Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

SÉRIES DE FOURIER E NÚCLEO DE FEJÉR

por

GRACIELA PIACENTINI

Porto Alegre, dezembro de 1999

Dissertação submetida por GRACIELA PIACENTINI* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:
Dr. Leonardo Prange Bonorino
Dra. Sílvia Regina Costa Lopes
Dr. Roberto Markarian

Data de Defesa: 27 de dezembro de 1999.

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Aos meus pais

Ayres e Elina

Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus pais, Ayres e Elina, e aos meus irmãos Edgar e Bárbara, pelo apoio, pelo amor e por compreenderem as minhas ausências.

A Izabelzinha pela amizade, paciência e por compartilhar aflições, alegrias e as várias horas de estudo.

A Neda, Gê e Mara por terem me "adotado" com o carinho e o amor de verdadeiras mães e pelas várias horas de estudo.

A Flavinha, Paty e Mariza pela amizade, pelo apoio e pelos momentos de alegria e descontração.

A Cíntia, Patrícia, Vera Lupinacci, Vera Bauer e demais colegas da Pós-Graduação pela amizade, carinho e pelos momentos de alegria e descontração.

Ao professor Artur Lopes pela orientação, pelo incentivo e pela paciência, e aos professores Miguel Ferrero, Jaime Ripoll, Ivan Pan e Cydara Ripoll pela atenção e pelos ensinamentos.

Resumo

Neste trabalho, vamos mostrar que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N} \right\}$ é um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$. Conseqüentemente concluímos que $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ é um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2_{\mathbb{C}}$.

Abstract

In this work, we will show that $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N} \right\}$ is a complete orthonormal set in $L^2_{\mathbb{R}}$. From this result follows that $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ is also a complete orthonormal set in $L^2_{\mathbb{C}}$.

Índice

1. Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é mostrar que $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ é um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$.

Toda função $g \in L^2_{\mathbb{R}}$ é aproximada em $L^2_{\mathbb{R}}$ por f contínua. No teorema 3.1 veremos que qualquer função contínua é o limite uniforme de uma soma finita de polinômios trigonométricos σ_n (somas de Fejér), assim teremos que o conjunto das combinações lineares finitas de $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ será denso no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$.

Usaremos então o teorema 2.7 para concluir que o sistema trigonométrico é completo no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$.

2. Definições e Resultados Gerais

Definição 1. *Seja H um espaço vetorial real. Um produto interno em H é uma função $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores x, $y \in H$ um número real $\langle x, y\rangle$, chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para x, y, $z \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrários:*

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$;
4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$.

Definição 2. *Seja H um espaço vetorial complexo. Um produto interno em H é uma função $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, que associa a cada par ordenado de vetores x, $y \in H$ um número complexo $\langle x, y\rangle$, chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para x, y, $z \in H$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrários:*

1. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

4. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$;

5. $\langle x, x \rangle = 0$, somente se $x = 0$;

6. $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

A partir do produto interno, define-se a norma de um vetor $x \in H$ pondo

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Algumas propriedades básicas:

Desigualdade de Cauchy Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$, para cada x e $y \in H$.

Desigualdade Triangular: para x e $y \in H$, temos $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Segue da desigualdade triangular que:

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|, \text{ para } x, \ y \text{ e } z \in H.$$

Sendo assim podemos definir a distância entre x e y por $d(x, y) = \|x - y\|$. É fácil ver que os axiomas para um espaço métrico são satisfeitos. Se H é um espaço métrico completo, isto é, toda seqüência de Cauchy em H é convergente, então chamamos H de *espaço de Hilbert*.

Definição 3. *Dizemos que $x \neq 0$ é ortogonal a $y \neq 0$, se $\langle x, y \rangle = 0$ para* x e $y \in H$ e escrevemos $x \perp y$.

Definição 4. *Seja $x^{\perp}$ o conjunto dos $y \in H$ que são ortogonais a x, isto é,* $x^{\perp} = \{y \ / \ \langle x, y \rangle = 0\}$.

Definição 5. *M é um subespaço de H, seja $M^{\perp}$ o conjunto dos $y \in H$ que são ortogonais a todo $x \in M$, isto é, $M^{\perp} = \{y \ / \ \langle y, x \rangle = 0, \ \forall \, x \in M\}$.*

A partir de agora vamos considerar I um conjunto contável, mais precisamente $I = \mathbb{Z}$ ou $I = \mathbb{N}$.

Definição 6. *Um conjunto de vetores δ_n em um espaço de Hilbert, onde n varia num conjunto de índices I é chamado ortonormal se satisfaz a relação $\langle \delta_n, \delta_m \rangle = 0$, para todo $n \neq m$, n e $m \in H$ e, cada δ_n é normalizado a fim de que $\|\delta_n\| = 1$ para cada $n \in I$. Em outras palavras, $\{\delta_n\}$ é ortonormal desde que*

$$\langle \delta_n, \delta_m \rangle = \begin{cases} 1 \text{ se } n = m, \\ 0 \text{ se } n \neq m. \end{cases}$$

Definição 7. *Dizer que* $\{\delta_n\}$ *é um conjunto ortonormal maximal, significa dizer que nenhum vetor de* H *pode ser acrescentado a* $\{\delta_n\}$ *de modo que o conjunto resultante ainda seja um conjunto ortonormal, em outras palavras* $\{\delta_n\}$ *é um conjunto ortonormal maximal quando não existe* $x \neq 0$ *em* H *que seja ortogonal a todo* δ_n. *Um conjunto ortonormal maximal é freqüentemente chamado conjunto ortonormal completo.*

Definição 8. *Se* $\{\delta_n : n \in I\}$ *é ortonormal então associamos para cada* $x \in H$, *espaço vetorial real ou complexo, uma função, tomando respectivamente valores reais ou complexos,* $\widehat{x} := \{\widehat{x}(n) \;/\; n \in I\}$ *definida no conjunto dos índices de* I, *por* $\widehat{x}(n) = \langle x, \delta_n \rangle$ $(n \in I)$.

Algumas vezes os números $\widehat{x}(n)$ são chamados os *coeficientes de Fourier* de x, com relação ao conjunto $\{\delta_n\}$.

Definição 9. *Dizer que* A *é denso em* $B \subset H$ *quer dizer que o fecho de* A *é* B, *ou seja,* $\overline{A} = B$.

As demonstrações dos teoremas (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e do corolário 1 encontram-se em [7].

Teorema 2.1. *Seja* M *um subespaço fechado do espaço de Hilbert* H.

a) Todo $x \in H$ tem então uma única decomposição $x = P(x) + Q(x)$ em uma soma de $P(x) \in M$ e $Q(x) \in M^{\perp}$.

b) $P(x)$ e $Q(x)$ são os pontos mais próximos de x em M e em $M^{\perp}$, respectivamente.

c) As funções $P : H \rightarrow M$ e $Q : H \rightarrow M^{\perp}$ são lineares.

d) $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$.

As funções P e Q são chamadas respectivamente de *projeção em M* e *projeção em $M^{\perp}$*.

Definição 10. *Dizemos que $y \perp M$ se $y \in M^{\perp}$.*

Corolário 1. *Seja M um subespaço fechado do espaço de Hilbert. Se $M \neq H$, então existe $y \in H$, $y \neq 0$ tal que $y \perp M$.*

Teorema 2.2. *Se $\delta_1, ..., \delta_k$ é um conjunto ortonormal e se $x = \sum_{n=1}^{k} c_n \delta_n$, então*

$$c_n = \langle x, \delta_n \rangle, \ para\ 1 \leq n \leq k,$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |c_n|^2.$$

Teorema 2.3. *Seja $\delta_1, ..., \delta_k$ um conjunto ortonormal em H e seja $x \in H$. Então*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} \langle x, \delta_j \rangle \delta_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \delta_j \right\| \tag{2.1}$$

para quaisquer escalares $\lambda_1, ..., \lambda_k$. A igualdade em (2.1) é verdadeira se e somente se $\lambda_j = \langle x, \delta_j \rangle$, para $1 \leq j \leq k$. O vetor

$$\sum_{j=1}^{k} \langle x, \delta_j \rangle \delta_j$$

é a projeção ortogonal de x sobre o subespaço M gerado por $[\delta_1, ..., \delta_k]$ e se d é a distância de x para este subespaço, isto é,

$$\begin{aligned} d &= \inf \{ d(x, y) \ / \ y \in M \} \\ &= \inf \left\{ d(x, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \delta_j), \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf \left\{ \left\| x - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \delta_j \right\|, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

então

$$\sum_{j=1}^{k} |\langle x, \delta_j \rangle|^2 = \|x\|^2 - d^2.$$

Teorema 2.4 (Desigualdade de Bessel). *Se $\{\delta_n : n \in I\}$ é um conjunto orto-*

normal em H, $x \in H$ e $\widehat{x}(n) = \langle x, \delta_n \rangle$ então

$$\sum_{n \in I} |\widehat{x}(n)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Referimos ao leitor a [1] e [2] para resultados gerais sobre integral de Lebesgue.

Definição 11. *$f \sim g \Leftrightarrow \{x \ / \ |f(x) - g(x)| \neq 0\}$ é um conjunto de medida nula. Nas duas definições subseqüentes é tomado o quociente do espaço vetorial módulo a relação de equivalência $\sim$.*

Definição 12. $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi] = L^2_{\mathbb{R}} = \left\{ g \ / \ \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt < \infty \right\}$, *onde*

$$g : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma função periódica de período 2π de quadrado integrável a Lebesgue.

Como foi dito anteriormente, neste espaço vetorial identificamos f e g se $f \sim g$.

Cada $g \in L^2$ pode ser considerada como uma função definida no círculo unitário.

Definimos no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$ um produto interno real, tomando

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt. \qquad (2.2)$$

É fácil ver que (2.2) está bem definido e satisfaz as propriedades de produto interno tomando valores em $\mathbb{R}$. (Use a desigualdade de Cauchy Schwarz).

Definimos a norma $L^2_{\mathbb{R}}$ de g, por

$$\|g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 dt} = \sqrt{\langle g, g \rangle}.$$

Definição 13. $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi] = L^2_{\mathbb{C}} = \left\{ f \;/\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$, *onde*

$$f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

é uma função periódica de período 2π de quadrado integrável a Lebesgue.

Definimos no espaço $L^2_{\mathbb{C}}$ um produto interno complexo, tomando

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt. \tag{2.3}$$

É fácil verificar que (2.3) está bem definido e satisfaz as propriedades de produto interno tomando valores em $\mathbb{C}$. (Use a desigualdade de Cauchy Schwarz).

Definimos a norma $L^2_{\mathbb{C}}$ de g, por

$$\|g\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\langle g, g \rangle}.$$

Os espaços $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$ e $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$ das funções periódicas de quadrado integrável a Lebesgue são espaços vetoriais completos, munidos de um produto interno, de dimensão infinita o que, na nossa terminologia, equivale a dizer que se tratam de espaços de Hilbert (Ver [1] e [2]).

O objetivo principal deste trabalho é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.5. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *constitui um conjunto ortonormal completo no espaço* $L^2_{\mathbb{R}}$.

Definição 14. *Seja* $f \in L^2_{\mathbb{R}}$, *a série de Fourier (na forma real) da* f *expressa por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sen\, nx)\,, \tag{2.4}$$

onde seus respectivos coeficientes de Fourier são dados por

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \;,\;\; n = 0,1,2,...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) sen\, nt\, dt \;,\;\; n = 1,2,3,... \,.$$

A expressão (2.4) chama-se *série trigonométrica de Fourier na forma real.*

Será mostrado (Ver observação após teorema 2.6) que o sentido da expressão (2.4) é:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx+b_n sen\, nx)\right)-f(x)\right\|=0, \tag{2.5}$$

onde $\|\,\|$ é a norma em $L^2_{\mathbb{R}}$.

A expressão

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx+b_n sen\, nx)$$

é chamada a *soma parcial de Fourier* de ordem k.

Definição 15. *Seja $f \in L^2_{\mathbb{C}}$, a série de Fourier (na forma complexa) da f é dada pela expressão*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

onde

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Observação: *dada*

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n sen\, nx),$$

as séries trigonométricas reais podem ser expressas numa forma mais compacta *com ajuda das fórmulas de Euler*

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{e} \quad sen\, nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Substituíndo estas expressões na série de Fourier na forma real, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sen\, nx) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

onde $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$ e, para $n \geq 1$,

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2},\ n \geq 0, \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2},\ n < 0. \end{aligned} \right\} \tag{2.6}$$

Os coeficientes c_n se expressam através dos a_n e b_n mediante as igualdades (2.6).

Definição 16. *O espaço $\ell^2_{\mathbb{R}}$ real é o conjunto constituído por todas as seqüências $x = (..., x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ de números reais tal que $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} x_i^2 < \infty$.*

Definindo o *produto interno* $\langle x,y\rangle_* = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i y_i$, introduzimos a *norma* no espaço $\ell^2_{\mathbb{R}}$ por

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i^2} = \sqrt{\langle x,x\rangle_*}.$$

Definição 17. *O espaço $\ell^2_{\mathbb{C}}$ complexo é o conjunto constituído por todas as seqüências $x = (..., x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ de números complexos tal que $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$.*

Definindo o *produto interno* $\langle x,y\rangle_* = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \overline{y_i}$, introduzimos a *norma* no espaço $\ell^2_{\mathbb{C}}$ por

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2} = \sqrt{\langle x,x\rangle_*}.$$

Os espaços $\ell^2_{\mathbb{R}}$ e $\ell^2_{\mathbb{C}}$ são completos (Ver [6]).

Exemplo 1. *Definimos para cada $i \in \mathbb{N}$*

$$e_i = \{x_j\} \in \ell^2_{\mathbb{C}}$$

$$tal\ que \begin{cases} x_j = 0\ ,\ para\ i \neq j \\ x_j = 1\ ,\ para\ i = j. \end{cases}$$

É possível mostrar que e_i, $i \in \mathbb{N}$ é um conjunto ortonormal completo.

Para mostrarmos que $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}\right\}$ forma um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$ equivale a mostrarmos que $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ é um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2_{\mathbb{C}}$.

Teorema 2.6. *Seja $\{\delta_n : n \in I\}$ um conjunto ortonormal em H, espaço vetorial complexo de Hilbert, com a norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Cada uma das seguintes condições sobre $\{\delta_n\}$ implica nas outras três:*

a) $\{\delta_n\}$ é um conjunto ortonormal maximal em H.

b) O conjunto S de todas as combinações lineares finitas dos vetores de $\{\delta_n\}$ é denso em H.

c) Para todo $x \in H$, tem-se $\|x\|^2 = \sum_{n\in I} |\widehat{x}(n)|^2$, onde $\widehat{x}(n) = \langle x, \delta_n\rangle$, $n \in I$.

d) Se $x \in H$ e $y \in H$, então $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in I} \widehat{x}(n)\overline{\widehat{y}(n)}$.

Esta última fórmula é conhecida como identidade de Parseval.

Prova:

$a) \Rightarrow b)$

Por contradição, vamos supor que S não é denso em H, assim por definição $\overline{S} \neq H$. Como $\overline{S}$ é fechado, pelo corolário 1 existe $y \in H$, $y \neq 0$, tal que $y \perp \overline{S}$, isto implica que $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{y\}$ é ortogonal. Logo, quando S não é denso em H temos que $\{\delta_n\}$ não é maximal em H.

$b) \Rightarrow c)$

Vamos supor que S o conjunto de todas as combinações lineares finitas dos vetores de $\{\delta_n\}$ seja denso em H. Fixe $x \in H$, $\varepsilon > 0$. Como S é denso, existe um conjunto finito $\delta_{n_1}, ..., \delta_{n_k}$ tal que alguma combinação linear destes vetores tem distância menor do que ε de x.

Pelo teorema 2.3 esta aproximação poderá ser melhorada se tomarmos $\widehat{x}(n_j)$ para o coeficiente de δ_{n_j}. Assim se

$$z = \widehat{x}(n_1)\delta_{n_1} + ... + \widehat{x}(n_k)\delta_{n_k},$$

teremos

$$\|x - z\| < \varepsilon \Rightarrow \|x\| < \|z\| + \varepsilon, \tag{2.7}$$

pois

$$\begin{aligned}
\|x - z\|^2 &= \langle x - z, x - z \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \langle x, z \rangle - \langle z, x \rangle + \langle z, z \rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\langle x, z \rangle + \|z\|^2 \\
&\geq \|x\|^2 - 2\|x\|\|z\| + \|z\|^2 \\
&= (\|x\| - \|z\|)^2 .
\end{aligned}$$

Por (2.7) e pelo teorema 2.2, obtemos

$$(\|x\| - \varepsilon)^2 < \|z\|^2 = |\widehat{x}(n_1)|^2 + ... + |\widehat{x}(n_k)|^2 \leq \sum_{n \in I} |\widehat{x}(n)|^2 . \qquad (2.8)$$

Como ε é arbitrário, c) segue de (2.8) e da desigualdade de Bessel.

$c) \Rightarrow d)$

A equação em (c) pode também ser escrita da forma $\langle x, x\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle_*$.

Se $x \in H$, $y \in H$ e vale (c), então

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle \widehat{x} + \lambda \widehat{y}, \widehat{x} + \lambda \widehat{y}\rangle_* , \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Portanto, pelas propriedades de produto interno $\langle \ , \ \rangle_*$ e $\langle \ , \ \rangle$, obtemos

$$\langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle_* + \langle \widehat{x}, \lambda \widehat{y}\rangle_* + \langle \lambda \widehat{y}, \widehat{x}\rangle_* + \langle \widehat{y}, \widehat{y}\rangle_* ,$$

como $\langle x, x\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle_*$ e $\langle y, y\rangle = \langle \widehat{y}, \widehat{y}\rangle_*$, temos

$$\langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle = \langle \widehat{x}, \lambda \widehat{y}\rangle_* + \langle \lambda \widehat{y}, \widehat{x}\rangle_*,$$

ou seja,

$$\overline{\lambda}\,\langle x,y\rangle+\lambda\,\langle y,x\rangle=\overline{\lambda}\,\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle_*+\lambda\,\langle\widehat{y},\widehat{x}\rangle_*.$$

Tomando $\lambda=1$, obtemos

$$\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle_*+\langle\widehat{y},\widehat{x}\rangle_*,$$

ou seja,

$$\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}=\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle_*+\overline{\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle}_*. \tag{2.9}$$

Tomando $\lambda=i$, obtemos

$$-i\,\langle x,y\rangle+i\,\langle y,x\rangle=-i\,\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle_*+i\,\langle\widehat{y},\widehat{x}\rangle_*,$$

ou seja,

$$\langle x,y\rangle-\overline{\langle x,y\rangle}=\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle_*-\overline{\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle}_*. \tag{2.10}$$

Somando (2.9) e (2.10), obtemos

$$\langle x,y\rangle=\langle\widehat{x},\widehat{y}\rangle_*.$$

$d) \Rightarrow a)$

Por contradição, vamos supor que $\{\delta_n\}$ não é um conjunto ortonormal maximal em H, ou seja, existe $x \neq 0$ em H tal que $\langle x, \delta_n \rangle = 0$, para todo $n \in I$. Consideremos $x = y$, então $\langle x, y \rangle = \|x\|^2 \neq 0$, mas $\widehat{x}(n) = 0$, para todo $n \in I$, portanto (d) é falso. $\square$

Observação: no item c) segue de b) a propriedade que $\left\| x - \sum_{n \in I \cap [-k,k]} \widehat{x}(n)\delta_n \right\|$ converge a zero quando $k \to \infty$.

De fato, usando a notação do teorema 2.6 e por (2.7), notemos que dado $\varepsilon > 0$, existe

$$z = \widehat{x}(n_1)\delta_{n_1} + ... + \widehat{x}(n_k)\delta_{n_k},$$

tal que

$$\|x - z\| < \varepsilon.$$

Se

$$\widetilde{z} = z + \widehat{x}(m_1)\delta_{m_1} + ... + \widehat{x}(m_l)\delta_{m_l},$$

onde $\{\delta_{m_1}, ..., \delta_{m_l}\} \cap \{\delta_{n_1}, ..., \delta_{n_k}\} = \emptyset$, então, considerando

$$z = \sum_{j=1}^{k+l} \lambda_j \delta_j, \text{ onde } \begin{cases} \lambda_j = \widehat{x}(n_j) \text{ e } \delta_j = \delta_{n_j}, \text{ para } j \in \{1, ..., k\}, \text{ e} \\ \lambda_j = 0 \text{ e } \delta_j = \delta_{m_{j-k}}, \text{ para } j \in \{k+1, ..., k+l\} \end{cases}$$

e

$$\widetilde{z} = \sum_{j=1}^{k+l} \widetilde{\lambda}_j \delta_j, \text{ onde } \begin{cases} \widetilde{\lambda}_j = \widehat{x}(n_j) \text{ e } \delta_j = \delta_{n_j}, \text{para } j \in \{1, ..., k\}, \text{ e} \\ \widetilde{\lambda}_j = \widehat{x}(m_{j-k}) \text{ e } \delta_j = \delta_{m_{j-k}}, \text{para } j \in \{k+1, ..., k+l\}, \end{cases}$$

segue do terema 2.3 que $\|x - \widetilde{z}\| \leq \|x - z\| < \varepsilon$. Isto mostra que neste caso (2.5) é verdadeiro.

Teorema 2.7. *Seja $\{\delta_n : n \in I\}$ um conjunto ortonormal em H, espaço vetorial real de Hilbert, com a norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Cada uma das seguintes condições sobre $\{\delta_n\}$ implica nas outras três:*

a) $\{\delta_n\}$ é um conjunto ortonormal maximal em H.

b) O conjunto S de todas as combinações lineares finitas dos vetores de $\{\delta_n\}$ é denso em H.

c) Para todo $x \in H$, tem-se $\|x\|^2 = \sum_{n \in I} |\widehat{x}(n)|^2$.

d) Se $x \in H$ e $y \in H$, então $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in I} \widehat{x}(n)\widehat{y}(n)$.

Prova: A demonstração é feita de maneira análoga ao teorema anterior. □

3. O Teorema de Fejér e Conjuntos Ortonormais Completos

Nesta seção, usaremos a seguinte notação:

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(-nx),\ para\ n < 0,$$

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen\, nx,\ para\ n > 0,$$

$$\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

A série de Fourier de uma função qualquer em $L^2_{\mathbb{R}}$ não necessariamente converge em cada ponto e, muitas vezes não se pode obter f como a simples soma da sua série de Fourier em cada ponto.

Seja f uma função contínua de período 2π definida sobre a reta. Esta função se definirá univocamente a partir da sua série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n sen\, nx)\,.$$

O seguinte teorema, que Fejér demonstrou em 1905, dá um método de aproximação uniforme de uma função contínua a partir da média das somas parciais de Fourier. Seja

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} (a_j \cos jx + b_j sen\, jx)$$

a soma parcial da série de Fourier da função f. Note que não é verdade que $S_k(x)$

converge uniformemente a f. Tomemos

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + ... + S_{n-1}(x)}{n}. \tag{3.1}$$

As expressões σ_n, a saber, as médias aritméticas das somas S_k, chamam-se *somas de Fejér* da função f.

Teorema 3.1. *Se f for uma função contínua de período 2π, então a seqüência σ_n convergirá uniformemente para f sobre a reta toda.*

Prova:

Antes da demonstração propriamente dita faremos algumas considerações sobre o núcleo e a integral de Fejér.

Sejam

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos jx\, dx;$$
$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sen\, jx\, dx;$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Consideremos

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} (a_j \cos jx + b_j sen\, jx). \tag{3.2}$$

Transformemos $S_k(x)$, substituíndo em (3.2) os coeficientes a_j, b_j e a_0 pelas suas expressões através das integrais acima. Denotando por t a variável de integração, obtemos

$$
\begin{aligned}
S_k(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} \left[\cos jx \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos jt\, dt \right) + sen\, jx \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) sen\, jt\, dt \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^{k} \left(f(t) \cos jt \cos jx + f(t) sen\, jt\, sen\, jx \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(t)}{2} + f(t) \sum_{j=1}^{k} (\cos jt \cos jx + sen\, jt\, sen\, jx) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k} (\cos jt \cos jx + sen\, jt\, sen\, jx) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\tfrac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k} \cos j(t-x) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{sen \dfrac{2k+1}{2}(t-x)}{2 sen \dfrac{(t-x)}{2}} dt.
\end{aligned}
$$

Para mostrarmos a última igualdade, calculemos a seguinte expressão:

$$S_k(\theta) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \cos j\theta.$$

Observemos que

$$S_k(\theta) = \mathrm{Re} \left(1 + \sum_{j=1}^{k} e^{ij\theta} \right),$$

onde

$$1+\sum_{j=1}^{k} e^{ij\theta} = 1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+...+e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(k+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
S_k(\theta) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{i(k+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+isen\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]-\left[\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta+isen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+isen\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]-\left[\cos\frac{\theta}{2}+isen\frac{\theta}{2}\right]}\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}-isen\frac{\theta}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-isen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}-isen\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}-isen\frac{\theta}{2}}\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{-isen\frac{\theta}{2}-isen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta+\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{-2isen\frac{\theta}{2}}\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{sen\frac{\theta}{2}+sen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta+i\cos\frac{\theta}{2}-i\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\frac{\theta}{2}}\right\} \\
&= \frac{sen\frac{\theta}{2}+sen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
1+\sum_{j=1}^{k}\cos j\theta &= \frac{sen\frac{\theta}{2}}{2sen\frac{\theta}{2}}+\frac{sen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\frac{\theta}{2}} \\
1-\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{k}\cos j\theta &= \frac{sen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{k}\cos j\theta=\frac{sen\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\,\frac{\theta}{2}}.$$

Fazendo $\theta=(t-x)$, segue que

$$S_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{sen\frac{2k+1}{2}(t-x)}{2sen\frac{(t-x)}{2}}dt. \tag{3.3}$$

Efetuando a substituição $t-x=z$. O integrando em (3.3) sendo uma função periódica de período 2π, a integral desta, tomada sobre qualquer intervalo de comprimento 2π, será a mesma. Logo integrando em relação a z, podemos conservar os mesmos limites $-\pi$ e π, obtendo-se

$$S_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\frac{sen\frac{2k+1}{2}z}{2sen\,\frac{z}{2}}dz.$$

Substituíndo-as na igualdade (3.1), obteremos a seguinte expressão para $\sigma_n(x)$:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{sen\frac{2k+1}{2}z}{sen\,\frac{z}{2}}\right\}f(x+z)dz.$$

Seja

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} sen\,(2k+1)\,z = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)z}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{iz}e^{i2kz}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{iz}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kz}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{iz}\frac{1-e^{i2(n-1+1)z}}{1-e^{i2z}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i2nz}}{e^{-iz}-e^{iz}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1-\cos 2nz - i sen\,2nz}{\cos(-z)+isen(-z)-\cos z - isen\,z}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1-\cos 2nz - isen\,2nz}{-2isen\,z}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{i - i\cos 2nz + sen\,2nz}{2sen\,z}\right) \\
&= \frac{1-\cos 2nz}{2sen\,z}.
\end{aligned}
$$

Assim, usando o fato que $sen^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, obtemos

$$
\sum_{k=0}^{n-1} sen\,(2k+1)\,z = \frac{1-\cos 2nz}{2sen\,z} = \frac{sen^2 nz}{sen\,z}. \tag{3.4}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{sen^2 n\frac{z}{2}}{sen\,\frac{z}{2}sen\,\frac{z}{2}}\right) f(x+z)dz \\
&= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{sen\,n\frac{z}{2}}{sen\,\frac{z}{2}}\right)^2 f(x+z)dz, \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

conhecida como *integral de Fejér*.

A expressão

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{sen\, n\frac{z}{2}}{sen\frac{z}{2}}\right)^2, \tag{3.6}$$

chama-se *núcleo de Fejér.* Podemos reescrever (3.5) na forma

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\Phi_n(z)dz.$$

Para demonstrarmos o teorema 3.1 devemos mostrar que, quando $n \to \infty$, $\sigma_n(x)$ tende uniformemente para $f(x)$.

Para esta demonstração necessitamos das seguintes propriedades do núcleo de Fejér:

1)$\Phi_n(x) \geq 0$,

2)$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)dz = 1$,

3)Qualquer que seja $\delta > 0$ fixado, ao se cumprir $n \to \infty$, teremos

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)dz = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z)dz = \eta_n(\delta) \to 0.$$

A primeira destas propriedades é óbvia. A segunda se obtém das igualdades (3.4) e (3.6), pois

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2n\pi}\left(\frac{sen\, n\frac{z}{2}}{sen\,\frac{z}{2}}\right)^2 dz \\
&= \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{sen\frac{2k+1}{2}z}{sen\,\frac{z}{2}}dz \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sen\frac{2k+1}{2}z}{2sen\,\frac{z}{2}}dz \\
&= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\tfrac{1}{2}+\cos z+\cos 2z+\ldots+\cos nz\right)dz \\
&= \frac{1}{n\pi}n\pi \\
&= 1.
\end{aligned}$$

A terceira propriedade é verificada pois, para $\delta < z \leq \pi$ temos

$$sen\, x \geq y = \frac{2x}{\pi} \Rightarrow sen\, x \geq \frac{2x}{\pi},\ \text{para } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Fazendo $x = \frac{z}{2}$, obtemos

$$sen\frac{z}{2} \geq \frac{2z}{2\pi} = \frac{z}{\pi}.$$

Assim

$$sen\frac{z}{2} \geq \frac{z}{\pi} > \frac{\delta}{\pi} \Rightarrow sen\frac{z}{2} > \frac{\delta}{\pi},$$

por conseguinte

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)dz = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z)dz = \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{sen\, n\frac{z}{2}}{sen\, \frac{z}{2}} \right)^2 dz \leq$$
$$\leq \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\pi}{\delta}\right)^2 dz = \frac{\pi}{2n\delta^2} z \Big|_{\delta}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2n\delta^2} - \frac{\pi}{2n\delta} \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Baseando-se nestas propriedades do núcleo de Fejér, vamos a seguir mostrar o teorema 3.1.

A função f sendo contínua e periódica está bem definida no compacto S^1 portanto, será limitada e uniformemente contínua sobre a reta toda. Em outras palavras, existe uma constante M tal que, para qualquer x, $|f(x)| \leq M$; por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, se encontrará $\delta > 0$ tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } |x_2 - x_1| < \delta.$$

Para demonstrarmos o teorema, devemos estimar a diferença

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_n(x) &= f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)dz - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\Phi_n(z)dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)]\, \Phi_n(z)dz, \end{aligned}$$

a qual se representa como a soma das três integrais seguintes:

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x) - f(x+z)]\, \Phi_n(z)dz,$$
$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x) - f(x+z)]\, \Phi_n(z)dz,$$
$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} [f(x) - f(x+z)]\, \Phi_n(z)dz.$$

De $|f(x)| \leq M$ e $|f(x_2) - f(x_1)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, resultam as seguintes estimativas:

$a)$

$$\begin{aligned}|J_0| &= \left| \int_{-\delta}^{\delta} [f(x) - f(x+z)]\, \Phi_n(z)dz \right| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x+z)|\, \Phi_n(z)dz \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)dz < \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

pois

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)dz = \frac{\varepsilon}{2},$$

por 2).

b)

$$
\begin{aligned}
|J_-| &= \left| \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x) - f(x+z)]\, \Phi_n(z) dz \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x) - f(x+z)|\, \Phi_n(z) dz \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\delta} [|f(x)| - |f(x+z)|]\, \Phi_n(z) dz \\
&= \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x)|\, \Phi_n(z) dz + \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+z)|\, \Phi_n(z) dz \\
&\leq M \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z) dz + M \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z) dz \\
&= 2M \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z) dz \\
&= 2M\eta_n(\delta).
\end{aligned}
$$

c) De maneira análoga a $|J_-|$, obtemos

$$|J_+| \leq 2M\eta_n(\delta).$$

Usando 3) acima, escolhamos n_0 suficientemente grande de modo que, para qualquer $n \geq n_0$ e o δ em questão, cumpra a desigualdade

$$2M\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_n(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)]\, \Phi_n(z) dz \right| \\
&= |J_- + J_0 + J_+| \\
&\leq |J_-| + |J_0| + |J_+| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

donde, por ser ε arbitrário, resulta a afirmação do teorema. □

Vamos agora demonstrar o resultado principal deste trabalho.

Teorema 3.2. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N} \right\}$ *constitui um conjunto ortonormal no espaço* $L^2_{\mathbb{R}}$.

Prova:

Vamos mostrar que o conjunto S das combinações lineares finitas de $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen\, nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N} \right\}$ é denso no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$, o que pelo teorema 2.7 implica que este conjunto é ortonormal completo.

Toda função $g \in L^2_{\mathbb{R}}$ periódica é aproximada no espaço de Hilbert $L^2_{\mathbb{R}}$ por f contínua (Ver [1] e [2]). Pelo teorema de Fejér, qualquer função contínua é o limite uniforme (logo também na norma $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$) de um soma finita de polinômios trigonométricos σ_n, resulta que S é denso no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$. Concluímos assim, do teorema 2.7, que o sistema trigonométrico é completo no espaço $L^2_{\mathbb{R}}$. □

Observação: segue do teorema anterior que $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ também é um conjunto ortonormal completo no espaço $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$.

Bibliografia

[1] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, New York, John Wiley, 1966.

[2] Fernandez, P. J., *Medida e Integração*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1976.

[3] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1977.

[4] Katznelson, Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, New York, John Wiley, 1968.

[5] Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V., *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Editora Mir. Moscou, 1982.

[6] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1997.

[7] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1966.