Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

ALGUNS TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E NÃO-EXISTÊNCIA DE GRÁFICOS COMPACTOS DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE COM BORDO EM PLANOS PARALELOS

por

VERA SUZANA NEVES

Porto Alegre, janeiro de 2002

Dissertação submetida por VERA SUZANA NEVES como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:
Dra. Cydara Cavedon Ripoll
Dra. Elizabeth Ferreira da Costa Gomes
Dra. Nedir do Espírito Santo
Dr. Pedro Fusieger

Data de Defesa: 11 de janeiro de 2002.

Agradecimentos

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade oferecida.

Aos professores do Programa de Pós Graduação, pelo incentivo e amizade.

Ao professor Jaime Ripoll, pela orientação segura, apoio, incentivo e compreensão recebidos durante todo o transcorrer do trabalho e curso.

Aos amigos e colegas, pela palavra de estímulo que sempre veio na hora certa.

Aos meus filhos, Eduardo, Fábio e Alexandre, pelo incentivo e carinho.

Ao meu marido Vitor pela paciência, carinho, amizade, atenção, amor, incentivo e digitação do trabalho.

Dedico este trabalho ao meu pai, Bruno, numa homenagem póstuma, e a minha mãe, Helena, pelos seus sonhos.

Resumo

Neste trabalho estabelecemos a existência de gráficos compactos de curvatura média constante H com bordo em planos paralelos, com hipóteses relacionando a geometria das curvas do bordo, a distância entre os planos, e H.

Abstract

In this work we establish the existence of compact graphs with constant mean curvature H with boundary in parallel planes, with hypothesis that relates the geometry of the boundary curves, the distance between the planes and H.

Sumário

1 Introdução

Nesta dissertação estudamos parte do artigo [ER] que trata do seguinte problema: estabelecer resultados de existência e não-existência de superfícies de curvatura média constante (cmc) com bordo em planos paralelos do $\mathbb{R}^3$ e que são dados como gráficos sobre estes planos. No que se segue fazemos comentários sobre este problema e sobre os resultados desta dissertação que dão respostas parciais ao mesmo. Começamos observando que no caso mínimo é fácil encontrar exemplos de gráficos com bordo em planos paralelos: os mais simples são dados por pedaços de um catenóide situado entre dois planos paralelos; mais geralmente, podemos tomar pedaços convenientes de um fim mergulhado de uma superfície mínima completa de curvatura total finita, cortando o fim com planos paralelos.

Segue também de um resultado de Jesse Douglas que dadas duas curvas em planos paralelos, uma sendo a reflexão da outra com relação ao plano médio, se a área determinada pelas duas curvas é maior ou igual à área determinada pelo cilindro reto tendo essas curvas como bordo, então existe uma superfície mínima compacta conexa tendo como bordo essas curvas.

Usando a técnica de reflexão de Alexandrov, que não será abordada neste trabalho, podemos provar que a meia parte dessa superfície é necessáriamente um gráfico sobre os planos do bordo. Apesar da simplicidade deste critério, ele nos dá uma condição suficiente mas não necessária de existência, como podemos ver com os catenóides. Além disso, não é um critério dado em termos da geometria das curvas do bordo (como curvatura das curvas planas do bordo, condições do círculo interior ou exterior, etc.), que seria desejável para algumas aplicações usando técnicas de EDP.

Nesta dissertação obtemos (Teorema 10) um resultado de existência para gráficos mínimos com bordo em planos paralelos a partir da hipótese relacionando a distância entre os planos e a geometria das curvas; conforme observado em [ER], esta condição é ótima. Em relação ainda ao Teorema 10, notamos que ele pode ser usado para fornecer subsoluções para problemas de existência de gráficos de cmc $H > 0$ definidos em domínios que não são simplesmente conexos, como "barreiras inferiores". Este caso é tratado a seguir nesta dissertação.

O correspondente problema de existência para gráficos de cmc não-nula apresenta uma situação muito diferente. Uma razão é que os únicos exemplos conhecidos de superfícies de cmc compactas mergulhadas tendo o bordo em planos paralelos do $\mathbb{R}^3$ são de superfícies de Delaunay, isto é, rotacionalmente simétricas, e não há um critério simples como o de Douglas para anéis de cmc não-nulos. Antonio Ros e Harold Rosenberg colocam em [RR] o problema de se estabelecer a existência de anéis de cmc tendo como bordo curvas paralelas do $\mathbb{R}^3$. Nesta dissertação, provamos dois resultados nesta direção. Para motivá-los é interessante observar o seguinte fato: dados dois círculos concêntricos c, C no plano $z = 0$, com c no interior do disco limitado por C e dado $H > 0$, existe uma constante h dependendo do raio de C, da distância entre c e C e de H, e existe um gráfico rotacional com cmc H no anel limitado por c e C, anulando-se em c e tomando o valor h em C.

Esta propriedade dos anéis rotacionais sugere o seguinte problema:

Problema 1 *Dadas duas curvas paralelas convexas fechadas α e β no plano $z = 0$, e dado $H > 0$, determinar a existência de uma constante h (dependendo da geometria de α, da distância entre α e β e de H), e de um gráfico com cmc H definido no anel limitado por α e β, anulando-se em α e assumindo o valor h em β.*

Nos Teoremas 11 e 13 obtemos respostas parciais a este problema.

Nossas provas de existência se reduzem a considerar o correspondente problema de Dirichlet para a equação de superfície de cmc, a saber

$$Q_H(u) := div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) + 2H,\ u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \qquad (1)$$

onde Ω é um domínio no plano e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, onde $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é constante em cada componente conexa de $\partial\Omega$. Foi aplicado o método de Perron para determinar, sob as hipóteses dos teoremas, sub e supersoluções apropriadas para o operador Q_H em Ω.

No último capítulo temos um resultado de não existência, cuja demonstração é feita usando o Princípio da Tangência.

Para provarmos os resultados mencionados anteriormente precisamos vários fatos e resultados de Geometria Diferencial e Equações Diferenciais Parciais, que introduzimos e explicamos nos capítulos 2 e 3 da dissertação. Estes fatos tratam principalmente de superfície de revolução de cmc, onde então destacamos o resultado de Charles Delaunay, e de alguns resultados de EDP Elípticas, sendo o resultado fundamental a ser utilizado por nós o Método de Perron.

2 Algumas noções e resultados de Geometria Diferencial

Esta secção divide-se em três partes. Na primeira revisamos algunas noções envolvendo a curvatura média de uma superfície de revolução. Na seguinte, introduzimos as superfícies de revolução e estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que uma superfície de revolução tenha curvatura média constante. Por fim, definimos curva envelope de uma família de curvas no plano.

As referências para este capítulo são [doCD], [doC], [MR] e [P].

2.1 Gráfico de curvatura média constante

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e N um campo de vetores unitário normal a S. Dado $p \in S$, seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ uma parametrização local de S em torno de p tal que

$$N(p) = -\frac{f_x(q) \times f_y(q)}{|f_x(q) \times f_y(q)|},$$

onde $q \in \Omega$ é tal que

$$f(q) = p.$$

O número

$$H(p) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

onde

$$E = \langle f_x, f_x \rangle, \quad F = \langle f_x, f_y \rangle, \quad G = \langle f_y, f_y \rangle,$$

$$e = \langle N, f_{xx} \rangle, \quad f = \langle N, f_{xy} \rangle, \quad g = \langle N, f_{yy} \rangle$$

é chamado de *curvatura média de S em p* relativa a N.

Como sabemos, $H(p)$ não depende da parametrização. Para mais detalhes consultar [doC].

Dado $H \in \mathbb{R}$, dizemos que a superfície S tem *curvatura média constante* igual a H com relação a N se, e somente se, $H(p) \equiv H, \forall p \in S$.

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o gráfico de u é denotado por Graf(u). Sendo $u \in C^2(\Omega)$, Graf(u) é uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ e temos:

Proposição 2 *Sejam $H \in \mathbb{R}$ e $u \in C^2(\Omega)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Graf(u) *tem curvatura média constante H com relação a N, sendo N*

tal que $\langle N, e_3\rangle \leq 0$, *onde* $e_3 = (0,0,1)$;

ii) $\left(1+u_x^2\right)u_{yy} - 2u_xu_yu_{xx} + \left(1+u_y^2\right)u_{xx} + 2H\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0$

iii) $\operatorname{div}\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + 2H = 0$

Demonstração. Seja $p \in \mathrm{Graf}(u)$. Tomando a parametrização $f(x,y) = (x,y,u(x,y))$ para $\mathrm{Graf}(u)$ decorre que, se $q \in \Omega$ é tal que $f(q) = p$, então

$$N(p) = -\frac{f_x(q)\times f_y(q)}{|f_x(q)\times f_y(q)|}$$

satisfaz $\langle N, e_3\rangle \leq 0$, de modo que $\mathrm{Graf}(u)$ tem curvatura média constante H em relação a N se, e somente se,

$$2H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \tag{2}$$

Com cálculo direto obtemos

$$F = u_xu_y, \qquad E = 1+u_x^2\,, \quad G = 1+u_y^2$$

$$N(x,y) = -\left(-\frac{u_x}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, -\frac{u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$$

$$e = -\frac{u_{xx}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \qquad f = -\frac{u_{xy}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \qquad g = -\frac{u_{yy}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$$

Substituindo em (2) obtemos

$$2H = \frac{-\left(1+u_x^2\right)u_{yy} + 2u_xu_yu_{xy} - \left(1+u_y^2\right)u_{xx}}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(1+u_x^2\right)u_{yy} - 2u_xu_yu_{xy} + \left(1+u_y^2\right)u_{xx} + 2H\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

o que mostra a equivalência entre (i) e (ii). Com relação à equivalência entre (ii) e (iii), note que $\nabla u = (u_x, u_y) \Longrightarrow |\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Assim,

$$\operatorname{div}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right) + 2H = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)_x + \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)_y + 2H = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+u_y^2\right)u_{xx} - 2u_y u_x u_{xy} + \left(1+u_x^2\right)u_{yy} + 2H\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+u_y^2\right)u_{xx} - 2u_y u_x u_{xy} + \left(1+u_x^2\right)u_{yy} + 2H\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0$$

■

2.2 Superfície de Revolução de cmc

Considere a superfície S obtida pela rotação de uma curva regular plana em torno de um eixo do plano que não encontra a curva. S é chamada *superfície de revolução.*

Proposição 3 *Sejam $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e $H \geq 0$. Se S é a superfície gerada pela rotação desta curva em torno do eixo z, então S tem curvatura média constante H (para uma orientação conveniente de S) se, e somente se,*

$$x'z'' - z'x'' + \frac{z'}{x} + 2H = 0.$$

Demonstração. Seja S a superfície gerada pela rotação de $\gamma(t)$ em torno do eixo z, onde $\gamma(t)$ é parametrizada pelo comprimento de arco. Tomando uma parametrização para S, $f(\theta, t) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t))$, $\theta \in (0, 2\pi)$, temos $x(t) \neq 0$ pois $\gamma(t)$ não intercepta o eixo z, e

$$\begin{aligned} E &= x^2(t), & F &= 0, & G &= 1 \\ e &= -x(t)z'(t), & f &= 0, & g &= z'(t)x''(t) - x'(t)z''(t). \end{aligned}$$

Escolhemos
$$N = (z'(t)\cos\theta, z'(t)\sin\theta, -x'(t)).$$

Note que $|N| = 1$, pois como $\gamma(t)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, $(x')^2 + (z')^2 = 1$. Logo, S tem curvatura média constante $H \geq 0$ com relação à escolha de N acima, se, e somente se,

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

$$\Leftrightarrow 2H = \frac{-x(t)\,z'(t) + [z'(t)\,x''(t) - x'(t)\,z''(t)]\,(x(t))^2}{(x(t))^2}$$

$$\Leftrightarrow x'(t)\,z''(t) - z'(t)\,x''(t) + \frac{z'(t)}{x(t)} + 2H = 0$$

■

Pela proposição anterior temos que uma superfície de revolução de curvatura média constante satisfaz o sistema

$$\begin{cases} x'(t)\,z''(t) - z'(t)\,x''(t) + \dfrac{z'(t)}{x(t)} + 2H = 0 \\ (x'(t))^2 + (z'(t))^2 = 1. \end{cases}$$

Da segunda equação, temos

$$2x'x'' + 2z'z'' = 0 \Longrightarrow z'' = -\frac{x'x''}{z'}.$$

Da primeira, temos

$$2H = \frac{-z' + z'x''x - x'z''x}{x} \Longrightarrow 2Hx = -z' + z'x''x - x'z''x.$$

Segue então

$$2Hxz' = -z'^2 + x''x\left(x'^2 + z'^2\right) \Longrightarrow$$

$$xx'' = 2Hxz' + z'^2. \tag{3}$$

Um resultado (ver Lema 3.15 de [doCD]) que será útil posteriormente é

Lema 4 *Seja H uma constante. Então a integral primeira de (3) é dada por*

$$x'^2 = 1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2, a = cte.$$

Demonstração. Da equação (3) temos

$$xx'' = 2Hxz' + z'^2 \Longrightarrow x'' = \frac{2Hxz' + z'^2}{x}.$$

Como

$$z'^2 + x'^2 = 1 \Longrightarrow 2z'z'' + 2x'x'' = 0 \Longrightarrow z'' = \frac{-x'x''}{z'},$$

segue

$$z'' = \frac{-x'}{x}(2Hx + z').$$

Seja $f = z' + Hx$. Logo $f'x = -fx'$, pois

$$-fx' = -z'x' - Hxx'$$

$$f = z' + Hx \Longrightarrow f' = z'' + Hx'$$

$$f' = \frac{-x'}{x}(2Hx + z') + Hx' \Longrightarrow f' = -Hx' - \frac{z'x'}{x}$$

$$f'x = -Hx'x - z'x' = -fx'.$$

De $f'x = -fx'$ obtemos

$$\int \frac{f'}{f}dt = -\int \frac{x'}{x}dt \Longrightarrow$$

$$\ln f(t) = -\ln x(t) + \ln a \Longrightarrow$$

$$f(t) = \frac{a}{x(t)}.$$

Como $f = z' + Hx$, então

$$z' = f - Hx = \frac{a}{x} - Hx \Longrightarrow$$

$$z'^2 = \left(\frac{a}{x} - Hx\right)^2 \Longrightarrow$$

$$1 - x'^2 = \left(\frac{a}{x} - Hx\right)^2 \Longrightarrow$$

$$x'^2 = 1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2.$$

■

Uma descrição das superfícies de revolução de curvatura média constante, obtida por Charles Delaunay em 1841 (veja [MR]), é dada por:

Teorema 5 (Charles Delaunay) *A curva plana descrita por um dos focos de uma cônica quando esta rola sobre uma reta, sem deslizar, gera uma superfície de revolução de curvatura média constante. Além disso, toda superfície de revolução com curvatura média constante é obtida desta maneira.*

É interessante e importante para o que se segue mencionarmos a curva obtida quando rolamos a hipérbole sobre uma reta sem deslizar. Esta curva é chamada *Nodóide*. Quando a giramos em torno da reta sobre a qual a cônica foi deslizada obtemos uma superfície de revolução com curvatura média constante com auto-intersecção.

2.3 Curva envelope de uma família de curvas no plano

Uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é dita curva envelope de uma família de curvas $\{\gamma_t\}$ onde, para cada t, γ_t é a curva solução da equação $\phi(x, y, t) = 0$, se, para cada t, $\gamma(t)$ é um ponto de γ_t e, neste ponto, γ e γ_t têm o mesmo vetor tangente.

Como $\gamma(t) \in \gamma_t$ temos $\phi(x(t), y(t), t) = 0$ para todo t. Diferenciando em relação a t, obtemos $\phi_x x' + \phi_y y' + \phi_t = 0$. Notemos que (x', y') é a tangente da curva γ e $(\phi_y, -\phi_x)$ é a tangente de γ_t. Como estes vetores são colineares, $(x', y') \wedge (\phi_y, -\phi_x) = 0$, isto é, $\phi_x x' + \phi_y y' = 0$, o que implica $\phi_t = 0$.

Temos então que as funções $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem simultaneamente $\phi(x, y, t) = 0$ e $\phi_t(x, y, t) = 0$.

3 Algumas noções e resultados de Equações Diferenciais Parciais Elípticas

Uma importante aplicação da teoria clássica das EDP's elípticas está no estudo das superfícies de curvatura média constante. Neste trabalho veremos algumas destas aplicações. Para tal serão necessários algumas definições e resultados, que citaremos sem demonstração, como alguns fatos sobre o operador Q_H, o Método de Perron e o Princípio da Tangência.

As referências básicas para esta secção são [GT] e notas de aula do professor Jaime Ripoll.

3.1 Fatos sobre o operador Q_H.

I-Princípio do máximo para a diferença.

Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, tais que $Q_H(u) = 0 = Q_H(v)$. Então

$$\sup_{\Omega} |u - v| = \sup_{\partial\Omega} |u - v|$$

II-Estimativa da altura.
Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tal que $Q_H(u) = 0$. Então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|, \text{ se } H = 0$$

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{1}{H}, \text{ se } H > 0$$

III-Solubilidade em pequenos domínios
Dados $x \in \Omega$, existe uma vizinhança D_x de x em Ω tal que, dada $\varphi \in C^0(\partial D_x)$, existe $u \in C^2(D_x) \cap C^0(\bar{D}_x)$ solução de $Q_H = 0$ em D_x tal que $u|_{\partial D_x} = \varphi$.

IV-Compacidade de famílias uniformemente limitadas de soluções
Seja $\Omega \subset C^2$ limitado, $\{u_n\} \subset C^2(\Omega)$ solução de $Q_{h_n} = 0$ em Ω com $h_n \to H$ para $n \to \infty$. Suponha

$$\sup_{\Omega} |u_n| \leq M.$$

Então $\{u_n\}$ tem uma subsequência convergindo uniformemente em compactos de Ω a $u \in C^2(\Omega)$ tal que $Q_H(u) = 0$ em Ω.

Os ítens I, III, IV, constituem as condições de aplicabilidade do Método de Perron, que será explicado a seguir.

3.2 O método de Perron.

Com o objetivo de resolver o problema clássico de Dirichlet para equação de Laplace, Perron desenvolveu uma técnica a qual verificou-se, posteriormente, ser passível de aplicação a equações bem mais gerais, vindo a constituir um método conhecido atualmente como Método de Perron. A idéia fundamental desse método é trabalhar com subsoluções e supersoluções associadas ao operador Q_H e relativas ao dado no bordo φ.

Uma função $s \in C^0(\bar{\Omega})$ é uma *subsolução(supersolução)* se, para todo domínio $D \subset \Omega$, se $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ é tal que $Q_H(u) = 0$ em D e $u|_{\partial\Omega} \geq s|_{\partial\Omega}$ $(u|_{\partial\Omega} \leq s|_{\partial\Omega})$, então $u \geq s|_{\bar{D}}$ $(u \leq s|_{\bar{D}})$.

Teorema 6 *Suponha que exista uma supersolução S de Q_H tal que*

$$s_M := \{s \in C^0(\Omega) |\ s \ \text{ é subsolução e } s \leq S\} \neq \phi.$$

Então definindo

$$u(x) := \sup_{s \in s_M} s(x), x \in \Omega,$$

segue que

$$u \in C^2(\Omega) \text{ e } Q_H(u) = 0.$$

Com relação à solução u obtida no teorema anterior, nada podemos dizer acerca do valor da mesma no bordo. Uma maneira usual de garantir que u assume certo valor prescrito no bordo é através da utilização de barreiras, considerando-se para isso valores no bordo que são regulares para o operador, como explicamos a seguir.

Dizemos que uma função $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ é regular com relação ao operador Q_H se existem sub e supersoluções s_o, $S_o \in C^0(\bar{\Omega})$ tais que $s_o|_{\partial\Omega} = \varphi = S_o|_{\partial\Omega}$. A regularidade de um dado $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ se reduz a uma condição de regularidade pontual como veremos na proposição a seguir.

Proposição 7 *Seja $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Suponha que para todo $p \in \partial\Omega$ existam sub e supersoluções s_p, $S_p \in C^0(\bar{\Omega})$ tais que*

$$s_p|_{\partial\Omega} \leq \varphi \leq S_p|_{\partial\Omega}$$

e

$$s_p(q) = \varphi(q) = S_p(q)$$

para todos $q \in \partial\Omega$. Então φ é regular.

Teorema 8 *Seja $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ regular para Q_H. Então existe $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ solução de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.*

3.3 Princípio da Tangência.

O princípio da tangência relaciona as curvaturas médias de duas superfícies tangentes com a mesma orientação. Com o propósito de enunciá-lo precisamente introduzimos a seguir algumas definições.

Sejam S_1 e S_2 superfícies com um ponto de tangência $p \in S_1 \cap S_2$, isto é $T_pS_1 = T_pS_2$. Ponha $\pi := T_pS_1$. Seja N um vetor normal a π. Dizemos que S_1 está abaixo de S_2 em uma vizinhança de p com relação à N se existe uma vizinhança $U \subset \pi$ de p, funções $u_1, u_2 : U \to \mathbb{R}$, tal que

a) $u_1 \leq u_2$

b) $G(u_1) = \{q + u_1(q)N \mid q \in U\} \subset S_1$

c) $G(u_2) = \{q + u_2(q)N \mid q \in U\} \subset S_2$.

Teorema 9 *(Princípio da Tangência) Sejam S_1 e S_2 superfícies com um ponto de tangência $p \in S_1 \cap S_2$. Seja N um vetor normal a T_pS_1. Suponha que S_1 está abaixo de S_2 em uma vizinhança de p com relação a N. Suponha que S_1 e S_2 tenham curvaturas médias constantes H_1, H_2 , respectivamente, calculadas com relação a N. Então $H_1 \leq H_2$ e vale $H_1 = H_2$ se e somente se S_1 e S_2 coincidem em uma vizinhança de p.*

4 Resultados de existência de gráficos de cmc

Nesta secção nos ocuparemos com resultados de existência de superfícies compactas de cmc com bordo em dois planos paralelos de $\mathbb{R}^3$. No Teorema 10 obtemos um resultado de existência de gráficos mínimos sobre domínios multiplamente conexos, a partir de hipóteses relacionando a distância entre os planos e a geometria das curvas. A Proposição 12 trata da existência de gráficos rotacionais com cmc $H > 0$, determinados por pedaços de superfícies imersas de Delaunay. Nos teoremas 11 e 13 obtemos resultados de existência de gráficos com cmc $H > 0$ sobre domínios determinados por curvas fechadas conexas paralelas no plano $z = 0$ e bordo em planos paralelos cuja distância depende da geometria das curvas, da distância entre elas e de H.

Teorema 10 *Sejam $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, Γ curvas fechadas no plano $z = 0$ tal que cada curva Γ_i, $i = 1, \ldots, k$, está contida no interior da região limitada por Γ e tal que os domínios fechados limitados pelas curvas Γ_i são dois a dois disjuntos. Suponhamos que cada $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ satisfaz a condição do círculo interior com algum raio $0 < R_1 < \infty$ (isto é, dado qualquer ponto $p \in \Gamma_i$, existe um círculo de raio R_1 passando por p e contido no fecho da região limitada por $\Gamma_i, i = 1, \ldots, k$), que Γ satisfaz a condição do círculo exterior com algum raio $0 < R_2 \leq \infty$ (isto é, dado qualquer ponto $p \in \Gamma$ existe um círculo de raio R_2 passando por p e contido no fecho do exterior de Γ). Denote por Ω o domínio multiplamente conexo limitado por Γ_i, $i = 1, \ldots, k$ e Γ.*

Seja

$$d = d(\cup_{i=1}^{k}\Gamma_i, \Gamma) = \inf\{|p_1 - p_2| \mid p_1 \in \cup_{i=1}^{k}\Gamma_i, p_2 \in \Gamma\}.$$

Se $h \geq 0$ é tal que

$$\cosh \frac{h}{R_i} \leq \frac{R_i + d}{R_i}, i = 1, 2, \tag{4}$$

então exite $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ solução de $Q_0 = 0$ em Ω tal que $u|_{\Gamma} = 0$ e $u|_{\Gamma_i} = h, i = 1, \ldots, k$.

Observação: Note que $R_2 = \infty$ se e somente se Γ é convexo. Neste caso, a condição (4) é automaticamente satisfeita para $i = 2$.

Demonstração. Segue do método de Perron que a função u definida em Ω, para todo $p \in \Omega$, por

$$u(p) := sup\{s(p)|s \text{ é uma subsolução de } Q_0,\ 0 \leq s \leq h\}$$

é de classe C^2 e satisfaz a equação $Q_0 = 0$ em Ω. Para provar que u satisfaz as condições do bordo $u|_\Gamma = 0$ e $u|_{\Gamma_i} = h, i = 1, ..., k$, construiremos barreiras apropriadas em cada ponto de $\partial\Omega$, isto é, dado $p \in \partial\Omega$, provaremos a existência de sub e supersoluções v_p, w_p para $Q_0 = 0$ em Ω tais que

$$0 \leq v_p \leq w_p \leq h$$

e

$$0 = v_p(p) = w_p(p)$$

se $p \in \Gamma$ e

$$h = v_p(p) = w_p(p)$$

se $p \in \cup\Gamma_i$. Dado $i \in \{1, ..., k\}$ e $p \in \Gamma_i$, vamos considerar um círculo C_p de raio R_1 passando por (p, h) e contido na região do plano $z = h$ limitada por $\Gamma_i + he_3$. Seja c_p o centro de C_p. Observamos que o pedaço J_p de catenóide

$$J_p(x) = -R_1 cosh^{-1}\left(\frac{|x - c_p|}{R_1}\right) + h$$

com

$$1 \leq \frac{|x - c_p|}{R_1} \leq \cosh\frac{h}{R_1},$$

tem como bordo dois círculos $C_{1,p} = C_p$ e $C_{2,p}$, onde $C_{2,p}$ pertence ao plano $z = 0$. Tomando c_p como a origem dos eixos coordenados, segue de

$$R_1 \leq |x - c_p| \leq R_1 \cosh\frac{h}{R_1}$$

que o domínio de J_p é um anel de raios R_1 e $R_1 \cosh(h/R_1)$. Segue de (4) que $R_1 \cosh(h/R_1) \leq R_1 + d$ e isto implica que $C_{2,p}$ pertence à região limitada por Γ.

Definimos uma subsolução v_p para o operador Q_0 em Ω fazendo, quando $p \in \Gamma_i$ (para algum i)

$$v_p(q) = \begin{cases} J_p(q), \text{ se } q \text{ pertence à região entre } \Gamma_i \text{ e } C_{2,p} \\ 0, \text{ se } q \text{ pertence à região entre } C_{2,p} \text{ e } \Gamma,\ q \in \Omega. \end{cases}$$

Claramente, $0 \leq v_p \leq h$ e $v_p(p) = h$. Se $p \in \Gamma$, então simplesmente definimos $v_p \equiv 0$.

Para $p \in \Gamma$, definimos uma supersolução w_p de Q_0 em Ω como segue. Primeiro suponhamos que Γ é uma curva convexa, isto é, $R_2 = \infty$. Seja então Σ uma curva convexa contida no plano $z = h$ cuja projeção ortogonal em $z = 0$ está contida em Ω e limita uma região que contém $\cup_i \Gamma_i$. Existe uma reta ℓ_p passando por p que divide o plano $z = 0$ em dois semi-planos fechados, um deles contendo Ω. Seja P_p o plano contendo ℓ_p e intersectando o plano $z = h$ em uma reta L_p tal que uma das componentes conexas fechadas de $\{z = h\} \backslash L_p$ contém Σ. O plano P_p é o gráfico de uma função linear u_p definida em todo o plano $z = 0$. Denote também por u_p sua restrição ao domínio Ω. Defina $w_p = min\{u_p, h\}$. Então w_p é supersolução de Q_0 em Ω satisfazendo $0 \leq w_p \leq h, w_p(p) = 0$.

Se $R_2 < \infty$, vamos considerar um círculo D_p de raio R_2 por p e contido no fecho do exterior de Γ. Seja d_p o centro de D_p. O pedaço K_p do catenóide

$$K_p(x) = R_2 cosh^{-1}\left(\frac{|x - d_p|}{R_2}\right),$$

com $1 \leq |x - d_p| \leq cosh(h/R_2)$, tem como bordo dois círculos $D_{1,p} = D_p$ e $D_{2,p}$, onde $D_{2,p}$ é um círculo no plano $z = h$. Como mostrado acima para J_p, segue de (4) que $D_{2,p}$ fica no exterior de $\Gamma_i + he_3$. Definimos uma supersolução w_p em Ω fazendo

$$w_p(q) = \begin{cases} K_p(q), \text{ se } q \text{ está contido em } D_{2,p}^* \\ h \text{ se } q \text{ não está contido em } D_{2,p}^*, q \in \Omega, \end{cases}$$

onde $D_{2,p}^*$ denota a projeção ortogonal de $D_{2,p}$ no plano $z = 0$. Claramente, é uma supersolução satisfazendo $0 \leq w_p \leq h, w_p(p) = 0$. Se $p \in \Gamma_i$, definimos $w_p \equiv h$. Temos então construído sub e supersoluções como afirmado acima, concluindo a prova do teorema. ∎

Teorema 11 *Seja $H > 0$ dado. Seja α uma curva convexa fechada C^2, no plano $z = 0$ e suponhamos que*

$$H < k < 2H \tag{5}$$

onde k denota a curvatura de α. Seja $k_M = \max k$. Dado qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$0 < \lambda < \frac{1}{k_M}\left(1 - \sqrt{\frac{k_M}{2H}}\right) \tag{6}$$

denote por β a curva interior paralela a α cuja distância a α é λ, isto é,

$$\beta = \{p + \lambda n(p) \mid p \in \alpha\},$$

onde $n(p)$ é o vetor normal unitário interior a α em p. Se

$$h = \sqrt{\lambda\left(\frac{2}{H} - \lambda\right)}, \tag{7}$$

então existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_\alpha = 0$ e $u|_\beta = h$, onde Ω é o anel planar com bordo $\alpha \cup \beta$.

Demonstração. Dado $p \in \alpha$, seja S_p a esfera de raio $1/H$ centrada em $p + (1/H)n(p)$, e seja $T_p = S_p \cap \{z = h\}$. Note que $C_p := S_p \cap \{z = 0\} = \partial D_p$ é um círculo de raio $1/H$ tangente a α em p e segue de (5) que C_p contém Ω. Afirmamos que $\beta + he_3$, onde $e_3 = (0,0,1)$, é a curva envelope interior da família de curvas T_p, $p \in \alpha$, no plano $z = h$. De fato: Seja $\alpha : [0,a] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização de α por comprimento de arco. Observe então que $T_{\alpha(t)}$ é dado por $\phi(q,t) = 0$, $q = (x,y,h)$, onde

$$\phi(q,t) = \left|q - (\alpha(t) + \frac{1}{H}n(t))\right|^2 - \frac{1}{H^2}$$

e portanto a curva envelope $\gamma(t)$ da família $T_{\alpha(t)}$ é dada pelas equações

$$\phi(q,t) = 0 \ , \ \phi_t(q,t) = 0.$$

Segue da 1ª inequação de (5) que a curva

$$c(t) := \alpha(t) + \frac{1}{H}n(t)$$

é regular. De fato:

$$c'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{H}n'(t).$$

Assim

$$c'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{H}(-k(t)\alpha'(t)) =$$

$$\alpha'(t)(1 - \frac{k(t)}{H}).$$

Mas $\alpha'(t) \neq 0$ e $k(t) > H$; logo $k(t)/H \neq 1$ o que implica $1 - k(t)/H \neq 0$. Isto mostra que c é regular. Como $c'(t)$ tem a mesma direção de $\alpha'(t)$, segue que $n(t)$ é ortogonal a $c'(t)$ e então podemos escrever

$$\gamma(t) = \alpha(t) + u(t)c'(t) + v(t)n(t) + he_3,$$

para certas funções escalares $u(t), v(t)$. Portanto temos

$$\gamma(t) = \alpha(t) + u(t)\left(1 - \frac{k(t)}{H}\right)\alpha'(t) + v(t)n(t) + he_3.$$

De $\phi_t = 0$, obtemos

$$0 = -2 < q - (\alpha(t) + \frac{1}{H}n(t)), \alpha'(t) + \frac{1}{H}n'(t) >$$

$$=< \gamma(t) - (\alpha(t) + \frac{1}{H}n(t)), \alpha'(t) + \frac{1}{H}n'(t) >$$

$$=< \alpha(t)+u(t)(1-\frac{1}{H}k(t))\alpha'(t)+v(t)n(t)+he_3-\alpha(t)-\frac{1}{H}n(t), \alpha'(t)+\frac{1}{H}n'(t) >$$

$$=< u(t)(1 - \frac{1}{H}k(t))\alpha'(t) + v(t)n(t) - \frac{1}{H}n(t) + he_3, \alpha'(t)(1 - \frac{1}{H}k(t)) >$$

$$=< \alpha'(t), \alpha'(t) > u(t)(1 - \frac{1}{H}k(t))^2 + < \alpha'(t), n'(t) > v(t)(1 - \frac{1}{H}k(t))$$

$$- < \alpha'(t), n'(t) > \frac{1}{H}(1 - \frac{1}{H}k(t)) + < e_3, \alpha'(t) > h(1 - \frac{1}{H}k(t)).$$

Como

$$< \alpha'(t), \alpha'(t) >= 1, \ < \alpha'(t), n(t) >= 0, \ < \alpha'(t), e_3 >= 0,$$

segue que

$$0 = u(t)(1 - \frac{k(t)}{H})^2.$$

Como $1 - k(t)/H \neq 0$ temos que $u(t) = 0$, para todo $t \in [0, a]$. Então

$$\gamma(t) = \alpha(t) + v(t)n(t) + he_3.$$

De $\phi = 0$, obtemos

$$\left|\alpha(t) + v(t)n(t) + he_3 - \alpha(t) - \frac{1}{H}n(t)\right|^2 = \frac{1}{H^2} \Longrightarrow$$

$$\left| n(t)\left(v(t)-\frac{1}{H}\right)+he_3\right|^2 = \frac{1}{H^2} \Longrightarrow$$

$$< n(t), n(t) > \left(v(t)-\tfrac{1}{H}\right)^2 + 2 < n(t), e_3 > h\left(v(t)-\tfrac{1}{H}\right) + < e_3, e_3 > h^2 = \tfrac{1}{H^2} \Longrightarrow$$

$$\left(v(t)-\frac{1}{H}\right)^2 + h^2 = \frac{1}{H^2} \Longrightarrow$$

$$\left(v(t)-\frac{1}{H}\right)^2 + h^2 = \frac{1}{H^2} \Longrightarrow$$

$$H(v(t))^2 - 2v(t) + h^2H = 0 \Longrightarrow$$

$$v(t) = \frac{2 \pm \sqrt{4-4H^2h^2}}{2H} \Longrightarrow$$

$$v(t) = \frac{1}{H} \pm \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}.$$

Observe que existem duas curvas envelope para a família $T_\alpha(t)$, sendo uma delas $\beta + he_3$, como veremos a seguir.

De (5) e (7), temos que

$$h^2 < \frac{1}{H}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2}{H}-\frac{1}{H}+\frac{\sqrt{2}}{2H}\right) = \left(\frac{1}{H}-\frac{\sqrt{2}}{2H}\right)\left(\frac{1}{H}+\frac{\sqrt{2}}{2H}\right)$$

$$= \frac{1}{H^2} - \frac{2}{4H^2} = \frac{1}{2H^2}.$$

De (7) segue também que:

$$h = \sqrt{\lambda\left(\frac{2}{H}-\lambda\right)} \Longrightarrow h^2 = \frac{2\lambda}{H} - \lambda^2 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{H} \pm \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}.$$

Como $k > H$, segue de (6)

$$\lambda < \frac{1}{k_M}\left(1-\sqrt{\frac{k_M}{2H}}\right) \Longrightarrow \lambda < \frac{1}{H}\left(1-\sqrt{\frac{H}{2H}}\right) \Longrightarrow \lambda < \frac{1}{H}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < \frac{1}{H}.$$

Logo

$$\lambda = \frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}. \tag{8}$$

Se β é uma curva parametrizada por um parâmetro qualquer, sua curvatura k_β é dada por $k_\beta(t) = |\beta''(t) \wedge \beta'(t)| \;/\; |\beta'(t)|^3$ (ver [doC]). Determinemos então k_β para a curva β em questão:

$$\beta(t) = \alpha(t) + \lambda n(t) \Longrightarrow$$

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + \lambda n'(t) \Longrightarrow$$

$$\beta'(t) = \alpha'(t)(1 - \lambda k(t)) \Longrightarrow$$

$$|\beta'(t)|^3 =< \beta'(t), \beta'(t) >^{\frac{3}{2}} = (1 - k(t))^3.$$

De

$$\beta''(t) = \alpha''(t)(1 - \lambda k(t)) - \lambda k'(t)\alpha'(t)$$

vem

$$|\beta''(t) \wedge \beta'(t)| = |(\alpha''(t)(1 - \lambda k(t)) - \lambda k'(t)\alpha'(t)) \wedge \alpha'(t)(1 - \lambda k(t))| =$$

$$= \left|(1 - \lambda k(t))^2\alpha''(t) \wedge \alpha'(t) - \lambda k'(1 - \lambda k(t))\alpha'(t) \wedge \alpha'(t)\right| =$$

$$= \left|(1 - \lambda k(t))^2 k(t) n'(t) \wedge \alpha'(t)\right| = \left|k(t)(1 - \lambda k(t))^2\right| |b| = k(t)(1 - \lambda k(t))^2.$$

Segue que

$$k_\beta(t) = \frac{k(t)}{1 - \lambda k(t)}$$

e assim, da condição (5), temos

$$\min k_\beta = \frac{\min k}{(1 - \lambda \min k)} \geq \frac{H}{1 - \lambda H}.$$

Segue de (8)

$$\min k_\beta \geq \frac{H}{1 - \left(\frac{1}{H} - \sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}\right) H} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}}.$$

Observando que $T_{\alpha(t)}$ é um círculo de curvatura

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{H^2} - h^2}},$$

podemos concluir que $\gamma = \beta + he_3$ é a curva envelope interior para a família T_α, isto é, todo círculo da família contém γ. Segue que dado qualquer $p \in \alpha \cup \beta$, existe uma meia esfera S_p de cmc H, que é gráfico de uma função u_p definida em um disco contendo Ω tal que $u_p(p) = 0$, se $p \in \alpha$ e $u_p(p) = h$, se $p \in \beta$. A restrição de u_p a Ω fornece uma barreira superior em p para qualquer solução de $Q_H = 0$ em Ω tal que $s|_\alpha = 0$ e $s|_\beta = h$.
Vamos agora construir barreiras inferiores em cada ponto de $\partial\Omega$. Observe que de (5) e (6) temos

$$\max k_\beta = \frac{k_M}{1 - \lambda k_M} < \frac{k_M}{1 - \frac{1}{k_M}\left(1 - \sqrt{\frac{k_M}{2H}}\right) k_M} < 2H.$$

Como num cilindro uma das curvaturas principais é zero, temos que o cilindro $\beta \times \mathbb{R}$ sobre β tem curvatura média estritamente menor que H. Seja $(x, y, 0)$ um ponto do interior da região limitada por β. Dado $a > h$, vamos considerar o pedaço de cone K_a dado por

$$K_a = \left\{ t(x, y, a) + (1 - t)(q + (0, 0, h) \mid t \in \left[\frac{h}{h - a}, 0\right], q \in \beta \right\}.$$

Note que o bordo ∂K_a consiste em duas curvas, uma delas sendo $\beta + he_3$ e a outra, digamos β_a, no plano $z = 0$. Como K_a aproxima o cilindro sobre β com $0 \leq z \leq h$ quando $a \to +\infty$, segue que a curvatura de K_a é menor que H para a escolhido suficientemente grande. Além disso, também escolhendo a grande o suficiente, a curva β_a está no domínio limitado por α. Nós então definimos uma subsolução de $Q_H = 0$ em Ω como uma função $v \in C^0(\bar{\Omega})$ cujo gráfico é $K_a \cup P_a$ onde P_a é o anel em $z = 0$ limitado pelas curvas α e β_a. Então $v|_\alpha = 0$ e $v|_\beta = h$. Pelo método de Perron, dado $p \in \Omega$, sabemos que

$$u(p) := \sup\{s(p); s|_\alpha \leq 0 \text{ e } s|_\beta \leq h,\ s \text{ é subsolução de } Q_H = 0 \text{ em } \Omega\}$$

pertence a $C^2(\Omega)$ e é uma solução de $Q_H = 0$ em Ω. As barreiras construídas acima permitem-nos concluir que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $u|_\alpha = 0$, $u|_\beta = h$ concluindo a prova do teorema. ■

Para o Teorema 13, precisamos usar certas superfícies de revolução de cmc, os nodóides, como barreira. Na proposição que se segue obtemos uma descrição destas.

Proposição 12 *Sejam $r > 0$ e $H > 0$ dados. Então, dado*

$$r < R \leq r + \frac{1}{H},$$

existe uma superfície rotacional com cmc H dada como o gráfico de uma função u definida em um anel do plano $z = 0$ cujo bordo consiste de dois círculos concêntricos c_r e C_R de raios r e R e tal que $u|_{c_r} = 0$ e $u|_{C_R} = h(R)$, onde

$$h(R) = \int_r^R \frac{dx}{\left(\frac{x}{r(1+rH) - Hx^2}\right)^2 - 1} \tag{9}$$

se

$$r < R < \sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}$$

e

$$h(R) = \int_r^{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1}} - \int_{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}}^R \frac{dx}{\left(\frac{x}{r(1+rH)-Hx^2}\right)^2 - 1} \tag{10}$$

se

$$\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}} \leq R \leq r + \frac{1}{H}.$$

Demonstração. Conforme o Teorema de Delaunay existe um nodóide N_r no plano $x - z$, gerando, por rotação em torno do eixo z, uma superfície de cmc H com auto-intersecções, cuja distância ao eixo de rotação é r. Podemos assumir que o ponto $A = (r, 0)$ pertence a N_r. Se N_r é dado parametricamente pelas equações $x = x(t)$ e $z = z(t)$, então essas funções satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2 \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 1. \end{cases} \tag{11}$$

onde a é uma constante. Observe que r é um valor mínimo de x. Se X denota um valor máximo de x então segue que dado qualquer $r < R \leq X$, existe um nodóide de cmc H tendo como bordo um círculo c_r de raio r no plano $z = 0$ e um círculo de raio R em um plano de alguma altura h com respeito a $z = 0$. Vamos provar que $X = r + 1/H$ e que h é dado por (9) ou (10). De (11) temos que $x' = 0 \iff$

$$0 = 1 - (Hx - \frac{a}{x})^2 = 1 - (H^2x^2 - 2aH + \frac{a^2}{x^2})$$

$$= 1 - H^2x^2 + 2aH - \frac{a^2}{x^2} = \frac{x^2 - H^2x^4 + 2aHx^2 - a^2}{x^2} \iff$$

$$0 = +H^2x^4 - (1 + 2aH)x^2 + a^2 \iff$$

$$x^2 = \frac{1 + 2aH \pm \sqrt{(1 + 2aH)^2 - 4a^2H^2}}{2H^2}$$

$$= \frac{1 + 2aH \pm \sqrt{1 + 4aH}}{2H^2} = \frac{2 + 4aH \pm 2\sqrt{1 + 4aH}}{4H^2}$$

$$= \frac{1 \pm 2\sqrt{1 + 4aH} + (1 + 4aH)}{4H^2} = \frac{(1 \pm \sqrt{1 + 4aH})^2}{4H^2} \iff$$

$$x = \pm\frac{(1 \pm \sqrt{1 + 4aH})}{2H},$$

sendo $x = x_1 = r$ ou $x = x_2 = X$, onde

$$x_1 = -\frac{(1 - \sqrt{1 + 4aH})}{2H} \text{ e } x_2 = +\frac{(1 + \sqrt{1 + 4aH})}{2H}.$$

Portanto $X - r = x_2 - x_1 = 1/H$. Quando $x = x(z)$, temos de (11):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt} \Longrightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}} \Longrightarrow \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2}{1 - \left(1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2\right)} = \frac{1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2}{\left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2} = \frac{1}{\left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2} - 1$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{Hx^2 - a}{x}\right)^2} - 1 = \left(\frac{x}{Hx^2 - a}\right)^2 - 1 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \left(\frac{x}{a - Hx^2}\right)^2 - 1 \tag{12}$$

Seja $x_1 = x(t_1)$ o primeiro valor maior que r tal que $z'(t_1) = 0$, para algum t_1. Determinaremos explicitamente x_1 em termos de r e H. De (12) temos

$$\frac{dx}{dz} = \pm\sqrt{\left(\frac{x}{a - Hx^2}\right)^2 - 1},$$

o que implica que

$$\frac{dz}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{a - Hx^2}\right)^2 - 1}}$$

para $r \leq x \leq x_1$, vale

$$\frac{dz}{dx} = +\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{a - Hx^2}\right)^2 - 1}}, \tag{13}$$

e para $x_1 \leq x \leq X$, vale

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{a - Hx^2}\right)^2 - 1}}. \tag{14}$$

Como $z'(r) = \infty$, temos

$$\left(\frac{r}{a - Hr^2}\right)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{r}{a - Hr^2} = \pm 1$$

Então

$$r = a - Hr^2 \Longrightarrow a = r(1 + Hr)$$

ou

$$r = -a + Hr^2 \Longrightarrow a = r(-1 + Hr).$$

No caso dos nodóides, sabemos, além disso, que $x'(z_1) = \infty$ onde $z_1 = z(x_1)$. Portanto, de (11), vem que $a - Hx_1^2 = 0 \Longrightarrow a = Hx_1^2 \geq Hr^2$ e isto implica que $a = r(1 + rH)$. De $a = Hx_1^2$ e $a = r(1 + rH)$, segue que

$$x_1 = \sqrt{\frac{r(1 + rH)}{H}}. \tag{15}$$

De (13), (14), (15) segue (9) e (10) como queríamos demonstrar. ■

Teorema 13 *Seja $H > 0$ dado. Seja α uma curva convexa limitada C^2 no plano $z = 0$ tal que*

$$\frac{1}{k_{\min}} - \frac{1}{k_{\max}} \leq \frac{1}{4H}$$

onde k é a curvatura de α e tome

$$r = \frac{1}{k_{\max}}.$$

Dado

$$r < R \leq R_m$$

onde

$$R_m = min\left\{\sqrt{\frac{r(2 + rH)}{H}}, r + \frac{1}{4H}\right\}$$

e $d = R - r$, seja $\beta \subset \{z = 0\}$ a curva paralela exterior a α cuja distância a α é d, isto é,

$$\beta = \{p + dn(p) \mid p \in \alpha\},$$

sendo $n(p)$ o vetor normal unitário exterior a α em p. Tomando

$$h(R) = \int_r^R \frac{d_x}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1 + rH) - Hx^2}\right)^2 - 1}} \tag{16}$$

se

$$r < R \leq \sqrt{\frac{r(1 + rH)}{H}}$$

e

$$h(R) = \int_r^R \frac{d_x}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH) - Hx^2}\right)^2 - 1}} - \int_{\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}}}^R \frac{d_x}{\sqrt{\left(\frac{x}{r(1+rH) - Hx^2}\right)^2 - 1}} \tag{17}$$

se

$$\sqrt{\frac{r(1+rH)}{H}} \leq R \leq R_m,$$

e denotando por $\Omega \subset \{z = 0\}$ *o anel limitado por* α *e* β*, existe uma solução* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *de* $Q_H = 0$ *em* Ω *tal que* $u|_\alpha = 0$ *e* $u|_\beta = h(R)$.

Demonstração. Dado qualquer ponto $p \in \alpha$, podemos considerar um círculo c_p de raio r passando por p e contido no fecho do domínio limitado por α. Como

$$r + \frac{1}{H} > 0$$

e

$$\left(r + \frac{1}{H}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{H} + \frac{1}{H^2} = \frac{r^2H^2 + 2rH + 1}{H^2} > \frac{r^2H^2 + 2rH}{H^2} = \frac{r(2 + rH)}{H}$$

segue que

$$r + \frac{1}{H} > \sqrt{\frac{r(2+rH)}{H}}.$$

Então, pela Proposição 12, existe uma superfície de Delaunay D_p, gráfico de uma função u_p definida em um domínio anelar no plano $z = 0$, tendo como bordo o círculo c_p e um círculo C_p de raio R no plano $z = h(R)$.

Afirmação: dado $p \in \alpha$, se O é o centro do círculo c_p, então o círculo C de raio $R_c = r + 1/H$ e centro O contém β. Para provar a afirmação consideremos

$$r_M = \frac{1}{k_{\min}} \text{ e } d \in (0, \frac{1}{4H}).$$

Seja $q_1 \in \beta$ tal que

$$|0q_1| = \max\{|Oq|\,; q \in \beta\}.$$

A mostrar: $|Oq_1| \leq r + 1/H$. Seja q_2 o ponto de interseção de β com a reta que passa por q_1 e O e que está a uma distância $d + r$ de O. Então

$$|q_1q_2| \leq \text{ diâmetro } (\beta) =: D.$$

Observemos primeiro que

$$D \leq 2(r_M + d).$$

Por cálculo anterior, sabemos que, dadas duas curvas α e β, paralelas, sendo α interior à β, a relação entre suas curvaturas é dada pela equação

$$k_\alpha = \frac{k_\beta}{1 - dk_\beta}.$$

Segue então que

$$\min k_\alpha = \frac{\min k_\beta}{1 - d\min k_\beta} \Longrightarrow \min k_\alpha(1 - d\min k_\beta) = \min k_\beta \Longrightarrow$$

$$\min k_\alpha = \min k_\beta + d\min k_\beta \min k_\alpha \Longrightarrow$$

$$\min k_\beta = \frac{\min k_\alpha}{1 + d\min k_\alpha} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{\min k_\beta} = \frac{1}{\min k_\alpha} + d = r_M + d.$$

Além disso,

$$|Oq_1| + r + d \leq |q_1 q_2| \leq D,$$

de modo que

$$|Oq_1| \leq 2r_M - 2d - r + d = 2r_M - 2r + r + d.$$

Como

$$2d = 2r_M - 2r \leq \frac{1}{2H},$$

vem

$$|Oq_1| \leq \frac{1}{2H} + r + \frac{1}{2H} = r + \frac{1}{H},$$

o que demonstra a afirmação. Como o domínio anelar onde u_p está definida contém Ω, segue que qualquer subsolução s de $Q_H = 0$ em Ω tal que $s|_\alpha \leq 0$ e $s|_\beta \leq h(R)$ satisfaz

$$\sup s \leq u_p|_\Omega, \tag{18}$$

e assim está bem definida a função u em Ω dada, em $q \in R$, por

$$u(q) = \sup\{s(q) \mid s \text{ é uma subsolução de } Q_H = 0 \text{ em } \Omega,\ s|_\alpha \leq O \text{ e } s|_\beta \leq h(R)\}.$$

Portanto, pela técnica de Perron, $u \in C^2(\Omega)$ e $Q_H(u) = 0$. Também segue de (18) que dado $p \in \partial\Omega$,

$$\lim_{q \to p} u(q) \leq u_p(p)$$

e temos

$$u(q) = \begin{cases} 0 \text{ se } q \in \alpha \\ h(R) \text{ se } q \in \beta, \end{cases}$$

e assim, a fim de concluir que u satisfaz as condições desejadas em $\partial\Omega$, é suficiente construir, em cada ponto $p \in \partial\Omega$, uma barreira inferior em p. Esta barreira será um gráfico mínimo, que será obtido como uma aplicação do Teorema 10. Para garantir a existência de $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, solução de

$Q_0 = 0$ em Ω com $w|_\alpha = 0$ e $w|_\beta = h(R)$, precisamos verificar a condição (4), ou seja,

$$\cosh \frac{|h(R)|}{r} \leq \frac{r+d}{r}.$$

Neste presente caso, $d = R - r$, e temos que provar que

$$|h(R)| \leq r \cosh^{-1} \frac{R}{r}. \qquad (19)$$

O lado direito de (19) descreve uma catenária na variável R, a qual gera um catenóide. Portanto, considerando uma parametrização por comprimento de arco $J_0(t) = (x_0(t), y_0(t))$ da catenária tal que $x_0(0) = r$ e $x_0'(0) = 0$, e também uma parametrização por comprimento de arco $J_H(t) = (x_H(t), y_H(t))$ de uma curva geradora de uma superfície rotacional de cmc H tal que $x_H(0) = r$ e $x'_H(0) = 0$, e usando a interpretação de $h(R)$ em termos de curvas geradoras de superfícies de Delaunay dada na Proposição 12, é suficiente, para verificar (19), provarmos que

$$x'_H(t) \leq x_0'(t) \qquad (20)$$

para todo $t \geq 0$ tal que

$$x(t) \leq R_m. \qquad (21)$$

Como

$$R_m = min \left\{ r + \frac{1}{2H}, \sqrt{\frac{r(2+rH)}{H}} \right\},$$

basta demonstrar que (20) vale para $x(t) \leq \sqrt{r(2+rH)/H}$; pois se $R_m = 1 + 1/2H$ então

$$1 + \frac{1}{2H} \leq \sqrt{\frac{r(2+rH)}{H}},$$

e isto implica que (20) vale para $x(t) \leq 1 + 1/2H$.
Vamos mostrar que de (21) segue

$$\frac{r}{x} \geq \left| Hx - \frac{r(1+rH)}{x} \right|.$$

De fato,

$$x \leq \sqrt{\frac{r(2+rH)}{H}} \Longrightarrow x^2 \leq \frac{2r + r^2 H}{H} \Longrightarrow$$

$$Hx^2 \leq 2r + r^2 H \Longrightarrow Hx \leq \frac{2r + r^2 H}{x} \Longrightarrow$$

$$Hx \leq \frac{r}{x} + \frac{r + r^2 H}{x} \Longrightarrow Hx - \frac{r(1+rH)}{x} \leq \frac{r}{x}.$$

Podemos verificar, substituindo os valores para $x = r$ e $x = \sqrt{r(2+rH)/H}$, que vale $Hx - r(1-rH)/x \geq -r/x$. Portanto, temos que

$$\frac{r}{x} \geq \left| Hx - \frac{r(1+rH)}{x} \right|.$$

Segue que

$$\frac{r}{x} \geq \left| Hx - \frac{r(1+rH)}{x} \right| \Leftrightarrow \left(\frac{r}{x}\right)^2 \geq \left(Hx - \frac{r(1+rH)}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{r}{x}\right)^2 \leq 1 - \left(Hx - \frac{r(1+rH)}{x}\right)^2;$$

como $a = r(1+rH)$, vem

$$1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2 \leq 1 - \left(Hx - \frac{a}{x}\right)^2 \Longleftrightarrow (x_0'(t))^2 \leq (x_H'(t))^2 \Longleftrightarrow x_0'(t) \leq x_H'(t),$$

já que $x_0'(t), x_H'(t) \geq 0$. ∎

5 Resultado de não-existência

.

Teorema 14 *Seja $H > 0$ e Ω um domínio C^0 limitado no plano. Seja γ o bordo exterior de Ω (a saber: se Λ é a componente não limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, então $\gamma = \partial\Lambda$). Então não existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ de $Q_H = 0$ em Ω tal que $u|_{(\partial\Omega \setminus \gamma)} = 0$ e $u|_\gamma > 1/2H$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que tal solução u exista e seja G o gráfico de u. Seja G^* o refletido de G em relação ao plano $z = 0$ e ponha $M = G \cup G^*$. Então M é uma superfície topológica compacta com bordo que é regular e com cmc H fora dos pontos que estão no plano $z = 0$; M está contido entre dois planos paralelos π_1 e π_2 distando um do outro mais do que $1/H$ e o bordo de M está contido nos planos π_1 e π_2. Seja F a região do espaço que tem π_1 e π_2 como bordo. Podemos então tomar um cilindro C de cmc H contido em F. Através de movimentos rígidos do espaço, podemos colocar C distante de M de modo que $C \cap M = \emptyset$. Podemos então aproximar C de M, sempre mantendo C contido em F até termos um primeiro contato entre C e M. Este primeiro contato necessáriamente tem que ser em um ponto regular de M, o que, pelo princípio de tangência, é impossível. Isto prova a proposição. ∎

Referências

[doC] do Carmo, M.P; " Elementos de Geometria Diferencial ", Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos,1971.

[doCD] do Carmo, M.P, Dajczer,M; " Rotacional hypersurfaces in spaces of constant curvature ", Transactions of the AMS (2), 277,1983.

[ER] Espírito-Santo, N. do, Ripoll, J.; Some existence and nonexistence theorems for compact graphs of constant mean curvature with boundary in paralel planes. The Journal of Geometric Analysis, Volume 11, Number 4, 2001.

[GT] Gilbarg, D.,Trudinger, N.S; " Elliptic Partial Differential Equations of Second Order ", reprint of the 1998 edition, Springer, 2001.

[MR] Medeiros, N.A.C., Ripoll, J.; "Hipersuperfícies invariantes de curvatura média constante", Revista Matemática Universitária, SBM, N.13,1991.

[P] A. Pogorelov, "A survey of minimal surfaces", Van Nostrand-Reinhold, New York, 1969.

[RR] A. Ros, H. Rosenberg: "Constant mean curvature surfaces in a half-space of $\mathbb{R}^3$ with boundary in the boundary of a half-space", Journal of Diff. Geometry, Vol 44, n.4, 1996.