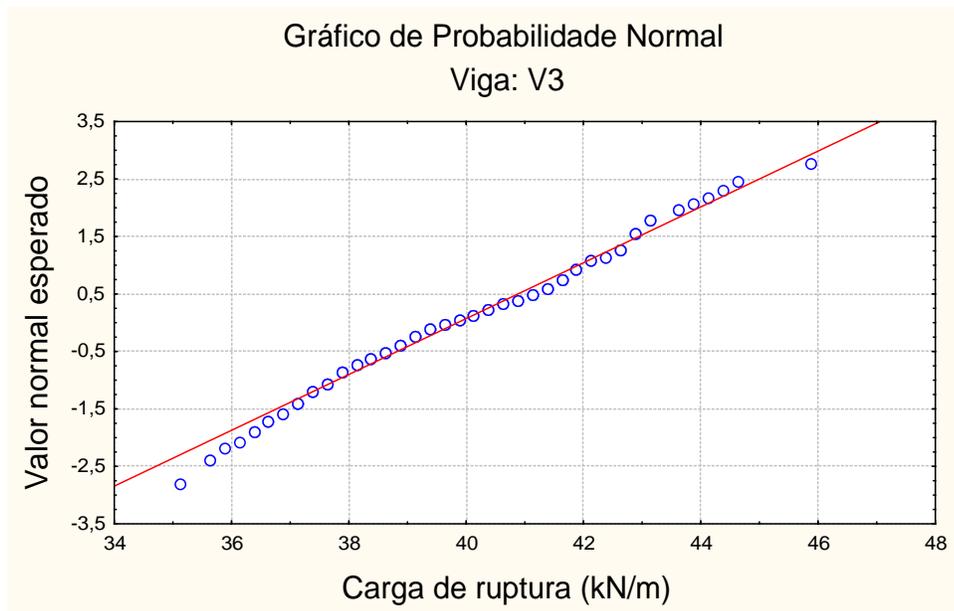


FIGURA 8.20 – Gráfico de probabilidade normal para a carga de ruptura da viga V3

Observando os gráficos das FIGURAS 8.15 a 8.20, pode-se concluir que a distribuição das resistências (cargas de ruptura), para as vigas analisadas, pode ser aproximada por uma distribuição normal de probabilidade, cujos parâmetros são a média μ_R e o desvio padrão σ_R apresentados na TABELA 8.8.

Para as vigas em questão, admitindo-se que tanto a carga permanente g , como a carga acidental q , possuam uma distribuição normal de probabilidade; e supondo um coeficiente de variação $V_g = 0,10$, para a primeira, e um coeficiente $V_q = 0,40$, para a segunda, chega-se à definição do carregamento encontrada na TABELA 8.9.

Na TABELA 8.9, o valor característico da carga S_k corresponde ao quantil de 95% da curva normal, sendo o valor médio da carga μ_S dado por:

$$\mu_S = \frac{S_k}{(1 - 1,645 V_S)}, \quad (8.8)$$

onde V_S é o coeficiente de variação da carga considerada, calculado pela expressão:

$$V_S = \frac{\sigma_S}{\mu_S}, \quad (8.9)$$

onde σ_S é o desvio padrão da carga.

Observa-se através da TABELA 8.9, que como a carga permanente compõe 75% do carregamento, mesmo que a carga acidental possua um coeficiente de variação de 0,40, o coeficiente de variação da carga total, igual a 0,11, aproxima-se bastante do coeficiente de variação permanente, igual a 0,10. Esta é uma situação usual em edifícios residenciais de concreto armado.

TABELA 8.9 – Definição do carregamento para as vigas V1, V2 e V3

Viga	Carga	S_k (kN/m)	μ_s (kN/m)	σ_s (kN/m)	V_s
V1	Permanente (g)	7,50	6,44	0,64	0,10
	Acidental (q)	2,50	1,51	0,60	0,40
	Total (p)	10,00	7,95	0,88	0,11
V2	Permanente (g)	11,25	9,66	0,97	0,10
	Acidental (q)	3,75	2,26	0,90	0,40
	Total (p)	15,00	11,92	1,32	0,11
V3	Permanente (g)	15,00	12,88	1,29	0,10
	Acidental (q)	5,00	3,02	1,21	0,40
	Total (p)	20,00	15,90	1,76	0,11

Para esta definição de carregamento, o índice de confiabilidade β , conforme definido pela equação (8.6) é apresentado na TABELA 8.10. No cálculo de β , foram consideradas as variabilidades das propriedades mecânicas dos materiais, e para as dimensões da seção transversal, que constam na TABELA 8.6.

A TABELA 8.10 também contém o valor esperado μ_M e o desvio padrão σ_M para a margem de segurança M , conforme foi definida pela equação (8.1). Como uma informação adicional, também é indicada a ordem de grandeza da probabilidade de falha em relação ao Estado Limite Último.

TABELA 8.10 – Análise de confiabilidade para as vigas V1, V2 e V3

Viga	μ_M (kN/m)	σ_M (kN/m)	β	$P_f = \Phi(-\beta)$
V1	11,35	1,28	8,85	$< 1 \times 10^{-12}$
V2	17,50	1,91	9,15	$< 1 \times 10^{-12}$
V3	23,95	2,69	8,91	$< 1 \times 10^{-12}$

Os valores alcançados para β são bastante elevados, indicando um alto nível de segurança. Isto se deve basicamente ao fato de a carga de ruptura da viga ter uma pequena dispersão, com $V_R = 0,05$. Sendo a viga esbelta e subarmada, a sua ruptura depende principalmente da tensão de escoamento da armadura longitudinal f_y , que, por ser o aço um material produzido com um elevado controle de qualidade, possui um coeficiente de variação baixo $V_{f_y} = 0,05$.

8.4 – ANÁLISE PROBABILÍSTICA DE PILARES

Com o objetivo de avaliar como a segurança de pilares, em relação ao Estado Limite Último, é afetada pelas variações das propriedades mecânicas dos materiais, e por variações das dimensões da seção transversal, foram analisados 27 pilares. Estes pilares foram projetados segundo as recomendações da norma NBR-6118/1980, com as mais diversas combinações de esbeltez, taxa de armadura e relação e_1/h .

Todos os pilares são birrotulados, de seção transversal quadrada de 40 cm de lado, e foram submetidos a uma carga de compressão excêntrica em suas extremidades, conforme pode-se observar na FIGURA 8.21.

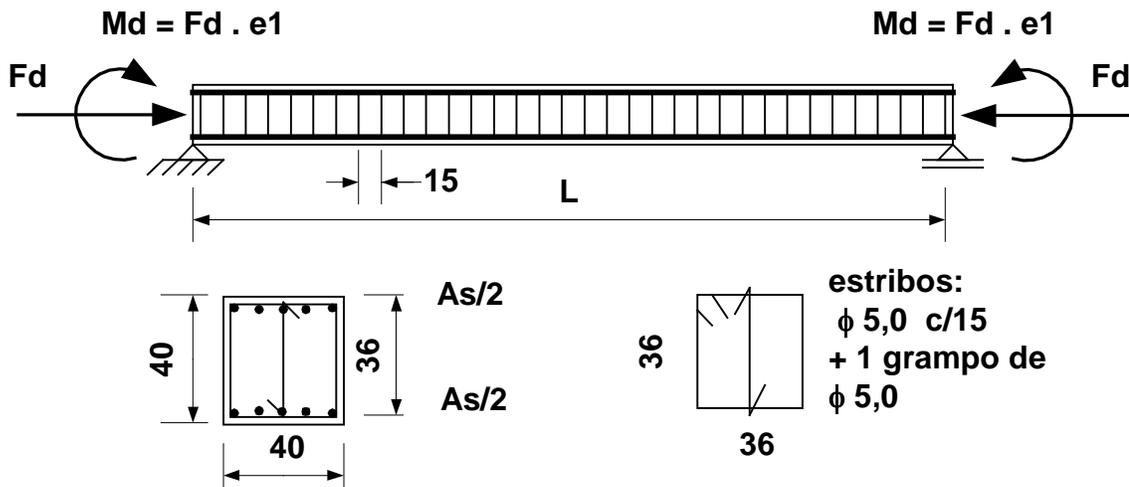


FIGURA 8.21 – Geometria e carregamento dos pilares de P1 a P27

Foram feitas combinações entre os índices de esbeltez $\lambda = 26, 52$ e 78 , as taxas de armadura $\rho = 0,80\%$, $1,50\%$ e $3,00\%$, e relações $e_1/h = 0,10, 0,20$ e $0,30$.

Estes pilares foram dimensionados à flexo-compressão, tendo os efeitos de 2ª ordem sido considerados de forma simplificada, de acordo com o item 4.1.1.3C da NBR-6118/1980.

A carga de serviço de cada pilar é composta da seguinte forma: $Fk = Gk + Qk$, sendo a carga permanente Gk , e a carga acidental Qk . Foi considerada uma relação $Gk/(Gk+Qk) = 0,75$, ou seja, a carga permanente é preponderante. A carga de ruptura de projeto é $Fd = 1,4 Fk$.

As propriedades mecânicas dos materiais, concreto e aço, utilizadas nas análises encontram-se na TABELA 8.11.

As TABELAS 8.12, 8.13 e 8.14 contêm os resultados do dimensionamento dos pilares de P1 a P9, com $\lambda = 26$; de P10 a P18, com $\lambda = 52$; e de P19 a P27, com $\lambda = 78$; respectivamente.

Para a proteção contra a flambagem das barras longitudinais, em todos os pilares foram empregados estribos de 5,0 mm a cada 15 cm, mais um grampo também de 5,0 mm.

TABELA 8.11 – Propriedades mecânicas dos materiais para os pilares analisados

CONCRETO	ARMADURA
$f_{ck} = 3,00 \text{ kN/cm}^2$	Longitudinal: CA-50 $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$
$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{(1 - 1,645 V_{fc})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Estribos: CA-60 $f_{yk} = 60 \text{ kN/cm}^2$
$f_{ctm} = 0,14 (f_{ck})^{\frac{2}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	$f_{ym} = \frac{f_{yk}}{(1 - 1,645 V_{fy})} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$
$E_{cm} = 2.150 (f_{cm})^{\frac{1}{3}} \text{ (kN/cm}^2\text{)}$	Módulo de Deformação Longitudinal: $E_{sm} = 20.000 \text{ kN/cm}^2$

TABELA 8.12 – Dimensionamento dos pilares com $\lambda = 26$, de P1 a P9

Pilar	F_k (kN)	F_d (kN)	e_1/h	e_1 (cm)	e_2 (cm)	A_s (cm ²)	ρ (%)
P1	1850	2590	0,10	4	1,00	12,80	0,80
P2	2130	2982	0,10	4	0,92	24,00	1,50
P3	2725	3815	0,10	4	0,78	48,00	3,00
P4	1450	2030	0,20	8	1,15	12,80	0,80
P5	1720	2408	0,20	8	1,04	24,00	1,50
P6	2230	3122	0,20	8	0,89	48,00	3,00
P7	1155	1617	0,30	12	1,25	12,80	0,80
P8	1400	1960	0,30	12	1,17	24,00	1,50
P9	1875	2625	0,30	12	0,99	48,00	3,00

TABELA 8.13 – Dimensionamento dos pilares com $\lambda = 52$, de P10 a P18

Pilar	F_k (kN)	F_d (kN)	e_1/h	e_1 (cm)	e_2 (cm)	A_s (cm ²)	ρ (%)
P10	1500	2100	0,10	4	4,50	12,80	0,80
P11	1790	2506	0,10	4	4,07	24,00	1,50
P12	2400	3360	0,10	4	3,39	48,00	3,00
P13	1165	1631	0,20	8	5,01	12,80	0,80
P14	1430	2002	0,20	8	4,63	24,00	1,50
P15	1955	2737	0,20	8	3,86	48,00	3,00
P16	955	1337	0,30	12	5,01	12,80	0,80
P17	1180	1652	0,30	12	5,01	24,00	1,50
P18	1640	2296	0,30	12	4,29	48,00	3,00

TABELA 8.14 – Dimensionamento dos pilares com $\lambda = 78$, de P19 a P27

Pilar	F_k (kN)	F_d (kN)	e_1/h	e_1 (cm)	e_2 (cm)	A_s (cm ²)	ρ (%)
P19	1030	1442	0,10	4	11,28	12,80	0,80
P20	1275	1785	0,10	4	11,05	24,00	1,50
P21	1860	2604	0,10	4	8,96	48,00	3,00
P22	830	1162	0,20	8	11,28	12,80	0,80
P23	1075	1505	0,20	8	11,28	24,00	1,50
P24	1540	2156	0,20	8	9,99	48,00	3,00
P25	645	903	0,30	12	11,28	12,80	0,80
P26	935	1309	0,30	12	11,28	24,00	1,50
P27	1305	1827	0,30	12	10,92	48,00	3,00

Para determinar a distribuição de probabilidade da carga de ruptura destes pilares, analogamente ao caso das vigas, foram realizadas 250 simulações de Monte Carlo. Em cada simulação, foram geradas de forma aleatória as propriedades mecânicas dos materiais e as dimensões da seção transversal.

As propriedades do concreto foram consideradas como perfeitamente correlacionadas no espaço, ou seja, assumem um valor constante ao longo de toda a extensão do pilar. As propriedades (variáveis aleatórias) cuja variabilidade foi considerada, seus principais parâmetros e distribuições de probabilidade adotadas são apresentadas na TABELA 8.15.

Os pilares foram analisados, através do método dos elementos finitos, empregando-se uma malha de $5 \times 2 = 10$ elementos, sendo discretizada apenas metade do pilar, dadas as condições de simetria de geometria, propriedades e carregamento. A malha de elementos finitos utilizada é a mesma mostrada na FIGURA 8.4.

O gráfico da FIGURA 8.22 apresenta a convergência estatística do valor esperado da carga de ruptura do pilar com o aumento do tamanho da amostra, para os pilares P04, P17 e P26. O gráfico da FIGURA 8.23 mostra a convergência do desvio padrão da carga de ruptura do pilar com o aumento do tamanho da amostra, também dos pilares P04, P17 e P26.

TABELA 8.15 – Parâmetros e distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias consideradas para os pilares de P1 a P27

Variável aleatória	Unidade	Distribuição de Probabilidade	Média μ	Desvio Padrão σ	Coef. de Variação V	Valor característico X_k
f_c	kN/cm^2	<i>Normal</i>	f_{cm}	-	0,15	f_{ck}
f_y	kN/cm^2	<i>Normal</i>	f_{ym}	-	0,05	f_{yk}
E_s	kN/cm^2	<i>Normal</i>	E_{sm}	-	0,025	-
b	cm	<i>Normal</i>	b nominal	0,50 cm	-	b nominal
h	cm	<i>Normal</i>	h nominal	0,50 cm	-	h nominal

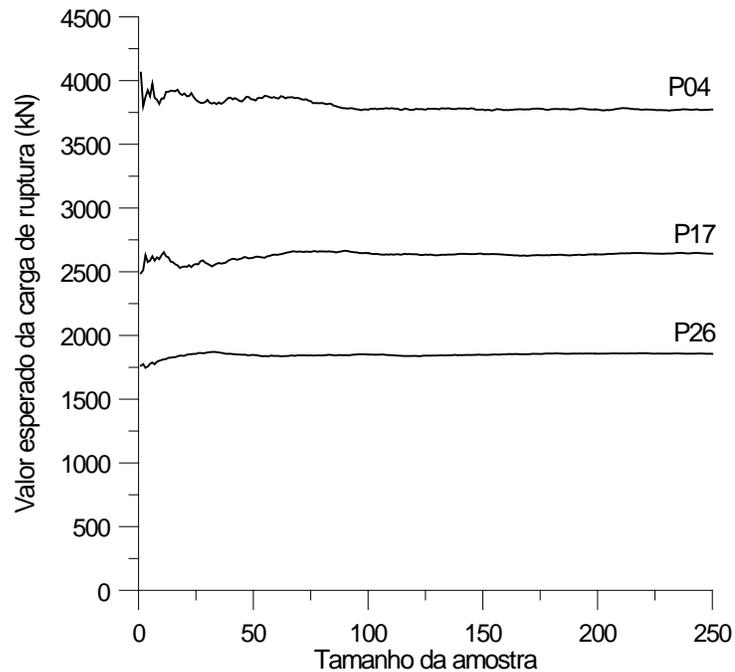


FIGURA 8.22 – Convergência estatística do valor esperado da carga de ruptura, dos pilares P04, P17 e P26

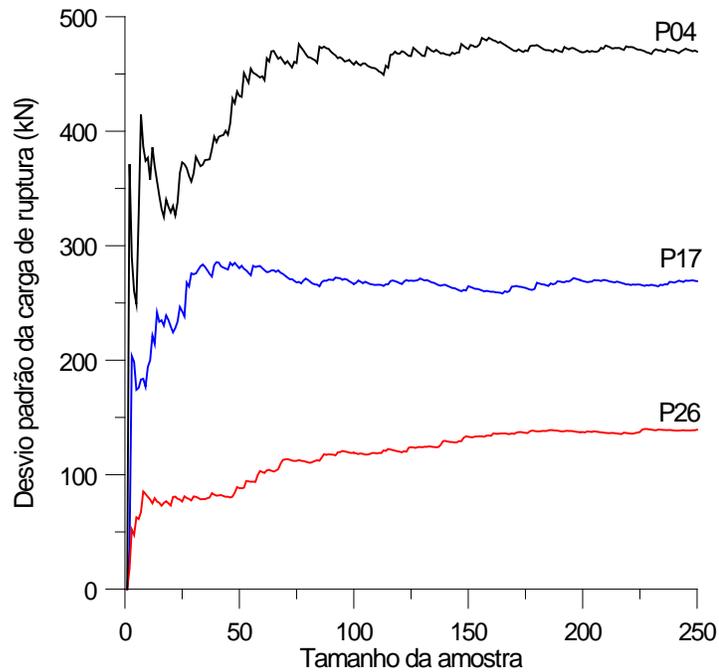


FIGURA 8.23 – Convergência estatística do desvio padrão da carga de ruptura, dos pilares P04, P17 e P26

Observa-se que, para 250 simulações, já existe uma boa convergência estatística tanto para o valor esperado como para o desvio padrão da carga de ruptura dos pilares P04, P17 e P26. Condições semelhantes de convergência estatística dos resultados foram obtidas para os demais pilares analisados.

Para que se possa ter uma idéia da forma da distribuição de probabilidade da carga de ruptura dos pilares P04, P17 e P26, são apresentados os histogramas da carga de ruptura nas FIGURAS 8.24, 8.25 e 8.26, respectivamente. Nas FIGURAS 8.27, 8.28 e 8.29 são mostrados os gráficos de probabilidade normal da carga de ruptura, para estes pilares.

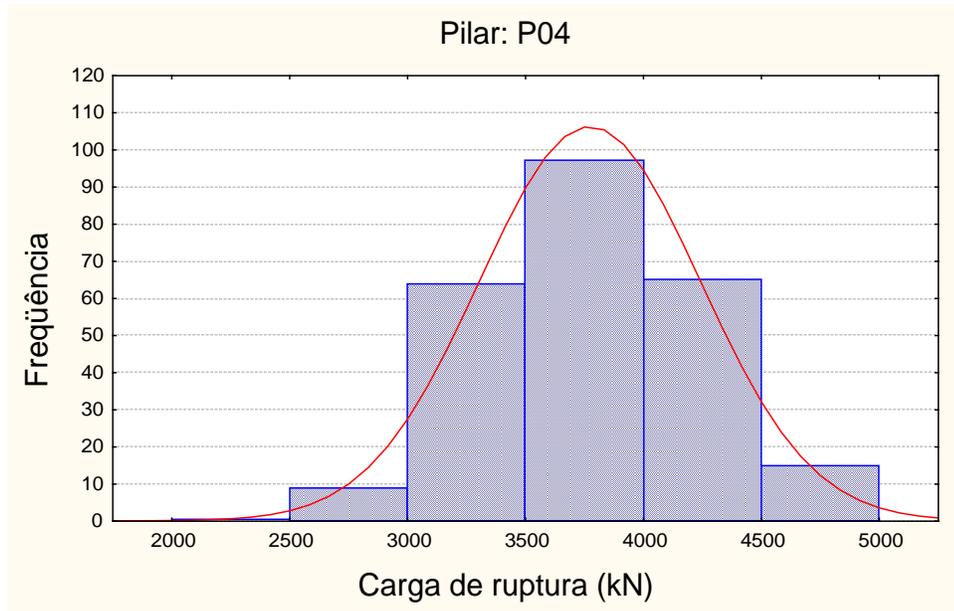


FIGURA 8.24 – Histograma da carga de ruptura para o pilar P04

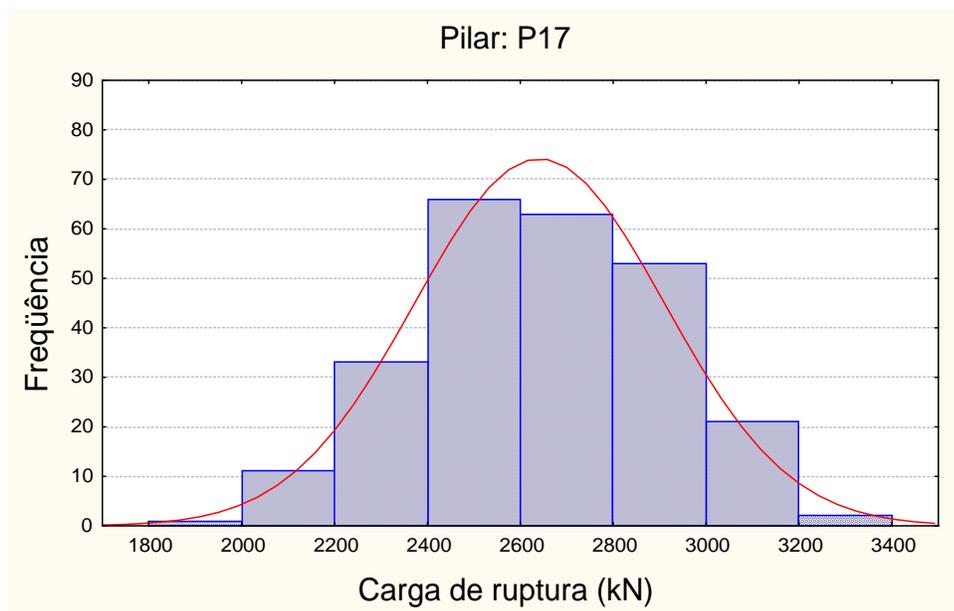


FIGURA 8.25 – Histograma da carga de ruptura para o pilar P17

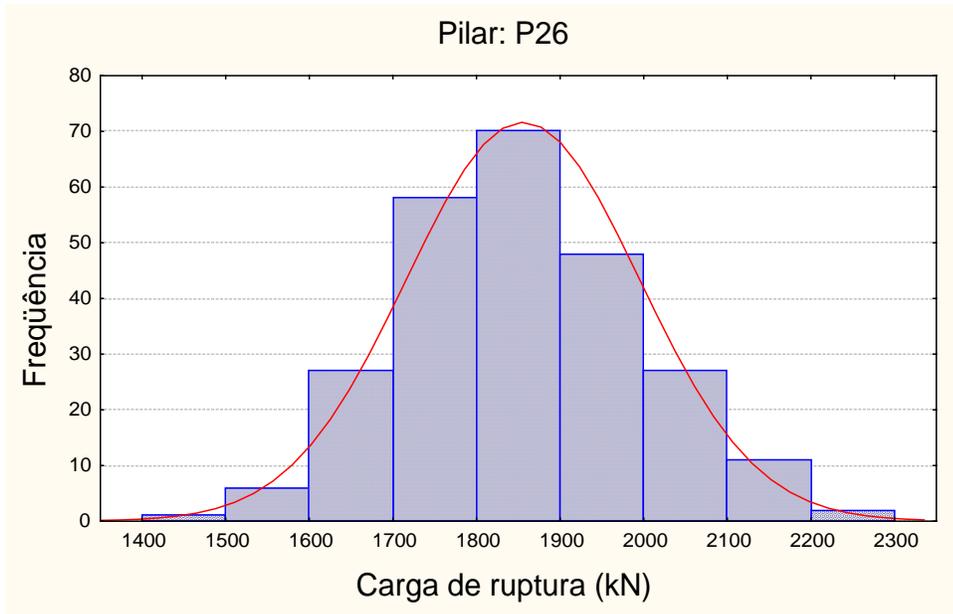


FIGURA 8.26 – Histograma da carga de ruptura para o pilar P26

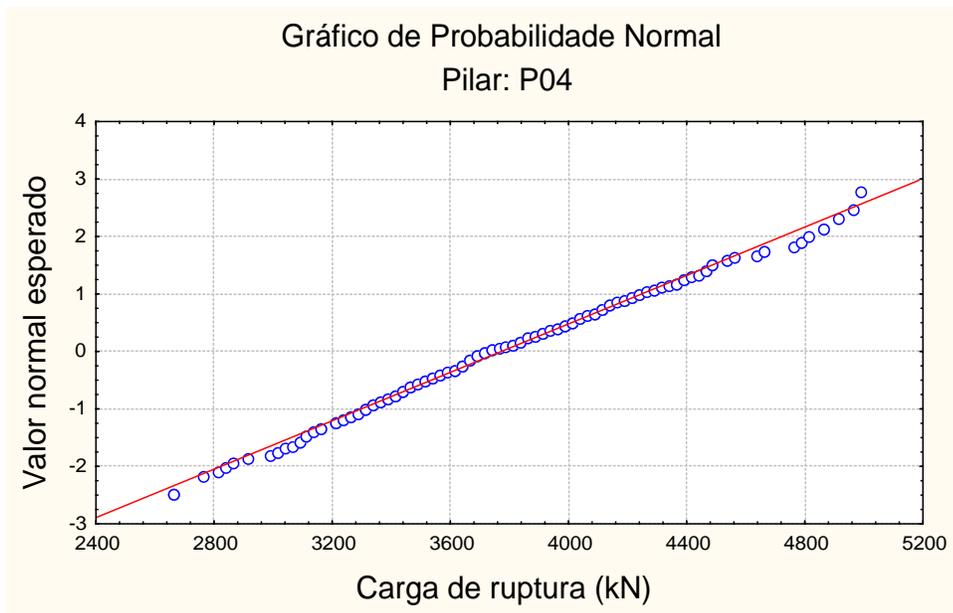


FIGURA 8.27 – Gráfico de probabilidade normal, para a carga de ruptura do pilar P04

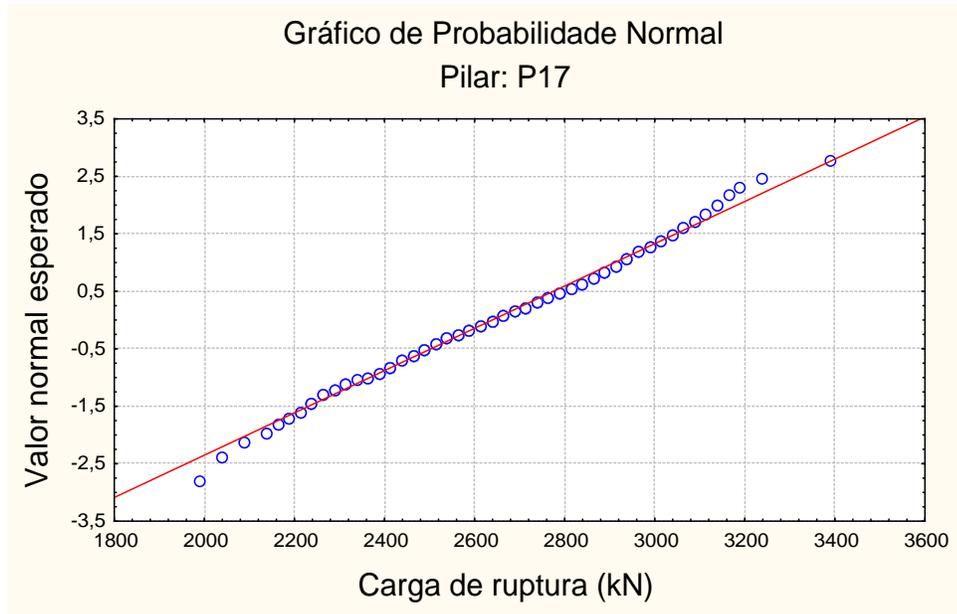


FIGURA 8.28 – Gráfico de probabilidade normal, para a carga de ruptura do pilar P17

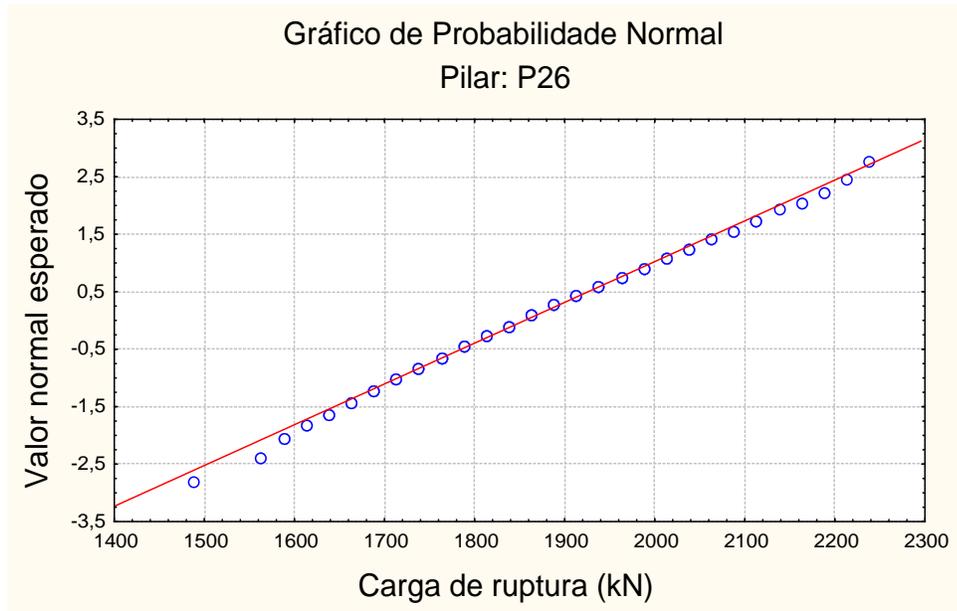


FIGURA 8.29 – Gráfico de probabilidade normal, para a carga de ruptura do pilar P26

Estudando os gráficos das FIGURAS 8.24 a 8.29, pode-se concluir que a distribuição das resistências (cargas de ruptura) para os pilares P04, P17 e P26, pode ser aproximada por uma distribuição normal de probabilidade, cujos parâmetros são a média μ_R , e o desvio padrão σ_R , obtidos através das simulações de Monte Carlo. A distribuição de probabilidade da carga de ruptura dos demais pilares analisados também pode ser representada por uma curva normal, com boa aproximação.

Para os pilares moderadamente esbeltos em estudo, admite-se que tanto a carga permanente G , como a carga acidental Q , obedecem a uma distribuição normal de probabilidade. Considerando-se um coeficiente de variação $V_G = 0,10$, para G , e um coeficiente $V_Q = 0,40$, para Q , estabelece-se a definição do carregamento para todos os pilares. Esta definição do carregamento é mostrada nas TABELAS 8.16, 8.17 e 8.18, respectivamente, para os pilares com índice de esbeltez $\lambda = 26, 52$ e 78 .

Para todos os pilares, manteve-se a relação entre a carga permanente e a carga total igual a $Gk/(Gk+Qk) = 0,75$. Além disso, convencionou-se que as ações características correspondam ao quantil de 95% da curva de Gauss.

Na montagem destas TABELAS, foram utilizadas as seguintes relações:

$$G_k = 0,75 S_k, \quad (8.10)$$

$$\mu_G = \frac{G_k}{(1+1,645V_G)}, \quad (8.11)$$

$$\sigma_G = 0,10 \mu_G \quad (8.12)$$

$$Q_k = 0,25 S_k, \quad (8.13)$$

$$\mu_Q = \frac{Q_k}{(1+1,645V_Q)}, \quad (8.14)$$

e

$$\sigma_Q = 0,40 \mu_Q. \quad (8.15)$$

TABELA 8.16 – Definição do carregamento para pilares com $\lambda = 26$

Pilar	S_k (kN)	G_k (kN)	μ_G (kN)	σ_G (kN)	Q_k (kN)	μ_Q (kN)	σ_Q (kN)
P1	1850	1387,50	1191,50	119,15	462,50	278,95	111,58
P2	2130	1597,50	1371,83	137,18	532,50	321,17	128,47
P3	2725	2043,75	1755,05	175,50	681,25	410,89	164,35
P4	1450	1087,50	933,88	93,39	362,50	218,64	87,45
P5	1720	1290,00	1107,77	110,78	430,00	259,35	103,74
P6	2230	1672,50	1436,24	143,62	557,50	336,25	134,50
P7	1155	866,25	743,88	74,39	288,75	174,16	69,66
P8	1400	1050,00	901,67	90,17	350,00	211,10	84,44
P9	1875	1406,25	1207,60	120,76	468,75	282,72	113,09

TABELA 8.17 – Definição do carregamento para pilares com $\lambda = 52$

Pilar	S_k (kN)	G_k (kN)	μ_G (kN)	σ_G (kN)	Q_k (kN)	μ_Q (kN)	σ_Q (kN)
P10	1500	1125,00	966,08	96,61	375,00	226,18	90,47
P11	1790	1342,50	1152,86	115,29	447,50	269,90	107,96
P12	2400	1800,00	1545,73	154,57	600,00	361,88	144,75
P13	1165	873,75	750,32	75,03	291,25	175,66	70,27
P14	1430	1072,50	921,00	92,10	357,50	215,62	86,25
P15	1955	1466,25	1259,12	125,91	488,75	294,78	117,91
P16	955	716,25	615,07	61,51	238,75	144,00	57,60
P17	1180	885,00	759,98	76,00	295,00	177,93	71,17
P18	1640	1230,00	1056,25	105,62	410,00	247,29	98,91

TABELA 8.18 – Definição do carregamento para pilares com $\lambda = 78$

Pilar	S_k (kN)	G_k (kN)	μ_G (kN)	σ_G (kN)	Q_k (kN)	μ_Q (kN)	σ_Q (kN)
P19	1030	772,50	663,37	66,34	257,50	155,31	62,12
P20	1275	956,25	821,17	82,12	318,75	192,25	76,90
P21	1860	1395,00	1197,94	119,79	465,00	280,46	112,18
P22	830	622,50	534,56	53,46	207,50	125,15	50,06
P23	1075	806,25	692,36	69,24	268,75	162,09	64,84
P24	1540	1155,00	991,84	99,18	385,00	232,21	92,88
P25	645	483,75	415,41	41,54	161,25	97,26	38,90
P26	935	701,25	602,19	60,22	233,75	140,98	56,39
P27	1305	978,75	840,49	84,05	326,25	196,77	78,71

Com base nestas definições de carregamento, apresentam-se nas TABELAS 8.19, 8.20 e 8.21, os resultados obtidos para o valor esperado, desvio padrão e coeficiente de variação para o carregamento total $S = G + Q$. Na determinação destes valores, considerando-se que as componentes G e Q , possuam distribuição normal de probabilidade, forma utilizadas as seguintes equações:

$$\mu_S = \mu_G + \mu_Q, \quad (8.16)$$

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_G^2 + \sigma_Q^2}, \quad (8.17)$$

e

$$V_S = \frac{\mu_S}{\sigma_S}. \quad (8.18)$$

Além disso, também são mostrados nas TABELAS 8.19, 8.20 e 8.21, os valores determinados para o valor esperado, o desvio padrão e o coeficiente de variação da carga de ruptura R . Concluindo, como forma de comparar o nível de segurança atingido no projeto de cada pilar, é apresentado o índice de confiabilidade β , calculado para cada caso.

Como no caso das vigas, nos pilares também a carga permanente é preponderante (75% da carga total), e o coeficiente de variação da carga total, igual a 0,11, aproxima-se bastante do coeficiente de variação permanente, igual a 0,10. Isto acontece mesmo que a carga acidental possua um coeficiente de variação de 0,40. Esta é uma situação usual em pilares de edifícios residenciais, com estrutura em concreto armado.

O índice de confiabilidade β para estes pilares oscilou entre um mínimo de 5,27, para o pilar P1 ($\lambda = 26$, $\rho = 0,80\%$, $e1/h = 0,10$), e um máximo de 7,04 para o pilar P27 ($\lambda = 78$, $\rho = 3,00\%$, $e1/h = 0,30$), correspondendo a probabilidades de falha P_f , da ordem de 1×10^{-6} a 1×10^{-12} .

TABELA 8.19 – Análise de confiabilidade para os pilares com $\lambda = 26$ (P1 a P9)

$\lambda = 26$									
Pilar	$\rho(\%)$	$e1/h$	μ_S (kN)	σ_S (kN)	V_S	μ_R (kN)	σ_R (kN)	V_R	β
P1	0,80	0,10	1470,45	163,24	0,11	5004,40	650,57	0,13	5,27
P2	1,50	0,10	1693,00	187,94	0,11	5525,10	663,01	0,12	5,56
P3	3,00	0,10	2165,93	240,45	0,11	6232,10	685,53	0,11	5,60
P4	0,80	0,20	1152,51	127,94	0,11	3773,10	452,77	0,12	5,57
P5	1,50	0,20	1367,12	151,77	0,11	4210,10	463,11	0,11	5,83
P6	3,00	0,20	1772,49	196,77	0,11	5133,70	513,37	0,10	6,11
P7	0,80	0,30	918,04	101,91	0,11	2797,70	307,75	0,11	5,80
P8	1,50	0,30	1112,77	123,53	0,11	3333,40	333,34	0,10	6,25
P9	3,00	0,30	1490,32	165,44	0,11	4190,80	393,94	0,09	6,32

TABELA 8.20 – Análise de confiabilidade para os pilares com $\lambda = 52$ (P10 a P18)

$\lambda = 52$									
Pilar	$\rho(\%)$	e_1/h	μ_S (kN)	σ_S (kN)	V_S	μ_R (kN)	σ_R (kN)	V_R	β
P10	0,80	0,10	1192,26	132,36	0,11	4355,30	566,19	0,13	5,44
P11	1,50	0,10	1422,76	157,94	0,11	4802,10	576,25	0,12	5,66
P12	3,00	0,10	1907,61	211,77	0,11	5741,00	631,51	0,11	5,76
P13	0,80	0,20	925,99	102,80	0,11	3114,80	373,78	0,12	5,65
P14	1,50	0,20	1136,62	126,18	0,11	3582,00	394,02	0,11	5,91
P15	3,00	0,20	1553,91	172,50	0,11	4381,80	416,27	0,10	6,28
P16	0,80	0,30	759,07	84,27	0,11	2135,90	213,59	0,10	6,00
P17	1,50	0,30	937,91	104,12	0,11	2641,30	250,92	0,10	6,27
P18	3,00	0,30	1303,53	144,71	0,11	3476,50	278,12	0,08	6,93

TABELA 8.21 – Análise de Confiabilidade para os pilares com $\lambda = 78$ (P19 a P27)

$\lambda = 78$									
Pilar	$\rho(\%)$	e_1/h	μ_S (kN)	σ_S (kN)	V_S	μ_R (kN)	σ_R (kN)	V_R	β
P19	0,80	0,10	818,68	90,88	0,11	3294,40	428,27	0,13	5,65
P20	1,50	0,10	1013,42	112,50	0,11	3641,90	437,03	0,12	5,82
P21	3,00	0,10	1478,40	164,12	0,11	4467,80	446,78	0,10	6,28
P22	0,80	0,20	659,71	73,24	0,11	2141,00	235,51	0,11	6,01
P23	1,50	0,20	854,45	94,85	0,11	2496,50	234,67	0,09	6,49
P24	3,00	0,20	1224,05	135,89	0,11	3279,40	262,35	0,08	6,96
P25	0,80	0,30	512,67	56,91	0,11	1390,30	125,13	0,09	6,38
P26	1,50	0,30	743,17	82,50	0,11	1855,50	139,16	0,08	6,88
P27	3,00	0,30	1037,26	115,15	0,11	2629,10	194,55	0,07	7,04

Estudando as TABELAS 8.19, 8.20 e 8.21, pode-se realizar algumas constatações interessantes, para os pilares analisados.

Em primeiro lugar, nota-se que o índice de confiabilidade β cresce com o aumento da taxa de armadura ρ . Este fato pode ser explicado porque, quanto maior for a taxa de armadura, maior será a contribuição do aço para a carga de ruptura do pilar. Como as propriedades do aço possuem uma menor variabilidade que as propriedades do concreto, acaba resultando uma menor variabilidade para a carga de ruptura da peça, e, conseqüentemente, um maior valor para β , para um determinado tipo de carregamento.

Os gráficos das FIGURAS 8.30, 8.31 e 8.32 mostram o efeito da taxa de armadura ρ no valor do índice de confiabilidade β , para pilares com índice de esbeltez λ igual a 26, 52 e 78, correspondentemente.

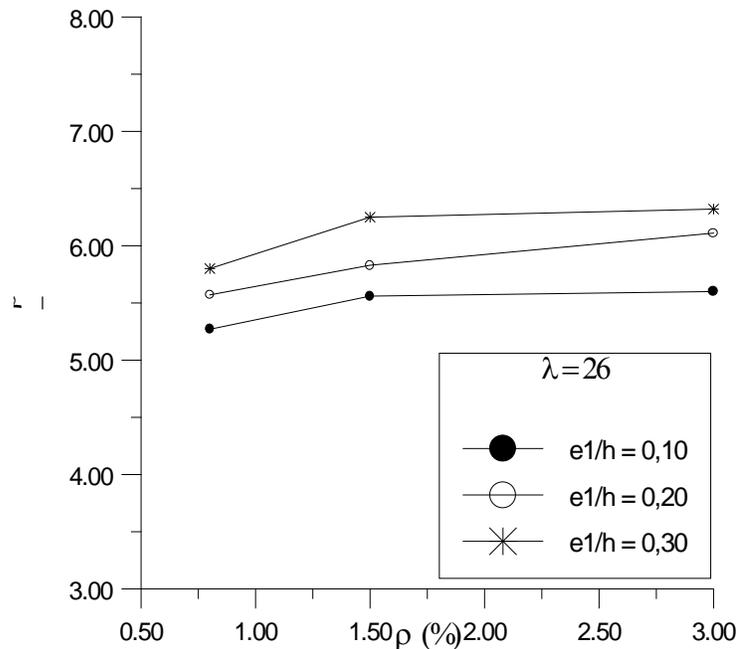


FIGURA 8.30 – Influência da taxa de armadura ρ no valor de β , para os pilares com $\lambda = 26$

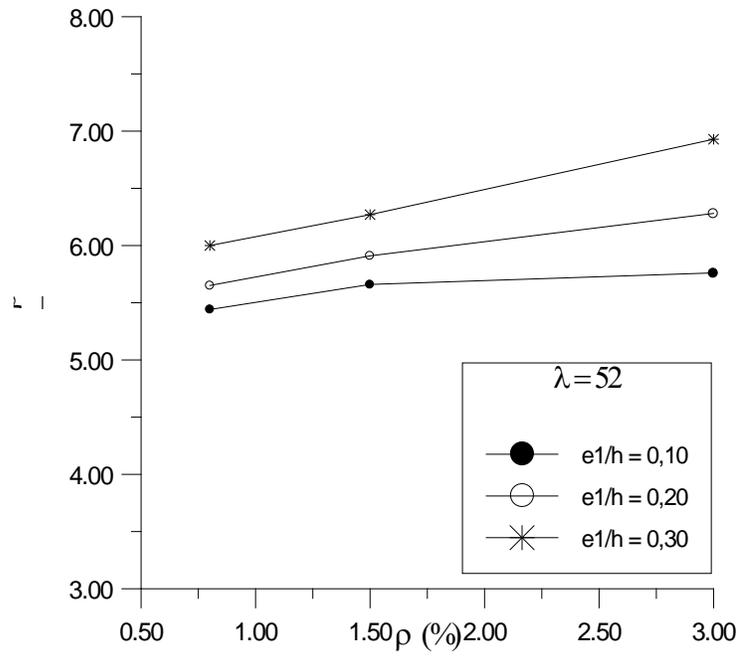


FIGURA 8.31 – Influência da taxa de armadura ρ no valor de β , para os pilares com $\lambda = 52$

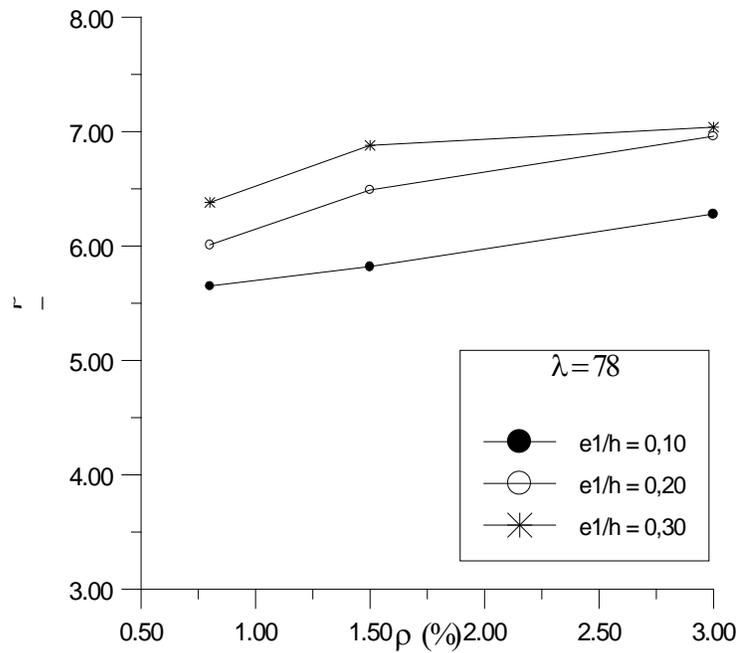


FIGURA 8.32 – Influência da taxa de armadura ρ no valor de β , para os pilares com $\lambda = 78$

Em segundo lugar, percebe-se que o índice de confiabilidade β aumenta juntamente com a relação e_1/h . Quanto maior for a excentricidade de primeira ordem e_1 em relação a altura h da seção transversal, menor será a zona de concreto comprimido na seção transversal, por ocasião da ruptura da peça. Neste caso, a influência da variabilidade das propriedades do concreto nos resultados diminui, enquanto que a influência da armadura, que possui menor dispersão em suas propriedades, cresce. Disto decorre uma menor variabilidade da carga de ruptura do pilar, o que produz um maior valor para β .

Os gráficos das FIGURAS 8.33, 8.34 e 8.35 mostram a influência da relação entre a excentricidade de primeira ordem e_1 e a altura h da seção transversal do pilar, no valor do índice de confiabilidade β , para os pilares com índice de esbeltez λ igual a 26, 52 e 78, respectivamente.

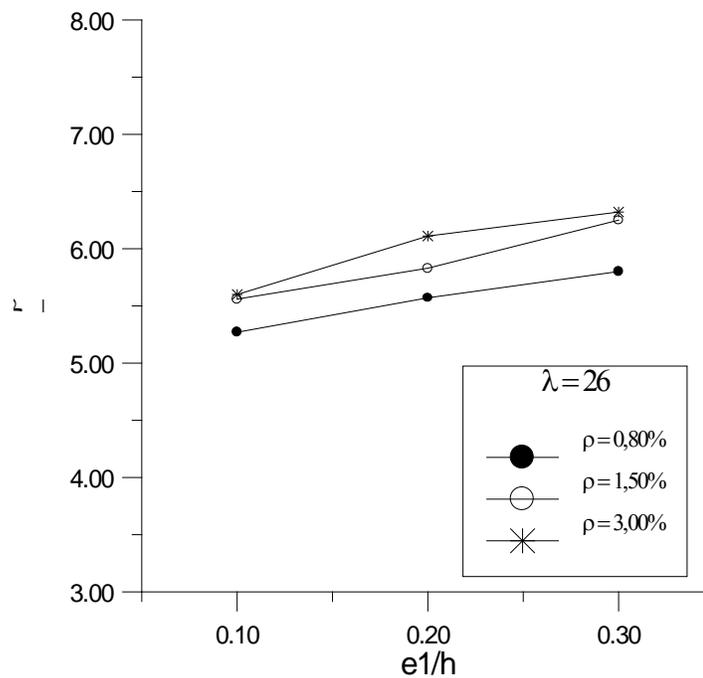


FIGURA 8.33 – Influência da relação e_1/h no valor de β , para os pilares com $\lambda = 26$

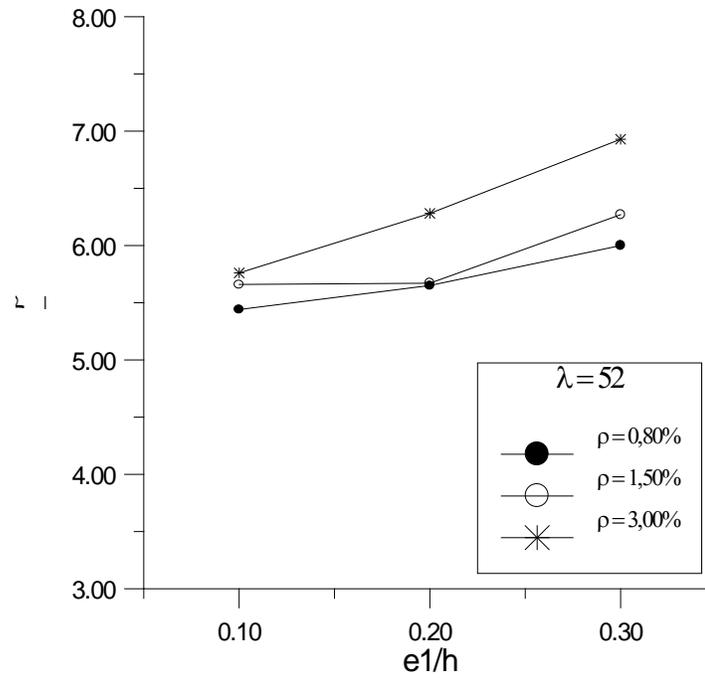


FIGURA 8.34 – Influência da relação e_1/h no valor de β , para os pilares com $\lambda = 52$

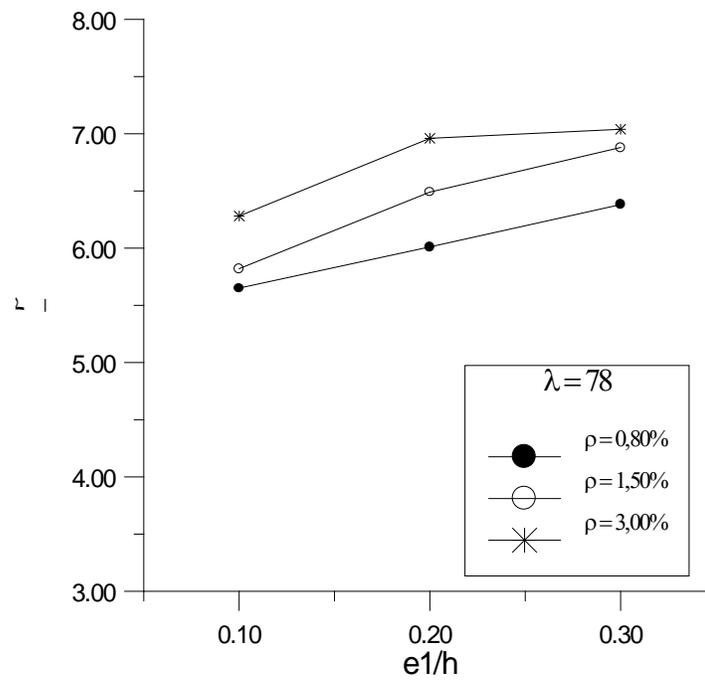


FIGURA 8.35 – Influência da relação e_1/h no valor de β , para os pilares com $\lambda = 78$

Em terceiro lugar, observa-se que o valor do índice de confiabilidade β sofre um acréscimo na medida em que o índice de esbeltez do pilar, λ , aumenta. Este fenômeno se explica pelo fato de que, quanto maior a esbeltez do pilar, maiores serão os deslocamentos transversais do mesmo nas imediações da ruptura. Quanto maiores os deslocamentos, maiores as deformações e menor a zona de concreto comprimido dentro da seção transversal. Além disso, a armadura menos comprimida passa a ser mais solicitada, podendo inclusive passar a resistir a esforços de tração, caso a linha neutra venha a situar-se dentro da seção transversal. Estes fatores levam a uma menor variabilidade da carga de ruptura do pilar, o que faz crescer o valor de β .

Os gráficos das FIGURAS 8.36, 8.37 e 8.38 apresentam a maneira como o índice de esbeltez λ afeta o valor do índice de confiabilidade β , para pilares com taxa de armadura ρ igual a 0,80%, 1,50% e 3,00%, correspondentemente.

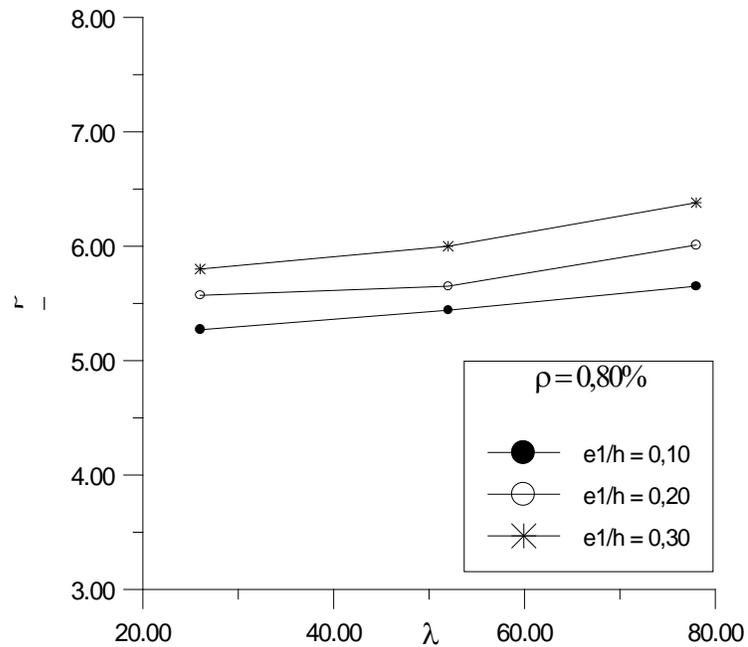


FIGURA 8.36 – Influência do índice de esbeltez λ no valor de β , para pilares com $\rho = 0,80\%$

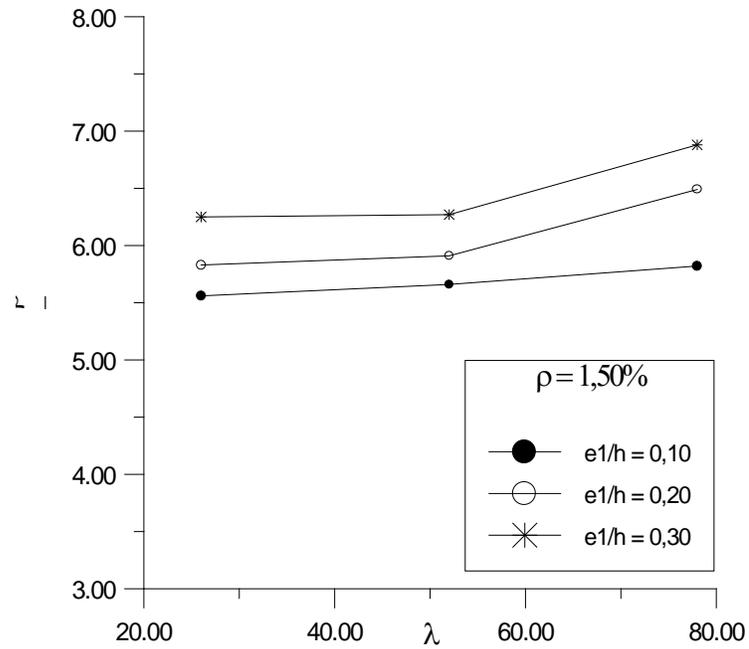


FIGURA 8.37 – Influência do índice de esbeltez λ no valor de β , para pilares com $\rho = 1,50\%$

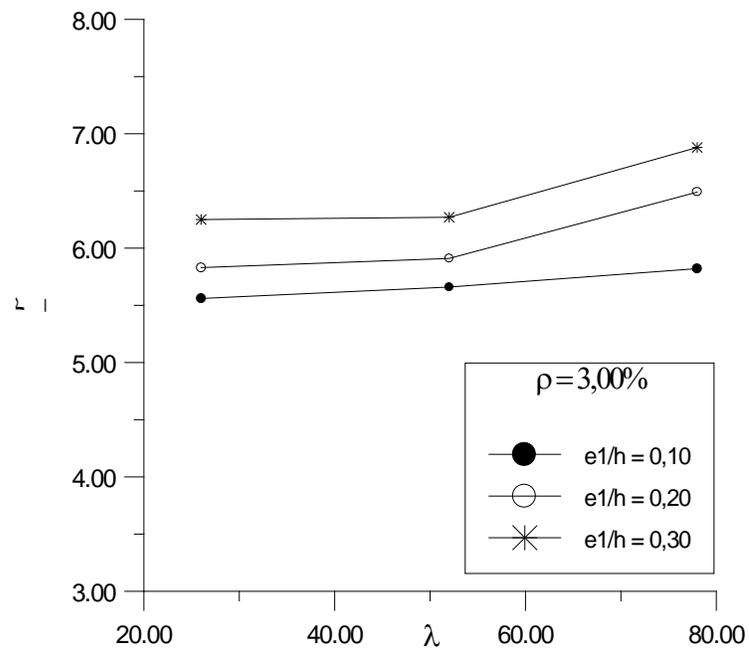


FIGURA 8.38 – Influência do índice de esbeltez λ no valor de β , para pilares com $\rho = 3,00\%$

Finalizando, deve-se afirmar que as conclusões aqui estabelecidas são válidas para pilares com as características de geometria, propriedades e carregamento aqui consideradas. Conclusões de caráter mais geral demandariam estudos probabilísticos mais exaustivos, para pilares com combinações mais variadas de seção transversal, esbeltez, taxa de armadura, propriedades mecânicas dos materiais e composições de carregamento.

9 – CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um modelo para análise probabilística de estruturas planas de concreto armado através do método dos elementos finitos. Durante o desenvolvimento e a aplicação deste modelo, foi possível estabelecer algumas conclusões, que são reunidas abaixo.

O modelo determinístico, desenvolvido para análise não-linear de estruturas de concreto, submetidas a um estado plano de tensão, mostrou-se capaz de acompanhar de forma bastante aproximada as curvas carga-deslocamento experimentais, tanto para as vigas como para os pilares, além da viga-parede, analisados. Houve uma boa concordância também no que se refere à carga de ruptura.

A realização de testes paramétricos, conjuntamente com as simulações de Monte Carlo, permitiu a identificação dos principais parâmetros que afetam a variabilidade da resposta estática de vigas e pilares de concreto armado.

No que se refere à flecha imediata, sob carga de serviço, em vigas projetadas segundo as especificações da NBR-6118/1980, mostrou-se que a sua variabilidade é grandemente influenciada pelas propriedades mecânicas do concreto e sua forma de distribuição. Para uma resistência à compressão característica do concreto f_{ck} mantida fixa, o aumento do coeficiente de variação V_{fc} , produz um aumento do coeficiente de variação da flecha, embora o seu valor esperado não se altere em muito.

Observou-se também, que quanto mais próxima a carga de serviço estiver da carga de fissuração da viga, maior será a variabilidade da flecha. Sob este aspecto notou-se que uma análise não-linear, com base nas propriedades médias dos materiais e com as dimensões nominais da seção transversal, produz resultados próximos ao valor esperado da resposta da estrutura. Isto é válido para os estágios iniciais de carga e para os estágios mais avançados, quando a fissuração já está estabilizada. Contudo, nas vizinhanças da carga de fissuração da viga, ocorrem desvios significativos da resposta obtida com os valores médios dos parâmetros em relação à resposta média da estrutura.

Variações nas dimensões da seção transversal e nas propriedades mecânicas da armadura não produziram alterações significativas na distribuição da flecha sob carga de serviço, nas vigas analisadas.

A distribuição da carga de ruptura de vigas projetadas para terem uma ruptura dúctil, apresentando escoamento da armadura tracionada, é controlada pela variabilidade das propriedades mecânicas da armadura. A carga de ruptura determinada com as propriedades médias dos materiais e as dimensões nominais da seção transversal ficou bastante próxima do valor esperado da carga de ruptura das vigas consideradas. O coeficiente de variação da carga de ruptura acompanha o coeficiente de variação da tensão de escoamento da armadura.

A distribuição das propriedades do concreto e a dispersão das dimensões da seção transversal influenciaram muito pouco a variabilidade da carga de ruptura das vigas estudadas.

O modelo possibilita, através da geração de um campo estocástico bidimensional, a representação da variação das propriedades do concreto ao longo da extensão da viga. Porém, a hipótese de correlação perfeita das propriedades do concreto, ou seja, a consideração de um valor constante para as mesmas ao longo de toda a viga, mostrou-se ser a hipótese mais desfavorável, tanto no que se refere a segurança quanto aos Estados Limites de Serviço, como em relação aos Estados Limites Últimos.

Para os pilares analisados, dimensionados à flexo-compressão segundo a NBR-6118/1980, a variabilidade das propriedades do concreto revelou-se ser o fator determinante da distribuição da resposta estática da estrutura. Mantendo-se o f_{ck} constante e fazendo crescer o coeficiente de variação V_{fc} , e, conseqüentemente, aumentando a resistência média f_{cm} , o valor esperado da carga de ruptura do pilar cresce. Contudo, o coeficiente de variação da carga de ruptura também cresce acentuadamente. Este efeito diminui com o aumento da taxa de armadura.

A variabilidade da resposta do pilar cresce na medida em que o carregamento avança, e o comportamento não-linear do concreto comprimido torna-se mais intenso. A resposta média do pilar tende a apresentar valores de deslocamentos um pouco maiores que aqueles determinados com as propriedades médias dos materiais e as dimensões nominais da seção transversal.

Como no caso das vigas, a consideração da correlação perfeita do campo estocástico de f_c revelou-se a hipótese mais conservadora, no que se refere à segurança dos pilares em relação ao Estado Limite Último.

A ruptura dos pilares é provocada pelo esmagamento do concreto, sem que o aço atinja a sua tensão de escoamento, pelo menos para as relações e_1/h e os índices de esbeltez estudados. Portanto, as variabilidades consideradas para as propriedades da armadura praticamente não causaram variações na carga de ruptura dos pilares analisados.

O efeito da variação das dimensões da seção transversal na carga de ruptura dos pilares estudados foi pequeno. Contudo, sua influência foi bem maior nos pilares do que no caso das vigas. O efeito das variações geométricas diminui com o aumento da taxa de armadura do pilar.

Considerando-se as variações existentes nas propriedades dos materiais, concreto e aço, e nas dimensões da seção transversal, para um padrão médio de construção, foram estudados vigas e pilares, projetados de acordo com os critérios da norma NBR-6118/1980. Foi avaliado o nível de segurança atingido no projeto, tanto no que se refere aos Estados Limites de Serviço, como em relação aos Estados Limites Últimos. Através da determinação do índice de confiabilidade β , foi possível comparar os níveis de segurança obtidos em diversas estruturas.

Para as vigas analisadas, foi possível observar que o aumento da taxa de armadura gerado pelo dimensionamento à flexão, para cargas de serviço sucessivamente maiores, impede que o valor esperado da flecha central cresça proporcionalmente à carga de serviço. Além disso, ocorre uma redução substancial no coeficiente de variação da flecha central.

A análise da distribuição das flechas sob carga de serviço para as vigas consideradas, mostrou que a mesma pode ser aproximada por uma distribuição normal de probabilidade, cujos parâmetros são o valor esperado e o desvio padrão determinados através das simulações de Monte Carlo. Com base nesta hipótese, foi estimada a probabilidade da flecha imediata, sob carga de serviço, determinada de acordo com as recomendações da NBR-6118/1980, não ser ultrapassada. Esta análise revelou que o modelo de previsão de flechas da NBR-6118/1980, baseado na rigidez da viga no Estádio II puro, conduz a valores elevados para a flecha, que possuem uma probabilidade pequena de serem ultrapassados. Este efeito diminui com o aumento da taxa de armadura e com o afastamento da carga de serviço em relação à carga de fissuração da viga.

Percebeu-se também, que o valor esperado da carga de ruptura da viga é muito próximo da carga de ruptura determinada em uma análise não-linear, com as propriedades médias dos materiais e com as dimensões nominais da seção transversal. Além disso, notou-se que o coeficiente de variação da carga de ruptura das três vigas aproxima-se bastante do coeficiente de variação atribuído a f_y . Constatou-se que a distribuição das cargas de ruptura para as vigas analisadas pode ser aproximada por uma distribuição normal de probabilidade.

Outra observação interessante foi que, sendo 75% do carregamento formado pela carga permanente, mesmo que a carga acidental possua um coeficiente de variação de 0,40, o coeficiente de variação da carga total, igual a 0,11, aproxima-se bastante do coeficiente de

variação permanente, igual a 0,10. Esta é uma situação usual em edifícios residenciais de concreto armado.

Os valores alcançados para β foram bastante elevados, em torno de 9, o que corresponde a probabilidades de falha menores que 1×10^{-12} , indicando um alto nível de segurança. Isto se deve basicamente ao fato de a carga de ruptura de uma viga esbelta e subarmada depender principalmente da tensão de escoamento da armadura longitudinal f_y . Por ser o aço um material produzido com um elevado controle de qualidade, o coeficiente de variação de f_y é baixo.

Com o objetivo de avaliar como a segurança de pilares em relação ao Estado Limite Último é afetada pelas variações das propriedades mecânicas dos materiais, e por variações das dimensões da seção transversal, foram analisados 27 pilares. Estes pilares, birrotulados, de seção transversal quadrada, com as mais diversas combinações de esbeltez, taxa de armadura e relação e_1/h , foram submetidos à flexo-compressão normal.

O índice de confiabilidade β para estes pilares moderadamente esbeltos, para o tipo de carregamento considerado, oscilou entre um mínimo de 5,27, e um máximo de 7,04, correspondendo a probabilidades de falha P_f , da ordem de 1×10^{-6} a 1×10^{-12} .

Os resultados obtidos na análise de confiabilidade do dimensionamento deste pilares permitiram realizar algumas constatações interessantes. Em primeiro lugar, notou-se que o índice de confiabilidade β cresce com o aumento da taxa de armadura ρ . Em segundo lugar, percebeu-se que o índice de confiabilidade β aumenta juntamente com a relação e_1/h . Em terceiro lugar, observou-se que o valor do índice de confiabilidade β sofre um acréscimo na medida em que o índice de esbeltez do pilar, λ , aumenta.

Comparando-se as análises de confiabilidade realizadas para vigas e pilares, percebe-se que o nível de segurança atingido no dimensionamento das vigas é bastante superior ao obtido no projeto dos pilares. Isto se deve basicamente ao fato de que a ruptura das vigas é controlada pelo escoamento do aço, que é um material que possui uma variabilidade muito menor que a do concreto, do qual depende fundamentalmente a carga de ruptura dos pilares. Finalizando, deve-se salientar que as conclusões aqui estabelecidas são válidas para vigas e pilares com as características de geometria, propriedades e carregamento aqui consideradas.

Uma importante ampliação deste modelo seria a inclusão dos efeitos da fluência e da retração do concreto, para permitir a análise probabilística com carregamentos de longa duração. Neste caso, o modelo constitutivo de rigidez secante teria de ser abandonado, e, em seu lugar, adotado um modelo de rigidez tangente incremental, o que pode ser feito sem muita dificuldade.

Outra contribuição significativa seria a incorporação no programa de um modelo para armaduras protendidas, pré e pós-tracionadas, o que, combinado com a modelagem dos fenômenos da fluência e da retração do concreto, possibilitaria a análise probabilística de estruturas de concreto protendido.

No mesmo período em que esta tese está sendo concluída, também está sendo finalizada a revisão da norma NBR-6118/1980, antiga NB-1/78, que deverá dar origem a NBR-6118/2000, a qual reunirá as prescrições para o projeto e execução de obras de concreto simples, concreto armado e concreto protendido.

Um trabalho interessante a ser feito seria, através da aplicação deste modelo, ou de sua forma aperfeiçoada, a realização da comparação dos níveis de segurança atingidos, quanto aos Estados Limites de Serviço e aos Estados Limites Últimos, no projeto de estruturas feito com base nas recomendações da NBR-6118/1980 e da NBR-6118/2000, para uma mesma definição de carregamento. Este estudo seria importante, para se poder avaliar que alterações a revisão desta norma acarretará em termos da segurança das estruturas de concreto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, D.E.. Probabilistic study of reinforced concrete in bending. **ACI Journal Proceedings**, v. 67, p. 989-993, Dec. 1970.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H.. **Probability concepts in engineering planning and design. Volume I: basic principles**. New York, John Wiley & Sons, 1975.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H.. **Probability concepts in engineering planning and design. Volume II: decision, risk and reliability**. New York, John Wiley & Sons, 1984.
- ARAÚJO, J.M.. **Análise de barragens de gravidade de concreto, considerando a fase construtiva e a interação dinâmica barragem-reservatório-fundação**. Porto Alegre, 1995. 180p. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC, UFRGS.
- ARAÚJO, J.M.; AWRUCH, A.M.. **Análise estrutural probabilística pelo método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC-UFRGS, 1992a, 63p. (Caderno Técnico, CT-104).
- ARAÚJO, J.M. Análise probabilística de vigas de concreto armado. Parte 1: avaliação das deformações. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**, Lisboa, v. 42, p. 19-24, set. 1997.
- ARAÚJO, J.M. Análise probabilística de vigas de concreto armado. Parte 2: avaliação da segurança. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**, Lisboa, v. 43, p. 35-39, fev. 1998.
- ARAÚJO, J.M.; BIGNON, P.G.. **Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas**. Porto Alegre: CPGEC-UFRGS, 1993, 63p. (Relatório de Pesquisa, RP-110/93).
- ARAÚJO, J.M.; CAMPOS FILHO, A.. Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**, Lisboa, v. 34, p. 9-12, jul. 1992b.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de obras em concreto armado: NBR-6118**. Rio de Janeiro, 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Cargas para o cálculo de estruturas de edificações: NBR-6120**. Rio de Janeiro, 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de estruturas em concreto protendido: NBR-7197**. Rio de Janeiro, 1989.

- AYYUB, B.M.; MCCUEN, R.H.. Simulation-based reliability methods. In: SUNDARARAJAN, C. (Ed.). **Probabilistic structural mechanics handbook**; theory and industrial applications. New York, Chapman & Hall, 1995. Cap. 4, p. 53-69.
- BATHE, K.. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1982.
- BIGNON, P.G.. **Análise não-linear de estruturas de concreto**. Porto Alegre, CPGEC-UFRGS, 1986. Notas de aula.
- BIGNON, P.G.. **Elasticidade finita**. Porto Alegre, CPGEC-UFRGS, 1987. Notas de aula.
- BUNGEY, J.H.. **The testing of concrete strength in structures**. 2.ed.. New York, Surrey University Press, 1989.
- CHEN, W.F.; SALEB; A.F.. **Constitutive equations for engineering materials**. New York, John Wiley & Sons, 1982. 2v. v.1.
- CLAESON, C.; GYLLTOFT, K.. Slender high-strength concrete columns subjected to eccentric loading. **Journal of Structural Engineering**, v. 124, p. 233-240, Mar. 1998.
- COIMBRA, A.L.. **Novas lições de mecânica do contínuo**. São Paulo, Edgar Blücher, 1981.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP model code 1990; design code**. London, Thomas Telford Services, 1993. 437p.
- CREUS, G.J.. **Análisis no lineal de estructuras; elementos básicos y aplicaciones**. Porto Alegre: CPGEC-UFRGS, 1985. 107p. (Caderno de Engenharia 07).
- DARWIN, D.; PECKNOLD, D.A.. Analysis of cyclic loading of plane structures. **Computers & Structures**, v. 7, p. 137-147, 1977a.
- DARWIN, D.; PECKNOLD, D.A.. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. **Journal of Engineering Mechanics Division**, v. 103, p. 229-241, Apr. 1977b.
- DARWIN, D.. Reinforced Concrete. In: ISENBERG, J. (Ed.). **Finite element analysis of reinforced concrete**. New York, ASCE, June 2-5, 1991. p. 203-232.
- DECANINI, L.; GRILLO; F.. Comunicación sobre ensayos de vigas de hormigón armado com acero de alta adherencia. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGINIERIA ESTRUCTURAL, XIV, 1970, Buenos Aires, Argentina. **Anais**, v. 3, p. 126-156.
- DUPRAT, F.; PINGLOT, M.; LORRAIN, M.. Reliability analysis of reinforced concrete columns. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1993. **Proceedings**, p. 1249-1255.
- DYM, C.L.; SHAMES, I.. **Solid mechanics; a variational approach**. New York, MacGraw-Hill, 1973.

- ELWI, A.E.; HRUDEY, T.M.. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics Division**, v. 115, p. 740-745, Apr. 1989.
- FRANGOPOL, D.M.; LEE, Y-H.; WILLAM, K.J.. Nonlinear finite element reliability analysis of concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 122, n. 12, p. 1174-1182, Dec. 1996.
- FUNG, Y.C.. **Foundations of solid mechanics**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965.
- FUSCO, P.B.. **Estruturas de concreto; fundamentos estatísticos da segurança das estruturas**. São Paulo, EDUSP, 1976. 2v. v.2.
- GILBERT, R.I.; WARNER, R.F.. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. **Journal of the Structural Division**, v. 104, p. 1885-1900, Dec. 1978.
- GOMES, H.M.; AWRUCH, A.M.; ROCHA, M.M.. **Análise da confiabilidade de seções de concreto armado submetidas à flexo-compressão normal e oblíqua**. Porto Alegre, CPGEC-UFRGS, 1996. (Relatório de Pesquisa 120/96).
- GOMES, H.M.. **Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado usando o método dos elementos finitos e processos de simulação**. Porto Alegre, 1996. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC, UFRGS.
- GORDON, G.. **System simulation**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1969.
- GOYAL, B.B.; JACKSON, N.. Slender concrete columns under sustained load. **Journal of the Structural Division**, v. 97, p. 2729-2750, Nov. 1971.
- GRANT, L.H.; MIRZA, S.A.; MacGREGOR, J.G.. Monte Carlo study of strength of concrete columns. **ACI Journal**, v. 75, p. 348-358, Aug. 1978
- GUPTA, A.K.; MAESTRINI, S.R.. Post-cracking behavior of membrane reinforced concrete elements including tension-stiffening. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 4, p. 957-976, Apr. 1989a.
- GUPTA, A.K.; MAESTRINI, S.R.. Unified approach to modeling post-cracking membrane behavior of reinforced concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 4, p. 977-993, Apr. 1989b.
- GUTSCHOW, C. A.. **Avaliação da resistência do concreto em estruturas acabadas através da extração e ensaio de testemunhos de pequenos diâmetros**. Porto Alegre, 1995. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Construção Civil) – CPGEC, UFRGS.
- HINTON, E.; OWEN, D.R.J.. **Finite element programming**. London, Academic Press, 1977.
- KUPFER, H.B.; GERSTLE, K.H.. Behavior of concrete under biaxial stresses. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 99, p. 853-866, Aug. 1973.

- LEONHARDT, F.; WALTHER, R.. Wandartige Träger. **Deutscher Ausschuss für Stahlbeton**, Berlin, v. 178, 1966. 159p.
- LIU, W.K.; BELYTSCHKO, T.; MANI, A.. Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 56, p. 61-81, 1986a.
- LIU, W.K.; BELYTSCHKO, T.; MANI, A.. Random fields finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 1831-1845, 1986b.
- MATTHIES, H.; STRANG, G.. The solution of nonlinear finite element equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, p. 1613-1626, 1979.
- MIRZA, S. A.; MacGREGOR, J.G.. Variations in dimensions of reinforced concrete members. **Journal of the Structural Division**, v. 105, p. 751-767, Apr. 1979a.
- MIRZA, S. A.; MacGREGOR, J.G.. Variability of mechanical properties of reinforcing bars. **Journal of the Structural Division**, v. 105, p. 921-937, May 1979b.
- MIRZA, S. A.; HATIZINOLAS, M.; MacGREGOR, J.G.. Statistical description of strength of concrete. **Journal of the Structural Division**, v. 105, p. 1021-1037, June 1979c.
- MIRZA, S. A.; MacGREGOR, J.G.. Probabilistic study of strength of reinforced concrete members. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 9, n. 3, p. 431-448, 1982.
- ÖSTLUND, L. An Estimation on " γ "- values. **CEB Bulletin D'Information**, Lausanne, n. 202, p. 37-93, mai 1991.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E.. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea, Pineridge Press, 1980.
- POPOV, E.P.. **Resistência dos materiais; versão SI**. 2.ed.. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1984.
- PRATES JÚNIOR, N.. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre, 1992. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC, UFRGS.
- RAJASHEKHAR, M.R.; ELLINGWOOD, B.R.. Reliability of reinforced concrete cylindrical shells. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 2, p. 336-347, Feb. 1995.
- REAL, M.V.; CAMPOS FILHO, A.. Análise estatística de viga e pilares de concreto armado. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XXVII, 2000a, Punta del Este, Uruguai. **Anais**. Aceito para publicação.

- REAL, M.V.; CAMPOS FILHO, A.. Aplicação do método dos elementos finitos probabilístico à análise não-linear de estruturas de concreto. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XXVII, 1995a, Tucuman, Argentina. **Anais**, v. 4, p. 153-164.
- REAL, M.V.; CAMPOS FILHO, A.. Estudo da confiabilidade de estruturas de concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 42, 2000b, Fortaleza, Brasil. **Anais**. Aceito para publicação.
- REAL, M.V.; CAMPOS FILHO, A.. Estudo de vigas de concreto armado utilizando o método dos elementos finitos probabilístico. In: CILAMCE - CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, XVI, 1995b, Curitiba, Brasil. **Anais**, v. 1, p. 382-391.
- REAL, M.V.; CAMPOS FILHO, A.. Influência da variabilidade das dimensões e das propriedades mecânicas dos materiais no comportamento de estruturas de concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 41, 1999, Salvador, Brasil. **Anais**.
- SCHEGG, A.; DECANINI, L.. Sobre las deformaciones en elementos de hormigón armado. In: JORNADAS SULAMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XV, 1971, Porto Alegre, Brasil. **Anais**, v. 2, p. 1071-1120.
- SHINOZUKA, M.. Monte Carlo simulation of structural dynamics. **Computers & Structures**, v. 2, pp. 855-874, 1972a.
- SHINOZUKA, M.. Probabilistic modeling of concrete structures. **Journal of Engineering Mechanics Division**, v. 98, p. 1433-1451, Dec. 1972b.
- SHINOZUKA, M.; DEODATIS, G.. Simulation of multidimensional gaussian stochastic fields by spectral representation. **Applied Mechanics Review**, v. 49, n. 1, pp. 29-53, Jan. 1996.
- STRICKLIN, J.A.; HEISLER, W.E.; VON RUSMAN, W.. Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically non-linear structural analysis. **Journal of the A.I.A.A.**, v. 11, n. 3, p. 292-299, 1973.
- TEIGEN, J.G.; FRANGOPOL, D.M.; STURE, S.; FELIPPA, C.A.. Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures; I: theory. **Journal of Structural Engineering**, v. 117, n. 9, p. 2674-2689, Sep. 1991a.
- TEIGEN, J.G.; FRANGOPOL, D.M.; STURE, S.; FELIPPA, C.A.. Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures; II: applications. **Journal of Structural Engineering**, v. 117, n. 9, p. 2690-2707, Sep. 1991b.

- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, N.. **Teoria da Elasticidade**. 3.ed.. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980. 545p..
- UDOEYO, F. F.; UGBEM, P. I.. Dimensional variations in reinforced-concrete members. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 12, p. 1865-1867, Dec. 1995.
- VECCHIO, F.J.. Reinforced concrete membrane element formulations. **Journal of Structural Engineering**, v. 116, n. 3, p. 730-750, Mar. 1990.
- VIANA, M.L.S.. **Análise não-linear de pórticos de concreto armado ou protendido para cargas de curta duração**. Porto Alegre, 1984. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas) – CPGEC, UFRGS.
- VISMAN, U.; ZILCH, K.. Non-linear analysis and safety evaluation by finite-element-reliability method. **CEB Bulletin d'Information**, Lausanne, n. 229, août 1995.
- YAMAZAKI, F.; SHINOZUKA, M.. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 114, n. 8, p. 1335-1354, Aug. 1986.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.. **The finite element method. Volume 1: basic formulation and linear problems**. 4.ed.. London, McGraw-Hill International, 1989.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.. **The finite element method. Volume 2: fluid mechanics, dynamics and non-linearity**. 4.ed.. London, McGraw-Hill International, 1991.