

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE MECANISMOS FLEXÍVEIS COM
CONTROLE DA TENSÃO MÁXIMA CONSIDERANDO NÃO
LINEARIDADES GEOMÉTRICA E MATERIAL**

por

Daniel Milbrath De Leon

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2015.

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE MECANISMOS FLEXÍVEIS COM
CONTROLE DA TENSÃO MÁXIMA CONSIDERANDO NÃO
LINEARIDADES GEOMÉTRICA E MATERIAL**

por

Daniel Milbrath De Leon

Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Aprovada por:

Prof. Dr. Eduardo Lenz Cardoso (UDESC / Joinville - Brasil)

Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva (USP / São Paulo - Brasil)

Prof. Dr. Rogério José Marczak (UFRGS / Porto Alegre - Brasil)

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 15 de Maio de 2015.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é dedicado a todos que, de maneira direta ou indireta, colaboraram para que eu conseguisse cumprir mais essa etapa da minha vida. A lista é sempre grande e fica difícil encontrar espaço suficiente para citar um a um.

Primeiro, gostaria de agradecer à minha família, especialmente à minha mãe Vinilda Milbrath por todo o apoio incondicional que me deu e que sempre me dará. Lembrança especial também à minha irmã, Lauren e à minha sobrinha Isadora.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador Jun pelo apoio efetivo, sugestões e conversas ao longo do desenvolvimento desse trabalho. Para continuar na área acadêmica, gostaria de agradecer à todos os professores do GMAp pela contribuição na minha formação desde os tempos da graduação.

Esse trabalho teve uma importante contribuição externa, na qual faço um agradecimento ao professor Ole Sigmund, e aos colegas do grupo TopOpt da DTU na Dinamarca, especialmente o Joe, a Fengwen e o Niels.

Além disso, tenho que lembrar de toda a gurizada que passou pelo GMAp nesse tempo que lá estive, onde o período de mestrado e doutorado se confundem. A lista é realmente muito grande, e seria injusto colocar alguns nomes em detrimento de outros. Aproveito para citar a turma do futebol nosso de cada semana também.

Gostaria de agradecer também ao CNPq pelo apoio financeiro.

Enfim, um trabalho extenso como esse não é feito sozinho. O companheirismo dos amigos, o carinho da família e a ajuda dos mestres é de suma importância para um desfecho positivo, depois de tanto tempo investido. E assim aconteceu com esse trabalho.

RESUMO

Mecanismos flexíveis, nos quais a deformação elástica é aproveitada na atuação cinemática, têm grande empregabilidade em dispositivos de mecânica de precisão, engenharia biomédica, e mais recentemente em microeletromecanismos (MEMS). Entre as diversas técnicas empregadas para o seu projeto, a otimização topológica tem se mostrado a mais genérica e sistemática. A grande dificuldade destes projetos é conciliar os requisitos cinemáticos com a resistência mecânica da estrutura. Neste trabalho, é implementado um critério de resistência dentro da formulação do problema de otimização, com o intuito de gerar mecanismos que cumpram a tarefa cinemática desejada mas ao mesmo tempo não ultrapassem limites de tensão predeterminados. Esta restrição adicional também visa aliviar o problema bastante conhecido do aparecimento de articulações. Não linearidade geométrica e de material (hiperelasticidade compressível) são implementadas na solução das equações através do método dos elementos finitos para levar em conta os grandes deslocamentos do mecanismo. O método das assíntotas móveis é usado para a atualização das variáveis de projeto. As derivadas do problema de otimização são calculadas analiticamente, pelo método adjunto. Técnicas de projeção são aplicadas para a garantia de topologias livres de instabilidades numéricas comuns em otimização topológica, e projetos otimizados mais próximos de um espaço 0/1 para as densidades físicas.

Palavras-Chave: Mecanismos flexíveis, otimização topológica, não linearidade geométrica e de material, restrição de tensão.

ABSTRACT

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF COMPLIANT MECHANISMS WITH MAXIMUM STRESS CONTROL CONSIDERING GEOMETRICAL AND MATERIAL NONLINEARITIES

Compliant mechanisms, in which the elastic strain is the basis for kinematic actuation are widely used in precision mechanics devices, biomedical engineering, and recently in microelectromechanical systems (MEMS). Among several techniques applied in compliant mechanisms design, topology optimization has been one of the most general and systematic. The great challenge in these designs is to couple both the kinematics and the mechanical strength criteria requirements. In this work, a strength criteria for the optimization problem is applied, with the aim of generating compliant mechanisms that fulfill the desired kinematic tasks while complying with a stress threshold. The addition of a stress constraint to the formulation for compliant mechanisms in topology optimization also aims to alleviate the appearance of hinges in the optimized topology, a well known issue in the design of compliant mechanisms. Geometrical and material (compressible hyperelasticity) nonlinearities are applied to the finite element equilibrium equations, to take into account large displacements. The method of moving asymptotes is applied for design variables updating. The derivatives are calculated analytically, by the adjoint method. Projection filtering techniques are applied, in order to guarantee topologies free of common numerical instabilities in topology optimization, and optimized designs near the 0/1 solution for the physical densities.

Keywords: Compliant mechanisms, topology optimization, material and geometrical nonlinearities, stress constraint.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação e objetivos desta pesquisa	2
1.2	Organização do trabalho	4
2	MECANISMOS FLEXÍVEIS	5
2.1	Vantagens dos mecanismos flexíveis	6
2.2	Análise de mecanismos flexíveis	7
3	ELASTICIDADE FINITA	9
3.1	Equações básicas da mecânica do contínuo	9
3.1.1	Medidas de tensão	11
3.1.2	Princípio da objetividade	14
3.2	Relações constitutivas	16
3.2.1	Hiperelasticidade	16
3.2.2	Modelo de material de Kirchhoff - Saint Venant	17
3.2.3	Modelo de material Neo-Hookeano	18
3.2.4	Comparação entre os modelos	19
3.2.5	Estado plano de tensões	20
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	22
4.1	Elemento quadrilátero bilinear isoparamétrico	22
4.2	Formulação Lagrangiana Total	24
4.3	Equações para a análise incremental	25
4.3.1	Método de Newton-Raphson	29

5	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	32
5.1	Breve histórico da otimização estrutural	32
5.2	Otimização topológica de estruturas	33
5.2.1	Método das assíntotas móveis	36
5.2.2	Otimização topológica em mecanismos flexíveis	39
5.3	Problemas com otimização topológica e não linearidade geométrica	45
6	PROJETO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO	50
6.1	Filtros para o controle de comprimento de escala	52
6.2	Métodos de projeção	54
6.3	Restrição de volume	57
6.4	Restrição de tensão	58
6.4.1	Problema de singularidade de tensão	58
6.4.2	Relação entre tensão e densidade física do elemento	60
6.4.3	Natureza local do problema de tensão	62
6.4.4	Metodologia e etapas do projeto	63
7	CÁLCULO DAS SENSIBILIDADES	66
7.1	Derivada da função objetivo	67
7.2	Derivada do volume	68
7.3	Derivada da tensão	68
8	RESULTADOS E DISCUSSÕES	73
8.1	Inversor de deslocamentos	74
8.1.1	Efeito do parâmetro q	75
8.1.2	Valor constante para $\beta \times$ método da continuação para β	76
8.1.3	Limite para o valor de β	77
8.1.4	Efeito da restrição de tensão	78
8.1.5	Efeito da rigidez externa	83
8.1.6	Comparação com a análise linear	85
8.2	<i>Gripper</i> flexível	86

8.3	Interpretação dos resultados.....	90
9	CONCLUSÕES	95
9.1	Sugestões para trabalhos futuros	96
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	98
	ANEXO I.....	107

LISTA DE FIGURAS

1.1	Topologia de mecanismo apresentando articulações e respectivo campo de tensão equivalente.	3
2.1	Exemplos de mecanismos flexíveis que substituem um mecanismo rígido. (Cortesia do Grupo de Pesquisa em Mecanismos Flexíveis (CMR), Brigham Young University. Site acessado em 05/10/2013).	5
2.2	Mecanismo de flexibilidade concentrada (esquerda), mecanismo de flexibilidade distribuída (centro) e mecanismo de corpo rígido (direita). Adaptado de Sigmund [1997].	6
2.3	Exemplo de um projeto de MEMS com otimização topológica.	8
3.1	Um corpo genérico sujeito a um deslocamento em função de uma força externa aplicada.	9
3.2	Tensão de Cauchy em função do alongamento γ na direção x_1 ($E = 1.0$ e $\nu = 0.3$).	20
4.1	Elemento finito quadrilátero isoparamétrico Q4 e transformação de coordenadas.	23
4.2	Exemplo da aplicação do método de Newton-Raphson em conjunto com uma análise incremental para o carregamento externo.	29
4.3	Trajetória de equilíbrio com ponto limite.	31
5.1	Inversor obtido usando programação física para escolha dos pesos em um problema multi-objetivo. Adaptado de [Lin et al., 2010].	43
5.2	Exemplo de um mecanismo obtido com a formulação apresentada na Equação 5.22. Adaptado de Meneghelli e Cardoso [2013].	45

5.3	Técnica utilizada por Buhl et al. [2000] para obtenção do equilíbrio. Os nós circulos são retirados da análise de convergência. Adaptado de Buhl et al. [2000].	46
6.1	Problema genérico representando condições de contorno para um mecanismo.	50
6.2	Topologia apresentando o padrão de tabuleiro.	52
6.3	Exemplo de aplicação e domínio do filtro de densidades	54
6.4	Efeito da aplicação do filtro de densidades.	54
6.5	Função de projeção aplicada neste trabalho, para diferentes valores de β e $\eta = 0.5$.	56
6.6	Histórico da função restrição de volume, utilizando o filtro de projeção da Equação 6.4.	57
6.7	Função de penalização para a tensão, para alguns valores de q e tensão limite $\sigma = 1$.	59
6.8	Comportamento da tensão com atualizações de β a cada 50 iterações. A linha pontilhada indica o limite de tensão estabelecido.	60
6.9	Fluxograma do processo de otimização.	64
8.1	Problema do inversor de deslocamento flexível.	74
8.2	Função objetivo e escala de cinza para diversas escolhas de q .	75
8.3	Análise usando um valor constante inicial para $\beta = 16$ (a) e com um método de continuação para β (b). Os valores de f estão em $[\mu m]$, e para σ^* em [GPa].	76
8.4	Topologias ótimas para diversos limites de tensão. Os valores para função objetivo (f) estão em μm , e para tensão (σ^*) em GPa.	79
8.5	Campo de tensões para os mecanismos mostrados na Figura 8.4. Cada sub-figura possui uma escala diferente, onde as cores vermelha e azul indicam valores máximos e mínimos, respectivamente.	80
8.6	Função objetivo em relação ao limite de tensão.	81
8.7	Histórico do processo de otimização para o caso da figura 8.4(h).	82

8.8	Topologias para diversos valores de rigidez na porta de saída. Nos exemplos da coluna esquerda, os limites de tensão impostos são $\sigma^* = 1.4$ [GPa] para todos os casos. Nos exemplos da coluna direita a restrição de tensão não está ativa.....	84
8.9	Comparação entre mecanismos obtidos (a) com análise linear e (b) com a análise não linear. O deslocamento está em [μm] e a tensão em [GPa]......	86
8.10	Esquema do problema do <i>gripper</i> flexível.....	86
8.11	Diversas topologias para o caso do <i>gripper</i> flexível. As medidas para tensão e deslocamento estão em GPa e μm , respectivamente.	88
8.12	Tensões para os mecanismos da Figura 8.11. As medidas para tensão e deslocamento estão em GPa e μm , respectivamente. Cada subfigura possui uma escala diferente, onde as cores vermelha e azul indicam valores máximos e mínimos, respectivamente.....	89
8.13	Função objetivo em relação ao limite de tensão.	90
8.14	Processo de interpretação do mecanismo inversor de deslocamento.	93
8.15	Processo de interpretação do <i>gripper</i> flexível.....	94

LISTA DE TABELAS

8.1	Propriedades mecânicas, geométricas e critérios comuns à todos exemplos. . . .	73
8.2	Condições de contorno para o inversor de deslocamento.	75
8.3	Resultados obtidos com e sem a aplicação do método de projeção.	78
8.4	Dados de entrada para o <i>gripper</i> flexível.	87
8.5	Comparação entre os modelos ótimo e interpretado.	92
9.1	Coordenadas e pesos para os pontos de integração do elemento finito.	109

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CONLIN	<i>Convex Linearization Method</i>
EC	Escala de Cinza
EPT	Estado Plano de Tensões
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEMS	<i>MicroElectroMechanical Systems</i>
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
NLG	Não Linearidade Geométrica
NLM	Não Linearidade Material
PM	Programação Matemática
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SLP	<i>Sequential Linear Programming</i>
VG	Vantagem Geométrica
VM	Vantagem Mecânica

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{B}_L, \mathbf{B}_{NL}$	matriz de transformação linear e não linear	
c	variável de controle das atualizações da norma de tensão	
\mathbf{C}	tensor de Cauchy-Green à direita	
\mathbf{d}_i	vetor deslocamento dos nós do i -ésimo elemento	μm
\mathbf{D}	tensor elástico constitutivo do material	N/m^2
E	módulo de Young do material	N/m^2
E_{min}	valor mínimo para o módulo de Young do material na penalização SIMP	N/m^2
E_i	valor do módulo de Young do material penalizado	N/m^2
\mathbf{E}	tensor deformação de Green-Lagrange	
\mathbf{F}	gradiente de deformações	
f	função objetivo	
f_{in}	força externa aplicada na porta de entrada do mecanismo	mN
f_s	função restrição da tensão	
f_v	função restrição do volume	
$\mathbf{f}^b, \mathbf{f}^s$	vetor das forças de corpo e de superfície	mN
I_2	segundo invariante do tensor desviador das tensões	
\mathbf{I}	matriz identidade	
J	determinante do gradiente de deformações	
\mathbf{J}	matriz jacobiana do método dos elementos finitos	
k	expoente de penalização do SIMP	
k_{in}, k_{out}	rigidez da mola externa	$N/\mu m$
\mathbf{K}	matriz de rigidez tangente	$N/\mu m$
$\mathbf{K}_L, \mathbf{K}_{NL}$	matrizes de rigidez linear e não linear	$N/\mu m$

\mathbf{l}	vetor auxiliar de localização dos deslocamentos	
L, U	limites móveis inferior e superior, respectivamente, para o MMA	
\mathbf{n}	vetor normal à superfície deformada	
\mathbf{N}	vetor normal à superfície indeformada	
N_i	funções de interpolação para o elemento finito	
P	expoente da norma de tensão	
\mathbf{P}	primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff	N/m^2
q	expoente para relaxação das tensões equivalentes	
\mathbf{q}	vetor que representa uma translação de corpo rígido	
\mathbf{Q}	matriz que representa uma rotação de corpo rígido	
\mathbf{r}	vetor resíduo	
R	raio do filtro de densidades	μm
$\bar{s}, \underline{s}, s_0$	variáveis que estabelecem a distância entre assíntotas do MMA	
\mathbf{s}	vetor com as componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff	
\mathbf{S}	segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff	N/m^2
\mathbf{t}	tensor tração de Cauchy	N/m^2
\mathbf{u}	vetor de deslocamentos do elemento	μm
u_{out}	deslocamento na porta de saída	μm
\mathbf{U}	vetor de deslocamentos global	μm
v_i	volume do i -ésimo elemento finito	m^2
V	volume total do domínio	m^2
V^*	limite de volume	m^2
\mathbf{V}	matriz auxiliar para tensão	
x_i, X_i	posição de uma partícula na configuração deformada e indeformada	
\bar{x}, \underline{x}	limites superior e inferior para as variáveis de projeto do MMA	
w	peso do filtro de densidades	
W_{in}, W_{out}	energia interna disponível na entrada e na saída do mecanismo	$N \cdot m^2$

Símbolos Gregos

α	parâmetro de controle das atualizações da norma P
β, η	parâmetros da função de projeção

γ	medida adimensional do alongamento	
Γ	contorno do domínio de projeto	
δ_{ij}	delta de Kronecker	
$\delta(\cdot)$	perturbação do método variacional	
$\Delta(x)$	incremento da quantidade x	
ζ, ξ	eixos paramétricos do elemento mestre	
η_{ij}	parcela linear do incremento de deformações	
ϑ_{ij}	parcela não linear do incremento de deformações	
φ	multiplicador do incremento de carga	
κ	módulo de compressão volumétrico	N/m^2
λ	primeira constante de Lamé	N/m^2
$\boldsymbol{\lambda}$	vetor adjunto da função objetivo	
$\boldsymbol{\lambda}_\sigma$	vetor adjunto da restrição de tensão	
μ	segunda constante de Lamé, ou módulo cisalhante	N/m^2
ν	coeficiente de Poisson	
$\boldsymbol{\rho}$	vetor com as variáveis de projeto do problema de otimização topológica	
$\tilde{\boldsymbol{\rho}}$	vetor com as variáveis de projeto modificadas pelo filtro	
$\bar{\boldsymbol{\rho}}$	vetor com as densidades físicas	
$\bar{\sigma}$	limite de resistência do material	N/m^2
σ^*	limite da máxima tensão no problema de otimização	N/m^2
σ_{max}	valor máximo da tensão equivalente entre todos elementos do conjunto \mathbb{N}_σ	N/m^2
σ_{vM}	tensão equivalente de von Mises	N/m^2
σ_{PN}	medida global da tensão no domínio	N/m^2
$\bar{\sigma}_{PN}$	medida normalizada global da tensão no domínio	N/m^2
$\boldsymbol{\sigma}$	vetor com as tensões equivalentes de von Mises relaxadas	N/m^2
$\boldsymbol{\tau}$	tensor tensão de Cauchy	N/m^2
ϕ	tensão cisalhante de escoamento	N/m^2
Ψ	funcional que representa a energia de deformação armazenada no corpo	
Ω	domínio total do projeto	m^2

1. INTRODUÇÃO

Métodos de otimização têm como objetivo encontrar a melhor resposta possível para um dado problema. Estudos sobre redução de custos, eficiência de processos, forma estrutural de componentes, entre outros, têm sido objeto de pesquisa há algumas décadas.

A otimização topológica de meios contínuos constitui um ramo recente da otimização, sendo que os primeiros trabalhos são atribuídos a Bendsøe e Kikuchi, em 1988. Desde então foi amplamente utilizada nos mais diversos setores da tecnologia, como na indústria aeronáutica e automotiva, tendo como objetivo principal a redução de peso de estruturas e melhores projetos no controle de vibrações [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Atualmente, a otimização topológica é empregada em outros setores e com objetivos mais diversos como, por exemplo, aplicações em biomecânica, microcomponentes para computadores, etc.

A área de mecanismos flexíveis tem recebido bastante atenção nos últimos anos, em função da possibilidade de redução de custos em equipamentos de fabricação em massa. As principais aplicações de mecanismos flexíveis estão em equipamentos de precisão para a área médica e em microeletromecanismos (*MicroElectroMechanical Systems* - MEMS, na sigla em inglês), este último sendo aplicado em componentes para computadores e circuitos eletrônicos integrados. MEMS são construídos em tamanhos reduzidos usando métodos avançados de fabricação em microescala, geralmente obtidos a partir de uma lâmina única de material [Howell, 2012]. Devido a essa característica, o projeto não admite facilmente componentes comuns a mecanismos convencionais como dobradiças e pinos.

Uma aplicação recentemente estudada é a utilização de técnicas de otimização topológica, com o intuito de desenvolver projetos livres de dobradiças ou pinos que desempenhem determinada função com a menor quantidade de material empregado possível. Entre as diversas técnicas utilizadas para o projeto de mecanismos flexíveis, a otimização topológica de estruturas tem se mostrado a mais sistemática e geral, uma vez que ela pode ser utilizada para o cálculo do comportamento de estruturas com geometria complexa. Porém, o tratamento de não linearidades geométricas na aplicação do método de otimização topológica ainda ne-

cessita de um maior desenvolvimento [Pedersen et al., 2001]. A consideração de grandes deslocamentos em otimização topológica constitui um desafio a ser superado e são raros os trabalhos que modelam o problema dessa forma. Entretanto, no que concerne o projeto de um mecanismo, seja ele flexível ou de corpo rígido, os requisitos cinemáticos necessários normalmente exigem movimentos maiores que a teoria infinitesimal pode descrever.

Além do problema citado anteriormente, uma das limitações na otimização topológica de mecanismos flexíveis, utilizando o método dos elementos finitos, é o surgimento de elementos conectados por um único nó ou regiões conectadas por elementos com densidade intermediária [Wang, 2009]. Esse problema numérico é interpretado no projeto final como articulações. Porém, como explicado anteriormente, esses componentes não são desejados no projeto de mecanismos fabricados em microescala e devem ser evitados, uma vez que podem tornar a fabricação inviável.

Uma possibilidade para superar esse problema pode ser a adição de um critério de resistência a ser respeitado no processo de otimização. O surgimento de articulações no resultado final constitui uma solução encontrada através do algoritmo para aumentar a eficiência do mecanismo. Esses pontos, normalmente, constituem as regiões com maior concentração de tensão no mecanismo. Dessa forma, um critério que limite os valores de tensão pode ser uma alternativa para evitar o problema.

1.1 Motivação e objetivos desta pesquisa

O objetivo principal deste trabalho é estender a aplicação do método de otimização topológica ao projeto de mecanismos flexíveis, considerando não linearidades geométrica e de material em conjunto com um limite para a máxima tensão. Essa extensão é proposta por dois principais motivos.

Primeiro pela inclusão de um critério de resistência para o mecanismo, uma vez que a própria síntese de um mecanismo flexível prediz a deformação do componente para cumprir atuação cinemática exigida; segundo pelo intuito de permitir que no projeto seja possível prever grandes deslocamentos e rotações. Sem essa consideração, a tarefa para que o mecanismo é projetado fica limitada.

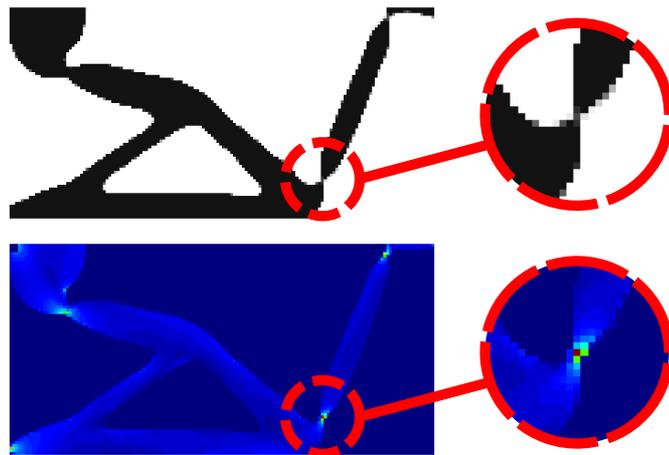


Figura 1.1: Topologia de mecanismo apresentando articulações e respectivo campo de tensão equivalente.

Este tema tem bastante relevância, devido às formulações mais atuais de projeto de mecanismos flexíveis não conseguirem combinar simultaneamente os requisitos cinemáticos com a restrição de resistência da estrutura. É notável, na literatura disponível sobre o assunto, que muito progresso tem sido feito na implementação de melhores formulações baseadas na cinemática do mecanismo flexível, ou que tentam retirar as articulações na topologia otimizada. Porém, os critérios de resistência, que devem ser respeitados ao lado da formulação cinemática, têm sido ignorados.

A Figura 1.1 ilustra a ideia discutida nesse trabalho. O problema da conexão por um único nó na malha de elementos finitos resulta em pontos com tensões bastante superiores a outros pontos do domínio. Portanto, uma formulação que concilia os requisitos cinemáticos e limite o valor máximo de tensão pode gerar uma solução que atenda ambas as características do problema, ou seja, um mecanismo que satisfaça um critério de resistência e que não apresente conexões por articulações, algo impossível de ser fabricado em microescala.

Os poucos trabalhos encontrados são introduzidos na revisão bibliográfica sobre o assunto. Considerando-se, além da restrição de tensão, ainda a não linearidade geométrica e de material não se encontrou nenhuma discussão sobre o assunto na comunidade científica.

Desta forma a motivação do trabalho é estender o estudo de uma formulação de otimização topológica com restrição de tensão para mecanismos flexíveis, sem a limitação em pequenos deslocamentos; com o objetivo de gerar mecanismos livres de articulações, e

que respeitem critérios de resistência do material.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho é organizado de maneira que os objetos de estudo sejam explicados separadamente, cada um com a sua respectiva revisão bibliográfica.

O capítulo 2 apresenta os mecanismos flexíveis de forma sucinta, suas áreas de estudo e características, dando ênfase aos mecanismos com flexibilidade distribuída, por se tratar do tópico de interesse nesta pesquisa.

O capítulo 3 expõe as equações básicas da mecânica dos sólidos, os componentes e medidas necessários para representar o equilíbrio são definidos neste capítulo.

O capítulo 4 apresenta o método empregado para a solução das equações diferenciais que surgem da análise de equilíbrio não linear da estrutura, bem como o modelo de material empregado.

O capítulo 5 apresenta uma breve descrição da otimização estrutural, com especial atenção à otimização topológica de estruturas. O método de otimização topológica é explicado em maiores detalhes, com destaque para dificuldades inerentes ao método e questões que podem surgir especialmente quando aplicado a problemas como os que serão resolvidos. Também neste capítulo é apresentado o método escolhido para resolver o problema de otimização.

No capítulo 6 a formulação proposta é apresentada. Todas as condições para resolver o problema estão explicadas nesta seção. A metodologia empregada na pesquisa para obtenção dos resultados também é explicada.

O capítulo 7 apresenta o desenvolvimento da análise de sensibilidade, necessárias para a solução do problema de otimização baseado em gradientes. Neste capítulo apresenta-se todo o desenvolvimento das derivadas das equações diferenciais necessárias para a resolução do problema.

O capítulo 8 apresenta e discute os resultados.

No capítulo 9 são apresentadas as conclusões do trabalho, e sugestões para trabalhos futuros baseadas na experiência adquirida nesta pesquisa.

2. MECANISMOS FLEXÍVEIS

Mecanismos flexíveis usam a deformação elástica de seus componentes para cumprir a tarefa cinemática desejada. Mecanismos formados por componentes rígidos necessitam de juntas para acoplar as partes e, portanto, estão sujeitos a uma série de problemas inerentes a esta característica construtiva.

Um exemplo de mecanismos flexíveis com equivalentes em mecanismos rígidos é mostrado na Figura 2.1.



Figura 2.1: Exemplos de mecanismos flexíveis que substituem um mecanismo rígido. (Cortesia do Grupo de Pesquisa em Mecanismos Flexíveis (CMR), Brigham Young University. Site acessado em 05/10/2013).

Entre os tipos clássicos de mecanismos flexíveis, pode-se citar os mecanismos com flexibilidade localizada e os mecanismos com flexibilidade distribuída. Os primeiros concentram a flexibilidade em alguns pontos da estrutura enquanto o resto do componente realiza movimentos de corpo rígido. O segundo armazena energia em todo o corpo através de sua deformação e a utiliza para realizar determinada tarefa. A Figura 2.2 apresenta esses dois tipos de mecanismos flexíveis, ao lado da representação de um mecanismo tradicional de corpo de rígido.

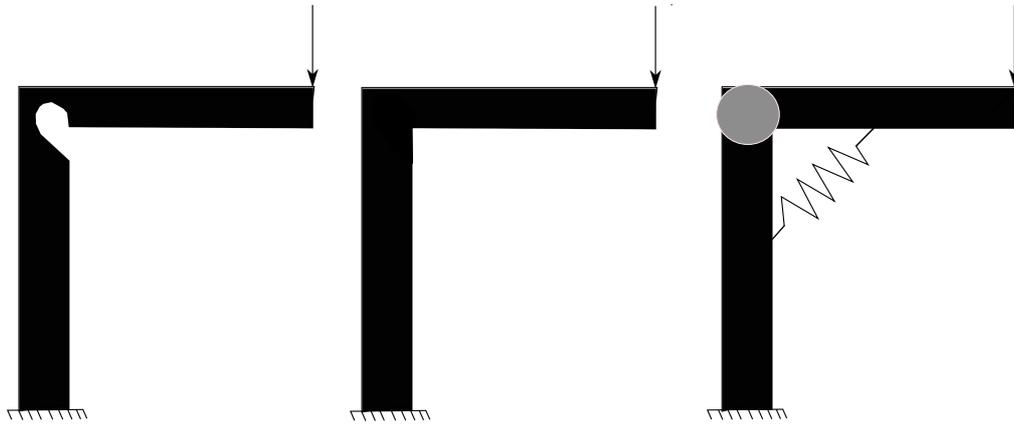


Figura 2.2: Mecanismo de flexibilidade concentrada (esquerda), mecanismo de flexibilidade distribuída (centro) e mecanismo de corpo rígido (direita). Adaptado de Sigmund [1997].

2.1 Vantagens dos mecanismos flexíveis

Apesar de alguns mecanismos flexíveis parecerem de difícil manufatura se comparados aos seus equivalentes de corpo rígido, os mesmos têm uma série de vantagens em suas aplicações. Além disso, as técnicas de gravura, fabricação de materiais injetados e nanotecnologia têm evoluído nas últimas décadas. Entre as principais vantagens de se aplicar mecanismos flexíveis, pode-se citar [Howell, 2012]:

- podem ser fabricados a partir de uma única peça de material, tornando-os compatíveis com os métodos mais comuns de fabricação (MEMS);
- são compactos pela própria característica construtiva, o que possibilita a construção em escalas pequenas;
- estão livres de problemas inerentes a mecanismos de corpo rígido como fricção, desgaste e necessidade de lubrificação, pois conexões como pinos e juntas articuladas são eliminadas .
- alta precisão, em função da ausência de componentes que sofrem fricção e desgaste, com isso o surgimento de folgas é diminuído consideravelmente, aumentando a confiabilidade na repetibilidade de movimentos, o que é essencial para a fabricação de instrumentos de alta precisão;
- múltiplas funções integradas, pois como mecanismos flexíveis usam a própria deformação para armazenar energia, a mesma pode ser usada para fazer o componente retornar

a sua posição original. Com isso, além da função exercida pelo movimento inicial, esses mecanismos podem cumprir outras tarefas ao liberar a energia interna armazenada na primeira atuação.

Estas são apenas algumas das vantagens dos mecanismos flexíveis em detrimento de mecanismos tradicionais, montados a partir de diversos componentes rígidos.

Entre as desvantagens na aplicação de mecanismos flexíveis está, principalmente, a maior susceptibilidade à fadiga do componente. É importante citar que neste trabalho esse problema não é abordado.

2.2 Análise de mecanismos flexíveis

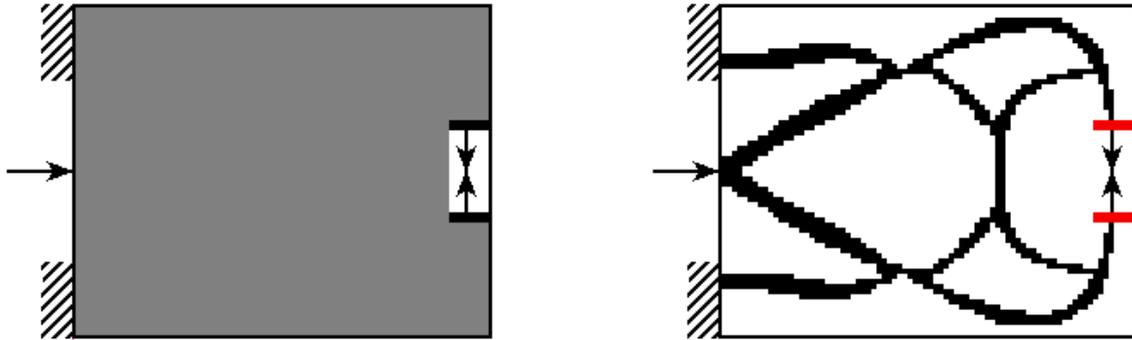
Mecanismos flexíveis, por toda sua importância e crescente utilidade, têm despertado o interesse não só da área acadêmica como da indústria. O número de pesquisas neste tópico é grande e novas áreas de estudo continuam surgindo. Entre as classes mais importantes de mecanismos flexíveis estudadas estão os MEMS [Kota et al., 2001], equipamentos cirúrgicos [Kota et al., 2005], mecanismos metamorfos [Lu e Kota, 2003], mecanismos bi-estáveis, juntas flexíveis [Trease et al., 2005], etc. A área de pesquisa em deflexões não lineares e dinâmica de mecanismos flexíveis são dois dos principais tópicos em estudo atualmente.

Para o projeto de mecanismos flexíveis utilizando otimização topológica, os únicos dados necessários são o domínio de projeto e a atuação desejada do mecanismo. Dessa forma, todas as configurações possíveis de distribuição de material dentro do domínio são consideradas. Consequentemente, é necessário pouco conhecimento por parte do projetista sobre o mecanismo resultante. Essa é uma vantagem dessa abordagem pois elimina qualquer predisposição do projetista [Frecker et al., 1997].

A Figura 2.3 mostra um exemplo de problema de um MEMS sendo projetado utilizando otimização topológica. O problema inicial é modelado definindo apenas o domínio e as condições de contorno.

As vantagens citadas anteriormente tornam a utilização de mecanismos flexíveis extremamente atrativos para uma série de projetos. Porém, existem muitos desafios a serem superados nessa área de pesquisa, como a dificuldade em analisar e projetar esses componentes. É necessário conhecimento da síntese de mecanismos e flexibilidade de estruturas. Quando são combinadas duas áreas de conhecimento, não se deve apenas conhecê-las indi-

vidualmente, mas também os efeitos da interação entre elas [Howell, 2012].



(a) Domínio de projeto e condições de contorno

(b) Topologia otimizada

Figura 2.3: Exemplo de um projeto de MEMS com otimização topológica.

Sendo assim, para um projeto mais completo algum critério de resistência precisa ser levado em consideração. Além disso, caso não linearidades geométricas sejam desconsideradas no projeto, as tarefas as quais o mecanismo se propõe ficam limitadas.

3. ELASTICIDADE FINITA

Neste capítulo é discutida como a posição de cada partícula do corpo pode ser descrita em um dado instante de tempo. Apenas os conceitos básicos de deformação e tensão são apresentados, de maneira a facilitar a leitura dos próximos capítulos. Todas as considerações são feitas em relação a uma análise dentro da mecânica do contínuo, ou seja, mesmo quando uma região infinitesimal é especificada o material nessa região está distribuído por sua área ou volume.

3.1 Equações básicas da mecânica do contínuo

Na mecânica dos sólidos, a maior parte dos efeitos são de natureza não linear. Entretanto, em alguns casos uma análise linear, dentro da teoria linear infinitesimal, é suficiente para prever o comportamento da estrutura, pois essa não deve sofrer grandes deslocamentos ou deformações para manter sua integridade estrutural. Porém, mesmo sob essa afirmação, existem muitos problemas em mecânica dos sólidos que necessitam considerar grandes deslocamentos e/ou rotações para descrever corretamente o fenômeno a que estão sujeitos. Esse é o caso de problemas em análise de cascas e placas, vigas, entre outros [Wriggers, 2008].

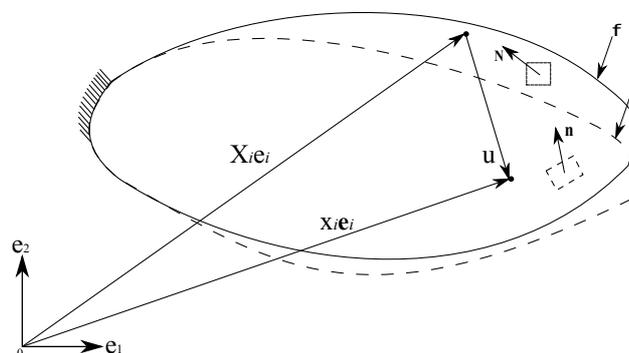


Figura 3.1: Um corpo genérico sujeito a um deslocamento em função de uma força externa aplicada.

O mesmo ocorre para mecanismos de uma maneira geral, sejam eles flexíveis ou de corpo rígido, sendo os primeiros o escopo deste trabalho. Nesse caso, apesar de não ser interessante a consideração de grandes deformações, pois é necessário que o mesmo retorne à sua posição original quando cessada a força externa aplicada, a inclusão de grandes deslocamentos e rotações é fundamental para a síntese de mecanismos. Caso contrário, o projeto final pode não ter aplicação prática, em função da limitada atuação cinemática.

A Figura 3.1 descreve o movimento de um corpo genérico. Sendo assim, é possível determinar um campo de deslocamentos u_i que descreve a posição instantânea de uma partícula X_i [Atkins e Fox, 2005],

$$u_i = x_i - X_i, \quad (3.1)$$

essa equação pode ser reescrita como

$$x_i = u_i + X_i, \quad (3.2)$$

onde x_i é a posição da partícula na posição deformada e X_i é a posição da mesma partícula na posição indeformada.

Derivando a Equação 3.2 em relação à sua posição inicial X_i , é possível determinar o tensor gradiente de deformações

$$\mathbf{F} = F_{ij} = \nabla u + \delta_{ij} = u_{i,j} + \delta_{ij}, \quad (3.3)$$

onde δ é o delta de Kronecker, ∇ representa o operador gradiente, aplicado no campo de deslocamento, e $u_{i,j} = \partial u_i / \partial X_j$.

Uma importante característica do gradiente de deformações é o significado do seu determinante

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dv}{dV}, \quad (3.4)$$

onde J é conhecido como o jacobiano do gradiente de deformações e a condição imposta de que $J > 0$ indica que o volume é sempre positivo e que \mathbf{F}^{-1} sempre existe [Atkins e Fox, 2005]. Na Equação acima dv e dV representam uma fração de volume do corpo deformado e indeformado, respectivamente. A transformação entre áreas das superfícies indicadas na

Figura 3.1 pode ser realizada através da fórmula de Nanson, que relaciona um vetor normal na superfície deformada e indeformada [Marsden e Hughes, 1983]

$$\mathbf{n} da = J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N} dA, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{n} é um vetor normal à superfície da configuração deformada e \mathbf{N} é um vetor normal à superfície indeformada.

Uma vez definido o gradiente de deformações, o tensor de Cauchy-Green à direita é escrito como

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = F_{ji}F_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j} + \delta_{ij}, \quad (3.6)$$

onde, para um movimento de corpo rígido $C_{ij} = \delta_{ij}$. Através dessa observação, também é facilmente entendido que a medida $C_{ij} - \delta_{ij}$ quantifica uma mudança de forma/volume no corpo. Essa é uma importante métrica dentro da teoria da elasticidade, e dá origem ao conhecido tensor de deformações de Green-Lagrange

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j}), \quad (3.7)$$

onde, sendo as deformações sendo muito pequenas, o último termo da Equação 3.7 é desprezado, originando o tensor de deformações infinitesimais [Wriggers, 2008].

3.1.1 Medidas de tensão

Na mecânica linear infinitesimal, as configurações deformada e indeformada se confundem, e a discussão sobre qual referencial determinada quantidade é medida perde sua importância. Entretanto, para a teoria da elasticidade finita, onde grandes deslocamentos e deformações ocorrem, é necessário que se estabeleça corretamente em que referencial determinada grandeza é medida.

As equações de equilíbrio do corpo, por exemplo, são apresentadas na configuração deformada do corpo ou configuração atual. Uma vez que o corpo rotaciona e se deforma sob um carregamento externo, é essa configuração que está em equilíbrio e não a original. Essa ideia torna o tensor de Cauchy a principal medida de tensão dentro da teoria da elasticidade, visto que está definido na configuração deformada do corpo.

Definido-se um vetor tração como

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A_d \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A_d}, \quad (3.8)$$

onde ΔF é uma força agindo sobre um elemento de área ΔA_d , definido na configuração deformada.

Segundo a lei de Cauchy, existe um tensor tração que relaciona um vetor normal à superfície e o vetor tração dessa superfície

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \quad (3.9)$$

onde \mathbf{n} é uma normal à superfície onde A_d está definida, e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor tensão de Cauchy, conhecido também como tensão verdadeira [Boresi, 1965].

No entanto, muitas vezes é importante que se tenha conhecimento dessas medidas na configuração original, indeformada do corpo. A aplicação da fórmula de Nanson (eq. 3.5) à definição do tensor tensão de Cauchy dá origem a outro tensor, definido na configuração indeformada do corpo [Wriggers, 2008]

$$\int_{\Omega_d} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} da = \int_{\Omega_d} \boldsymbol{\tau} J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = \int_{\Omega_d} \mathbf{P} dA, \quad (3.10)$$

onde \mathbf{P} é conhecido como primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff. Esse tensor pode ser escrito em termos do tensor tensão de Cauchy como

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.11)$$

Através da Equação 3.11 é possível perceber que o tensor \mathbf{P} é definido por apenas uma rotação, ou seja, uma das bases refere-se à configuração indeformada e a outra à configuração deformada. Essa característica torna o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff não simétrico.

Para trabalhar com uma medida de tensão simétrica na configuração indeformada, o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff é introduzido

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.12)$$

Embora o tensor \mathbf{S} represente uma transformação total do tensor de Cauchy para

a configuração desejada, essa definição é puramente matemática e não apresenta significado físico [Belytschko et al., 2014]. Porém, o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff desempenha um papel fundamental na teoria constitutiva por ser o conjugado energético do tensor deformação de Green-Lagrange (eq. 3.7) [Wriggers, 2008].

Uma vez definido o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, pode-se chegar à relação inversa, ou seja, obter o tensor de Cauchy através do segundo tensor de Piola-Kirchhoff

$$\boldsymbol{\tau} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (3.13)$$

Essa relação é usada para recuperar o tensor de Cauchy quando uma análise não linear é empregada. Como será visto na seção seguinte, o segundo tensor de Piola Kirchhoff surge naturalmente da diferenciação do funcional de energia de deformação em relação ao tensor de Green-Lagrange.

Uma vez obtido o tensor de Cauchy, é interessante fazer mais uma transformação, de maneira que se trabalhe com um valor equivalente para a tensão, que represente os componentes de $\boldsymbol{\tau}$ em apenas um escalar. Além disso, é necessário ter um critério para o início do escoamento do material, de maneira a determinar se o material continua dentro do seu limite elástico.

O critério de resistência de von Mises (ou teoria da máxima energia de distorção) [Popov, 1978], estabelece que o escoamento de um material inicia quando o segundo invariante do tensor desviador * ultrapassa um valor crítico.

O segundo invariante do tensor desviador é dado por

$$I_2 = \frac{1}{6} [(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2] + (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2). \quad (3.14)$$

Esse valor crítico é interpretado como o quadrado da tensão de escoamento do material em um estado de cisalhamento puro, ou seja,

$$I_2 = \phi^2, \quad (3.15)$$

*Um tensor, que representa um estado de tensão genérico, pode ser dividido em dois tensores componentes aditivos. Um primeiro, que estabelece mudanças de volume do corpo (tensor hidrostático), e um segundo, que estabelece mudanças de forma do corpo (tensor desviador).

onde ϕ é a tensão cisalhante de escoamento.

O começo do escoamento, em um estado de cisalhamento puro, é $\sqrt{3}$ vezes menor que o começo do escoamento em um ensaio de tração simples

$$\phi = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}, \quad (3.16)$$

onde $\bar{\sigma}$ é a resistência ao escoamento do material. E, combinando as Equações 3.15 e 3.16, obtêm-se

$$\sigma_{vM} = \bar{\sigma} = \sqrt{3I_2}, \quad (3.17)$$

e, usando a definição da Equação 3.14

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)]}, \quad (3.18)$$

onde agora tem-se um escalar que representa o estado triaxial de tensão do corpo.

Considerando-se um estado plano de tensão, esse cálculo é reduzido para

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\tau_{11}^2 - \tau_{11}\tau_{22} + \tau_{22}^2 + 3\tau_{12}^2}. \quad (3.19)$$

3.1.2 Princípio da objetividade

O princípio da objetividade estabelece que uma lei de material deve ser objetiva quando está sob movimentos de corpo rígido em um sólido.

Como movimentos de corpo rígido (rotações e translações) não afetam o campo de deformações, esses não podem interferir no estado de forças internas do corpo.

Para identificá-la, um movimento de corpo rígido é aplicado da seguinte forma [Pimenta, 2006]

$$\mathbf{u}'(u, t) = \mathbf{u}(u_0, t) + \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t) (\mathbf{u}(u, t) - \mathbf{u}(u_0, t)), \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ correspondem a uma rotação e uma translação, respectivamente.

Usando a Equação 3.20 para definir novamente o gradiente de deformações (eq. 3.3),

após a derivação do novo gradiente obtêm-se

$$\mathbf{F}' = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (3.21)$$

Baseado nesse novo gradiente de deformações, o tensor de deformações de Green-Lagrange é escrito como

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{2} (\mathbf{F}'^T \mathbf{F}' - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}, \quad (3.22)$$

ou seja, o tensor de Green-Lagrange não é afetado por movimentos de corpo rígido.

Para definição das tensões, recorre-se ao vetor tração de Cauchy

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}, \quad (3.23)$$

de maneira que um movimento de corpo rígido é descrito como [Pimenta, 2006]

$$\mathbf{Q}\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}' \mathbf{Q}\mathbf{n} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}' \mathbf{Q}\mathbf{n} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T, \quad (3.24)$$

o que prova que o tensor tensão de Cauchy é afetado por movimentos de corpo rígido.

O primeiro Piola-Kirchhoff é escrito como

$$\mathbf{P}' \mathbf{F}'^T = J' \boldsymbol{\tau}', \quad (3.25)$$

onde

$$J' = \det(\mathbf{F}') = \det(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) = J. \quad (3.26)$$

Após algumas manipulações algébricas, o primeiro Piola-Kirchhoff é escrito como

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}. \quad (3.27)$$

Por fim, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff é descrito após um movimento de corpo rígido como

$$\mathbf{S}' = (\mathbf{F}'^{-1}) \mathbf{P}' = (\mathbf{Q}\mathbf{F}^{-1}) \mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{S}, \quad (3.28)$$

ou seja, o tensor \mathbf{S} é uma medida objetiva e invariante de tensão. Com isso, prova-se que o

par conjugado $\mathbf{S} - \mathbf{E}$ forma uma medida objetiva, invariante a movimentos de corpo rígido.

3.2 Relações constitutivas

Com as definições estabelecidas acima, ainda não é possível modelar completamente um problema físico real dentro da mecânica do meio contínuo. É necessário que se estabeleça uma relação que mapeie o comportamento do campo de deslocamentos do corpo em decorrência da aplicação, por exemplo, de um carregamento externo. Essa ideia introduz o conceito de relação constitutiva para o material.

De acordo com Marsden e Hughes [1983], a relação constitutiva exerce dois papéis fundamentais em um problema na mecânica do contínuo. Primeiro, funcionais diferentes distinguem diferentes classes de materiais (materiais elásticos, fluidos, materiais com memória, etc.), e formas específicas de funcionais determinam materiais específicos. Segundo, as relações constitutivas geram equações adicionais para a determinação do equilíbrio, tornando o problema formalmente bem posto, ou seja, agora existem tantas equações quanto incógnitas.

3.2.1 Hiperelasticidade

Materiais elásticos nos quais o trabalho é independente do histórico do carregamento e dependem somente da deformação são conhecidos como materiais hiperelásticos. Esses materiais são caracterizados pela existência de uma função de energia armazenada que é um potencial para a tensão [Marsden e Hughes, 1983]

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}, \quad (3.29)$$

onde Ψ é um potencial que representa a energia armazenada e \mathbf{E} é o tensor deformação de Green-Lagrange, o resultado da derivada do potencial baseado na energia de deformação do material em relação ao tensor deformação de Green-Lagrange é o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, seu conjugado energético.

Uma vez obtido o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, a relação estabelecida na Equação 3.12 é usada para obter o tensor de Cauchy.

A relação constitutiva tangente é obtida através da derivada do segundo Piola-Kirchhoff em relação ao tensor deformação de Green-Lagrange, de maneira que um tensor

que mapeie a relação entre deformação e tensão seja obtido

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}, \quad (3.30)$$

sendo esse tensor de quarta ordem conhecido como tensor elástico constitutivo.

Neste trabalho, a relação constitutiva tangente é necessária em função do método iterativo aplicado (seção 4.3.1), uma vez que o mesmo é implementado linearizando a rigidez para cada incremento de carregamento.

3.2.2 Modelo de material de Kirchhoff - Saint Venant

O modelo de material clássico, que representa a lei material linear de Hooke, é conhecido como modelo de Kirchhoff - Saint Venant e é escrito como [Wriggers, 2008]

$$\Psi_{\text{K-SV}} = \frac{1}{2} \lambda (E_{kk})^2 + \mu E_{ij} E_{ij}, \quad (3.31)$$

onde notação indicial é aplicada para melhor entendimento, λ e μ são a primeira e segunda constantes de Lamé, respectivamente. Estas constantes estão diretamente relacionadas à mudanças de volume do sólido, no caso de λ e à deformações, ou seja, mudanças de forma do sólido no caso de μ .

Escreve-se o módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν através dessas constantes

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.32)$$

Esse modelo é usualmente utilizado em otimização topológica com análise linear, quando a relação entre tensão e deformação é considerada constante.

A tensão correspondente ao material de Kirchhoff - Saint Venant é escrito usando a Equação 3.29

$$S_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}. \quad (3.33)$$

O tensor elástico para o material é definido na Equação 3.30, e para o modelo

apresentado, é dado por

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) , \quad (3.34)$$

onde fica evidente a independência com o estado de deformações. Essa é uma das relações mais simples entre tensão e deformação na elasticidade.

Embora seja suficiente, em muitos casos, utilizar esse modelo para a análise, para problemas em otimização topológica considerando não linearidades essa simplificação pode resultar em problemas na modelagem numérica.

3.2.3 Modelo de material Neo-Hookeano

Ao considerar não linearidade geométrica ao problema de otimização topológica, especial atenção deve ser dada às regiões que representam vazios (ou *voids*). Como a densidade relacionada à essas regiões é baixa, esses elementos estão sujeitos a deformações excessivas.

A baixa rigidez imposta aos elementos pelo modelo de Kirchhoff - Saint Venant pode fazer com que elementos nas regiões de vazios tenham sua área tendendo a zero, ou até mesmo apresentar elementos em que o jacobiano seja menor que zero. Esse problema faz com que a formulação apresente erros de condicionamento numérico. Uma solução viável é a aplicação de modelos que imponham uma maior rigidez aos elementos da malha.

O modelo de material Neo-Hookeano[†] é uma extensão da lei isotrópica linear (Lei de Hooke) para grandes deformações [Wriggers, 2008]. Neste trabalho é aplicada uma função energia de deformação para um material hiperelástico compressível Neo-Hookeano [Klarbring e Strömberg, 2013]

$$\Psi_{\text{NH}} = \frac{1}{2} \lambda (\ln J)^2 + \frac{\mu}{2} (C_{ii} - 3) - \mu \ln J , \quad (3.35)$$

onde J é o jacobiano do gradiente de deformações (eq. 3.4) e \mathbf{C} é o tensor de Cauchy-Green à direita.

O segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff pode ser obtido da mesma maneira que o anterior

$$S_{ij} = \lambda \ln (J) C_{ij}^{-1} + \mu (\delta_{ij} - C_{ij}^{-1}) , \quad (3.36)$$

[†]O termo Neo-Hookeano é sugerido por Rivlin [1948].

onde foi usada a seguinte relação para a derivada acima [Wriggers, 2008]

$$\frac{\partial J}{\partial E_{ij}} = J C_{ij}^{-1}. \quad (3.37)$$

O tensor constitutivo tangente do material não é mais constante, como no caso da lei de material de Kirchhoff - Saint Venant, possuindo agora dependência com o logaritmo do jacobiano e o tensor de Cauchy-Green à direita

$$D_{ijkl} = \lambda C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} - \lambda \ln(J) A_{ijkl} + \mu A_{ijkl}, \quad (3.38)$$

onde

$$A_{ijkl} = -\frac{\partial C_{ij}^{-1}}{\partial E_{kl}} = (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{jk}^{-1}), \quad (3.39)$$

foi utilizado para simplificar os cálculos.

A escolha de uma função energia de deformação diferente do modelo de material linear de Kirchhoff - St.Venant se deve ao seu comportamento quando sujeito a grandes deformações na compressão e tração.

3.2.4 Comparação entre os modelos

A Figura 3.2 demonstra o comportamento dos dois funcionais em um ensaio uniaxial, onde $x_1 = \gamma X_1$, $x_2 = X_2$ e $x_3 = X_3$ para um alongamento $\gamma \geq 0$. É possível observar que para $\gamma = 1$, ambos modelos apresentam a mesma rigidez ($k = \partial\tau/\partial\gamma$).

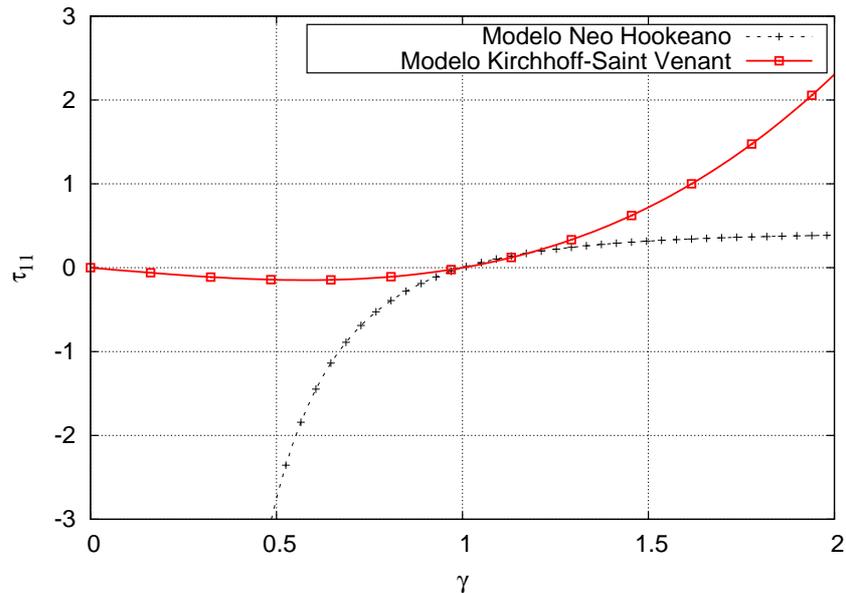


Figura 3.2: Tensão de Cauchy em função do alongamento γ na direção x_1 ($E = 1.0$ e $\nu = 0.3$).

O modelo de material de K - StV apresenta o comportamento de $\tau \rightarrow 0$ quando $\gamma \rightarrow 0$, além de tender a infinito rapidamente quando sujeito a tração. No modelo Neo-Hookeano, implementado neste trabalho, $\tau \rightarrow -\infty$ quando $\gamma \rightarrow 0$ e tendendo a infinito mais suavemente quando em tração.

Segundo Klarbring e Strömberg [2013], em problemas de otimização topológica, o desempenho numérico do modelo de K - StV é sempre pior para modelar a tensão do que qualquer modelo que inclua um comportamento físico mais apropriado para a compressão. Isso se deve, principalmente, à modelagem das regiões de baixa densidade que surgem na otimização topológica.

3.2.5 Estado plano de tensões

Uma vez que a tensão e a deformação são tensores de segunda ordem, um tensor que os relacione será um tensor de quarta ordem, e este é o caso do tensor \mathbf{D} . Para um problema tridimensional, o tensor \mathbf{D} possui 81 incógnitas (3^4), ou seja, seriam necessárias 81 componentes para que fosse possível descrever uma relação entre tensão e deformação para um material linear elástico genérico. Porém, a partir de algumas considerações é possível reduzir o número de componentes independentes. O fato de os tensores de tensão e

deformação serem simétricos levam a duas simplificações

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \rightarrow D_{ijkl} = D_{jikl}, \quad (3.40)$$

$$E_{kl} = E_{lk} \rightarrow D_{ijkl} = D_{ijlk}. \quad (3.41)$$

Derivando a energia de deformação específica, a sua forma quadrática sugere mais uma simetria no tensor constitutivo, dado por

$$D_{ijkl} = D_{lkji}. \quad (3.42)$$

Com isso as 81 componentes se tornam 21.

Além disso, considerando-se um material isotrópico, o tensor pode ser reduzido para

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{1111} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{2323} & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & D_{2323} & 0 \\ & & & & & D_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as hipóteses da elasticidade plana (estado de tensões e deformações planos) pode-se realizar mais uma simplificação para esse tensor. Para o caso do estado plano de tensões (EPT), define-se como sendo nulos alguns componentes do tensor tensão que agem na direção perpendicular ao plano desconsiderado

$$\tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{33} = 0. \quad (3.43)$$

Então, o tensor é reescrito como

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111}^* & D_{1122}^* & 0 \\ & D_{1111}^* & 0 \\ \text{sim.} & & D_{2323}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix},$$

o que reduz as 81 constantes elásticas para apenas 2, uma vez que a componente D_{2323}^* pode ser escrito como função das outras duas.

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dentre os diversos métodos aplicados para a solução das equações diferenciais que surgem da determinação do equilíbrio linear ou não linear do meio contínuo, o método dos elementos finitos (MEF) é o mais conhecido e aplicado. O MEF ganhou notoriedade juntamente com o advento da computação. Baseado no método de Rayleigh-Ritz, o MEF prevê a divisão do domínio de integração em subdivisões, os elementos finitos. Assim, ao invés de buscar uma função que atenda todo o domínio de integração, são buscadas soluções que atendam cada elemento finito de forma individual. Existe uma vasta bibliografia citando o MEF, as considerações necessárias para discretizar o problema contínuo, as formulações forte e fraca, o princípio variacional, etc.

Uma descrição mais detalhada do método não é o escopo deste trabalho, que pode ser encontrado nos diversos textos sobre o assunto. Para uma completa descrição do MEF é sugerida a leitura de livros como Belytschko et al. [2014]; Bathe [2010]; Wriggers [2008]; Hughes [2000]; Zienkiewicz e Taylor [2000], entre outros.

4.1 Elemento quadrilátero bilinear isoparamétrico

O elemento mais utilizado em problemas com não linearidade geométrica em otimização topológica é o elemento quadrilátero bilinear isoparamétrico Q4. Apesar do elemento possuir um baixo grau de interpolação, esse é o elemento utilizado na maioria dos trabalhos citados nesta pesquisa.

O elemento Q4 é composto por quatro nós, localizados nos vértices do elemento, e define um campo retangular de interpolação linear, ou seja, todos os valores intermediários aos atribuídos aos nós têm sua posição definida dentro do elemento através de funções interpoladoras de primeiro grau. Os valores atribuídos a esses nós servem para definir deslocamentos e geometria, por exemplo. Uma vez que o elemento é do tipo isoparamétrico, as mesmas funções de interpolação são usadas para todos os casos.

As funções de interpolação do elemento são definidas como [Bathe, 2010]

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \zeta) &= 0,25(1 - \xi)(1 - \zeta) \\
 N_2(\xi, \zeta) &= 0,25(1 + \xi)(1 - \zeta) \\
 N_3(\xi, \zeta) &= 0,25(1 + \xi)(1 + \zeta) \\
 N_4(\xi, \zeta) &= 0,25(1 - \xi)(1 + \zeta)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

A Figura 4.1 apresenta o elemento Q4, e seus pontos de integração, representados no eixo paramétrico e cartesiano.

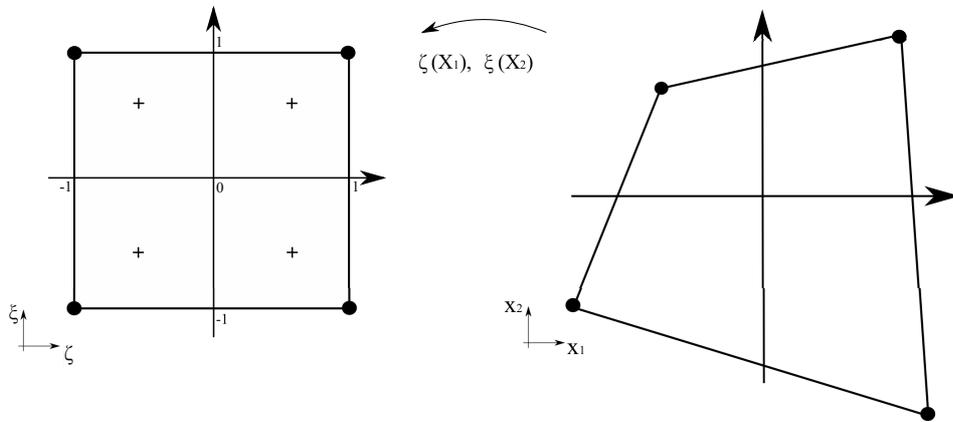


Figura 4.1: Elemento finito quadrilátero isoparamétrico Q4 e transformação de coordenadas.

Através das funções de interpolação, apresentadas na Equação 4.1, é possível obter o campo de deslocamentos

$$u_i = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \zeta) d_i, \tag{4.2}$$

onde n é o número de nós e d_i representa o campo de deslocamentos calculado nos nós do elemento finito.

Como visto na seção 3.1, o gradiente de deformações é calculado através da informação das derivadas dos deslocamentos.

Essa derivada é obtida através de

$$u_{i,j} = \sum_{i=1}^n N_{i,j}(\xi, \zeta) d_i, \tag{4.3}$$

onde

$$N_{i,j} = \frac{\partial N_i}{\partial X_j}, \quad (4.4)$$

é a derivada das funções de interpolação em relação aos eixos cartesianos.

Para um problema bidimensional, essa derivada é obtida fazendo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial \zeta} & -\frac{\partial X_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial X_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial X_1}{\partial \xi} \end{bmatrix},$$

é a matriz Jacobiana [Wriggers, 2008]. Essa matriz carrega as informações do mapeamento entre os sistemas de coordenada paramétrico e cartesiano.

O cálculo das integrais envolvidas na solução do problema de elementos finitos é feito através de integração Gaussiana. No elemento Q4 com 4 pontos de integração, os pesos e pontos de integração dentro do elemento são dados pelos valores apresentados na Tabela 9.1, no Anexo I. A única medida que não é avaliada nos pontos de integração é a tensão de Cauchy, avaliada no centroide do elemento finito ($\xi = \zeta = 0$).

4.2 Formulação Lagrangiana Total

Na formulação de elementos finitos para elasticidade linear infinitesimal, assume-se que os deslocamentos na malha do MEF são infinitesimais, ou seja, as configurações deformada e indeformada se confundem.

Uma vez que a análise não linear é empregada, torna-se necessário se escolher a formulação que descreve o movimento das partículas do corpo. Existem diversas maneiras de descrever a cinemática do corpo, e acompanhar o movimento dessas partículas. Entre as formulações mais conhecidas estão o Lagrangiano Total e o Lagrangiano Atualizado. Enquanto o primeiro observa o movimento a partir da configuração indeformada do corpo, o segundo descreve o movimento a partir de um sistema de coordenadas posicionado na configuração deformada.

A escolha por uma formulação ou outra depende exclusivamente do problema que se deseja modelar e da efetividade das relações constitutivas empregadas. Os resultados para ambas as abordagens devem ser os mesmos.

Neste trabalho, uma formulação baseada na descrição Lagrangiana Total do movimento é implementada. Todas as integrais e matrizes para o problema de elementos finitos são avaliadas na configuração indeformada do corpo. Essa formulação geralmente é escolhida para a análise de sólidos e estruturas por representar uma aproximação mais natural e efetiva do que a formulação Euleriana [Belytschko et al., 2014].

Usando a formulação do Lagrangiano Total para descrever o movimento do corpo em uma análise estática, escreve-se a seguinte equação, utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais,

$$\int_{^0V} \mathbf{S} \delta \mathbf{E} d^0V = \int_{^0V} \mathbf{f}^b \delta \mathbf{u} d^0V + \int_{^0S} \mathbf{f}^s \delta \mathbf{u}^s d^0S, \quad (4.5)$$

onde \mathbf{f}^b e \mathbf{f}^s são as forças de corpo e de superfície, respectivamente. No tensor \mathbf{S} estão contidas as componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff como na Equação 3.36, $\delta \mathbf{E}$ são as componentes do tensor deformação de Green-Lagrange, que correspondem ao deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{u}^s$ são os deslocamentos virtuais em relação à superfície 0S e 0V é o volume do corpo na configuração indeformada.

A Equação 4.5 em conjunto com as definições para \mathbf{S} e \mathbf{E} formam as equações básicas para a solução do problema estrutural em uma análise não linear, usando a formulação Lagrangiana Total.

Entretanto, devido o alto grau de não linearidade nessas relações, o mais indicado é realizar a linearização da equação 4.5 e, gradualmente, reduzir essa aproximação de maneira iterativa [Wriggers, 2008].

4.3 Equações para a análise incremental

Na análise incremental, busca-se o equilíbrio da estrutura no instante $t + \Delta t$ baseado nos resultados já conhecidos para o instante t , onde t é conhecido como pseudo tempo. Esse parâmetro apenas auxilia o entendimento de que os carregamentos aplicados variam para as diferentes configurações.

Para a análise incremental, os deslocamentos, deformações e tensões são expressos por

$${}^{t+\Delta t}u_i = {}^t u_i + \Delta u_i, \quad (4.6)$$

$${}^{t+\Delta t}E_{ij} = {}^t E_{ij} + \Delta E_{ij}, \quad (4.7)$$

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^t S_{ij} + \Delta S_{ij}, \quad (4.8)$$

onde ${}^t u_i$ são os deslocamentos, ${}^t E_{ij}$ são as deformações e ${}^t S_{ij}$ são as tensões já calculadas no instante t e Δu_i , ΔE_{ij} e ΔS_{ij} são os incrementos a serem determinados.

Inserindo a Equação 4.6 no tensor deformação de Green-Lagrange e usando a Equação 4.7, o incremento de deformação é escrito da seguinte forma

$$\Delta E_{ij} = \vartheta_{ij} + \eta_{ij}, \quad (4.9)$$

onde ϑ_{ij} é um tensor que representa a parte linear do incremento de deformações

$$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial^0 X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial^0 X_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^0 X_i} \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 X_j} + \frac{\partial^t u_k}{\partial^0 X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^0 X_j} \right), \quad (4.10)$$

e η_{ij} é um tensor que representa a parcela não linear do incremento de deformação

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_j}{\partial^0 X_i} \right) \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial^0 X_j} \right). \quad (4.11)$$

Como as variações são determinadas em relação à configuração no estado $t + \Delta t$, é possível escrever

$$\delta {}^{t+\Delta t}u_i = \delta \Delta u_i \quad \text{e} \quad \delta {}^{t+\Delta t}E_{ij} = \delta \Delta E_{ij}. \quad (4.12)$$

Usando a decomposição da Equação 4.8, a relação de equilíbrio estabelecida na Equação 4.5 é escrita no estado $t + \Delta t$ como

$$\begin{aligned} \int_{0V} \Delta S_{ij} \delta \Delta E_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta \eta_{ij} d^0V = \int_{0V} {}^{t+\Delta t} f_i^b \delta \Delta u_i d^0V + \\ \int_{0S} {}^{t+\Delta t} f_i^s \delta \Delta u_i^s d^0S - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta \vartheta_{ij} d^0V. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Considerando as aproximações $\Delta S_{ij} = D_{ijkl}\vartheta_{kl}$ e $\delta\Delta E_{ij} = \delta\vartheta_{ij}$, a Equação 4.13 é reescrita da seguinte forma

$$\int_{0V} D_{ijkl}\vartheta_{ij}\delta\vartheta_{kl}d^0V + \int_{0V} {}^tS_{ij}\delta\eta_{ij}d^0V = \int_{0V} {}^{t+\Delta t}f_i^b\delta\Delta u_i d^0V + \int_{0S} {}^{t+\Delta t}f_i^s\delta\Delta u_i^s d^0S - \int_{0V} {}^tS_{ij}\delta\vartheta_{ij}d^0V, \quad (4.14)$$

onde o lado direito da Equação 4.14 representa o trabalho virtual, e o lado esquerdo é conhecido como matriz tangente. A expressão não está inicialmente em equilíbrio, sendo necessário que seja resolvida de forma iterativa até que o equilíbrio seja verificado.

A Equação 4.14 está escrita na forma contínua, a transformação para uma formulação de elementos finitos é uma solução bastante eficaz para resolvê-la.

Utilizando os incrementos de deslocamento Δu_i e as matrizes de transformação linear, o primeiro e último termo da Equação 4.14 são escritos como

$$\int_{0V} D_{ijkl}\vartheta_{ij}\delta\vartheta_{kl}d^0V = \Delta\mathbf{u}^T \int_{0V} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L d^0V \delta\Delta\mathbf{u}, \quad (4.15)$$

$$\int_{0V} {}^tS_{ij}\delta\vartheta_{ij}d^0V = \int_{0V} \mathbf{B}_L^T \mathbf{s} d^0V \delta\Delta\mathbf{u}, \quad (4.16)$$

onde \mathbf{D} é o tensor constitutivo do material, e \mathbf{s} é um vetor contendo as componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff.

A relação não linear é descrita como

$$\int_{0V} {}^tS_{ij}\delta\eta_{ij}d^0V = \Delta\mathbf{u}^T \int_{0V} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_{NL} d^0V \delta\Delta\mathbf{u}, \quad (4.17)$$

onde \mathbf{S} é uma matriz com as componentes do segundo Piola-Kirchhoff, sendo as mesmas contidas no vetor \mathbf{s} .

Para a análise por elementos finitos, as forças externas aplicadas e as forças de corpo são transferidas para os nós do elemento finito

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext}^T \delta\Delta\mathbf{u} = \int_{0V} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext}^b \delta\Delta\mathbf{u} d^0V + \int_{0S} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext}^s \delta\Delta\mathbf{u}^s d^0V. \quad (4.18)$$

O estado de deformação gera um campo de esforços internos no corpo que também são transferidos para os nós, da seguinte forma

$${}^t\mathbf{f}_{int} = \int_{0V} \mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{s} d^0V. \quad (4.19)$$

Com os vetores de forças externas e internas definidos é possível obter o vetor resíduo

$${}^t\mathbf{r} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{ext} - {}^t\mathbf{f}_{int}. \quad (4.20)$$

A matriz de rigidez para pequenos deslocamentos, que representa a parcela linear, é escrita como

$$\mathbf{K}_L = \int_{0V} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L d^0V, \quad (4.21)$$

e a parcela não linear é escrita como

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_{0V} \mathbf{B}_{NL}^T {}^t\mathbf{S} \mathbf{B}_{NL} d^0V. \quad (4.22)$$

Com isso, a equação que representa o problema não linear, na forma de elementos finitos, é escrita como

$${}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = ({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL}) \Delta\mathbf{u} = {}^t\mathbf{r}, \quad (4.23)$$

onde a montagem das matrizes \mathbf{B}_L , \mathbf{B}_{NL} , \mathbf{S} e \mathbf{s} está melhor definido no Anexo I.

A Equação 4.23 é utilizada para calcular os incrementos de deslocamentos, que são usados para avaliar os incrementos de deformação e tensão interna, correspondentes à configuração do corpo no estado $t + \Delta t$.

Cada vez que os incrementos são calculados e somados aos valores obtidos no estado t , o equilíbrio é conferido, ou seja, o estado de tensão interna representados nos nós da malha devem ser iguais ao valor do carregamento externo aplicado. Caso isso não se verifique dentro de uma tolerância predeterminada, o procedimento continua e um novo conjunto de incrementos é determinado, até que os estados de tensão se igualem.

Existem diversos métodos que podem ser empregados para se chegar à configuração no estado $t + \Delta t$ que represente o equilíbrio. O método iterativo de Newton-Raphson é usado neste trabalho para determinar o equilíbrio da estrutura.

4.3.1 Método de Newton-Raphson

Dentre os diversos métodos iterativos utilizados para determinação do equilíbrio estático de análises não lineares, o método de Newton-Raphson surge como a primeira escolha pela sua simplicidade na aplicação e precisão dos resultados.

Segundo Alves Filho [2012], o método iterativo de Newton-Raphson pode obter melhores resultados se aplicado juntamente com algum método incremental na aplicação do carregamento externo, ou seja, a aplicação do carregamento externo é efetuada gradativamente.

A Figura 4.2 apresenta um exemplo da aplicação do método de Newton-Raphson com o carregamento externo sendo dividido em duas etapas.

Esse método, ou alguma das variações dele, é bastante aplicado em algoritmos de solução de programas comerciais ou rotinas de cálculo para análise não linear. Neste trabalho é aplicado o método de Newton-Raphson padrão, onde a matriz tangente de rigidez é calculada para cada incremento de deslocamento.

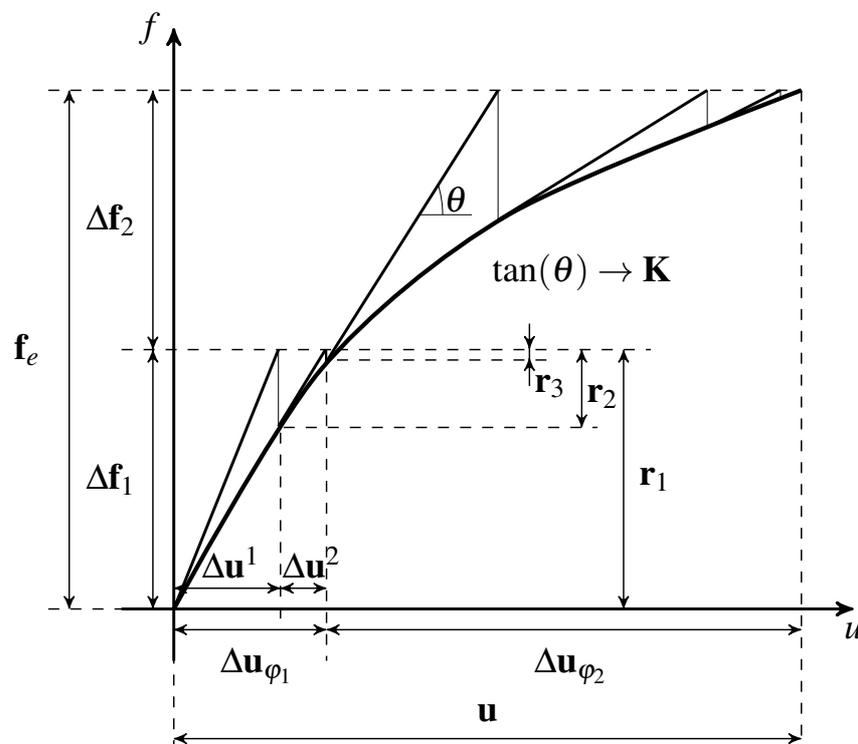


Figura 4.2: Exemplo da aplicação do método de Newton-Raphson em conjunto com uma análise incremental para o carregamento externo.

O método consiste em fazer, inicialmente, uma aproximação linear para o problema. Isso significa calcular o equilíbrio usando a matriz de rigidez linear do sistema e, gradualmente, atualizar a matriz de rigidez tangente com os incrementos de deslocamentos obtidos com a solução de um sistema linear.

Assim que o procedimento alcança um erro menor do que uma tolerância pré-especificada, o incremento de carga é atualizado, e o procedimento é iniciado novamente.

O método de Newton Raphson em conjunto com o procedimento de incremento no carregamento está descrito no pseudo código abaixo.

Neste trabalho, o incremento de carregamento é estabelecido em $\varphi^1 = 0.5$, ou seja, $\Delta \mathbf{f}_1 = \Delta \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_{ext}/2$.

1. Inicializa o contador do incremento de carga $i = 1$ e determina φ ;
2. inicializa o contador de iterações $j = 0$;
3. calcula o vetor resíduo $\mathbf{r}_j(\mathbf{u}) = \varphi \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}^j(\mathbf{u})$;
4. calcula o erro $\|\mathbf{r}_j\|_2$;
5. enquanto (erro > tolerância):
 - (a) determina a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}(\mathbf{u}^j)$;
 - (b) resolve $\Delta \mathbf{u}^j = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}_j$;
 - (c) atualiza os deslocamentos $\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{u}^j + \Delta \mathbf{u}^j$;
 - (d) calcula o vetor resíduo $\mathbf{r}_{j+1}(\mathbf{u}) = \varphi \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}^{j+1}(\mathbf{u})$;
 - (e) calcula o erro $\|\mathbf{r}_{j+1}\|_2$;
 - (f) atualiza o número da iteração $j = j + 1$.
6. atualiza o contador do incremento de carga $i = i + 1$;
7. atualiza o incremento de carga $\varphi^i = \varphi^{i-1} + \varphi$, $\varphi^i \leq 1$, e volta ao passo 2.

Apesar de muito utilizado, o método de Newton-Raphson possui algumas limitações.

Enquanto a matriz de rigidez do problema é positiva definida, o método é bem sucedido na busca pela trajetória de equilíbrio do sistema.

No entanto, em casos onde a matriz de rigidez do sistema passa para uma condição de negativa definida, a trajetória de equilíbrio do sistema não pode mais ser seguida.

Em geral, essa transição na condição da matriz de rigidez ocorre quando a curva carregamento por deslocamento muda, ou seja, essa relação passa de ascendente para um trecho descendente, conforme mostra a Figura 4.3. No ponto limite, de derivada zero, a matriz de rigidez tende a se tornar singular.

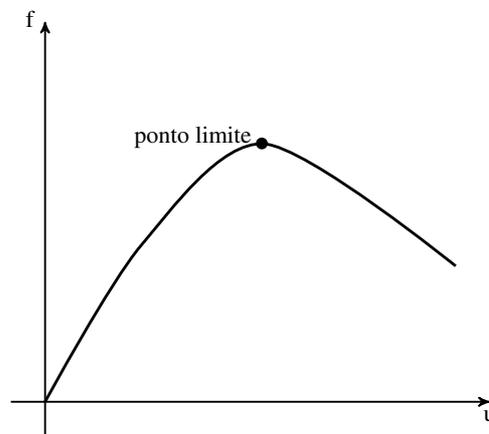


Figura 4.3: Trajetória de equilíbrio com ponto limite.

Porém, mesmo antes desse ponto, quando o número de condicionamento da matriz de rigidez tangente começa a aumentar excessivamente, o método de Newton-Raphson já apresenta problemas.

Uma alternativa para superar esse problema é o uso de métodos baseados em comprimento de arco [Fafard e Massicotte, 1993; Crisfield, 1997].

5. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A otimização topológica pode ser considerada como uma das ramificações mais recentes da otimização estrutural [Haftka e Gürdal, 1991; Arora, 2004]. Otimização estrutural é um campo bem estabelecido na área de mecânica dos sólidos. Desde meados do século XIX esse campo vem sendo estudado e aprimorado. A importância desse tipo de análise para o projeto mecânico cresce com o contínuo aumento da demanda por componentes cada vez mais eficazes, e que tenham a mínima quantidade de matéria-prima empregada.

5.1 Breve histórico da otimização estrutural

A resolução dos primeiros trabalhos científicos de otimização estrutural são atribuídos a Maxwell na década de 1870, no qual seu objetivo era calcular o campo de tensões principais a que um determinado volume estaria sujeito, considerando condições de contorno. Usando teoria da elasticidade, Maxwell colocou barras dispostas de forma a estarem alinhadas sobre o campo de direções de tensões principais calculados, com isso ele chegou a uma estrutura de treliças onde os componentes (barras) estariam sujeitas a esforços apenas de compressão e tração. Essa configuração seria o projeto ótimo onde a estrutura obtida suporta o carregamento aplicado com o menor volume de material.

Posteriormente Michell [1904], utilizou a ideia para projetar diversos tipos de estruturas com a menor quantidade de material. Como os resultados obtidos por Michell eram considerados impossíveis de serem reproduzidos na época, os seus trabalhos ficaram esquecidos por algumas décadas.

O desenvolvimento das técnicas de programação linear por Dantzig [1963], juntamente com o advento da computação digital, conduziram a aplicação de técnicas de programação matemática ao projeto de vigas e pórticos no regime plástico, como descrito por Heyman [Vanderplaats, 1999].

Um dos primeiros avanços nos métodos modernos de programação matemática (PM) para otimização estrutural foi feito por Schmit, em 1960, ele introduziu a ideia de unir a

análise estrutural por meio do método dos elementos finitos e um método de programação matemática não-linear para criar projetos de ótimo automatizados [Cheng, 1994]. Entretanto, os primeiros trabalhos usando PM sofreram com a incapacidade de resolver problemas em larga escala, complicados e com muitas variáveis de projeto.

Basicamente, um problema de otimização estrutural pode ser escrito na forma padrão como

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} : & f(\mathbf{x}) \\
 \text{s.a. :} & \text{equações de equilíbrio} \\
 & : g_i(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{a} \leq a^* \quad i = 1, \dots, n \\
 & : h_j(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b} = b^* \quad j = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $f(\mathbf{x})$ é o funcional que se deseja minimizar, \mathbf{x} é o vetor que representa as variáveis de projeto, $g_i(\mathbf{x})$ são as n restrições de desigualdade e $h_j(\mathbf{x})$ são as m restrições de igualdade. A escrita do problema de otimização na sua forma padrão é recomendada para um entendimento mais fácil do problema, e também para a maior facilidade na implementação do método de programação matemático escolhido.

Convém lembrar que pequenas modificações podem ser feitas no problema para escrevê-lo na forma padrão, por exemplo, maximizar um funcional f é o mesmo que minimizar $-f$ ou $\frac{1}{f}$ [Arora, 2004].

5.2 Otimização topológica de estruturas

O propósito da otimização topológica é encontrar a melhor distribuição de material para uma estrutura dentro de uma região pré-especificada (domínio). As únicas quantidades conhecidas no problema são, por exemplo, as cargas aplicadas, as condições de apoio, o volume da estrutura a ser construída e algumas restrições adicionais de projeto [Bendsøe e Sigmund, 2003].

Otimização topológica passou a ser um tema discutido no meio acadêmico a partir do trabalho publicado por Bendsøe e Kikuchi [1988]. A partir desse momento, o método foi rapidamente absorvido na indústria aeronáutica e automobilística, principalmente na Europa, EUA e Japão.

Para o problema de otimização topológica, a aproximação para o conjunto de tensores admissíveis consiste em

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \\ \mathbf{D} &= 1_{\Omega^{mat}} \mathbf{D}^0 \\ 1_{\Omega^{mat}} &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^{mat}, \\ 0 & \text{se } x \in \frac{\Omega}{\Omega^{mat}}, \end{cases} \\ \int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}} d\Omega &= \text{Vol}(\Omega^{mat}) \leq V \quad , \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde a última integral calcula a quantidade de material disponível, o tensor \mathbf{D} é o tensor constitutivo que define o material isotrópico base e, normalmente, se escreve a primeira linha da Equação 5.2 para indicar o espaço de funções integráveis de Lebesgue, um indicativo que a distribuição de material pode assumir valores descontínuos.

A aproximação geralmente usada para resolver esse problema é substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas, e então introduzir alguma forma de penalização que conduza a solução à forma discreta de 0 ou 1 [Bendsøe e Sigmund, 2003]. Uma das primeiras tentativas nesta direção são os métodos de homogeneização [Bendsøe e Kikuchi, 1988].

Contudo, esses métodos se mostram satisfatórios apenas para problemas que envolvam a extremização de funcionais baseados na flexibilidade, onde a microestrutura que otimiza a rigidez localmente é conhecida. Em casos que não envolvam a otimização de flexibilidade outros métodos devem ser buscados [Sigmund, 2001].

Um método que substitui com vantagens os métodos de homogeneização é o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*, na sigla em inglês) [Bendsøe, 1989].

No SIMP, uma relação entre uma pseudo-densidade e o tensor constitutivo do material é escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \bar{\rho}_i^k \mathbf{D}^0, \quad k > 1, \\ \int_{\Omega} \bar{\rho}_i(\mathbf{x}) d\Omega &\leq V; \quad 0 \leq \bar{\rho}_i(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde \mathbf{D}^0 é o tensor constitutivo do material base.

Se a microestrutura do compósito corresponde a um material bifásico, onde uma das fases representa um vazio ou *void* e a outra é o material base, para que a mistura represente um modelo termodinamicamente admissível, o módulo de compressão volumétrico κ e o

módulo cisalhante μ do tensor $\mathbf{D}(\bar{\rho}_i)$ devem satisfazer os limites de Hashin-Shtrikman [Jones, 1999].

Em um estado de elasticidade plana, esses limites correspondem a

$$0 \leq \kappa \leq \frac{\bar{\rho} \kappa^0 \mu^0}{(1 - \bar{\rho}) \kappa^0 + \mu^0} \quad \text{e} \quad 0 \leq \mu \leq \frac{\bar{\rho} \kappa^0 \mu^0}{(1 - \bar{\rho})(\kappa^0 + 2\mu^0) + \kappa^0}, \quad (5.4)$$

onde κ^0 e μ^0 são os módulos volumétrico e de cisalhamento do material base não penalizado, respectivamente. Estes podem ser escritos como

$$\kappa^0 = \frac{E^0}{2(1 - \nu^0)} \quad \text{e} \quad \mu^0 = \frac{E^0}{2(1 + \nu^0)}, \quad (5.5)$$

substituindo as equações acima na Equação 5.4, chega-se a [Bendsøe e Sigmund, 1999]

$$k \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu^0}, \frac{4}{1 + \nu^0} \right\} \quad (\text{em 2D}). \quad (5.6)$$

Essa condição, na prática, indica que para que o modelo proposto pelo SIMP respeite os limites da lei de mistura de Hashin-Shtrikman, o menor valor para o expoente de penalização ocorre para casos em que $\nu = \frac{1}{3}$ e, conseqüentemente, $k = 3$.

Uma grande vantagem do SIMP é que as propriedades do material são ponderadas por apenas uma variável de projeto. Por exemplo, o módulo de elasticidade de uma densidade intermediária é escrito como $E_i = \bar{\rho}_i E_i^0$.

Essa é uma das principais características que fazem esse método superior ao método de homogeneização, em que diversas variáveis são consideradas, o que simplifica o processo de solução do problema de otimização [Zuo et al., 2007].

Neste trabalho, com o intuito de evitar problemas de condicionamento numérico, uma vez que as densidades físicas $\bar{\rho}_i$ podem assumir valores igual a zero, o módulo de Young é penalizado da seguinte forma

$$E_i = E_{min} + \bar{\rho}_i^k (E^0 - E_{min}), \quad (5.7)$$

onde E_{min} é um valor mínimo aplicado ao módulo de Young do i -ésimo elemento, para evitar problemas numéricos, e E^0 é o módulo de Young do material base.

5.2.1 Método das assíntotas móveis

O método das assíntotas móveis (MMA) [Svanberg, 1987], é um dos métodos matemáticos mais utilizados em otimização estrutural para a atualização das variáveis de projeto. Esse método pode ser entendido como uma generalização de métodos de programação matemática amplamente aplicados em otimização estrutural, como o SLP (*Sequential Linear Programming*, na sigla em inglês) [Nocedal e Wright, 2006] e o CONLIN (*CONvex LINearization method*, na sigla em inglês) [Fleury, 1989].

Basicamente, o problema primal do MMA é escrito como

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} : f_0(\mathbf{x}) & \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \\ \text{s.a.} : f_i(\mathbf{x}) \leq \bar{f}_i & \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde n é o número de variáveis de projeto e m é o número de funções de restrição do problema, e \mathbf{x} é um vetor que contém as variáveis de projeto.

Para resolver o problema da Equação 5.8, um subproblema estritamente convexo é gerado. Esse problema utiliza variáveis auxiliares que são usadas para a solução do subproblema por um método dual [Svanberg, 1987], e que são definidas como

$$y_n(x_n) = \frac{1}{x_n - L_n} \quad \text{ou} \quad y_n(x_n) = \frac{1}{U_n - x_n}, \quad (5.9)$$

onde L_n e U_n são as assíntotas móveis inferiores e superiores, respectivamente, que ajudam a estabilizar e acelerar a busca pela convergência. A possibilidade de se mover estas assíntotas durante o processo de convergência é que torna esse método mais eficiente e robusto que o SLP e o CONLIN, por exemplo.

Durante a k -ésima iteração, as assíntotas móveis são escolhidas de maneira que sempre satisfaçam

$$L_j^k < x_j^k < U_j^k \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Primeiro, define-se para cada $i = 0, 1, \dots, m$, a restrição f_i^k como

$$f_i^k(\mathbf{x}) = r_j^k + \sum_{j=1}^{nelem} \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right), \quad (5.11)$$

onde

$$p_{ij}^k = \begin{cases} (U_j^k - x_j^k)^2 \partial f_i / \partial x_j, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j > 0 \\ 0, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j \leq 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$q_{ij}^k = \begin{cases} 0, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j \geq 0 \\ -(x_j^k - L_j^k)^2 \partial f_i / \partial x_j, & \text{se } \partial f_i / \partial x_j < 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

$$r_j^k = f_i(\mathbf{x}^k) - \sum_{j=1}^{nelem} \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right), \quad (5.14)$$

onde todas as derivadas $\partial f_i / \partial x_j$ são calculadas em $x = x^k$. É visto que, se $p_{ij} \neq 0$, $q_{ij} = 0$ e vice-versa.

As derivadas segundas são dadas por

$$\frac{\partial^2 f_i^k}{\partial x_j^2} = \frac{2 p_{ij}^k}{(U_j^k - x_j)^3} + \frac{2 q_{ij}^k}{(x_j - L_j^k)^3}, \quad (5.15)$$

e

$$\frac{\partial^2 f_i^k}{\partial x_l \partial x_j} = 0 \quad \text{se } j \neq l,$$

onde é visto que, como $p_{ij}^k \geq 0$ e $q_{ij}^k \geq 0$, f_i^k é uma função convexa [Svanberg, 1987].

Considerando-se $x = x^k$, a Equação 5.15 se reduz a

$$\frac{\partial^2 f_i^k}{\partial x_j^2} = \begin{cases} \frac{2 \partial f_i / \partial x_j}{U_j^k - x_j^k}, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \\ -\frac{2 \partial f_i / \partial x_j}{x_j^k - L_j^k}, & \text{se } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \end{cases}, \quad (5.16)$$

o que indica que quanto mais próximos L_j e U_j são escolhidos de x_j , maior o valor das derivadas segundas. Consequentemente maior curvatura é dada às aproximações calculadas por f_i e, portanto, mais conservadoras são as aproximações do problema original [Christensen e Klarbring, 2009].

Svanberg [1987] utiliza a seguinte aproximação heurística para a determinação dos

limites para as duas primeiras iterações ($k = 0$ e 1)

$$\begin{aligned} L_j^k &= x_j^k - s_0 (\bar{x}_j - \underline{x}_j) , \\ U_j^k &= x_j^k + s_0 (\bar{x}_j - \underline{x}_j) , \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde \bar{x}_j e \underline{x}_j são os limites máximo e mínimo estabelecido para as variáveis de projeto, e $0 < s_0 < 1$.

Para $k \geq 2$, se os sinais de $x_j^k - x_j^{k-1}$ e $x_j^{k-1} - x_j^{k-2}$ são diferentes, significa que os valores das variáveis de projeto estão oscilando, e uma aproximação mais conservadora é estabelecida, ou seja, os valores das assíntotas são modificadas para ficarem mais próximas de x_j^k

$$\begin{aligned} L_j^k &= x_j^k - \underline{s} (x_j^{k-1} - L_j^{k-1}) , \\ U_j^k &= x_j^k + \underline{s} (U_j^{k-1} - x_j^{k-1}) , \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde $0 < \underline{s} < 1$.

Caso os sinais da relação entre iterações sejam iguais

$$\begin{aligned} L_j^k &= x_j^k - \bar{s} (x_j^{k-1} - L_j^{k-1}) , \\ U_j^k &= x_j^k + \bar{s} (U_j^{k-1} - x_j^{k-1}) , \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde $\bar{s} > 1$, um processo inverso é realizado, acelerando o processo de convergência. Através das equações acima, fica claro que as variáveis s estabelecem a aproximação para as assíntotas. Observa-se também que, para valores de $k \geq 2$ o método começa a usar valores de iterações anteriores para a escolha dos novos limites, acelerando a busca pela convergência.

Neste trabalho, devido a problemas na convergência, o MMA é reinicializado algumas vezes durante o processo de otimização. As informações referentes às iterações anteriores são apagadas, e é necessário determinar s_0 novamente.

Além disso, é proposta uma alteração no valor de s_0 em relação aos valores tradicionalmente usados. Como visto anteriormente, esse parâmetro determina o grau de curvatura das duas aproximações iniciais do método.

Em função da dificuldade de controlar a restrição de tensão no problema de otimização, é necessário que o MMA desconsidere os valores anteriores das variáveis de projeto, e

use uma aproximação bastante conservadora para determinar os limites móveis durante as duas iterações subsequentes às reinicializações.

Na seção 6.4 é explicado como se dá a modificação de s_0 e o problema que origina a perda de convergência pelo método.

5.2.2 Otimização topológica em mecanismos flexíveis

O projeto de mecanismos flexíveis ganhou notoriedade justamente quando técnicas de otimização começaram a ser empregadas no projeto. Os primeiros trabalhos nesta área são atribuídos a Ananthasuresh e Kota [1995], Sigmund [1997], Larsen et al. [1997], Nishiwaki et al. [1998] e Kikuchi et al. [1998].

Sigmund [1997] utiliza uma função objetivo que busca maximizar a relação das forças de saída e de entrada do mecanismo, conhecida como vantagem mecânica (VM), com uma fração do volume inicial de projeto. Em projetos de mecanismos de corpo rígido, a vantagem mecânica é um dos aspectos mais importantes da análise e, segundo o autor, através deste procedimento seria capaz de controlar os níveis de tensão a que o mecanismo está sujeito através do controle do deslocamento de entrada.

Escreve-se o problema de otimização no trabalho como

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho} : & \quad -VM \\
 \text{s.a.} : & \quad \mathbf{V}(\rho) \leq \mathbf{V}^* \\
 & \quad u_{in} \leq u_{in}^* \\
 & \quad \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i \quad i = 1, 2 \\
 & \quad 0 < \rho_{min} \leq 1
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Para a solução do problema de otimização, programação linear sequencial é aplicada. Apesar de não estar presente nenhuma restrição à resistência do material constituinte do mecanismo, o trabalho cita a importância de acrescentar algum critério de resistência/fadiga na formulação do problema. O problema do surgimento de articulações na topologia resultante também é citado.

Nishiwaki et al. [1998] inclui na formulação da função objetivo requisitos de atuação cinemática e energia mútua de flexibilidade do mecanismo. No trabalho é aplicado programação linear. Também pesquisa-se o efeito de tamanho de malha e volume final e, para os modelos testados, verifica-se que a topologia final é independente do refinamento da malha, mas para diferentes restrições de volume, encontra-se topologias diferentes. Alguns resultados mostram elementos conectados por um único nó.

Apesar de nenhuma das duas formulações levar em conta efeitos de fadiga ou resistência máxima do material, ambos os trabalhos citam a importância de considerar esses efeitos para um projeto mais elaborado em mecanismos flexíveis, dada a aplicação dos mesmos.

A partir destes trabalhos, pioneiros em mecanismos flexíveis utilizando otimização topológica, diversas formulações são desenvolvidas. A seguir, cita-se alguns dos mais importantes na área, e alguns que utilizam formulações diferenciadas para o problema de otimização.

Frecker et al. [1999] escreve uma formulação para mecanismos flexíveis que requerem múltiplas saídas, e para isso utiliza duas formulações diferentes para a função objetivo. A primeira maximizando uma relação entre a energia potencial mútua* e a energia de deformação da estrutura. A segunda formulação faz uma soma ponderada dessa relação, no qual o argumento do somatório é o número de saídas desejado. Para o trabalho utiliza-se um domínio de projeto em que todos os nós são conectados por treliças (*ground structure*). Testa-se no trabalho diferentes pontos de partida para o problema de otimização e, pelo menos para os casos testados, encontra-se diferentes resultados finais para diferentes pontos de partida. Também é citada a necessidade de uma análise não-linear para mecanismos flexíveis, e são feitas considerações sobre as tensões a que mecanismos deste tipo estão sujeitos.

Uma tentativa diferente de chegar a uma topologia para mecanismos flexíveis é aplicado por Yin e Ananthasuresh [2001]. No trabalho, os autores utilizam uma função de distribuição normal para interpolar as propriedades do material em um meio contínuo. Com essa formulação é buscado caracterizar um meio com pelo menos dois tipos de material, um sólido com as propriedades do material constituinte e um com as propriedades do ar (vazio),

*Energia potencial mútua pode ser entendida como o produto entre o deslocamento na entrada do mecanismo e a força medida na saída.

onde a variável da distribuição normal é a pseudo densidade ρ_i . Com essa formulação é possível adicionar uma quantidade maior de diferentes tipos de material na formulação do problema de otimização.

Um dos primeiros trabalhos a considerar grandes deslocamentos é o de Pedersen et al. [2001]. Além das considerações relativas ao problema não linear de equilíbrio, destaca-se que, por ter muitas vezes a possibilidade de um deslocamento limitado na porta de entrada, a consideração de força de entrada e deslocamento de entrada não deveriam ser contabilizadas na formulação da função objetivo, e sim em uma restrição do problema. Sugere-se um problema onde o funcional a ser extremizado leva em conta o deslocamento de saída do mecanismo. No trabalho, é citado que inúmeros testes foram realizados para escolha da função objetivo, sendo escolhida a de melhor desempenho para o problema não linear. A Equação 5.21 mostra o problema de otimização que é resolvido.

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho} & : -u_{out} \\
 \text{s.a.} & : \mathbf{V}(\rho) \leq \mathbf{V}^* \\
 & : u_{in} \leq u_{in}^* \\
 & : \mathbf{r}(\rho) = \mathbf{0} \\
 & : 0 < \rho_{min} < \rho \leq 1.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Devido aos grandes deslocamentos é citada a necessidade, em alguns casos, do controle do caminho realizado na porta de saída do mecanismo, sendo necessário que se escreva um outro problema de otimização para que o mecanismo realize a trajetória desejada. Para tanto, escreve-se também um problema de mínimos quadrados para o deslocamento na porta de saída do mecanismo. Realiza-se a análise de equilíbrio não linear com o método de Newton-Raphson, e o problema de otimização é resolvido através do MMA.

Outro importante trabalho nesta área a considerar não linearidades é o de Bruns e Tortorelli [2001]. Além de não linearidades geométricas, um modelo hiperelástico é implementado no trabalho. No trabalho uma função baseada em energia é minimizada considerando apenas restrições de deslocamento, equilíbrio e volume de material. Para a solução

das equações não lineares, o método de Newton-Raphson é utilizado e, para o problema de otimização, o MMA. O funcional a ser extremizado é montado a partir do método do Lagrangeano Aumentado [Nocedal e Wright, 2006].

Em Cardoso e Fonseca [2004], uma nova alternativa para a formulação da função objetivo é proposta, com o principal intuito de evitar a surgimento de articulações. No trabalho, uma função baseada na energia de deformação é maximizada para armazenar o máximo de energia de deformação nos elementos com os valores máximos de densidade. A função energia de deformação do corpo é penalizada de forma a evitar o armazenamento de energia nos elementos com densidade intermediária. Nas restrições do problema são impostos limites inferiores e superiores para as portas de saída e entrada do mecanismo. Aplica-se programação linear para a solução do problema de otimização, e as equações de equilíbrio do problema de elementos finitos são resolvidas dentro da teoria de elasticidade linear infinitesimal. Com essa formulação, mecanismos livres de articulações são obtidos. Porém, mais uma vez não garante-se que os mecanismos obtidos passem por critérios de falha como fadiga ou resistência mecânica.

Em Zhaokun e Xianmin [2006] não linearidade geométrica é aplicada no projeto de mecanismos flexíveis. No trabalho é feita uma análise das tensões em mecanismos modelados dentro da teoria linear infinitesimal e teoria não linear. Para as mesmas condições de contorno, mecanismos projetados para grandes deslocamentos apresentam valores máximos de tensão menores que os equivalentes lineares, projetados com a teoria infinitesimal. Porém, o trabalho para nesse ponto. Apenas resultados preliminares são apresentados, e nenhum estudo mais aprofundado sobre o assunto é realizado.

Em Werme [2007], uma restrição de tensão é considerada no projeto de mecanismos flexíveis. Programação linear sequencial inteira é usada, e uma série de problemas inerentes à densidades intermediárias e tensão são evitados. No entanto, os resultados são muito preliminares, para malhas muito grosseiras, e nenhuma informação sobre desempenho da formulação é apresentado. Nenhuma sequência do trabalho é encontrada na literatura.

No trabalho realizado por Wang [2009], é feito um estudo aprofundado do uso da vantagem mecânica (VM) e da relação entre os deslocamentos de saída e de entrada, conhecida como vantagem geométrica (VG), no projeto de mecanismos flexíveis. No trabalho, explica-se porque o uso direto desses conceitos resulta inevitavelmente em mecanismos com

pontos de flexibilidade concentrada.

Em Lin et al. [2010] é proposto um novo esquema para programação de funções multi-objetivo em mecanismos flexíveis. O método utiliza programação física [Messac, 1996] para substituir os pesos na função multi-objetivo, tentando-se eliminar mais uma entrada subjetiva do projetista, na busca pela extremização do funcional. Escreve-se uma função que busca maximizar o deslocamento na porta de saída do mecanismo e, ao mesmo tempo, minimizar a energia de deformação da estrutura. Porém, não acrescenta-se nada novo com relação a critérios que o projeto final deve atender. Além disso, não há discussão sobre porque os resultados apresentam topologias com articulações.

A Figura 5.1 mostra um inversor de deslocamento obtido com a formulação proposta por Lin et al. [2010].

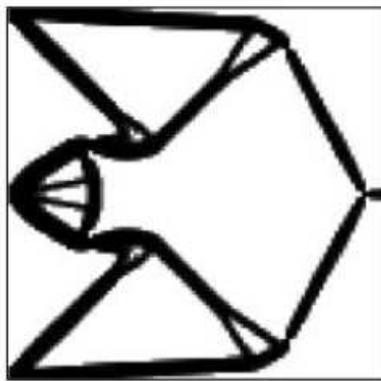


Figura 5.1: Inversor obtido usando programação física para escolha dos pesos em um problema multi-objetivo. Adaptado de [Lin et al., 2010].

No trabalho de Lazarov et al. [2011] a formulação robusta [Sigmund, 2007; Wang et al., 2011] é aplicada em um problema com não linearidades geométricas. Os resultados indicam que a formulação proposta é bem sucedida em retirar as articulações do mecanismo, através de um problema que prevê tolerâncias para os erros de fabricação dos mesmos. No entanto, nenhuma discussão sobre vantagens ou dificuldades de considerar não linearidades geométricas para a síntese de mecanismos flexíveis é abordada.

Uma função multi-objetivo onde minimiza-se um funcional baseado na deformação efetiva global[†] é proposto por Lee e Gea [2014]. Programação física é usada para a determi-

[†]Deformação efetiva é a relação entre a energia de deformação e o módulo de Young do material base.

nação dos pesos referentes à deformação efetiva, e à energia potencial mútua do mecanismo. Regiões com alto nível de deformação, diretamente associadas com articulações, são aliviadas através da formulação proposta. Porém, nenhuma informação sobre o desempenho cinemático dos mecanismos é apresentada.

A remoção das articulações em mecanismos flexíveis também é uma das motivações do trabalho de Fu e Zhang [2014]. Um funcional que relaciona a energia potencial mútua e a energia de deformação é minimizado. Um segundo laço na iteração é incluído, e nós candidatos a representarem articulações são identificados. Uma segunda estratégia é implementada, baseada no valor de densidade dos elementos vizinhos que compartilham o nó. Porém, os resultados indicam que a flexibilidade continua concentrada em alguns pontos do mecanismo.

Recentemente, em Meneghelli e Cardoso [2013], apresenta-se uma formulação que contempla critérios de resistência no problema de otimização. Uma restrição à tensão global do mecanismo é adicionada a um problema de maximização da energia baseado no trabalho de Cardoso e Fonseca [2004].

O problema proposto é escrito como

$$\begin{aligned}
 \max_{\boldsymbol{\rho}} : & \sum_{e=1}^n \rho_e^{u+k} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\
 \text{s.a.} : & \mathbf{V}(\boldsymbol{\rho}) \leq \mathbf{V}^* \\
 & : \mathbf{u}_j \leq \mathbf{u}_j^* \\
 & : c^k \|\sigma_{\text{VM}}^k\|_P \leq \sigma^* \\
 & : 0 < \rho_{\text{min}} < \rho \leq 1,
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde n é o número de elementos da malha, os parâmetros u e k são relacionados à uma penalização da função e energia e o SIMP, respectivamente. No que concerne a restrição de tensão, o trabalho de Le et al. [2010] deve ser consultado. Para a solução do problema de otimização aplica-se técnicas de programação linear, e na solução do problema de equilíbrio são considerados pequenos deslocamentos.

A Figura 5.2 mostra um dos resultados obtidos com a formulação sugerida. Como o

trabalho original de Cardoso e Fonseca [2004] já tinha por objetivo a remoção de articulações na topologia otimizada, não é possível que se conclua o efeito direto da restrição de tensão no problema.

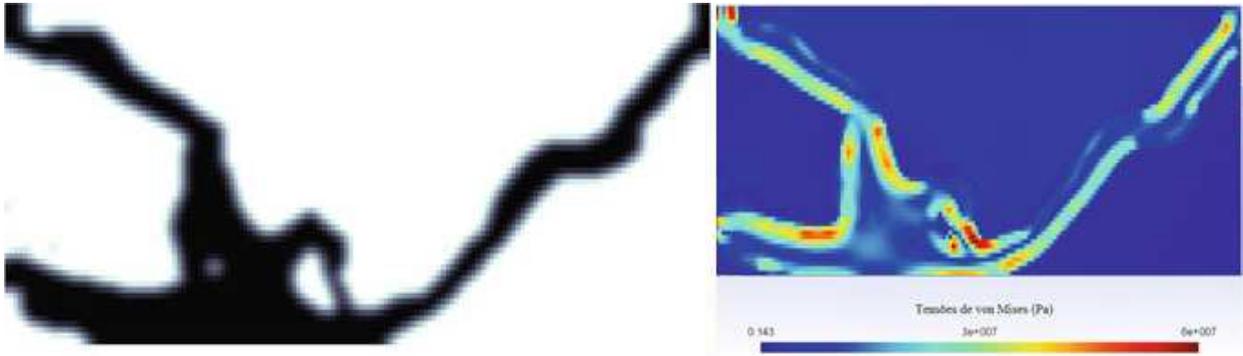


Figura 5.2: Exemplo de um mecanismo obtido com a formulação apresentada na Equação 5.22. Adaptado de Meneghelli e Cardoso [2013].

Estes são alguns dos trabalhos mais relevantes no projeto de mecanismos flexíveis usando otimização topológica. Em suma, observa-se que diversas formulações têm sido propostas.

Entretanto, percebe-se que características importantes como, por exemplo, a inclusão de critérios de resistência e a consideração de grandes deslocamentos para o mecanismo, apesar de bastante citadas, representam uma ínfima parte dos trabalhos na área. Uma formulação que acople esses dois requisitos na análise não é discutida na literatura.

5.3 Problemas com otimização topológica e não linearidade geométrica

O método de otimização topológica é um campo bem estabelecido na mecânica dos sólidos. O número de trabalhos não para de crescer, uma vez que a necessidade por estruturas e componentes que exerçam uma função com menor quantidade de material possível é sempre objeto de investimento.

Porém, é notório o reduzido número de trabalhos na área considerando não linearidades (material e/ou geométrica) nos problemas em otimização topológica. Os primeiros trabalhos na área considerando não linearidade material (NLM) são atribuídos à Bendsøe [1995], Swan e Kosaka [1997] e Maute et al. [1998], e os primeiros considerando não linearidade geométrica (NLG) são de Jog [1997] e Buhl et al. [2000].

Desde então, podem ser citados os trabalhos de Bruns e Tortorelli [2001]; Gea e Luo [2001]; Kawamoto [2003]; Cho e Jung [2003]; Stegmann e Lund [2004]; Yoon e Kim [2005]; Kemmler et al. [2005]; Gomes e Senne [2010]; Xu et al. [2010]; Klarbring e Strömberg [2013]; Lahuerta et al. [2013]; van Dijk et al. [2014]; Wang et al. [2014].

Basicamente, a grande dificuldade em aplicar não linearidades geométricas dentro do método de otimização topológica está em obter o equilíbrio em um problema onde a densidade está mudando. A consequência direta disso é que os esforços internos nos elementos variam muito, interferindo na busca pelo equilíbrio entre forças internas e carregamento externo.

A explicação do ponto de vista do MEF é que, quando a densidade de uma região começa a baixar para formar um vazio, os elementos de baixa rigidez podem ser distorcidos excessivamente, resultando em uma matriz de rigidez negativa definida. Essa característica se torna um sério problema para os métodos iterativos encontrarem a convergência.

O trabalho de Buhl et al. [2000][‡] é o primeiro a relatar o problema de convergência do método de Newton-Raphson para estruturas sofrendo grandes deformações em otimização topológica. No trabalho, é sugerido que os nós que conectam elementos com baixa rigidez sejam retirados da análise de convergência, uma vez que eles não são importantes para estrutura, pois representam vazios.

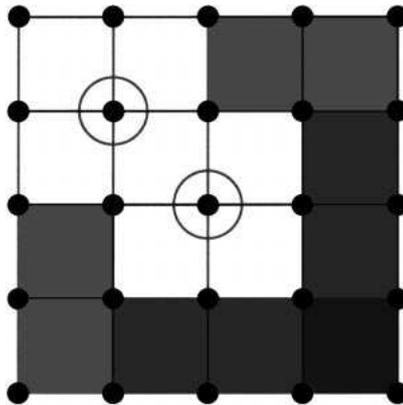


Figura 5.3: Técnica utilizada por Buhl et al. [2000] para obtenção do equilíbrio. Os nós circundados são retirados da análise de convergência. Adaptado de Buhl et al. [2000].

A Figura 5.3 mostra a ideia apresentada no trabalho. Relata-se que essa técnica

[‡]O relato do problema e a estratégia implementada foram apresentadas em um trabalho anterior, em 1998. O trabalho foi publicado formalmente em 2000.

funcionou muito bem, apresentando raros problemas de convergência, e é mais eficiente do que considerar uma relação não linear para o material, por exemplo.

No entanto, Jung e Gea [2004] apresentam uma comparação entre se considerar ou não efeitos da não linearidade geométrica e de material. Entre as quatro combinações possíveis entre linearidade e não linearidade material e geométrica, conclui-se que, para a obtenção dos melhores resultados, uma análise considerando NLG e NLM deve ser aplicada ao problema de otimização topológica.

No presente trabalho, a técnica descrita por Buhl et al. [2000] foi testada sem sucesso para a otimização de mecanismos flexíveis. Os nós que conectam apenas elementos que representam vazios são retirados da convergência. Porém, como consequência disso, uma análise bastante instável é observada durante o processo de otimização, em alguns casos levando o método de Newton-Raphson a não obter a convergência.

Kemmler et al. [1999] ignora a tensão induzida nos nós dos elementos que possuem baixa densidade, retirando as parcelas das matrizes não lineares que carregam essa informação durante a solução na análise de equilíbrio. Entretanto, essa também não é uma boa alternativa pelo mesmo motivo da retirada dos nós explicado anteriormente. Essa técnica pode interferir no cálculo das derivadas induzindo decisões erradas ao algoritmo matemático.

No trabalho de Bruns e Tortorelli [2001], uma lei de material hiperelástica é sugerida para modelar a relação constitutiva do material. Não são reportados problemas de convergência no trabalho, nem qualquer estratégia adicional para a análise de equilíbrio.

Em Bruns e Tortorelli [2003] é sugerido que sejam removidos os elementos que representam vazios. Segundo os autores, o método tem a vantagem adicional de reduzir o tamanho do problema, uma vez que esses elementos são retirados da análise de sensibilidade. No entanto, retirar elementos de dentro do domínio de projeto, de maneira que os mesmos não pertençam mais ao espaço de soluções, viola o preceito da otimização topológica, onde todos os elementos dentro do domínio fixo estendido são candidatos a receber ou não material. A análise de sensibilidade fica extremamente prejudicada, levando o algoritmo de solução a tomar decisões erradas com relação à atualização das variáveis de projeto, e ainda pode criar sérios problemas para convergência do problema.

Bruns e Sigmund [2004] usam análise geométrica não linear para a síntese de mecanismos que apresentam *snap-through*. A técnica de retirar e reintroduzir elementos da malha

de elementos finitos é empregada no trabalho. Diversos tipos de mecanismos são testados com 8 formulações diferentes considerando-se mecanismos ativados por diferença de temperatura e carregamentos pontuais. Na análise dos resultados, o surgimento de articulações é reportado e a importância de tratar esse problema é destacada.

Wang et al. [2014] sugere um esquema de interpolação baseado em um filtro do tipo Heaviside, em que elementos que estão com uma densidade abaixo de determinado patamar sejam modelados dentro da teoria linear infinitesimal, enquanto os outros entram na análise de equilíbrio através do método de Newton-Raphson, com a consideração de grandes deslocamentos. Entretanto, os resultados apresentados, especialmente para mecanismos flexíveis, parecem não apresentar um ganho significativo em comparação com métodos tradicionais, além de resultar em mais um condicionamento para o código de análise em elementos finitos.

No trabalho de van Dijk et al. [2014] um novo modelo de interpolação para o problema chamado EDS (*Element Deformation Scaling*, na sigla em inglês) é implementado. Uma penalização é aplicada apenas à parcela do deslocamento relativo a deformações do corpo (que geram esforços internos), deixando a parcela de deslocamento referente a movimentos de corpo rígido de fora da penalização. Essa técnica apresentou bons resultados para os exemplos testados. Porém, não foi possível testá-la até a conclusão do presente trabalho.

No trabalho de Klarbring e Strömberg [2013] uma série de funcionais baseados na energia de deformação da estrutura são testados, em um problema com deslocamentos prescritos. Os autores reportam que todos os modelos hiperelásticos apresentados possuem bom desempenho para problemas envolvendo não linearidade geométrica. No entanto, a exceção é o modelo de Kirchhoff-St. Venant. A explicação é que todos os modelos hiperelásticos apresentados aumentam a rigidez do elemento, ajudando a controlar a distorção excessiva em elementos de baixa densidade. Neste ponto o modelo de material linear apresenta problemas.

Essa é a mesma conclusão de Lahuerta et al. [2013]. No trabalho é feito um profundo estudo sobre o uso de uma relação constitutiva diferente da clássica, comumente usada, lei de Hooke para o problema. Além de uma série de conclusões no tocante à escolha de simplificações 2D para o problema, também é concluído que a não policonvexidade [Ball, 1977] da função de Kirchhoff-St. Venant é responsável pelo pior desempenho desse modelo. Leis de material que adotam um modelo baseado em uma função policonvexa têm a característica de conduzir a análise de convergência de maneira mais estável e, além disso, sem a necessidade

de que sejam retirados elementos ou nós da análise de equilíbrio.

Portanto, levando em consideração o histórico acima mencionado, uma relação constitutiva não linear para o material é aplicada ao lado da consideração de grandes deslocamentos. No presente trabalho, a Equação 3.35 descreve a função energia de deformação utilizada para modelar a relação constitutiva para a análise não linear.

A aplicação um modelo material não linear torna desnecessário a retirada de elementos de baixa densidade, ou de nós cercados por tais elementos na análise de equilíbrio e, mesmo assim, uma solução estável é atingida.

6. PROJETO DE MECANISMOS FLEXÍVEIS COM RESTRIÇÃO DE TENSÃO

Um mecanismo é um dispositivo construído para reagir quando uma força está agindo sobre ele. Além disso, espera-se que o mesmo realize trabalho em um componente externo. Os pontos onde a força externa é aplicada e onde a força é esperada a reagir são chamados de porta de entrada e saída, respectivamente.

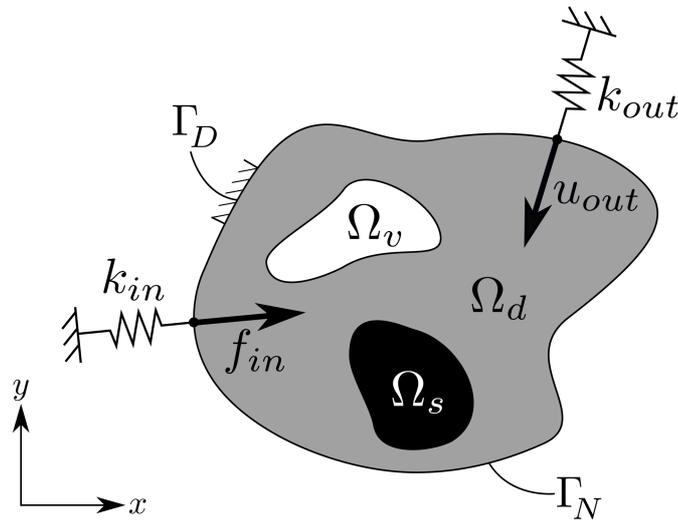


Figura 6.1: Problema genérico representando condições de contorno para um mecanismo.

A figura 6.1 mostra um problema genérico para a otimização topológica de mecanismos. Onde Ω representa o domínio físico, $\Omega = \Omega_d \cup \Omega_s \cup \Omega_v$ é dividido em três partes; o domínio de projeto Ω_d , uma região sólida prescrita Ω_s que pode existir ou não, e uma região sem material prescrita Ω_v que também pode ou não existir *à priori*. O contorno do domínio, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ é composto por duas partes, as condições de contorno de Dirichlet Γ_D , com deslocamentos prescritos, e as condições de contorno de Newman Γ_N . A porta de entrada é sujeita a uma força, f_{in} , e a porta de saída apresenta um deslocamento desejado, u_{out} , devido à deformação elástica do domínio Ω .

Muitos atuadores possuem uma rigidez acoplada que necessita ser levada em conta, juntamente com a rigidez do objeto externo [Sigmund, 1997]. Para descrever fisicamente esse processo, molas são adicionadas nas portas de entrada e saída. De maneira alternativa, deslocamentos prescritos nas portas de entrada e saída podem ser usadas como delimitadores. É importante chamar a atenção que os resultados ótimos são altamente dependentes do valor da rigidez externa, ou seja, os projetos ótimos obtidos funcionam para objetos externos que tenham exatamente a mesma rigidez. Isso é uma desvantagem uma vez que um mecanismo é esperado a operar com diferentes objetos, que possuem diferentes valores de rigidez [Cao et al., 2013].

Como dito anteriormente, neste trabalho uma restrição de tensão é adicionada à formulação proposta por Sigmund [1997]*, que visa minimizar o deslocamento da porta de saída do mecanismo, sujeito às equações de equilíbrio não linear e uma restrição ao volume total do material no domínio. A formulação original não prevê uma restrição de tensão nem considera não linearidades geométricas para a análise de equilíbrio.

A formulação proposta neste trabalho é escrita como

$$\begin{aligned}
\min_{\rho} : f(\bar{\rho}) &= \mathbf{I}^T \mathbf{U} \\
\text{s.a.} : \mathbf{r}(\bar{\rho}) &= 0 \\
: f_v(\bar{\rho}) &= \frac{\sum_{i \in \mathbb{N}_e} \bar{\rho}_i v_i}{V} \leq V^* \\
: f_s(\bar{\rho}) &= \max(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma^* \\
: 0 < \rho_{min} &\leq \rho_i \leq 1 \quad i \in \mathbb{N}_e,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

onde o vetor $\boldsymbol{\rho}$ contém as variáveis de projeto, \mathbb{N}_e é o conjunto que contém todos os elementos que entram na contabilidade da função, o vetor $\bar{\rho}$ contém as densidades físicas associadas às variáveis de projeto $\boldsymbol{\rho}$. O vetor \mathbf{I} contém 0 em todas as suas posições, exceto naquelas posições correspondentes aos graus de liberdade dos nós na porta de saída, que assumem valor igual a 1. O volume total do domínio de projeto é V , enquanto V^* é a fração de volume

*Embora o deslocamento de saída apareça como função objetivo a primeira vez no trabalho de Pedersen et al. [2001], o autor atribui ao trabalho de Sigmund [1997] a autoria da formulação.

permitida e v_i é o volume do i -ésimo elemento. O vetor σ contém as medidas de tensão dos elementos, a serem definidas na seção 6.4, e σ^* é o limite estabelecido para a máxima tensão admissível entre todos os elementos da malha de finitos.

6.1 Filtros para o controle de comprimento de escala

Considerando o problema como escrito na equação 6.1, com o conjunto que representa as densidades físicas $\bar{\rho}$ sendo a mesma que o conjunto de variáveis de projeto ρ , leva a solução do problema de otimização a duas instabilidades numéricas bastante conhecidas, a instabilidade de tabuleiro e o projeto dependente da malha [Sigmund e Petersson, 1998].

O primeiro se deve a uma modelagem numérica deficiente em função da baixa ordem de interpolação na discretização por elementos finitos. O arranjo em forma de tabuleiro de xadrez é a solução encontrada pelo algoritmo na busca por um extremo para a função densidade de energia de deformação.

A figura 6.2 mostra a topologia de um mecanismo flexível que apresenta esse tipo de instabilidade numérica. Caso nada seja feito para evitar essa anomalia, o algoritmo encontra esse padrão de distribuição de material como um ótimo.



Figura 6.2: Topologia apresentando o padrão de tabuleiro.

Segundo Díaz e Sigmund [1995] esse problema ocorre e função da baixa ordem de interpolação de alguns tipos de elementos finitos tipicamente usados que acabam por encontrar esse padrão, localmente mais rígido do que qualquer outro arranjo usando dois materiais constituintes. Usando a aproximação das variáveis de projeto através do SIMP, essa instabilidade somente é prevenida usando elementos com 8-9 nós e, mesmo assim, apenas para baixos valores de penalização para o SIMP. A desvantagem dessa aproximação é o

aumento substancial no esforço computacional.

O segundo problema se deve à dependência de malha. Com o aumento do número de elementos na malha finitos, ao invés de se obter imagens com melhor resolução e mesma topologia, o algoritmo começa a inserir pequenos detalhes nas regiões com material ou vazios, gerando topologias diferentes para diferentes refinamentos de malha.

Sigmund e Petersson [1998] sugerem uma série de esquemas que visam superar o problema de dependência de malha em otimização topológica, entre eles o uso de técnicas de filtragem para as variáveis de projeto. Tanto filtros de sensibilidade [Sigmund, 1997; Sigmund e Maute, 2012] quanto filtros de densidade [Bourdin, 2001; Bruns e Tortorelli, 2001] são bem sucedidos em eliminar a instabilidade de tabuleiro e dependência de malha, retirando a dependência do problema do tamanho do elemento para um parâmetro controlável pelo projetista, o raio de atuação do filtro.

Neste trabalho, um filtro de densidades como proposto por Bourdin [2001] e Bruns e Tortorelli [2001] é aplicado, de maneira que a densidade física agora difere da variável de projeto por

$$\tilde{\rho}_i = \frac{\sum_{j \in \mathbb{N}_{e,i}} w(x_j) v_j \rho_j}{\sum_{j \in \mathbb{N}_{e,i}} w(x_j) v_j}, \quad (6.2)$$

onde $\mathbb{N}_{e,i}$ é o conjunto de elementos cujo centroide está contido dentro do domínio da projeção realizada pelo raio do filtro para o elemento i , ρ_i é a variável de projeto, $\tilde{\rho}_i$ é a nova densidade física e $w(x_j)$ é uma função peso definida como

$$w(x_j) = \frac{R - |x_j - x_i|}{R}, \quad (6.3)$$

onde R é o raio do filtro de densidades, x_j e x_i são as coordenadas do centroide do elemento j e i , respectivamente.

A Figura 6.3 mostra o efeito da técnica de filtragem onde agora a densidade física $\tilde{\rho}_i$ do i -ésimo elemento assume um valor baseado na Equação 6.2 e, portanto, difere do valor da variável de projeto ρ_i do mesmo elemento.

Como dito anteriormente, a dependência do projeto está relacionada ao tamanho do raio R e não mais à discretização da malha de elementos finitos.

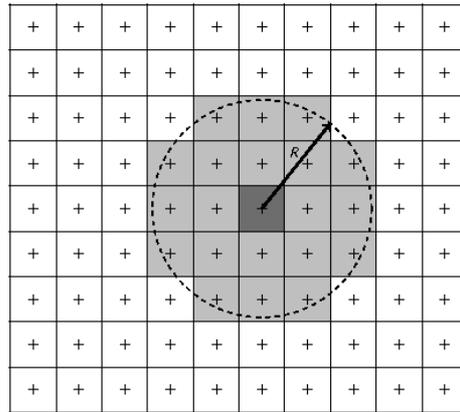


Figura 6.3: Exemplo de aplicação e domínio do filtro de densidades

Desde o surgimento dessas técnicas, a aplicação de filtros em problemas de otimização topológica têm se mostrado a melhor alternativa para a prevenção de instabilidades numéricas, comuns a esse tipo de projeto.

6.2 Métodos de projeção

Considerar as densidades físicas do problema de otimização agora como $\tilde{\rho}_i$ leva a outro problema, o aparecimento de grandes áreas com densidades intermediárias. Uma quantidade significativa de densidades físicas assumem valores entre 0 e 1, principalmente na região de transição entre as fases com material base e vazio.

A Figura 6.4 mostra o efeito da técnica de filtragem aplicada neste trabalho.

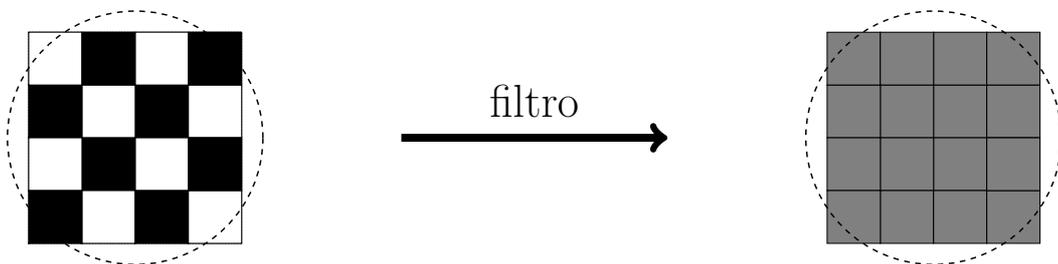


Figura 6.4: Efeito da aplicação do filtro de densidades.

Em muitos problemas menos complexos, como o caso da minimização da flexibilidade, por exemplo, a simples projeção da região de transição através de alguma técnica de

interpretação do contorno é suficiente para fornecer uma boa resposta dos resultados. Entretanto, em problemas que envolvam uma física mais complexa, que é o caso para mecanismos flexíveis, esse pós processamento do projeto final pode induzir o projetista a obter conclusões errôneas da topologia final.

Uma ferramenta relativamente recente é o uso de métodos de projeção para eliminar áreas cinzas na topologia final [Guest et al., 2004; Sigmund, 2009; Kawamoto et al., 2011]. Através desta técnica, as densidades filtradas são projetadas em um espaço 0/1, através de uma função controlada por um parâmetro que dita a suavidade da curvatura da mesma.

Embora Guest [2009] alegue que esse método possa controlar dimensões mínimas para as fases sólida e vazia, o uso dele não previne o surgimento de detalhes locais em alguns problemas de otimização topológica [Wang et al., 2011]. No caso de mecanismos flexíveis, esses detalhes aparecem na forma de elementos conectados por um único nó (articulações). Para tanto, estes métodos precisam ser usados em alguma formulação que garanta o controle do comprimento de escala.

Porém, como o objetivo deste trabalho é estudar o efeito da inclusão de uma restrição de tensão no problema, o método de projeção proposto por Guest et al. [2004] é aplicado apenas com o intuito de garantir uma menor região de cinza na topologia otimizada, característica a qual o mesmo é muito eficiente, de maneira a minimizar os efeitos de uma subsequente interpretação dos resultados.

Para garantir diferenciabilidade, o método de projeção aplicado neste trabalho usa uma função de Heaviside suavizada da forma

$$\bar{\rho}_i = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\tilde{\rho}_i - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}, \quad (6.4)$$

onde β determina o grau de suavidade da curva e η é o parâmetro de corte, que define a partir de qual valor a densidade $\tilde{\rho}_i$ é projetada para 0 ou 1. A Figura 6.5 mostra a função descrita na equação 6.4 para alguns valores de β e com $\eta = 0.5$.

Neste trabalho, um método de continuação para o grau de curvatura da função é aplicado, para que a função exposta na Equação 6.4 se aproxime gradualmente da função de Heaviside. O valor de β é dobrado a cada 50 iterações, de maneira que as mudanças de forma da função sejam suaves.

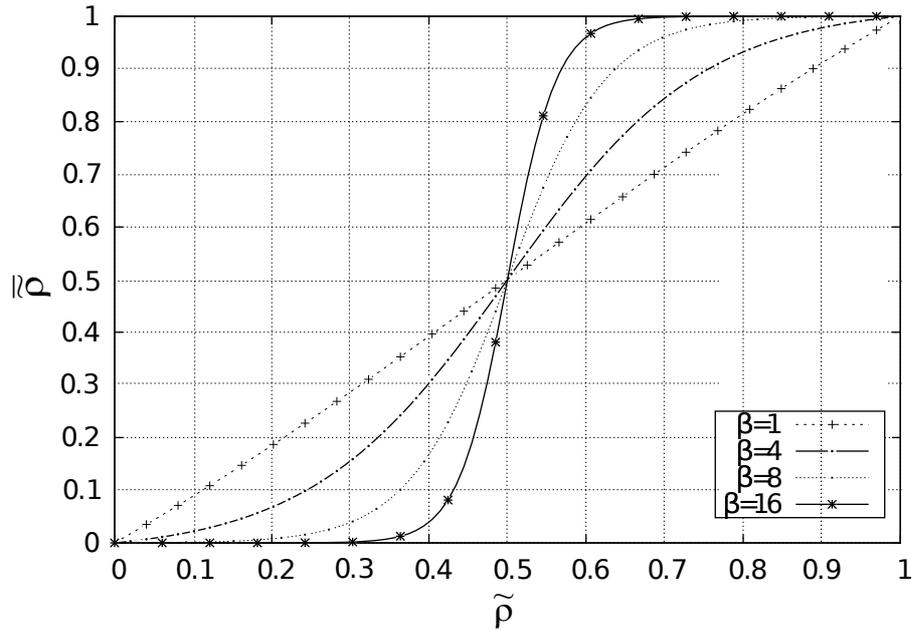


Figura 6.5: Função de projeção aplicada neste trabalho, para diferentes valores de β e $\eta = 0.5$.

Neste trabalho, as densidades físicas estão contidas no vetor $\bar{\rho}$. Portanto, elas são função das densidades filtradas que, por sua vez, dependem das variáveis de projeto

$$\bar{\rho}(\tilde{\rho}(\rho)), \quad (6.5)$$

e isso é levado em conta no momento de obter as derivadas exigidas pelo método de programação matemática implementado.

Indicador de nível de cinza

Neste trabalho, uma medida de contraste é aplicada para comparar o nível de cinza ainda presente na topologia otimizada. O indicador de nível de cinza é introduzido como [Sigmund, 2007]

$$EC = \frac{\sum_{i=1}^{nelem} 4 \times \bar{\rho}_i (1 - \bar{\rho}_i)}{nelem} \times 100\%, \quad (6.6)$$

onde $nelem$ é o número de elementos na malha.

No caso de todos os elementos da malha possuírem densidade intermediária, ou seja, $\bar{\rho}_i = 0.5$, para todo i , o valor do indicador de escala de cinza retorna $EC = 100\%$ e, se todos os elementos possuírem densidade física 0 ou 1, o valor do indicador é $EC = 0\%$.

Essa é uma boa medida para a eficiência do algoritmo em diminuir o nível de cinza na topologia otimizada, e é utilizado neste trabalho de forma a comparar os resultados para diferentes parâmetros aplicados.

6.3 Restrição de volume

Conforme explicado ao longo deste trabalho, um filtro de projeção é aplicado às densidades filtradas. Esse operador ajuda o processo de otimização a convergir para topologias com menor escala de cinza, comparando-as com resultados sem a aplicação dessas técnicas.

No entanto, quando são utilizadas projeções baseadas em funções do tipo Heaviside, que é o caso neste trabalho, uma questão importante é quanto a preservação de volume antes e depois da aplicação desses filtros. Alguns filtros de projeção, como os propostos por Guest et al. [2004] e Sigmund [2007] não garantem a preservação de volume [Xu et al., 2010].

A Figura 6.6 mostra a evolução da função de restrição do volume, onde apenas pequenas perturbações são percebidas ao atualizar os valores do parâmetro de curvatura da função suavizada de Heaviside.

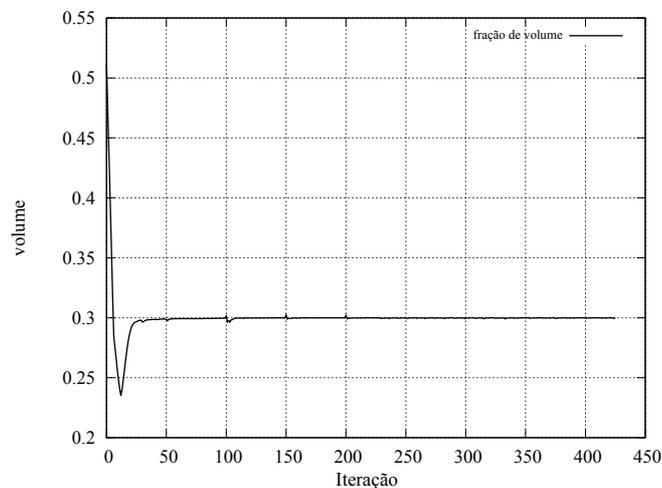


Figura 6.6: Histórico da função restrição de volume, utilizando o filtro de projeção da Equação 6.4.

A aplicação de filtros que garantem a preservação de volume é essencial para a obtenção dos resultados, pois asseguram que a restrição de volume é respeitada na topologia otimizada, a convergência é obtida de maneira mais rápida e estável.

Neste trabalho, o filtro aplicado (Equação 6.4) possui os mesmos requerimentos necessários para a preservação de volume que o proposto por Xu et al. [2010] e, portanto, a preservação de volume é garantida.

6.4 Restrição de tensão

Otimização topológica com restrição de tensão ainda é um grande desafio a ser superado. A aplicação de um critério para a tensão em problemas de otimização topológica impõe uma série de obstáculos na busca pela solução do problema estabelecido [Le et al., 2010].

Cada um deles deve ser tratado de maneira diferente. Abaixo, os problemas são descritos separadamente, bem como as técnicas utilizadas para superar cada um deles.

6.4.1 Problema de singularidade de tensão

Primeiro, o conhecido problema de singularidade de tensão aparece quando elementos que estão se aproximando de densidade zero somem do espaço de soluções, resultando em subespaços degenerados que não são identificados pelo algoritmo de solução, que acaba preso em mínimos locais. Este problema é descrito por Kirsch [1990] e posteriormente por Cheng e Jiang [1992], onde a área transversal de algumas barras de uma treliça se aproximam de zero e $\sigma \rightarrow \infty$, tornando caro para o algoritmo a retirada da barra. Esta é uma imprecisão do algoritmo pois quando uma barra é retirada do espaço de soluções a sua tensão deve ser 0.

O problema com treliças é superado através de funções que suavizam o espaço viável de soluções, e ajudam o algoritmo a convergir para soluções melhores [Cheng e Guo, 1997; Rozvany e Birker, 1992]. Porém, a adaptação destas funções de um meio discreto, no caso das treliças, para um meio contínuo mostrou inicialmente algumas imprecisões como, por exemplo, a incapacidade de recuperar o valor original de tensão quando a densidade física do elemento é 1.

Apenas após algumas modificações essas funções foram adaptadas para problemas no meio contínuo [Duisinx e Sigmund, 1998; Duisinx e Bendsøe, 1998], tornando-se mais eficientes na representação do campo de tensões da topologia.

Neste trabalho, um esquema de relaxação baseado no método proposto por Duysinx e Bendsøe [1998] é aplicado à tensão de von Mises em cada elemento da malha.

A tensão em cada elemento é dada por

$$\sigma_i = \bar{\rho}_i^q \sigma_{vM_i}, \quad (6.7)$$

onde σ_i é a tensão relaxada, $\bar{\rho}_i$ é a densidade física do i -ésimo elemento, q é o parâmetro de relaxação e σ_{vM_i} é a tensão efetiva de von Mises do i -ésimo elemento calculada no centroide do elemento como

$$\sigma_{vM_i} = \sqrt{(\tau_i^T \mathbf{V} \tau_i)}, \quad (6.8)$$

com \mathbf{V} sendo uma matriz auxiliar definida como

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

e o vetor com a tensão de Cauchy, $\tau_i = \{\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}\}^T$ é calculado para o material base sólido (com $E = E_0$), ou seja, sem a aplicação da interpolação material proposta pelo SIMP.

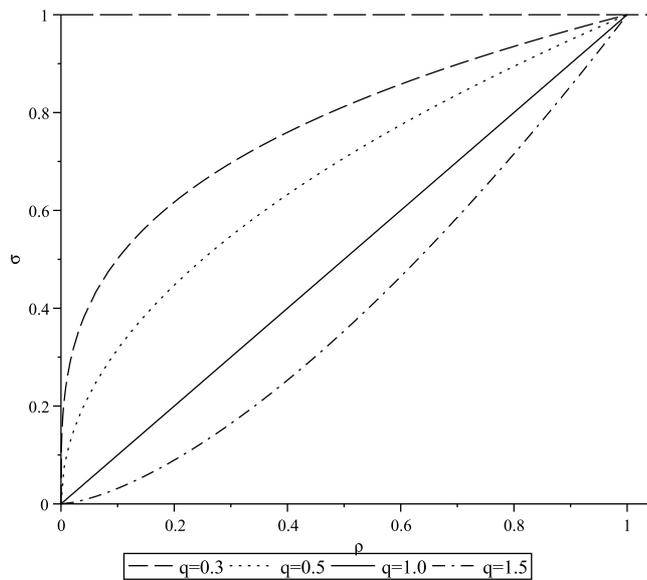


Figura 6.7: Função de penalização para a tensão, para alguns valores de q e tensão limite $\sigma = 1$.

O método de relaxação mostrado na Equação 6.7 permite que a tensão do i -ésimo elemento vá para zero quando $\bar{\rho}_i \rightarrow 0$ e recupere o valor original de tensão quando $\bar{\rho}_i \rightarrow 1$, resolvendo o problema de singularidade de tensão. A Figura 6.7 mostra o comportamento da função de penalização aplicada neste trabalho, onde pode ser visto que o expoente de penalização q exerce um importante papel na definição dos valores de tensão, principalmente quando a densidade física do elemento apresenta valores intermediários.

6.4.2 Relação entre tensão e densidade física do elemento

Outra importante condição que precisa ser superada no tratamento de tensões é o alto grau de não linearidade na relação tensão e densidade do elemento. O nível de tensão pode variar significativamente quando novos furos ou cantos vivos se formam durante o processo de otimização. Especialmente com a técnica de atualização de β empregada neste trabalho, o problema de se controlar a máxima tensão pode se tornar uma difícil tarefa.

A figura 6.8 mostra um exemplo do comportamento da norma da tensão frente à atualizações do problema de otimização. O controle sobre a restrição diverge quando o valor de β é atualizado.

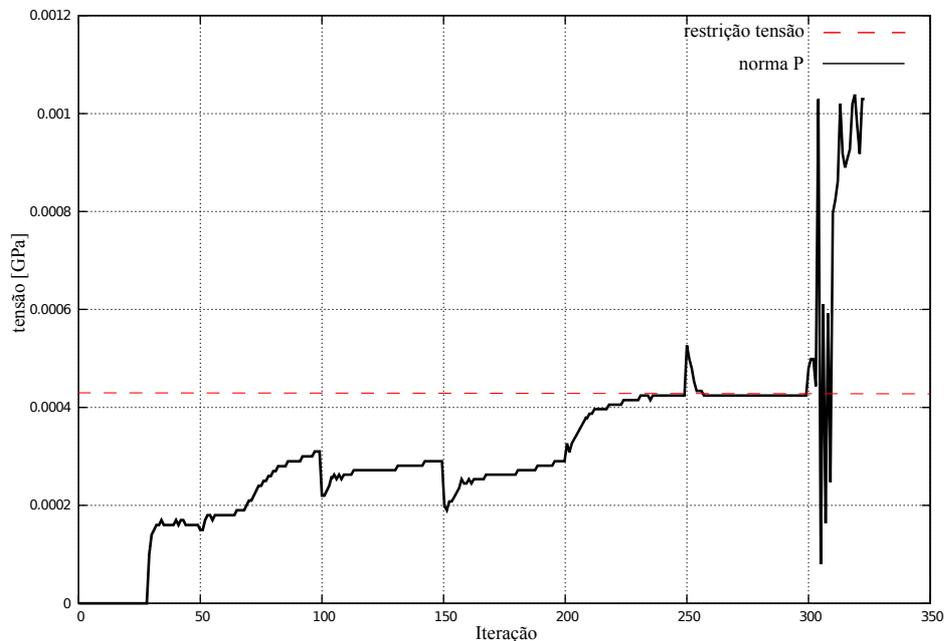


Figura 6.8: Comportamento da tensão com atualizações de β a cada 50 iterações. A linha pontilhada indica o limite de tensão estabelecido.

Portanto, existe a necessidade de se empregar um algoritmo robusto para tratar dessas variações, para que o processo de otimização obtenha convergência aceitável e respeite o limite de tensão imposto. Neste trabalho, como explicado anteriormente, uma função de projeção é aplicada para levar as densidades físicas para valores próximos de 0/1, isso é feito através da atualização do parâmetro β que controla a curvatura de uma função baseada em uma tangente hiperbólica.

O problema observado é que, para valores elevados de β ($\beta \geq 8$), a função começa a se aproximar da função degrau de Heaviside, e com isso a projeção $\tilde{\rho} \rightarrow \bar{\rho}$ começa a representar grandes saltos na densidade física. Isso faz com que o comportamento da função de restrição da tensão f_s se torne instável, em função dessa relação altamente não linear.

Principalmente para valores de β mais altos, esse procedimento faz com que o algoritmo de programação matemática perca o caminho da convergência. Em função disso, para evitar problemas dessa natureza, neste trabalho é proposta uma alteração na escolha das assíntotas móveis no MMA toda vez que o valor de β seja atualizado.

O procedimento consiste em utilizar a técnica proposta por Guest et al. [2011], na qual é sugerida uma inicialização diferente para o método das assíntotas móveis, de maneira a propiciar que se inicie o problema já com altos valores de β , ao invés da aplicação de um método de continuação para o problema. Porém no caso deste trabalho, essa técnica é aplicada toda vez que o valor de β é atualizado, o que consiste também em reinicializar o MMA nesses pontos, ou seja, ignorar a informação das iterações anteriores.

Para reinicializar o MMA e recomeçá-lo com a distância entre assíntotas proposta por Guest et al. [2011], é necessário ajustar o valor de s_0 na Equação 5.17, aplicando

$$s_0 = \frac{0.2}{\beta + 1}. \quad (6.10)$$

Essa modificação tem dois efeitos diretos, ele cria uma aproximação bem mais conservadora para as assíntotas (como explicado na seção 5.2.1) e delimita a estimativa inicial para as variáveis de projeto, de maneira que os limites fiquem bastante restritos [Guest et al., 2011].

Isso claramente atrasa o processo de convergência, mas permite que o algoritmo de programação controle a restrição de tensão de maneira bem mais eficiente, especialmente no momento da atualização da curvatura da função de projeção (eq. 6.4).

6.4.3 Natureza local do problema de tensão

A terceira questão a ser superada no tratamento de tensão é a natureza local do problema. Embora existam métodos que possibilitam o tratamento de um grande número de restrições no problema de otimização [Pereira et al., 2004; Emmendoerfer Jr e Fancello, 2014], a maneira mais comum para lidar com a restrição de tensão é eleger uma medida global, que represente o campo de tensões no domínio da topologia.

Neste trabalho uma medida global baseada na norma P proposta por Duysinx e Sigmund [1998], e posteriormente modificada por Le et al. [2010] é aplicada para representar o valor máximo da tensão dentro do domínio de projeto. Esta formulação visa controlar o nível de tensão capturando o comportamento da tensão máxima.

Dessa maneira, a restrição de tensão é escrita como

$$\sigma_{\text{PN}} = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_\sigma} v_i \sigma_i^P \right)^{\frac{1}{P}}, \quad (6.11)$$

onde \mathbb{N}_σ representa o conjunto de elementos a serem restritos, v_i é o volume do i -ésimo elemento, σ_i é a medida de tensão elementar já relaxada (eq. 6.7) e P é o parâmetro para a norma de tensão. Percebe-se que, quando $P \rightarrow \infty$, a norma P retorna o valor máximo entre todas as componentes do conjunto \mathbb{N}_σ .

Entretanto, quanto maior o valor de P , maior o grau de não linearidade da função, e maiores as chances do algoritmo encontrar mínimos locais [Le et al., 2010]. Pela experiência nos problemas descritos neste trabalho, um valor de $P = 12$ aproxima o valor da norma de maneira satisfatória em relação ao valor máximo de tensão calculada no conjunto \mathbb{N}_σ , sem constituir em problema para o algoritmo a busca pela convergência.

No trabalho de Le et al. [2010] a medida de tensão normalizada é apresentada como

$$\bar{\sigma}_{\text{PN}} = c \sigma_{\text{PN}}, \quad (6.12)$$

onde o parâmetro de normalização c é proposto para dar um significado físico à norma P e é definido para $n \geq 1$, onde n é o número da iteração

$$c^n = \alpha^n \frac{\sigma_{\text{max}}^{n-1}}{\sigma_{\text{PN}}^{n-1}} + (1 - \alpha^n) c^{n-1}, \quad (6.13)$$

onde σ_{\max} é o atual valor máximo da tensão, retirado do tensor tensão de Cauchy e α é um parâmetro que controla a atualização de c entre as iterações.

Neste trabalho, $\alpha^n = 0.5$ para todo n e $c^0 = 1$ são usados. A normalização, da maneira proposta, fornece uma aproximação bastante eficaz para a tensão máxima

$$\max(\boldsymbol{\sigma}) \approx \bar{\sigma}_{\text{PN}}, \quad (6.14)$$

permitindo um controle mais eficiente da máxima tensão, quando usada uma tensão limite σ^* .

Portanto, a Equação 6.12 é escolhida como a função restrição no problema de otimização, ou seja, $f_s = \bar{\sigma}_{\text{PN}}$ na equação 6.1.

6.4.4 Metodologia e etapas do projeto

Uma vez determinado todos os componentes do problema de otimização, pode-se aplicar a metodologia escolhida neste trabalho.

Os dados de entrada, tal como propriedades do material, condições de contorno e geometria são definidas em um arquivo externo, que é lido pelo código. Neste trabalho toda análise de elementos finitos, cálculo de tensão, equilíbrio e problema de otimização é escrito em linguagem de programação C++, usando as bibliotecas BLAS e UMFPACK.

Inicialmente, na iteração $i = 0$, um vetor contendo as variáveis de projeto é definido, bem como o valor inicial do parâmetro de curvatura da função de projeção β e η . Demais parâmetros, como o expoente de penalização para o SIMP (k), o expoente de penalização das tensões (q) e o raio do filtro de densidades também são definidos nessa fase.

Após a etapa de inicialização, as variáveis de projeto são modificadas pelo filtro de densidades, e o vetor $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ é obtido. As variáveis de projeto filtradas passam, então, pelo filtro de projeção, usando a função de Heaviside suavizada apresentada na Equação 6.4. Essas densidades, agora tratadas como densidades físicas do problema, são usadas para análise de equilíbrio com o método de Newton-Raphson. O equilíbrio é atingido dividindo a carga externa em duas parcelas iguais.

Uma vez obtido o equilíbrio, os deslocamentos e deformações são usados para calcular as tensões. As tensões são transformadas na tensão equivalente de von Mises, e a norma P é obtida.

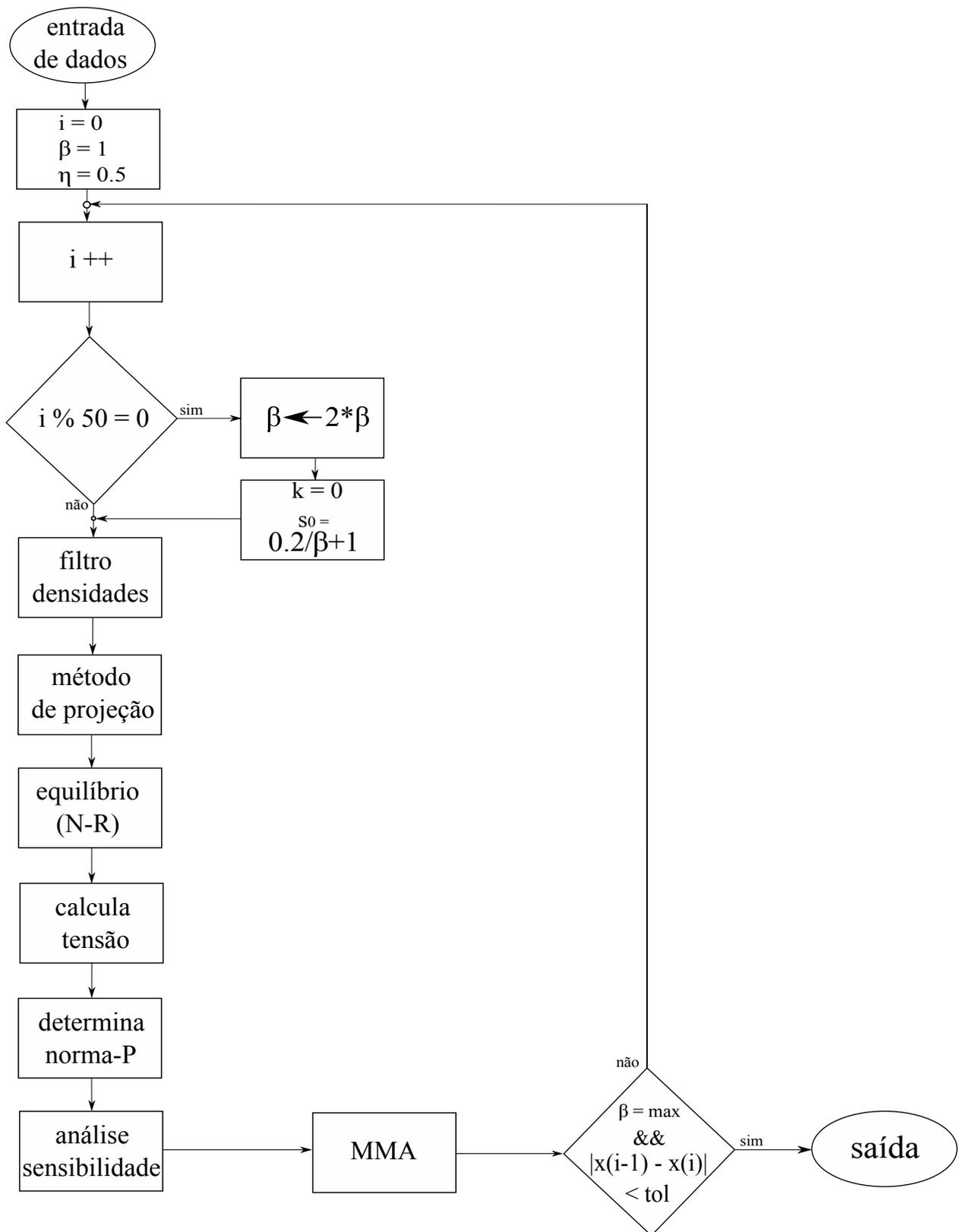


Figura 6.9: Fluxograma do processo de otimização.

As derivadas são calculadas analiticamente usando um método adjunto, como é visto na seção 7. Assim que são calculadas as sensibilidades, a atualização das variáveis de projeto é dada pelo MMA.

Um teste de convergência é realizado, sendo que o critério de convergência para as variáveis de projeto, e para β é dado por

$$\max \{|\rho^{i-1} - \rho^i|\} \leq 1 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \beta = \beta_{max}. \quad (6.15)$$

A Equação 6.15 indica que, se a maior variação no valor das variáveis de projeto for menor que uma tolerância, e o valor de β é igual ao máximo especificado, o algoritmo atingiu a convergência. Caso a convergência não seja verificada, o valor da iteração é atualizado.

A cada 50 iterações o valor de β é dobrado, o contador interno do MMA é zerado e o valor de s_0 é modificado, de acordo com a Equação 6.10.

A Figura 6.9 apresenta um fluxograma com o esquema de otimização aplicado neste trabalho.

Na prática, o número mínimo de iterações para o problema é 250, uma vez que β é dobrado a cada 50 iterações até um máximo de $\beta_{max} = 16$, começando com 1.

A variável k que aparece no fluxograma se refere ao contador interno do MMA, e fazer $k=0$ é o mesmo que fazer o método desconsiderar as informações anteriores, e reiniciar o problema a partir daquele ponto.

7. CÁLCULO DAS SENSIBILIDADES

Neste capítulo, a análise da sensibilidade das funções objetivo e restrições são calculadas através do método adjunto. O cálculo das derivadas de todas as funções envolvidas em relação às variáveis de projeto são necessárias para o algoritmo de programação matemática obtenha o valor do novo conjunto de variáveis de projeto em cada iteração, como visto na seção 5.2.1.

Com exceção da derivada do volume, que possui uma relação direta com a variável de projeto, para todos os outros casos, o método adjunto é aplicado para obter as derivadas analiticamente.

Inicialmente, como explicado na Equação 6.5, as densidades físicas $\bar{\rho}$ diferem das variáveis de projeto ρ , em função da aplicação do filtro de densidades e do método de projeção.

Portanto, a derivada das funções objetivo e restrições em relação às variáveis de projeto são recuperadas pela regra da cadeia

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_j} = \sum_{i \in \mathbb{N}_{e,j}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}_i} \frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial \tilde{\rho}_i} \frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \rho_j}, \quad (7.1)$$

onde $\mathbb{N}_{e,j}$ é o conjunto de elementos que estão dentro do raio do filtro de densidades, traçado a partir do elemento j .

Os dois últimos termos da Equação 7.1 não diferem para cada função. O último termo surge da transformação realizada pelo filtro de densidades na variável de projeto original

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_i}{\partial \rho_j} = \frac{w(\mathbf{x}_j)v_j}{\sum_{j \in \mathbb{N}_{e,i}} w(\mathbf{x}_j)v_j}, \quad (7.2)$$

e o penúltimo termo recupera a transformação realizada nas densidades físicas, pelo método de projeção proposto na Equação 6.4

$$\frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{(1 - \tanh(\beta(\tilde{\rho}_i - \eta))^2) \beta}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}, \quad (7.3)$$

e, com esses dois termos calculados, pode-se dar início ao cálculo das derivadas do primeiro termo da Equação 7.1.

7.1 Derivada da função objetivo

A função objetivo do problema de otimização é escrita como

$$f = \mathbf{l}^T \mathbf{u}, \quad (7.4)$$

e a sua derivada possui uma relação indireta com a variável de projeto

$$\frac{df}{d\tilde{\rho}_i} = \frac{df}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\rho}_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\rho}_i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\rho}_i} \right), \quad (7.5)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}$ é o vetor resíduo da análise de equilíbrio, e

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{ext}}{\partial \tilde{\rho}_i} = \frac{\partial \mathbf{f}_{ext}}{\partial u_i} = 0, \quad (7.6)$$

ou seja, o vetor de forças externas é independente do deslocamento e da variável de projeto, o que resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = -\frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial u_i} = -\mathbf{K}, \quad (7.7)$$

onde \mathbf{K} é a matriz tangente proveniente da análise por elementos finitos [Wriggers, 2008].

Portanto, a Equação 7.5 pode ser arranjada da seguinte forma

$$\frac{df}{d\tilde{\rho}_i} = \left(\frac{df}{d\mathbf{u}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\rho}_i} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\rho}_i}, \quad (7.8)$$

onde o primeiro termo entre parênteses é definido como

$$\frac{df}{d\mathbf{u}} = \mathbf{l}^T, \quad (7.9)$$

e o último

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\rho}_i} = k\tilde{\rho}_i^{k-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{f}_{int}^0, \quad (7.10)$$

onde \mathbf{f}_{int}^0 refere-se ao vetor de forças internas não penalizado, ou seja, usando $E_i = E^0$.

A dependência do deslocamento em relação à variável de projeto constitui um cálculo

difícil de ser realizado, e como o vetor adjunto $\boldsymbol{\lambda}$ ainda está por ser determinado, o mesmo é escolhido de forma que

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}, \quad (7.11)$$

e, com isso, não é necessário o cálculo de $d\mathbf{u}/d\rho_i$.

Portanto, a derivada da função objetivo em relação à variável de projeto é definida pelo produto interno do vetor adjunto e o vetor com as derivadas da força interna em relação à variável de projeto

$$\frac{df}{d\tilde{\rho}_i} = -\boldsymbol{\lambda}^T k\tilde{\rho}_i^{k-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{f}_{int}^0, \quad (7.12)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor solução do problema adjunto, escrito na Equação 7.11.

7.2 Derivada do volume

O volume possui dependência linear com a variável de projeto, e é definido em um problema de otimização topológica como

$$\mathbf{V} = \int_{\Omega} \tilde{\rho} d\Omega = \sum_{i \in \mathbb{N}_e} \tilde{\rho}_i v_i, \quad (7.13)$$

onde o cálculo da derivada da restrição volume, definido na Equação 6.1, é feito de maneira direta por

$$\frac{df_v}{d\tilde{\rho}_i} = v_i, \quad (7.14)$$

onde v_i é o volume do i -ésimo elemento.

7.3 Derivada da tensão

O cálculo da derivada da tensão em relação à variável de projeto é o mais complicado entre todos necessários para este trabalho. Tanto matemática quanto computacionalmente, a determinação da sensibilidade da norma de tensão para cada elemento constitui o cálculo mais extenso entre os necessários neste trabalho.

A restrição de tensão aplicada neste trabalho é escrita como

$$f_s = c \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_\sigma} v_i \sigma_i^P \right)^{\frac{1}{P}} \quad (7.15)$$

onde o problema adjunto é escrito como

$$\frac{df_s}{d\tilde{\rho}_i} = c \left[\frac{df_s}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\rho}_i} + \frac{\partial f_s}{\partial \tilde{\rho}_i} + \boldsymbol{\lambda}_\sigma^T \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\rho}_i} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\rho}_i} \right) \right], \quad (7.16)$$

e o primeiro termo da Equação 7.16 é escrito como

$$\frac{df_s}{d\mathbf{u}} = \frac{\partial \sigma_{\text{PN}}}{\partial \sigma_{\text{sum}}} \frac{\partial \sigma_{\text{sum}}}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{\text{vM}}} \frac{\partial \sigma_{\text{vM}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{u}}, \quad (7.17)$$

e a seguinte relação é escrita para auxiliar nos cálculos

$$\sigma_{\text{sum}} = \sum_{i \in \mathbb{N}_\sigma} v_i \sigma_i^P = v_1 \sigma_1^P + v_2 \sigma_2^P + \dots + v_n \sigma_n^P, \quad (7.18)$$

onde n é o número total de elementos pertencentes ao conjunto \mathbb{N}_σ .

Os termos, um a um, da regra da cadeia são descritos abaixo. A derivada da norma em relação ao somatório, definido na equação 7.18, é escrito como

$$\frac{\partial \sigma_{\text{PN}}}{\partial \sigma_{\text{sum}}} = \frac{1}{P} \sigma_{\text{sum}}^{\frac{1}{P}-1}. \quad (7.19)$$

A derivada do somatório em relação à tensão penalizada é escrito como

$$\frac{\partial \sigma_{\text{sum}}}{\partial \sigma_i} = P v_i \sigma_i^{P-1}. \quad (7.20)$$

A tensão penalizada é função da tensão equivalente de von Mises, de maneira que

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{\text{vM}}} = \bar{\rho}_i^q. \quad (7.21)$$

A relação entre a tensão equivalente de von Mises, e o tensor tensão de Cauchy é escrito como

$$\frac{\partial \sigma_{\text{vM}}}{\partial \tau_i} = \frac{1}{2} (\tau_i^T \mathbf{V} \tau_i)^{\frac{1}{2}-1} \frac{\partial \mathbf{V} \tau_i^2}{\partial \tau_i} = \frac{1}{2 \sigma_{\text{vM}}} \frac{\partial \mathbf{V} \tau_i^2}{\partial \tau_i}, \quad (7.22)$$

onde o último termo é escrito como

$$\frac{\partial \mathbf{V} \tau_i^2}{\partial \tau_i} = 2 \mathbf{V} \tau_i. \quad (7.23)$$

Relembrando a definição do tensor de Cauchy τ_i , escreve-se

$$\tau_i = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T, \quad (7.24)$$

onde é importante lembrar que, como demonstrado no capítulo 3, todos os termos na Equação 7.24 têm dependência do deslocamento.

Portanto, o último termo da Equação 7.17 é escrito como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u_i} = \frac{\partial J^{-1}}{\partial u_i} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T + J^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_i} \mathbf{S} \mathbf{F}^T + J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u_i} \mathbf{F}^T + J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial u_i}. \quad (7.25)$$

O primeiro termo da derivada pode ser escrito como

$$\frac{\partial J^{-1}}{\partial u_i} = \frac{\partial J^{-1}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_i}, \quad (7.26)$$

onde \mathbf{E} é o tensor deformação de Green-Lagrange, e a seguinte relação é usada [Wriggers, 2008]

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_i} = \mathbf{B}_L, \quad (7.27)$$

e, para o primeiro termo, escreve-se a seguinte relação [Wriggers, 2008]

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} = J \mathbf{C}^{-1}, \quad (7.28)$$

onde \mathbf{C} é tensor de Cauchy-Green à direita. Através da equação acima é possível definir a seguinte relação

$$\frac{\partial J^{-1}}{\partial \mathbf{E}} = -J^{-1} \mathbf{C}^{-1}. \quad (7.29)$$

A derivada do gradiente de deformações em relação aos deslocamentos é escrita usando algumas definições anteriormente apresentadas

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_i}, \quad (7.30)$$

que resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_i} = 2\mathbf{F}^{-T}\mathbf{B}_L. \quad (7.31)$$

Da mesma maneira, a derivada do segundo Piola-Kirchhoff em relação ao deslocamento é escrito como

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u_i}, \quad (7.32)$$

onde o primeiro termo foi definido anteriormente. Ele dá origem ao tensor constitutivo

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{D}, \quad (7.33)$$

e o segundo termo é escrito como

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u_i} = \mathbf{D}\mathbf{B}_L. \quad (7.34)$$

Usando as definições anteriores, do cálculo das sensibilidades para a função objetivo, é possível reescrever a Equação 7.16 de maneira a isolar a derivada do deslocamento em relação à densidade física

$$\frac{df_s}{d\tilde{\rho}_i} = c \left[\frac{d\mathbf{u}}{d\tilde{\rho}_i}^T \left(\frac{df_s}{d\mathbf{u}} - \boldsymbol{\lambda}_\sigma^T \mathbf{K} \right) + \frac{\partial f_s}{\partial \tilde{\rho}_i} + \boldsymbol{\lambda}_\sigma^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\rho}_i} \right], \quad (7.35)$$

de maneira que o problema adjunto é escrito como

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}_\sigma = \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{u}}^T, \quad (7.36)$$

e o lado direito é escrito como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{u}_i} = c & \left(\sigma_{\text{sum}}^{\frac{1}{P}-1} v_i \sigma_i^{P-1} \tilde{\rho}_i^q \frac{1}{\sigma_{vM_i}} \mathbf{V}\tau_i \right)^T \left\{ \left[(-J^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_L)^T \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \right] + \right. \\ & \left. 2J \left[(\mathbf{F}^{-T}\mathbf{B}_L)^T \mathbf{S}\mathbf{F}^T + \frac{1}{2} (\mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{B}_L)^T \mathbf{F}^T + (\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{B}_L)^T \right] \right\}^T, \end{aligned} \quad (7.37)$$

onde o cálculo do lado direito da Equação 7.37 está desenvolvido ao longo dessa seção.

O segundo termo da Equação 7.16 é mais fácil de ser calculado. Uma vez que a tensão é calculada sob a função energia não penalizada, ou seja $E_i = E^0$, o tensor de Cauchy

não depende da densidade física

$$\frac{\partial f_s}{\partial \bar{\rho}_i} = c \sigma_{\text{sum}}^{\frac{1}{P}-1} v_i \sigma_i^{P-1} q \bar{\rho}_i^{q-1} \sigma_{vM_i}. \quad (7.38)$$

O último termo da Equação 7.16 é apresentado na Equação 7.10.

Dessa forma, escreve-se a derivada como

$$\frac{df_s}{d\bar{\rho}_i} = c \left(\sigma_{\text{sum}}^{\frac{1}{P}-1} v_i \sigma_i^{P-1} q \bar{\rho}_i^{q-1} \sigma_{vM_i} + \boldsymbol{\lambda}_\sigma^T k \bar{\rho}_i^{k-1} (E_0 - E_{min}) \mathbf{f}_{int}^0 \right), \quad (7.39)$$

onde o vetor adjunto $\boldsymbol{\lambda}_\sigma^T$ é obtido através da solução da Equação 7.37.

A derivada completa, que é enviada ao otimizador, é a da regra da cadeia apresentada na Equação 7.1.

8. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para o projeto de mecanismos flexíveis em otimização topológica, existem diversos resultados padrão que são usados para verificar se determinada formulação converge para topologias livres de articulações.

Neste trabalho, são implementados dois casos bastante conhecidos e utilizados em artigos científicos, com o intuito de testar formulações direcionadas ao projeto de mecanismos flexíveis.

O primeiro exemplo, o inversor de deslocamento, é usado para fazer uma extensa pesquisa. Diversas condições de contorno e uma série de testes são realizados. O segundo caso, o *gripper*, é usado para observar o efeito da restrição de tensão.

A Tabela 8.1 mostra as propriedades comuns aos dois casos. Propriedades materiais e critérios de convergência são aplicados igualmente em ambos os casos. Dados referentes à casos específicos são apresentados antes de cada problema.

Tabela 8.1: Propriedades mecânicas, geométricas e critérios comuns à todos exemplos.

Módulo de Young do material base - E_0	180 [GPa]
Módulo de elasticidade da fase vazio - E_{\min}	$1 \times 10^{-9} E_0$
Coefficiente de Poisson - ν	0.3
Comprimento do mecanismo - L	150 [μm]
Critério de convergência para Newton - Raphson (tolerância)	1×10^{-5}
Critério de parada do problema de otimização	1×10^{-3}
Parâmetro de penalização material - k	3
Ponto de corte para a função de projeção - η	0.5
Número máximo de iterações para atualizar a curvatura - β	50
Raio do filtro de densidades - R	8,4 [μm]

Neste trabalho são aplicadas as propriedades mecânicas do silício policristalino. Se-

gundo Cook [2006], os limites de resistência para o silício dependem muito da geometria, das condições de contorno, e, principalmente, da rugosidade da superfície no acabamento final, mas ficam em uma faixa entre 1 – 10 [GPa]. Este material é bastante aplicado no projeto de MEMS.

8.1 Inversor de deslocamentos

A Figura 8.1 mostra o mecanismo, onde simetria é utilizada tanto para a geometria quanto para as condições de contorno, de maneira que seja possível que apenas metade do domínio real seja modelado, com o intuito de poupar esforço computacional na análise por elementos finitos.

No inversor de deslocamentos, a porta de saída do mecanismo é esperada a se mover na direção oposta à porta de entrada. Os retângulos, em cinza escuro nas partes superiores direita e esquerda, são formadas por grupos de elementos que estão inativos, ou seja, eles são designados como tendo densidade física igual a 1. Eles também não são computados na análise da tensão global e, portanto, não fazem parte do conjunto \mathbb{N}_σ .

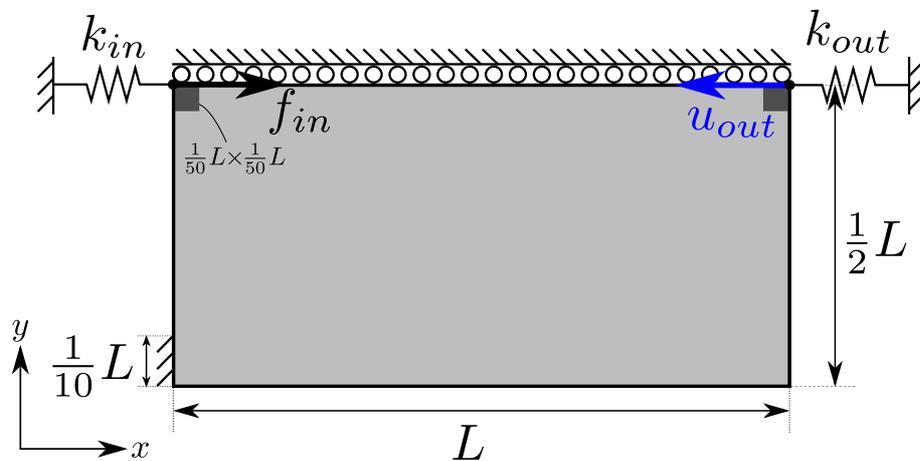


Figura 8.1: Problema do inversor de deslocamento flexível.

Devido a maneira como a carga e demais condições de contorno são aplicadas nas portas de entrada e saída, essas regiões exibirão altos valores de tensão, e podem esconder ou se sobrepor à outras regiões com altos valores de tensão.

Como tanto o atuador quanto a peça externa possuem regiões de contato finita, ou

seja, não atuam em único ponto do domínio (ou nó, na malha de finitos), essas regiões com material prescrito servem também para evitar problemas computacionais ou de singularidade de tensões.

A Tabela 8.2 mostra o valor das molas aplicadas nas portas de entrada e saída do mecanismo. Os valores de força de entrada também estão descritos.

Tabela 8.2: Condições de contorno para o inversor de deslocamento.

Rigidez da mola de entrada - k_{in}	$1 \left[\frac{N}{\mu m} \right]$
Rigidez da mola de saída - k_{out}	$1 \times 10^{-3} \left[\frac{N}{\mu m} \right]$
Força aplicada na porta de entrada - f_{in}	$10 \left[mN \right]$
Limite de volume admissível - V^*	30% do volume total do domínio

8.1.1 Efeito do parâmetro q

O primeiro teste realizado no trabalho é o estudo da influência do parâmetro q , de penalização da tensão. A explicação da importância da aplicação de uma penalização para o campo de tensões, em um problema de otimização topológica está descrito na seção 6.4.

A Figura 8.2 mostra um gráfico onde é possível verificar os valores finais para função objetivo e escala de cinza (EC) encontrados nas topologias ótimas, para diferentes escolhas do parâmetro de penalização.

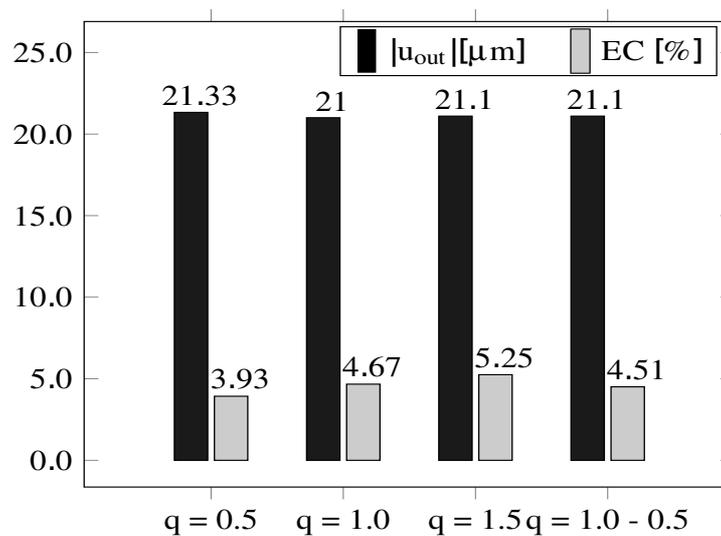


Figura 8.2: Função objetivo e escala de cinza para diversas escolhas de q .

É importante citar que o coeficiente mais estável e que garantiu um controle mais eficiente da restrição de tensão foi usando $q = 1$. Isso pode ser explicado por o valor 1 representar uma interpolação linear para os valores de tensão (Figura 6.7).

Porém, como a Figura 8.2 mostra, um valor de $q = 0.5$ ajudou o algoritmo a encontrar melhores valores para a função objetivo, e topologias ótimas com menor escala de cinza entre os testes realizados. Esse também é o valor usado por Le et al. [2010], por apresentar os melhores resultados para aquele trabalho.

Para gerar esses resultados foram rodados casos com $q = 0.5, 1.0, 1.5$, e um método de continuação onde, após a convergência da topologia com um valor de $q = 1.0$, esse número era mudado para 0.5, até uma nova convergência. Em nenhum dos casos é encontrado problemas para a convergência das topologias ou no controle das restrições.

Portanto, em todos os resultados apresentados neste trabalho, um valor de $q = 0.5$ é usado.

8.1.2 Valor constante para $\beta \times$ método da continuação para β

No trabalho de Guest [2009] é discutida a possibilidade de se começar o problema de otimização já com altos valores para β , ao invés da proposta de um método de continuação para esse parâmetro. Segundo o autor, essa técnica é capaz de garantir topologias ótimas com um número bastante reduzido de iterações, comparando-se com o método da continuação.



(a) $f = -20.07, \sigma^* = 1.0, EC = 10.43\%$

(b) $f = -21.00, \sigma^* = 1.0, EC = 8.32\%$

Figura 8.3: Análise usando um valor constante inicial para $\beta = 16$ (a) e com um método de continuação para β (b). Os valores de f estão em $[\mu m]$, e para σ^* em $[GPa]$.

Neste trabalho, os dois métodos foram comparados e a Figura 8.3 mostra um exemplo

do que ocorre em todos os testes realizados.

Com valores altos para β desde o início do processo de otimização, o algoritmo converge para topologias com nível de cinza maiores, e com valores da função objetivo sempre piores do que os casos em que o método da continuação é aplicado. O método da continuação para β consegue encontrar mínimos melhores do que com a técnica de iniciar o problema com um alto valor para β .

É importante citar que o número de iterações é bastante superior usando o método da continuação. Porém, quando se compara a diferença encontrada nos resultados, o número maior de iterações usando o método da continuação se torna irrelevante.

8.1.3 Limite para o valor de β

Como é visto na Figura 6.5, da seção 6.2, quanto maior o valor final escolhido para β , mais próxima de 0 ou 1 é projetada a variável filtrada $\tilde{\rho}_i$ no espaço de $\bar{\rho}_i$, e como consequência topologias com menos área cinza podem ser obtidas.

Para um caso em que a análise de equilíbrio é feita dentro da teoria linear infinitesimal, a projeção das variáveis físicas podem ser feitas com valores de β bastante altos (> 100), pois a perturbação causada pela atualização é controlada pela técnica de reinicialização do MMA proposta neste trabalho.

Entretanto, para o caso de uma análise não linear isso não é observado.

O método de Newton-Raphson empregado neste trabalho se mostra bastante instável nos momentos de atualização da curvatura da função de projeção.

A partir do momento em que a curvatura da função é ditada por valores de $\beta > 16$, as subseqüentes atualizações impedem o método de Newton de encontrar a convergência.

Diversas estratégias para a atualização do parâmetro de curvatura foram testadas, como atualizar os valores de β somando 1, ao invés de multiplicar por 2, ou aumentar o número de iterações até a nova atualização. Independente da técnica aplicada, o algoritmo sempre perde do caminho da convergência.

Portanto, para a metodologia empregada neste trabalho, o valor de β é atualizado até o valor $\beta_{max} = 16$. Apesar de representar um valor baixo, comparado aos obtidos com uma análise linear, o método de projeção ajuda o algoritmo a encontrar topologias ótimas com uma baixa escala de cinza.

A Tabela 8.3 compara dois resultados obtidos, com e sem o método de projeção para as densidades.

Tabela 8.3: Resultados obtidos com e sem a aplicação do método de projeção.

	função objetivo [μm]	EC
Método de projeção com $\beta_{max} = 16$	-21,00	8,32%
Sem método de projeção	-15,73	33,85%

Como pode ser visto, existe uma grande queda de desempenho sem o método de projeção, além de um nível de cinza mais alto. Altos valores para o nível de cinza na topologia otimizada dificultam uma subsequente interpretação dos resultados.

8.1.4 Efeito da restrição de tensão

Um dos principais objetivos da pesquisa realizada é estudar o efeito da restrição de tensão nos mecanismos flexíveis. Para estudar o efeito de tais restrições na topologia, nas articulações e no desempenho cinemático dos mecanismos, diversos limites de tensão são impostos ao problema de otimização.

A Figura 8.4 mostra o efeito direto de se aplicar um limite de tensão para o projeto do mecanismo. Os limites variam entre $\sigma^* = 2,0$ [GPa], onde a restrição de tensão não está ativa, até um valor mais baixo de $\sigma^* = 500$ [MPa] onde a forma, especialmente da articulação, varia bastante.

É possível observar que, com a diminuição do valor de σ^* , as articulações começam a ser substituídas por componentes flexíveis cada vez maiores, de maneira a distribuir melhor as deformações e controlar o limite de tensão.

O otimizador usa a possibilidade de poder escolher valores intermediários para as variáveis de projeto, com o objetivo de respeitar a restrição de tensão imposta. Apesar das técnicas de interpolação como o SIMP, por exemplo, tornarem caro para o otimizador utilizar valores intermediários, o alto grau de não linearidade na relação da tensão com a densidade faz com que esses valores sejam opções válidas para atualizar as variáveis de projeto.

Com isso, esses componentes flexíveis que surgem na topologia ajudam a acomodar as tensões, sem que o mecanismo perca muito de seu desempenho cinemático.

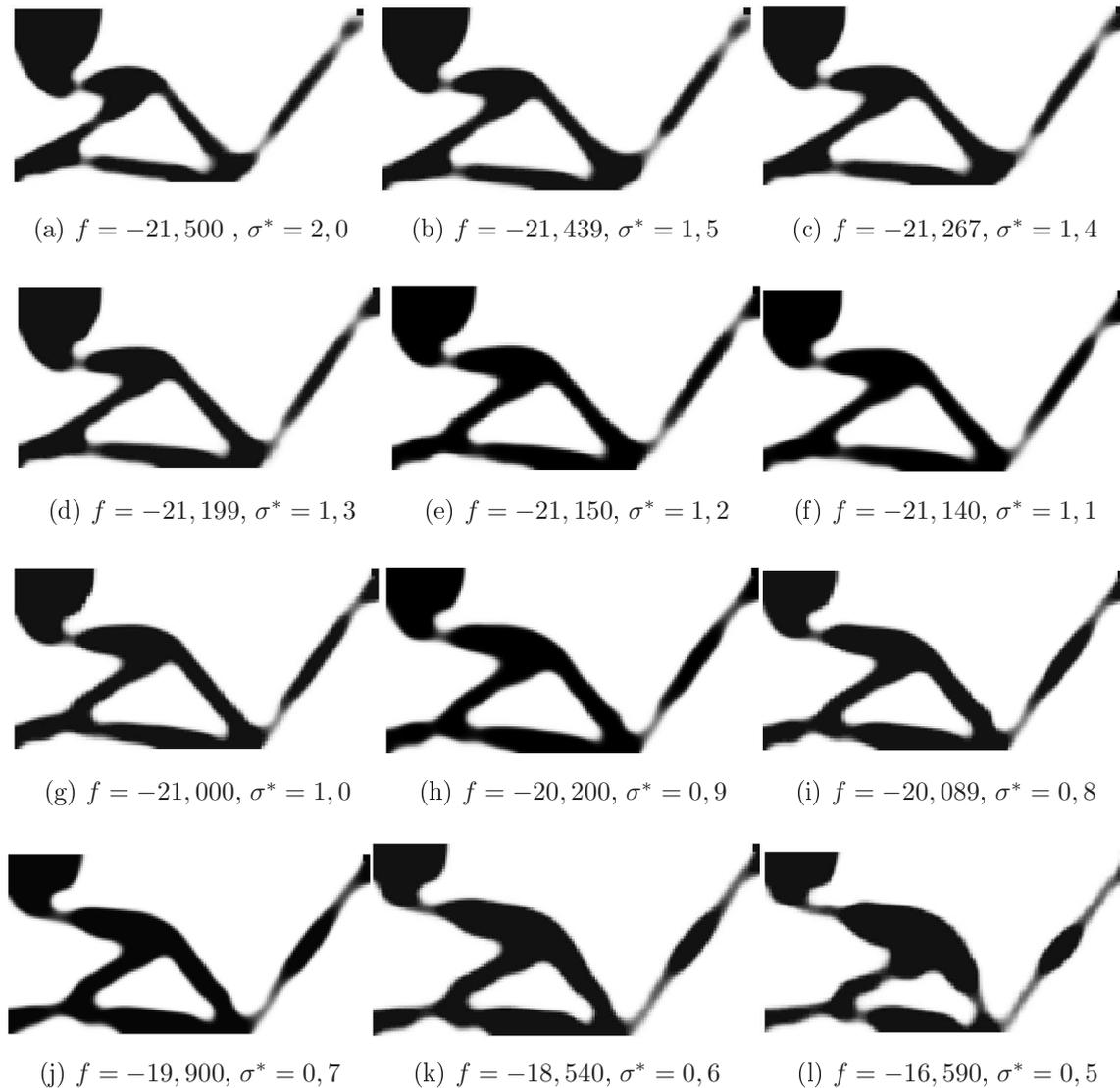


Figura 8.4: Topologias ótimas para diversos limites de tensão. Os valores para função objetivo (f) estão em μm , e para tensão (σ^*) em GPa.

A Figura 8.5 mostra o campo de tensões para as mesmas topologias apresentadas na Figura 8.4. Onde é visto que as tensões inicialmente concentradas, especialmente nos exemplos onde a restrição de tensão não está ativa, passam a ter valores máximos mais bem distribuídos pelo corpo do mecanismo. Isso indica que, conforme a restrição de tensão imposta alcança limites cada vez menores, o algoritmo distribui a tensão (e indiretamente a flexibilidade) de maneira mais homogênea, passando de um mecanismo de flexibilidade concentrada (Figura 8.5(a)) para mecanismos de flexibilidade mais bem distribuída.

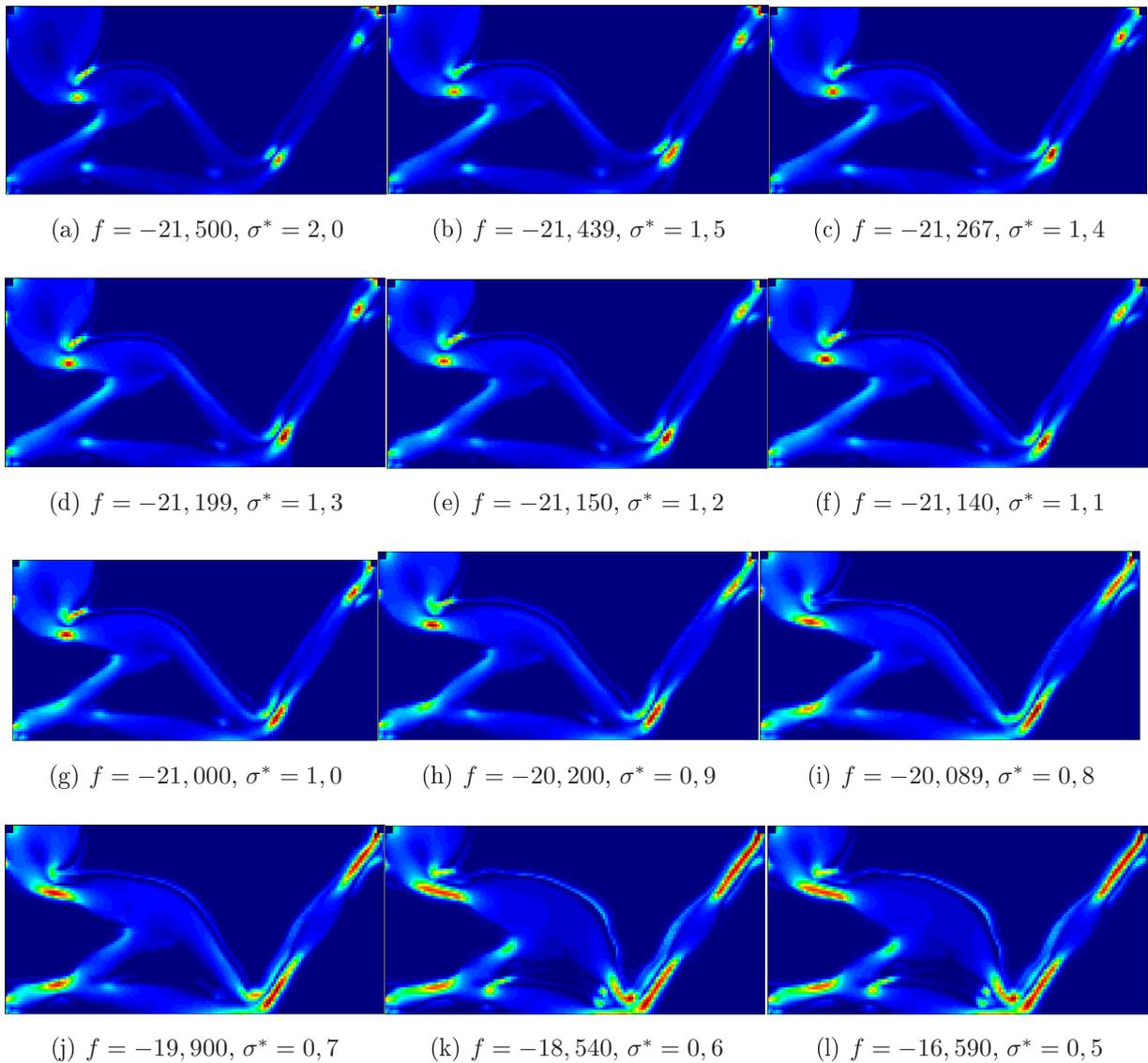


Figura 8.5: Campo de tensões para os mecanismos mostrados na Figura 8.4. Cada sub-figura possui uma escala diferente, onde as cores vermelha e azul indicam valores máximos e mínimos, respectivamente.

A Figura 8.6 mostra uma comparação entre o deslocamento de saída e o limite de tensão máxima imposto ao mecanismo.

No gráfico, é mostrado a inversa do valor absoluto dos deslocamentos, no eixo das abscissas, pelo limite de tensão que gradativamente é diminuído, representado no eixo das ordenadas.

Os resultados mostram que existe uma clara relação entre o nível de tensão imposto

e o desempenho cinemático do mecanismo. O que é esperado, levando em conta que a deformação do corpo é que gera o movimento.

Porém, outro ponto interessante nestes resultados é que existe uma faixa expressiva de valores em que a tensão pode ser imposta, antes que a restrição de tensão comece a influenciar efetivamente no desempenho cinemático do mecanismo.

Desde o ponto onde a restrição de tensão está inativa até o antepenúltimo caso, a função objetivo varia algo em torno de 7,5%. Uma queda significativa de desempenho só é observada quando é imposto um limite bastante baixo para tensão, algo que represente uma ordem de grandeza a menos que a tensão medida na topologia sem a restrição de tensão.

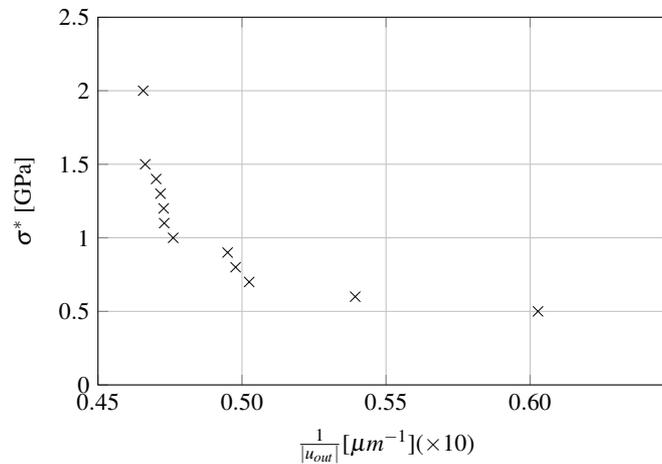


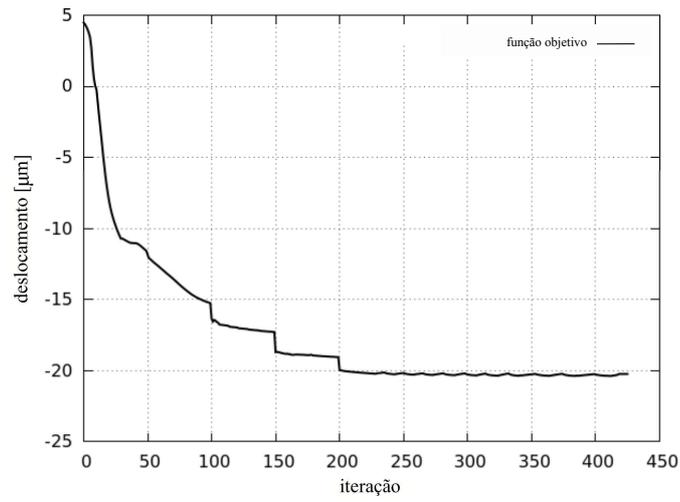
Figura 8.6: Função objetivo em relação ao limite de tensão.

Com relação aos resultados, é válido também observar que é possível suavizar a função descrita na Figura 8.6. Pode-se reiniciar o problema em pontos vizinhos aos indicados pelos resultados obtidos, e aplicar algum método de continuação de maneira a se encontrar melhores mínimos para a função objetivo.

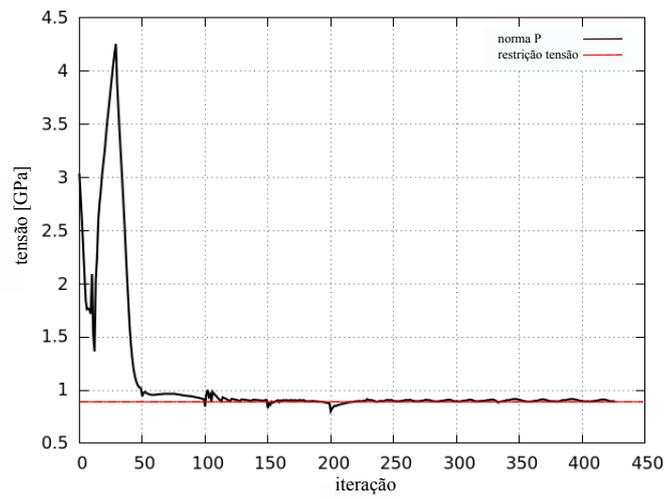
No entanto, isso apenas lança uma ideia de quanto complexos são esses problemas, pequenas mudanças em alguns parâmetros do problema podem fazer o algoritmo encontrar outros mínimos para a solução do problema de otimização.

Como esse não é o escopo do trabalho, a curva obtida serve bem ao propósito de mostrar a tendência do problema.

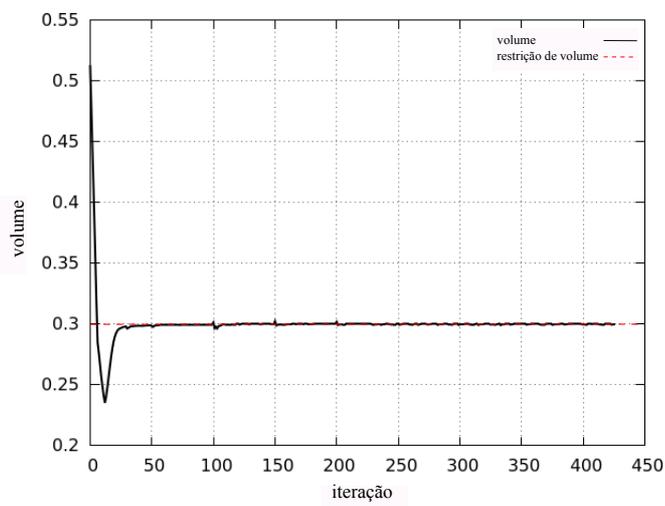
A Figura 8.7 mostra o histórico da função objetivo, das restrições de tensão e volume para o caso mostrado nas Figuras 8.4(h) e 8.5(h).



(a) função objetivo



(b) restrição de tensão



(c) restrição de volume

Figura 8.7: Histórico do processo de otimização para o caso da figura 8.4(h).

8.1.5 Efeito da rigidez externa

Em um mecanismo ideal, onde toda a energia de entrada é entregue na saída, temos o seguinte [Pedersen et al., 2001]

$$W_{in} = W_{out} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}k_{in}u_{in}^2 = \frac{1}{2}k_{out}u_{out}^2, \quad (8.1)$$

onde pode ser concluído que, mecanismos projetados para trabalhar com um alto requerimento para a rigidez externa entregam um pequeno deslocamento de saída, mas elevada força e vice versa.

Apesar de um mecanismo flexível estar longe de ser um mecanismo ideal, pois parte da energia disponível na entrada é usada para deformar o corpo, a conclusão acima ainda é válida.

O projeto de mecanismos que especificam elevadas forças de saída ou reduzidos deslocamentos de entrada indiretamente evitam o surgimento de articulações, pois em ambos os casos o deslocamento de saída é pequeno. Portanto, algumas das formulações citadas na revisão bibliográfica conseguem evitar o surgimento de tais problemas, mas ao mesmo tempo resultam em mecanismos com uma limitada atuação cinemática.

Por sua vez, a inclusão de uma restrição de tensão não implica diretamente em um aumento na rigidez global, e os mecanismos podem apresentar um maior deslocamento de saída. A Figura 8.8 mostra resultados para diferentes valores para a mola colocada na porta de saída, com e sem a restrição de tensão.

Nesta figura, observa-se que a formulação que contém a restrição de tensão garante o não aparecimento das articulações em todos os casos.

Além disso, a espessura e o comprimento dos componentes variam bastante com o requerimento de rigidez externa. Um aumento na exigência de força na porta de saída reflete em componentes com maior espessura e menor comprimento, de maneira a compensar a maior solicitação de flexão no componente.

Por outro lado, quando a força na porta de saída diminui, o deslocamento na porta de saída aumenta. Por consequência, a possibilidade de que apareçam articulações é maior.



(a) $f = -6,419 \quad k_{out} = 5 \times 10^{-2} \frac{N}{\mu m}$



(b) $f = -6,629 \quad k_{out} = 5 \times 10^{-2} \frac{N}{\mu m}$



(c) $f = -9,350 \quad k_{out} = 1 \times 10^{-2} \frac{N}{\mu m}$



(d) $f = -9,867 \quad k_{out} = 1 \times 10^{-2} \frac{N}{\mu m}$



(e) $f = -21,267 \quad k_{out} = 1 \times 10^{-3} \frac{N}{\mu m}$



(f) $f = -21,500 \quad k_{out} = 1 \times 10^{-3} \frac{N}{\mu m}$



(g) $f = -25,267 \quad k_{out} = 1 \times 10^{-4} \frac{N}{\mu m}$



(h) $f = -29,867 \quad k_{out} = 1 \times 10^{-4} \frac{N}{\mu m}$

Figura 8.8: Topologias para diversos valores de rigidez na porta de saída. Nos exemplos da coluna esquerda, os limites de tensão impostos são $\sigma^* = 1.4$ [GPa] para todos os casos. Nos exemplos da coluna direita a restrição de tensão não está ativa.

No entanto, como isso não é possível em função da restrição de tensão, a solução encontrada pelo algoritmo é alongar essas articulações, de maneira a diminuir a resistência à flexão do componente, indiretamente distribuindo a flexibilidade nessas regiões.

Outro detalhe interessante dessa análise é observar o ângulo do componente à direita. Esse ângulo pouco difere entre os casos com e sem restrição. Isso se deve justamente pelo fato de que a restrição de tensão não interfere no desempenho cinemático do mecanismo. Ao invés de mudar o comprimento do braço de alavanca, diminuindo o deslocamento de saída e o nível de tensão, o algoritmo muda a forma da articulação como explicado anteriormente.

Essa é uma característica positiva observada nos resultados, uma vez que se comprova que é possível incluir a restrição de tensão sem perda significativa no desempenho do mecanismo.

Por fim, é importante citar que os mesmos exemplos mostrados nesta seção foram analisados com uma formulação linear [De Leon et al., 2015]. E as mesmas conclusões são observadas.

8.1.6 Comparação com a análise linear

Os exemplos apresentados neste trabalho foram comparados com resultados obtidos através de uma análise linear de equilíbrio. Para isso, uma análise linear infinitesimal usando a lei de material de Kirchhoff - St. Venant (eq. 3.31), é usada.

Algumas diferenças são observadas quando comparados os mecanismos com as mesmas condições de contorno. A maior diferença entre as duas análises está nos valores de deslocamento da porta de saída dos mecanismos.

A Figura 8.9 mostra um exemplo onde duas topologias são comparadas.

Comparando o valor das funções objetivo para os dois casos, o valor de deslocamento na porta de saída do mecanismo modelado com análise não linear é cerca de 4-5 vezes maior do que o linear.

Além disso, a região da articulação é bastante diferente para os dois casos. No modelo linear, a substituição da articulação é dada por um componente com um, no máximo dois elementos na espessura. No caso não linear são três a cinco elementos na espessura.

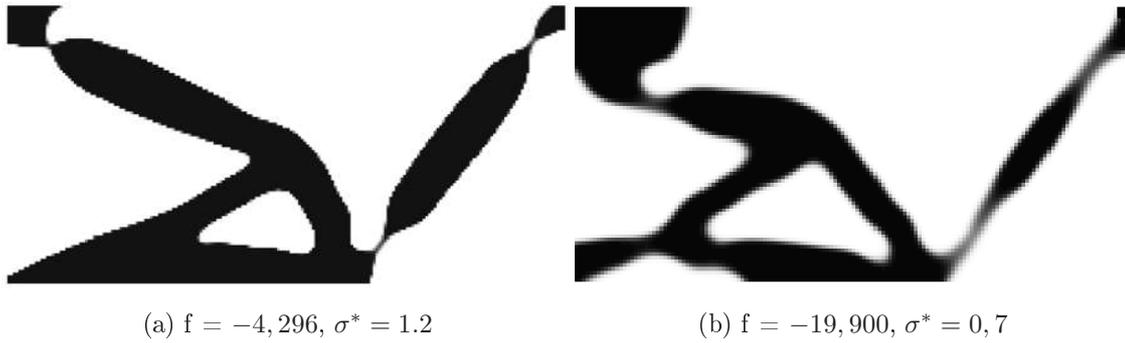


Figura 8.9: Comparação entre mecanismos obtidos (a) com análise linear e (b) com a análise não linear. O deslocamento está em $[\mu m]$ e a tensão em $[GPa]$.

8.2 Gripper flexível

O segundo caso aplicado neste trabalho é o *gripper* flexível. Como pode ser visto na Figura 8.10, o domínio é parecido com o caso do inversor de deslocamentos, com a diferença de que é necessário prescrever uma região sem material, onde a peça externa é acomodada. Uma região com material base é especificada abaixo da região da peça, de maneira que seja garantida a presença de material para atuar na peça externa.

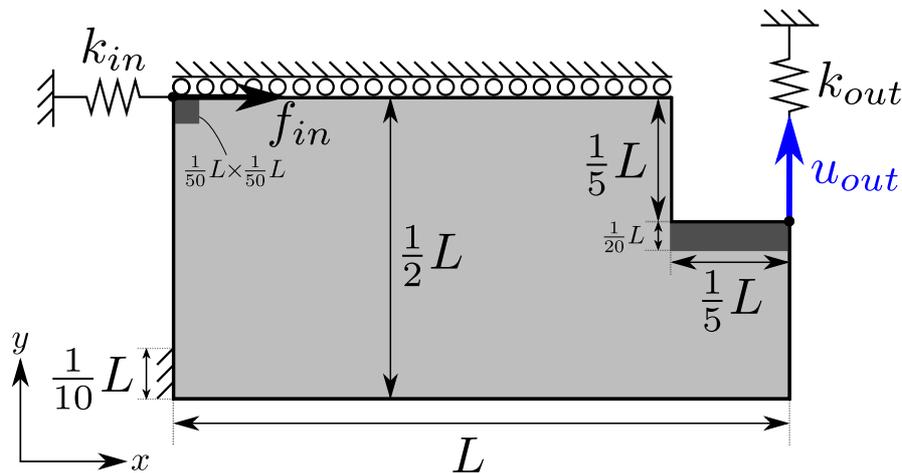


Figura 8.10: Esquema do problema do *gripper* flexível.

A exemplo do inversor, o domínio representa apenas metade do mecanismo. O retângulo no canto superior esquerdo segue a mesma ideia apresentada para o exemplo anterior. Tanto esse ponto quanto a grande área de material base prescrito abaixo da peça

ficam fora dos cálculos para norma de tensão. Os dados de geometria, material e do processo de otimização estão na Tabela 8.1. Na Tabela 8.4 estão os dados específicos para o exemplo do *gripper*.

Tabela 8.4: Dados de entrada para o *gripper* flexível.

Rigidez da mola de entrada - k_{in}	$1 \left[\frac{N}{\mu m} \right]$
Rigidez da mola de saída - k_{out}	$2 \times 10^{-3} \left[\frac{N}{\mu m} \right]$
Força aplicada na porta de entrada - f_{in}	$10 [mN]$
Limite de volume admissível - V^*	25% do volume total do domínio

A Figura 8.11 mostra a mesma ideia aplicada ao inversor, agora para o *gripper*. Várias topologias otimizadas são mostradas, para diferentes valores de tensão limite σ^* .

A Figura 8.12 mostra a distribuição de tensão nas topologias apresentadas na Figura 8.11. Diferente do observado no inversor, com a diminuição do limite de tensão imposto, o mecanismo apresenta mais pontos com picos de tensão. Existem mais pontos onde a tensão está concentrada, e os mecanismos não se aproximam de uma distribuição tão homogênea de tensão quanto no exemplo anterior.

Porém, como o limite de tensão é respeitado, a formulação é bem sucedida em diminuir a tensão máxima. O que acontece no caso do *gripper* é que mais pontos com flexibilidade mais alta são buscados para acomodar os requisitos de resistência da formulação. As articulações não estão alongadas como no caso anterior, mas as que existem não ultrapassam os limites estabelecidos.

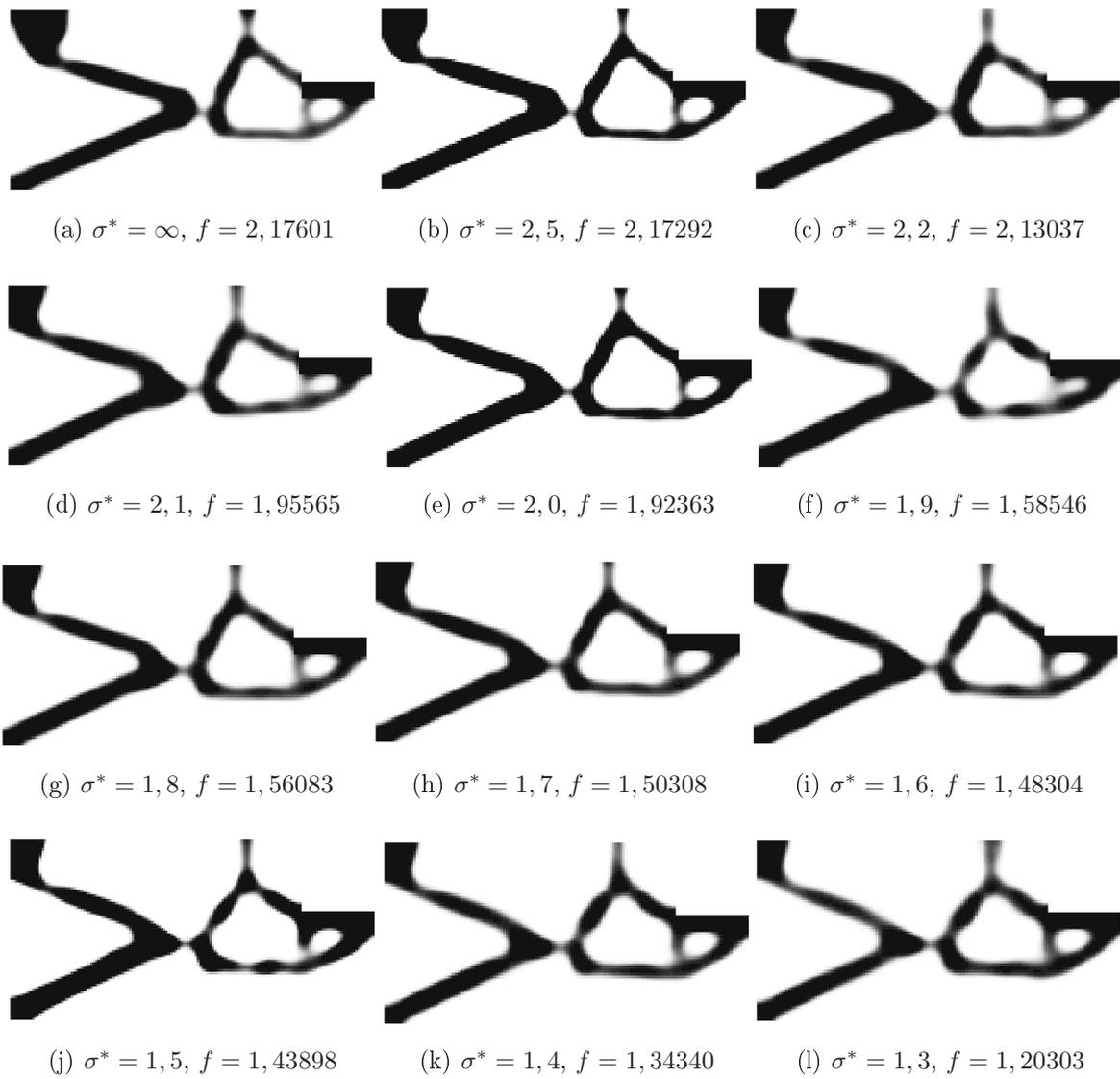


Figura 8.11: Diversas topologias para o caso do *grripper* flexível. As medidas para tensão e deslocamento estão em GPa e μm , respectivamente.

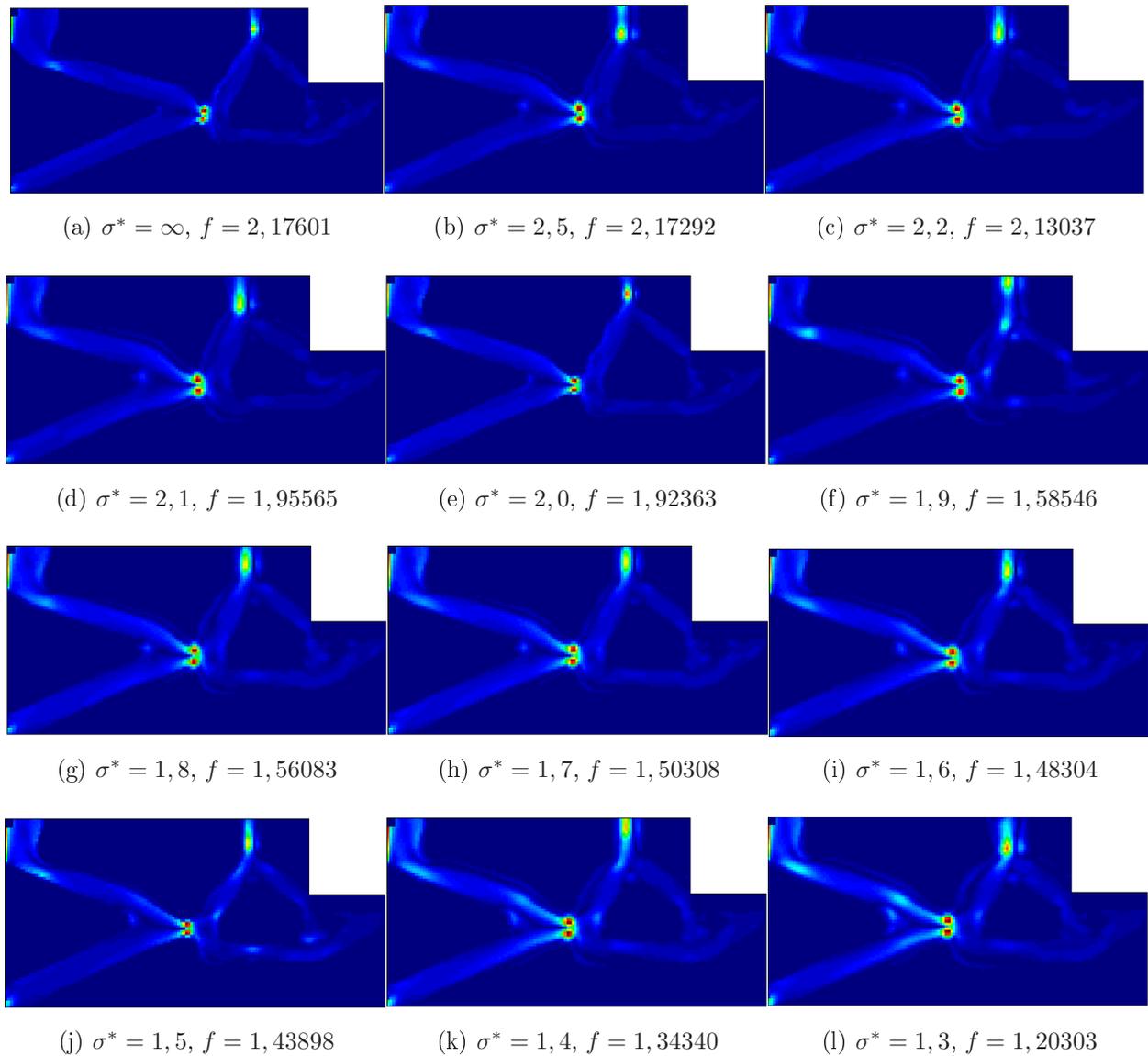


Figura 8.12: Tensões para os mecanismos da Figura 8.11. As medidas para tensão e deslocamento estão em GPa e μm , respectivamente. Cada subfigura possui uma escala diferente, onde as cores vermelha e azul indicam valores máximos e mínimos, respectivamente.

Os resultados de deslocamento obtidos são mais uma vez comparados com o limite de resistência mecânica exigido (Figura 8.13) e, a exemplo do inversor, pode-se notar uma gradativa queda de desempenho cinemático em relação aos requerimentos de resistência do mecanismo.

A exemplo do caso anterior, mais uma vez é observada uma faixa de valores para tensão que podem ser impostos antes que os deslocamentos de saída dos mecanismos sejam

afetados.

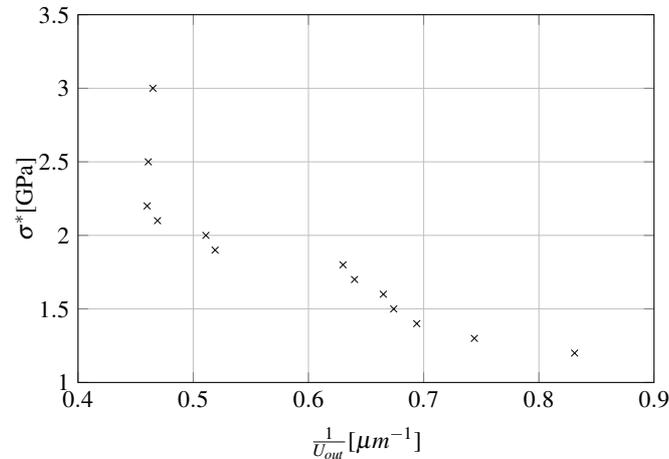


Figura 8.13: Função objetivo em relação ao limite de tensão.

Nesse exemplo, é observado uma faixa menor de valores onde essa característica aparece. Porém, ainda existe uma faixa significativa de valores onde o comportamento observado se aplica, e isso não interfere nas conclusões obtidas.

8.3 Interpretação dos resultados

Nesta seção uma interpretação da topologia otimizada é feita para os mecanismos. Interpretação significa projetar os valores de cada elemento da malha de finitos para valores 0 ou 1.

Na prática, é como se as variáveis físicas do problema passassem por uma nova função de projeção, com um valor de $\beta \rightarrow \infty$, aplicando efetivamente uma função de Heaviside. Um ponto de corte $\eta = 0.5$ é estabelecido, e valores de densidade ≥ 0.5 são projetados para 1 e valores abaixo para 0.

Convém lembrar que, quanto menor o valor de escala de cinza (EC) na topologia otimizada, menor o efeito da interpretação nos resultados finais. Porém, nem uma escolha mais efetiva dos parâmetros q (tensão) e k (SIMP) no problema de otimização, nem valores mais altos para β na projeção são capazes de garantir uma topologia otimizada livre de valores intermediários. Em problemas que envolvem tensão, pequenas perturbações no valor da densidade refletem em grandes variações de tensão, e o otimizador sempre usará a vantagem de poder escolher valores intermediários para as variáveis de projeto. Assim, fica evidente a

importância da etapa de projeção para a densidade. O nível de discretização da topologia otimizada é maior (mais elementos 0 ou 1), e os efeitos da interpretação têm uma intensidade menor nos resultados.

A Figura 8.14 mostra a interpretação do mecanismo inversor, apresentado na Figura 8.4(k). Nessa figura o mecanismo inteiro é mostrado, e não apenas metade do domínio. A Figura 8.15 mostra o mesmo processo, aplicado ao *gripper* flexível.

Os resultados da interpretação das topologias otimizadas indicam, em ambos os exemplos, um decréscimo dos valores de tensão máxima, e um acréscimo dos valores de função objetivo e volume final da estrutura.

Tanto no caso do *gripper* quanto do mecanismo inversor, o acréscimo no valor da função objetivo e volume total da estrutura são explicados pela projeção dos elementos que estão substituindo as articulações. A projeção desses elementos para 1 aumenta a rigidez do componente, de maneira que a deformação é menor e um acréscimo no deslocamento da porta de saída é observado. A mesma ideia é aplicada para o volume final, e um valor um pouco superior do limite estabelecido é observado. Porém, tanto o acréscimo do deslocamento quanto do volume final são pequenos.

A maior diferença observada é para os valores de tensão. A explicação acima, em parte, pode ser usada para explicar o efeito observado. O aumento da rigidez dos elementos que possuem densidade intermediária diminui o valor das tensões, sobretudo nos elementos que substituem as articulações.

Porém, principalmente para o caso do *gripper*, uma outra observação é feita. A retirada dos elementos da faixa de transição, que separam as fases de vazio e material, tem grande influência na interpretação.

O filtro de densidades deixa uma faixa de elementos com valor intermediário entre os elementos que formam o material base e a fase de vazio. Essa faixa não é retirada totalmente pela projeção. Isso é bem evidente no caso do *gripper*. A região que continha a articulação possui alguns elementos com densidade baixa, ao redor dos elementos de mais alta densidade, que estão substituindo a articulação. Esses elementos contribuem para o aumento da tensão calculada pelo algoritmo, pois se deformam excessivamente, mas não contribuem para alterar o valor do deslocamento de saída.

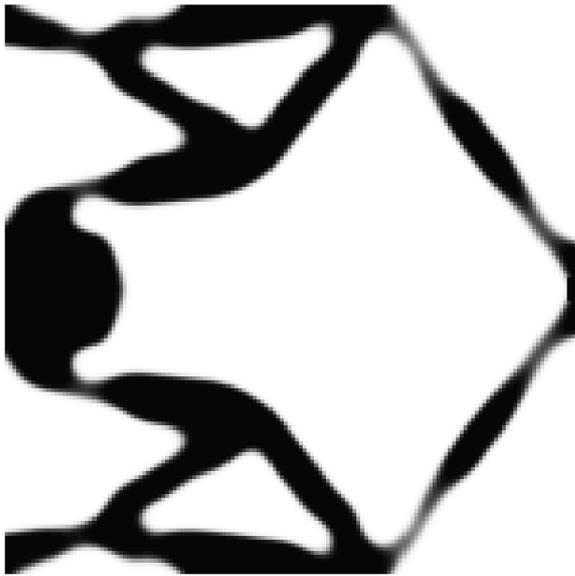
Quando esses elementos são retirados pela interpretação, os respectivos valores de

tensão não são capturados pelo algoritmo que faz a análise por elementos finitos. E estes não colaboram mais na contabilidade da norma da tensão.

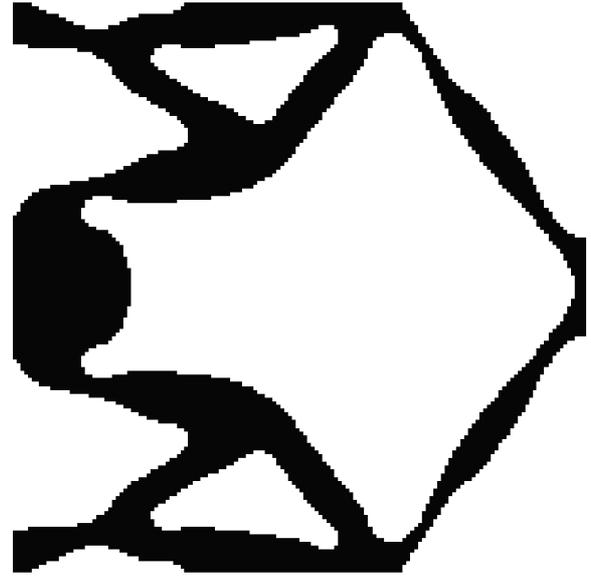
A Tabela 8.5 mostra os valores encontrados após a interpretação dos resultados para o inversor e o *gripper*. Esses valores são comparados aos encontrados para as topologias otimizadas. Para o caso do inversor, o exemplo com limite de tensão estabelecido em 700 [MPa] e volume 30% é interpretado. No *gripper*, o caso com limite de tensão em 1800 [MPa] e limite de volume em 25% é usado na interpretação.

Tabela 8.5: Comparação entre os modelos ótimo e interpretado.

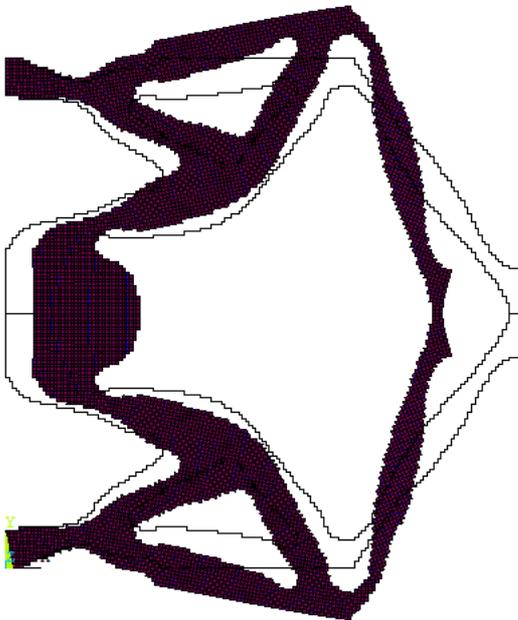
Inversor de deslocamento			
	f [μm]	f_s [MPa]	f_v [$\frac{\mu m}{\mu m}$]
otimizado	-19,900	700	0,2999
interpretado	-20,308	688	0,303
<i>Gripper</i> flexível			
	f [μm]	f_s [MPa]	f_v [$\frac{\mu m}{\mu m}$]
otimizado	1,5608	1800	0,24999
interpretado	1,5780	1588	0,25299



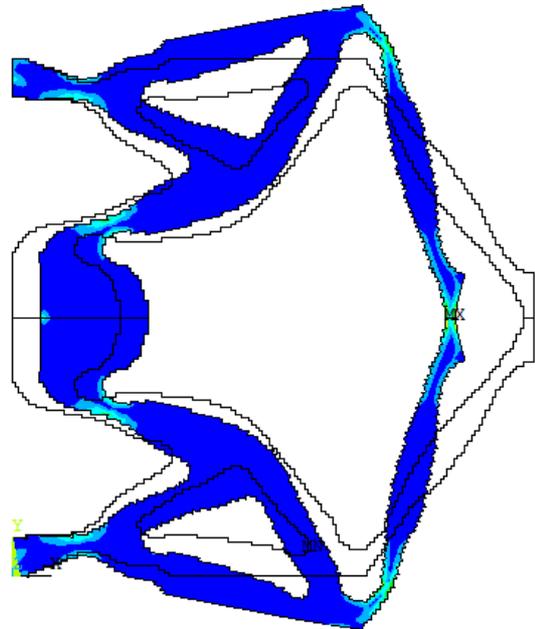
(a) Topologia otimizada



(b) Interpretação da topologia

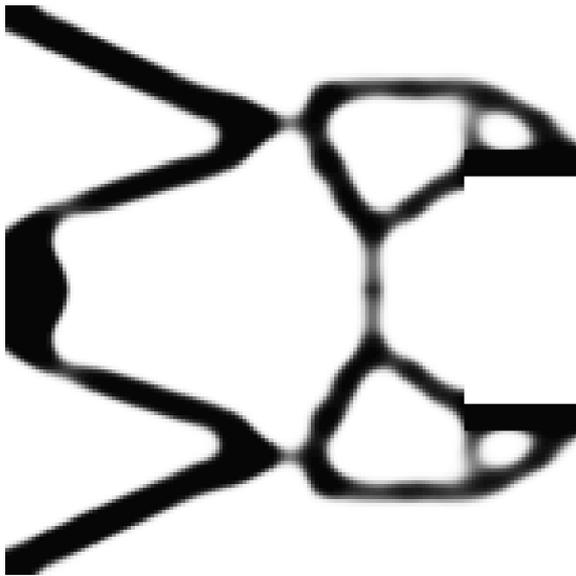


(c) Deslocamento do mecanismo

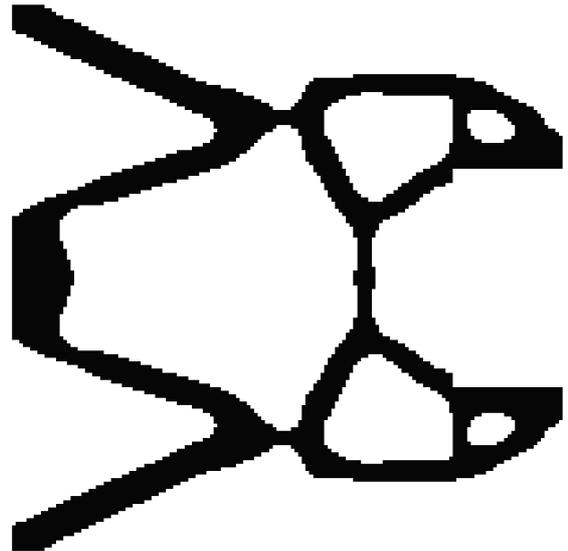


(d) Campo de tensões equivalentes do mecanismo interpretado

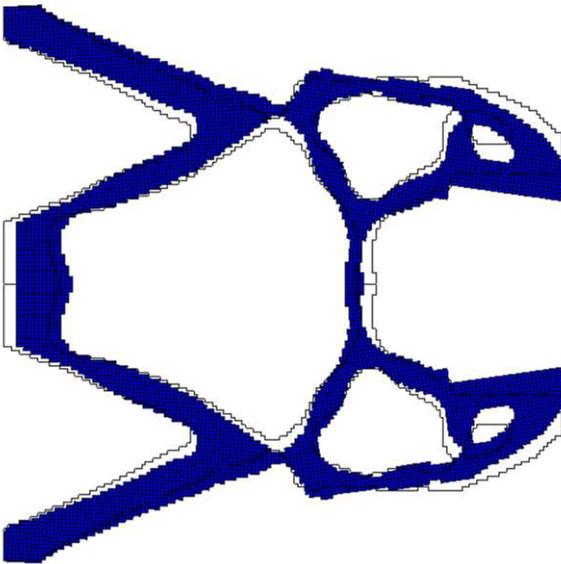
Figura 8.14: Processo de interpretação do mecanismo inversor de deslocamento.



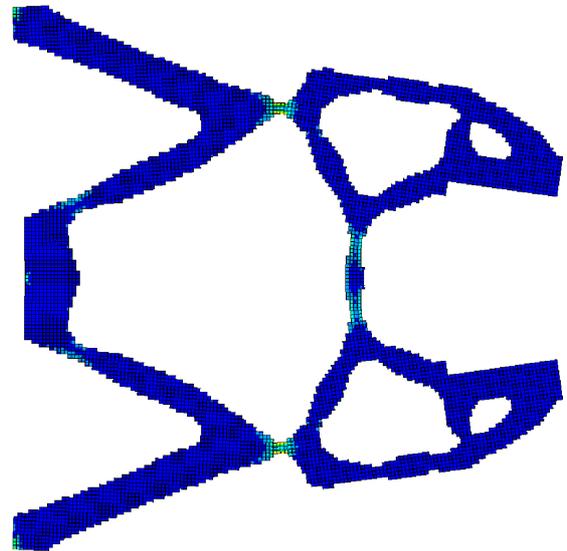
(a) Topologia otimizada



(b) Interpretação da topologia



(c) Deslocamento do mecanismo



(d) Campo de tensões equivalentes do mecanismo interpretado

Figura 8.15: Processo de interpretação do *grripper* flexível.

9. CONCLUSÕES

Nesse trabalho é estudado o efeito da adição de uma restrição de tensão na formulação de otimização topológica para mecanismos flexíveis. Uma formulação que maximiza o deslocamento da porta de saída do mecanismo é modificada, de maneira que o projeto otimizado atenda a um critério de resistência mecânica. Além disso, uma análise não linear para a geometria e o material é considerada para o equilíbrio.

Após a análise dos resultados, permite-se a formulação das conclusões a seguir.

Os resultados indicam que a restrição de tensão tem uma grande influência no projeto final. O problema do surgimento de articulações no projeto final de mecanismos flexíveis é aliviado pela restrição imposta à máxima tensão do mecanismo.

As articulações, que inicialmente estão concentradas em alguns pontos do mecanismo, passam a ser substituídas por regiões flexíveis, que acomodam o limite de tensão e, ao mesmo tempo, permitem que a atuação cinemática do mecanismo seja preservada.

Além disso, a gradual diminuição no limite de tensão máxima indica que o algoritmo, indiretamente, converge para projetos que distribuem a flexibilidade apenas nos pontos do mecanismo onde se faz necessário, ou seja, onde as articulações estão surgindo.

O resultado disso é que os mecanismos obtidos com a formulação que contempla a restrição de tensão são bem sucedidos em retirar as articulações e não distribuem excessivamente a flexibilidade, quando comparados aos mecanismos obtidos com uma formulação similar, porém sem a restrição de tensão.

Apesar de a análise linear também apresentar as mesmas conclusões, os resultados obtidos com o modelo linear mostram mecanismos de limitada atuação cinemática, restringindo a aplicação prática desses projetos. Isso destaca a importância da consideração de grandes deslocamentos para o projeto de mecanismos flexíveis.

A inserção de uma restrição à resistência mecânica do material, apesar de pouco explorada, é de suma importância no projeto desses mecanismos. Além de indiretamente agir na formação das articulações, como visto neste trabalho, a observação de um critério de

resistência na formulação é muito importante, principalmente em componentes que usam a própria deformação para atender os requisitos cinemáticos exigidos.

9.1 Sugestões para trabalhos futuros

Esse trabalho constitui um primeiro estudo no controle da tensão em otimização topológica de mecanismos flexíveis, usando não linearidade geométrica e material. Uma série de questões observadas ao longo da pesquisa, que não são abordadas no trabalho, mas que seriam interessantes de serem estudadas em um trabalho futuro são descritas abaixo.

No que concerne a parte de análise de tensões, uma série de parâmetros ainda podem ser investigados. Pode-se citar, entre eles:

- neste trabalho, as tensões são estimadas no centroide do elemento finito. Existem maneiras mais precisas para estimar a tensão em cada elemento, bem como a transição de valores entre elementos vizinhos. Métodos de suavização [da Silva, 2012] e estimativa do erro no cálculo das tensões [Varella, 2015] podem ser adicionados à formulação de elementos finitos, de maneira a se obter uma norma baseada em medidas mais precisas da tensão equivalente no elemento;
- a medida de tensão nesse trabalho é feita globalmente, ou seja, um valor de tensão, baseado na norma que contém todos os elementos do conjunto, é escolhido para representar o estado de tensões do domínio. Isso significa que é necessário que a tensão máxima esteja em uma região que se deseja controlar; sem isso o algoritmo trata de uma região sem interesse. Quanto mais subregiões o domínio puder ser dividido, um controle mais efetivo das tensões pode ser feito. Uma sugestão é o uso de medidas regionais para tensão, como por exemplo, o uso de *clusters* [Holmberg et al., 2013];

No que diz respeito aos grandes deslocamentos, a excessiva distorção dos elementos de baixa densidade é uma questão conhecida em otimização topológica. Vários trabalhos são citados na revisão bibliográfica sobre o assunto. Além do modelo de material empregado, o uso de algum algoritmo mais robusto, para evitar essa distorção excessiva, pode ser introduzido na análise, de maneira a permitir deslocamentos ainda maiores para os mecanismos.

Estas são apenas algumas questões, que surgem quando a formulação proposta é aplicada e resolvida. O estudo de não linearidades para o projeto de mecanismos flexíveis

têm sido motivo de estudo cada vez maior, e novas estratégias de abordagem do problema têm surgido e podem colaborar para um melhor projeto final.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves Filho, A. **Elementos Finitos - A base da Tecnologia CAE - Análise não linear**. Editora Érica Ltda, 2012.

Ananthasuresh, G. K.; Kota, S. Designing compliant mechanisms, **Journal of Mechanical Engineering**, vol. 11, p. 93–96, 1995.

Arora, J. S. **Introduction to Optimum Design**. Elsevier Academic Press, 2nd edition, 2004.

Atkins, R. J.; Fox, N. **An Introduction to the Theory of Elasticity**. Dover Publications Inc., 2005.

Ball, J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, vol. 4, p. 337–403, 1977.

Bathe, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall Ltd., 2010.

Belytschko, T.; Liu, W. K.; Moran, B.; Elkhodary, K. L. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. Wiley, 2014.

Bendsøe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 1, p. 193–202, 1989.

Bendsøe, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995.

Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71, p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. Material Interpolation schemes in topology optimization, **Archive of Applied Mechanics**, vol. 69, p. 635–654, 1999.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. **Topology Optimization - Theory, Methods and Applications**. Springer-Verlag, 2003.

Boresi, A. P. **Elasticity in Engineering Mechanics**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1965.

Bourdin, B. Filters in topology optimization, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 50, p. 2143–2158, 2001.

Bruns, T. E.; Sigmund, O. Towards the topology design of mechanisms that exhibit snap-through behavior, **Computer Method in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 193, p. 3973–4000, 2004.

Bruns, T. E.; Tortorelli, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 190, p. 3443–3459, 2001.

Bruns, T. E.; Tortorelli, D. A. An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 57, p. 1413–1430, 2003.

Buhl, T. B.; Pedersen, B. W.; Sigmund, O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 19, p. 93–104, 2000.

Cao, L.; Dolovich, A.; Zhang, W. J. On understanding of design problem formulation for compliant mechanisms through topology optimization, **Mechanical Sciences**, vol. 4, p. 357–369, 2013.

Cardoso, E. L.; Fonseca, J. S. O. Design of Fully Compliant Mechanisms using a Strain Maximization Approach, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 1, p. 263–275, 2004.

Cheng, G.; Jiang, Z. Study on topology optimization with stress constraints, **Engineering Optimization**, vol. 20, p. 129–148, 1992.

Cheng, G. D.; Guo, X. Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 13, p. 258–266, 1997.

Cheng, H.-C. **The Optimal Shape/Topology Design of Structures for Dynamic Problems Using a Homogenization Method**. PhD thesis, The University of Michigan, 1994.

Cho, S.; Jung, H.-S. Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded non-linear structures, **Computer Methods and Applied Mechanics Engineering**, vol. 192, p. 2539–2553, 2003.

Christensen, P. W.; Klarbring, A. **An Introduction to Structural Optimization**. Springer - Verlag, 2009.

Cook, R. F. Strength and sharp contact fracture of silicon, **Journal of Materials and Science**, vol. 41, p. 841–872, 2006.

Crisfield, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. volume 2. Wiley: New York, 1997.

da Silva, E. **Uma Formulação de Otimização Topológica com Restrição de Tensão Suavizada**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

Dantzig, G. B. **Linear Programming and Extensions**. Priceton Publish Press, 1963.

De Leon, D. M.; Alexandersen, J.; Fonseca, J. S. O.; Sigmund, O. Stress-constrained topology optimization for compliant mechanism design, **Structural and Multidisciplinary Optimization**. DOI: 10.1007/s00158-015-1279-z, 2015.

Díaz, A.; Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 10, p. 40–45, 1995.

Duysinx, P.; Bendsøe, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 43, p. 1453–1478, 1998.

Duysinx, P.; Sigmund, O. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution, **AIAA Journal**, vol. 4906, p. 1501–1509, 1998.

Emmendoerfer Jr, H.; Fancello, E. A. A level set approach for topology optimization with local stress constraints, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 99, p. 129–156, 2014.

Fafard, M.; Massicotte, B. Geometrical interpretation of arc-length method, **Computer and Structures**, vol. 46, p. 603–615, 1993.

Fleury, C. CONLIN: An efficient dual optimizer based on convex approximation concepts, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 1, p. 81–89, 1989.

Frecker, M. I.; Ananthasuresh, G. K.; Nishiwaki, S.; Kikuchi, N.; Kota, S. Topological synthesis of compliant mechanisms using multi-criteria optimization, **Journal of Mechanical Design**, vol. 119, p. 238–245, 1997.

Frecker, M. I.; Kikuchi, N.; Kota, S. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple outputs, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 17, p. 269–278, 1999.

Fu, Y.; Zhang, X. An optimization approach for black-and-white and hinge-removal topology designs, **Journal of Mechanical Science and Technology**, vol. 2, p. 581–593, 2014.

Gea, H. C.; Luo, J. Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities, **Computers and Structures**, vol. 79, p. 1977–1985, 2001.

Gomes, F. A. M.; Senne, T. A. An algorithm for the topology optimization of geometrically nonlinear structures, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 0, p. 1–18, 2010.

Guest, J.; Asadpoure, A.; Ha, S.-H. Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 44, p. 443–453, 2011.

Guest, J. K. Imposing maximum length scale in topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 37, p. 463–473, 2009.

Guest, J. K.; Prévost, J. H.; Belytschko, T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variable and projection functions, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 61, p. 238–254, 2004.

Haftka, R.; Gürdal, Z. **Elements of Structural Optimization**. Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 1991.

Holmberg, E.; Torstenfelt, B.; Klarbring, A. Stress constrained topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 48, p. 33–47, 2013.

Howell, L. L. **Compliant Mechanisms**. In McCarthy, J. M., editor, *21st Century Kinematics*, chapter 7, pages 189–216. Springer - Verlag, 2012.

Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Dover Publications Inc., 2000.

Jog, C. S. Distributed-parameter optimization and topology design for nonlinear thermoelasticity, **Computer Methods and Applied Mechanics Engineering**, vol. 132, p. 117–134, 1997.

Jones, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Scripta Book Company, Washington, 2nd edition, 1999.

Jung, D.; Gea, H. C. Topology optimization of nonlinear structures, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 40, p. 1417–1427, 2004.

Kawamoto, A. Stabilization of geometrically nonlinear topology optimization by the Levenberg-Marquardt method, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 37, p. 429–433, 2003.

Kawamoto, A.; Matsumori, T.; Yamasaki, S.; Nomura, T.; Kondoh, T.; Nishiwaki, S. Heaviside projection based topology optimization by a pde-filtered scalar function, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 44, p. 19–24, 2011.

Kemmler, R.; Lipka, A.; Ramm, E. Large deformations and stability in topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 30, p. 459–476, 2005.

Kemmler, R.; Schwarz, S.; Ramm, E. **Topology optimization including geometrically nonlinear response**. In *3rd World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Niagara Falls-USA*, 1999.

Kikuchi, N.; Nishiwaki, S.; Fonseca, J. S. O.; Silva, E. C. N. Design optimization method for compliant mechanisms and material microstructure, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 151, p. 401–417, 1998.

Kirsch, I. On singular topologies in optimum structural design, **Structural Optimization**, vol. 2, p. 133–142, 1990.

Klarbring, A.; Strömberg, N. Topology optimization of hyperelastic bodies including non-zero prescribed displacements, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 47, p. 37–48, 2013.

Kota, S.; Joo, J.; Li, Z.; Rodgers, S. M.; Sniegowski, J. Design of Compliant Mechanisms: Applications to MEMS, **Analog Integrated Circuits and Signal Processing**, vol. 29, p. 7–15, 2001.

Kota, S.; Lu, K.-J.; Kreiner, Z.; Trease, B.; Arenas, J.; Geiger, J. Design and Application of Compliant Mechanisms for Surgical Tools, **Journal of Biomechanical Engineering**, vol. 127, p. 981–989, 2005.

Lahuerta, R. D.; Simoes, E. T.; Campello, E. M. B.; Pimenta, P. M.; Silva, E. C. N. Towards the stabilization of the low density elements in topology optimization with large deformation, **Computational Mechanics**, vol. 52, p. 779–797, 2013.

Larsen, U. D.; Sigmund, O.; Bouwstra, S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative poisson's ratio, **Journal of Microelectromechanical Systems**, vol. 6, p. 99–106, 1997.

Lazarov, B. S.; Schevenels, M.; Sigmund, O. Robust design of large-displacement compliant mechanisms, **Mechanical Sciences**, vol. 2, p. 175–182, 2011.

Le, C.; Norato, J.; Bruns, T. E.; Ha, C.; Tortorelli, D. A. Stress-based topology optimization for continua, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 41, p. 605–620, 2010.

Lee, E.; Gea, H. C. A strain based topology optimization method for compliant mechanism design, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 49, p. 199–207, 2014.

Lin, J.; Luo, Z.; Tong, L. A new multi-objective programming scheme for topology optimization of compliant mechanisms, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 40, p. 241–255, 2010.

Lu, K.-J.; Kota, S. Design of compliant mechanisms for morphing structural shapes, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, vol. 14, p. 379–391, 2003.

Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R. **Mathematical Foundations of Elasticity**. Dover Publications Inc., 1983.

Maute, K.; Schwarz, S.; Ramm, E. Adaptive topology optimization of elastoplastic structures, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 15, p. 81–91, 1998.

Meneghelli, L. R.; Cardoso, E. L., **Optimization of Structures and Components**, chapter Design of Compliant Mechanisms with Stress Constraints using Topology Optimization, pages 35–48. Springer International Switzerland, 2013.

Messac, A. Physical programming: effective optimization for computational design, **AIAA Journal**, vol. 34, p. 149–158, 1996.

Michell, A. G. M. The limit of economy of materials in frame-structures, **Philosophical Magazine**, vol. 8(47), p. 589–597, 1904.

Nishiwaki, S.; Frecker, M. I.; Min, S.; Kikuchi, N. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method, **International Journal for Numerical methods in Engineering**, vol. 42, p. 535–559, 1998.

Nocedal, J.; Wright, S. J. **Numerical Optimization**. Springer-Verlag, 2006.

Pedersen, C. B. W.; Buhl, T.; Sigmund, O. Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 50, p. 2683–2705, 2001.

Pereira, J. T.; Fancello, E. A.; Barcellos, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 26, p. 50–66, 2004.

Pimenta, P. d. M. Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas. Apostila do curso de Pós-graduação. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

Popov, E. P. **Introdução à Mecânica dos Sólidos**. Edgard Blücher, 1978.

Rivlin, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts, **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, vol. 240, p. 459–490, 1948.

Rozvany, G. I. N.; Birker, T. On singular topologies in exact layout optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 8, p. 228–235, 1992.

Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization, **Mechanics Based Design of Structures and Machines**, vol. 25, p. 493–524, 1997.

Sigmund, O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - Part I: One-material structures, **Computer Methods in A**, vol. 190, p. 6577–6604, 2001.

Sigmund, O. Morphology-based black and white filter for topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 33, p. 401–424, 2007.

Sigmund, O. Manufacturing tolerant topology optimization, **Acta Mechanica Sinica**, vol. 25, p. 227–239, 2009.

Sigmund, O.; Maute, K. Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 46, p. 471–475, 2012.

Sigmund, O.; Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, **Structural Optimization**, vol. 16, p. 68–75, 1998.

Stegmann, J.; Lund, E. Nonlinear topology optimization of layered shell structures, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 29, p. 349–360, 2004.

Svanberg, K. The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 24, p. 359–373, 1987.

Swan, C. C.; Kosaka, I. Voigt-Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behaviors, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 40, p. 3785–3814, 1997.

Trease, B. P.; Moon, Y.-M.; Kota, S. Design of large-displacement compliant joints, **Journal of Mechanical Design**, vol. 127, p. 788–798, 2005.

van Dijk, N. P.; Langelaar, M.; van Keulen, F. Element deformation scaling for robust geometrically nonlinear analyses in topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 50, p. 537–560, 2014.

Vanderplaats, G. N. Structural design optimization status and direction, **Journal of Aircraft**, vol. 36, p. 11–20, 1999.

Varella, G. **Aplicação de um modelo substituto para otimização estrutural topológica com restrição de tensão e estimativa de erro a posteriori**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015.

Wang, F.; Lazarov, B. S.; Sigmund, O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 43, p. 767–784, 2011.

Wang, F.; Lazarov, B. S.; Sigmund, O.; Jensen, J. S. Interpolation scheme for fictitious domain techniques and topology optimization of finite strain elastic problems, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 276, p. 453–472, 2014.

Wang, M. Y. Mechanical and geometric advantages in compliant mechanism optimization, **Frontiers of Mechanical Engineering in China**, vol. 4, p. 229–241, 2009.

Werme, M. **Designing compliant mechanisms with stress constraints using sequential linear integer programming**. In *7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization - Seoul, 21 May - 25 May, Korea*. COEX, 2007.

Wriggers, P. **Nonlinear Finite Element Method**. Springer, 2008.

Xu, S.; Cai, Y.; Cheng, G. Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 41, p. 495–505, 2010.

Yin, L.; Ananthasuresh, G. K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 23, p. 49–62, 2001.

Yoon, G. H.; Kim, Y. Y. Element connectivity parametrization for topology optimization of geometrically nonlinear structures, **International Journal for Solids and Structures**, vol. 42, p. 1983–2009, 2005.

Zhaokun, L.; Xianmin, Z. Topology optimization of compliant mechanisms with geometrically nonlinear, **Advanced Manufacturing Technology**, vol. 1, p. 477–482, 2006.

Zienkiewicz, O.; Taylor, R. L. **The Finite Element Method - Solid Mechanics**. volume 2. Elsevier Academic Press, 5th edition, 2000.

Zuo, K.-T.; Chen, L.-P.; Zhang, Y.-Q.; Yang, J. Study of key algorithms in topology optimization, **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, vol. 32, p. 787–796, 2007.

ANEXO I - Matrizes para o método dos elementos finitos

Como é visto no capítulo 4, as matrizes de rigidez linear e não linear são necessárias para encontrar o equilíbrio através do método dos elementos finitos.

Escreve-se essas matrizes, para um problema 2D como [Bathe, 2010]

$$\mathbf{K}_L = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA$$

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{S} \mathbf{B}_{NL} dA,$$

e o vetor de forças internas como:

$$\mathbf{f}_{int} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_L \mathbf{s} dA.$$

A matriz \mathbf{B}_L carrega as relações lineares deslocamento-deformação dos nós do elemento, e pode ser escrita como a soma de duas submatrizes $\mathbf{B}_{1L} + \mathbf{B}_{2L}$, sendo elas descritas como

$$\mathbf{B}_{1L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{2L} = \begin{bmatrix} l_{11} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & l_{21} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \cdots & l_{11} \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & l_{21} \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \\ l_{12} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & l_{22} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \cdots & l_{12} \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & l_{22} \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \left(l_{11} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} + l_{12} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \right) & \left(l_{21} \frac{\partial N_1}{\partial x_2} + l_{22} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \right) & \cdots & \left(l_{11} \frac{\partial N_4}{\partial x_2} + l_{12} \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \right) & \left(l_{21} \frac{\partial N_4}{\partial x_2} + l_{22} \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \right) \end{bmatrix},$$

$$l_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial x_1} u_1^k, \quad l_{22} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial x_2} u_2^k, \quad l_{21} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial x_1} u_2^k, \quad \text{e} \quad l_{12} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial x_2} u_1^k,$$

sendo n o número de nós.

A matriz \mathbf{B}_{NL} carrega as parcelas não lineares da relação deslocamento-deformação

$$\mathbf{B}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

O segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff é escrito como na seção 3.1.1, e seus termos são colocados em uma matriz na forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

e, para escrever os mesmos termos em forma de vetor, para o cálculo de \mathbf{f}_i

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix}.$$

A Tabela 9.1 mostra os pontos de Gauss e pesos

Tabela 9.1: Coordenadas e pesos para os pontos de integração do elemento finito.

p	ξ_p	ζ_p	peso
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
4	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1