UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

SOLUÇÕES FRACAS PARA UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DE OBERBECK-BOUSSINESQ

por

FABIANA GOULART DE LIMA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino
Co-orientador: Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Santa Maria, abril de 2002.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

LIMA, Fabiana Goulart de; Soluções fracas para um sistema de equações de Oberbeck-Boussinesq 56 p.: il. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002. Orientador: BONORINO, Leonardo Prange

Agradecimentos

A Deus pela presença constante em minha vida e em toda a minha caminhada.

Ao Professor Doutor Leonardo Prange Bonorino pela sua tarefa de orientador.

Ao Professor Doutor João Paulo Lukaszczyk pela sua dedicação, competência, profissionalismo na tarefa de coorientador e pelo empenho na viabilidade do convênio UFRGS-UFSM.

Aos meus familiares, em especial a minha mãe por seu amor e carinho.

Ao meu pai ausente, mas sempre presente em minha memória.

Aos meus irmãos pelo apoio e compreensão.

Às colegas do PPGMAp pelo companheirismo e apoio.

A URI-Campus Santiago pela oportunidade profissional, apoio e incentivo para a conclusão deste trabalho.

Sumário

Resumo vi

Abstract vii

Notação viii

Notação viii

1 Introdução 1

2 Preliminares 6

2.1 Definição 6

2.2 Definição 7

2.3 Teorema da Divergência 8

2.4 Identidade de Green 8

2.5 Proposição (Desigualdade de Young) 8

2.6 Desigualdade de Hölder 9

2.7 Proposição (Desigualdade de Gronwall-Versão Integral) . 9

2.8 Proposição (Desigualdade de Gronwall-Versão Diferencial) 9

2.9 Proposição (Algumas imersões de Sobolev) 10

2.10 Proposição 10

2.11 Proposição 11

2.12 Definição (Tipos de Convergências) 11

2.13 Proposição 12
2.14 Proposição 12
2.15 Lema 12
2.16 Lema (Compacidade de Aubin-Lions) 12
2.17 Lema 13
2.18 Lema 14
2.19 Definição de Solução Fraca 14

3 A existência de soluções fracas **21**
3.1 Existência de solução em dimensão finita 22
3.2 Estimativas a priori 25
3.3 Passagem ao limite 41

4 A Unicidade de Solução Fraca **44**

5 Conclusão e sugestões para trabalhos futuros **53**

Resumo

Neste trabalho, utilizando o método espectral de Galerkin, provamos a existência de soluções fracas (quando a dimensão n é maior que 2) e existência e unicidade de soluções fracas (quando a dimensão é 2) para um sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o movimento de um fluido quimicamente ativo em um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Palavras-chaves: Equações de Navier-Stokes, aproximações de Galerkin, fluido quimicamente ativo, soluções fracas.

Abstract

In this work, by using the spectral Galerkin method, we prove the existence of weak solutions (when the dimension n is great than 2) and existence and uniqueness of weak solutions (when the dimension is 2) for a system of partial differential equations that describes the motion of a chemical active fluid in a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Keywords: Navier-Stokes equations, Galerkin approximations, chemical active fluid, weak solutions.

Notação

Neste trabalho, utilizou-se a seguinte notação normalmente usada em estudos de equações diferenciais parciais:

$\mathbb{R}^n$ o Espaço Euclidiano

Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, ..., x_n)$

$\partial\Omega$ a fronteira de Ω

$Q = \Omega \times]0, T[$ um domínio cilíndrico

grad, Δ e div denotam os operadores gradiente, laplaciano e divergente respectivamente. O operador gradiente também é denotado por ∇.

Γ a fronteira do cilindro Q

$C^k(\Omega)$, funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω

$C^\infty(\Omega)$, funções indefinidamente diferenciáveis em Ω

$C_0^\infty(\Omega)$, funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto

$D(\Omega)$ o espaço das funções $C_0^\infty(\Omega)$ com divergente nulo

$H = \overline{D}$ fecho de D em $L^2(\Omega)$

$H^s(\Omega)$ com $s \in \mathbb{R}$, espaço de Sobolev usual

$V_s = \overline{D}$ fecho de D em $H^s(\Omega)$

H_0^1 o espaço das funções de H^1 que se anulam na fronteira

V^* o dual do espaço de Banach

$V_s \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, o espaço funcional V_s está continuamente imerso no espaço funcional V que está continuamente imerso no espaço funcional

H

$L(V_s, V_s)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de V_s em V_s

$L^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert com produto interno $(f, g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$ e norma associada a este produto na forma $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u^2 \; dx$

$\langle \; , \; \rangle$ o produto interno na dualidade V, V^*

u_t ou $\frac{\partial u}{\partial t}$ denota a derivada no tempo de u

$L^p(\Omega)$ o espaço das funções reais mensuráveis, tais que:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \; , \quad 1 \leq p < \infty$$

$H^m(\Omega)$ o espaço das funções reais mensuráveis tais que possuem derivadas no sentido das distribuições até ordem m e

$$f, \, Df, \, ..., \, D^m f \in L^2(\Omega)$$

$L^p(0, T, A)$ o espaço das funções $f(x, t)$ tais que para $t \in [0, T]$ temos que $f(\cdot, t)$ pertence ao conjunto A (Espaço de Banach) e satisfaz

$$\int_0^T \|f(\cdot, t)\|^p_A \; dt < \infty$$

$C([0, T], H)$ o espaço das funções contínuas em t com valores no espaço H

$(H^1_0)^* = H^{-1}$

Capítulo 1

Introdução

Num fluido, a presença de gradientes de densidade significa que a atração gravitacional terrestre provocará um movimento.

Estas diferenças de densidade podem ser induzidas através de diferenças de concentração neste fluido. Por exemplo, no movimento da atmosfera terrestre quando aquecida desde as camadas mais baixas até as mais altas através do calor emanado da terra. Num recipiente de água apoiado numa parede (panela no fogo) as partículas de água mais aquecidas (perto da parede) terão menos densidade e subirão provocando assim um movimento neste fluido. Exemplos de movimento de um fluido provocado por diferenças de concentração podem ser vistos em situações de laboratório.

Neste trabalho, estudaremos o movimento de um fluido quimicamente ativo.

Vamos supor as seguintes hipóteses simplificadoras:

(1) O movimento é suposto incompressível com a exceção de que variações de densidade não são ignoradas no termo da força externa na equação de conservação de momento.

(2) As mudanças de densidade são induzidas por mudanças de tempe-

ratura e concentração e não mudança de pressão.

(3) Os gradientes de velocidade são suficientemente pequenos de forma que a conversão de trabalho em calor pode ser ignorada.

(4) Viscosidade, condutividade térmica e calor específico são considerados constantes.

(5) A equação de estado $\rho(\tau, C)$ é linearizada:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha_\tau (\tau - \tau_0) + \alpha_C (C - C_0))$$

Neste trabalho temos que $\rho = \tau + C$.

Estas hipóteses ocorrem em situações práticas, por exemplo, numa panela com água aquecida num fogão.

Tendo em mente estas hipóteses Boussinesq em 1903 derivou o seguinte grupo de equações que representam aproximadamente o movimento de um fluido sob a influência da diferença de temperatura e concentração.

Sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ o domínio limitado e $T > 0$, estas equações são:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u - \mu\Delta u + grad\, p = \overline{f} + (\tau + C)\, g \quad \text{em} \quad Q \\ \text{div}\, u = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + u\nabla\tau - k_\tau \Delta\tau = h \quad \text{em} \quad Q \\ \frac{\partial C}{\partial t} + u\nabla C - k_C \Delta C = j \quad \text{em} \quad Q \end{cases} \tag{1.1}$$

onde

$$u(x,t) \in \mathbb{R}^n$$

denota a velocidade do fluido no ponto $x \in \Omega$ e no tempo $t \in [0, T)$;

$$\tau(x,t) \in \mathbb{R}, \;\; C(x,t) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p(x,t) \in \mathbb{R}$$

denotam respectivamente a temperatura, a concentração do material no fluido e a pressão do fluido;

$$g(x,t)\,,\ \ \overline{f}(x,t)\,,\ \ h(x,t)\ \ \text{e}\ \ j(x,t)$$

são funções de fonte, onde $\overline{f}$ denota um campo magnético e g uma força externa (gravitacional por exemplo);

$$\mu > 0$$

é a viscosidade do fluido;

$$k_C > 0 \quad \text{e} \quad k_\tau > 0$$

são a difusividade da solução e a difusividade térmica respectivamente.

O componente de ordem i de $u\nabla u$ é dado por:

$$(u\nabla u)_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

e

$$u\nabla\varphi = \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

Na fronteira Γ, assumimos que:

$$u(x,t) = 0,\ \ \tau(x,t) = \varepsilon(x,t)\ \ \text{e}\ \ C(x,t) = \tau(x,t)\,, \tag{1.2}$$

onde ε e σ são funções conhecidas e

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\ \ \sigma(x,0) = \sigma_0(x)\,,\ \ C(x,0) = C_0(x) \tag{1.3}$$

são condições iniciais.

Neste trabalho, consideraremos o problema da existência e unicidade de soluções fracas para (1.1) – (1.3). Os argumentos consistem em transformá-lo em outro problema de valor inicial com condições homogêneas de fronteira, que posteriormente será tratado usandoaproximação de Galerkin.

Quando há ausência de reações químicas ($C \equiv 0$), o problema é equivalente ao problema clássico de Boussinesq, o qual tem sido investigado por muitos autores, como por exemplo, HISHIDA [5] (1991), KORONEV [7] (1997) e MORIMOTO [12] (1992).

O problema estacionário correspondente a soluções de menor movimento do sistema $(1.1) - (1.2)$ foi considerado por Gil (1991), enquanto que a questão da estabilidade das soluções do sistema $(1.1) - (1.3)$ com diferentes condições de fronteira foi analisado por Belov e Kapitonov (1983).

ROJAS-MEDAR e LORCA [13], [14], [15], [16] estudaram a existência, unicidade e regularidade de soluções locais e globais fortes para $(1.1) - (1.3)$ pelo uso do método de Galerkin. Além disto, eles obtiveram otimizações de erro para as aproximações.

O método de Galerkin foi utilizado por MORIMOTO [12], no problema de Boussinesq, para obter resultados globais para soluções fracas com diferentes condições de fronteira.

A abordagem usada neste trabalho é paralela à de MORIMOTO [12], mas com a diferença que ele apenas considerou o caso de $2 \leq n \leq 4$.

Nota-se que trabalhando como MORIMOTO [12] (1992) é possível provar a existência de soluções fracas (u, τ, C) tendo a propriedade de reprodutividade

$$u(x,0) = u(x,T), \quad \tau(x,0) = \tau(x,T), \quad C(x,0) = C(x,T)$$

Esse trabalho está dividido em cinco capítulos: No primeiro capítulo apresentamos uma introdução e desenvolvemos uma formulação abstrata para um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de evolução denominadas aproximações de O.B, as quais incluem vários problemas de mecânica dos fluidos, por exemplo, a equação do calor, as clássicas equações de Navier-Stokes e outras.

No segundo capítulo são apresentados alguns preliminares e resultados básicos para o estudo de soluções fracas dessas equações diferenciais parciais.

No terceiro capítulo apresentamos o teorema de existência de solução fraca e sua demonstração para o sistema de equações de Oberbeck-Bousssinesq que descrevem o movimento de um fluido quimicamente ativo.

No capítulo seguinte destacamos o teorema de unicidade e sua demonstração para o sistema de equações de Oberbeck-Boussinesq.

Finalmente, o último capítulo apresenta algumas conclusões a respeito do estudo que fizemos e propõe algumas sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados fundamentais e necessários no estudo das equações diferenciais não-lineares.

Estes resultados são apresentados na forma de definições, lemas, proposições e teoremas, todos importantes na demonstração dos teoremas 1 e 2, os quais apresentam resultados de existência de soluções e unicidade de soluções, respectivamente.

2.1 Definição

Definimos $H^s(\Omega)$, com $s \in \mathbb{R}$ o espaço de Sobolev usual, isto é:

$$H^s(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : ||u||_{H^s} < \infty\right\}$$

onde:

$$\|u\|_{H^s} = \sqrt{||u||^2_{H^m} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}}\, dx\, dy}$$

com

$$s = m + \sigma$$

sendo

$$m \in \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad 0 < \sigma < 1$$

considerando $\partial\Omega$ regular (localmente Lipschitz).

Onde:

$$\|u\|_{H^m}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 \, dx$$

e α é um multi-índice.

Conforme ADAMS [1] na página 214.

2.2 Definição

Seja

$$H = \bar{D}$$

onde o fecho de D é considerado na topologia de L^2.

Considere também

$$V_s = \bar{D}$$

onde o fecho de D é considerado na topologia de H^s.

No caso de $\partial\Omega$ regular e $s = 1$ temos as seguintes caracterizações, conforme TEMAM [17] nas páginas $15 - 19$.

$$H = \left\{ u \in \left(L^2(\Omega)\right)^m : \text{ div } u \equiv 0 \text{ e } (u.\overrightarrow{n})|_{\partial\Omega} \equiv 0 \right\}$$

onde $\overrightarrow{n}$ é a normal exterior a $\partial\Omega$.

$$V_1 = V = \left\{ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^n : \text{div } \ u \equiv 0 \right\}$$

No caso de Ω limitado e regular temos as seguintes relações de inclusão:

$$V_s \subset V \subset H \text{ para } s \geq 1.$$

2.3 Teorema da Divergência

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto regular e F um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$.

Então:

$$\int_{\Omega} \text{div } F \quad dx = \int_{\partial\Omega} F.\overrightarrow{N} \quad ds.$$

Demonstração: Veja LIMA [9] na página 495.

2.4 Identidade de Green

Sejam ϕ, $u \in C^2(\Omega)$ onde $\partial\Omega$ é de classe C^1, então

$$\int_{\Omega} (\phi \triangle u + \nabla\phi\nabla u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} \; ds.$$

2.5 Proposição (Desigualdade de Young)

$$\forall \; a, b > 0; \quad p, \; q > 1$$

satisfazendo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e

$$\varepsilon > 0$$

temos:

$$ab \leq C_{\varepsilon} \frac{a^p}{p} + \varepsilon \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Veja BRÉZIS [2] na página 56.

2.6 Desigualdade de Hölder

Sejam $f,\ g \in L^1$, então

$$\int_{\Omega} fg\ dx \leq ||f||_p ||g||_q$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ com } p,\ q > 1$$

Demonstração: Veja MEDEIROS [11] na página 75.

2.7 Proposição (Desigualdade de Gronwall-Versão Integral)

Seja $f(t)$ uma função não-negativa, integrável em $[0, T]$ satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$f(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t f(s)\ ds; \qquad C_1,\ C_2 \geq 0$$

então

$$f(t) \leq C_1 - 1 + e^{C_2 t}$$

Demonstração: Veja HALE [4] na página 36.

2.8 Proposição (Desigualdade de Gronwall-Versão Diferencial)

Seja $\eta(t)$ uma função positiva em $[0, T]$, $\phi(t)$ e $\psi(t)$ funções positivas e integráveis em $[0, T]$ satisfazendo $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$. Então:

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi(s)\, ds\right)\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\right]$$

Demonstração: Veja EVANS [3] na página 556.

2.9 Proposição (Algumas imersões de Sobolev)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado então:

2.9.1) Para $n = 2$

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C_\Omega ||\nabla u|| \text{ com } 1 \leq q < \infty,$$

onde C_Ω é uma constante que só depende de Ω.

2.9.2) Para $n \geq 3$

$$||u||_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq C_\Omega ||\nabla u||$$

Demonstração: Veja TEMAM [17] na página 159.

2.10 Proposição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, definimos

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \; dx$$

Então:

2.10.1)

$$b(u, v, v) = 0 \qquad \forall u \in V; \qquad \forall v \in H_0^1 \cap L^n$$

2.10.2)

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \qquad \forall u \in V; \;\; v, \;\; w \in H_0^1 \cap L^n$$

Demonstração: Veja TEMAM [17] na página 163.

2.11 Proposição

Seja $u \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$, então:

$$u \in L^4(0,T,L^p(\Omega))$$

onde

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2n}.$$

Demonstração: Veja LIONS [10] na página 73.

2.12 Definição (Tipos de Convergências)

Sejam E, F espaços de Banach e (X_n) uma seqüência contida em E.

2.12.1 Dizemos que X_n converge fortemente para X ($X_n \longrightarrow X$, quando $n \to \infty$) se tivermos que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||X_n - X||_E = 0$$

2.12.2 Dizemos que X_n converge fracamente para X ($X_n \rightharpoonup X$, quando $n \to \infty$) se, para todo $f \in E^*$, tivermos que

$$f(X_n) \to f(X),$$

quando $n \to \infty$.

2.12.3 Suponhamos que $E = F^*$. Dizemos que X_n converge fraco$-*$ para X em E $\left(X_n \underset{*}{\rightharpoonup} X\right)$, quando para todo $f \in F$, tivermos que

$$X_n(f) \longrightarrow X(f)$$

quando $n \to \infty$.

Através da aplicação canônica, podemos considerar F um subconjunto de F^{**}, assim, também podemos dizer

$$f(X_n) \longrightarrow f(X).$$

Veja as definições acima com mais detalhes em BRÉZIS [2] na página 35.

2.13 Proposição

Seja B um espaço de Banach e (X_n) uma seqüência limitada em B. Então $\exists\ (X_{n_k})$ subseqüência tal que $X_{n_k} \underset{*}{\rightharpoonup} X$ em B.

2.14 Proposição

Seja H um espaço de Hilbert e (X_n) uma seqüência limitada em H então $\exists\ (X_{n_k})$ subseqüência tal que $X_{n_k} \rightharpoonup X$ em H.

2.15 Lema

Seja $n = 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto.

Então:

$$\|u\|_4 \leq \sqrt[4]{2}\,\|u\|^{\frac{1}{2}}\,\|\nabla u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demonstração: Veja TEMAM [17] na página 291.

2.16 Lema (Compacidade de Aubin-Lions)

Sejam B_0, B e B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \subset B \subset B_1$ onde B_i é reflexivo com $i = 0, 1$ e $B_0 \subset B$ com imersão compacta.

Sejam

$$p_0,\ p_1 \in \mathbb{R}$$

tais que

$$1 < p_0, p_1 < \infty$$

e defina

$$W = \left\{ v : v \in L^{p_0}(0,T,B_0)\,;\ v' \in L^{p_1}(0,T,B_1) \right\}$$

onde v' é a derivada no tempo. O conjunto W é munido da norma

$$||v||_{L^{p_0}(0,T,B_0)} + ||v'||_{L^{p_1}(0,T,B_1)}.$$

Então

$$W \subset L^{p_0}(0,T,B)$$

compactamente.

Demonstração: Veja LIONS [10] na página 58.

2.17 Lema

Sejam V, H, V^* três espaços de Hilbert tais que $V \subset H \subset V^*$ onde V^* é o dual de V. Suponha que $u \in L^2(0,T,V)$ e $u' \in L^2(0,T,V^*)$, então $u \in C([0,T],H)$, é integrável em t e vale a seguinte equação no sentido de distribuições:

$$\frac{d}{dt}||u||_H^2 = 2\langle u', u\rangle_{V^*,V}$$

Onde $u(t) \in V$, $u'(t) \in V^*$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*,V}$ é a aplicação de dualidade entre V^* e V.

Demonstração: Veja TEMAM [17] na página 261.

2.18 Lema

Utilizando a mudança de variáveis dependentes (τ, C):

$$\theta(x,t) = \tau(x,t) - \phi_1(x,t)$$
$$\alpha(x,t) = C(x,t) - \phi_2(x,t)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são soluções de:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \Delta\phi_1 = 0 \\ \phi_1 = \varepsilon = \tau(x,t), \text{ em } \Gamma \\ \phi_1(0) = \phi_{0,1} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \Delta\phi_2 = 0 \\ \phi_2 = \sigma = C(x,t), \text{ em } \Gamma \\ \phi_2(0) = \phi_{0,2} \end{cases}$$

Obtemos a partir do sistema (1.1), supondo $\mu = k_c = k_\tau = 1$, o resultado:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u - \Delta u + \nabla p = f + (\theta + \alpha) g, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u\nabla\theta + u\nabla\phi_1 - \Delta\theta = h, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u\nabla\alpha + u\nabla\phi_2 - \Delta\alpha = j, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = 0,\ \theta(x,t) = 0,\ \alpha(x,t) = 0, \qquad x \in \Gamma,\ t > 0 \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x),\ \alpha(x,0) = \alpha_0(x), \qquad x \in \Omega \tag{2.3}$$

2.19 Definição de Solução Fraca

Um trio de funções $\{u, \theta, \alpha\}$ é chamado soluções fracas de (2.1) – (2.3) se $u \in L^2(0,T,V)$, $\theta \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$, $\alpha \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ e

$(u,\ \theta,\ \alpha)$ satisfazem:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u,v) + a(u,v) + b(u,u,v) = (f,v) + ((\theta+\alpha)g,v), \\ \frac{d}{dt}(\theta,\varphi) + \widetilde{a}(\theta,\varphi) + \widetilde{b}(u,\theta,\varphi) + \widetilde{b}(u,\phi_1,\varphi) = (h,\varphi), \\ \frac{d}{dt}(\alpha,\psi) + \widetilde{a}(\alpha,\psi) + \widetilde{b}(u,\alpha,\psi) + \widetilde{b}(u,\phi_2,\psi) = (j,\psi), \end{cases} \tag{2.4}$$

onde:

$$b(u,v,w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \qquad ;a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)$$

$$\widetilde{b}(u,\phi,\varphi) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \varphi \qquad ;\widetilde{a}(\phi,\varphi) = (\nabla\phi, \nabla\varphi)$$

para quaisquer $v \in V \cap (L^n(\Omega))^n$, $\varphi,\ \psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)$, onde a derivada em relação à t está no senso da distribuição $D'(0,T)$.

Podemos considerar ainda, dentro desse capítulo, a aplicação do lema, preliminar 2.18 que ocorrerá da seguinte forma:

Para $\eta = \varepsilon$, obtemos a existência de $\varphi = \phi_1$ tal que ϕ_1 é uma solução única para o problema,

$$\begin{aligned} &\varphi_t - \Delta\varphi = 0 \qquad \text{em } \Omega \times (0,T) \\ &\varphi = \eta \qquad \text{em } \Gamma \times (0,T) \\ &\varphi(0) = \varphi_0 \end{aligned}$$

e mais adiante, ϕ_1 irá satisfazer as conclusões do lema, preliminar 2.18.

Analogamente, podemos obter a existência de ϕ_2 tal que ϕ_2 é uma solução única para o problema, com $\eta = \sigma$ satisfazendo novamente as condições do lema, preliminar 2.18.

Desse modo, podemos transformar (1.2) – (1.3) noutro problema, através de uma mudança de variáveis, da forma

$$\theta = \tau - \phi_1 \quad \text{e} \quad \alpha = C - \phi_2.$$

Obtemos como resultado (2.1), (2.2) e (2.3) onde

$$f = \overline{f} + (\phi_1 + \phi_2)g, \quad \theta_0 = \tau_0 - \phi_{0,1}; \quad \alpha_0 = \tau_0 - \phi_{0,2}.$$

No que segue, concentraremos nossa análise em $(2.1)-(2.3)$ ao invés de $(1.1)-(1.3)$.

Assumindo que $\{u, p, \theta, \alpha\}$ é uma solução clássica de $(2.1)-(2.3)$, usaremos o produto interno em L^2 de $v \in D$, $\varphi \in C_0^\infty$ e $\psi \in C_0^\infty$, na primeira, segunda e terceira equações respectivamente de (2.1).

Então, multiplicaremos a primeira equação de (2.1) por $v \in D$, e integraremos em x, isto é:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u' v \ dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla u) \cdot v \ dx - \int_\Omega (\Delta u) v \ dx + \int_\Omega (\nabla p) v \ dx \\ &= \int_\Omega f v \ dx + \int_\Omega (\theta + \alpha) g v \ dx \end{aligned} \tag{2.5}$$

1°)

$$\int_\Omega u' v \ dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega u.v \ dx = \frac{d}{dt} (u, v)$$

2°)

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (u \cdot \nabla u) \cdot v \ dx = \int_\Omega (u \cdot \nabla u_1, u \cdot \nabla u_{2,\ldots,} u \cdot \nabla u_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n) \ dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u \cdot \nabla u_i) \cdot v_i \ dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_1, u_{2,\ldots,} u_n) \cdot \left(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) v_i \ dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \sum_{j=1}^n u_j \tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \ dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_j \cdot \tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \ dx \end{aligned}$$

Isto motiva a definição da seguinte forma trilinear:

$$b(u, v, \omega) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \omega_i \ dx$$

3°) De acordo com a identidade de Green, preliminar 2.4.

Assim:

$$\int_\Omega v \cdot \Delta u \ dx = - \int_\Omega \sum_{i=1}^n \nabla v_i \cdot \nabla u_i \ dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial u_i}{\partial \overrightarrow{n}} \ ds$$

mas

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u_i}{\partial \overrightarrow{n}} \, ds = 0$$

pois $v|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Portanto:

$$-\int_{\Omega} v \cdot \Delta u \; dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \nabla v_i \cdot \nabla u_i \; dx$$

Isto motiva a definição da seguinte forma bilinear:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \; dx$$

4°) Utilizando que: $\operatorname{div}(vp) = v \cdot \nabla p + p \operatorname{div} v$, tem-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(vp) \; dx = \int_{\Omega} v \cdot \nabla p \; dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div} v \; dx$$

mas

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} v \; dx = 0$$

pois $\operatorname{div} v = 0$ e de acordo com o teorema da divergência, preliminar 2.3, tem-se:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(vp) \; dx = \int_{\partial\Omega} (v \cdot p) \cdot \overrightarrow{n} \; ds$$

onde $\overrightarrow{n}$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Mas

$$\int_{\partial\Omega} (v \cdot p) \cdot \overrightarrow{n} \; ds = 0$$

pois $v|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Assim

$$\int_{\Omega} v \cdot \nabla p \ \ dx = 0$$

Finalmente, utilizando os quatro itens anteriores em (2.5) obtemos:

$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(u,v) + b(u,u,v) = (f,v) + ((\theta+\alpha)g, v)$$

Agora, multiplicaremos a 2ª equação de (2.1) por $\varphi \in C_0^\infty$, e integraremos em x, isto é:

$$\int_{\Omega} \theta' \varphi \ \ dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla\theta)\varphi \ \ dx + \int_{\Omega} (u \cdot \nabla\phi_1)\varphi \ \ dx - \int_{\Omega} \Delta\theta \cdot \varphi \ \ dx = \int_{\Omega} h\varphi \ \ dx \tag{2.6}$$

1°)

$$\int_{\Omega} \theta' \varphi \ \ dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \theta\varphi \ \ dx = \frac{d}{dt}(\theta, \varphi)$$

2°)

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla\theta)\varphi \ \ dx = \int_{\Omega} (u_1, u_{2,\ldots,} u_n) \cdot \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\theta}{\partial x_n}\right)\varphi \ \ dx$$
$$= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\varphi \ \ dx = \widetilde{b}(u, \alpha, \psi)$$

Isto motiva a definição da forma trilinear:

$$\widetilde{b}(u, \phi, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\varphi \ \ dx$$

3°)

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla\phi_1)\varphi \ \ dx = \widetilde{b}(u, \phi_1, \varphi)$$

de acordo com o definido no 2° passo.

4°)

$$-\int_\Omega \Delta\theta \cdot \varphi \ dx = \int_\Omega \nabla\theta \cdot \nabla\varphi \ dx$$

de forma semelhante a feita na terceira etapa da primeira equação.

Isto motiva a definição $\widetilde{a}(\theta, \varphi) = (\nabla\theta, \nabla\varphi)$.

Portanto a equação (2.6) fica:

$$\frac{d}{dt}(\theta, \varphi) + \widetilde{b}(u, \theta, \varphi) + \widetilde{b}(u, \phi_1, \varphi) + \widetilde{a}(\theta, \varphi) = (h, \varphi)$$

Por último, multiplicamos a 3ª equação de (2.1) por $\psi \in C_0^\infty$, e integraremos em x, isto é:

$$\int_\Omega \alpha' \psi \ dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla\alpha)\psi \ dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla\phi_2)\psi \ dx - \int_\Omega \Delta\alpha \cdot \psi \ dx = \int_\Omega j\psi \ dx \tag{2.7}$$

1°)

$$\int_\Omega \alpha' \psi \ dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \alpha\psi \ dx = \frac{d}{dt}(\alpha, \psi)$$

2°)

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla\alpha)\psi \ dx = \int_\Omega (u_1, u_{2,\ldots,}u_n) \cdot \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\alpha}{\partial x_n}\right)\psi \ dx$$
$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\psi \ dx = \widetilde{b}(u, \alpha, \psi)$$

onde $\widetilde{b}$ foi definida na 2ª etapa da 2ª equação de (2.1)

3°)

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla\phi_2)\psi \ dx = \widetilde{b}(u, \phi_2, \psi)$$

de acordo com o definido no 2° passo dessa equação.

4°)

$$-\int_{\Omega} \Delta\alpha \cdot \psi \, dx = \int_{\Omega} \nabla\alpha \cdot \nabla\psi \, dx = \widetilde{a}\,(\alpha, \psi)\,,$$

onde $\widetilde{a}$ foi definida na 4ª etapa da 2ª equação.

Portanto a equação (2.7) fica:

$$\frac{d}{dt}\,(\alpha, \psi) + \widetilde{b}\,(u, \alpha, \psi) + \widetilde{b}\,(u, \phi_2, \psi) + \widetilde{a}\,(\alpha, \psi) = (j, \psi)$$

Como D é denso em V então a primeira formulação fraca anterior continua válida, por continuidade, em $V \cap (L^n(\Omega))^n$ e como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em H_0^1 então as outras duas formulações fracas, por continuidade, continuam válidas em $H_0^1 \cap L^n(\Omega)$.

Levando-se em consideração as condições mínimas necessárias para fazermos as formulações fracas anteriores somos levados a definição, preliminar 2.19.

Capítulo 3

A existência de soluções fracas

Nesse capítulo, apresentaremos a demonstração de Oberbeck-Boussinesq, utilizando o Método de Galerkin. Teremos como resultado básico de existência de solução o teorema a seguir:

Teorema 1 *Sejam* $f \in L^2(0,T,V^*)$, $g \in L^\infty(0,T,L^q(\Omega))$, *onde* $q > 2$, *no caso de* $n = 2$ *e* $q = \frac{n}{2}$ *quando* $n \geq 3$. *Suponhamos* $h, j \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in H$, θ_0 *e* $\alpha_0 \in L^2(\Omega)$. *Então existe* (u,θ,α) *solução fraca de* $(2.1)-(2.3)$. *Além disto,* $u \in L^\infty(0,T,H)$ *e* θ, $\alpha \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$.

A demonstração deste teorema será desenvolvida ao longo deste capítulo em diversas secções: primeiramente provaremos a existência de solução em dimensão finita, em seguida obteremos algumas estimativas a priori e finalmente passaremos o limite na formulação fraca.

3.1 Existência de solução em dimensão finita

Sejam $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{a_j(x)\}$ duas bases Hilbertianas (ortonormais e completas) de $V_s(\Omega)$ e $H_0^s(\Omega)$ respectivamente satisfazendo as seguintes equações:

$$\begin{aligned}(w_i, v)_s &= \lambda_i (w_i, v) \qquad \forall v \in V_s(\Omega)\\ (a_i, \phi)_s &= \beta_i (a_i, \phi) \qquad \forall \phi \in H_0^s(\Omega).\end{aligned}$$

onde $(w_i, v)_s$ é o produto interno que dá origem à norma da definição 2.1 na página 6 e (w_i, v) é o produto interno em L^2.

A existência de tais bases pode ser justificada em LIONS [10].

Definimos:

$$\begin{aligned}V_k &= [w_1, w_2, ..., w_k] \subset V_s(\Omega)\\ H_k &= [a_1, a_2, ..., a_k] \subset H_0^s(\Omega).\end{aligned}$$

Para cada $k \geq 1$ definimos as aproximações u_k, θ_k e α_k de u, θ e α respectivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}u_k(x,t) &= \sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\, w_i(x) \in V_k,\ t \in (0,T);\\ \theta_k(x,t) &= \sum_{i=1}^{k} d_{i,k}(t)\, a_i(x) \in H_k,\ t \in (0,T);\\ \alpha_k(x,t) &= \sum_{i=1}^{k} e_{i,k}(t)\, a_i(x) \in H_k,\ t \in (0,T),\end{aligned}$$

onde $c_{i,k}$, $d_{i,k}$ e $e_{i,k}$ são tais que u_k, θ_k e α_k satisfazem as seguintes equações:

$$(u_{k,t}, v) + a(u_k, v) + b(u_k, u_k, v) - ((\theta_k + \alpha_k)\, g, v) - (f, v) = 0 \qquad \forall\, v \in V_k \tag{3.1}$$

$$(\theta_{k,t}, \varphi) + \widetilde{a}(\theta_k, \varphi) + \widetilde{b}(u_k, \theta_k, \varphi) + \widetilde{b}(u_k, \phi_1, \varphi) - (h, \varphi) = 0 \qquad \forall\, \varphi \in H_k \tag{3.2}$$

$$(\alpha_{k,t},\psi)+\widetilde{a}(\alpha_k,\psi)+\widetilde{b}(u_k,\alpha_k,\psi)+\widetilde{b}(u_k,\phi_2,\psi)-(j,\psi)=0 \qquad \forall\,\psi\in H_k \tag{3.3}$$

$$u_k(0)=u_{k,0},\quad \theta_k(0)=\theta_{k,0},\quad \alpha_k(0)=\alpha_{k,0}, \tag{3.4}$$

onde $u_{k,0}$ é a projeção de u_0 em V_k , $\theta_{k,0}$ e $\alpha_{k,0}$ saõ as projeções de θ_0 e α_0, respectivamente, em H_k.

$$\begin{aligned} u_{k,0} &\longrightarrow u_0 && \text{em } H\\ \theta_{k,0} &\longrightarrow \theta_0 && \text{em } L^2(\Omega)\\ \alpha_{k,0} &\longrightarrow \alpha_0 && \text{em } L^2(\Omega)\end{aligned}$$

Substituindo novamente as expressões, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{k} c'_{i,k}(t)\,w_i(x),v\right)+a\left(\sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\,w_i(x),v\right)+b\left(\sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\,w_i(x),\sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\,w_i(x),v\right)\\
&-\left(\left(\sum_{i=1}^{k} d_{i,k}(t)\,a_i(x)+\sum_{i=1}^{k} e_{i,k}(t)\,a_i(x)\right)g,v\right)-(f,v)=0 \qquad \forall\,v\in V_k.\\
&\left(\sum_{i=1}^{k} d'_{i,k}(t)\,a_i(x),\varphi\right)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k} d_{i,k}(t)\,a_i(x),\varphi\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\,w_i(x),\sum_{i=1}^{k} d_{i,k}(t)\,a_i(x),\varphi\right)\\
&+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\,w_i(x),\phi_1,\varphi\right)-(h,\varphi)=0 \qquad \forall\varphi\in H_k.\\
&\left(\sum_{i=1}^{k} e'_{i,k}(t)\,a_i(x),\psi\right)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k} e_{i,k}(t)\,a_i(x),\psi\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\,w_i(x),\sum_{i=1}^{k} e_{i,k}(t)\,a_i(x),\psi\right)\\
&+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k} c_{i,k}(t)\,w_i(x),\phi_2,\psi\right)-(j,\psi)=0 \qquad \forall\psi\in H_k.
\end{aligned}$$

Como as bases são Hilbertianas e formadas de autofunções, então os elementos da base também são ortogonais em L^2. Assim, o sistema acima ficará da seguinte forma, fazendo-se:

$$\begin{aligned} v &= w_{j;} && {\scriptstyle j=1,2,\ldots,k}\\ \varphi &= a_{j;} && {\scriptstyle j=1,2,\ldots,k}\\ \psi &= a_{j;} && {\scriptstyle j=1,2,\ldots,k}\end{aligned}$$

$$c_{1,k}^{'}(t)+a\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,w_1\right)+b\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,w_1\right)$$
$$-\left(\left(\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)+\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\right)g,w_1\right)-(f,w_1)=0$$
$$c_{2,k}^{'}(t)+a\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,w_2\right)+b\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,w_2\right)$$
$$-\left(\left(\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)+\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\right)g,w_2\right)-(f,w_2)=0$$
$$\vdots$$
$$c_{k,k}^{'}(t)+a\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,w_k\right)+b\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,w_k\right)$$
$$-\left(\left(\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)+\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\right)g,w_k\right)-(f,w_k)=0$$
$$d_{1,k}^{'}(t)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_1\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_1\right)$$
$$+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\phi_1,a_1\right)-(h,a_1)=0$$
$$d_{2,k}^{'}(t)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_2\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_2\right)$$
$$+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\phi_1,a_2\right)-(h,a_2)=0$$
$$\vdots$$
$$d_{k,k}^{'}(t)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_k\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}d_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_k\right)$$
$$+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\phi_1,a_k\right)-(h,a_k)=0$$
$$e_{1,k}^{'}(t)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_1\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_1\right)$$
$$+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\phi_2,a_1\right)-(j,a_1)=0$$
$$e_{2,k}^{'}(t)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_2\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_2\right)$$
$$+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\phi_2,a_2\right)-(j,a_2)=0$$
$$\vdots$$
$$e_{k,k}^{'}(t)+\widetilde{a}\left(\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_k\right)+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\sum_{i=1}^{k}e_{i,k}(t)\,a_i(x)\,,a_k\right)$$
$$+\widetilde{b}\left(\sum_{i=1}^{k}c_{i,k}(t)\,w_i(x)\,,\phi_2,a_k\right)-(j,a_k)=0$$

Note que estas equações podem ser escritas da forma

$$\left(c_{11}(t), ..., c_{kk}(t), d_{11}(t), ..., d_{kk}(t), e_{11}(t), ..., e_{kk}(t)\right)' = f\left(c_{11}(t), ..., e_{kk}(t)\right)$$

onde f é localmente de Lipschitz. Assim, o sistema de equações diferenciais ordinárias possui solução devido ao teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias.

3.2 Estimativas a priori

Colocando

$$v = u_k$$

em (3.1) obtemos:

$$\left(\frac{d}{dt}u_k, u_k\right) + a(u_k, u_k) + b(u_k, u_k, u_k) - ((\theta_k + \alpha_k) g, u_k) - (f, u_k) = 0$$

Tem-se:

i)

$$\left(\frac{d}{dt}u_k, u_k\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k\|^2$$

pois

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|u_k\|^2 = \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\int_\Omega (u_k)^2 \quad dx = \tfrac{1}{2}\int_\Omega 2u_k \tfrac{d}{dt}(u_k) \quad dx \\ &= \int_\Omega u_k \tfrac{d}{dt}u_k \quad dx = \left(u_k, \tfrac{d}{dt}u_k\right)\end{aligned}$$

ii)

$$b(u_k, u_k, u_k) = 0$$

devido a proposição, preliminar 2.10, item 2.10.1.

Portanto a equação anterior fica:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k\|^2 + a(u_k, u_k) = (f, u_k) + ((\theta_k + \alpha_k)\, g, u_k) \quad (3.5)$$

Mas:

i)

$$a(u_k, u_k) = (\nabla u_k, \nabla u_k) = \|\nabla u_k\|^2$$

ii)

$$(f, u_k) \leq \|f\|_{V^*} \|u_k\|_V = \|f\|_{V^*} \|\nabla u_k\|\,;$$

utilizando a Desigualdade de Young, preliminar 2.5 obtemos:

$$\|f\|_{V^*} \|\nabla u_k\| \leq c\,\|f\|_{V^*}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u_k\|^2$$

o que implica,

$$(f, u_k) \leq c\,\|f\|_{V^*}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u_k\|^2 .$$

iii)

$$\begin{aligned}
&((\theta_k + \alpha_k)\, g, u_k) = \int_\Omega (\theta_k + \alpha_k)\, g \cdot u_k \quad dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\theta_k + \alpha_k|^p \quad dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \quad dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u_k|^r \quad dx\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{r} = 1 \\
&= (\|\theta_k + \alpha_k\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad \|u_k\|_{L^r}) .
\end{aligned}$$

Utilizando Young obtemos:

$$\leq c_\varepsilon' \|g\|_q^2 \|\theta_k + \alpha_k\|_p^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|u_k\|_r^2$$

para

$$q = \frac{n}{2}, \quad r = \frac{2n}{n-2} \quad \text{e} \quad p = \frac{2n}{n-2}$$

tem-se:

$$= c_\varepsilon' \|g\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\theta_k + \alpha_k\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \frac{\varepsilon}{2} \|u_k\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}}$$

utilizando a proposição, preliminar 2.9 obtemos:

$$\leq c_\varepsilon' \|g\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla (\theta_k + \alpha_k)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_k\|^2 .$$

Substituindo em (3.5) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt} \|u_k\|^2 + 2a(u_k, u_k) = 2(f, u_k) + 2((\theta_k + \alpha_k) g, u_k) \\
&\tfrac{d}{dt} \|u_k\|^2 + 2\|\nabla u_k\|^2 \leq c\|f\|^2_{V^*} + \varepsilon \|\nabla u_k\|^2 + c\|g\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla (\theta_k + \alpha_k)\|^2 + \varepsilon \|\nabla u_k\|^2 \\
&\tfrac{d}{dt} \|u_k\|^2 + (2 - 2\varepsilon) \|\nabla u_k\|^2 \leq c\|f\|^2_{V^*} + c\|g\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla (\theta_k + \alpha_k)\|^2
\end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $(2 - 2\varepsilon) = 1$, isto é, $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

$$\frac{d}{dt} \|u_k\|^2 + \|\nabla u_k\|^2 \leq c\|f\|^2_{V^*} + c\|g\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla (\theta_k + \alpha_k)\|^2 .$$

Integrando de 0 a t:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \tfrac{d}{dt} \|u_k\|^2 \; dt + \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 \; dt \leq c \int_0^t \|f\|^2_{V^*} \; dt + c \int_0^t \|g\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla (\theta_k + \alpha_k)\|^2 \; dt \\
&\|u_k(t)\|^2 - \|u_k(0)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 \; dt \leq c \int_0^t \|f\|^2_{V^*} \; dt + c \int_0^t \|g\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla (\theta_k + \alpha_k)\|^2 \; dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 \; dt \leq \|u_k(0)\|^2 + c \int_0^t \|f(s)\|^2_{V^*} \; ds \\
&+ c \int_0^t \|g(s)\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \|\nabla (\theta_k(s) + \alpha_k(s))\|^2 \; ds
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Mas

$$\|g(s)\|^2_{L^{\frac{n}{2}}} \leq \|g\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{n}{2}}(\Omega)\right)} .$$

Assim, a inequação (3.6) fica:

$$\|u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_k\|^2 \ dt$$
$$\leq \|u_k(0)\|^2 + c\int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 \ ds + c\|g\|_{L^\infty\left(0,T,L^{\frac{n}{2}}(\Omega)\right)} \int_0^t \|\nabla(\theta_k(s) + \alpha_k(s))\|^2 \ ds.$$

Colocando

$$\varphi = \theta_k$$

em (3.2):

$$\left(\frac{d}{dt}\theta_k, \theta_k\right) + \widetilde{a}(\theta_k, \theta_k) + \widetilde{b}(u_k, \theta_k, \theta_k) + \widetilde{b}(u_k, \phi_1, \theta_k) = (h, \theta_k).$$

Note que:

i)

$$\left(\frac{d}{dt}\theta_k, \theta_k\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_k\|^2$$

pois

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_k\|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\theta_k)^2 \ dx = \frac{1}{2}\int_\Omega 2\theta_k \frac{d}{dt}(\theta_k) \ dx = \int_\Omega \theta_k \frac{d}{dt}\theta_k \ dx = \left(\theta_k, \frac{d}{dt}\theta_k\right).$$

ii)

$$\widetilde{a}(\theta_k, \theta_k) = (\nabla\theta_k, \nabla\theta_k) = \|\nabla\theta_k\|^2$$

iii)

$$\widetilde{b}(u_k, \theta_k, \theta_k) = 0$$

devido a proposição, preliminar 2.10, item 2.10.1.

Assim a equação fica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_k\|^2 + \|\nabla\theta_k\|^2 = (h, \theta_k) - \widetilde{b}(u_k, \phi_1, \theta_k) \qquad (3.7)$$

i)

$$(h,\theta_k) \leq \|h\|_{H^{-1}} \|\theta_k\|_{H_0^1} = \|h\|_{H^{-1}} \|\nabla\theta_k\| \leq c_\varepsilon \|h\|_{H^{-1}}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla\theta_k\|^2$$

ii)

$$\begin{aligned}
&\widetilde{b}(u_k,\phi_1,\theta_k) = -\widetilde{b}(u_k,\theta_k,\phi_1) = -(u_k\cdot\nabla\theta_k,\phi_1)\\
&= -\int_\Omega u_k(x)\cdot\nabla\theta_k(x)\,\phi_1(x)\quad dx\\
&\leq \|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_k(x)\,\nabla\theta_k(x)|\quad dx \leq \left(\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_k\|\right)\|\nabla\theta_k\|\\
&\leq c\,\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|u_k\|^2 + \tfrac{\varepsilon}{2}\|\nabla\theta_k\|^2 .
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.7) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\|\theta_k\|^2 + 2\|\nabla\theta_k\|^2 = 2(h,\theta_k) - 2\widetilde{b}(u_k,\phi_1,\theta_k)\\
&\leq c\,\|h\|_{H^{-1}}^2 + \varepsilon\|\nabla\theta_k\|^2 + c\,\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k\|^2 + \varepsilon\|\nabla\theta_k\|^2\\
&\tfrac{d}{dt}\|\theta_k\|^2 + (2-2\varepsilon)\|\nabla\theta_k\|^2 \leq c\,\|h\|_{H^{-1}}^2 + c\,\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k\|^2 .
\end{aligned}$$

Fazemos

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = \tfrac{1}{2}\\
&\tfrac{d}{dt}\|\theta_k\|^2 + \|\nabla\theta_k\|^2 \leq c\,\|h\|_{H^{-1}}^2 + c\,\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k\|^2 .
\end{aligned}$$

Integrando no tempo, entre 0 e t:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \tfrac{d}{ds}\|\theta_k(s)\|^2\quad ds + \int_0^t \|\nabla\theta_k(s)\|^2\quad ds\\
&\leq c\int_0^t \|h(s)\|_{H^{-1}}^2\quad ds + c\int_0^t \|\phi_1(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k(s)\|^2\quad ds.
\end{aligned}$$

Mas

$$\phi_1 \in L^\infty(\Omega\times(0,T))$$

devido ao lema, preliminar 2.18.

$$\leq c\int_0^t \|h(s)\|_{H^{-1}}^2\quad ds + c\,\|\phi_1\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t \|u_k(s)\|^2\quad ds.$$

Assim:

$$\|\theta_k(t)\|^2 - \|\theta_k(0)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\theta_k(s)\|^2 \ ds$$
$$\leq c\int_0^t \|h(s)\|_{H^{-1}}^2 \ ds + c\,\|\phi_1\|_{L^\infty(Q)}^2 \int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds$$

$$\|\theta_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\theta_k(s)\|^2 \ ds$$
$$\leq \|\theta_k(0)\|^2 + c\int_0^t \|h(s)\|_{H^{-1}}^2 \ ds + c\,\|\phi_1\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds \tag{3.8}$$

Colocando

$$\psi = \alpha_k$$

em (3.3):

$$\left(\frac{d}{dt}\alpha_k, \alpha_k\right) + \widetilde{a}(\alpha_k, \alpha_k) + \widetilde{b}(u_k, \alpha_k, \alpha_k) + \widetilde{b}(u_k, \phi_2, \alpha_k) = (j, \alpha_k).$$

Temos

i)

$$\left(\frac{d}{dt}\alpha_k, \alpha_k\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\alpha_k\|^2,$$

pelo mesmo raciocínio que o aplicado em (i) para θ_k.

ii)

$$\widetilde{a}(\alpha_k, \alpha_k) = (\nabla\alpha_k, \nabla\alpha_k) = \|\nabla\alpha_k\|^2.$$

iii)

$$\widetilde{b}(u_k, \alpha_k, \alpha_k) = 0$$

devido a proposição, preliminar 2.10, item 2.10.1.

Assim a equação fica:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\alpha_k\|^2 + \|\nabla\alpha_k\|^2 = (j,\alpha_k) - \widetilde{b}(u_k,\phi_2,\alpha_k) \tag{3.9}$$

i)

$$(j,\alpha_k) \leq \|j\|_{H^{-1}}\|\alpha_k\|_{H_0^1} = \|j\|_{H^{-1}}\|\nabla\alpha_k\| \leq c_\varepsilon\|j\|_{H^{-1}}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\alpha_k\|^2.$$

ii)

$$\begin{aligned}
&\widetilde{b}(u_k,\phi_2,\alpha_k) = -\widetilde{b}(u_k,\alpha_k,\phi_2) = -(u_k\cdot\nabla\alpha_k,\phi_2)\\
&= -\int_\Omega u_k(x)\cdot\nabla\alpha_k(x)\,\phi_2(x)\ dx\\
&\leq \|\phi_2\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u_k(x)\cdot\nabla\alpha_k(x)|\ dx \leq \left(\|\phi_2\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_k\|\right)\|\nabla\alpha_k\|\\
&\leq c\|\phi_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k\|^2 + \tfrac{\varepsilon}{2}\|\nabla\alpha_k\|^2.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.9) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\|\alpha_k\|^2 + 2\|\nabla\alpha_k\|^2 = 2(j,\alpha_k) - 2\widetilde{b}(u_k,\phi_2,\alpha_k)\\
&\leq c\|j\|_{H^{-1}}^2 + \varepsilon\|\nabla\alpha_k\|^2 + c\|\phi_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k\|^2 + \varepsilon\|\nabla\alpha_k\|^2\\
&\tfrac{d}{dt}\|\alpha_k\|^2 + (2-2\varepsilon)\|\nabla\alpha_k\|^2 \leq c\|j\|_{H^{-1}}^2 + c\|\phi_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k\|^2.
\end{aligned}$$

Fazemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\frac{d}{dt}\|\alpha_k\|^2 + \|\nabla\alpha_k\|^2 \leq c\|j\|_{H^{-1}}^2 + c\|\phi_2\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k\|^2.$$

Integrando no tempo, entre 0 e t:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \tfrac{d}{ds}\|\alpha_k(s)\|^2\ ds + \int_0^t \|\nabla\alpha_k(s)\|^2\ ds\\
&\leq c\int_0^t \|j(s)\|_{H^{-1}}^2\ ds + c\int_0^t \|\phi_2(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|u_k(s)\|^2\ ds.
\end{aligned}$$

Mas

$$\phi_2 \in L^\infty(\Omega\times[0,t))$$

devido ao lema, preliminar 2.18.

$$\leq c\int_0^t \|j(s)\|_{H^{-1}}^2\ ds + c\|\phi_2\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t \|u_k(s)\|^2\ ds.$$

Assim:

$$\|\alpha_k(t)\|^2 - \|\alpha_k(0)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\alpha_k(s)\|^2 \ ds$$
$$\leq c\int_0^t \|j(s)\|_{H^{-1}}^2 \ ds + c\,\|\phi_2\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds$$

$$\|\alpha_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\alpha_k(s)\|^2 \ ds$$
$$\leq \|\alpha_k(0)\|^2 + c\int_0^t \|j(s)\|_{H^{-1}}^2 \ ds + c\,\|\phi_2(s)\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds. \tag{3.10}$$

Substituindo (3.8) e (3.10) em (3.6) vem:

$$\|u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 \ ds$$
$$\leq \|u_k(0)\|^2 + c\int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 \ ds + c\,\|g\|_{L^\infty(0,T,L^q(\Omega))} \left[\|\theta_k(0)\|^2 + \|\alpha_k(0)\|^2\right.$$
$$\left. + c\int_0^t \left(\|h(s)\|_{H^{-1}}^2 + \|j(s)\|_{H^{-1}}^2\right) \ ds + c\left(\|\phi_1\|_{L^\infty(Q)} + \|\phi_2\|_{L^\infty(Q)}\right) \int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds\right] \tag{3.11}$$

Daí, pela Compacidade de Aubin-Lions, $\exists\ u_0 \in H$, $\theta_0 \in L^2$, $\alpha_0 \in L^2$ tal que para alguma subseqüência $u_{k,0}$, $\theta_{k,0}$, $\alpha_{k,0}$, temos

$$u_{k,0} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{em} \quad H$$
$$\|u_{k,0} - u_0\| < \varepsilon \quad \text{se } k > k_\varepsilon, \text{ seja } \varepsilon = \|u_0\| \text{ então}$$
$$\|u_{k,0}\| - \|u_0\| \leq \|u_{k,0} - u_0\| < \varepsilon = \|u_0\|$$
$$\text{assim, } \|u_{k,0}\| < 2\,\|u_0\| \text{ para } k > k_0$$
$$\Longrightarrow \exists\, c_1 > 0 \quad \text{tq} \quad \|u_{k,0}\| \leq c_1\,\|u_0\| \quad \forall\ k$$

Usando o argumento anterior para $\theta_{k,0} \longrightarrow \theta$ em $L^2(\Omega)$ e $\alpha_{k,0} \longrightarrow \alpha_0$ em $L^2(\Omega)$ obtemos que $\exists\, c_2 > 0$ e $\exists\ c_3 > 0$ tais que $\|\theta_{k,0}\| \leq c_2\,\|\theta_0\|$ e $\|\alpha_{k,0}\| \leq c_3\,\|\alpha_0\|$ $\forall\ k$.

Utilizando estes resultados em (3.11) obtemos:

$$\|u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 \ ds$$
$$\leq c_1^2 \|u_0\|^2 + c\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^2 \ ds + c\|g\|_{L^\infty(0,T,L^q(\Omega))} \left[c_2 \|\theta_0\|^2 + c_3 \|\alpha_0\|^2\right.$$
$$\left. + \int_0^T \left(\|h(s)\|_{H^{-1}}^2 + \|j(s)\|_{H^{-1}}^2\right) ds + c\left(\|\phi_1\|_{L^\infty(Q)} + \|\phi_2\|_{L^\infty(Q)}\right) \int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds\right]$$

$$\|u_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 \ ds \leq c + c\int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds \tag{3.12}$$

$$\Longrightarrow \|u_k(t)\|^2 \leq c + c\int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds.$$

De acordo com a Desigualdade de Gronwall, preliminar 2.7, temos:

$$\|u_k(t)\|^2 \leq c - 1 + e^{ct} \leq c - 1 + e^{cT} = C_T \tag{3.13}$$

Assim

$$u_k \in L^\infty(0,T,H)$$

com limitação independente de k.

Por outro lado, da inequação (3.12) obtemos:

$$\int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 \ ds \leq c + c\int_0^t \|u_k(s)\|^2 \ ds.$$

Utilizando (3.13):

$$\int_0^t \|\nabla u_k(s)\|^2 \ ds \leq c + c\int_0^t C_T \ ds$$
$$= c + cC_T t \leq c + cC_T T = C_T'$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \|\nabla u_k(s)\|^2 \ ds \leq C_T' \tag{3.14}$$

$$\Longrightarrow u_k \in L^2(0,T,V)$$

com limitação independente de k.

Utilizando (3.13) em (3.8) obtemos:

$$\begin{aligned}&\|\theta_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\theta_k(s)\|^2 \ ds \\ &\leq c + c\int_0^T \|u_k(s)\|^2 \ ds \leq c + c\int_0^T C_T \ ds = C_T''.\end{aligned}$$

Assim:

$$\theta_k \in L^2\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \tag{3.15}$$

com limitação independente de k.

Por outro lado, utilizando (3.13) em (3.10)obtemos:

$$\begin{aligned}&\|\alpha_k(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla\alpha_k(s)\|^2 \ ds \\ &\leq c + c\int_0^T \|u_k(s)\|^2 \ ds \leq c + c\int_0^T C_T \ ds = C_T''.\end{aligned}$$

Assim:

$$\alpha_k \in L^2\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \tag{3.16}$$

com limitação independente de k.

No sentido de passarmos o limite nos termos não-lineares necessitamos (assim como nas equações de Navier-Stokes) de uma convergência forte.

Assim o próximo passo consiste em provar que $\left(\frac{d}{dt}u_k\right)$ é uma seqüência limitada em $L^2(0,T,V_s^*)$ e $\left(\frac{d}{dt}\theta_k\right)$, $\left(\frac{d}{dt}\alpha_k\right)$ são seqüências limitadas em $L^2(0,T,H^{-s}(\Omega))$.

Defina

$$A(t) : V_s \longrightarrow V_s^*$$

por

$$(A(t) \cdot u)\, v = a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) \ \forall\ u,\ v \in V_s.$$

e

$$B : V_s \longrightarrow V_s^*$$

por

$$(B(v))\, u = b(v, v, u).$$

Primeiramente provaremos que (Au_k) e (Bu_k) estão em conjuntos limitados de $L^2(0, T, V_s^*)$.

De fato, temos:

$$\|Au_k\|_{V_s^*} = \sup_{\|v\|_{V_s} \leq 1} |\langle Au_k, v\rangle| = \sup_{\|v\|_{V_s} \leq 1} |\langle \nabla u_k, \nabla v\rangle| \leq \sup_{\|v\|_{V_s} \leq 1} \|\nabla u_k\| \, \|\nabla v\|. \tag{3.17}$$

Como

$$s = \frac{n}{2};\ \ n \geq 2 \Longrightarrow s \geq 1$$

assim

$$V_s \subset V \Longrightarrow \|u_k\|_V \leq c\, \|u_k\|_{V_s} \Longrightarrow \|\nabla u_k\| \leq c\, \|u_k\|_{V_s}$$

$$\|Au_k\|_{V_s^*} \leq \sup_{\|v\|_{V_s} \leq 1} \|\nabla u_k\|\, c\, \|v\|_{V_s} \leq c\, \|\nabla u_k\|.$$

Portanto:

$$\int_0^T \|Au_k\|_{V_s^*}^2 \ dt \leq c \int_0^T \|\nabla u_k\|^2 \ dt \leq c.$$

Temos que:

$$|\langle B_{u_k}, v\rangle| = |b(u_k, u_k, v)| = |-b(u_k, v, u_k)| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_{k,i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_{k,j} \ dx\right|$$
$$= \left|\int_\Omega u_k \cdot \nabla v \ u_k \ dx\right| \leq \left(\int_\Omega |u_k|^{\ p} \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^{\ q} \ dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u_k|^{\ p} \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|u_k\|_p^2 \|\nabla v\|_q$$

onde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1; \qquad \frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Seja p tal que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2n},$$

isto é,

$$p = \frac{2n}{n-1}$$

e assim

$$q = n.$$

Portanto devido a imersão de Sobolev $H^{s-1}(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ obtemos:

$$|\langle B_{u_k}, v\rangle| \leq \|u_k\|_p^2 \|\nabla v\|_n \leq c \|u_k\|_p^2 \|v\|_{V_s}.$$

O que implica:

$$\|Bu_k\|_{V_s^*} = \sup_{\|v\|_{V_s} \leq 1} |\langle B_{u_k}, v\rangle| \leq c \sup_{\|v\|_{V_s} \leq 1} \|u_k\|_p^2 \|v\|_{V_s} \leq c \|u_k\|_p^2.$$

Assim,

$$\int_0^T \|Bu_k\|_{V_s^*}^2 \ dt \leq c \int_0^T \|u_k\|_p^4 \ dt < \infty,$$

devido ao lema preliminar 2.11.

Também observamos que,

$$\|(\theta_k + \alpha_k)\, g\|_{V_s^*} = \sup_{\|v\|_{V_s} \leq 1} |((\theta_k + \alpha_k)\, g, v)|\,.$$

Mas:

$$|((\theta_k + \alpha_k)\, g, v)| \leq \int_\Omega |(\theta_k + \alpha_k)| \;\; |g| \;\; |v| \;\; dx. \tag{3.18}$$

Pela Desigualdade de Hölder, preliminar 2.6 tem-se:

$$|((\theta_k + \alpha_k)\, g, v)| \leq \int_\Omega |(\theta_k + \alpha_k)| \;\; |g| \;\; |v| \;\; dx \leq \|\theta_k + \alpha_k\|_p \, \|g\|_q \, \|v\|_r$$

onde

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{r} = 1 \quad \text{e} \quad q = \tfrac{n}{2}; \;\; p = \tfrac{2n}{n-2}; \; r = \tfrac{2n}{n-2} \\ &\leq \|\nabla(\theta_k) + \nabla(\alpha_k)\| \; \|g\|_q \, \|v\|_r\,. \end{aligned}$$

Mas

$$\|v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq c\,\|\nabla v\| \leq c\,\|u\|_{V_s} \leq c$$

Daí

$$|((\theta_k + \alpha_k)\, g, v)| \leq c\,(\|\nabla(\theta_k)\| + \|\nabla \alpha_k\|)\, \|g\|_q\,. \tag{3.19}$$

Mas por hipótese $g \in L^\infty(0, T, L^q)$ assim

$$\|g(t)\|_q \leq \|g\|_{L^\infty(0,T,L^q(\Omega))} = c.$$

Assim (3.19) fica:

$$\leq c\,(\|\nabla(\theta_k)\| + \|\nabla \alpha_k\|)\,.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|(\theta_k + \alpha_k)\, g\|_{V_s^*}^2 \;\; dt \leq c \int_0^T (\|\nabla(\theta_k)\| + \|\nabla \alpha_k\|)^2 \;\; dt \\ &\leq c \int_0^T \|\nabla(\theta_k)\|^2 + \|\nabla \alpha_k\|^2 \;\; dt = c\left(\int_0^T \|\nabla(\theta_k)\|^2 \;\; dt + \int_0^T \|\nabla \alpha_k\|^2 \;\; dt\right) < c \end{aligned}$$

devido a estimativas anteriores obtidas em (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16).

Considere agora a função projeção definida por:

$$P_k : H \longrightarrow V_k$$

onde V_k é o espaço de dimensão k gerado por $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ e P_k é definida por:

$$P_k(u) = \sum_{i=1}^{k} (u, w_i)\, w_i.$$

Como $V_s \subset H$ e $V_k \subset V_s$ consideremos:

$$P_k : V_s \longrightarrow V_s.$$

Observe que P_k é uma transformação linear, isto é,

$$P_k \in L(V_s, V_s) \tag{3.20}$$

Portanto sua adjunta,

$$P_k^* : V_s^* \longrightarrow V_s^*$$

definida por

$$\langle P_k^* v, w \rangle = \langle v, P_k w \rangle$$

é uma transformação linear, isto é,

$$P_k^* \in L(V_s^*, V_s^*)$$

e satisfaz:

$$\|P_k^*\| \leq \|P_k\| \leq 1.$$

Pois os sistemas

$$(w_j) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{w_j}{\sqrt{\lambda j}}\right)$$

são ortonormais completos, respectivamente em H e V_s, então

$$\begin{aligned}
\|P_k\|_{L(V_s,V_s)} &= \sup_{\|\varphi\|_{V_s}\leq 1} \|P_k\varphi\|_{V_s} \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{V_s}\leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{k} \left(\left(\varphi, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right) \right)_{V_s} \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\|_{V_s} \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{V_s}\leq 1} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left| \left(\left(\varphi, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right) \right)_{V_s} \right|^2} \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|_{V_s}\leq 1} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \left| \left(\left(\varphi, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right) \right)_{V_s} \right|^2} = 1.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|P_k\|_{L(V_s,V_s)} \leq 1,$$

como

$$\langle v, P_k\varphi \rangle_{V_s^*,V_s} = \langle P_k^* v, \varphi \rangle_{V_s^*,V_s} \qquad \forall\ v \in V_s^*, \quad \varphi \in V_s,$$

teremos

$$\begin{aligned}
\|P_k^*\|_{L(V_s^*,V_s^*)} &= \sup_{\|v\|_{V_s^*}\leq 1} \|P_k^* v\| = \sup_{\|v\|_{V_s^*}\leq 1} \left(\sup_{\|\varphi\|_{V_s^*}\leq 1} |\langle P_k^* v, \varphi \rangle| \right) \\
&= \sup_{\|v\|_{V_s^*}\leq 1} \left(\sup_{\|\varphi\|_{V_s^*}\leq 1} |\langle v, P_k\varphi \rangle| \right) \leq \sup_{\|v\|_{V_s^*}\leq 1} \|P_k\|\ \|v\| \leq 1.
\end{aligned}$$

Logo também

$$\|P_k^*\|_{L(V_s^*,V_s^*)} \leq 1.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
P_k v_k^* &= \sum_{j=1}^{k} (v_k^*, w_j)\, w_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} h_{ik}^* w_i, w_j \right) w_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} h_{ik}^* (w_i, w_j)\, w_j \right) = \sum_{j=1}^{k} h_{jk}^* w_j,
\end{aligned}$$

isto é,

$$P_k v_k^* = v_k^* \qquad \forall\ v_k^* \in V_k.$$

Como

$$P_k : L^2 \longrightarrow V_k$$

é a projeção ortogonal em

$$V_k = [w_1, w_2, ..., w_k]$$

então:

$$P_k(w_i) = w_i, \qquad i = 1, 2, ..., k.$$

Reescrevendo a equação (3.1) utilizando as notações de A e de B, isto é, $\langle Au, v\rangle = a(u, v)$ e $\langle Bu, v\rangle = b(u, u, v)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{d}{dt}u_k, w_i\right) = \langle -Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f, w_i\rangle \\
&= \langle -Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f, P_k(w_i)\rangle \\
&= \langle P_k^*(-Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f), w_i\rangle
\end{aligned}$$

com $i = 1, 2, ..., k$.

Portanto, tomando as combinações lineares de w_i , temos que

$$\left(\frac{d}{dt}u_k, w\right) = \langle P_k^*(-Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f), w\rangle$$

onde w é uma função qualquer de V_k.

Dado

$$v \in V_s$$

seja

$$w = P_k(v)$$

Note que $v = w + w_p$ onde w_p é ortogonal a V_k.

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{d}{dt}u_k, v\right) = \left(\tfrac{d}{dt}u_k, w\right) + \left(\tfrac{d}{dt}u_k, w_p\right) = \left(\tfrac{d}{dt}u_k, w\right) = \\
&= \langle P_k^*(-Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f), P_k(v)\rangle \\
&= \langle -Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f, P_k(P_k(v))\rangle \\
&= \langle -Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f, P_k(v)\rangle \\
&= \langle P_k^*(-Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f), v\rangle
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}u_k = P_k^*\left(-Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f\right) \qquad \text{em } V_s^* \\
&\left\|\tfrac{d}{dt}u_k\right\|_{V_s^*} = \left\|P_k^*\left(-Au_k - Bu_k + (\theta_k + \alpha_k)\, g + f\right)\right\|_{V_s^*} \\
&\leq \left\|P_k^*\left(-Au_k\right)\right\|_{V_s^*} + \left\|P_k^*\left(-Bu_k\right)\right\|_{V_s^*} + \left\|P_k^*\left(\theta_k + \alpha_k\right) g\right\|_{V_s^*} + \left\|P_k^*\left(f\right)\right\|_{V_s^*} \\
&\leq \|P_k^*\| \;\; \|Au_k\|_{V_s^*} + \|P_k^*\| \;\; \|Bu_k\|_{V_s^*} + \|P_k^*\| \;\; \|(\theta_k + \alpha_k)\, g\|_{V_s^*} + \|P_k^*\| \;\; \|f\|_{V_s^*} \\
&\leq \|Au_k\|_{V_s^*} + \|Bu_k\|_{V_s^*} + \|(\theta_k + \alpha_k)\, g\|_{V_s^*} + \|f\|_{V_s^*}\,.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
&V_s \subset V \Longrightarrow V^* \subset V_s^* \Longrightarrow \|f\|_{V_s^*} \leq \|f\|_{V^*} \\
&\left\|\tfrac{d}{dt}u_k\right\|_{V_s^*}^2 \leq \left(\|Au_k\|_{V_s^*} + \|Bu_k\|_{V_s^*} + \|(\theta_k + \alpha_k)\, g\|_{V_s^*} + \|f\|_{V_s^*}\right)^2 \\
&\leq 4\left(\|Au_k\|_{V_s^*}^2 + \|Bu_k\|_{V_s^*}^2 + \|(\theta_k + \alpha_k)\, g\|_{V_s^*}^2 + \|f\|_{V_s^*}^2\right) \\
&\int_0^T \left\|\tfrac{d}{dt}u_k\right\|^2 \;\; dt \leq 4\int_0^T \|Au_k\|_{V_s^*}^2 \;\; dt + 4\int_0^T \|Bu_k\|_{V_s^*}^2 \;\; dt \\
&+4\int_0^T \|(\theta_k + \alpha_k)\, g\|_{V_s^*}^2 \;\; dt + 4\int_0^T \|f\|_{V^*}^2 \;\; dt \leq c.
\end{aligned}$$

Devido as hipóteses em f e desigualdades deduzidas em (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16), onde c não depende de k.

De forma semelhante, utilizando (3.2) e (3.3) com as hipóteses em h e j obtemos que:

$$\frac{d}{dt}\theta_k \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\alpha_k \in L^2\left(0, T, H^{-s}(\Omega)\right)$$

são limitadas uniformemente em k (independentes de k).

3.3 Passagem ao limite

Das estimativas da secção anterior observamos que:

$$\begin{aligned}
&(u_{k,t}) \quad \text{é limitada em } L^2\left(0, T, V_s^*\right) \\
&(\theta_{k,t}) \quad \text{é limitada em } L^2\left(0, T, H^{-s}(\Omega)\right) \\
&(\alpha_{k,t}) \quad \text{é limitada em } L^2\left(0, T, H^{-s}(\Omega)\right).
\end{aligned}$$

De acordo com as proposições 2.13 e 2.14 temos que existem subseqüências das seqüências acima (ainda, com o intuito de simplificação, denotadas por $(u_{k,t})$, $(\theta_{k,t})$ e $(\alpha_{k,t})$) tais que:

$$\begin{aligned} u_{k,t} &\longrightarrow u_t \quad \text{fracamente em } L^2(0,T,V_s^*) \\ \theta_{k,t} &\longrightarrow \theta_t \quad \text{fracamente em } L^2(0,T,H^{-s}(\Omega)) \\ \alpha_{k,t} &\longrightarrow \alpha_t \quad \text{fracamente em } L^2(0,T,H^{-s}(\Omega)). \end{aligned}$$

Além disto, devido a

$$(u_k) \in L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)$$

uniformemente em k, tem-se:

$$\begin{aligned} u_k &\longrightarrow u \quad \text{fracamente em } L^2(0,T,V) \\ u_k &\longrightarrow u \quad \text{fraco-}* \text{ em } L^\infty(0,T,H). \end{aligned}$$

Como (θ_k) e (α_k) estão limitadas uniformemente em k, nos espaços

$$L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right) \quad \text{e} \quad L^2\left(0,T,H_0^1(\Omega)\right).$$

Então existem subseqüências de (θ_k) e (α_k) tais que:

$$\begin{aligned} \theta_k &\longrightarrow \theta \quad \text{fraco-}* \text{ em } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \\ \alpha_k &\longrightarrow \alpha \quad \text{fraco-}* \text{ em } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \\ \theta_k &\longrightarrow \theta \quad \text{fraco em } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)) \\ \alpha_k &\longrightarrow \alpha \quad \text{fraco em } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

No sentido de obtermos uma convergência forte (necessária para passarmos o limite nas equações) vamos utilizar o lema de Aubin-Lions, preliminar 2.16.

Na notação do lema definimos:

$$p_0, \quad p_1 = 2, \quad B_0 = V, \quad B = H, \quad B_1 = V_s^*.$$

Observe que

$$V \subset H \subset V_s^*; \quad V \subset H$$

compactamente,

$$V \qquad \text{e} \qquad V_s^*$$

são reflexivos.

Assim, de acordo com o lema, preliminar 2.16 temos que:

$$W = \left\{ v \in L^2(0,T,V)\,,\ v' \in L^2(0,T,V_s^*) \right\} \subset L^2(0,T,H)$$

compactamente.

Mas

$$(u_k) \subset W$$

com limitação uniforme, assim (u_k) forma uma subseqüência tal que:

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em } L^2(0,T,H)\,.$$

Analogamente, para (θ_k) e (α_k) temos:

$$B_0 = H_0^1;\ \ H = L^2(\Omega)\,;\ \ B_1 = H^{-s};\ \ p_0,\ \ p_1 = 2,$$

$$H_0^1 \subset L^2$$

compactamente,

$$H_0^1 \qquad \text{e} \qquad H^{-s}$$

são reflexivos.

Assim:

$$\theta_k \longrightarrow \theta \quad \text{em } L^2(0,T,L^2(\Omega))$$
$$\alpha_k \longrightarrow \alpha \quad \text{em } L^2(0,T,L^2(\Omega))$$

Desta forma podemos passar o limite com $k \longrightarrow \infty$ em (3.1) a (3.4) e garantir a existência de uma solução fraca (u,θ,α) para o sistema (1.1).

Capítulo 4

A Unicidade de Solução Fraca

Nesta etapa do trabalho vamos demonstrar o teorema que garante a unicidade de solução fraca para o sistema de equações de Oberbeck-Boussinesq.

Teorema 2 *Sejam $n = 2$, $g \in L^2(0,T,L^p(\Omega))$ com $p > 2$, então a solução fraca (u,θ,α) do teorema 1 é única. Além disto, (u,θ,α) é quase sempre igual a uma função contínua de $[0,T]$ em $H \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.*

Demonstração: Primeiramente,

$$s = \frac{n}{2} = 1,$$

consequentemente

$$u_t \in L^2(0,T,V^*) \quad \text{e} \quad u \in L^2(0,T,V).$$

Assim utilizando o lema, preliminar 2.17 obtemos que

$$u \in C([0,T],H) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\|u\|^2 = 2\langle u_t, u\rangle_{V^*,V}. \tag{4.1}$$

Analogamente como

$$\theta,\, \alpha \in L^2\left(0, T, H_0^1(\Omega)\right) \qquad \text{e} \qquad \theta_t,\, \alpha_t \in L^2\left(0, T, H^{-1}(\Omega)\right)$$

temos que:

$$\theta,\, \alpha \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dt}\|\theta\|^2 = 2\left\langle \theta_t, \theta \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}; \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{dt}\|\alpha\|^2 = 2\left\langle \alpha_t, \alpha \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \tag{4.3}$$

Vamos mostrar a unicidade:

Suponhamos que

$$(u_1, \theta_1, \alpha_1) \qquad \text{e} \qquad (u_2, \theta_2, \alpha_2)$$

são duas soluções fracas de (2.4).

Assim:

$$\frac{d}{dt}(u_1, v) + a(u_1, v) + b(u_1, u_1, v) = (f, v) + ((\theta_1 + \alpha_1) g, v) \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\theta_1, \varphi) + \widetilde{a}(\theta_1, \varphi) + \widetilde{b}(u_1, \theta_1, \varphi) + \widetilde{b}(u_1, \phi_1, \varphi) = (h, \varphi) \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha_1, \psi) + \widetilde{a}(\alpha_1, \psi) + \widetilde{b}(u_1, \alpha_1, \psi) + \widetilde{b}(u_1, \phi_2, \psi) = (j, \psi) \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{dt}(u_2, v) + a(u_2, v) + b(u_2, u_2, v) = (f, v) + ((\theta_2 + \alpha_2) g, v) \tag{4.7}$$

$$\frac{d}{dt}(\theta_2, \varphi) + \widetilde{a}(\theta_2, \varphi) + \widetilde{b}(u_2, \theta_2, \varphi) + \widetilde{b}(u_2, \phi_1, \varphi) = (h, \varphi) \tag{4.8}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha_2, \psi) + \widetilde{a}(\alpha_2, \psi) + \widetilde{b}(u_2, \alpha_2, \psi) + \widetilde{b}(u_2, \phi_2, \psi) = (j, \psi) \tag{4.9}$$

Denotando

$$u = u_1 - u_2, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

e fazendo as subtrações:

$$(4.4) - (4.7)\,; \quad (4.5) - (4.8) \quad \text{e} \quad (4.6) - (4.9)$$

obtemos:

$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(u,v) + b(u_1,u_1,v) - b(u_2,u_2,v) = ((\theta+\alpha)\,g, v) \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\theta,\varphi) + \widetilde{a}(\theta,\varphi) + \widetilde{b}(u_1,\theta_1,\varphi) - \widetilde{b}(u_2,\theta_2,\varphi) + \widetilde{b}(u_1,\phi_1,\varphi) - \widetilde{b}(u_2,\phi_1,\varphi) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha,\psi) + \widetilde{a}(\alpha,\psi) + \widetilde{b}(u_1,\alpha_1,\psi) - \widetilde{b}(u_2,\alpha_2,\psi) + \widetilde{b}(u_1,\phi_2,\psi) - \widetilde{b}(u_2,\phi_2,\psi) = 0 \quad (4.12)$$

Mas:

(i)

$$b(u,u_1,v) + b(u_2,u,v) = b(u_1,u_1,v) - b(u_2,u_2,v)$$

pois:

$$\begin{aligned} &b(u,u_1,v) + b(u_2,u,v) = b(u_1-u_2,u_1,v) + b(u_2,u_1-u_2,v) \\ &= b(u_1,u_1,v) - b(u_2,u_1,v) + b(u_2,u_1,v) - b(u_2,u_2,v) \\ &= b(u_1,u_1,v) - b(u_2,u_2,v) \end{aligned}$$

(ii)

$$\widetilde{b}(u,\theta_1,\varphi) + \widetilde{b}(u_2,\theta,\varphi) = \widetilde{b}(u_1,\theta_1,\varphi) - \widetilde{b}(u_2,\theta_2,\varphi)$$

pois:

$$\begin{aligned} &\widetilde{b}(u,\theta_1,\varphi) + \widetilde{b}(u_2,\theta,\varphi) = \widetilde{b}(u_1-u_2,\theta_1,\varphi) + \widetilde{b}(u_2,\theta_1-\theta_2,\varphi) \\ &= \widetilde{b}(u_1,\theta_1,\varphi) - \widetilde{b}(u_2,\theta_1,\varphi) + \widetilde{b}(u_2,\theta_1,\varphi) - \widetilde{b}(u_2,\theta_2,\varphi) \\ &= \widetilde{b}(u_1,\theta_1,\varphi) - \widetilde{b}(u_2,\theta_2,\varphi) \end{aligned}$$

(iii)

$$\widetilde{b}\,(u,\alpha_1,\psi)+\widetilde{b}\,(u_2,\alpha,\psi)=\widetilde{b}\,(u_1,\alpha_1,\psi)-\widetilde{b}\,(u_2,\alpha_2,\psi)$$

pois:

$$\begin{aligned}&\widetilde{b}\,(u,\alpha_1,\psi)+\widetilde{b}\,(u_2,\alpha,\psi)=\widetilde{b}(u_1-u_2,\alpha_1,\psi)+\widetilde{b}\,(u_2,\alpha_1-\alpha_2,\psi)\\&=\widetilde{b}\,(u_1,\alpha_1,\psi)-\widetilde{b}\,(u_2,\alpha_1,\psi)+\widetilde{b}\,(u_2,\alpha_1,\psi)-\widetilde{b}\,(u_2,\alpha_2,\psi)\\&=\widetilde{b}\,(u_1,\alpha_1,\psi)-\widetilde{b}\,(u_2,\alpha_2,\psi)\,.\end{aligned}$$

Substituindo (i) em (4.10), (ii) em (4.11) e (iii) em (4.12) obtemos, respectivamente:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\,(u,v)+a\,(u,v)+b(u,u_1,v)+b(u_2,u,v)=((\theta+\alpha)\,g,v)\\ \frac{d}{dt}\,(\theta,\varphi)+\widetilde{a}\,(\theta,\varphi)+\widetilde{b}\,(u,\theta_1,\varphi)+\widetilde{b}\,(u_2,\theta,\varphi)+\widetilde{b}\,(u,\phi_1,\varphi)=0\\ \frac{d}{dt}\,(\alpha,\psi)+\widetilde{a}\,(\alpha,\psi)+\widetilde{b}\,(u,\alpha_1,\psi)+\widetilde{b}\,(u_2,\alpha,\psi)+\widetilde{b}\,(u,\phi_2,\psi)=0\end{cases}\tag{4.13}$$

Fazendo

$$v=u,\quad \varphi=\theta\quad \text{e}\quad \psi=\alpha,$$

utilizando

$$(4.1)\,,\quad (4.2)\,,\quad (4.3)$$

e a propriedade

$$b\,(u,v,v)=0\qquad \forall\ \ u\in V\qquad \text{e}\qquad v\in H_0^1\,(\Omega)$$

obtemos:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+b(u,u_1,u)=((\theta+\alpha)\,g,u)\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\theta\|^2+\|\nabla\theta\|^2+\widetilde{b}(u,\theta_1,\theta)+\widetilde{b}(u,\phi_1,\theta)=0\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\alpha\|^2+\|\nabla\alpha\|^2+\widetilde{b}(u,\alpha_1,\alpha)+\widetilde{b}(u,\phi_2,\alpha)=0\end{cases}\tag{4.14}$$

Observando que:

(i)

$$|b(u,u_1,u)| = |-b(u,u,u_1)| = \left| \int_\Omega (u \cdot \nabla u)\, u_1 \; dx \right| \leq \|u\|_4 \;\; \|\nabla u\| \;\; \|u_1\|_4 .$$

Utilizando o lema preliminar 2.15 obtemos:

$$|b(u,u_1,u)| \leq c\, \|u\|^{\frac{1}{2}} \;\; \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \;\; \|\nabla u\| \;\; \|u_1\|_4 \leq c\, \|\nabla u\|^{\frac{3}{2}} \;\; \|u\|^{\frac{1}{2}} \;\; \|u_1\|_4 .$$

Utilizando a desigualdade de Young, preliminar 2.5, com

$p = \frac{4}{3}$ e $q = 4$:

$$|b(u,u_1,u)| \leq c\, \|\nabla u\|^{\frac{3}{2}} \;\; \|u\|^{\frac{1}{2}} \;\; \|u_1\|_4 \leq \varepsilon \left(\|\nabla u\|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{4}{3}} + c_\varepsilon \left(\|u\|^{\frac{1}{2}} \, \|u_1\|_4 \right)^4$$
$$= \varepsilon \, \|\nabla u\|^2 + c_\varepsilon \, \|u\|^2 \, \|u_1\|_4^4$$

(ii)

$$\left| \widetilde{b}(u,\theta_1,\theta) \right| = \left| -\widetilde{b}(u,\theta,\theta_1) \right| = \left| \int_\Omega (u \cdot \nabla\theta) \cdot \theta_1 \; dx \right|$$
$$\leq \|u\|_4 \, \|\nabla\theta\| \;\; \|\theta_1\|_4 .$$

Utilizando a desigualdade de Young, preliminar 2.5, obtemos

$$\left| \widetilde{b}(u,\theta_1,\theta) \right| \leq \delta \, \|\nabla\theta\|^2 + c_\delta \, \|u\|_4^2 \;\; \|\theta_1\|_4^2 .$$

Utilizando o lema, preliminar 2.15:

$$\left| \widetilde{b}(u,\theta_1,\theta) \right| \leq \delta \, \|\nabla\theta\|^2 + c_\delta \, \|u\| \;\; \|\nabla u\| \;\; \|\theta_1\|_4^2 .$$

Novamente, utilizando a desigualdade de Young teremos:

$$\left| \widetilde{b}(u,\theta_1,\theta) \right| \leq \delta \, \|\nabla\theta\|^2 + \varepsilon \, \|\nabla u\|^2 + c_{\varepsilon,\delta} \, \|u\|^2 \;\; \|\theta_1\|_4^4 .$$

(iii)

$$\left| \widetilde{b}(u,\phi_1,\theta) \right| = \left| -\widetilde{b}(u,\theta,\phi_1) \right| = \left| \int_\Omega (u \cdot \nabla\theta) \cdot \phi_1 \; dx \right|$$

e analogamente ao item (ii) acima obtemos:

$$\left| \widetilde{b}(u,\phi_1,\theta) \right| \leq \delta \, \|\nabla\theta\|^2 + \varepsilon \, \|\nabla u\|^2 + c_{\varepsilon,\delta} \, \|u\|^2 \, \|\phi_1\|_4^4 .$$

(iv)

$$\left|\widetilde{b}(u,\alpha_1,\alpha)\right| = \left|\int_\Omega (u\cdot\nabla\alpha)\cdot\alpha_1 \ dx\right|$$

analogamente ao item (ii) acima obtemos (trocando θ por α e θ_1 por α_1) :

$$\left|\widetilde{b}(u,\alpha_1,\alpha)\right| \leq \delta\left\|\nabla\alpha\right\|^2 + \varepsilon\left\|\nabla u\right\|^2 + c_{\varepsilon,\delta}\left\|u\right\|^2\left\|\alpha_1\right\|_4^4.$$

(v)

$$\left|\widetilde{b}(u,\phi_2,\alpha)\right| = \left|-\widetilde{b}(u,\alpha,\phi_2)\right|,$$

analogamente ao item (iii) acima (trocando ϕ_1 por ϕ_2 e θ por α) vem:

$$\left|\widetilde{b}(u,\phi_2,\alpha)\right| \leq \delta\left\|\nabla\alpha\right\|^2 + \varepsilon\left\|\nabla u\right\|^2 + c_{\varepsilon,\delta}\left\|u\right\|^2\left\|\phi_2\right\|_4^4.$$

(vi)

$$((\theta+\alpha)\,g,u) = (\theta g,u) + (\alpha g,u) = \int_\Omega \theta g u \ dx + \int_\Omega \alpha g u \ dx$$
$$\leq \left\|\theta\right\|_r\left\|g\right\|_p\left\|u\right\|_q + \left\|\alpha\right\|_r\left\|g\right\|_p\left\|u\right\|_q$$

onde

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$$

Seja

$$r=2 \qquad \text{e} \qquad p>2,$$

utilizando a imersão de Sobolev:

$$\left\|u\right\|_q \leq c\left\|\nabla u\right\|,$$

obtemos:

$$
\begin{aligned}
&((\theta+\alpha)\,g,u) \leq c\,\|\theta\| \quad \|g\|_p\,\|\nabla u\| + c\,\|\alpha\| \quad \|g\|_p\,\|\nabla u\| \\
&\leq \varepsilon\,\|\nabla u\|^2 + c_\varepsilon\,\|\theta\|^2 \quad \|g\|_p^2 + \varepsilon\,\|\nabla u\|^2 + c_\varepsilon\,\|\alpha\|^2 \quad \|g\|_p^2 .
\end{aligned}
$$

Substituindo as majorações obtidas nos itens (i) a (v) acima em (4.14) obtemos:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq 3\varepsilon\,\|\nabla u\|^2 + c_\varepsilon\,\|u\|^2\,\|u_1\|_4^4 + c_\varepsilon\,\|\theta\|^2\,\|g\|_p^2 + c_\varepsilon\,\|\alpha\|^2\,\|g\|_p^2 \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\theta\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 \leq 2\delta\,\|\nabla\theta\|^2 + 2\varepsilon\,\|\nabla u\|^2 + c_{\varepsilon,\delta}\,\|u\|^2\,(\|\theta_1\|_4^4 + \|\phi_1\|_4^4) \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 \leq 2\varepsilon\,\|\nabla u\|^2 + 2\delta\,\|\nabla\alpha\| + c_{\varepsilon,\delta}\,\|u\|^2\,(\|\alpha_1\|_4^4 + \|\phi_2\|_4^4)
\end{cases}
\tag{4.15}
$$

Somando-se as equações acima:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\alpha\|^2\right) + \left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2\right) \\
&\leq 7\varepsilon\,\|\nabla u\|^2 + 2\delta\,\|\nabla\theta\|^2 + 2\delta\,\|\nabla\alpha\|^2 + \|u\|^2\left[c_\varepsilon\,\|u_1\|_4^4\right. \\
&\left.+c_{\varepsilon,\delta}\left(\|\theta_1\|_4^4 + \|\phi_1\|_4^4\right) + c_{\varepsilon,\delta}\left(\|\alpha_1\|_4^4 + \|\phi_2\|_4^4\right)\right] \\
&+ \|\theta\|^2\,c_\varepsilon\,\|g\|_p^2 + \|\alpha\|^2\,c_\varepsilon\,\|g\|_p^2
\end{aligned}
$$

Sejam ε, $\delta > 0$ tais que

$$
1 - 7\varepsilon = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad 1 - 2\delta = \frac{1}{2}.
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\alpha\|^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2\right) \\
&\leq \|u\|^2\left(c\,\|u_1\|_4^4 + c\,\|\theta_1\|_4^4 + c\,\|\alpha_1\|_4^4 + c\,\|\phi_1\|_4^4 + c\,\|\phi_2\|_4^4\right) \\
&+ \|\theta\|^2\,c\,\|g\|_p^2 + \|\alpha\|^2\,c\,\|g\|_p^2 .
\end{aligned}
$$

Seja

$$
F(t) = c\,\|g\|_p^2 + c\,\|u_1\|_4^4 + c\,\|\theta_1\|_4^4 + c\,\|\alpha_1\|_4^4 + c\,\|\phi_1\|_4^4 + c\,\|\phi_2\|_4^4 .
$$

Assim a inequaçaõ fica:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\alpha\|^2\right) \leq \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\alpha\|^2\right) \\
&+\tfrac{1}{2}\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla\theta\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2\right) \\
&\leq \|u\|^2\,F(t) + \|\theta\|^2\,F(t) + \|\alpha\|^2\,F(t) = F(t)\left(\|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\alpha\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Assim:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|\theta\|^2+\|\alpha\|^2\right)\leq F(t)\left(\|u\|^2+\|\theta\|^2+\|\alpha\|^2\right) \quad (4.16)$$

Por outro lado:

i)

$$\int_0^t \|g\|_p^2 \ dt \leq \int_0^T \|g\|_p^2 \ dt < \infty$$

por hipótese.

ii)

$$\int_0^t \|u_1\|_4^4 \ dt \leq c\int_0^t \left(\|u_1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_1\|^{\frac{1}{2}}\right)^4 \ dt \leq c\int_0^T \|u_1\|^2\|\nabla u_1\|^2 \ dt$$
$$\leq c\|u_1\|^2_{L^\infty(0,T,H)}\int_0^T \|\nabla u_1\|^2 \ dt = c\|u_1\|^2_{L^\infty(0,T,H)}\|u_1\|_{L^2(0,T,V)}.$$

De forma totalmente análoga, obtemos as mesmas estimativas para θ_1 e α_1, ou seja, usando a estimativa (3.13) em (3.8) e (3.10) deduzimos que as seqüências (θ_k) e (α_k) permanecem limitadas em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))\cap L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ quando $k\longrightarrow\infty$.

Além disto, como

$$\phi_1, \ \ \phi_2 \in L^\infty(\Omega\times(0,T))$$

tem-se:

$$\int_0^T \|\phi_i\|_4^4 \ dt < \infty$$

onde $i=1,2$.

Utilizando a versão diferencial da desigualdade de Gronwall, preliminar 2.8, na inequação (4.16) com

$$\eta(t)=\|u\|^2+\|\theta\|^2+\|\alpha\|^2, \ \phi(t)=F(t) \quad \text{e} \quad \psi(t)=0$$

obtemos:

$$\|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\alpha\|^2 \leq \exp\left(\int_0^t F(s) \ ds\right)\left[0 + \int_0^t 0 \ ds\right] = 0$$
$$\Longrightarrow \|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\alpha\|^2 = 0 \Longrightarrow \|u\|^2 = \|\theta\|^2 = \|\alpha\|^2 = 0$$
$$\Longrightarrow u \equiv \theta \equiv \alpha \equiv 0 \qquad \text{q.s em} \quad [0, T].$$

Isto mostra a unicidade da solução.

Capítulo 5

Conclusão e sugestões para trabalhos futuros

Neste trabalho provamos dois resultados fundamentais: o primeiro é um resultado de existência de solução fraca para o sistema de equações de Oberbeck-Boussinesq sob hipóteses bastante semelhantes as existentes para o sistema de equações de Navier-Stokes, isto é, dados

$$f \in L^2(0,T,V^*), \quad u_0 \in H, \quad g \in L^\infty(0,T,L^q(\Omega))$$

provamos a existência de solução fraca

$$u \in L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,V).$$

Observe que se a temperatura e a concentração são constantes, então obtemos o sistema de Navier-Stokes.

A demonstração deste resultado é semelhante a feita para as equações clássicas de Navier-Stokes, sendo que a principal dificuldade é uma adequada formulação fraca no sentido de que as estimativas a priori sejam suficientes para obter as limitações necessárias nos espaços L^p.

O segundo resultado provado é a unicidade de solução em dimensão 2.

Aqui, novamente como ocorre para o sistema de equações de Navier-Stokes, não temos garantia de unicidade em dimensões maiores, sendo que a principal causa da existência deste resultado em dimensão 2 se deve a certas imersões de Sobolev específicas desta dimensão. Observe que as hipóteses que garantem a unicidade em dimensão 2 são as mesmas do teorema geral da existência.

Entre algumas sugestões para trabalhos futuros destacamos:

- Obter resultados semelhantes para o problema em domínios não cilíndricos;

- Supor que a viscosidade varia com a pressão e tentar obter resultados de existência e uncidade de solução;

- Deduzir um sistema de equações que descreve o movimento de um fluido quimicamente ativo em um meio isotrópico poroso granular.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R., **Sobolev Spaces,** Academic Press, New York, 1995.

[2] BRÉZIS, H., **Análisis Funcional-Teoría y Aplicaciones,** Aliança Editorial S. A., Madrid, 1983.

[3] EVANS, L. C., **Berkeley Mathematics Lectures Notes-Partial Differential Equations**, 1993.

[4] HALE, J. K., **Ordinary Diferential Equations**, Weley-Interscience a Division of John Wiley & Sons, New York, 1969.

[5] HISHIDA, T., **Existence and regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem.** Funkcialay Ekavacig, V.34, p.449 – 74, 1991.

[6] JOSEPH, D. D. **Stability of Fluid Motion**. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[7] KORONEV, N. K., **On some problems of convection in a viscous incompressible fluid.** Vestnik Leningrad Univ. Math., V.4, p.25 – 137, 1977.

[8] LIMA, E. L., **Um Curso de Análise,** Volume 1, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[9] LIMA, E. L., **Um Curso de Análise,** Volume 2, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[10] LIONS, J. L., **Quelques Méthodes de Résolution Problèmes Aux Limites non Linéaires.** Paris: Dunod, 1969.

[11] MEDEIROS, L. A. & MIRANDA, M. M., **Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais,** UFRJ, Notas de Aulas, Rio de Janeiro, 1989.

[12] MORIMOTO, H., **Nonstationary Boussinesq equations.** J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., V.39, p.61 – 75, 1992.

[13] ROJAS-MEDAR, M. A., LORCA S. A. **The equations of a viscous incompressible chemical active fluid I: Uniqueness and existence of the local solutions.** Rev. Mat. Apl., v. 16, n. 2, p. 57 – 80, 1995.

[14] ROJAS-MEDAR, M. A., LORCA S. A. **The equations of a viscous incompressible chemical active fluid II: regularity of solutions.** Rev. Mat. Apl., v. 16, n. 2, p. 81 – 95, 1995.

[15] ROJAS-MEDAR, M. A., LORCA S. A. **Global strong solutions of the equations for the motion of a chemical active fluid.** Math. Contemp., v. 8, p. 319 – 35, 1995.

[16] ROJAS-MEDAR, M. A., LORCA S. A. **An error estimate uniform in time for espctral Galerkin approximations for the equations for the motion of a chemical active fluid.** Rev. Mat. Univ. Complutense de Madrid, v. 8, n. 2, p. 431 – 58, 1995.

[17] TEMAM, R.. **Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis.** North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1979.