

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA MODELAGEM DE CASCAS
DE MATERIAIS COMPOSTOS COM ANÁLISE ACOPLADA DE
VISCOELASTICIDADE E FALHAS PROGRESSIVAS**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO
SUL PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA

BRANCA FREITAS DE OLIVEIRA

Porto Alegre

1999

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Guillermo Juan Creus

Orientador

Prof. Francisco P. S. L. Gastal

Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Banca Examinadora

Prof. Guillermo Juan Creus (Orientador)

DSc. (COPPE-UFRJ)

Prof. Armando Miguel Awruch

DSc. (COPPE-UFRJ)

Prof. Eduardo Bittencourt

DSc. (CPGEC-UFRGS)

Prof. Jun S. O. Fonseca

PhD (Universidade de Michigan)

Prof. João R. Masuero (Co-Orientador)

MSc. (CPGEC-UFRGS)

Ao meu marido, Artur,
aos meus pais, Luiz Carlos e Adalba,
aos meus irmãos, Demétrio e Luizinho,
e à minha avó, Branca.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Guillermo J. Creus, pela orientação e os ensinamentos transmitidos no decorrer deste trabalho.

Ao Prof. João Masuero, pela orientação e todas as discussões que tanto contribuíram para o presente estudo.

A toda a equipe do Centro de Mecânica Aplicada e Computacional – CEMACOM, pelo convívio enriquecedor.

Aos professores, funcionários e colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil – CPGEC-UFRGS que, de alguma forma, auxiliaram na realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	iv
RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO.....	6
2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS COMPOSTOS.....	8
2.1 INTRODUÇÃO.....	8
2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPAS.....	8
2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE UMA LÂMINA.....	11
2.4 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.....	13
2.5 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS LINEARES.....	16
3 MODELO NUMÉRICO.....	19
3.1 INTRODUÇÃO.....	19
3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....	19
3.3 MODELO DE VISCOELASTICIDADE DO MATERIAL.....	24
3.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	30
3.4.1 Forma Incremental-Iterativa da Equação de Equilíbrio.....	30
3.4.2 Determinação dos Intervalos de Tempo na Análise Viscoelástica.....	31
3.4.3 Métodos de Solução da Equação de Equilíbrio.....	33
3.4.4 Avaliação das Variáveis de Estado.....	35
4 FALHAS EM MATERIAIS COMPOSTOS.....	37
4.1 INTRODUÇÃO.....	37

4.2	ABORDAGEM DE FALHAS.....	37
4.3	CRITÉRIOS DE FALHA.....	40
4.3.1	Critério de Tsai-Wu.....	40
4.3.2	Critério de Hashin.....	41
4.3.3	Critério de Lee.....	43
4.3.4	Critério da Máxima Deformação.....	44
4.4	CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS.....	45
4.4.1	Modelos de Degradação da Lâmina.....	46
4.4.2	Cálculo do Fator de Carga.....	52
5	EXEMPLOS DE ANÁLISE ELÁSTICA E VISCOELÁSTICA.....	53
5.1	INTRODUÇÃO.....	53
5.2	ANÁLISE DE UMA PLACA SIMPLEMENTE APOIADA.....	53
5.3	ANÁLISE DE UM LAMINADO SUJEITO A CARGA SENOIDAL.....	55
5.4	ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE UMA PLACA.....	60
5.5	ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE UMA PLACA SUJEITA À FLEXÃO.....	63
5.6	ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA.....	65
5.7	ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA.....	68
5.8	ANÁLISE DE UMA VIGA EM BALANÇO.....	70
5.9	ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA.....	74
6	EXEMPLOS DE ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS.....	76
6.1	INTRODUÇÃO.....	76
6.2	EXEMPLO DE FLEXÃO DE PLACA COM ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS.....	76
6.3	PLACA SUBMETIDA À TRAÇÃO BIAXIAL COM ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS.....	79
6.4	ANÁLISE DE FALHAS E VISCOELASTICIDADE PARA UMA PLACA LAMINADA.....	84
6.5	ANÁLISE DE FALHAS PARA UMA LAMINADO SUJEITO À CARGA SENOIDAL.....	87
6.6	ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO.....	91
6.7	ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO VISCOELÁSTICO.....	94

6.8 ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS.....	97
6.9 ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS.....	100
6.10 ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA LAMINADA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS.....	102
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	105
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	110

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões
ϵ_{ij}	Componentes do tensor de deformações
ϵ_i	Componentes do vetor de deformações
σ_j	Componentes do vetor de tensões
[S]	Matriz de constantes do material
[C]	Matriz constitutiva do material
C_{ij}	Coefficientes da matriz constitutiva do material e funções de relaxação
[T]	Matriz de transformação de coordenadas
$\bar{[C]}$	Matriz constitutiva que relaciona tensões e deformações no sistema global
D_{ij}	Funções de fluência do material
θ_{ij}	Tempos de retardação
λ_{ij}	Tempos de relaxação
V	Volume do corpo
${}^{k+1}_0 S_{ij}$	Componentes do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff
${}^{k+1}_0 \epsilon_{ij}$	Componentes do Tensor de Deformações de Green-Lagrange
${}^{k+1} R$	Trabalho virtual das forças externas
${}^{k+1}_0 q_i^B$	Cargas de volume
${}^{k+1}_0 q_i^S$	Cargas de superfície
S	Área do corpo sobre a qual atuam as cargas de superfície
${}_0 S_{ij}$	Incrementos nas componentes de tensão
${}_0 \epsilon_{ij}$	Incrementos nas componentes deformação
${}_0 e_{ij}$	Parte linear dos incrementos de deformação
${}_0 \eta_{ij}$	Parte não linear dos incrementos de deformação
${}_0 \epsilon_{ij}^e$	Parte elástica dos incrementos de deformação
${}_0 \epsilon_{ij}^v$	Parte viscoelástica dos incrementos de deformação
${}_0 \epsilon_{ij}^T$	Parte térmica dos incrementos de deformação
${}_0 \epsilon_{ij}^H$	Parte higroscópica dos incrementos de deformação

x, y, z	Sistema global
ξ, ζ, η	Sistema local
1, 2, 3	Sistema principal da lâmina
$\{U\}$	Vetor dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento
$[_0^k B_L]$	Matriz que relaciona deformações lineares com deslocamentos nodais
$[_0^k B_{NL}]$	Matriz que relaciona deformações não lineares com deslocamentos nodais
$\{^{k+1} P\}$	Vetor das cargas nodais externas na configuração $k+1$.
$[_0^k K_L]$	Matriz de rigidez tangente linear
$[_0^k K_{NL}]$	Matriz de rigidez tangente não linear
$[_0^k F]$	Vetor das forças nodais equivalentes
$\{[_0 F^V]\}$	Vetor de cargas viscoelásticas
$\{[_0 F^T]\}$	Vetor de cargas térmicas
$\{[_0 F^H]\}$	Vetor de cargas higroscópicas
T	Campo de temperatura
H	Campo de umidade
α_i	Coefficientes de dilatação térmica
β_i	Coefficientes de expansão por umidade
ξ_{ij}	Tempos reduzidos
Φ_{ij}	Fatores de translação no tempo
$\bar{\epsilon}_i$	Deformação viscoelástica
ϵ_i^T	Deformação térmica
ϵ_i^H	Deformação higroscópica
q_{ij}^p	Variáveis de estado
ϵ_i^e	Deformação elástica instantânea
ϵ_i^v	Deformação dependente do tempo
$\Delta\lambda^i$	Fator de carga correspondente à iteração i
$\{[_0^{k+1} \psi]\}^{i-1}$	Vetor de forças desequilibradas no final da iteração $i-1$
$\{\bar{P}\}$	Vetor de cargas externas de referência.
E	Módulo de elasticidade longitudinal

G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
$\{U\}^i$	Vetor de incrementos de deslocamentos
ρ	Fator de tolerância.
X_t	Resistência à tração na direção 1
Y_t	Resistência à tração na direção 2
X_c	Resistência à compressão na direção 1
Y_c	Resistência à compressão na direção 2
S_A	Resistência ao cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3
S_T	Resistência ao cisalhamento no plano 2-3
X_{et}	Limite de deformação de alongamento na direção 1
X_{ec}	Limite de deformação de encurtamento na direção 1
Y_{et}	Limite de deformação de alongamento na direção 2
Y_{ec}	Limite de deformação de encurtamento na direção 2
$S_{\epsilon A}$	Limite de deformação de cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3
$S_{\epsilon T}$	Limite de deformação de cisalhamento no plano 2-3

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um programa computacional para análise de cascas laminadas de materiais compostos reforçados por fibras com consideração de viscoelasticidade e falhas progressivas. O modelo numérico baseia-se em uma descrição cinemática incremental Lagrangeana Total e em elementos finitos tridimensionais degenerados deduzidos para a análise de cascas. A formulação apresentada permite realizar análises lineares e não lineares de estruturas laminadas feitas de materiais elásticos e viscoelásticos lineares, com deslocamentos arbitrariamente grandes e pequenas deformações.

Para análise não linear utilizam-se os métodos de Newton-Raphson e de Controle por Deslocamentos Generalizados. A análise de falhas progressivas é realizada através de modelos de degradação da rigidez do material e as falhas nas lâminas são detectadas por meio dos critérios de falha macroscópicos de Hashin, Lee e Máxima Deformação. São consideradas falhas nas fibras, na matriz e por delaminação.

Apresentam-se, ainda vários exemplos de aplicações da presente formulação, como análise de flexão e flambagem para estruturas de materiais elásticos e viscoelásticos com consideração de falhas progressivas e não linearidades geométricas.

ABSTRACT

This work presents a computational program for the progressive failure analysis in laminated composite shells reinforced by fibers. The numerical model is based on a Total Lagrangean incremental description and a degenerated three-dimensional finite element derived for shell analysis. The formulation is applied to linear and non-linear analysis of composite structures made of elastic and linear viscoelastic materials with arbitrarily large displacements and small strains.

Newton-Raphson and Generalized Displacement Control Methods are used in non-linear analysis. The progressive failure analysis is accomplished using material stiffness degradation models and the layer failures are detected by macroscopic failure criteria of Hashin, Lee and maximum strain. Fiber failure, matrix failure and delamination are considered.

Several examples of the application of the present formulation are presented, like bending and buckling of structures made of elastic and viscoelastic materials with progressive failures and non linear analysis.

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Materiais compostos são, como o próprio nome já diz, aqueles constituídos por dois ou mais materiais, na tentativa de obter-se um outro com características melhores ou, em outras palavras, tenta-se aproveitar o melhor de cada material. Este conceito é bastante intuitivo e existem registros da utilização de materiais compostos desde a antigüidade. Uma das primeiras e, provavelmente, a mais perfeita estrutura feita de material composto é o próprio corpo humano, com ossos e músculos funcionando como fibras em um arranjo multidirecional.

Existem vários tipos de materiais compostos (figuras de 1.1 a 1.3), como por exemplo aqueles que apresentam partículas suspensas em uma matriz, os reforçados por fibras, nos quais a matriz tem a função de proteger e dar sustentação às fibras, e os laminados que são constituídos por camadas empilhadas.

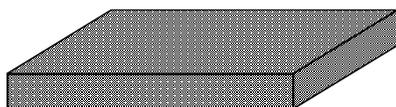


Figura 1.1 - Compostos particulados



Figura 1.2 - Compostos reforçados por fibras

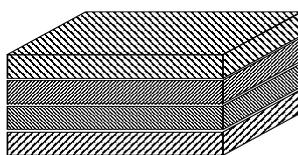


Figura 1.3 - Compostos laminados

Ao longo de muitos anos esses materiais foram evoluindo e ganhando os mais diversos usos. São ideais para aplicações estruturais onde altas razões rigidez/peso e resistência/peso são requeridas, como no caso de aeronaves e espaçonaves. Na indústria automobilística tem-se um amplo uso dos compostos, desde pneus até componentes mecânicos. Materiais odontológicos, artigos esportivos e uma imensa variedade de produtos industriais atestam a versatilidade destes materiais.

Na construção civil, tem-se, dentre outros, o concreto armado onde os agregados graúdos (as partículas) e as barras de aço (as fibras) estão envoltas por uma matriz, a argamassa. Também na área de reforço e recuperação estrutural os compósitos vêm ganhando espaço. A eficiência dos materiais compostos tem difundido seu uso e por isso existe grande interesse em analisar-se de forma eficiente seu comportamento.

Esses materiais apresentam uma mecânica bastante complexa devido a sua heterogeneidade e anisotropia. Existem, basicamente, duas abordagens para seu estudo: a micromecânica, onde leva-se em conta o comportamento dos materiais constituintes em escala microscópica, e a macromecânica, onde considera-se o material homogêneo e os efeitos de seus constituintes são detectados como propriedades médias em cada direção.

Os materiais compostos laminados constituídos por fibras de alta resistência, envoltos por uma matriz possuem particular importância devido a suas inúmeras aplicações. Normalmente utilizam-se painéis formados por lâminas com diferentes orientações a fim de atender-se as exigências de projeto.

Fibras e matriz possuem características bastante distintas. As primeiras, geralmente feitas de boro, grafite, vidro ou carbono, exibem um comportamento basicamente elástico, enquanto que a última, que na maioria dos casos é uma resina, possui comportamento viscoelástico, dependente das condições ambientais.

A determinação da capacidade de carga, dado necessário a utilização de qualquer material, é bem mais complexa no caso dos materiais compostos. Portanto, é desejável o desenvolvimento de modelos computacionais capazes de determinar sua resistência última com a máxima precisão possível.

Desta forma, a análise de falhas progressivas, onde leva-se em conta as fases de degradação do laminado e, ainda, a consideração dos efeitos viscoelásticos acoplados a esta análise de falha, torna-se de grande importância pois confere maior realismo à simulação.

Este campo de estudo ainda apresenta-se como um desafio e raros trabalhos neste sentido são encontrados. Acredita-se que a análise de grandes deslocamentos acoplada com falha e viscoelasticidade seja inédita.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Foi na década de 60 que surgiram os compostos reforçados por fibras que empregam resina como matriz e foi nesta época que surgiram os primeiros trabalhos no sentido de caracterizar o comportamento destes materiais. Estes primeiros estudos buscavam fornecer as propriedades dos materiais compostos através das características de seus constituintes, empregando conceitos da micromecânica. Hashin e Rosen (1964) apresentaram o cálculo dos módulos de elasticidade para compostos com fibras dispostas paralelamente.

Já nesta mesma década surgiram os primeiros trabalhos no sentido de caracterizar o comportamento viscoelástico destes materiais. Hashin (1966) obteve expressões analíticas para propriedades viscoelásticas macroscópicas do material empregando o Princípio da Correspondência e considerando as fibras como elásticas lineares e a matriz como viscoelástica linear.

Uma das primeiras contribuições para o estudo de falhas em materiais compostos (Tsai, citado por Hashin, 1980) é o chamado Critério de Hill. Este critério foi expresso em termos de tensões e sua principal desvantagem é que ele não considera diferentes tensões de falha em tração e compressão. Devido a isto, Hoffman, citado por Hashin (1980), modificou o Critério de Hill adicionando termos lineares para levar em conta diferentes falhas em tração e compressão.

Mais tarde, já na década de 70, Tsai e Wu, citados por Marques (1994), propuseram um critério polinomial quadrático sem específica dependência de tensões pois pode ser expresso tanto em tensões como em deformações.

Ainda na década de 70, surgiram vários estudos experimentais e formulações analíticas e numéricas baseadas na teoria Clássica da Laminação, (Jones, 1975). Como trabalhos analíticos podem ser mencionados Whitney e Ashton (1971) e Hahn e Pagano (1975) que tratam da análise de tensões térmicas em painéis planos de materiais compostos e, também, Weitsman (1979) que aborda o comportamento viscoelástico de materiais compostos.

Entre outros trabalhos interessantes publicados na década de 70 tem-se Hahn e Tsai (1974) que propuseram determinações gráficas das mudanças na rigidez e resistência devido a variações na orientação das fibras e espessura das camadas do laminado e Roten e Hashin (1975) que realizaram uma investigação experimental com placas laminadas antissimétricas sob tração uniaxial mostrando que para ângulos em torno de $\pm 45^\circ$ o comportamento do material pode ser considerado como dúctil, enquanto que para outros ângulos o comportamento se assemelha a material frágil.

Nos anos 80, com a evolução dos computadores, houve um avanço nos modelos numéricos que utilizavam o Método dos Elementos Finitos. Nesta época surgiram novos critérios de falha.

Hashin (1980) considerando que o critério de falha deve ser invariante quanto às rotações no plano perpendicular à direção das fibras, propôs um critério que considera diferentes modos de falha.

Lee (1980) estabeleceu um critério empírico considerando desacoplamento dos efeitos de tensões normais e de cisalhamentos para análise de estruturas por elementos finitos tridimensionais. Neste estudo, Lee também considera diferentes mecanismos de falha. Em outra publicação, Lee(1982), apresenta o mesmo critério de falha e propõe as modificações na rigidez do material com vistas a análise de falhas progressivas objetivando a determinação da resistência última.

Arnold e Mayers (1984) empregaram o Critério da Máxima Deformação em seu estudo sobre flambagem de fibras em compósitos laminados e mostraram a boa concordância deste critério com os dados experimentais extraídos do trabalho apresentado por Tennyson et al.(1978).

Reddy e Pandey (1987) propuseram um critério polinomial para análise de FPF (first ply failure) que engloba, como casos especiais, outros critérios conhecidos.

Zhang e Evans (1988) apresentaram um critério polinomial quadrático expresso em termos de deformações.

Hwang e Sun (1989) utilizaram o Critério de Hashin para análise de falhas progressivas em painéis pelo método dos elementos finitos.

Já nos anos 90 Tolson e Zabarás (1991) utilizaram elementos finitos bidimensionais para a análise de falhas progressivas considerando vários critérios de falha e um modelo simplificado de degradação da rigidez do material. Este estudo apresenta, ainda, comparações com dados experimentais.

Hart-Smith (1993), em sua interessante apreciação a respeito da validade dos critérios de falha normalmente utilizados na determinação da resistência última de materiais compostos, descreve as vantagens apresentadas pelo critério de sua autoria que, embora não seja claramente enunciado, baseia-se fortemente no Critério da Máxima Deformação.

Cheung et al.(1995) apresentaram resultados numéricos para valores de carga de falha última, empregando o Critério de Lee e um modelo de degradação para análise de falhas progressivas. Em seu trabalho encontram-se, ainda, comparações dos resultados obtidos com os de outras formulações e estudos a respeito da influência da orientação das fibras e do número de camadas na resistência do laminado.

Atualmente, novas técnicas de homogeneização (Lene, 1982) estão sendo propostas com o objetivo de determinar as propriedades elásticas e, eventualmente, de falha dos compósitos.

Quanto a análise viscoelástica dos materiais compostos, poucos trabalhos têm sido publicados. Tanto os modelos computacionais como os testes experimentais são raramente encontrados. O trabalho apresentado por Marques (1994) constituiu-se em uma importante contribuição.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

Este trabalho teve como objetivo continuar o desenvolvimento de um modelo computacional capaz de analisar o comportamento de estruturas laminadas feitas de material composto com consideração acoplada de viscoelasticidade e falhas progressivas. Para tanto partiu-se de um programa desenvolvido na tese de doutorado de Severino Marques (Marques, 1994) o qual permite a análise de cascas de material composto submetidas a cargas mecânicas convencionais e a ações de variação de umidade e temperatura.

Novos critérios de falhas foram introduzidos na formulação com o objetivo de melhorar a análise de falhas. Assim, o programa tem agora, além dos critério de Tsai-Wu e Hashin, os critério de Lee e da Máxima Deformação.

Implementou-se um novo algoritmo para análise de falhas progressivas, para os critérios de Hashin, Lee e Máxima Deformação, pelo qual, após a primeira falha a estrutura sofre degradação de sua rigidez e assim, sucessivamente, a cada nova falha, a estrutura vai perdendo rigidez até atingir a falha última.

Além disto desenvolveu-se um algoritmo para análise acoplada de viscoelasticidade e falhas progressivas. Tal análise é feita utilizando-se o Critério da Máxima Deformação uma vez que neste tipo de análise a carga é mantida constante sendo necessário, então, um limite para as deformações.

Visando obter-se melhores resultados na análise numérica e uma maior flexibilidade na simulação dos problemas, utiliza-se, como método de solução das equações de equilíbrio, além do Método de Newton-Raphson, o Método de Controle de Deslocamentos Generalizados.

Um dos objetivos deste trabalho foi, também, a realização de numerosos exemplos para avaliar a precisão dos algoritmos utilizados, tanto na análise elástica, quanto na viscoelástica, linear ou não linear e, ainda, análises de falhas progressivas.

2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS COMPOSTOS

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados alguns subsídios teóricos para o desenvolvimento das relações constitutivas dos materiais compostos laminados. Para tanto, parte-se do caso mais geral, ou seja, as relações constitutivas de materiais anisótropos e analisa-se as conseqüências da simetria elástica na matriz constitutiva do material.

As relações constitutivas para o caso particular de uma lâmina ortótropa de material composto, reforçada por fibras, são estabelecidas em espaços reduzidos de tensões e deformações, nos quais as componentes de tensão e deformação normais ao plano médio da lâmina são desconsideradas.

Desenvolve-se, ainda, as relações destinadas a transformação de coordenadas para tensões, deformações e matriz constitutiva referidas ao sistema de eixos principais da lâmina para um sistema de eixos de referência. E são apresentadas as relações constitutivas para materiais viscoelásticos lineares, bem como as funções de fluência e relaxação destes materiais.

2.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPOS

Muitos dos materiais normalmente utilizados nas aplicações de engenharia são homogêneos e isotrópicos. Porém, isto não se aplica aos materiais compostos daí a maior complexidade de sua análise.

Heterogeneidade e anisotropia são conceitos importantes para o estudo de materiais compostos. O primeiro significa que de um ponto a outro do material as propriedades variam, ou seja, são função da posição. O segundo quer dizer que, dado um ponto no material, as

propriedades variam de acordo com a orientação, isto é, cada plano que passa por este ponto apresenta propriedades distintas.

A figura 2.1 mostra um estado de tensões tridimensionais agindo em um paralelepípedo infinitesimal pertencente a um corpo anisótropo. Neste caso a relação constitutiva do material pode ser expressa pela fórmula (2.1) (Halpin, 1984).

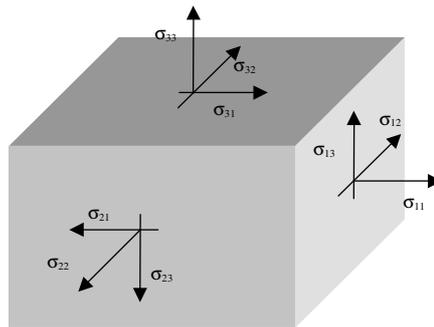


Figura 2.1 - Estado de tensões tridimensionais

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1113} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2213} & S_{2221} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2113} & S_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde $[S]$ será denominada matriz de constantes do material e $[C] = [S]^{-1}$ sendo $[C]$, a matriz constitutiva do material.

Utilizando a notação indicial tem-se (Vinson, 1990)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.2)$$

onde i, j, k e l assumem os valores 1, 2 e 3.

Sendo os tensores de tensões e deformações simétricos, isto é, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$, pode-se escrever (2.2) da seguinte forma

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (2.3)$$

ou, ainda

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} & \epsilon_1 &= \epsilon_{11} \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} & \epsilon_2 &= \epsilon_{22} \\ \sigma_3 &= \sigma_{33} & \epsilon_3 &= \epsilon_{33} \\ \sigma_4 &= \sigma_{12} & \epsilon_4 &= 2\epsilon_{12} \\ \sigma_5 &= \sigma_{13} & \epsilon_5 &= 2\epsilon_{13} \\ \sigma_6 &= \sigma_{23} & \epsilon_6 &= 2\epsilon_{23} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Desta forma, das 81 constantes que aparecem em (2.1), restam apenas 36 em (2.4). E, ainda, admitindo-se a existência de um potencial elástico, demonstra-se que (Vinson, 1990)

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2.6)$$

E, então, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Sendo assim, a relação constitutiva de um material anisótropo em um dado ponto apresenta 21 constantes independentes.

Esta relação mais geral sofre simplificações no caso das propriedades dos materiais apresentarem algum tipo de simetria. Neste caso diz-se que o material possui planos de simetria.

Um caso particular de anisotropia é a ortotropia. E os materiais ortótipos caracterizam-se por possuírem três planos de simetria perpendiculares entre si e, neste caso, a relação constitutiva reduz-se à fórmula (2.8) e há apenas nove constantes independentes. As tensões e deformações normais e de cisalhamento não apresentam interação no caso de haver ortotropia.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

2.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE UMA LÂMINA

As lâminas de material composto reforçadas por fibras, em uma escala microscópica, são heterogêneas, mas segundo a ótica da macromecânica, podem ser consideradas como homogêneas e ortótipas.

No presente trabalho as componentes de tensão e deformação normais ao plano da lâmina são desconsideradas. E, para o caso de uma lâmina ortótropa de material composto, reforçada por fibras (figura 2.2), tem-se a relação constitutiva dada pela fórmula (2.9), que está referida segundo as direções principais da lâmina.

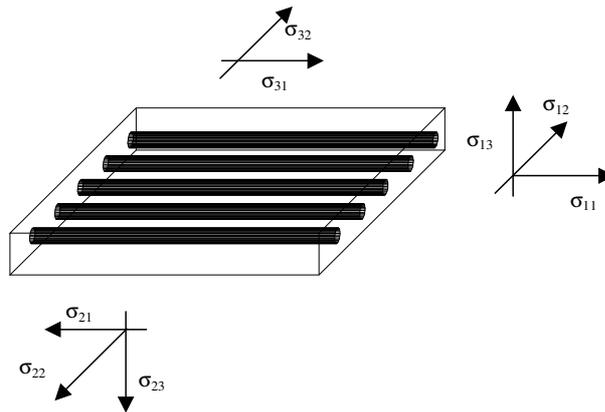


Figura 2.2 – Lâmina reforçada por fibras na direção principal 1

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} & \epsilon_1 &= \epsilon_{11} \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} & \epsilon_2 &= \epsilon_{22} \\ \sigma_3 &= \sigma_{12} & \epsilon_3 &= 2\epsilon_{12} \\ \sigma_4 &= \sigma_{13} & \epsilon_4 &= 2\epsilon_{13} \\ \sigma_5 &= \sigma_{23} & \epsilon_5 &= 2\epsilon_{23} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Os coeficientes da matriz da relação (2.9) expressos em termos das constantes do material ficam (Liao e Reddy, 1987)

$$C_{11} = \frac{E_{11}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.11)$$

$$C_{22} = \frac{E_{22}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.12)$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (2.13)$$

$$C_{33} = G_{12} \quad (2.14)$$

$$C_{44} = G_{13} \quad (2.15)$$

$$C_{55} = G_{23} \quad (2.16)$$

sendo:

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{E_{11}} \quad (2.17)$$

2.4 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

As relações constitutivas anteriores foram apresentadas referidas aos eixos principais do material. Para tê-las em relação às coordenadas de referência x y z do laminado (figura 2.3) deve-se realizar uma transformação de coordenadas.

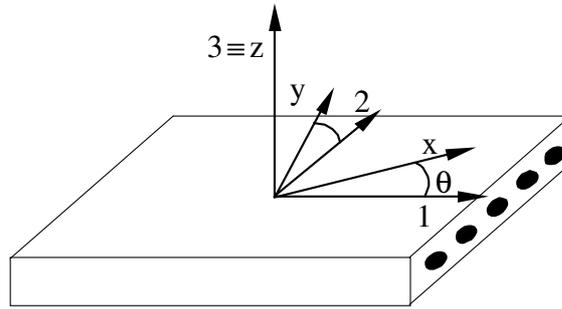


Figura 2.3 – Eixos principais da lâmina e eixos cartesianos

Sendo $[T]$ a matriz de transformação de coordenadas, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Tendo em conta (2.18) e (2.19), pode-se reescrever (2.9) da seguinte forma

$$[T] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Multiplicando os dois lados da equação por $[T]^{-1}$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

ou

$$\{\sigma\}_{xyz} = [T]^{-1}[C][T]\{\epsilon\}_{xyz} \quad (2.22)$$

sendo

$$[\bar{C}] = [T]^{-1}[C][T] \quad (2.23)$$

Tem-se

$$\{\sigma\}_{xyz} = [\bar{C}]\{\epsilon\}_{xyz} \quad (2.24)$$

A matriz $[\bar{C}]$ tem a forma dada na fórmula (2.25) e seus coeficientes estão explicitados nas equações (2.26) a (2.35) (Liao; Reddy, 1987).

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

sendo

$$\bar{C}_{11} = m^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{33}) + n^4 C_{22} \quad (2.26)$$

$$\bar{C}_{12} = m^2 n^2 (C_{11} + C_{22} - 4C_{33}) + (m^4 n^4) C_{12} \quad (2.27)$$

$$\bar{C}_{13} = m n [m^2 C_{11} - n^2 C_{22} - (m^2 - n^2)(C_{12} + 2C_{33})] \quad (2.28)$$

$$\bar{C}_{22} = n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{33}) + m^4 C_{22} \quad (2.29)$$

$$\bar{C}_{23} = m n [n^2 C_{11} - m^2 C_{22} + (m^2 - n^2)(C_{12} + 2C_{33})] \quad (2.30)$$

$$\bar{C}_{33} = m^2 n^2 (C_{11} + C_{22} - 2C_{12}) + (m^2 - n^2) C_{33} \quad (2.31)$$

$$\bar{C}_{44} = m^2 C_{44} + n^2 C_{55} \quad (2.32)$$

$$\bar{C}_{45} = m n (C_{44} - C_{55}) \quad (2.33)$$

$$\bar{C}_{55} = m^2 C_{55} + n^2 C_{44} \quad (2.34)$$

onde

$$\begin{aligned} m &= \cos \theta \\ n &= \sin \theta \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.5 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS LINEARES

Para um material anisótropo e viscoelástico linear as componentes de tensão e deformação relacionam-se da seguinte forma (Hashin, 1966)

$$\sigma_i(t) = \int_0^t C_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.36)$$

ou

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.37)$$

onde C_{ij} são as funções de relaxação do material e D_{ij} são as funções de fluência do material.

Nas equações (2.36) e (2.37) a notação indicial de somatória é utilizada e as componentes de tensão e de deformação são denotadas com um índice que indica a ordem das mesmas nos vetores de tensões e deformações, como aparece (2.4) e com a convenção dada por (2.5).

As funções de fluência e de relaxação dos materiais compostos, em geral, dependem de agentes ambientais como a temperatura e a umidade e, portanto, estes agentes devem figurar, juntamente com o tempo, como variáveis independentes nas equação (2.36) e (2.37).

Na maioria das casos, as lâminas de materiais compostos exibem um comportamento praticamente elástico na direção das fibras, enquanto que a matriz possui comportamento viscoelástico (Hashin, 1966 e Wilson e Vinson, 1984). Isto se verifica devido ao reduzido comportamento viscoelástico exibido pelas fibras normalmente utilizadas nestes materiais como fibras de grafite e de boro. Por outro lado a matriz, que é normalmente um polímero, apresenta resposta viscoelástica.

A caracterização do comportamento viscoelástico dos materiais compostos laminados é normalmente realizadas por meio de testes de fluência e de relaxação (Crossman et al., citado por Marques e Creus, 1994), nos quais os corpos de prova são sujeitos à tração e compressão simples paralela às fibras e na direção perpendicular às mesmas e ao cisalhamento simples nos planos principais. Com estes testes é possível estabelecer as funções de fluência e de relaxação correspondentes às direções principais da lâmina.

As funções de fluência e de relaxação podem ser expressas na forma de séries exponenciais, como (Flaggs e Crossman, 1981)

$$D_{ij}(T, H, t) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^M D_{ij}^p \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_{ij}^p}\right) \right] \quad (2.38)$$

$$C_{ij}(T, H, t) = C_{ij}^0 + \sum_{p=1}^M C_{ij}^p \left[1 + \exp\left(-\frac{t}{\lambda_{ij}^p}\right) \right] \quad (2.39)$$

onde os parâmetros D_{ij}^0 , D_{ij}^p , θ_{ij}^p , C_{ij}^0 , C_{ij}^p e λ_{ij}^p são determinados experimentalmente para o material da lâmina a uma temperatura T e uma concentração de umidade H , sendo os parâmetros θ_{ij}^p e λ_{ij}^p os tempos de retardação e de relaxação, respectivamente. O número de termos usados nas séries (2.38) e (2.39) depende da precisão que se deseja alcançar na análise.

3 MODELO NUMÉRICO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os procedimentos matemáticos para análise não linear de cascas laminadas de material composto reforçado por fibras por meio do Método dos Elementos Finitos. Tais procedimentos baseiam-se em uma descrição cinemática do tipo Lagrangeana Total apresentada em Bathe (1982) porém, modificados pela inclusão de deformações viscoelásticas e higrótérmicas (Marques, 1994).

As equações fundamentais de equilíbrio da mecânica do contínuo formuladas para um elemento finito tridimensional degenerado para análise de cascas constituídas de várias lâminas são apresentadas. A formulação presente permite a consideração de grandes deslocamentos e pequenas deformações, em um modelo constitutivo de viscoelasticidade linear no qual as deformações dependentes do tempo são avaliadas em termos de variáveis de estado (Creus, 1986).

Apresentam-se ainda, neste capítulo, a forma incremental-iterativa da equação de equilíbrio bem como os procedimentos para a definição dos intervalos de tempo na análise viscoelástica. São expostos também os métodos numéricos utilizados para a solução das equações não lineares de equilíbrio (Método de Newton-Raphson e o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados) e os procedimentos numéricos usados para avaliação das deformações viscoelásticas por meio das variáveis de estado.

3.2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Considerando um corpo em um espaço definido por um sistema fixo de coordenadas cartesianas x_1 , x_2 e x_3 , podendo estar sujeito a grandes deslocamentos e rotações e apresentando resposta não linear, deseja-se conhecer sua configuração para diferentes estágios

de carga (figura 3.1). Para tanto, normalmente utilizam-se processos incrementais que, para um dado estágio de carga, admitem como conhecidas todas as configurações anteriores.

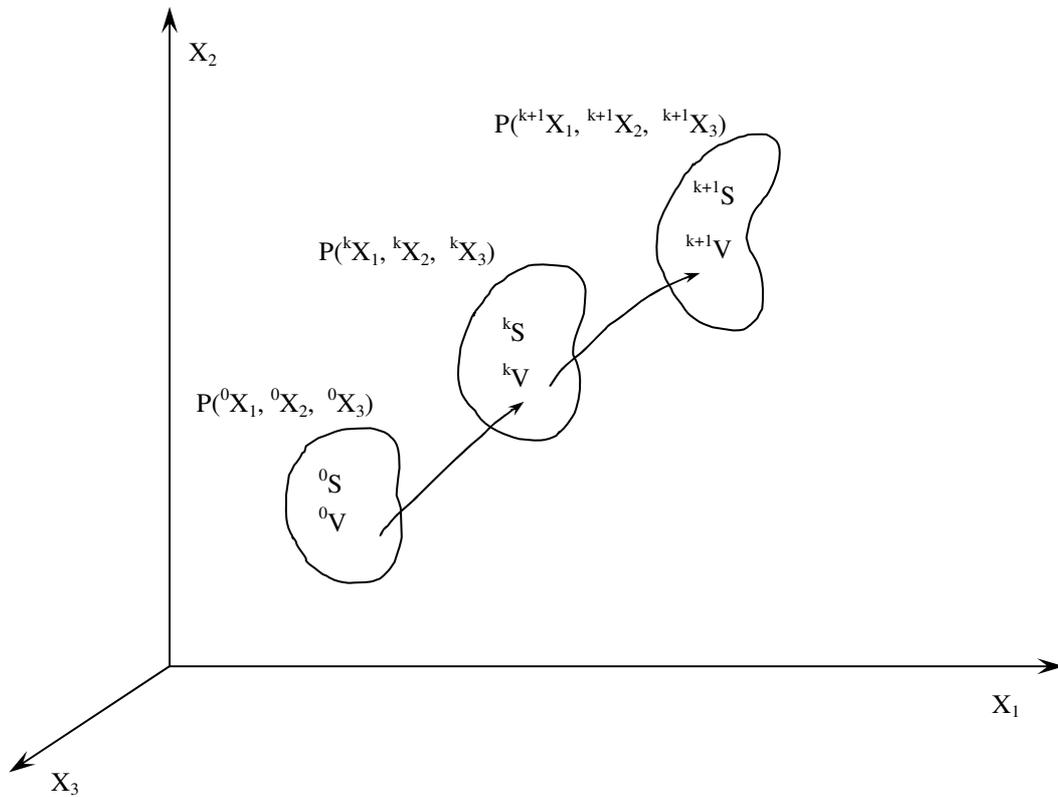


Figura 3.1 – Configurações de um corpo no sistema de coordenadas Cartesiano

No presente modelo utiliza-se uma formulação Lagrangeana Total (Bathe, 1982) a qual baseia-se em uma descrição cinemática em que as variáveis referem-se à configuração inicial.

Para uma análise incremental, a expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser escrita como (Bathe, 1982)

$$\int_{0V} {}^{k+1}S_{ij} \delta {}^{k+1}\epsilon_{ij} d^0V = {}^{k+1}R \quad (3.1)$$

onde 0V é o volume do corpo na configuração inicial, ${}^{k+1}S_{ij}$ são componentes do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff no passo $k+1$, ${}^{k+1}\epsilon_{ij}$ são componentes do Tensor de

Deformações de Green-Lagrange no passo $k+1$, ambos referidos à configuração inicial, e ${}^{k+1}R$ é o trabalho virtual das forças externas no passo incremental $k+1$, que pode ser calculado por

$${}^{k+1}R = \int_{{}_0V} {}^{k+1}q_i^B \delta u_i d^0V + \int_{{}_0S} {}^{k+1}q_i^S \delta u_i d^0S \quad (3.2)$$

sendo que ${}^{k+1}q_i^B$ e ${}^{k+1}q_i^S$ representam as cargas de volume e de superfície, atuantes sobre o corpo na configuração do instante $k+1$ e 0S indica a área do corpo sobre a qual atuam as cargas de superfície, medidas em relação à configuração inicial.

Pode-se escrever a seguinte decomposição

$${}^{k+1}S_{ij} = {}^kS_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (3.3)$$

$${}^{k+1}\epsilon_{ij} = {}^k\epsilon_{ij} + {}_0\epsilon_{ij}$$

onde ${}_0S_{ij}$ são incrementos nas componentes de tensão e ${}_0\epsilon_{ij}$ são incrementos nas componentes de deformação, que ocorrem quando o corpo passa da configuração do instante k para a do instante $k+1$.

Os incrementos de deformação podem, ainda, ser decompostos em uma parte linear ${}_0e_{ij}$ e outra não linear ${}_0\eta_{ij}$, como mostra a equação (3.4)

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (3.4)$$

Considerando um corpo viscoelástico sujeito a cargas convencionais e a variações de temperatura e umidade, os incrementos de deformação decompostos em suas componentes elástica, viscoelástica, térmica e higroscópica, podem ser escritos como (Marques e Creus, 1994)

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0\epsilon_{ij}^e + {}_0\epsilon_{ij}^v + {}_0\epsilon_{ij}^T + {}_0\epsilon_{ij}^H \quad (3.5)$$

A relação constitutiva linearizada para incrementos de tensão e deformação, apresentada por Bathe (1982), pode ser escrita na forma

$${}_0S_{ij} = {}_0C_{ijrs} [{}_0e_{rs} - {}_0e_{rs}^v - {}_0e_{rs}^T - {}_0e_{rs}^H] \quad (3.6)$$

onde ${}_0C_{ijrs}$ representa o tensor constitutivo incremental de quarta ordem do material.

Usando as equações (3.1), (3.3), (3.4) e (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta {}_0e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}_0^k S_{ij} \delta {}_0\eta_{ij} d^0V = \\ & = {}^{k+1}R - \int_{0V} {}_0^k S_{ij} \delta {}_0e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}^v \delta {}_0e_{ij} d^0V + \\ & + \int_{0V} {}_0C_{ijrs} ({}_0e_{rs}^T + {}_0e_{rs}^H) \delta {}_0e_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (3.7)$$

que é a equação incremental de equilíbrio do corpo de acordo com a descrição cinemática Lagrangeana Total.

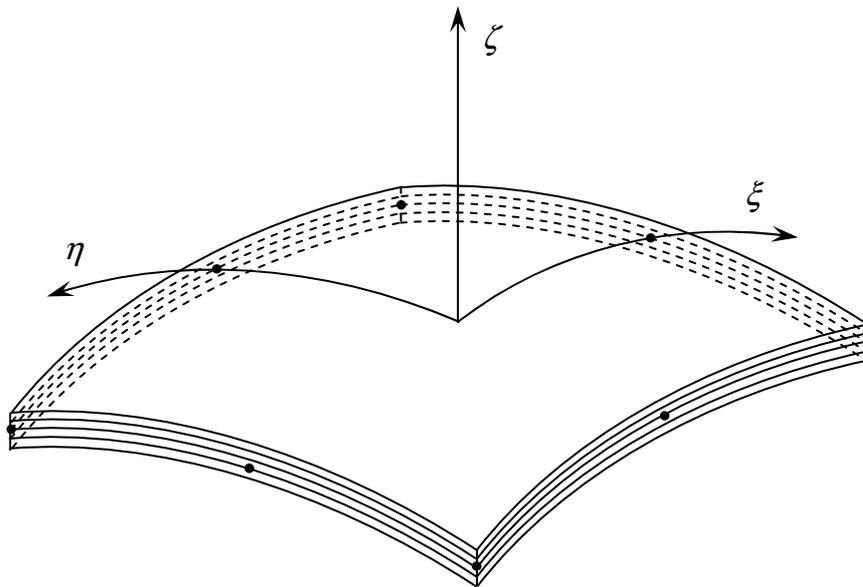


Figura 3.2 – Elemento finito de casca laminada

No presente modelo computacional utiliza-se elementos finitos tridimensionais degenerados do tipo isoparamétrico (figura 3.2), deduzidos para análise de estruturas de

casas. Foi escolhida uma formulação de elementos finitos isoparamétricos devido ao fato de que, em uma análise incremental não linear geométrica, os deslocamentos totais são calculados através da soma dos incrementos de deslocamentos obtidos no corrente passo com as correspondentes coordenadas dos pontos no passo anterior. Sendo assim, é interessante que as funções utilizadas para interpolar deslocamentos sejam as mesmas utilizadas para interpolar as coordenadas do elemento.

As hipóteses consideradas na dedução destes elementos são as mesmas consideradas na análise linear de Ahmad et al. (1970). Mais detalhes podem ser vistos em Hughes (1987)

Trabalhando com notação matricial e considerando o Método dos Elementos Finitos, a equação (3.7), para cada elemento, assume a forma (Marques, 1994)

$$\begin{aligned} & \left[\int_{0V} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}^k\mathbf{B}_L] d^0V + \int_{0V} [{}^k\mathbf{B}_{NL}]^T [{}^k\mathbf{S}] [{}^k\mathbf{B}_{NL}] d^0V \right] \{U\} = \\ & = \{{}^{k+1}\mathbf{P}\} - \int_{0V} [{}^k\mathbf{B}_L]^T \{{}^k\mathbf{S}\} d^0V + \int_{0V} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] (\{{}^0\mathbf{e}^v\} + \{{}^0\mathbf{e}^T\} + \{{}^0\mathbf{e}^H\}) d^0V \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\{U\}$ é o vetor dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento, $[{}^k\mathbf{B}_L]$ e $[{}^k\mathbf{B}_{NL}]$ são as matrizes que relacionam, respectivamente, as partes linear e não linear das deformações com os deslocamentos nodais. Para mais detalhes sobre estas matrizes, ver Bathe (1982). $\{{}^{k+1}\mathbf{P}\}$ é o vetor das cargas nodais externas na configuração $k+1$.

Ainda na equação (3.8) vale ressaltar que $[]^T$ indica a transposta da matriz.

Avaliando as integrais de volume acima em cada uma das N camadas do volume V_q pode-se escrever

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^N \left\{ \int_{0V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] [{}^k\mathbf{B}_L] d^0V_q + \int_{0V_q} [{}^k\mathbf{B}_{NL}]^T [{}^k\mathbf{S}] [{}^k\mathbf{B}_{NL}] d^0V_q \right\} \{U\} = \\ & = \{{}^{k+1}\mathbf{P}\} - \sum_{q=1}^N \int_{0V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}^k\mathbf{S}] d^0V_q + \sum_{q=1}^N \int_{0V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{{}^0\mathbf{e}^v\} d^0V_q + \\ & + \sum_{q=1}^N \int_{0V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{{}^0\mathbf{e}^T\} d^0V_q + \sum_{q=1}^N \int_{0V_q} [{}^k\mathbf{B}_L]^T [{}_0\mathbf{C}] \{{}^0\mathbf{e}^H\} d^0V_q \end{aligned} \quad (3.9)$$

ou, na forma compacta

$$\left(\left[{}_0^k \mathbf{K}_L \right] + \left[{}_0^k \mathbf{K}_{NL} \right] \right) \{ \mathbf{U} \} = \{ {}^{k+1} \mathbf{P} \} - \{ {}_0^k \mathbf{F} \} + \{ {}_0 \mathbf{F}^v \} + \{ {}_0 \mathbf{F}^T \} + \{ {}_0 \mathbf{F}^H \} \quad (3.10)$$

sendo

$$\left[{}_0^k \mathbf{K}_L \right] = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} \left[{}_0^k \mathbf{B}_L \right]^T \left[{}_0 \mathbf{C} \right] \left[{}_0^k \mathbf{B}_L \right] d^0 V_q \quad (3.11)$$

$$\left[{}_0^k \mathbf{K}_{NL} \right] = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} \left[{}_0^k \mathbf{B}_{NL} \right]^T \left[{}_0^k \mathbf{S} \right] \left[{}_0^k \mathbf{B}_{NL} \right] d^0 V_q \quad (3.12)$$

$$\{ {}_0^k \mathbf{F} \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} \left[{}_0^k \mathbf{B}_L \right]^T \{ {}_0^k \mathbf{S} \} d^0 V_q \quad (3.13)$$

$$\{ {}_0 \mathbf{F}^v \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} \left[{}_0^k \mathbf{B}_L \right]^T \left[{}_0 \mathbf{C} \right] \{ {}_0 \mathbf{e}^v \} d^0 V_q \quad (3.14)$$

$$\{ {}_0 \mathbf{F}^T \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} \left[{}_0^k \mathbf{B}_L \right]^T \left[{}_0 \mathbf{C} \right] \{ {}_0 \mathbf{e}^T \} d^0 V_q \quad (3.15)$$

$$\{ {}_0 \mathbf{F}^H \} = \sum_{q=1}^N \int_{V_q} \left[{}_0^k \mathbf{B}_L \right]^T \left[{}_0 \mathbf{C} \right] \{ {}_0 \mathbf{e}^H \} d^0 V_q \quad (3.16)$$

Nas expressões acima, $\left[{}_0^k \mathbf{K}_L \right]$ e $\left[{}_0^k \mathbf{K}_{NL} \right]$ são as matrizes de rigidez tangentes linear e não-linear, respectivamente, correspondentes ao passo k , $\{ {}_0^k \mathbf{F} \}$ é o vetor das forças nodais equivalentes às tensões no elemento no passo k e, finalmente, $\{ {}_0 \mathbf{F}^v \}$, $\{ {}_0 \mathbf{F}^T \}$ e $\{ {}_0 \mathbf{F}^H \}$ são os vetores das cargas viscoelásticas, térmicas e higroscópicas, respectivamente.

3.3 MODELO DE VISCOELASTICIDADE DO MATERIAL

No presente trabalho o material constituinte do laminado é considerado homogêneo e ortótropo, sendo esta uma aproximação aceitável do ponto de vista macroscópico. Além disto,

assume-se que o material é viscoelástico linear e a representação geral usa a relação viscoelástica linear incluindo, ainda, os efeitos de temperatura e umidade. No procedimento numérico, esta representação geral é aproximada, tanto quanto se queira, em termos de variáveis de estado (Creus, 1986).

Outra alternativa é o uso de soluções no espaço transformado de Laplace, mas este procedimento não pode ser facilmente estendido à situações com envelhecimento ou materiais que apresentem não linearidades. Além disto, aplicações (Pacheco e Creus, 1997) mostram que códigos empregando transformada numérica de Laplace não são mais eficientes do que aqueles que empregam variáveis de estado.

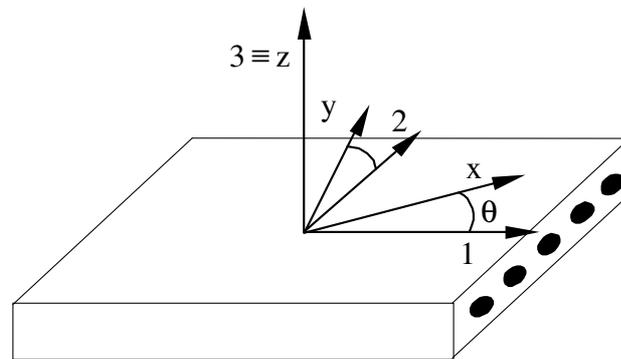


Figura 3.3 - Sistemas de coordenadas para uma lâmina ortótropa

A figura 3.3 mostra uma lâmina feita de material ortótropo e viscoelástico linear. Mais especificamente, trata-se de uma lâmina de material composto reforçada por fibras, na qual as direções principais do material coincidem com os eixos 1, 2 e 3.

A relação constitutiva da lâmina, referida às direções principais do material, para cargas mecânicas e higrotérmicas, pode ser escrita como (Creus, 1986 e Marques e Creus, 1994)

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(T, H, t - \tau) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{T^*}^T \alpha_i(T, H) dT + \int_{H^*}^H \beta_i(T, H) dH \quad (3.17)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, 5$

onde $\varepsilon_i(t)$ são as componentes do vetor de deformações $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}$ e $\sigma_j(t)$ são as componentes do vetor de tensões $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$, para o tempo t , consideradas em um espaço reduzido de deformações e tensões onde as componentes ε_{33} e σ_{33} são desconsideradas. T e H indicam os campos de temperatura e umidade, respectivamente.

Na equação (3.17), $D_{ij}(T, H, T - \tau)$ são as funções de fluência do material correspondentes às componentes ε_i e σ_j , $\alpha_i(T, H)$ são os coeficientes de dilatação térmica e $\beta_i(T, H)$ são os coeficientes de expansão por umidade que, em geral, dependem das condições de temperatura e umidade. T^* e H^* são os valores de temperatura e concentração de umidade para os quais o material não apresenta deformação. Vale lembrar que ε_i , σ_j , T e H são campos variáveis e, desta forma, mudam, em geral, de ponto a ponto no material ainda que esta dependência não apareça de forma explícita.

Assumindo-se que o material é higrotermo-reologicamente simples ou, em outras palavras, usando o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Umididade para o qual as curvas das funções de relaxação do material em uma temperatura T podem ser superpostas às correspondentes curvas de relaxação do material em uma temperatura de referência através de simples translações horizontais, pode-se escrever (Lin e Yi, 1991)

$$D_{ij}(T, H, t) = D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij}) \quad (3.18)$$

onde T_0 e H_0 são valores de referência para temperatura e concentração de umidade, respectivamente, e ξ_{ij} são os tempos reduzidos os quais são determinados através da expressão

$$\xi_{ij} = \int_0^t \varphi_{ij}(T(\tau), H(\tau)) d\tau \quad (3.19)$$

sendo φ_{ij} os fatores de translação no tempo ou, como são conhecidos na literatura inglesa, “the temperature-moisture shift factors”, que devem ser determinados experimentalmente (Crossman et al., citado por Marques e Creus, 1994).

Cabe ressaltar que a hipótese de material higrotermo-reologicamente simples representa satisfatoriamente bem o comportamento dos materiais usados na prática em compósitos.

Substituindo (3.18) em (3.17) tem-se

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{T^*}^T \alpha_i(T, H) dT + \int_{H^*}^H \beta_i(T, H) dH \quad (3.20)$$

onde

$$\xi'_{ij} = \int_0^\tau \varphi_{ij}(T(s), H(s)) ds \quad (3.21)$$

Pode-se decompor as componentes totais de deformação, ε_i nas partes viscoelástica $\bar{\varepsilon}_i$ térmica ε_i^T e higroscópica ε_i^H

$$\varepsilon_i(t) = \bar{\varepsilon}_i(t) + \varepsilon_i^T(T, H) + \varepsilon_i^H(T, H) \quad (3.22)$$

Integrando por partes a primeira integral em (3.20), que corresponde à parte viscoelástica, pode-se escrever

$$\bar{\varepsilon}_i(t) = D_{ij}(T_0, H_0, 0) \sigma_j(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (3.23)$$

O comportamento das funções de fluência ao longo do tempo permite aproximá-las por séries de Dirichlet-Prony, e tem-se

$$D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^M D_{ij}^p \left[1 - \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) \right] \quad (3.24)$$

onde D_{ij}^0 , D_{ij}^p e θ_{ij}^p são constantes do material que devem ser determinadas experimentalmente. M é o número de termos usados na expansão da série acima e depende da

precisão almejada na análise. Os parâmetros θ_{ij}^p são conhecidos como tempos de retardação do material.

Derivando a equação (3.24) com relação a τ , tem-se

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \tau} = \sum_{p=1}^M \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \varphi_{ij} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) \quad (3.25)$$

E substituindo (3.25) em (3.23) obtém-se

$$\bar{\varepsilon}_i(t) = D_{ij}(T_0, H_0, 0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^M \int_0^t d_{ij}^p(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij})\sigma_j(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

onde

$$d_{ij}^p = \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \varphi_{ij} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) \quad (3.27)$$

e, neste caso, notação indicial de somatório não deve ser aplicada.

A equação (3.26) pode, também, ser escrita na seguinte forma

$$\bar{\varepsilon}_i(t) = D_{ij}(T_0, H_0, 0)\sigma_j(t) + \sum_{p=1}^M \sum_{s=1}^5 q_{is}^p(t) \quad (3.28)$$

onde

$$q_{i1}^p(t) = \int_0^t d_{i1}^p(T_0, H_0, \xi_{i1} - \xi'_{i1})\sigma_1(\tau) d\tau$$

$$q_{i2}^p(t) = \int_0^t d_{i2}^p(T_0, H_0, \xi_{i2} - \xi'_{i2})\sigma_2(\tau) d\tau$$

...

$$q_{55}^p(t) = \int_0^t d_{55}^p(T_0, H_0, \xi_{55} - \xi'_{55}) \sigma_5(\tau) d\tau \quad (3.29)$$

são as variáveis de estado.

Da equação (3.28) observa-se que a deformação total no tempo t , $\bar{\varepsilon}_i$, pode ser considerada como a soma de duas componentes, a deformação elástica instantânea ε_i^e e a deformação dependente do tempo ε_i^v dadas, respectivamente, por

$$\varepsilon_i^e = D_{ij}(T_0, H_0, 0) \sigma_j(t) \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_i^v = \sum_{p=1}^M \sum_{s=1}^5 q_{is}^p(t) \quad (3.31)$$

Derivando-se cada uma das expressões (3.29) com relação ao limite superior das integrais t , tem-se

$$\frac{\partial q_{11}^p}{\partial t} + \frac{\varphi_{11}}{\theta_{11}^p} q_{11}^p = \frac{D_{11}^p}{\theta_{11}^p} \varphi_{11} \sigma_1(t)$$

$$\frac{\partial q_{12}^p}{\partial t} + \frac{\varphi_{12}}{\theta_{12}^p} q_{12}^p = \frac{D_{12}^p}{\theta_{12}^p} \varphi_{12} \sigma_2(t)$$

...

$$\frac{\partial q_{55}^p}{\partial t} + \frac{\varphi_{55}}{\theta_{55}^p} q_{55}^p = \frac{D_{55}^p}{\theta_{55}^p} \varphi_{55} \sigma_5(t) \quad (3.32)$$

que é um sistema de equações diferenciais desacopladas lineares de primeira ordem que, juntamente com a condição inicial $q_{ij}^p = 0$ para $t = 0$, pode ser resolvido numericamente através de procedimentos envolvendo diferenças finitas, como mostra a seção 3.4.

A solução do sistema de equações (3.32) leva à determinação das variáveis de estado q_{ij}^p e, assim, pode-se calcular as componentes de deformação viscoelástica através da equação (3.31).

3.4 SOLUÇÃO NUMÉRICA

3.4.1 Forma Incremental-Iterativa da Equação de Equilíbrio

A solução numérica do problema formulado na seção 3.2, correspondente à análise geometricamente não linear de uma estrutura, pode ser obtida através de um procedimento iterativo para o qual a equação incremental não linear de equilíbrio, em um passo incremental $k+1$ (equação (3.10)) é escrita na forma

$$\left(\left[{}_0^{k+1} \mathbf{K}_L \right]^{i-1} + \left[{}_0^{k+1} \mathbf{K}_{NL} \right]^{i-1} \right) \{ \mathbf{U} \}^i = \{ {}^{k+1} \mathbf{P} \}^i - \{ {}_0^{k+1} \mathbf{F} \}^{i-1} + \{ {}_0 \mathbf{F}^v \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^T \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^H \}^i \quad (3.33)$$

onde o índice i indica o número do passo iterativo.

Na equação (3.33) os vetores de cargas viscoelástica, térmica e higroscópica são tomados como nulos para $i \geq 2$. Para a primeira iteração, ou seja, $i=1$, de cada passo incremental, estes vetores são determinados através das equações (3.14), (3.15) e (3.16), respectivamente.

A equação (3.33) pode ser escrita, em uma forma alternativa, como

$$\left(\left[{}_0^{k+1} \mathbf{K}_L \right]^{i-1} + \left[{}_0^{k+1} \mathbf{K}_{NL} \right]^{i-1} \right) \{ \mathbf{U} \}^i = \Delta \lambda^i \{ \bar{\mathbf{P}} \} + \{ {}_0^{k+1} \boldsymbol{\Psi} \}^{i-1} + \{ {}_0 \mathbf{F}^v \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^T \}^i + \{ {}_0 \mathbf{F}^H \}^i \quad (3.34)$$

onde $\Delta \lambda^i$ é o fator de carga correspondente à iteração i do passo incremental $k+1$, $\{ {}_0^{k+1} \boldsymbol{\Psi} \}^{i-1}$ é o vetor de forças desequilibradas no final da iteração $i-1$ e $\{ \bar{\mathbf{P}} \}$ representa um vetor de cargas externas de referência.

Na equação (3.34) os vetores de incrementos de cargas térmicas e higroscópicas são calculados através das equações (3.15) e (3.16), para a iteração $i=1$. Usa-se como incremento de deformações térmicas e higroscópicas os valores correspondentes aos incrementos de temperatura $\Delta\lambda^1\bar{T}$ e de concentração de umidade $\Delta\lambda^1\bar{H}$, sendo \bar{T} e \bar{H} valores tomados como referência.

O vetor de incrementos de cargas viscoelásticas que aparece na equação (3.34) é determinado na iteração $i=1$ para o intervalo de tempo Δt correspondente ao passo incremental $k+1$.

3.4.2 Determinação dos Intervalos de Tempo na Análise Viscoelástica

Na presente formulação a definição dos intervalos de tempo correspondentes aos passos incrementais na análise viscoelástica, pode ser feita de duas maneiras. Na primeira delas, o intervalo de tempo é pré-estipulado e mantém-se constante ao longo da análise. Deve-se, contudo, ter cuidado pois a precisão dos resultados e a estabilidade do processo numérico dependem da grandeza dos intervalos de tempo adotados.

Na segunda maneira, a escolha dos intervalos de tempo é feita adotando-se um procedimento que considera intervalos de tempo crescentes. Este procedimento é bastante lógico, tendo em vista que as funções de fluência dos sólidos usuais apresentam como característica uma contínua redução de inclinação ao longo do tempo e, portanto, um mesmo incremento de deformação viscoelástica deve ocorrer para intervalos de tempo cada vez maiores. Desta forma, adotar um pequeno e constante intervalo de tempo poderia tornar desnecessariamente longa a análise.

A definição dos intervalos de tempo, neste segundo procedimento, é feita por meio de um processo que, partindo de um pequeno intervalo de tempo inicial, previamente escolhido, permite a obtenção automática dos demais intervalos de tempo, com valores progressivamente crescentes e sendo garantida a estabilização do processo numérico de avaliação das deformações viscoelásticas. No presente trabalho é adotado um processo auto-adaptável para definição dos intervalos de tempo na análise viscoelástica (Masuero, 1992).

Para descrever o processo acima mencionado, considera-se um sólido cujo comportamento viscoelástico seja modelado por um simples elemento Kelvin, com uma mola de constante E e um tempo de retardação θ (figura 3.4).

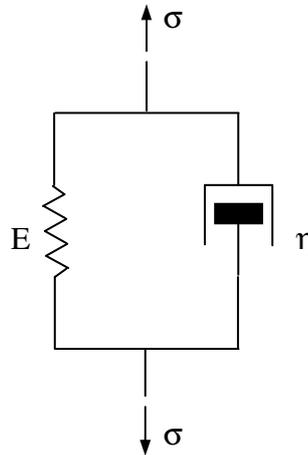


Figura 3.4 – Elemento Kelvin submetido à tensão axial

Admitindo-se uma tensão axial σ atuando sobre este modelo tem-se que a deformação viscoelástica no tempo t é dada por (Creus, 1986)

$$\varepsilon^v(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \right) \quad (3.35)$$

e, para o tempo $t+\Delta t$

$$\varepsilon^v(t + \Delta t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{t+\Delta t}{\theta}} \right) \quad (3.36)$$

Subtraindo-se (3.35) de (3.36), chega-se ao incremento de deformação

$$\Delta\varepsilon^v(t + \Delta t) = \frac{\sigma}{E} e^{-\frac{t}{\theta}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\theta}} \right) \quad (3.37)$$

Fazendo os incrementos de deformação viscoelásticas, dados por (3.37), iguais a Δe^v no tempo $t=0$ e considerando o incremento de tempo inicial Δt_0 como uma fração f do tempo de retardação θ ($\Delta t_0=\theta/f$), obtém-se (Masuero, 1992)

$$\Delta t = -\theta \ln \left[1 - e^{-\frac{t}{\theta}} + e^{-\frac{t-1}{\theta}} \right] \quad (3.38)$$

O uso da equação (3.38) proporciona, em geral, valores crescentes de Δt , devido à forma da função de fluência. Mas, em alguns casos, quando a deformação viscoelástica total não é múltiplo inteiro da deformação viscoelástica correspondente ao intervalo de tempo inicial, a expressão entre colchetes que aparece em (3.38), resulta negativa. Quando isto acontecer, sugere-se que o mesmo intervalo de tempo do passo anterior seja adotado.

Quando o comportamento do material é modelado por uma ou mais cadeias de elementos Kelvin, ou equivalentemente por séries como aquelas dadas em (3.24), com diferentes tempos de retardação, pode-se adotar como o valor de θ , na expressão (3.38), o menor tempo de retardação das cadeias, ou das séries.

Na parte deste trabalho destinada a avaliação de exemplos numéricos é apresentada uma apreciação à respeito da não conveniência de utilização do processo acima descrito em análises de flambagem viscoelástica. Nestes casos, como será visto no exemplo 5.7, a curva deslocamento x tempo para cargas maiores que a carga de flambagem, apresenta um aumento de declividade com o passar do tempo. Por isso, a idéia de intervalos de tempo crescentes ao longo da análise, não reproduz bem o comportamento da estrutura.

3.4.3 Métodos de Solução da Equação de Equilíbrio

Para solução numérica das equações de equilíbrio não-lineares (3.34), no presente programa computacional foram implementados dois métodos, o Método de Newton-Raphson e o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados proposto por Yang e Shieh (1990).

Ao empregar-se o Método de Newton-Raphson, o valor do fator de carga $\Delta\lambda^i$ é previamente fixado. O desvantagem apresentada por este método é a impossibilidade de conduzir a análise em situações em que a matriz de rigidez tangente da estrutura deixa de ser definida positiva. Nestes casos, o processo numérico torna-se, em geral, divergente.

Utilizando-se o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, o vetor de incrementos de deslocamentos é decomposto da forma

$$\{U\}^i = \Delta\lambda^i \{U_1\}^i + \{U_2\}^i \quad (3.39)$$

sendo os vetores $\{U_1\}^i$ e $\{U_2\}^i$ dados por

$$\left\{ \left[{}_0^{k+1}K_L \right]^{i-1} + \left[{}_0^{k+1}K_{NL} \right]^{i-1} \right\} \{U_1\}^i = \{\bar{P}\} \quad (3.40)$$

$$\left\{ \left[{}_0^{k+1}K_L \right]^{i-1} + \left[{}_0^{k+1}K_{NL} \right]^{i-1} \right\} \{U_2\}^i = \{ {}_0^{k+1}\Psi \}^{i-1} \quad (3.41)$$

As expressões propostas pelo método em questão para determinação dos fatores de carga nas iterações correspondentes ao passo genérico k são

$$\Delta\lambda_k^1 = \pm \Delta\lambda_1^1 \frac{\langle U_1 \rangle_1^1 \{U_1\}_1^1}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_1\}_k^1} \quad \text{para } i=1 \quad (3.42)$$

e

$$\Delta\lambda_k^i = - \frac{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_2\}_k^i}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_1\}_k^i} \quad \text{para } i \geq 2 \quad (3.43)$$

sendo que $\Delta\lambda_1^1$ é o fator de carga inicial previamente estipulado e $\langle \rangle$ indica vetor linha.

O Método de Controle por Deslocamentos Generalizados é particularmente apropriados para análise de estruturas em estágio pós-crítico. No programa computacional a

que se refere o presente trabalho este método é utilizado somente se a análise for elástica, pois em análises viscoelásticas, normalmente, deseja-se estudar o comportamento das estruturas submetidas a uma carga constante, não sendo possível, desta forma, utilizar um método baseado na variação do fator de carga.

Em ambos os métodos admite-se como atingido o equilíbrio da estrutura no final da iteração i de um passo incremental genérico k se for satisfeito o seguinte critério de convergência

$$\frac{\|U^i\|}{\|U_a\|} \leq \rho \quad (3.44)$$

onde $\|U^i\|$ é a norma euclidiana do vetor de incrementos de deslocamentos na iteração i , $\|U_a\|$ é a norma euclidiana do vetor de deslocamentos totais acumulados para a mesma iteração e ρ é um fator de tolerância.

3.4.4 Avaliação das Variáveis de Estado

As deformações viscoelásticas são determinadas através das variáveis de estado obtidas da resolução do sistema de equações diferenciais (3.32) Para tanto, utiliza-se o procedimento numérico que é descrito a seguir.

Usando as equações (3.27) e (3.29), pode-se escrever a seguinte equação

$$q_{ij}^p(t + \Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \varphi_{ij} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} + \Delta\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (3.45)$$

Admitindo-se $\sigma(\tau)$ constante no intervalo Δt e igual a $\sigma(t)$, pode-se integrar para obter (Creus, 1986)

$$q_{ij}^p(t + \Delta t) = q_{ij}^p(t) \exp\left(-\frac{\Delta \xi_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right) + D_{ij}^p \left\{1 - \exp\left(-\frac{\Delta \xi_{ij}}{\theta_{ij}^p}\right)\right\} \sigma_j(t) \quad (3.46)$$

Através da equação (3.46), é possível avaliar as variáveis de estado q_{ij}^p , no tempo $t+\Delta t$ como funções de seus valores no tempo t . Este procedimento de cálculo somente é válido quando são adotados intervalos de tempo para os quais os valores das componentes de tensão podem ser considerados praticamente constantes. Outros procedimentos para a solução numérica da equação (3.45) são apresentados por Creus(1984) e Masuero (1992).

4 FALHAS EM MATERIAIS COMPOSTOS

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo trata da análise de falha progressivas em materiais compostos laminados. Apresentam-se as considerações relativas aos principais tipos de falhas que ocorrem nas lâminas de materiais compostos reforçadas por fibras, assim como os critérios macroscópicos utilizados na detecção destes tipos de falhas.

Um modelo de degradação de rigidez de uma lâmina, em presença de falhas é apresentado, considerando os diferentes modos de falha e sua correspondente modificação na matriz constitutiva do material. Tem-se, ainda, uma breve explicação sobre o cálculo do fator de carga para o qual se dá a falha.

4.2 ABORDAGEM DE FALHAS

Os materiais compostos possuem mecanismos de falhas bem mais complexos que os materiais isotrópicos, até porque, no caso dos primeiros, deve-se considerar todos os tipos de falhas de cada um dos materiais componentes, acrescidos das falhas de degradação do composto.

As falhas nas estruturas de materiais compostos de lâminas constituídas de fibras e matriz ocorrem, basicamente, de quatro modos:

- ruptura por tração e flambagem por compressão das fibras;
- ruptura da matriz no sentido paralelo às fibras;
- perda de aderência entre fibras e matriz;
- delaminação.

Nos três primeiros, a falha relaciona-se com as propriedades e características dos materiais constituintes das lâminas, enquanto que no último, tem-se a dependência do esquema de laminação e das tensões interlaminares geradas.

O estudo de falhas nos compostos pode ser abordado segundo a micro ou macromecânica, porém, os aspectos micro-estruturais da falha são tão complexos que seria difícil a resolução destes problemas com base nos métodos da micromecânica. Por isso, normalmente adotam-se os conceitos de critérios de falha, baseados na abordagem macromecânica. Neste caso, tem-se falhas na direção das fibras, falhas na direção perpendicular a esta e delaminação, mas não são consideradas falhas separadamente nas fibras e matriz.

Os critérios de falha são representados por superfícies de ruptura no espaço de tensões ou deformações. Matematicamente, tem-se:

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) = 1 \quad (4.1)$$

ou

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5) = 1 \quad (4.2)$$

Existem vários tipos de critérios de falha. Quanto a sua apresentação matemática, podem ser polinomiais ou apenas fornecerem um limite de tensões ou deformações nas direções principais do material. Os critérios polinomiais tem a forma

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1 \quad (4.3)$$

em termos de tensões e

$$G_i \varepsilon_i + G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + G_{ijk} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k + \dots = 1 \quad (4.4)$$

em termos de deformações. Os coeficientes dos polinômios são obtidos de dados experimentais.

No caso do critério ser apenas um limite para tensões ou deformações, os efeitos da interação das mesmas são negligenciados. Já entre os critérios polinomiais, o polinômio linear, normalmente subestima a resistência do material, sendo, portanto, mais comumente utilizados polinômios de ordens mais elevadas.

Quanto ao tipo de análise de falha, tem-se os critérios que identificam simplesmente a ocorrência de falha e os que consideram os diferentes modos de falha e, por isso, servem para serem empregados em análises de falhas progressivas.

A seguir são apresentados os critérios que encontram-se implementados nesta formulação, cabendo, ainda, salientar que, neste trabalho, a lâmina é considerada transversalmente isótropa, com o plano de isotropia sendo o plano 2-3. Neste caso temos que as resistências ao cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3, são iguais. As direções principais da lâmina (1, 2 e 3) encontram-se representadas na figura 4.1. E para as equações apresentadas no seguinte tópico vale a notação abaixo.

X_t - resistência à tração na direção 1

Y_t - resistência à tração na direção 2

X_c - resistência à compressão na direção 1

Y_c - resistência à compressão na direção 2

S_A - resistência ao cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3

S_T - resistência ao cisalhamento no plano 2-3

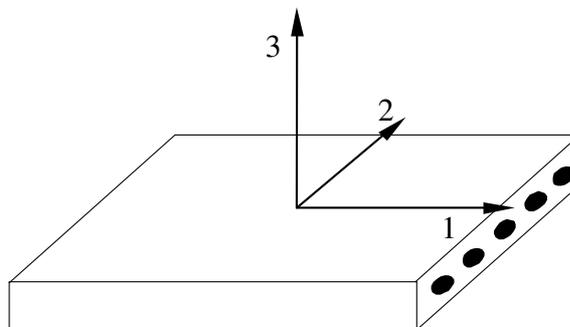


Figura 4.1 - Direções principais da lâmina

4.3 CRITÉRIOS DE FALHA

4.3.1 Critério de Tsai-Wu

Este critério, proposto por Tsai e Wu, citados por Marques (1994), apresenta forma polinomial quadrática e pode ser expresso em termos de tensões ou deformações.

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (4.5)$$

Onde, para um material com diferentes resistências em tração e compressão, os parâmetros F_i e F_{ij} são calculados como segue

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} & ; & & F_2 &= \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \\ F_{11} &= \frac{1}{X_t X_c} & ; & & F_{22} &= \frac{1}{Y_t Y_c} \\ F_{33} = F_{44} &= \frac{1}{(S_A)^2} & ; & & F_{55} &= \frac{1}{(S_T)^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$$

O fator F_{12}^* é determinado por intermédio de uma variedade de testes de tensão biaxiais tração-tração, tração-compressão e compressão-compressão. Estes testes são de difícil execução e existem incertezas quanto ao fato dos valores obtidos nos diferentes testes poderem ser aproximados.

Tendo em conta que a falha ou resistência de falha do material não varia com a mudança de sinal das tensões de cisalhamento, ao contrário do que acontece no caso das tensões normais, os termos lineares referentes à tensões de cisalhamento devem desaparecer.

A expressão do Critério de Tsai-Wu em termos de tensões para uma lâmina transversalmente isotrópica fica

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\sigma_4^2 + F_{55}\sigma_5^2 = 1 \quad (4.7)$$

Alternativamente pode-se escrever o critério em função de deformações.

$$G_1\varepsilon_1 + G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j = 1 \quad (4.8)$$

A principal limitação do Critério de Tsai-Wu é que ele não considera o fato de que as falhas nas fibras e matriz ocorrem de modos muito distintos, pois define a ocorrência de falha através de uma única expressão.

4.3.2 Critério de Hashin

Hashin (1980), considerando que uma lâmina reforçada por fibras unidirecionais, dispostas na direção 1, é transversalmente isotrópica no plano perpendicular à direção das fibras, afirmou que o critério de falha não deve variar devido à rotações no plano 2-3 e, portanto, deve ser função dos invariantes de tensão com relação às rotações em torno do eixo 1, dados nas equações (4.9).

$$I_1 = \sigma_{11}$$

$$I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_3 = \sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} \quad \text{ou} \quad I_3 = \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{23}^2 \quad (4.9)$$

$$I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2$$

$$I_5 = 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

As componentes de tensão que aparecem em (4.9) são aquelas representadas na figura 2.1. Cabe lembrar que, como os eixos 2 e 3 podem girar em torno do eixo 1, a componente σ_{33} pode não ser normal ao plano médio da lâmina.

Afirmado, ainda que a aproximação quadrática é a mais simples entre as que apresentam bons resultados, Hashin (1980) propôs um critério polinomial quadrático que apresenta a seguinte forma geral

$$A_1 I_1 + B_1 I_1^2 + A_2 I_2 + B_2 I_2^2 + C_{12} I_1 I_2 + A_3 I_3 + A_4 I_4 = 1 \quad (4.10)$$

Sendo $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$ e C_{12} constantes do material dependentes do modo de falha e I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 , os invariantes de tensão no plano 2-3 dados pelas equações (4.9).

O Critério de Hashin leva em conta os diferentes modos de falha e foi enunciado como segue:

Modo de tração nas fibras

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_A^2} \right) = 1 \quad (4.11)$$

Modo de compressão nas fibras

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_c} \right)^2 = 1 \quad (4.12)$$

Modo de tração na matriz

$$\frac{1}{Y_t} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33}) + \frac{1}{S_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (4.13)$$

Modo de compressão na matriz

$$\frac{1}{Y_c} \left(\frac{Y_c^2}{4S_T^2} - 1 \right) (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_T^2} (\sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2) + \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (4.14)$$

4.3.3 Critério de Lee

Lee (1980 e 1982) propôs um critério de determinação direta do modo de falha baseado inteiramente no empirismo.

Modo de tração nas fibras

$$\frac{\sigma_{11}}{X_t} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (4.15)$$

Modo de compressão nas fibras

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_c} \right)^2 = 1 \quad (4.16)$$

Modo de tração na matriz

$$\frac{\sigma_{22}}{Y_t} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) = 1 \quad (4.17)$$

Modo de compressão na matriz

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_c}\right)^2 = 1 \quad (4.18)$$

Delaminação

$$\frac{\sigma_{33}}{Y_t} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_A^2}(\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (4.19)$$

Tanto no Critério de Lee como no Critério de Hashin admite-se que a falha é produzida apenas pelas tensões que agem no plano da mesma.

No Critério de Lee as tensões normais e de cisalhamento são consideradas independentemente.

4.3.4 Critério da Máxima Deformação

Este critério é bastante intuitivo, pois estabelece que a falha se dá quando uma das componentes de deformação atuantes segundo as direções principais da lâmina atinge o seu respectivo valor limite determinado experimentalmente.

Segundo o Critério da Máxima Deformação a falha ocorre quando uma das condições abaixo for satisfeita.

Alongamento

$$\left(\frac{\epsilon_{11}}{X_{et}}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{\epsilon_{22}}{Y_{et}}\right)^2 = 1 \quad (4.20)$$

Encurtamento

$$\left(\frac{\epsilon_{11}}{X_{ec}}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{\epsilon_{22}}{Y_{ec}}\right)^2 = 1 \quad (4.21)$$

Distorção

$$\left(\frac{\epsilon_{12}}{S_{\epsilon A}}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{\epsilon_{13}}{S_{\epsilon A}}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{\epsilon_{23}}{S_{\epsilon T}}\right)^2 = 1 \quad (4.22)$$

onde:

X_{et} – limite de deformação de alongamento na direção 1

X_{ec} – limite de deformação de encurtamento na direção 1

Y_{et} – limite de deformação de alongamento na direção 2

Y_{ec} – limite de deformação de encurtamento na direção 2

$S_{\epsilon A}$ – limite de deformação de cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3

$S_{\epsilon T}$ – limite de deformação de cisalhamento no plano 2-3

4.4 CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS

Para a análise de falhas progressivas necessita-se de critérios que considerem os diferentes modos de falha. Dentre estes, os implementados no modelo computacional foram os de Hashin, Lee e Máxima Deformação.

A fim de realizar a referida análise, necessita-se empregar um modelo de degradação da lâmina para efetuar as modificações na rigidez do material à medida que as falhas avançam. Tal degradação, na realidade, ocorre de maneira bastante complexa devido às características dos materiais compostos. No entanto, para análise por elementos finitos, optou-

se por um modelo simples de degradação que consiste em anular ou reduzir convenientemente os termos da matriz constitutiva do material referentes ao modo de falha ocorrido. Este procedimento encontra-se ilustrado em alguns trabalhos como Lee (1982), Tolson e Zabarás (1991) e Cheung et al (1995).

Apresenta-se a seguir os modelos de degradação da rigidez utilizados na presente formulação.

4.4.1 Modelos de Degradação da Lâmina

Para o Critério de Hashin empregou-se dois tipos diferentes de falhas e conseqüente modificação na matriz constitutiva do material.

- Falha na direção das fibras (direção 1)

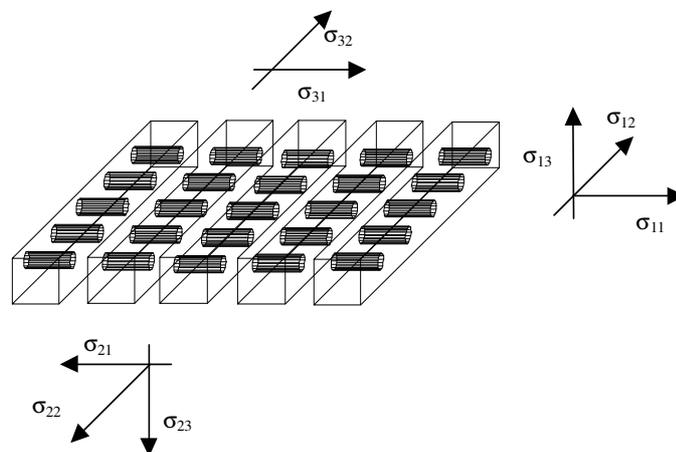


Figura 4.2 – Falha na direção 1

A figura 4.2 esquematiza a ocorrência de falha na direção das fibras pela observação da mesma pode-se concluir que, neste caso:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= 0 \\
 \sigma_{12} &= 0 \\
 \sigma_{13} &= 0 \\
 \sigma_{22} &\neq 0 \\
 \sigma_{23} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Desta forma, a matriz constitutiva do material para o modo de falha nas fibras, fica:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix}
 \tag{4.24}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_{11} \\
 \sigma_2 &= \sigma_{22} \\
 \sigma_3 &= \sigma_{12} \\
 \sigma_4 &= \sigma_{13} \\
 \sigma_5 &= \sigma_{23}
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

- Falha na direção perpendicular às fibras (direção 2)

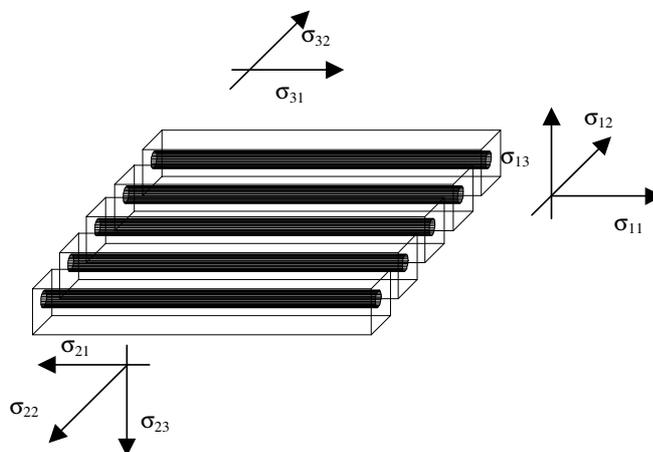


Figura 4.3 - Falha na direção 2

Observando a figura 4.3 vê-se que, para este tipo de falha as tensões nas direções principais do material ficariam:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} &= 0 \\
 \sigma_{21} &= 0 \\
 \sigma_{23} &= 0 \\
 \sigma_{11} &\neq 0 \\
 \sigma_{13} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

E a matriz constitutiva correspondente ao modo de falha na matriz assume a forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{Bmatrix}
 \tag{4.27}$$

No caso do Critério de Lee, além dos dois tipos de falhas anteriores considerou-se ainda, a falha por delaminação (figura 4.4). Embora a tensão σ_{33} não seja considerada, esse terceiro tipo de falha pode ser identificado pela aplicação da segunda equação em 4.19. E, para uma ocorrência de falha deste tipo, tem-se

$$\begin{aligned}
 \sigma_{23} &= 0 \\
 \sigma_{13} &= 0 \\
 \sigma_{11} &\neq 0 \\
 \sigma_{22} &\neq 0 \\
 \sigma_{21} &\neq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

E matriz constitutiva fica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

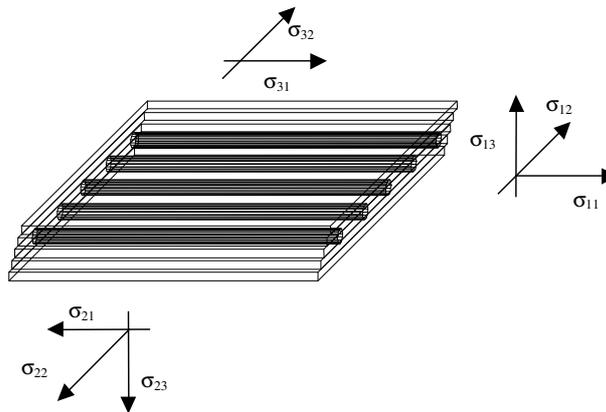


Figura 4.4 – Falha por delaminação

Para utilizar o Critério da Máxima Deformação em análise de falhas progressivas, considerou-se três diferentes tipos de falhas, quais sejam, falha na direção 1 (direção das fibras), falha na direção 2 (direção perpendicular às fibras) e falha por cisalhamento.

A falha por alongamento ou encurtamento pode ocorrer na direção das fibras ou na direção perpendicular às mesmas, e uma vez que ela ocorra, procede-se as correspondentes modificações na matriz constitutiva, já expostas anteriormente (equações (4.24) e (4.27)).

A falha por cisalhamento pode ocorrer nos planos 1-2, 1-3 e 2-3 (figura 4.5).

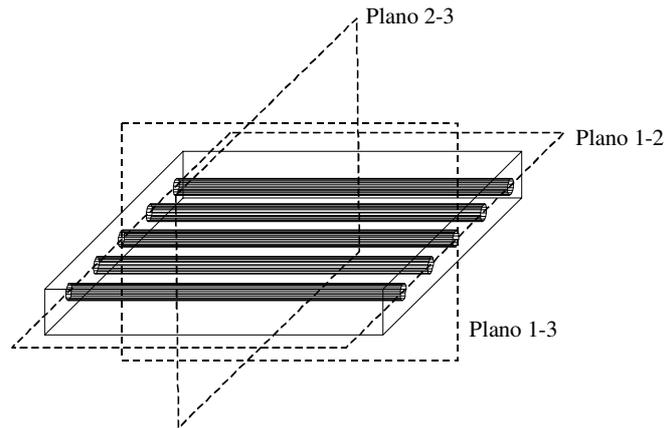


Figura 4.5 - Planos principais da lâmina

-Cisalhamento no plano 1-2

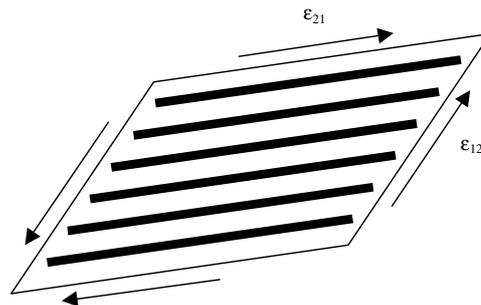


Figura 4.6 - Cisalhamento 1-2

Considerando que as fibras possuem maior resistência que a matriz a ruptura se daria da seguinte forma

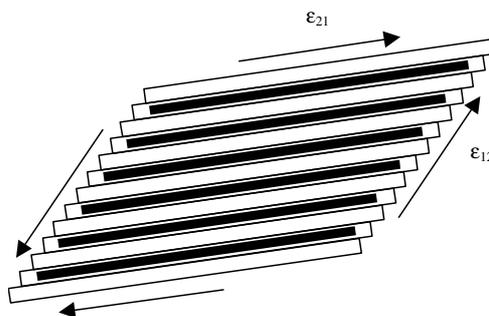


Figura 4.7 – Ruptura por cisalhamento no plano 1-2

O que caracteriza falha na matriz e neste caso a matriz constitutiva sofre as modificações devidas a este tipo de falha (equação (4.27)).

- Cisalhamento no plano 1-3

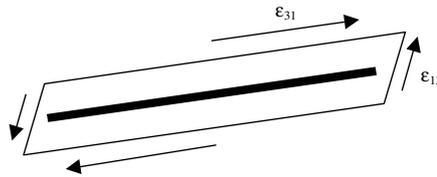


Figura 4.8 – Cisalhamento 1-3

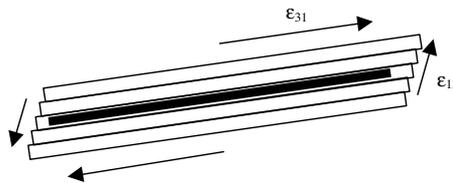


Figura 4.9 – Ruptura por cisalhamento no plano 1-3

Neste caso ocorreria uma espécie de “delaminação” na matriz da lâmina e esta perderia sua resistência aos cisalhamentos ϵ_{13} e ϵ_{23} . Assim sendo, a matriz constitutiva da lâmina sofreria as modificações apresentadas na equação 4.29.

- Cisalhamento no plano 2-3

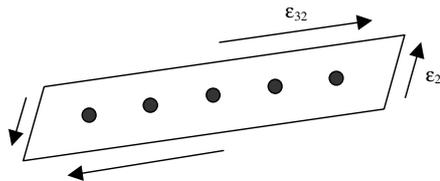


Figura 4.10 – Cisalhamento 2-3

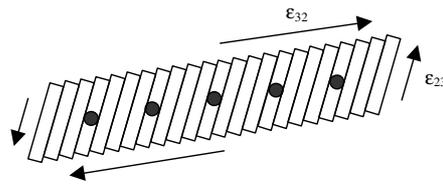


Figura 4.11 – Ruptura por cisalhamento no plano 2-3

Neste caso haveria ruptura da matriz (equação 4.27).

4.4.2 Cálculo do Fator de Carga

A análise de falhas progressivas é feita por meio de incrementos de carga que podem levar a estrutura até sua falha última. O procedimento consiste em, dado um incremento de carga verificar se este incremento provoca falha ou não. Em caso positivo, deve-se obter o menor fator de carga capaz de provocar a falha. Se a falha ocorrida não compromete completamente a capacidade de carga da estrutura, são feitas as modificações devidas na rigidez do material e a análise prossegue, caso contrário, tem-se a falha última (LPF – Last Ply Failure).

A figura 4.12 mostra uma superfície de falha e o incremento dado que deve ser subtraído de uma quantidade (seta com linha pontilhada), para obter-se o fator de carga de falha.

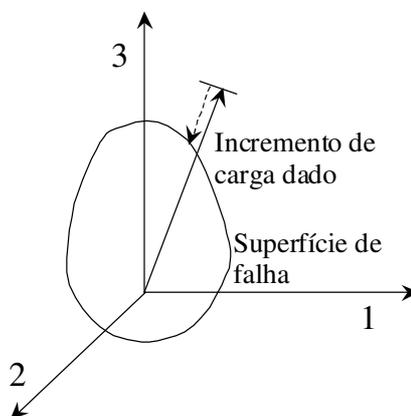


Figura 4.12 – Fator de carga para falha

5 EXEMPLOS DE ANÁLISE ELÁSTICA E VISCOELÁSTICA

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos nos quais consideram-se estruturas de materiais elásticos e viscoelásticos lineares. Alguns destes exemplos visam demonstrar as possibilidades e as limitações da presente formulação, bem como comparar seus resultados com outros obtidos analiticamente ou por outras formulações.

Além de análises elásticas são apresentados exemplos de representação numérica do comportamento de materiais viscoelásticos, análise não linear geométrica em flambagem elástica e viscoelástica com comparação entre os métodos de escolha dos intervalos de tempo na análise viscoelástica e investigações à respeito da discretização necessária.

5.2 ANÁLISE DE UMA PLACA SIMPLEMENTE APOIADA

A placa da figura 5.1, simplesmente apoiada e feita de material homogêneo e isotrópico, possui as seguintes propriedades:

$$E = 2,0 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$G = 1,1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

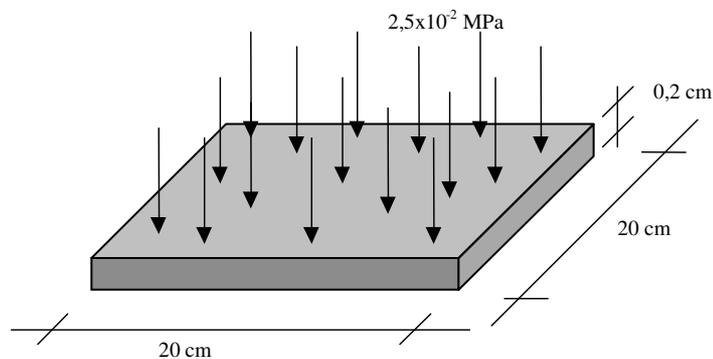


Figura 5.1 – Placa de material homogêneo

A placa foi analisada considerando-se a simetria, de modo que apenas um quarto da mesma foi discretizado em malhas de elementos finitos com 9 nós. (figura 5.2).

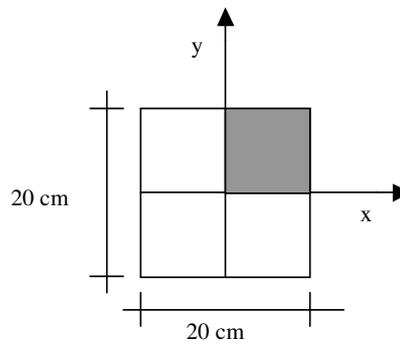


Figura 5.2 – Simetria da placa

Três diferentes malhas foram utilizadas, 1x1, 2x2 e 4x4 elementos. E os resultados obtidos são apresentados na tabela abaixo.

nº de elementos	1	4	16
Deslocamento no centro da placa (cm)	0,0912	0,1011	0,1052

Tabela 5.1 – Deslocamento no centro da placa para diferentes malhas

-Cálculo do deslocamento teórico no centro da placa (Oden e Ripperger, 1981)

$$w = \frac{0,0443 \cdot p_0 \cdot a^4}{E \cdot h^3} = \frac{0,0443 \cdot 2,5 \times 10^{-2} \cdot 20^4}{2,0 \times 10^5 \cdot 0,2^3} = 0,1108 \text{ cm}$$

Como pode-se observar os resultados numéricos convergem para o resultado teórico a medida que aumenta a discretização da malha.

Este exemplo visa apenas demonstrar a eficácia do modelo.

5.3 ANÁLISE DE UM LAMINADO SUJEITO A CARGA SENOIDAL

Este exemplo consiste na análise de um laminado quadrado de lado 'a' e espessura 'h', composto de quatro camadas orientadas a (0°/90°/90°/0°), as quais possuem iguais espessuras. A placa é simplesmente apoiada em todos os lados e está sujeita a uma carga de pressão senoidal, como está esquematizado na figura 5.3. A carga é dada pela seguinte equação

$$p_z = P \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

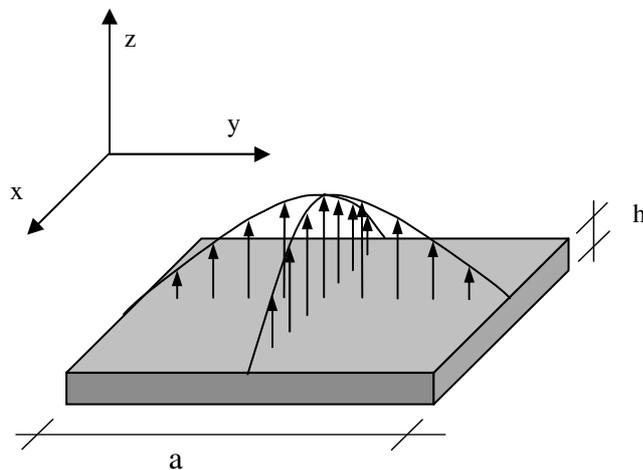


Figura 5.3 – Geometria e carga do laminado

Devido às considerações de simetria, somente um quarto da placa foi considerado na análise (figura 5.4).

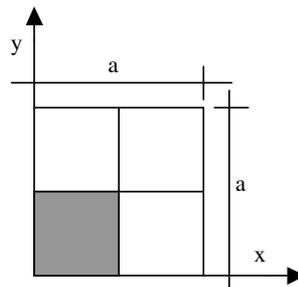


Figura 5.4 – Consideração de simetria

As propriedades do material são as seguintes

$$E_1 = 25,0 E_2$$

$$G_{12} = G_{13} = 0,5 E_2$$

$$G_{23} = 0,2 E_2$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

Para discretização da estrutura utilizou-se duas malhas com 121 nós, uma com 5x5 elementos de nove nós e integração reduzida (2x2 pontos de integração) e outra com 10x10 elementos de quatro nós e integração completa (2x2 pontos de integração). As referidas malhas são apresentadas na figura 5.5.

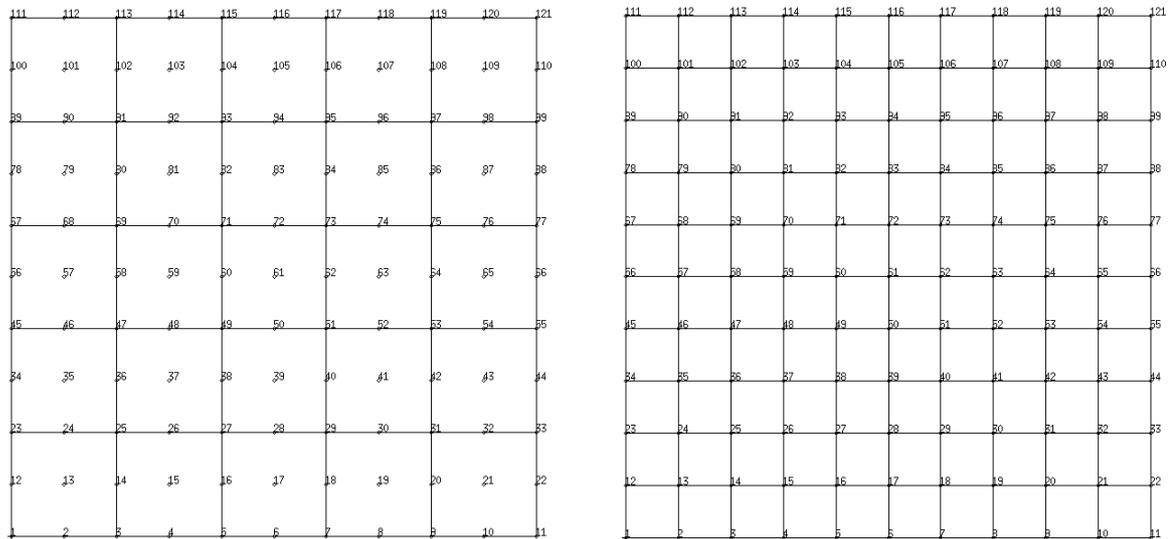


Figura 5.5 – Malhas de Elementos Finitos

A figura 5.6 mostra a comparação entre a deflexão adimensional resultante no centro da placa dada por

$$\bar{w} = \frac{10^2 w h^3 E_2}{P a^4}$$

para a formulação presente, a solução analítica dada pela “First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)” (Reddy e Chao, 1981), “Higher-Order Shear Deformation Theory (HSDT)” (Reddy, 1984) e a solução elástica tridimensional de Pagano (1970), para alguns valores da razão lado-espessura da placa.

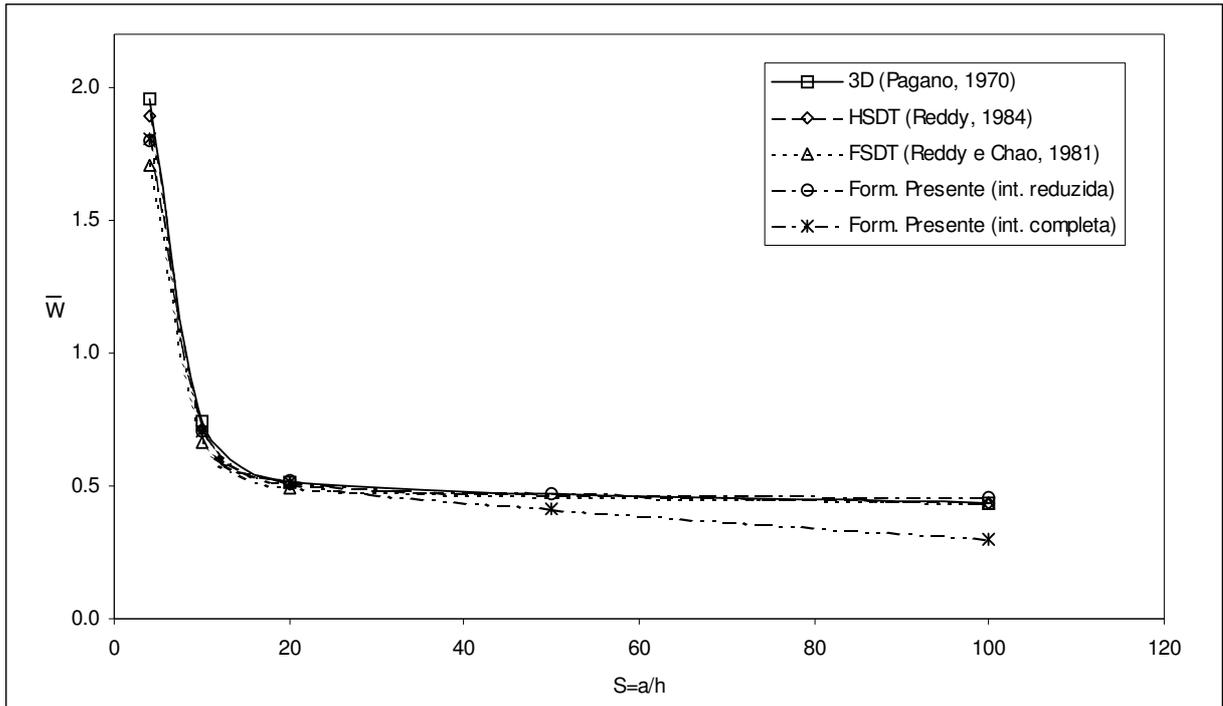


Figura 5.6 – Comparação entre soluções numérica e analítica para diferentes razões a/h .

Observando a figura 5.6 percebe-se que para placas espessas o modelo apresentado mostrou-se um pouco rígido para alcançar os resultados obtidos pela solução elástica tridimensional, enquanto que no caso de placas finas observou-se o fenômeno de travamento (“locking”), quando é utilizada integração completa. Tal fenômeno desaparece com a utilização de integração reduzida.

A configuração deformada da placa encontra-se representada na figura 5.7.

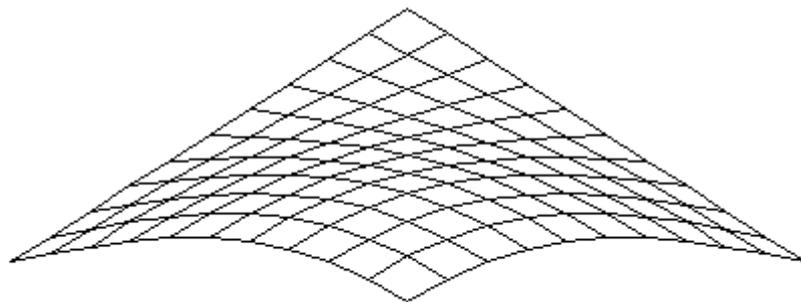


Figura 5.7 – Deformada da placa

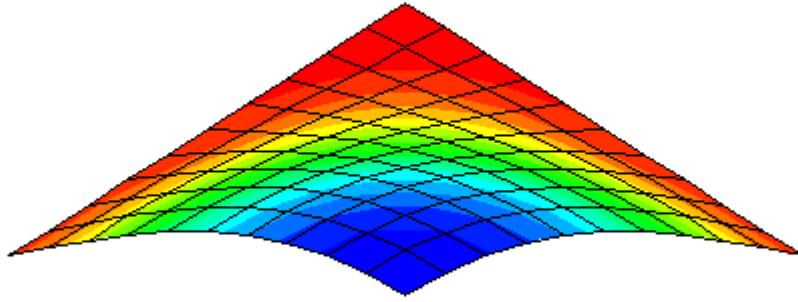


Figura 5.8 – Representação das tensões σ_{xx} da camada 1 sobre a configuração deformada

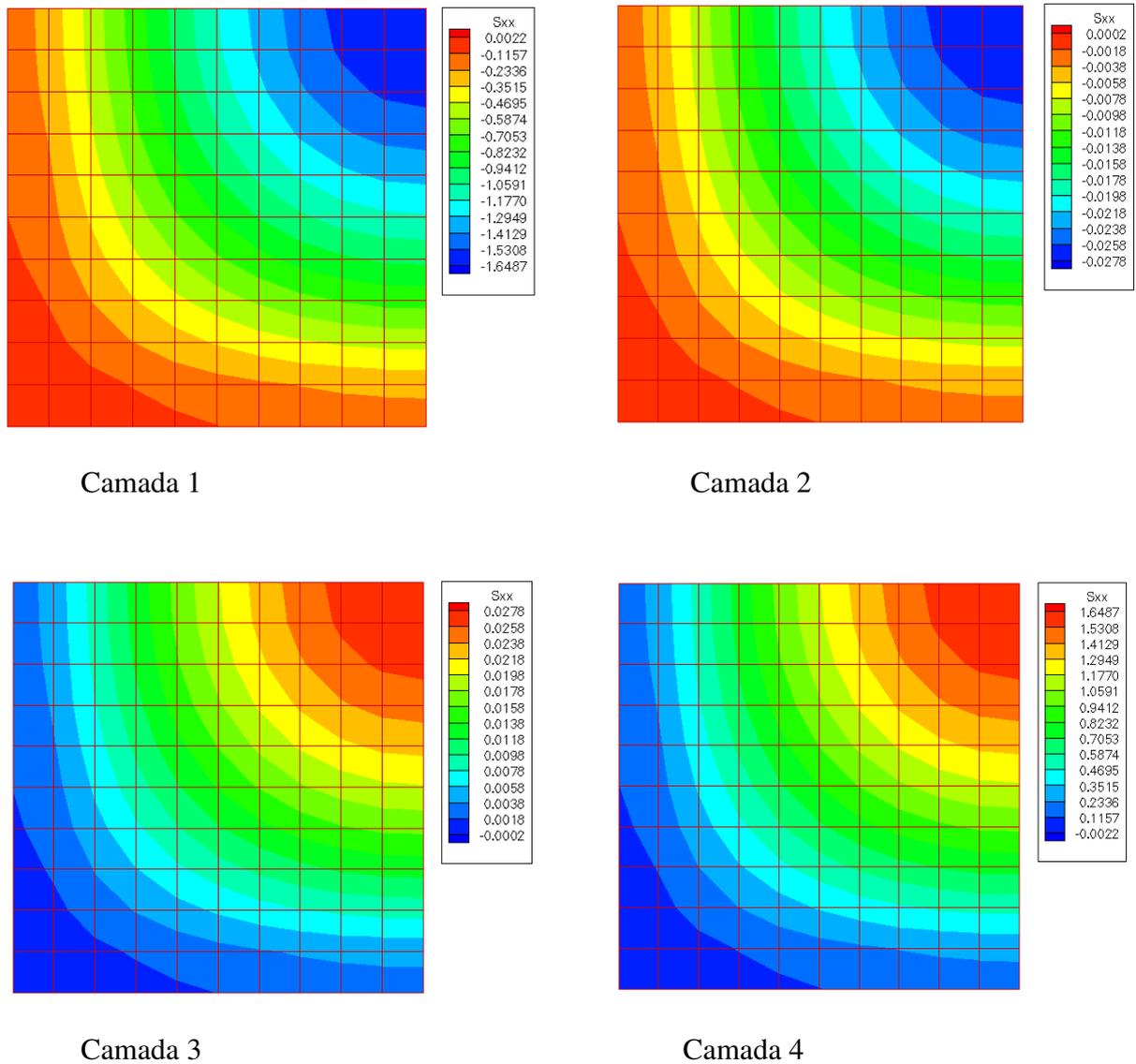


Figura 5.9 – Distribuição das tensões σ_{xx} nas várias camadas do laminado

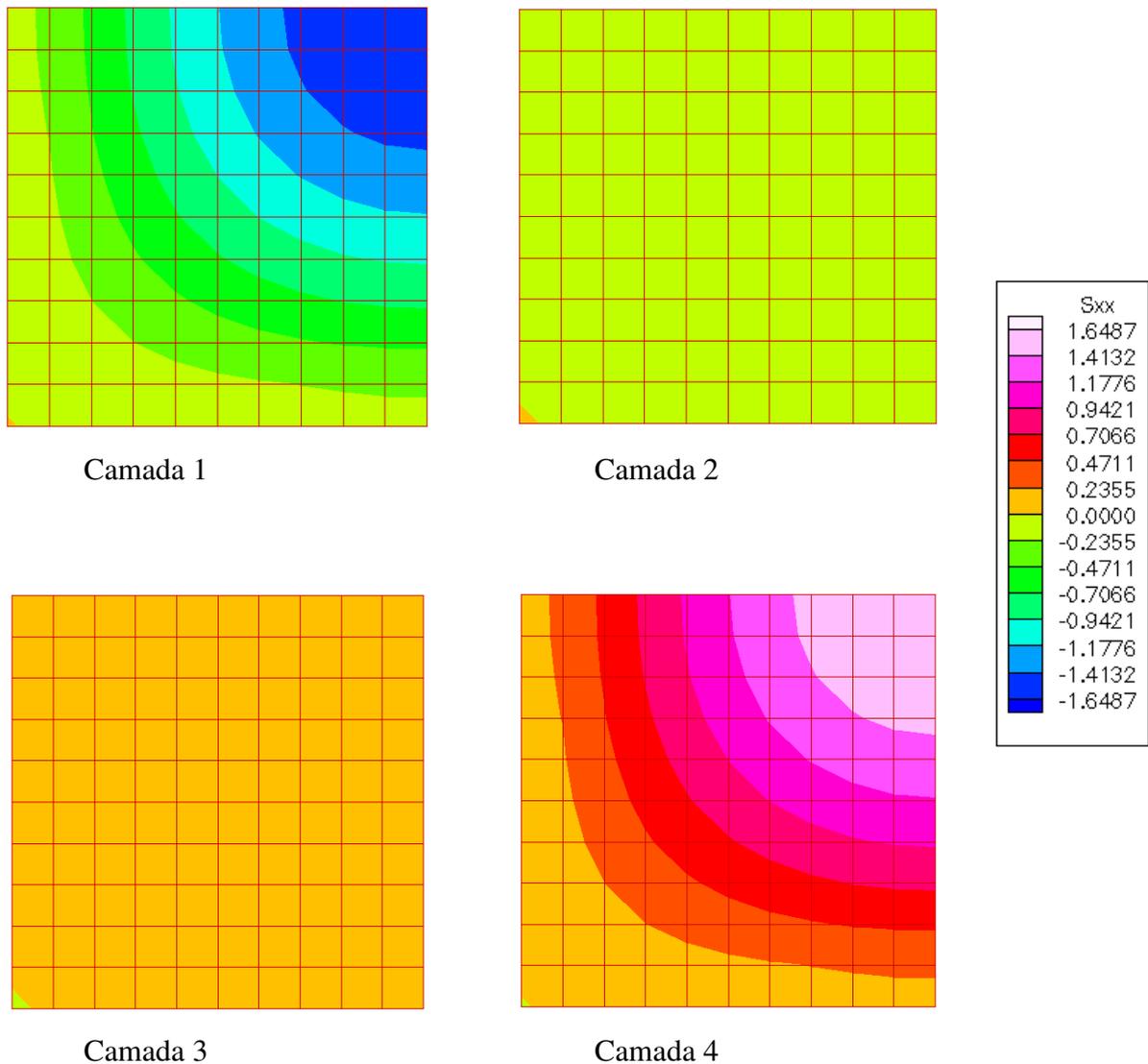


Figura 5.10 – Distribuição das tensões σ_{xx} nas várias camadas do laminado

Adotando-se o valor de $E_2 = 19$ GPa, obteve-se valores numéricos para as propriedades da placa em estudo. As tensões σ_{xx} obtidas para a camada 1 do laminado aparecem representadas sobre a configuração deformada na figura 5.8.

A figura 5.9 mostra a distribuição das tensões σ_{xx} em cada uma das camadas constituintes do laminado e a figura 5.10 apresenta esta mesma distribuição porém utilizando-se a mesma escala de cores para todas as camadas, o que fornece uma idéia global da distribuição das tensões no laminado.

A figura 5.11 apresenta a distribuições das tensões σ_{yy} , em cada uma das camadas do laminado. Nas figuras 5.9 a 5.11 as tensões são apresentadas em MPa.

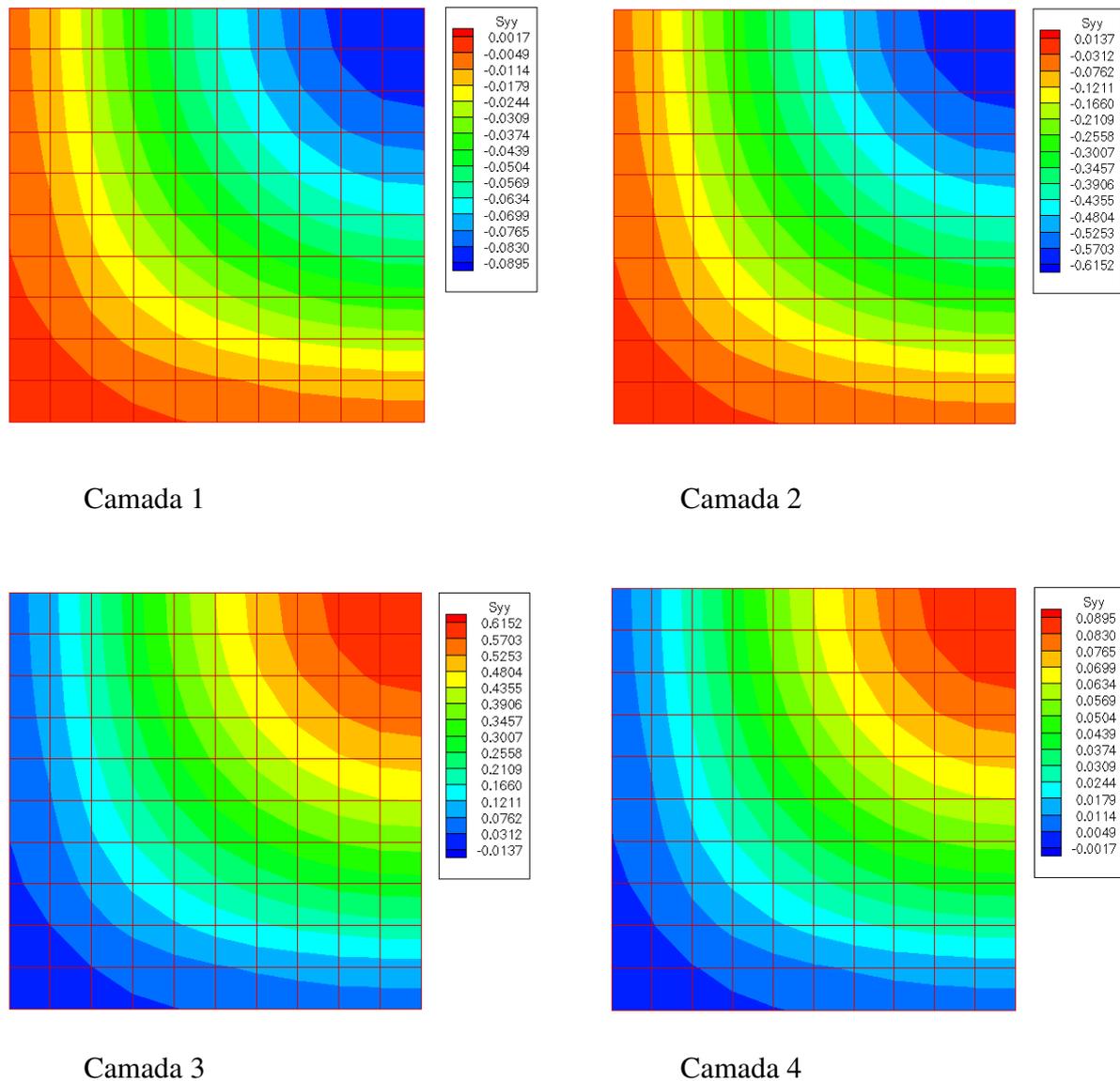


Figura 5.11 – Distribuição das tensões σ_{yy} nas várias camadas do laminado

5.4 ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE UMA PLACA

Este exemplo visa demonstrar a eficiência da presente formulação na representação do comportamento viscoelástico das estruturas de material composto.

Uma placa laminada quadrada com 10 cm de lado e 0,2 cm de espessura, foi discretizada por uma malha de 2x2 elementos de nove nós com 2x2 pontos de integração. A

placa possui quatro camadas, todas com a mesma orientação e o material utilizado apresenta comportamento viscoelástico linear representado por Modelo Standard (figura 5.12).

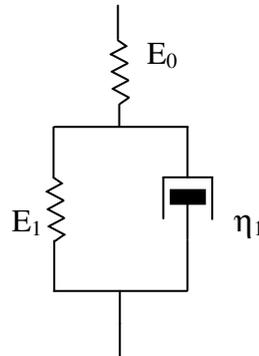


Figura 5.12 – Modelo Standard

As propriedades do material são as seguintes

Constantes elásticas

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,24$$

Constantes viscoelásticas

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\theta = 10 \text{ seg}$$

Aplica-se uma tração, primeiro na direção das fibras e depois na direção perpendicular às mesmas. Os gráficos dos deslocamentos longitudinais e transversais em função do tempo para ambos os casos são apresentados nas figuras 5.13 e 5.14.

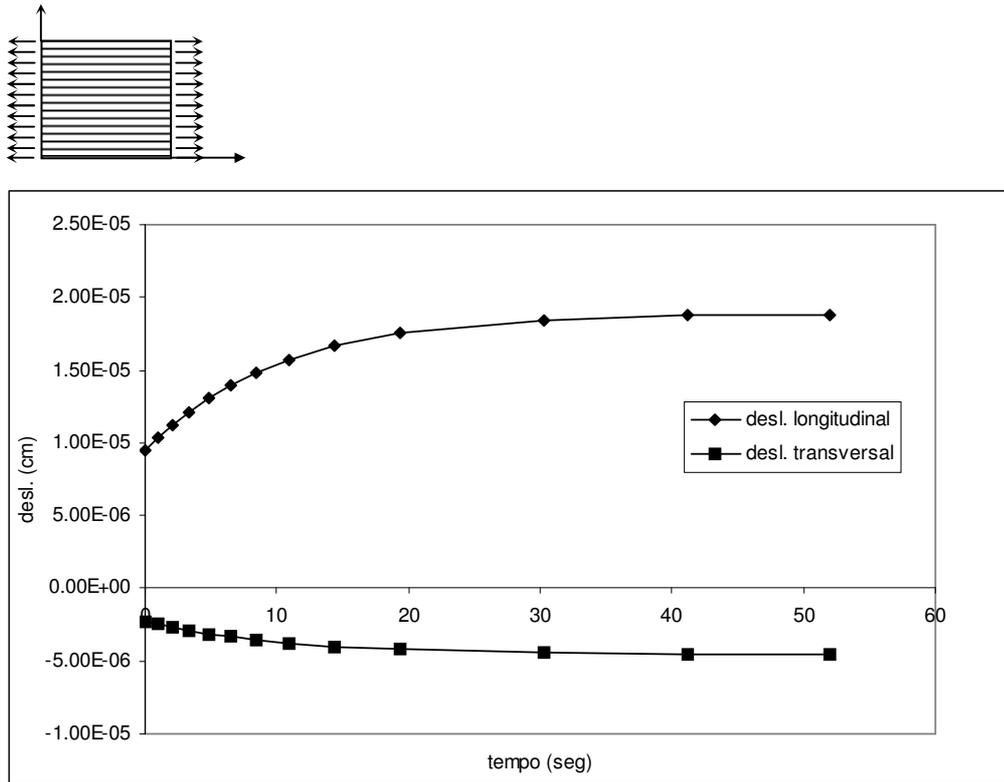


Figura 5.13 – Deslocamentos longitudinal e transversal para tração na direção das fibras

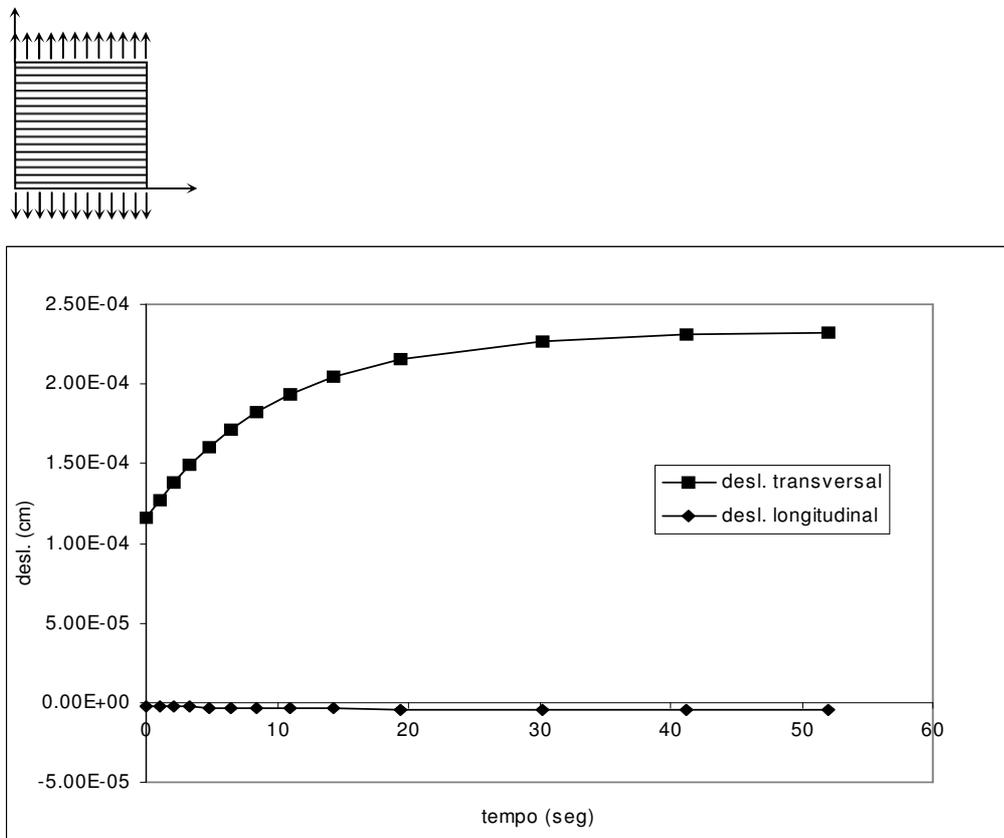


Figura 5.14 – Deslocamentos longitudinal e transversal para tração perpendicular às fibras

Como um terceiro caso apresenta-se, ainda, a mesma placa sujeita a cisalhamento e os correspondentes deslocamentos na direção das fibras para um ponto situado em um dos lados carregados da placa, são mostrados na figura 5.15.

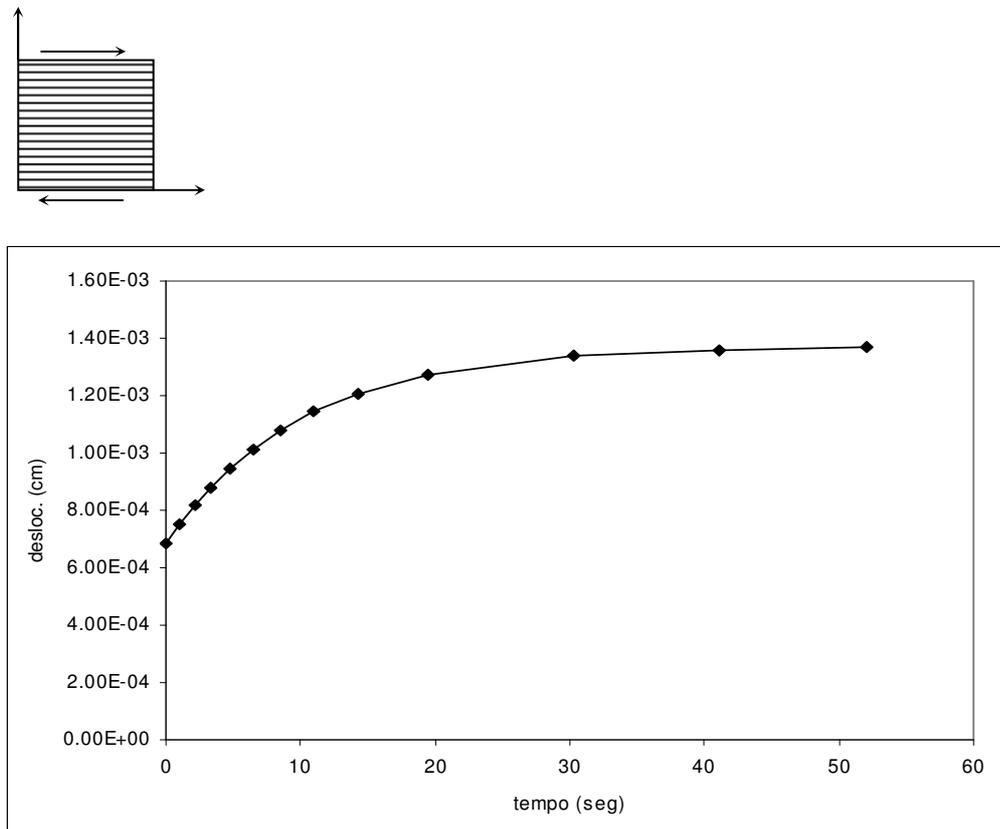


Figura 5.15 – Deformação viscoelástica da placa sujeita a cisalhamento

Nas análises anteriores, como pode-se observar nos gráficos apresentados nas figuras de 5.13 a 5.15, foi empregado um intervalo de tempo variável (Masuero, 1992), cuja definição encontra-se descrita no item 3.4.2.

5.5 ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE UMA PLACA SUJEITA À FLEXÃO

Uma placa quadrada com 50 cm de lado, feita de material laminado, está sujeita a um momento distribuído como mostra a figura 5.16. Utilizou-se na análise uma malha de 2x2 elementos de nove nós.

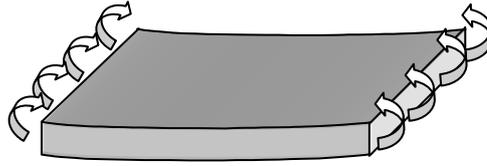


Figura 5.16 – Placa sujeita à flexão

A placa possui seis camadas feitas do mesmo material homogêneo e isotrópico com iguais espessuras e orientação das fibras.

O material das camadas possui as seguintes propriedades viscoelásticas (considerando Modelo Standard)

$$E_0 = 200 \text{ GPa}$$

$$E_1 = 200 \text{ GPa}$$

$$\eta_1 = 2000 \text{ GPa}$$

$$\theta = 10 \text{ s}$$

As figuras 5.17 e 5.18 mostram variação da razão deflexão máxima/deflexão instantânea (w/w_e) com o tempo para $\Delta t = 1$ e Δt variável (Masuero, 1992). Observa-se que no segundo caso consegue-se bons resultados com menos pontos calculados, ou seja, economiza-se tempo de análise sem perda de precisão.

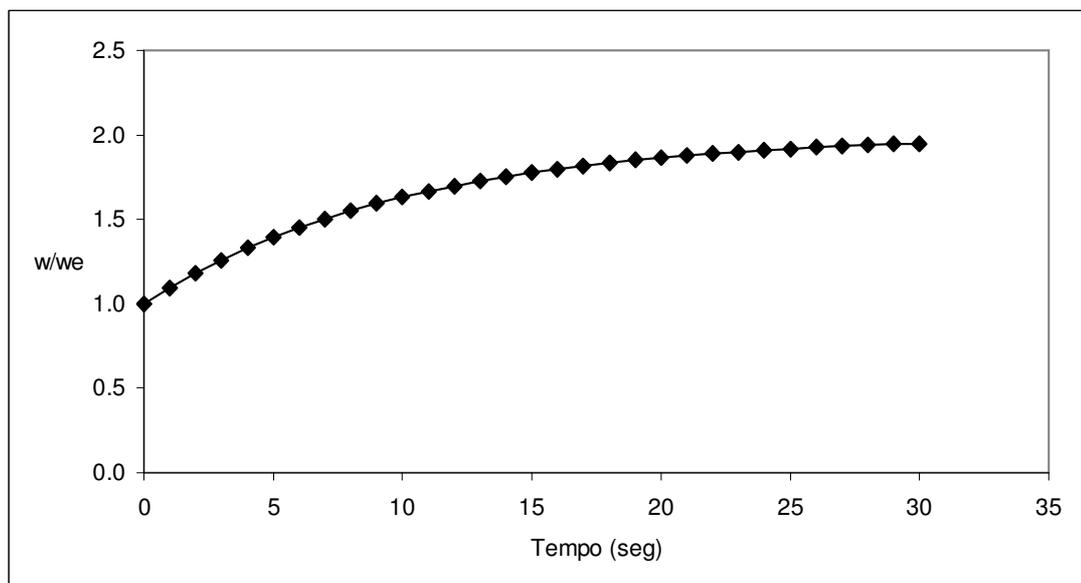


Figura 5.17 – Deformação Viscoelástica com $\Delta t = 1$

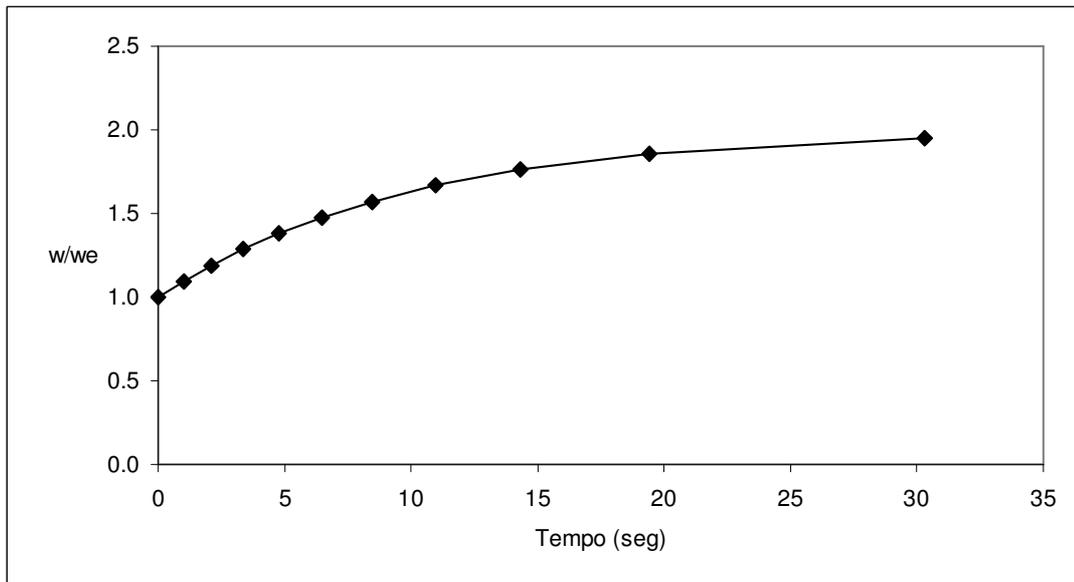


Figure 5.18 – Deformação Viscoelástica com Δt variável.

Nos casos como o deste exemplo e do exemplo anterior (5.4), as curvas que se quer descrever vão diminuindo sua declividade ao longo do tempo e, por isso, usar intervalos de tempo crescentes é uma solução bastante racional. Já em outros casos, como o de flambagem viscoelástica, que será visto no exemplo 5.7, esta forma de definição dos intervalos de tempo não se apresenta como uma boa opção.

5.6 ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA

Um painel feito de material homogêneo e isotrópico com as dimensões mostradas na figura 5.19 e dotado de uma deflexão inicial na direção z dada por (ver figura 5.20)

$$z = \left(\sin \frac{\pi x}{L} \right) 0,2$$

está sujeito a uma carga de compressão na direção x em ambos os extremos.

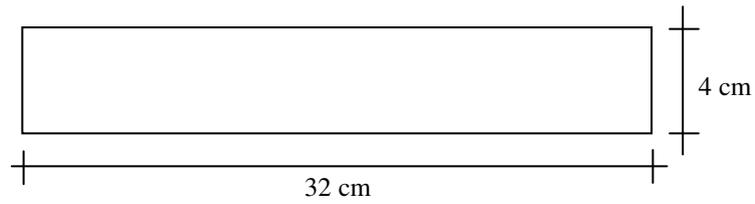


Figura 5.19 – Dimensões do Painel

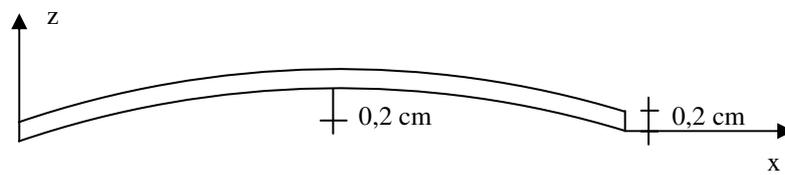


Figura 5.20 – Deflexão inicial

O material do painel possui as seguintes propriedades

$$E = 132,30 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,24$$

Devido à simetria observada tanto na geometria quanto no carregamento, somente metade do painel foi analisado. A figura 5.21 mostra a malha utilizada na discretização do painel. Utilizou-se 2x2 pontos de integração por camada.

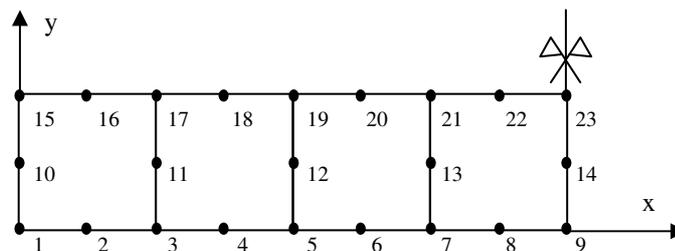


Figura 5.21 – Malha de quatro elementos de oito nós

Os valores analíticos para a carga de flambagem do painel e a deflexão analítica calculada em função da carga P aplicada, são obtidos usando-se, respectivamente, as seguintes equações

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

$$b = \frac{b_0}{\frac{P_E}{P} - 1}$$

No caso em estudo, a carga de flambagem elástica é $P_E = 340,04 \text{ N}$

Realizou-se uma análise não linear geométrica do painel através do Método de Newton-Raphson e obteve-se as deflexões no centro do painel para diferentes cargas. Estes resultados são mostrados na figura 5.22, a qual apresenta a comparação entre os resultados analíticos e numéricos obtidos para a deflexão no centro do painel e sua variação em função da carga aplicada P .

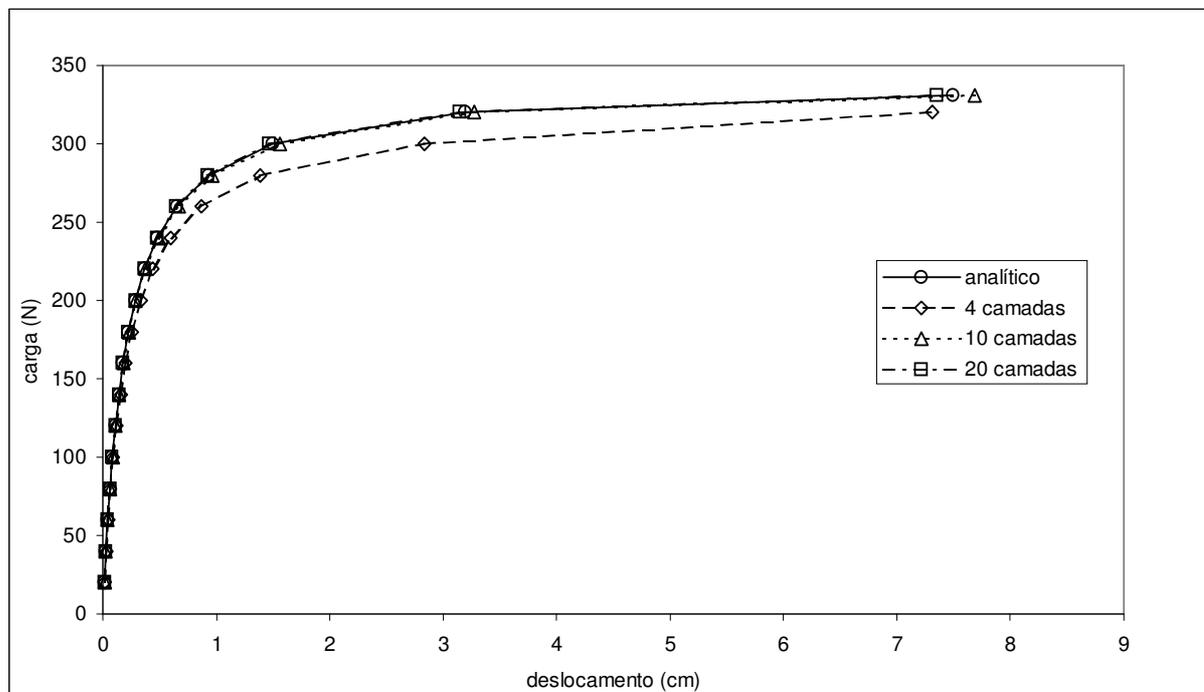


Figura 5.22 – Comparação entre deflexões numérica e analítica para flambagem elástica

Cabe observar que na presente formulação, os pontos de integração são distribuídos por camada na espessura do elemento, desta forma, aumentando-se o número de camadas, melhora-se a representação do comportamento da estrutura na flexão. Isto pode ser observado na figura 5.22, onde, os resultados numéricos convergem rapidamente para o valor previsto analiticamente com o aumento do número de camadas.

5.7 ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA

Considerando o mesmo painel analisado no exemplo 5.6, porém feito de um material viscoelástico com as seguintes propriedades (ver figura 5.12)

$$E_0 = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_1 = 132,30 \text{ GPa}$$

$$\eta_1 = 1323,0 \text{ GPa}$$

$$\theta = 10 \text{ seg}$$

Deseja-se realizar uma análise de flambagem viscoelástica e, para isso, adotou-se o painel constituído por dez camadas, uma vez que, no exemplo anterior de flambagem elástica, este número de camadas mostrou-se suficiente para obter-se resultados satisfatórios.

Neste caso, a carga de flambagem pode ser calculada analiticamente pela seguinte equação (Creus , 1986)

$$P_D = \frac{\pi^2 E_\infty I}{L^2}$$

onde

$$E_\infty = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$$

E, sendo, $E_0 = E_1$ a carga de flambagem viscoelástica é a metade do valor da carga de flambagem elástica, ou seja, $P_D = 170,02\text{N}$.

O cálculo da deflexão analítica, por sua vez, pode ser feito empregando a seguinte equação (Creus, 1986)

$$b(t) = \frac{P b_0 (P_D - P_E)}{(P_E - P) (P_D - P)} \exp\left(\frac{P_D - P}{P - P_E} \frac{E_0 + E_1}{\eta} t\right) + \frac{P_D b_0}{P_D - P}$$

O gráfico apresentado a seguir mostra os resultados obtidos numericamente em comparação com as curvas analíticas de deflexão x tempo para três cargas diferentes. Observa-se que os resultados numéricos são praticamente coincidentes com os analíticos.

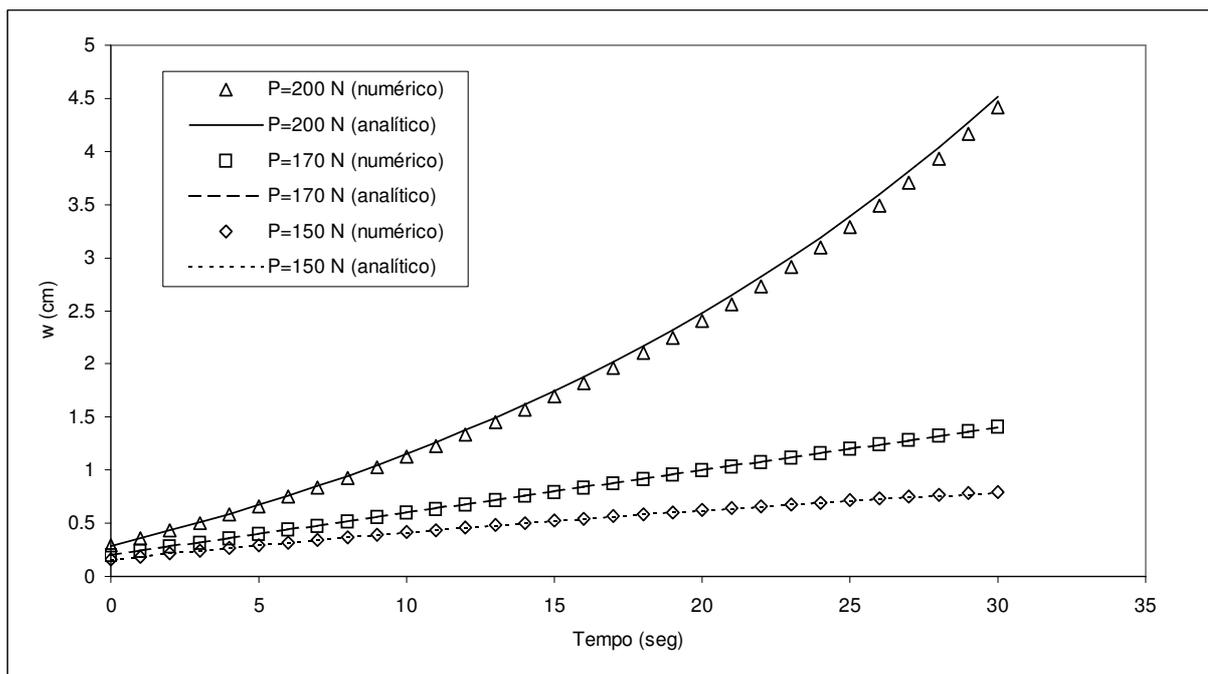


Figura 5.23 – Comparação entre deflexões numérica e analítica para flambagem viscoelástica

A figura 5.23 foi obtida adotando-se intervalos de tempo constantes e iguais a 1 segundo. Tomando-se agora, intervalos de tempo variáveis, obteve-se o gráfico mostrado na figura 5.24.

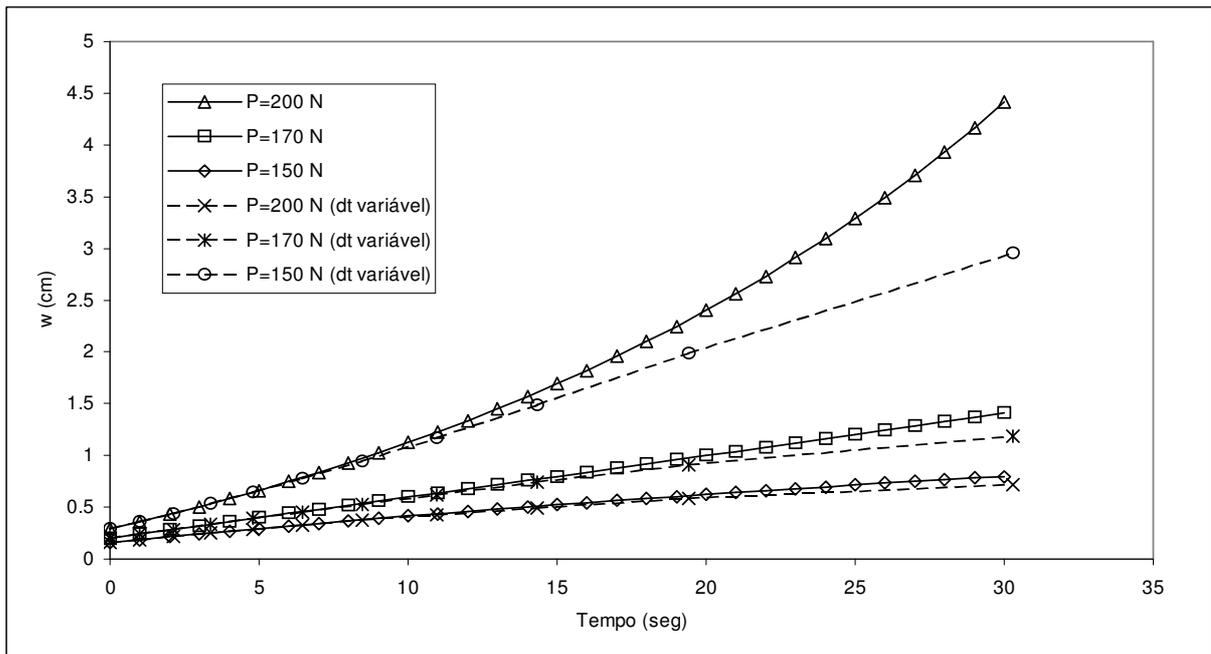


Figura 5.24 – Curvas deflexão x tempo para Δt constante e Δt variável

Pode-se concluir, desta forma que, em casos de análise de flambagem viscoelástica, usar intervalos de tempo variáveis, mais especificamente, crescentes, não é uma boa opção, pois a medida que as curva perdem sua característica de declividades decrescentes com o tempo, este método torna-se ineficaz. De fato, para cargas maiores que a carga de flambagem a curva possui declividades que crescem ao longo do tempo e, sendo assim, é mais interessante utilizar-se intervalos de tempo constantes correspondentes a incrementos de deformação crescentes ou, até mesmo, intervalos de tempo decrescentes.

5.8 ANÁLISE DE UMA VIGA EM BALANÇO

Uma viga em balanço sujeita a uma carga P em sua extremidade livre, como mostra a figura 5.25, e feita de um material homogêneo e isotrópico, foi analisada e comparou-se os resultados numéricos com aqueles obtidos analiticamente.

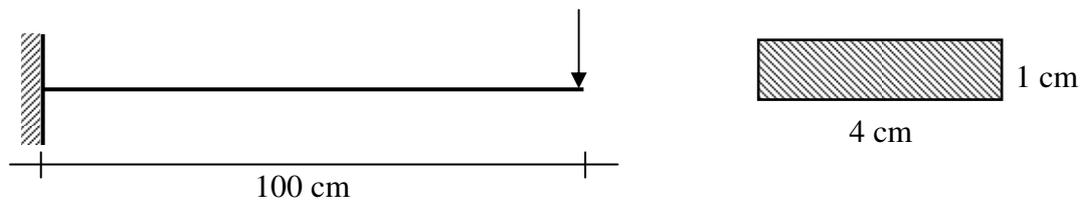


Figura 5.25 – Dimensões e carregamento da viga analisada

O material usado possui as seguintes propriedades

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

Na discretização da estrutura empregou-se uma malha de elementos de oito nós com 405 nós e 100 elementos com 2x2 pontos de integração por camada. A malha em questão é mostrada na figura 5.26.

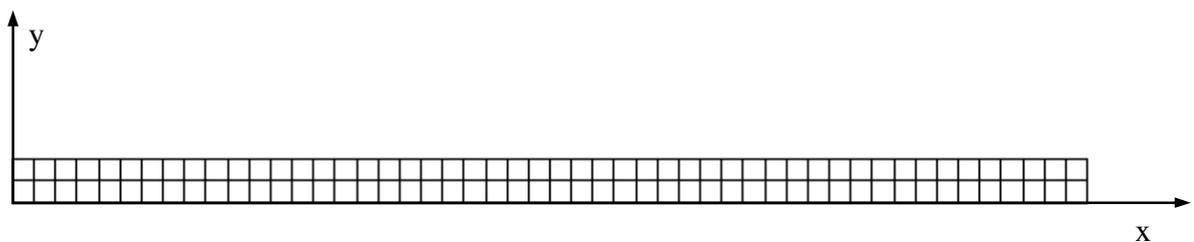


Figura 5.26 – Malha de elementos finitos

O deslocamento analítico no extremo livre da viga e a tensão σ_{xx} máxima na seção do engaste são dados, respectivamente, pelas equações (Popov, 1984)

$$v = \frac{PL^3}{3EI}$$

$$\sigma = \frac{M y}{I} = \frac{P L y}{I}$$

sendo

L – comprimento da viga

I – momento de inércia da seção

Y – a distância da linha neutra da seção até a fibra mais afastada.

Aplicando-se uma carga $P = 4 \text{ N}$, obteve-se os resultados para o deslocamento na extremidade do balanço e tensão σ_{xx} no engaste mostrados na tabela abaixo.

	v (cm)	σ_{xx} (MPa)
analítico	0,200	6,00
numérico (10 camadas)	0,202	5,43
numérico (20 camadas)	0,200	5,69

Tabela 5.2 – Comparação entre resultados analíticos e numéricos

Observando-se os resultados apresentados na tabela 5.2, pode-se concluir que, como é de se esperar, uma vez que utiliza-se um critério de convergência em deslocamentos, uma discretização na espessura, ou seja, um número de camadas, que forneça bons resultados no que se refere aos deslocamentos, pode não representar de uma forma mais precisa a distribuição das tensões na seção.

A configuração deformada da viga é mostrada na figura 5.27, considerando-se a análise feita com dez camadas. Apresenta-se, ainda, na figura 5.28, a distribuição das tensões σ_{xx} na camada 10, ou seja, a camada superior da viga.

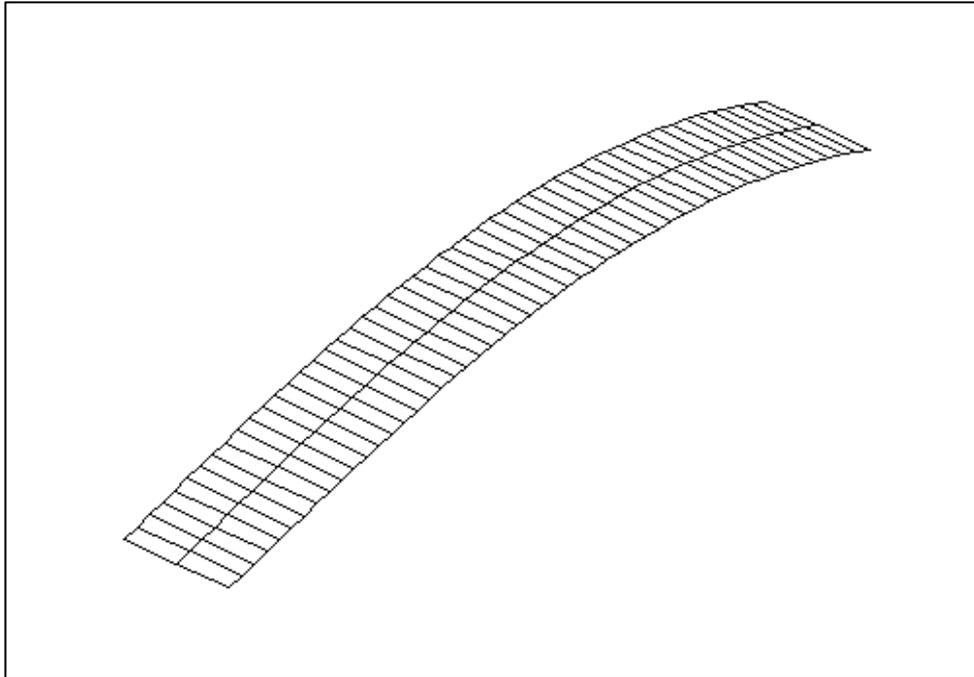


Figura 5.27 – Deformada do plano médio da viga

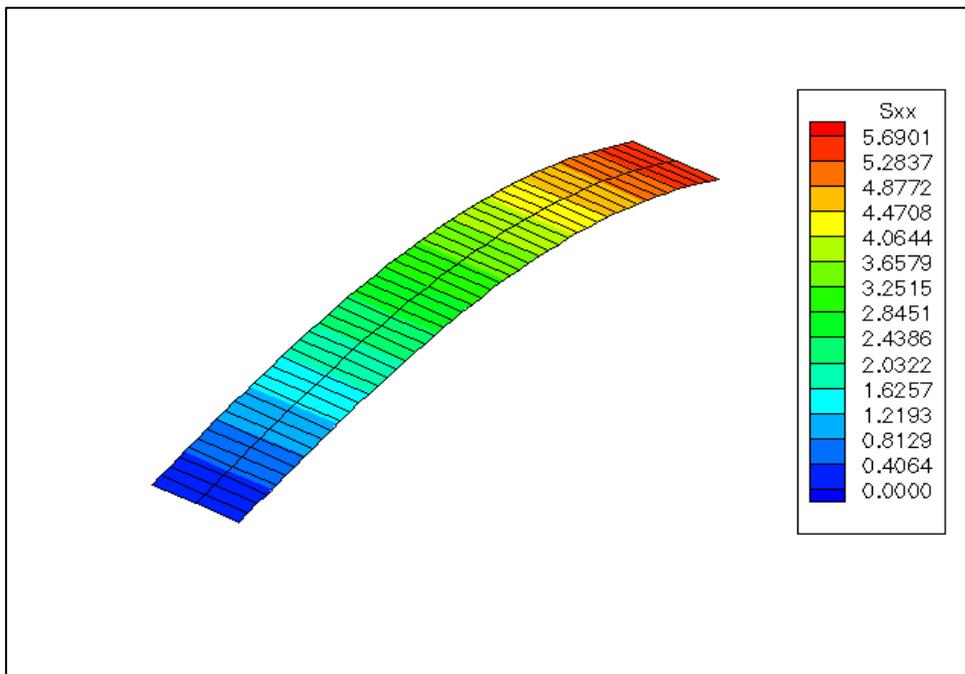


Figura 5.28 – Distribuição das tensões σ_{xx} na camada 10 da viga

5.9 ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA

Uma casca esférica de raio 'R' e espessura 't' está sujeita a um par de cargas como esquematizado na figura 5.29.

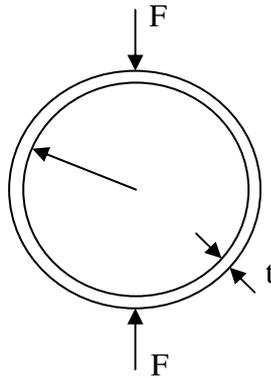


Figura 5.29 – Configuração de carga e geometria da casca esférica

A casca é feita de um material homogêneo e isotrópico. E, utilizando-se os seguintes valores numéricos

$$E = 100 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$F = 10,0 \text{ N}$$

$$R = 20,0 \text{ cm}$$

$$t = 0,4 \text{ cm}$$

fez-se a análise da casca pela presente formulação.

Devido às considerações de simetria, apenas um oitavo da casca foi considerado. A malha utilizada na análise possui 48 elementos de oito nós e é apresentada na figura 5.30. Utilizou-se 2x2 pontos de integração.

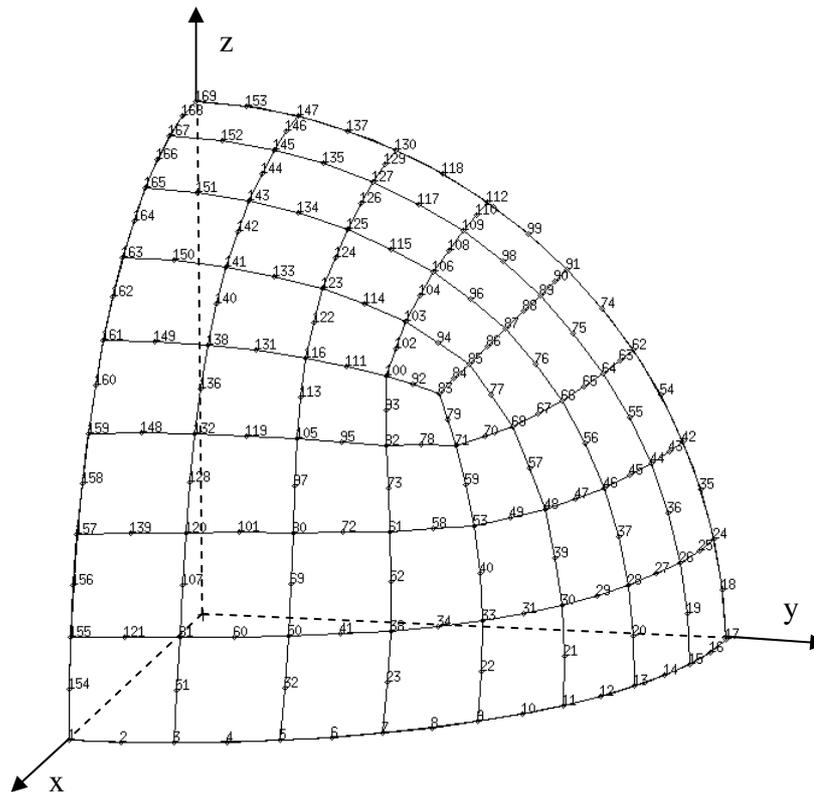


Figura 5.30 – Malha de elementos finitos para análise da casca esférica

O resultado para o deslocamento calculado no ponto de aplicação da carga é mostrado na tabela 5.3 em comparação com os resultados numéricos apresentados por Liu et al (1998), para malhas com 36 e 64 elementos, e com a solução analítica proposta por Koiter, citado por Liu et al (1998).

	w_{\max} (cm)
form. Presente (48 elem.)	5.02×10^{-5}
Liu et al (1998) (36 elem.)	4.79×10^{-5}
Liu et al (1998) (64 elem.)	5.06×10^{-5}
Solução analítica ¹	$5,15 \times 10^{-5}$

Tabela 5.3 – Resultados para o deslocamento no ponto de aplicação da carga

¹ No trabalho de Liu et al (1998), apresentou-se o valor do deslocamento calculado analiticamente como sendo de $5,15 \times 10^5$ cm, caso seja esta a unidade adotada. Obviamente, o sinal negativo da potência de dez foi esquecido. O valor apresentado no tabela 5.3 já possui a necessária correção.

6 EXEMPLOS DE ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos numéricos de análise de falhas progressivas em estruturas laminadas de materiais compostos. Os critérios de falha utilizados são os de Hashin, Lee e Máxima Deformação com os modelos de degradação do material apresentados no item 4.4.1.

São analisados vários casos de falhas progressivas para painéis elásticos e viscoelásticos, sujeitos à tração, flexão e flambagem. Alguns exemplos apresentam comparações entre valores de carga de falha obtidos. E, em várias análises, estuda-se o comportamento da estrutura à medida que as falhas avançam. Demonstra-se em vários casos a utilização do Critério da Máxima Deformação.

6.2 EXEMPLO DE FLEXÃO DE PLACA COM ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS

Este exemplo trata-se da análise de uma placa de material composto, discretizada por uma malha de quatro elementos de nove nós e submetida a flexão por meio de momento distribuído nas bordas (figura 6.2).

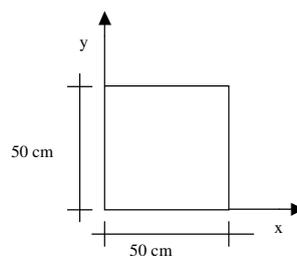


Figura 6.1 – Dimensões da placa

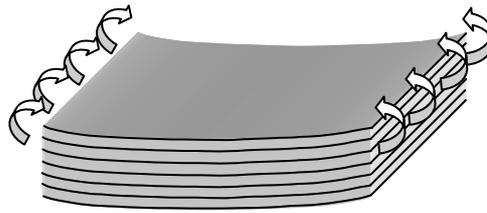


Figura 6.2 – Placa sujeita a momento distribuído

A referida placa é constituída por 6 camadas dispostas simetricamente em relação ao centro, como esquematizado na figura 6.3.

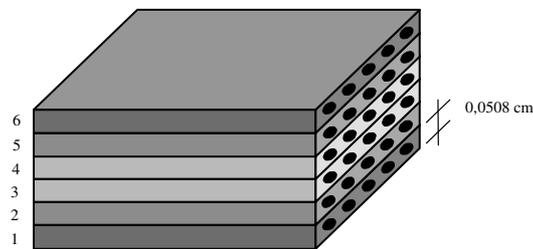


Figura 6.3 – Disposição do laminado

O material das camadas possui as seguintes propriedades:

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,24$$

A resistência das camadas cresce em direção ao centro da placa.

Camadas 1 e 6

$$X_t = 1512,35 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1694,95 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 43,75 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 43,75 \text{ MPa}$$

$$S_A = 86,80 \text{ MPa}$$

$$S_T = 67,50 \text{ MPa}$$

Camadas 2 e 5

$$X_t = 7561,75 \text{ MPa}$$

$$X_c = 8474,75 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 218,75 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 218,75 \text{ MPa}$$

$$S_A = 434,00 \text{ MPa}$$

$$S_T = 337,50 \text{ MPa}$$

Camadas 3 e 4

$$X_t = 37808,80 \text{ MPa}$$

$$X_c = 42373,80 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 1093,75 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 1093,75 \text{ MPa}$$

$$S_A = 2170,00 \text{ MPa}$$

$$S_T = 1687,50 \text{ MPa}$$

O exemplo foi analisado utilizando-se o Critério de Hashin e considerando falhas progressivas. A carga momento distribuído foi sendo incrementada até a ruptura final do laminado.

A curva obtida para carga x logaritmo do deslocamento no centro da placa (figura 6.4), mostra três patamares bem distintos. Esses patamares representam, respectivamente, as rupturas das camadas 1 e 6, 2 e 5 e 3 e 4 (ver figura 6.3).

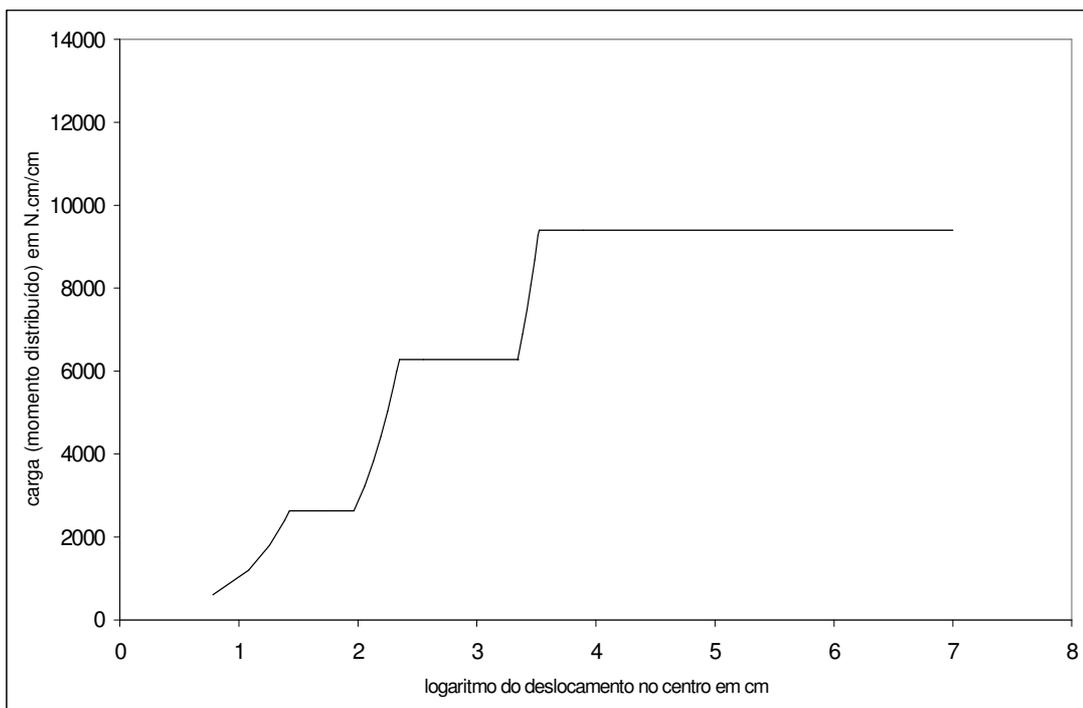


Figura 6.4 – Curva carga x deslocamento

Após isto, analisou-se o mesmo exemplo sem consideração de falhas, primeiramente com todas as camadas (curva 1 na figura 6.5) e depois sem as camadas mais externas 1 e 6 (curva 2) e, finalmente, sem as camadas 1, 2, 5 e 6 (curva 3).

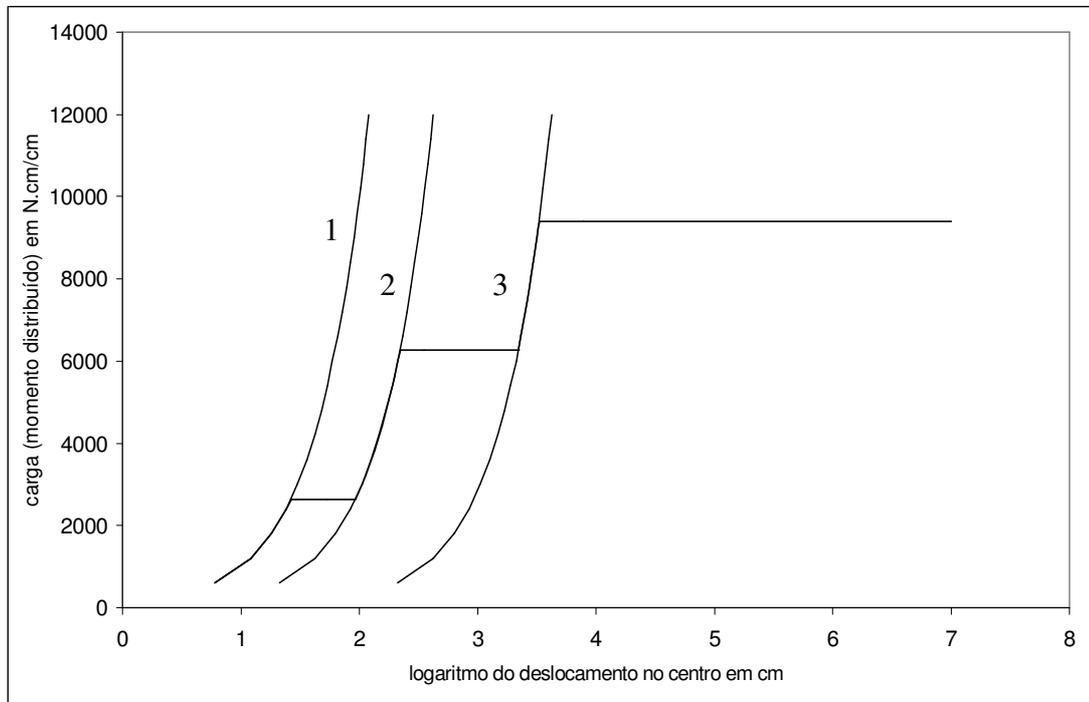


Figura 6.5 – Curvas carga x deslocamento sobrepostas

As três curvas carga x logaritmo do deslocamento no centro foram sobrepostas à curva da figura 6.4, dando origem ao gráfico apresentado na figura 6.5.

Observa-se claramente que após a ruptura final de cada conjunto de camadas o laminado comporta-se como se elas não existissem, o que é o resultado esperado, uma vez que as camadas rompidas não possuem mais nenhuma função estrutural.

6.3 PLACA SUBMETIDA À TRAÇÃO BIAxIAL COM ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS

O presente exemplo, proposto por Tolson e Zabarás (1991), constitui-se de uma placa de material laminado (figura 6.6) submetida à tração biaxial (figura 6.7). A placa é feita de boro-epoxy com as seguintes propriedades

Propriedades elásticas

$$E_{11} = 204 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 19 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 5,6 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 5,6 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 5,6 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

Propriedades de resistência

$$X_t = 1260 \text{ MPa}$$

$$X_c = 2500 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 61 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 202 \text{ MPa}$$

$$S_A = 76 \text{ MPa}$$

$$S_T = 76 \text{ MPa}$$

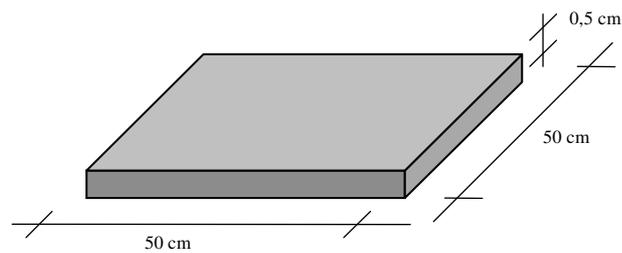


Figura 6.6 – Dimensões da placa

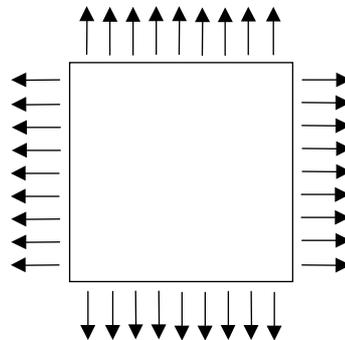


Figura 6.7 – Tração biaxial

Considerando-se a simetria, analisou-se apenas um quarto da placa que foi discretizada em uma malha 4x4 elementos de oito nós (figura 6.8).

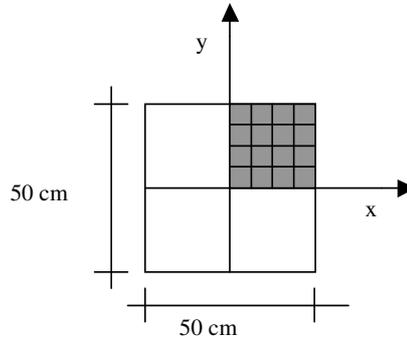


Figura 6.8 – Consideração de simetria e malha utilizada

O critério de falha utilizado para a análise foi o Critério de Lee e obteve-se curvas de primeira falha (FPF - First Ply Failure) e falha última (LPF - Last Ply Failure) para três tipos de laminados simétricos, a saber, $(0/90)_s$, $(0/\pm 45/90)_s$ e $(0/\pm 45)_s$. As referidas curvas são apresentadas, respectivamente, nas figuras 6.9 a 6.11.

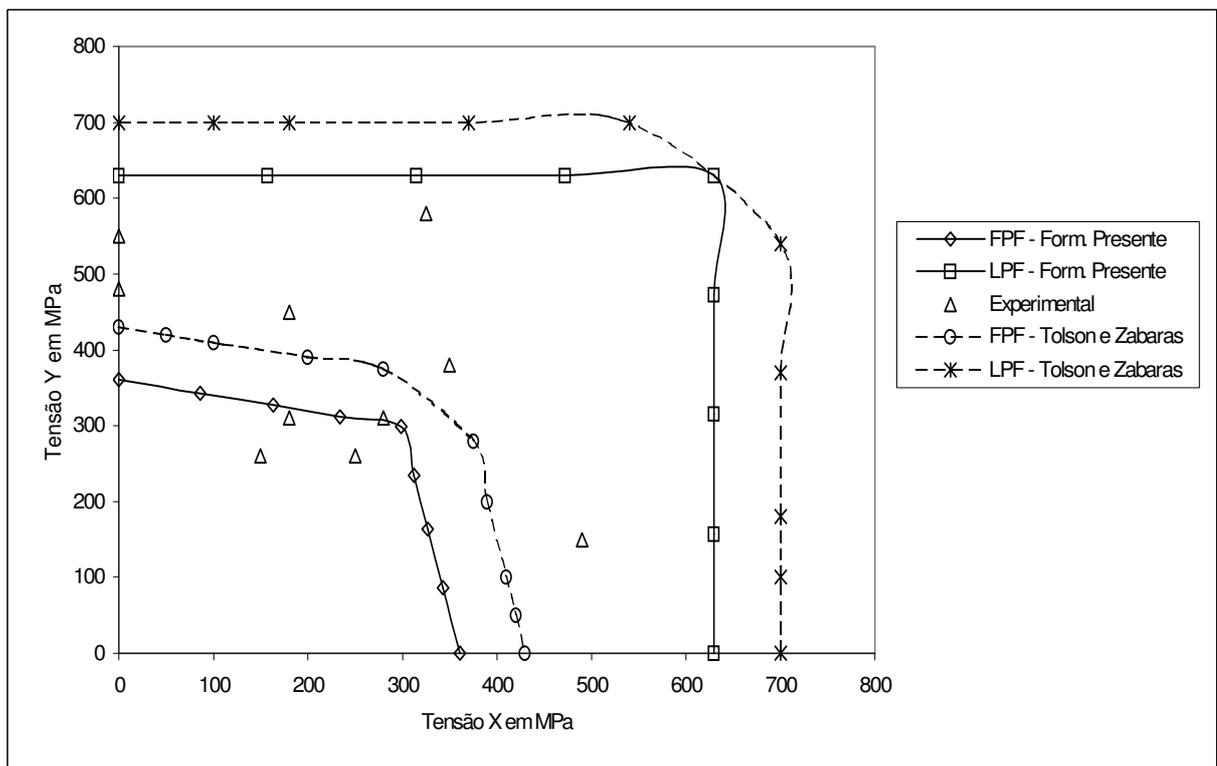


Figura 6.9 – Tensões σ_{xx} e σ_{yy} em curvas de FPF e LPF para o laminado $(0/90)_s$

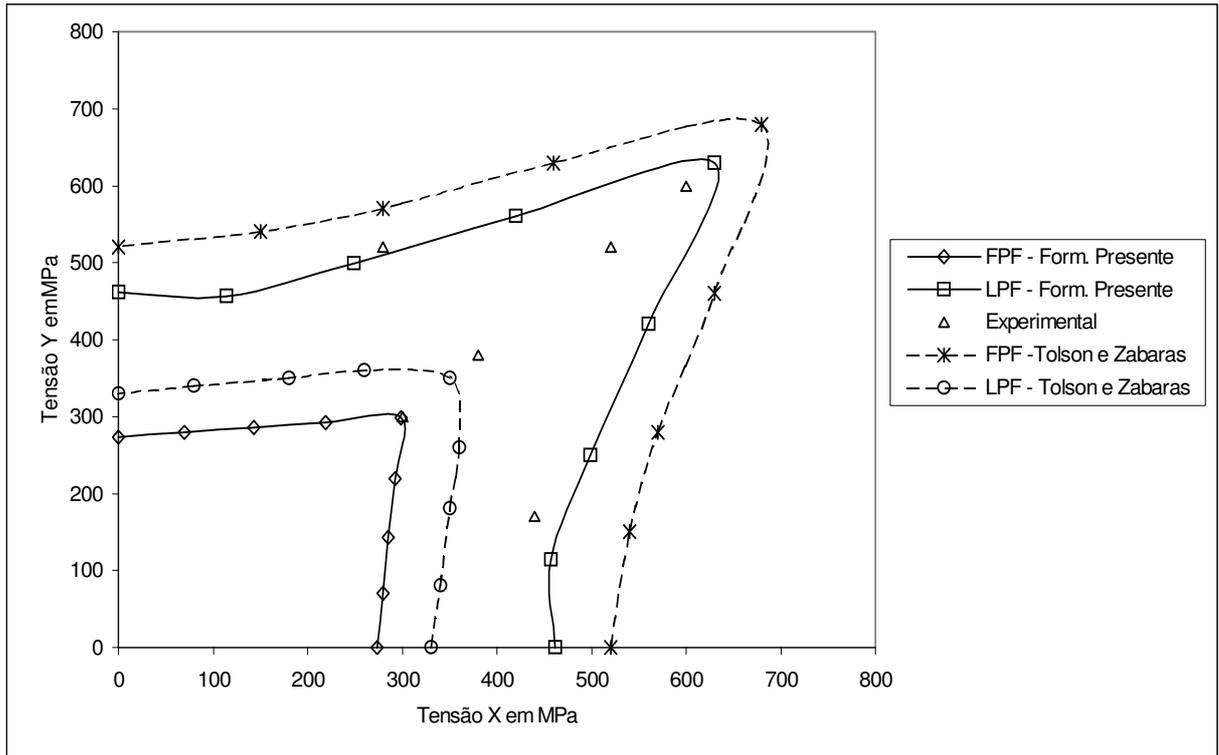


Figura 6.10 – Tensões σ_{xx} e σ_{yy} em curvas de FPF e LPF para o laminado $(0/\pm 45/90)_s$

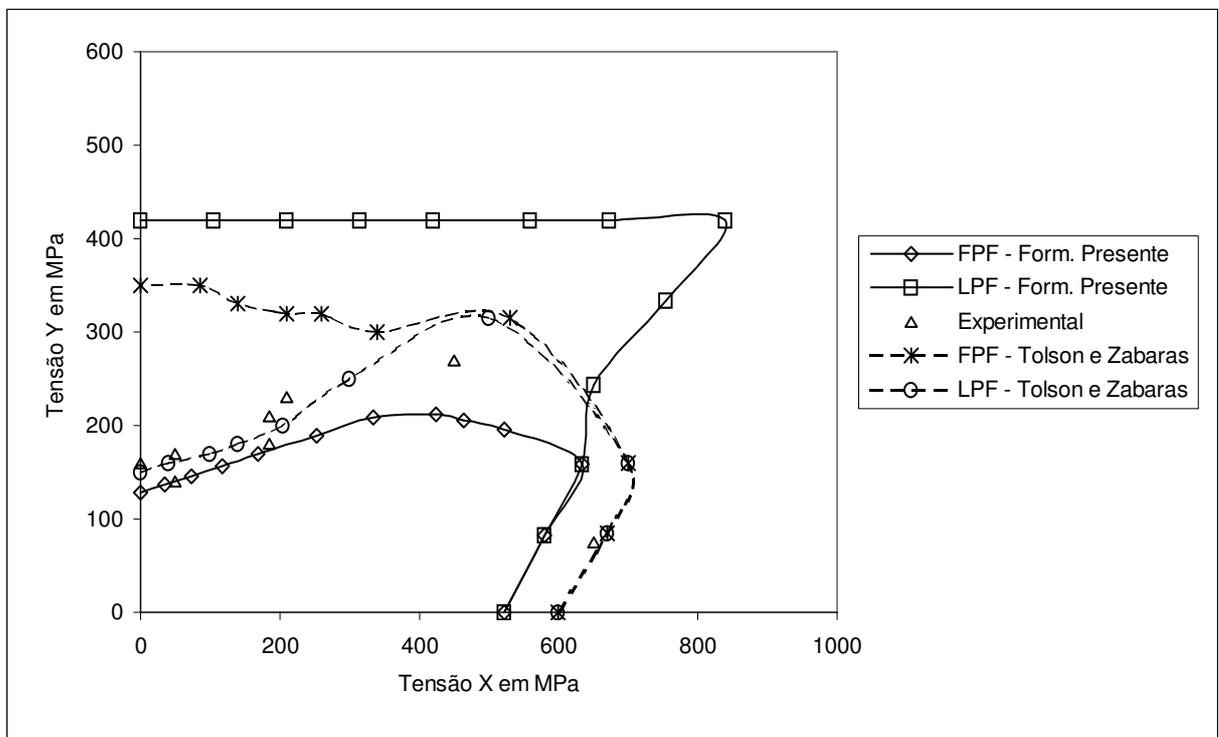


Figura 6.11 – Tensões σ_{xx} e σ_{yy} em curvas de FPF e LPF para o laminado $(0/\pm 45)_s$

Os dados experimentais apresentados nas figuras de 6.9 a 6.11 foram extraídos do trabalho de Sih e Skudra (1985).

Para o caso de $(0/90)_s$, assumindo que a Tensão σ_{yy} seja zero e, portanto, tem-se apenas tração na direção x e, admitindo que após a falha das lâminas a 90° (primeira falha), apenas as lâminas a 0° contribuam para a resistência do laminado, tem-se

$$1260 \text{ MPa} \times 0,25\text{cm}/0,50 \text{ cm} = 630 \text{ Mpa}$$

onde

1260 Mpa é a resistência à tração na direção das fibras

0,50 cm é a espessura total do laminado

0,25 cm é a espessura das lâminas a 0 graus

O que confere com a estimativa para falha última apresentada no gráfico da figura 6.9¹.

Nas duas primeiras figuras (6.9 e 6.10), observa-se que as curvas apresentadas pela presente formulação fornecem melhor concordância com os dados experimentais quando comparadas com as curvas obtidas por Tolson e Zabarás (1991).

Vale ressaltar que, pela observação da figura 6.10, pode-se concluir que os dados experimentais não possuem tratamento estatístico, pois para uma mesma razão de carga tem-se quatro rupturas diferentes, formando aproximadamente uma linha a 45° .

O gráfico da figura 6.11 é o que apresenta maior discordância, tanto entre as duas formulações, quanto entre os dados experimentais. Porém, ainda assim, praticamente todos os dados experimentais encontram-se dentro dos limites das curvas de FPF e LPF obtidas pela presente formulação. Também é importante observar, que a curva apresentada por Tolson e Zabarás (1991), em alguns trechos, não apresenta uma informação mais precisa pois existe uma grande distância entre os pontos que foram aproximados pela mesma. Isto poderia explicar a diferença nas formas das curvas de falha obtidas pelas duas formulações.

¹ Nas curvas de FPF e LPF apresentadas por Tolson e Zabarás (1991) existe um equívoco, pois as tensões mostradas em seus gráficos são dez vezes menores que o previsto. As figuras de 6.9 a 6.11, já estão com seus valores corrigidos, ou seja, dez vezes maiores.

Cabe observar, ainda, que Tolson e Zabarás (1991), nas equações que definem os modos de falha, apresentam uma inversão nas tensões σ_{13} e σ_{23} , em relação ao Critério proposto por Lee (1980 e 1982), o qual foi adotado na formulação deste trabalho.

6.4 ANÁLISE DE FALHAS E VISCOELASTICIDADE PARA UMA PLACA LAMINADA

Uma placa laminada de material composto está sujeita à tração (figura 6.12). O laminado é do tipo $(0/90)_s$, e as lâminas apresentam fibras elásticas e matriz viscoelástica.

Por considerações de simetria, apenas um quarto da placa foi discretizado por uma malha de 4×4 elementos de nove nós. E foi realizada uma análise de falha utilizando-se o Critério da Máxima Deformação.

As dimensões e o esquema de laminação da placa estão apresentados na figura 6.12 e a tração, de 1,40 GPa, é aplicada na direção das fibras das camadas 1 e 4.

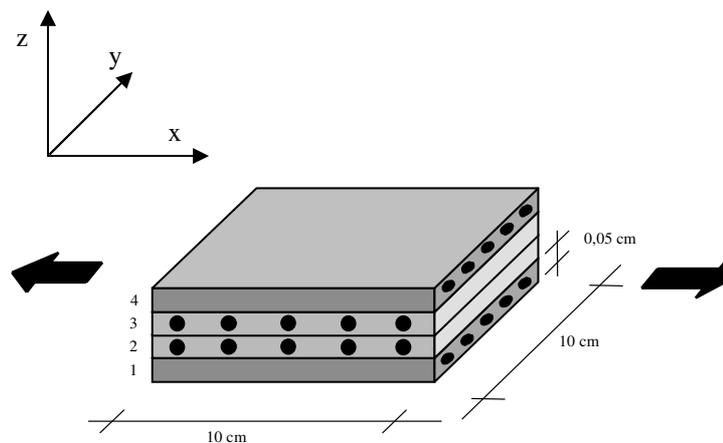


Figura 6.12 – Dimensões e laminado da placa

As constantes da placa são as seguintes:

Constantes Elásticas

$$E_{11} = E_{22} = 2,0 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1,1 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = 0,3$$

Constantes Viscoelásticas

Considera-se Modelo Standard na direção perpendicular às fibras, ou seja apenas a matriz tem comportamento viscoelástico.

$$E_0 = 2,0 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_1 = 2,0 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$\eta_1 = 2,0 \times 10^6 \text{ MPa}$$

$$\theta = 10 \text{ s}$$

Limites de Deformação

$$X_{\text{et}} = 1,14 \times 10^{-2}$$

$$X_{\text{ec}} = 1,28 \times 10^{-2}$$

$$Y_{\text{et}} = 4,07 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\text{ec}} = 4,07 \times 10^{-3}$$

$$S_{\text{eA}} = 1,54 \times 10^{-2}$$

$$S_{\text{eT}} = 1,99 \times 10^{-2}$$

A figura 6.13 mostra o gráfico tensão σ_{xx} x tempo para o exemplo em questão. E percebe-se, no primeiro trecho, que à medida que ocorre a relaxação das tensões nas camadas com fibras à 90° em relação ao carregamento, há um aumento das tensões nas camadas com fibras à 0° , embora a tensão total permaneça constante.

Após a falha das camadas 2 e 3 o comportamento é elástico pois só restam as camadas que possuem as fibras na direção do carregamento.

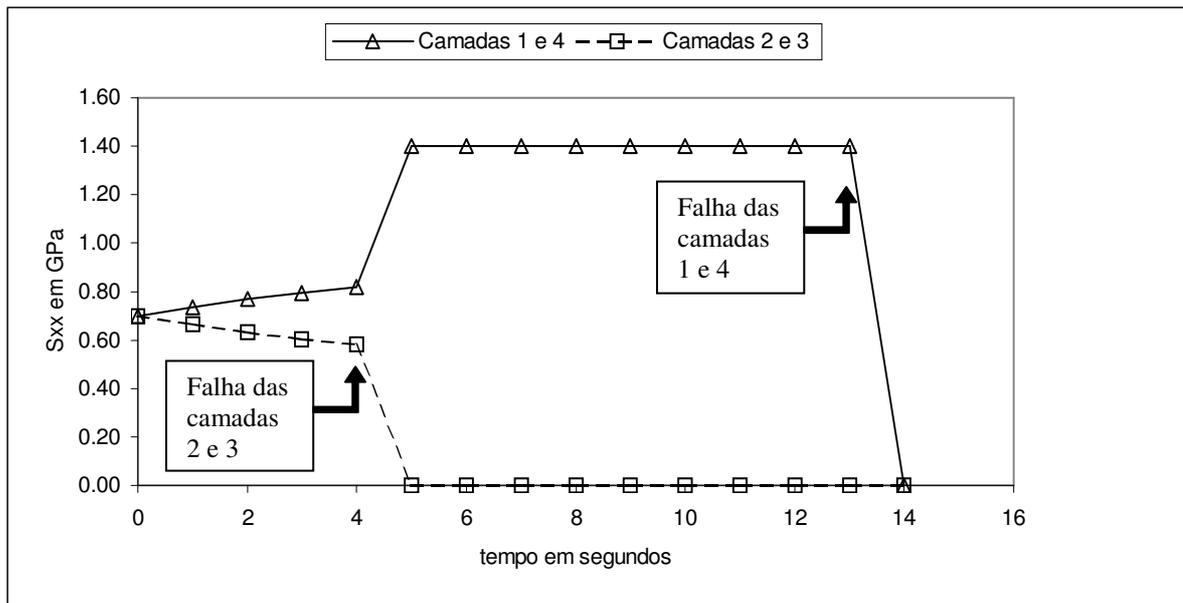


Figura 6.13 - Tensão σ_{xx} x tempo com critério de falha em deformações

Se, ao invés de utilizar-se o Critério da Máxima Deformação, na análise de falhas for utilizado um critério em tensões como, por exemplo, o Critério de Lee, poderia-se observar a ruptura das camadas 1 e 4 antes das camadas 2 e 3, pois estas últimas, como já foi dito anteriormente, apresentam decréscimo de tensões.

Para exemplificar o que foi dito acima, analisou-se novamente a placa, porém com as seguintes propriedades de resistência

$$X_t = 875 \text{ MPa}$$

$$X_c = 875 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 725 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 725 \text{ MPa}$$

$$S_A = 640 \text{ MPa}$$

$$S_T = 640 \text{ MPa}$$

E, desta vez, obteve-se a curva tensão σ_{xx} x tempo apresentada na figura 6.14. Se o material da placa apresentasse comportamento viscoelástico também na direção das fibras, não se poderia utilizar um critério de falha em tensões.

Nos gráficos das figuras 6.13 e 6.14 observa-se que a falha se dá em um determinado instante e o valor da tensão cai a zero no instante seguinte o que não parece estar muito coerente com o que acontece na realidade uma vez que isto se dá quase instantaneamente.

Seria interessante, portanto, implementar no algoritmo um controle que, ao identificar a falha, diminuísse ou fizesse igual a zero o incremento de tempo para o qual é calculado o passo seguinte.

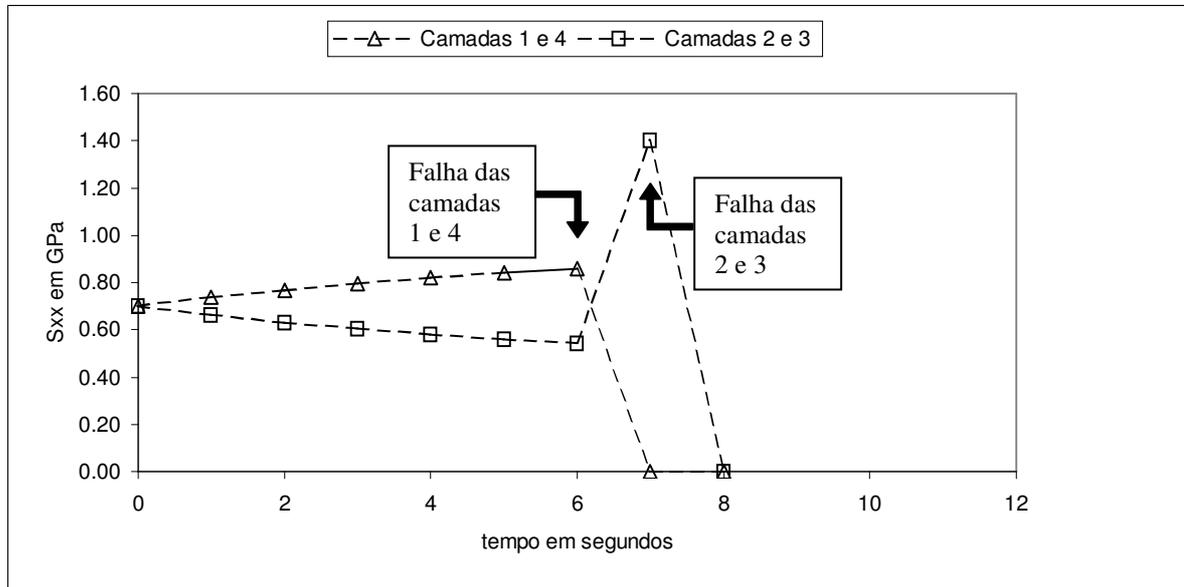


Figura 6.14 - Tensão σ_{xx} x tempo com critério de falha em tensões

6.5 ANÁLISE DE FALHAS PARA UMA LAMINADO SUJEITO À CARGA SENOIDAL

Um placa quadrada de lado 'a' e espessura 'h' feita de material laminado, possui quatro camadas iguais orientadas a $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$. O carregamento é a mesma carga senoidal aplicada no exemplo 5.3 (ver figura 5.3) e a placa é simplesmente apoiada. Utilizou-se o Critério de Lee para a análise de falhas.

Propriedades do material:

$$E_1 = 180,00 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 10,60 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 7,56 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,28$$

Propriedades de resistência:

$$X_t = 1500 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1500 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 40 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 250 \text{ MPa}$$

$$S_A = 68 \text{ MPa}$$

$$S_T = 68 \text{ MPa}$$

Devido às considerações de simetria somente um quarto do laminado foi analisado. As malhas utilizadas na discretização foram as mesmas do exemplo 5.3, ou seja, duas malhas com 121 nós, uma com 5x5 elementos de nove nós e integração reduzida e outra com 10x10 elementos de quatro nós e integração completa.

A variação da carga de falha última do laminado pelo Critério de Lee em função da razão lado/espessura é apresentada nas figuras 6.15 e 6.16. Os resultados obtidos com a formulação presente para as duas malhas analisadas, são mostrados em comparação com os resultados numéricos obtidos por Cheung e Akhras (1995).

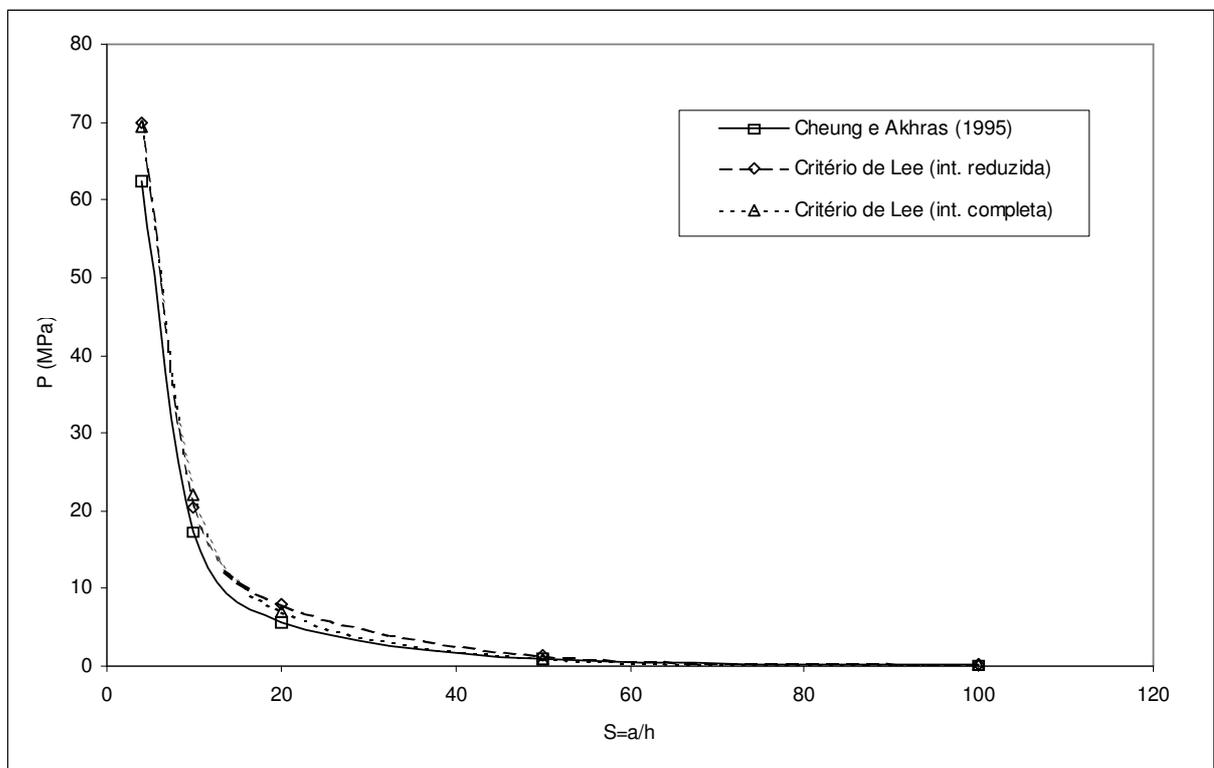


Figura 6.15 – Variação da carga última com a razão lado /espessura

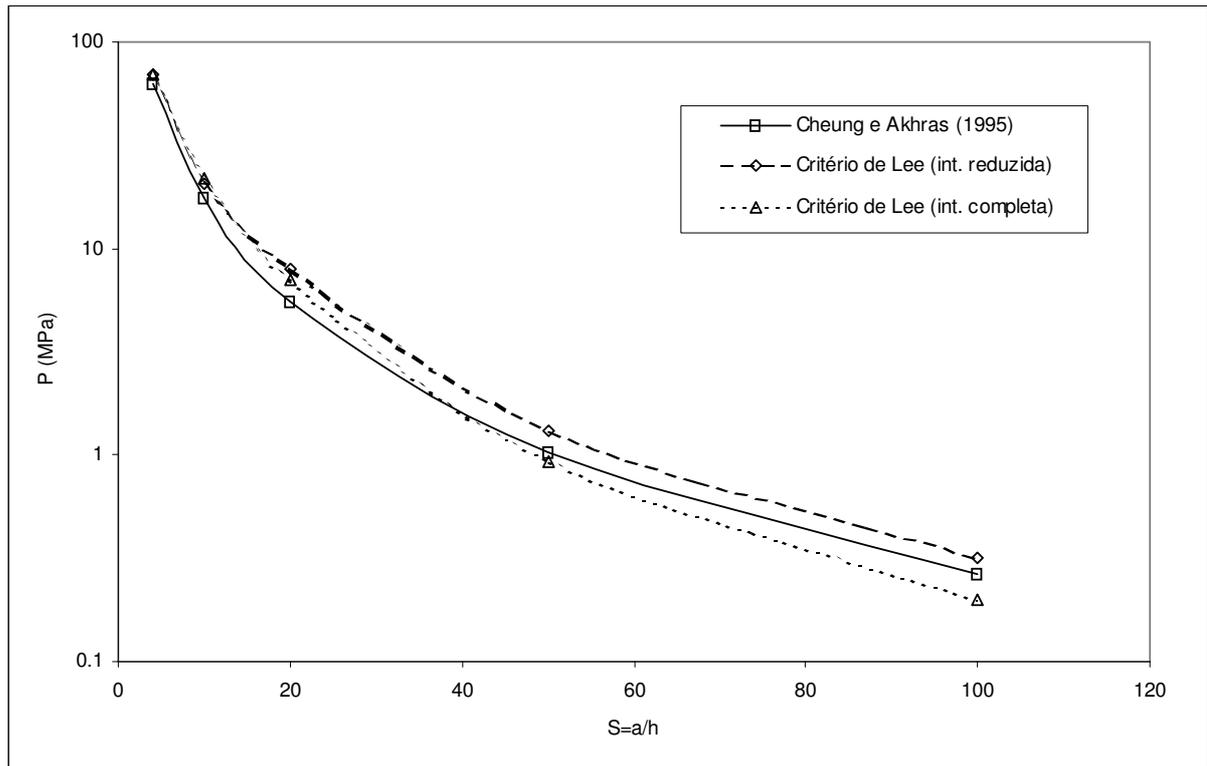


Figura 6.16 – Variação da carga última, em escala logarítmica, com a razão lado/espessura

No gráfico da figura 6.16 onde apresenta-se a carga última em escala logarítmica, pode-se observar o fenômeno de “locking” quando não é utilizada integração reduzida.

Após isto analisou-se o mesmo exemplo porém utilizando-se o Critério da Máxima Deformação. Como não se dispunha dos limites de deformação do material, usou-se a seguinte aproximação

$$X_{\text{et}} = X_t/E_1 = 1500 \text{ MPa}/180,00 \text{ GPa} = 8,3333$$

$$X_{\text{ec}} = X_c/E_1 = 1500 \text{ MPa} /180,00 \text{ GPa} = 8,3333$$

$$Y_{\text{et}} = Y_t/ E_2 = 40 \text{ MPa} /10,60 \text{ GPa} = 3,7736$$

$$Y_{\text{ec}} = Y_c/ E_2 = 250 \text{ MPa} /10,60 \text{ GPa} = 2,3585 \times 10^1$$

$$S_{\text{eA}} = S_A/G_{12} = 68 \text{ MPa} /7,76 \text{ GPa} = 8,7629$$

$$S_{\text{eT}} = S_T/G_{23} = 68 \text{ MPa} /7,76 \text{ GPa} = 8,7629$$

Os resultados de carga última e sua comparação com os resultados obtidos com o Critério de Lee para a presente formulação e para Cheung e Akhras (1995), são apresentados nas figuras 6.17 e 6.18.

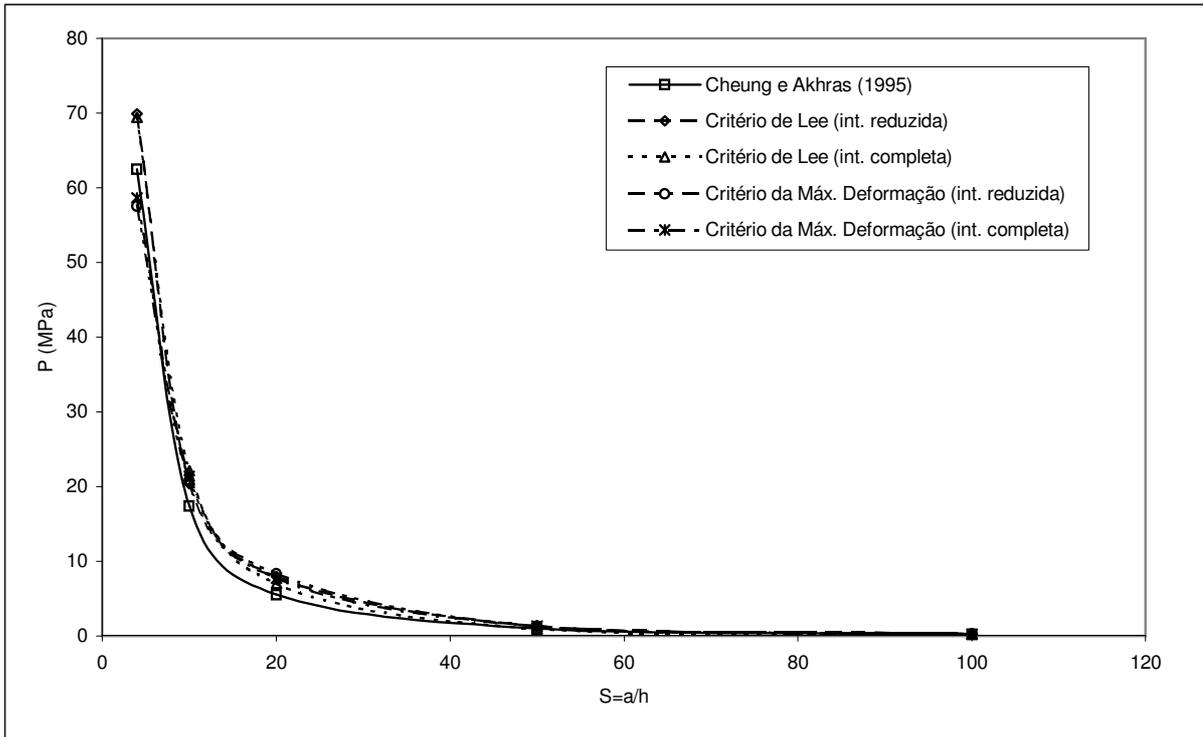


Figura 6.17 – Comparação entre cargas últimas obtidas com o Critério de Lee e Critério da Máxima Deformação

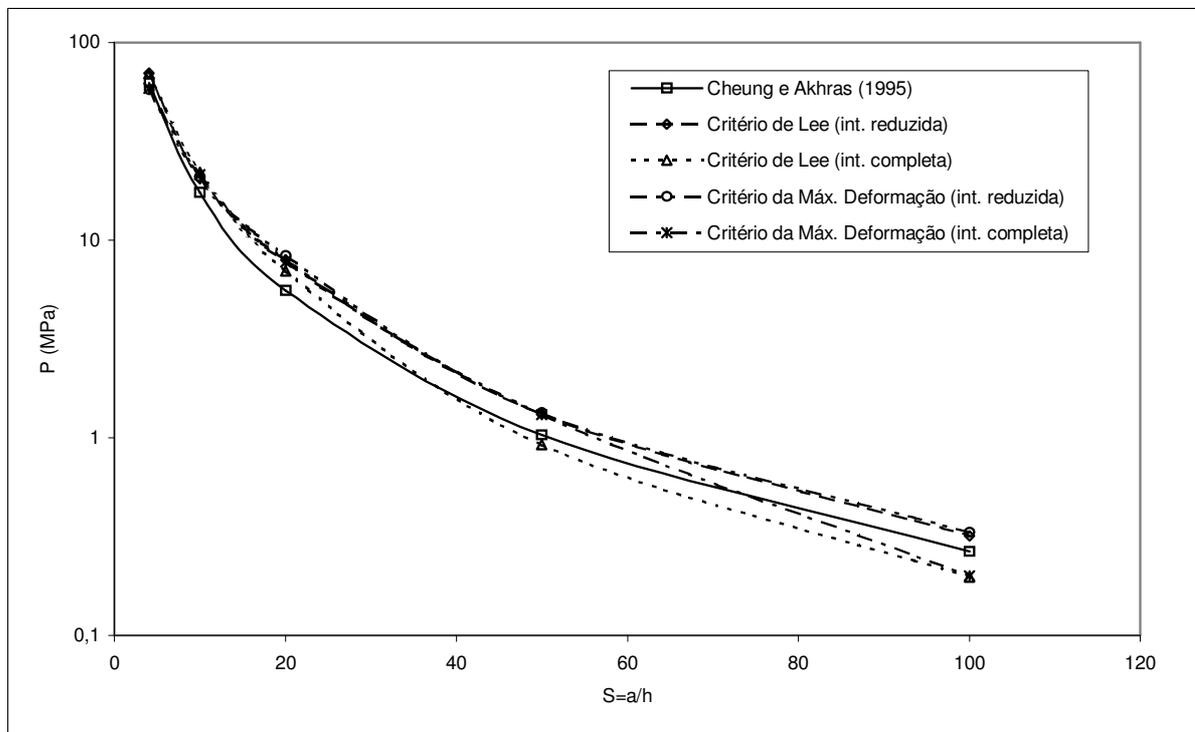


Figura 6.18 – Comparação entre cargas últimas em escala logarítmica obtidas com o Critério de Lee e Critério da Máxima Deformação

Como pode ser observado nos gráficos das figuras anteriores, o Critério da Máxima Deformação fornece resultados coerentes com outras formulações. E, para os propósitos deste trabalho, este critério, por ser definido em deformações, é de grande utilidade.

6.6 ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO

Considerou-se um painel com as mesmas características geométricas do painel do exemplo 5.6, mas sem a deflexão inicial apresentada por aquele. A malha utilizada na análise também foi a mesma do exemplo 5.6 (ver figura 5.21).

O painel é feito de quatro camadas com iguais espessuras e orientação das fibras como está representado na figura 6.19.

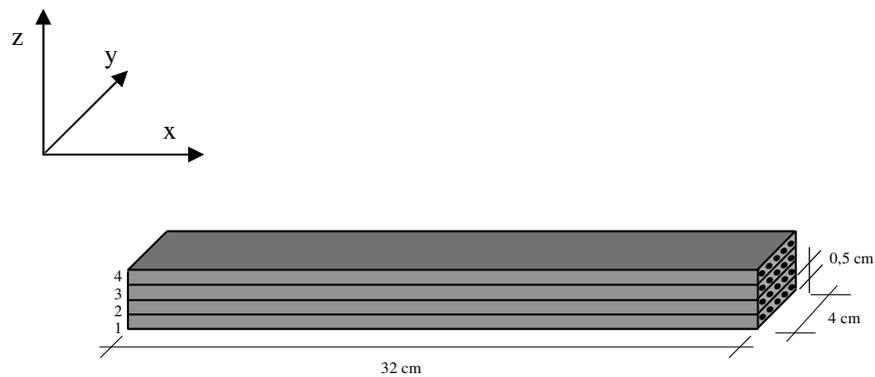


Figura 6.19 – Esquema de laminação do painel

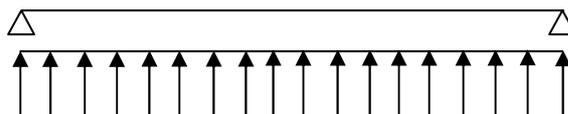


Figura 6.20 – Carregamento do Painel

As lâminas são feitas de grafite/epoxi e possuem as seguintes propriedades

Propriedades Elásticas

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,24$$

Propriedades de Falha

Camadas 1 e 4

$$X_{\text{et}} = 1,1431 \times 10^{-3}$$

$$X_{\text{ec}} = 1,2811 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\text{et}} = 4,0698 \times 10^{-4}$$

$$Y_{\text{ec}} = 4,0698 \times 10^{-4}$$

$$S_{\text{eA}} = 1,5363 \times 10^{-3}$$

$$S_{\text{eT}} = 1,9853 \times 10^{-3}$$

Camadas 2 e 3

$$X_{\text{et}} = 5,7155 \times 10^{-3}$$

$$X_{\text{ec}} = 6,4055 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\text{et}} = 2,0349 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\text{ec}} = 2,0349 \times 10^{-3}$$

$$S_{\text{eA}} = 7,6815 \times 10^{-3}$$

$$S_{\text{eT}} = 9,9265 \times 10^{-3}$$

O painel é simplesmente apoiado e foi submetido à uma carga uniformemente distribuída aplicada no sentido positivo do eixo z, ou seja, de baixo para cima como mostra a figura 6.20.

Foi realizada uma análise de falhas por meio do Critério da Máxima Deformação e a curva carga x deslocamento máximo do painel obtida, é mostrada na figura 6.21.

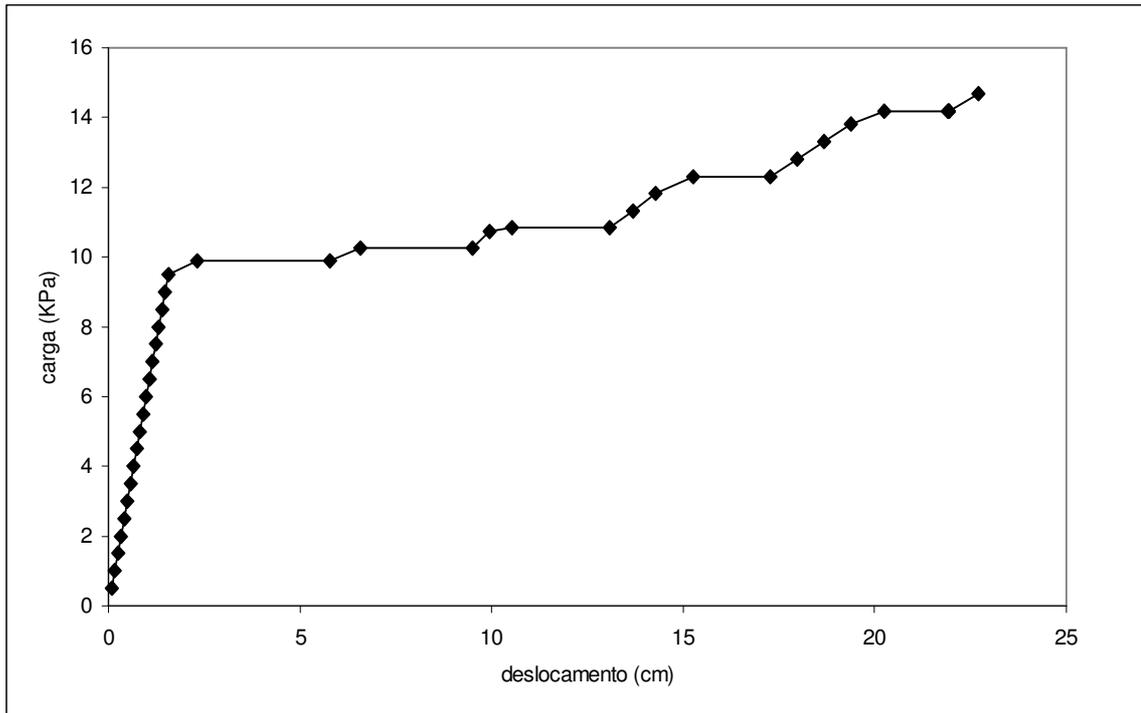


Figura 6.21 – Curva carga x deslocamento máximo com consideração de falhas progressivas

A figura 6.22 ilustra, de uma forma esquemática, a evolução das falhas no painel com o aumento da carga aplicada, até que seja atingida a falha última.

Neste exemplo utilizou-se 2x2 pontos de integração e, cada elemento da malha foi dividido (linhas pontilhadas) em quatro partes que representam as áreas de influência destes pontos de integração. A medida que o programa acusava a ocorrência de falha dos pontos de integração das camadas, os mesmos iam sendo marcados de acordo com a seguinte notação

- falha na direção das fibras \Rightarrow linhas verticais
- falha na direção das perpendicular às fibras \Rightarrow linhas horizontais.

Acima de cada configuração de falha, apresenta-se o valor estimado para a carga de falha.

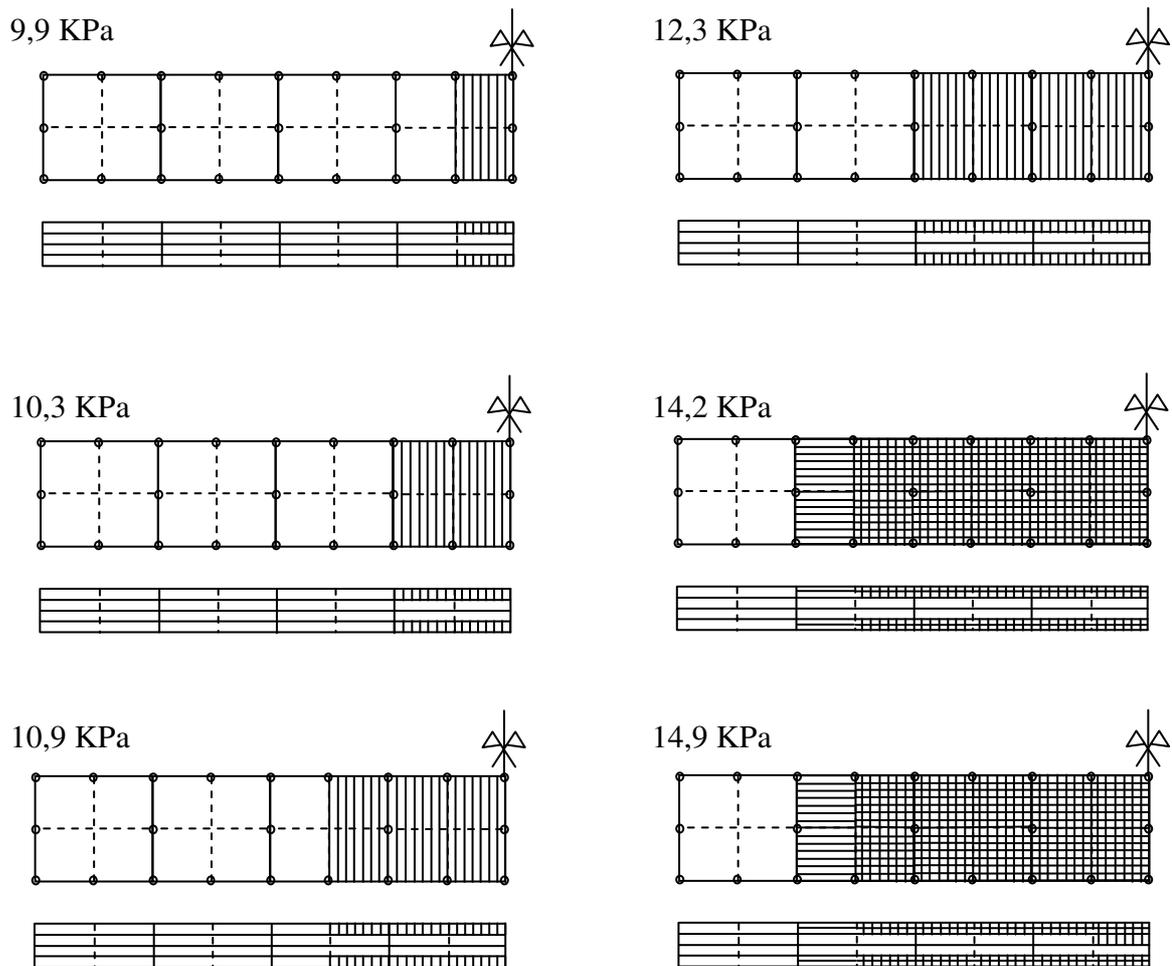


Figura 6.22 – Evolução das falhas no painel laminado

6.7 ANÁLISE DE FALHAS PROGRESSIVAS EM UM PAINEL LAMINADO VISCOELÁSTICO

Analisou-se o mesmo painel do exemplo 6.6, porém com consideração de viscoelasticidade. Para tanto, foi empregado um material viscoelástico com as seguintes propriedades

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,24$$

$$\theta = 10 \text{ s}$$

Os limites de deformação das camadas, utilizados na análise de falhas progressivas feita por meio do Critério da Máxima Deformação, também são os mesmos do exemplo anterior.

A curva obtida para o deslocamento máximo, ou seja, no centro do painel, em função do tempo, é apresentada na figura 6.23, para um valor de carga de pressão uniforme aplicada de 75 kPa.

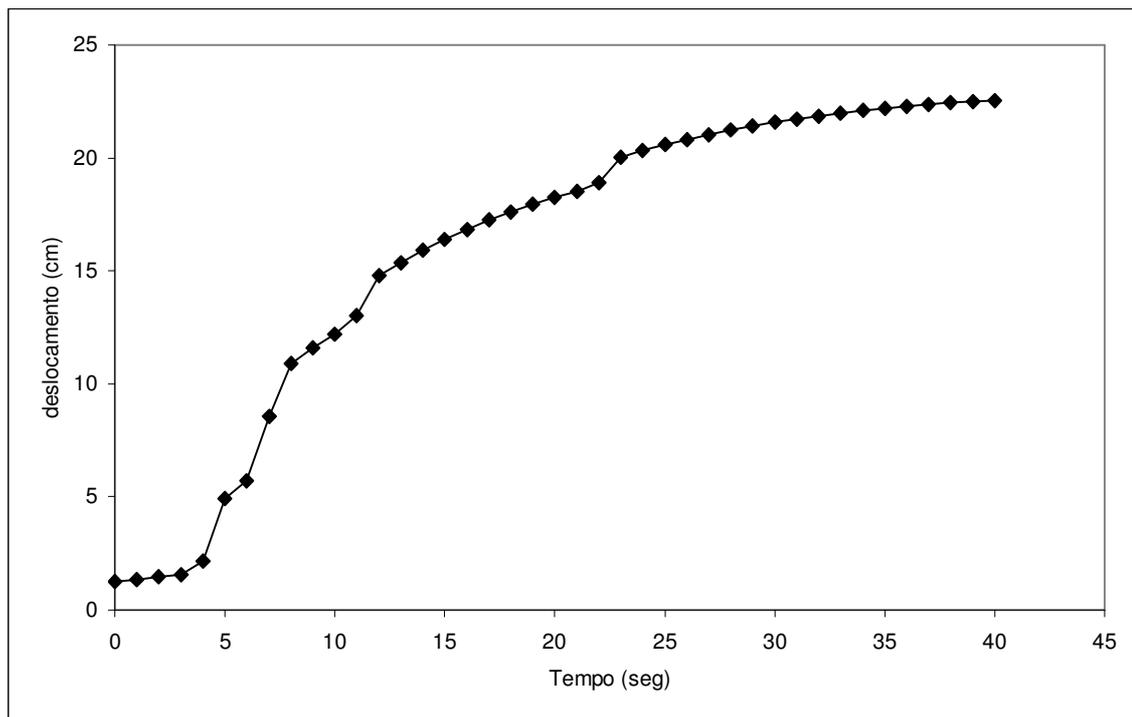


Figura 6.23 – Curva deslocamento máximo x tempo

A figura 6.24 mostra a evolução das falhas no laminado ao longo do tempo e, emprega-se a mesma notação explicada para a figura 6.22.

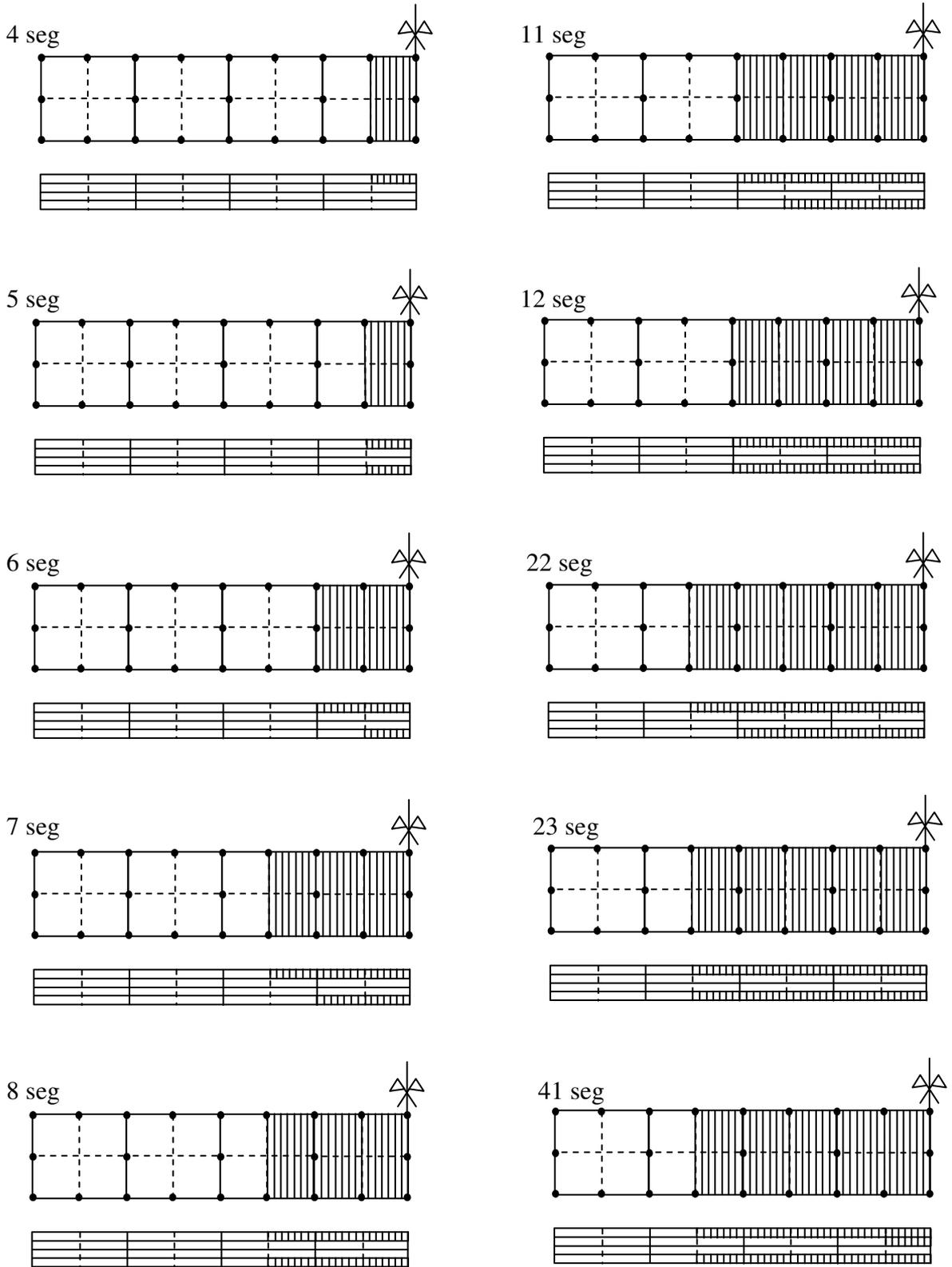


Figura 6.24 – Evolução das falhas ao longo do tempo

6.8 ANÁLISE DE FLAMBAGEM ELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS

Analisou-se, neste exemplo, novamente o painel do exemplo 5.6, considerando o painel constituído por vinte camadas. Mas, desta vez, fez-se uma análise não linear geométrica com falhas progressivas. O critério utilizado foi o da Máxima Deformação e os limites de deformação adotados foram os seguintes

Camadas 1 e 20

$$X_{\epsilon t} = 1,1431 \times 10^{-5}$$

$$Y_{\epsilon t} = 4,0698 \times 10^{-6}$$

$$S_{\epsilon A} = 1,5363 \times 10^{-5}$$

$$X_{\epsilon c} = 1,2811 \times 10^{-5}$$

$$Y_{\epsilon c} = 4,0698 \times 10^{-6}$$

$$S_{\epsilon T} = 1,9853 \times 10^{-5}$$

Camadas 2 e 19

$$X_{\epsilon t} = 1,1431 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\epsilon t} = 4,0698 \times 10^{-4}$$

$$S_{\epsilon A} = 1,5363 \times 10^{-3}$$

$$X_{\epsilon c} = 1,2811 \times 10^{-3}$$

$$Y_{\epsilon c} = 4,0698 \times 10^{-4}$$

$$S_{\epsilon T} = 1,9853 \times 10^{-3}$$

Camadas 3 e 18

$$X_{\epsilon t} = 1,1431 \times 10^{-2}$$

$$Y_{\epsilon t} = 4,0698 \times 10^{-3}$$

$$S_{\epsilon A} = 1,5363 \times 10^{-2}$$

$$X_{\epsilon c} = 1,2811 \times 10^{-2}$$

$$Y_{\epsilon c} = 4,0698 \times 10^{-3}$$

$$S_{\epsilon T} = 1,9853 \times 10^{-2}$$

Camadas 4 e 17

$$X_{\epsilon t} = 1,1431 \times 10^{-1}$$

$$Y_{\epsilon t} = 4,0698 \times 10^{-2}$$

$$S_{\epsilon A} = 1,5363 \times 10^{-1}$$

$$X_{\epsilon c} = 1,2811 \times 10^{-1}$$

$$Y_{\epsilon c} = 4,0698 \times 10^{-2}$$

$$S_{\epsilon T} = 1,9853 \times 10^{-1}$$

Demais camadas

$$X_{\epsilon t} = 1,1431$$

$$X_{\epsilon c} = 1,2811$$

$$Y_{\epsilon t} = 4,0698 \times 10^{-1}$$

$$Y_{\epsilon c} = 4,0698 \times 10^{-1}$$

$$S_{\epsilon A} = 1,5363$$

$$S_{\epsilon T} = 1,9853$$

A figura 6.25 mostra os resultados obtidos para a curva carga x deslocamento, com o Método de Newton-Raphson, para o caso de falhas progressivas em comparação com a análise feita sem a consideração de falhas.

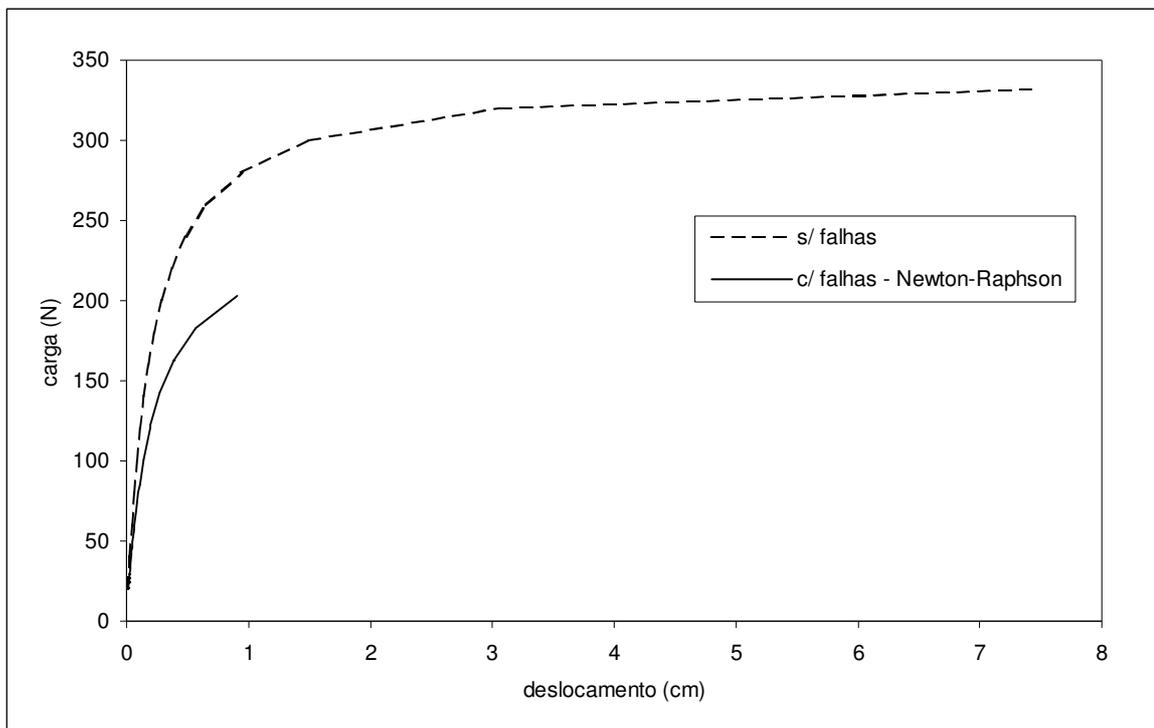


Figura 6.25 – Análise de flambagem elástica com falhas progressivas através do Método de Newton-Raphson

O que ocorre é que, após a ruptura das camadas 1, 2, 19 e 20, o painel tem sua espessura reduzida de 0,2 cm para 0,16 cm, já que cada uma das vinte camadas possui espessura de 0,01 cm. Desta forma, repetindo-se o cálculo feito no exemplo 5.6, obtém-se,

para o valor da carga de flambagem elástica que, inicialmente, era de 340,04 N, o valor de 174,10 N.

Assim sendo, quando as quatro camadas mais externas falham, o laminado já encontra-se em um nível de carga superior à sua carga de flambagem e, portanto, dá-se a falha última, não conseguindo-se prosseguir com a análise.

Se ao invés de utilizar-se o Método de Newton-Raphson for empregado o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, o gráfico obtido é o da figura 6.26. Neste caso, observa-se que após a ruptura de algumas camadas, o nível de carga diminui e o laminado, então, flamba, como um laminado menos espesso, para o novo valor da carga de flambagem.

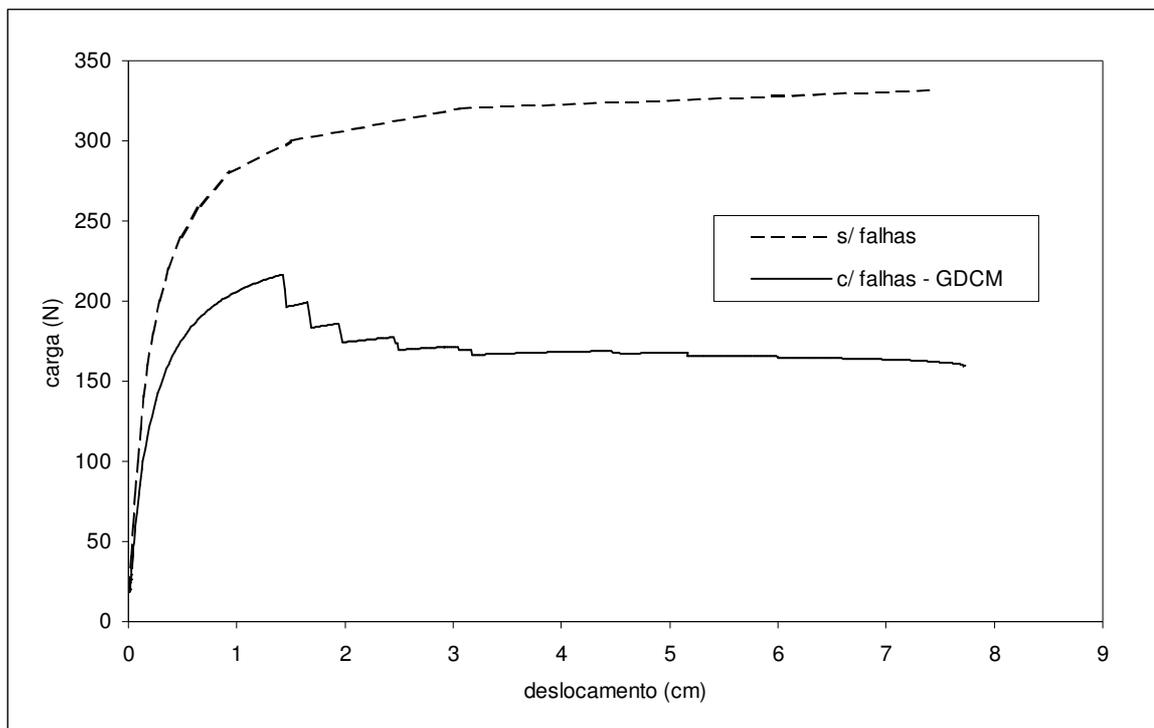


Figura 6.26 – Análise de flambagem elástica com falhas progressivas através do Método de Controle de Deslocamentos Generalizados

Verificar o comportamento do painel neste tipo de análise só é possível com o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, pois tem-se, neste caso, uma adaptação do fator de carga para a nova configuração do laminado.

O Método de Controle por Deslocamentos Generalizados apresenta, porém, algumas instabilidades a medida que, para pequenos incrementos de carga, ocorrem grandes incrementos de deslocamento, ou seja, a parte final da curva de flambagem.

Em ambos os métodos, a análise chega ao final quando, após um número pré-determinado de iterações, não se verifica a convergência.

6.9 ANÁLISE DE FLAMBAGEM VISCOELÁSTICA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS

Neste exemplo, faz-se a análise de falha do painel anteriormente estudado no exemplo 5.7. Os seguintes limites de deformação foram adotados

Camadas 1 e 10

$$X_{\epsilon t} = 1,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon t} = 4,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon A} = 1,50 \times 10^{-6}$$

$$X_{\epsilon c} = 1,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon c} = 4,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon T} = 2,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 2 e 9

$$X_{\epsilon t} = 2,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon t} = 8,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon A} = 3,00 \times 10^{-6}$$

$$X_{\epsilon c} = 2,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon c} = 8,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon T} = 4,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 3 e 8

$$X_{\epsilon t} = 4,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon t} = 16,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon A} = 6,00 \times 10^{-6}$$

$$X_{\epsilon c} = 4,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon c} = 16,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon T} = 8,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 4 e 7

$$X_{\epsilon t} = 11,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon t} = 30,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon A} = 15,00 \times 10^{-6}$$

$$X_{\epsilon c} = 11,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon c} = 30,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon T} = 17,00 \times 10^{-6}$$

Camadas 5 e 6

$$X_{\epsilon t} = 16,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon t} = 64,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon A} = 17,50 \times 10^{-6}$$

$$X_{\epsilon c} = 16,00 \times 10^{-6}$$

$$Y_{\epsilon c} = 64,00 \times 10^{-7}$$

$$S_{\epsilon T} = 18,00 \times 10^{-6}$$

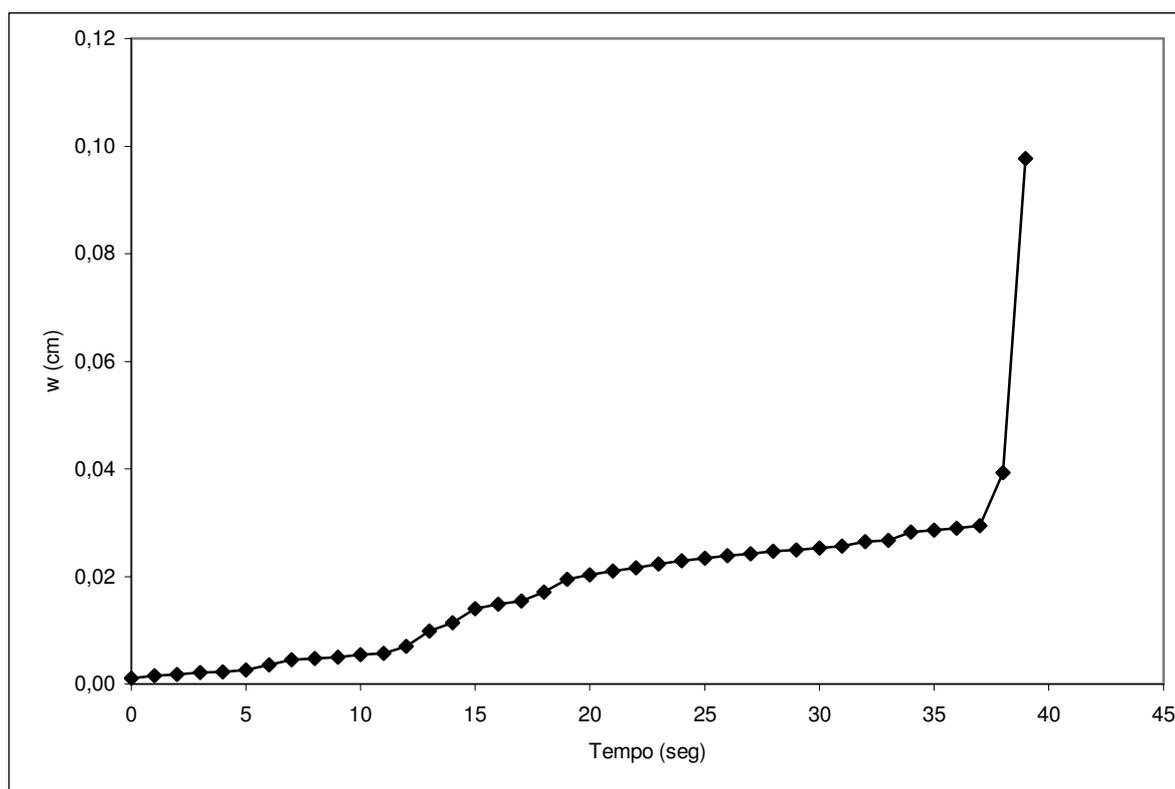


Figura 6.27 – Curva deflexão x tempo para análise de flambagem viscoelástica com falhas progressivas

Na figura 6.27 apresenta-se o gráfico da variação das deflexões em função do tempo. Após a falha de algumas camadas, a carga aplicada, que é de 20N, supera o valor da carga de flambagem viscoelástica e as deflexões começam a crescer rapidamente até que ocorre a falha última com a ruptura total do painel.

6.10 ANÁLISE DE UMA CASCA ESFÉRICA LAMINADA COM CONSIDERAÇÃO DE FALHAS PROGRESSIVAS

Este exemplo trata da análise de falhas progressivas de uma casca esférica com as mesmas características geométricas e de carregamento apresentadas pela casca estudada no exemplo 5.9. Porém, a casca do presente exemplo é constituída por lâminas de carbono-epoxi, em um esquema de laminação (0/45/90/135/180)_s, cujas propriedades são dadas a seguir.

Propriedades do material:

$$E_1 = 180,00 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 10,60 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 7,56 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,28$$

Propriedades de resistência:

$$X_t = 1500 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1500 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 40 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 250 \text{ MPa}$$

$$S_A = 68 \text{ MPa}$$

$$S_T = 68 \text{ MPa}$$

A malha utilizada na análise foi a mesma do exemplo 5.9 (figura 5.30) e empregou-se o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados.

As configurações de falha para a camada 10 da casca são apresentadas, juntamente com seu respectivo valor de carga de falha, na figura 6.28. Nesta representação, apenas

desejou-se mostrar a localização das falhas não havendo a diferenciação entre os modos de falha ocorridos. Este procedimento foi desenvolvido com vistas a obter-se uma visualização da distribuição das falhas na estrutura, o que, para malhas com muitos elementos, é de grande utilidade.

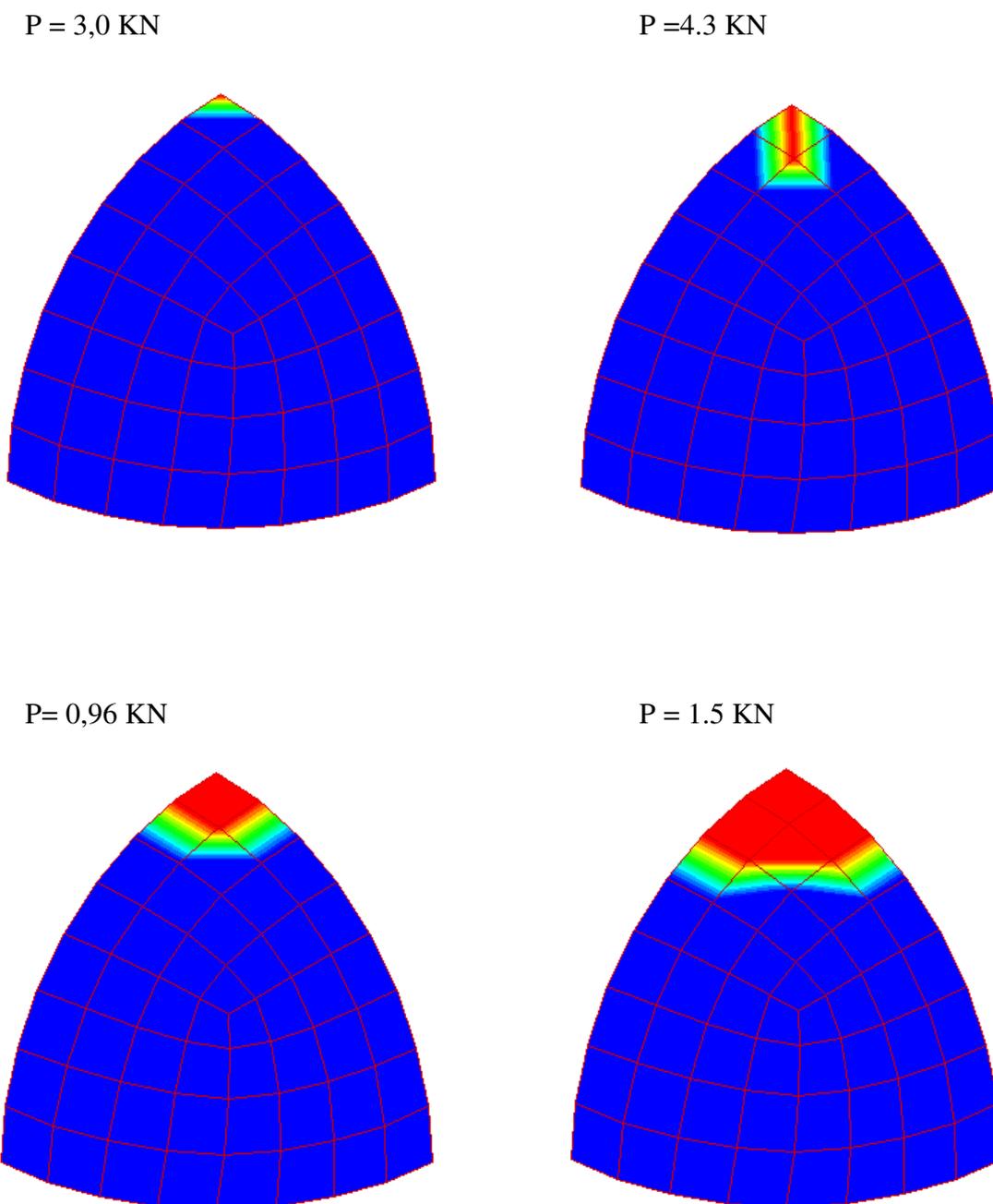


Figura 6.28 – Configurações de falha para a camada 10 do laminado

A curva que representa a variação da carga durante o decorrer da análise é apresentada na figura 6.29.

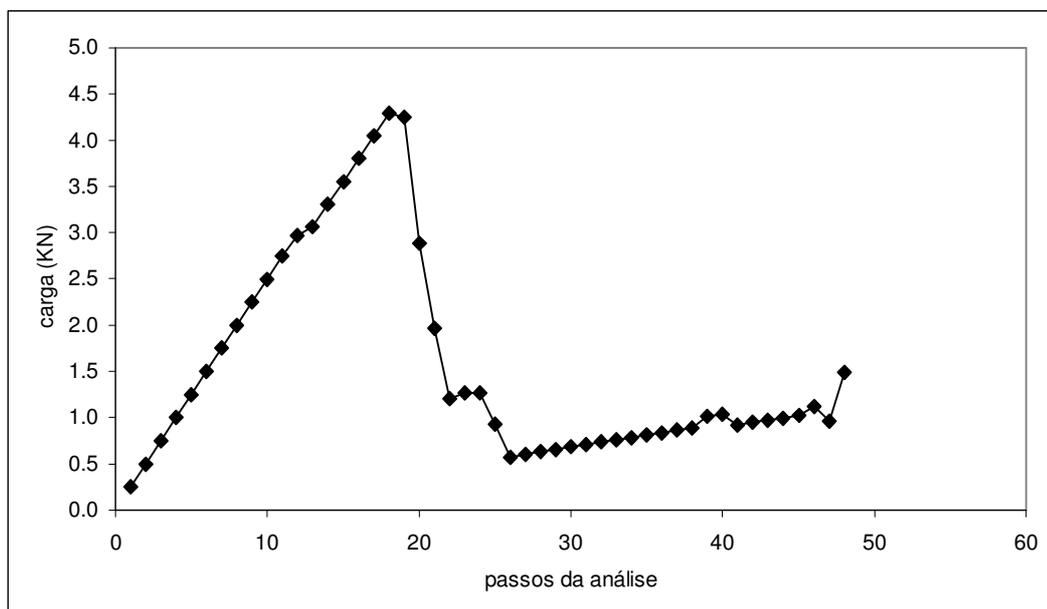


Figura 6.29 – Variação da carga durante a análise

Neste exemplo observa-se que, após uma determinada falha, devido à perda de rigidez que ocorre na estrutura, a carga necessária para que ocorra a próxima falha pode ser menor que a que originou a falha anterior. Isto parece bastante lógico do ponto de vista físico. Tal efeito, no entanto, só é bem representado quando se utiliza o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, pois com o Método de Newton-Raphson o valor da carga não decresce e tería-se, neste caso, após a falha ocorrida para $P=4,3$ KN (figura 6.28), as outras falhas ocorrendo para este mesmo valor de carga.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

No presente trabalho apresentou-se um modelo para análise de cascas laminadas de materiais compostos baseado em uma descrição cinemática Lagrangeana Total e em elementos finitos tridimensionais degenerados. O modelo permite realizar análises elástica e viscoelástica geometricamente linear e não linear com consideração de grandes deslocamentos e pequenas deformações.

As lâminas das quais as estruturas são constituídas são reforçadas por fibras e foram consideradas ortótropas podendo, o material das mesmas, apresentar comportamento elástico ou viscoelástico linear, na direção das fibras, na direção perpendicular a estas e, também, em cisalhamento.

O presente modelo numérico permite a consideração de falhas nas lâminas por quebra ou flambagem das fibras, por fissuração na matriz no sentido paralelo às fibras e delaminação. Os critérios disponíveis na análise de falha são os de Tsai-Wu, Hashin, Lee e Máxima Deformação.

A análise de falhas progressivas é feita através dos critérios de Hashin, Lee e Máxima Deformação, pois neste tipo de análise, precisa-se conhecer o modo de ocorrência da falha a fim de efetuar-se a correspondente degradação na rigidez do material, à medida que as falhas evoluem.

Os modelos de degradação da rigidez do material empregados, embora simples frente a complexidade dos mecanismos de falha em materiais compostos, apresentam bons resultados, quando comparados com outros resultados numéricos encontrados na literatura e com dados experimentais.

Para o critério de Hashin, considera-se falha na direção da fibras e na direção perpendicular às fibras e, para os critérios de Lee e Máxima Deformação, além destes dois tipos de falhas, considera-se também a falha por delaminação.

O elemento de casca empregado na formulação presente mostrou-se eficiente para análise de cascas uma vez que estas não sejam muito espessas, pois nestes casos o modelo utilizado mostrou-se um pouco rígido para reproduzir os resultados obtidos pela Teoria da Elasticidade (Pagano, 1970). No caso de placas finas observou-se o fenômeno de “locking” que se dá nos efeitos de cisalhamento e flexão de membrana, tornando-se a estrutura ficticiamente mais rígida. Tal fenômeno foi superado com o emprego de uma regra de integração reduzida.

O critério de convergência utilizado foi definido em termos de deslocamentos, seria interessante, no entanto, implementar um critério em tensões, visando obter-se resultados mais precisos, pois em alguns exemplos observou-se que, embora os deslocamentos já tivessem atingido o valor esperado, as tensões ainda deviam ser melhor aproximadas.

Nos exemplos envolvendo análises de flexão foi verificada a necessidade de uma melhor discretização na espessura das estruturas, o que, no programa computacional em questão, significa a especificação de um número maior de camadas no laminado, uma vez que, a cada camada, correspondem mais pontos de integração na espessura do elemento.

Nos casos de análise de flambagem elástica e viscoelástica verificou-se a necessidade de um mínimo de dez camadas para que os resultados numéricos reproduzissem o comportamento previsto de forma analítica.

As análises envolvendo materiais viscoelásticos, demonstraram a eficiência do modelo na representação do comportamento destes materiais, o que, no caso de materiais compostos constituídos por fibras envoltas por uma resina, é de grande importância pois, embora a maioria das fibras apresente comportamento praticamente elástico, a resina exibe resposta fortemente dependente do tempo e das características ambientais.

Na análise de flambagem viscoelástica observou-se também que o método de determinação dos intervalos de tempo que considera tempos crescentes correspondentes a deformações constantes na curva de fluência, que para casos onde a carga aplicada é menor que a carga de flambagem, fornece bons resultados, não é capaz de representar o comportamento esperado em casos em que a carga iguale-se ou excede a carga de flambagem. Nestes casos, como a declividade da curva deflexão x tempo aumenta com o tempo, deve-se

usar intervalos de tempo constantes correspondentes a incrementos de deformações crescentes, ou até mesmo intervalos de tempo decrescentes, visto que à princípio a estabilidade do método está relacionada com o incremento de deformação em cada intervalo.

Vários exemplos de análise de falhas progressivas foram apresentados e seus resultados mostraram-se coerentes do ponto de vista físico. Os exemplos onde o laminado apresenta degradações sucessivas mostram a perda da capacidade de carga nas camadas onde a falha foi completa.

A análise acoplada de viscoelasticidade e falhas progressivas, é feita por meio do Critério da Máxima Deformação, embora tenha sido visto que no caso particular de estruturas laminadas onde as fibras possuem comportamento elástico e a matriz, viscoelástico linear, estando as fibras de algumas camadas na direção do carregamento e as de outras defasadas por um ângulo, pode-se empregar um critério em tensões. Pois a medida que as tensões nas camadas que possuem fibras defasadas em relação ao carregamento relaxam, ocorre um incremento nas tensões das camadas que possuem as fibras alinhadas com este.

Ainda nas análise de viscoelasticidade e falhas progressivas seria conveniente o estudo de uma forma mais adequada de definir o incremento de tempo após a ocorrência da falha. Pois a perda de rigidez se dá de forma praticamente instantânea, o que, em alguns gráficos não fica muito claro pois os resultados da falha ocorrida só são sentidos no próximo instante. Talvez fosse interessante que após a falha o passo seguinte fosse calculado para o mesmo instante de tempo.

O Critério da Máxima Deformação, nos exemplos analisados, demonstrou ser capaz de fornecer resultados aceitáveis e, mesmo quando comparado a outros critérios os resultados obtidos por estes não diferem em muito dos obtidos com o critério em deformações. Sendo assim, e dada a utilidade deste critério para análises acopladas de viscoelasticidade e falhas, é plenamente justificável o emprego do Critério da Máxima Deformação neste trabalho.

Cabe ressaltar, também, que tudo que se tem são, na realidade, modelos que tentam explicar o comportamento real das estruturas que é, em muitos casos, bem mais complexo. Desta forma, o uso de um critério relativamente simples como o da Máxima Deformação, se

por um lado pode ignorar alguns aspectos, por outro, é de fácil aplicação e seus resultados podem ser facilmente entendidos e questionados.

Talvez uma das maiores dificuldades encontradas no decorrer deste trabalho tenha sido a quase inexistência de dados experimentais tanto para valores de cargas de falhas quanto para as propriedades de falha dos materiais, principalmente no que se refere à limites de deformação. Pelo menos nos trabalhos aos quais, tem-se acesso no meio acadêmico, estes dados quase nunca são apresentados. Deve-se, portanto, realizar mais testes a medida que outros dados experimentais sejam obtidos.

A comparação entre os métodos empregados na análise não linear demonstrou que, para algumas análises como é o caso de flambagem elástica com falhas progressivas, o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados apresenta maior versatilidade na representação do comportamento das estruturas. Porém, este método conduz a análises demasiadamente longas em casos onde, a um pequeno aumento no fator de carga, está associado um grande incremento nos deslocamentos. Além disto, nas análises viscoelásticas, onde, normalmente, deseja-se estudar o comportamento dependente do tempo da estrutura submetida à uma carga constante no tempo, não é possível empregar o Método de Controle por Deslocamentos Generalizados, pois sua formulação parte da definição de fatores de carga variáveis.

Com o objetivo de poder analisar malhas com um número maior de elementos, foi feita uma adaptação do programa original (Marques, 1994), o qual rodava malhas com até 30 elementos. Foram criadas, também, interfaces com o programa PATRAN¹, a fim de utilizá-lo como um pré-processador e com o programa TECPLOT², para recursos de visualização de pós-processamento.

A representação das falhas obtidas através do TECPLOT merece, contudo, ser melhorada para que se possa visualizar não apenas a localização das falhas na estrutura mas, também, seu modo de ocorrência. A apresentação dos resultados das análises de falha através de relatórios torna-se de difícil interpretação quando são utilizadas malhas muito grandes.

¹ O programa PATRAN foi utilizado nas estações do Centro Nacional de Supercomputação – CESUP

² O TECPLOT é um programa de visualização que encontra-se disponível para uso dos pesquisadores do Centro de Mecânica Aplicada e Computacional – CEMACON

Ainda como sugestões para continuidade deste estudo pode-se melhorar o modelo para delaminação na análise de falhas e estender a aplicabilidade do programa para análises com considerações de dano.

Enfim, o assunto abordado neste trabalho é bastante complexo e de grande importância cabendo, portanto, dar seguimento ao seu desenvolvimento.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHMAD, S.; IRONS, B. M. ; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v.2, p.419-451, 1970.
- ARNOLD, R. R.; MAYERS, J. Buckling, Postbuckling and Crippling of Materially Nonlinear Laminated Composite. **International Journal of Solids and Structures**, v.20, n.9/10, p.863-880, 1984.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Englewood Cliffs N.J.: Prentice-Hall, 1996.
- BONILHA, J. Z. **Textos Didáticos de Engenharia**; instruções para apresentação de trabalhos. Porto Alegre: Escola de Engenharia – UFRGS, 1996.
- CHEUNG, M. S.; AKHRAS, G.; LI, W. Progressive Failure Analysis of Composite Plates by the Finite Strip Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.124, n.1-2, p.49-61, 1995.
- CREUS, G. J. **Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures**. Springer-Verlag, 1986. (Lectures Notes in Engineering, 16).
- HAHN, H. T.; PAGANO, N. J. Curing Stresses in Composite Laminates. **Journal of Composite Materials**, v.9, p.91, Jan. 1975.
- HAHN, H. T.; TSAI, S. W. Graphical Determination of Stiffness and Strength of Composite Laminates. **Journal of Composite Materials**, v.8, p.160-177, Apr. 1974.
- HALPIN, J. R. **Primer on Composite Materials: Analysis**. Technomic Publishing Company, 1984.

- HART-SMITH, L. J. The Role of Biaxial Stresses in Discriminating between Meaningful and Illusory Composite Failure Theories. **Composite Structures**. v.25, p.3-20, 1993.
- HASHIN, Z. Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites. **Journal of Applied Mechanics**, v.47, p.329-334, June 1980.
- HASHIN, Z. Viscoelastic Fiber Reinforced Materials. **AIAA Journal**, v.4, n.8, p.1411-1417, August 1966.
- HASHIN, Z.; ROSEN, W. The Elastic Moduli of Fiber Reinforced Materials. **Journal of Applied Mechanics**, v.31, p.223-232, 1964
- HINTON, E.; OWEN, D. R. J. **Finite Element Software for Plates and Shells**. Pineridge Press, 1984.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1987.
- HWANG, W. C.; SUN, C. T. Failure Analysis of Laminated Composites by Using Iterative Three-Dimensional Finite Element Method. **Computers & Structures**, v.33, n.1, p. 41-47, 1989.
- JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. McGraw-Hill Book Company, 1975.
- LEE, J. D. Three Dimensional Finite Element Analysis of Damage Accumulation in Composite Laminate. **Computers & Structures**, v.15, n.3, p.335-350, 1982.
- LEE, J. D. Three Dimensional Finite Element Analysis of Layered Fiber-Reinforced Composite Materials. **Computers & Structures**, v.12, n.3, p.319-339, Sept, 1980.
- LENE, F.; LEGUILLON, D. Homogenized Constitutive Law for a Partially Cohesive Composite Material. **International Journal of Solids and Structures**, v.5, p.443-458, 1982.

- LIAO, C. L.; REDDY, J. N. **An Incremental Total Lagrangian Formulation for General Anisotropic Shell-Type Structures**. Blackburg: Virginia, Polytechnic Institute and State University, 1987.
- LIN, K. Y.; YI, S. Analysis of Interlaminar Stresses in Viscoelastic Composites **International Journal of Solids and Structures**, Great Britain, v.27, n.7., p.929-945, 1991.
- LIU, W. K. et al. A multiple-quadrature eight-node hexaedral finite element for large deformation elastoplastic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.154, n.1/2, p.69-132, Feb. 1998.
- MACHADO, R. D. **Desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local para a Solução de Placas Laminadas de Materiais Compostos**. Florianópolis, 1992. 262p. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- MARQUES, S. P. C; Creus, G. J. Geometrically Nonlinear Finite Elements Analysis of Viscoelastic Composite Materials under Mechanical and Hicrothermal Loads. **Computers & Structures**, Great Britain, v.53, n.2, p. 449-456, 1994.
- MARQUES, S. P. C. **Um Modelo Numérico para Análise de Estruturas de Materiais Compostos Considerando Efeitos Viscoelásticos e Falhas Progressivas**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1994. 182p. Tese de Doutorado em Engenharia (Estruturas)-CPGEC/UFRGS.
- MASUERO, J. R. **Análise de Fratura Viscoelástica pelo Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1992. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas)-CPGEC/UFRGS.
- ODEN, J. T; RIPPERGER, E. A. **Mechanics of Elastic Structres**. 2.ed., Hemisphere Publissing Corporation, 1981

- PACHAJOA, M. E.; FRANCES, M. K.; LEE, J. D. Stress and Failure Analysis of Composite Structures **Engineering Fracture Mechanics**, v.50, n.5/6 p.883-902, 1995.
- PACHECO, A. R.; CREUS, G. J. Análise viscoelástica de estruturas laminadas mediante o emprego de inversão numérica da transformada de Laplace **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, Barcelona, España, v.13, n.4, p.1-12, 1997.
- PAGANO, N. J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. **Journal of Composite Materials**, v.4, p.20-34, Jan. 1970.
- PAGANO, N. J.; HATFIELD, S. J. Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites **AAIA Journal**, v.10, p.931-933, July 1972.
- POPOV, E. P. **Resistência dos Materiais**. 2.ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1984. 507p.
- REDDY, J. N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates **Journal of Applied Mechanics**, v.51, n.4, p.745-752, 1984.
- REDDY, J. N.; CHAO W. C. A Comparison of Closed-Form and Finite-Element Solutions of Thick Laminated Anisotropic Rectangular Plates. **Nuclear Engineering and Design**, v.64, n.2, p.153-167, 1981.
- REDDY, J. N; PANDEY, A. K. A First-Ply Failure Analysis of Composite Laminates. **Computers & Structures**, v.23, n.3, p.371-393, 1987.
- REDDY, J. N; PHAN, N. D. Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher-Order Shear Deformation Theory. **Journal of Sound and Vibration**, v.98, n.2, p.157-170, Jan. 1985.
- ROTEN, A.; HASHIN, Z., Failure Modes of Angle Ply Laminates. **Journal of Composite Materials**, v.9, p. 191-206, Apr. 1975.

- SIH, G. C.; SKUDRA, A. M. **Failure Mechanics of Composites: Handbooks of Composites**. Amsterdam: Elsevier Science, 1985.
- TENNYSON, R. C.; MACDONALD, D.; NANYARO, A. P. Evaluation of Tensor Polynomial Failure Criterion for Composite Materials. **Journal of Composite Materials**, v.12, p. 63-75, Jan. 1978.
- TOLSON, S.; ZABARAS, N. Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates. **Computers & Structures**, v.38, n.3, p. 361-376, 1991.
- VINSON, J. R., **The Behavior of Shells Composed of Isotropic and Composite Materials**. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- WEITSMAN, Y. Residual Thermal Stresses Due to Cool-Down of Epoxy-Resin Composites. **Journal of Applied Mechanics**, v.46, p.563-567, Sept. 1979.
- WHITNEY, J. M.; ASHTON, J. E. Effect of Environment on the Elastic Response of Layered Composite Plates. **AIAA Journal**, v.9, n.9, p.1708-1713, Sept. 1971.
- WILSON, D. W.; VINSON, J. R. Viscoelastic Analysis of Laminated Plate Buckling. **AIAA Journal**, v.22, n. 7, p.982-988, July 1984.
- YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v.28, n.12, p.2110-2116, 1990.
- ZHANG, W.; EVANS, K. E., A Strain-Based Tensor Polynomial Failure Criterion for Anisotropic Materials. **Journal of Strain Analysis**, v.23, n.4, p.179-186, 1988.