

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS E TOPOLÓGICAS DA  
PLANARIDADE EM GRAFOS

por

Noeli Ferraboli Conte

Dissertação para a obtenção do Grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Porto Alegre  
Janeiro de 2003

IMPLICAÇÕES GEOMÉTRICAS E TOPOLÓGICAS DA  
PLANARIDADE EM GRAFOS

por

Noeli Ferrabolli Conte

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMAp, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de

**Mestre em Matemática Aplicada**

Linha de Pesquisa: Algoritmos Numéricos e Algébricos

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Aprovada por:

Prof. Dr. Dalcídio Moraes Claudio - PUCRS-FAPERGS

Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo - URI-FW

Prof. Dr. Julio César Ruiz Claeysen - PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Coordenador do PPGMAp

Porto Alegre, Janeiro de 2003

## AGRADECIMENTOS

À minha família, em especial ao meu esposo e colega de Curso Nelson, com quem dividi minhas aspirações, às minhas filhas Bruna e Karine, por compreenderem minha ausência em vários momentos de suas vidas e por estarem presentes em outros inesquecíveis momentos, o meu amor e o meu carinho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Vilmar Trevisan, minha admiração, respeito e agradecimento. Admiração e o respeito é pelo seu trabalho como pesquisador e docente. E o agradecimento é pela paciência e dedicação demonstradas em suas sugestões, comentários, incentivo e apoio na orientação, os quais foram imprescindíveis para a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo que contribuiu ativamente para a realização deste trabalho. Sua competência, empenho, dedicação e paciência demonstrados foram fundamentais para a realização desta dissertação.

À Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Campus de Frederico Westphalen e à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que acreditaram e tornaram o Programa de Mestrado Interinstitucional em Matemática Aplicada uma realidade, meu muitíssimo obrigada.

Aos professores do Curso, meus agradecimentos pelos valiosos conhecimentos e por despertar ainda mais o meu entusiasmo pela pesquisa e pela docência.

Aos professores e alunos do Curso de Matemática da URI, Campus de Frederico Westphalen, meu reconhecimento pela convivência e enriquecimento humano.

Às Reitorias da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, e da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI, pelo Convênio do Mestrado Interinstitucional.

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é tratar as implicações geométricas e topológicas da planaridade, destacando a influência desse conceito em problemas geométricos fundamentais. Tais problemas são derivados da fórmula de Euler e suas diversas aplicações. Também problemas topológicos, como o problema de coloração de mapas, são estudados na dissertação.

A teoria de grafos tem extensiva utilização em matemática aplicada, pois demonstra ser uma poderosa ferramenta para a modelagem de diversas situações reais em física, química, biologia, engenharia elétrica e pesquisa operacional. Tanto em problemas práticos como em problemas teóricos tem-se o fato que a maioria das aplicações admitem métodos de resolução mais eficientes se o grafo associado for planar.

A determinação da planaridade de um grafo é importante em diversas aplicações na indústria, engenharia e outras. Um aspecto neste estudo é que a planaridade é uma propriedade preservada mediante o isomorfismo de grafos. Também apresenta-se duas caracterizações da planaridade, uma devido a Kuratowski e outra devido a Wagner. São dois resultados clássicos da teoria de grafos, que identificam condições necessárias e suficientes para um dado grafo ser planar, e cujas técnicas de demonstração são ainda importantes em combinatória.

## ABSTRACT

**TITLE:** "GEOMETRICAL AND TOPOLOGICAL IMPLICATIONS OF PLANARITY IN GRAPHS"

The main goal of this work is to treat the geometrical and topological implications of planarity, highlighting the influence of this concept over fundamental problems. Such problems are derived from the Euler's formula and its applications. Topological problems, such as map colouring, are also dealt with in this thesis.

Graph theory has extensive use in applied mathematics, because it shows to be a powerful tool for modelling real situations in physics, chemistry, biology, electrical engineering and operational research. In theory, as well as in practical problems, it is the fact most applications admit more efficient solution methods if the associated graph is planar.

The determination of the planarity of a graph is important in various applications in industry, engineering and others. An aspect of this survey is that planarity is an invariant property preserved through graph isomorphisms. It is also presented two characterizations of planarity. One is due to Kuratowski and the other is due to Wagner. These are two classical results of graph theory, that identify necessary and sufficient conditions for a graph to be planar, whose techniques are still important in combinatorics.

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Aspectos Históricos	1
1.2	Caracterização do Trabalho	4
<b>2</b>	<b>TEORIA BÁSICA DE GRAFOS</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução	7
2.2	Circuitos de Euler	12
2.3	Grafos Isomorfos	15
2.4	Grafos Planares	18
2.4.1	Exemplos de Grafos Planares	18
<b>3</b>	<b>MAPAS PLANARES E COLORAÇÃO</b>	<b>23</b>
3.1	Introdução	23
3.2	Mapas Planares	23
3.3	Métodos de Coloração de Mapas	28
3.4	Coloração com um, dois e três cores	29
3.5	O Número Cromático	37
3.6	Teorema das Cinco Cores	42
3.7	Um Algoritmo para Colorir	46

4	A FÓRMULA DE EULER E APLICAÇÕES . . . . .	50
4.1	Introdução . . . . .	50
4.2	A Fórmula de Euler . . . . .	51
4.3	Aplicações . . . . .	57
5	O TEOREMA DE KURATOWSKI . . . . .	66
5.1	Introdução . . . . .	66
5.2	Teorema de Kuratowski . . . . .	67
5.3	Um contra-exemplo minimal para o teorema de Kuratowski	71
5.4	A Prova do Teorema de Kuratowski . . . . .	73
5.5	Uma Abordagem Alternativa . . . . .	78
6	CONCLUSÃO . . . . .	84
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	86

## LISTA DE SÍMBOLOS

$F, G, G_1, G_2$	Multigrafo, Pseudografo ou Grafo
$H, H_1, H_2$	Subgrafo, subdivisão do grafo
$V, V_1, V_2, W, W_1, W_2$	Conjunto de vértices do grafo.
$E, E_1, E_2, F, F_1, F_2$	Conjunto de arestas do grafo.
$K_n$	Grafo completo de $n$ vértices.
$K_{p,q}$	Grafo bipartido e completo.
$e, e_1, e_2, \dots, e_n$	
$f, f_1, f_2, \dots, f_n$	Arestas.
$v, v_1, v_2, \dots, v_n$	
$w, w_1, w_2, \dots, w_n$	Vértices.
$z, z_1, z_2, \dots, z_n$	
$\deg(v)$	Grau do vértice $v$ .
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo $G$ .
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo $G$ .
$C$	Circuito.
$M$	Mapa, mapa planar.
$U(M)$	Pseudografo fundamental de $M$ .
$D(M)$	Grafo dual a $M$ .
$R, S$	Regiões de um mapa.
$M^*$	Mapa dual a $M$ .
$d(a, b)$	Comprimento da cadeia mais curta de $a$ para $b$ .
$C_1, C_2, C_3, C_4$	Cores.
$\chi(G)$	Número cromático de $G$ .
$N_r$	Número mínimo de cores para mapas com países que tem mais de $r$ colônias.

$\theta(G)$	Espessura do grafo $G$ .
$p$	Número de componentes conexos.
$\kappa(G)$	Conectividade do grafo $G$ .
$\kappa'(G)$	Conectividade por arestas do grafo $G$ .

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Aspectos Históricos

Em geral, um grafo é um conjunto de vértices e arestas sem laços nem arestas múltiplas.

A teoria de grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da matemática. Dentre os primeiros cientistas a trabalhar nesta área, destacam-se Leonhard Euler, matemático suíço (1707 - 1783), Gustav Kirchhoff, matemático russo (1824-1887) e Arthur Cayley, matemático inglês (1821 - 1895).

O problema mais conhecido envolvendo grafos é o problema da ponte de *Königsberg*, resolvido por *Euler* em 1736. No Rio Pregel, junto à cidade de *Königsberg* (hoje Kaliningrado) na então Prússia, existem duas ilhas formando portanto quatro regiões distinguíveis da terra, A, B, C e D. Há um total de sete pontes interligando-as. O problema consiste em, partindo de uma dessas regiões, determinar um trajeto pelas pontes segundo o qual se possa retornar à região de partida, após atravessar cada ponte somente uma vez. Euler mostrou que não existe tal trajeto, ao utilizar um modelo em grafos, pois através desse modelo ele verificou que existe o desejado trajeto quando e somente quando em cada região concorrer um número par de pontes.

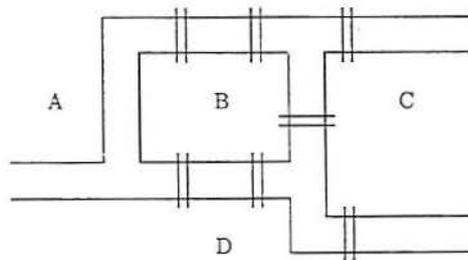


Figura 1.1 *As pontes de Königsberg*

Embora tenha sido estabelecido há mais de 200 anos, muito pouco foi realizado nos anos próximos subseqüentes ao trabalho de Euler. Por volta de meados do século XIX, três desenvolvimentos isolados vieram contribuir de forma significativa para despertar o interesse pela área.

- O primeiro desses fatos é a formulação do problema das quatro cores. Supõe-se que a autoria do problema seja do estudante *Francis Guthrie*. Este, em 1852, o teria proposto a seu irmão *Frederick*, então estudante, que por sua vez o comunicou a *De Morgan*.

O problema das quatro cores consiste em colorir os países de um mapa arbitrário planar, cada país com uma cor, de tal forma que países fronteiriços possuam cores diferentes. O problema então consiste em obter tal coloração usando não mais de quatro cores. É simples apresentar um exemplo de um mapa onde 3 cores não são suficientes. Por outro lado foi formulada uma prova de que cinco o são. Conjeturou-se então que 4 cores também seriam suficientes [37].

Esta conjectura permaneceu em aberto até 1976 [37] quando foi provada por *Appel e Haken*. Além da importância do tópico de coloração, o problema das 4 cores desempenhou um papel muito relevante para o desenvolvimento geral da teoria dos grafos, pois, serviu de motivação para o trabalho na área e ensejou o desenvolvimento de outros aspectos teóricos, realizados na tentativa de resolver a questão.

- Outro desenvolvimento importante foi a formulação do problema do *Ciclo Hamiltoniano*. Partindo de uma cidade qualquer, o problema consiste em determinar um trajeto que passe exatamente uma vez em cada cidade e retornar ao ponto de partida, e tal que cada par de cidades consecutivas no trajeto seja sempre adjacente. Uma solução de força bruta consiste, por exemplo, em examinar cada permutação do conjunto das cidades e verificar se esta corresponde ou não a um

trajeto com as condições exigidas. Essa solução não é satisfatória do ponto de vista algorítmico, pois apenas no caso em que torna-se possível examinar as  $n!$  permutações. Até a data atual, não foi encontrada uma solução algorítmica satisfatória, ou seja, não são conhecidas condições necessárias e suficientes, razoáveis, de existência de tais trajetos.

- O terceiro acontecimento marcante do século XIX foi o desenvolvimento da teoria das árvores, realizado, inicialmente por *Kirchhoff* e por *Cayley*. O primeiro usava a sua aplicação em circuitos elétricos, enquanto que o último a empregava classes moleculares na química orgânica. As árvores constituem uma classe especial de grafos, com larga aplicação nas mais diferentes áreas.

No século XX o interesse pelos grafos aumentou. Por volta da década de 1930 resultados fundamentais para grafos planares foram obtidos por *Kuratowski*, *König*, *Meneger*, entre outros.

Os anos mais recentes confirmam, de certa forma, a idéia de ser a teoria de grafos uma área ainda com vastas regiões inexplicadas. Grande parte das aplicações da teoria de grafos utiliza de maneira extensiva o conceito de planaridade.

No Brasil, o Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) é o pesquisador que tem feito o maior número de contribuições para o desenvolvimento da teoria de grafos. C. L. Lucchesi, [28], descreve em um artigo as maiores descobertas de Swarcfiter ao longo de sua vida. De fato, o periódico *Journal of the Brazilian Computer Society*, em seu número 3 do volume 7, é todo dedicado aos 60 anos do pesquisador.

As contribuições desse grande cientista vão desde a classificação topológica de grafos, um artigo seminal coautorado com D. E. Knuth, passando por caminhos Hamiltonianos, cliques em grafos, além de inúmeros outros assuntos. Uma característica de seu trabalho é a interação entre algoritmos e teoremas. Usando as

palavras de C. L. Lucchesi, “it is unclear to me whether Jayme views his mathematical activity as a vehicle for finding efficient algorithms or he uses the search for efficient algorithms as a means for discovering nice mathematical properties!”.

## 1.2 Caracterização do Trabalho

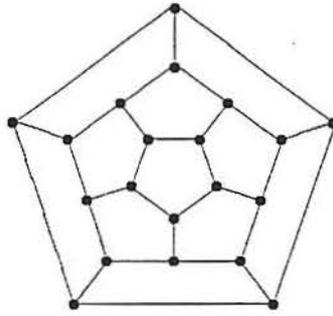
De modo geral, tratamos aqui as implicações geométricas e topológicas da planaridade em grafos.

O conceito de planaridade está relacionado com a existência de um desenho no plano de vértices e arestas (que representam, geralmente, elementos geográficos) de maneira que não se verifique cruzamento de arestas. Tal conjunto de vértices e arestas define um *pseudografo* e o desenho é chamado de *realização planar*.

É de grande interesse na teoria de grafos e muitas de suas aplicações, a identificação de quais grafos podem ser desenhados no plano sem cruzamentos nas arestas. Entre as aplicações estão incluídas o desenho de circuitos, designação de tarefas e coloração de mapas, [6]. É útil ter ferramentas para determinar se um grafo é planar, e especialmente útil se as ferramentas determinam a planaridade rapidamente ou constroem uma realização planar do grafo.

O objetivo principal neste trabalho é destacar a influência do conceito de planaridade em problemas geométricos fundamentais, salientados assim por estarem associados à fórmula de Euler, e em problemas topológicos tais como o problema de coloração de mapas, assim como a determinação da planaridade de grafos dada pelo teorema de Kuratowski.

Em primeiro lugar, a fórmula de Euler é uma relação matemática entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro que pode ser representado geometricamente no espaço euclidiano tridimensional. Por sua vez, um poliedro esta associado a um grafo planar. Temos então um critério geométrico poderoso

Figura 1.2 *O dodecaedro*

para distinguir a planaridade de um grafo. Isto pode ser utilizado para demonstrar a não planaridade dos grafos  $K_{3,3}$  e  $K_5$ , que tem uma influência decisiva na prova do teorema de Kuratowski, que é uma das maneiras para se verificar a planaridade.

Por outro lado, um mapa é um desenho no plano de regiões adjacentes limitadas por curvas simples. O problema de  $k$ -coloração consiste em determinar uma função que faça corresponder uma entre  $k$  cores para cada região, de maneira que duas regiões adjacentes não tenham a mesma cor. Este é um problema topológico, pois a  $k$ -coloração de um mapa implica na  $k$ -coloração de todos os mapas topologicamente isomorfos ao primeiro. Cada mapa está associado a um grafo planar, e então tem-se um problema de  $k$ -coloração de um grafo planar equivalente ao problema de  $k$ -coloração de um mapa.

Em relação à estrutura deste trabalho, dividimos em capítulos como segue:

- No capítulo 2 estão destacados os aspectos básicos da teoria de grafos, para que haja uma melhor compreensão dos temas tratados em nosso trabalho.
- Logo a seguir, no capítulo 3, estudaremos os aspectos básicos dos mapas planares e sua relação com a teoria de grafos, onde destaca-se que um grafo pode produzir diferentes mapas e estes podem ter o mesmo grafo fundamental. Descrevem-se também aspectos importantes sobre a co-

loração de mapas e grafos. Uma  $k$ -coloração de um mapa (grafo) é uma designação de  $k$  cores às regiões do mapa (vértice do grafo) de forma que nenhum par de regiões adjacentes vértices receba mesma cor. Podemos fazer a coloração de arestas de um grafo (ou mapa), designando cores às arestas de maneira que arestas adjacentes (ou arestas que limitam com regiões diferentes) recebam cores diferentes. Serão também tratados, neste capítulo, mapas isomorfos, grafos duais e o problema das quatro cores. Além do mais, descrevem-se brevemente alguns problemas e métodos de coloração de mapas.

- Na seqüência, no capítulo 4, apresentamos a fórmula de Euler e suas aplicações, o que possibilita a verificação da não-planaridade de grafos importantes.
- No capítulo 5, apresentamos o teorema de Kuratowski como uma famosa caracterização de grafos planares que fornece uma maneira prática de provar que um grafo é ou não é planar.
- Finalmente, no capítulo 6, enunciam-se as conclusões pertinentes.

## 2 TEORIA BÁSICA DE GRAFOS

Explicitaremos neste capítulo aspectos básicos e históricos da teoria de grafos. Aspectos estes muito úteis e que podem ser aplicados em muitas situações do mundo real.

### 2.1 Introdução

Definimos aqui os conceitos básicos usados na dissertação, incluindo grafos, mapas e grafos duais. Essencialmente, um grafo é um conjunto de pontos e segmentos de retas, ou curvas simples das quais eles são os extremos. Mas é necessário mais precisão, por isso precisamos também saber que segmentos de retas juntam com que pontos.

Um *pseudografo*  $G$  é um par  $(V, E)$  onde  $V$  é um conjunto de vértices e  $E$  é um conjunto de arestas tal que cada aresta é incidente a dois vértices (não necessariamente distintos). Então diz-se que a aresta *une* esses dois vértices, que são chamados de *extremos* da aresta, e são denominados *adjacentes*. Duas arestas são *adjacentes* se têm um extremo em comum. Uma aresta que une um vértice com ele mesmo é denominado *laço*, enquanto que duas arestas que unem o mesmo par de vértices são chamados de *arestas paralelas*, ou *arestas múltiplas*.

Um *multigrafo* é um pseudografo sem laços.

Um *grafo* é um pseudografo sem arestas múltiplas e sem laços.

Um grafo é geralmente desenhado com pontos grandes para os vértices e segmentos de reta para as arestas de tal maneira que um vértice e uma aresta são incidentes se, e somente se tem intersecção no diagrama. Estes conceitos são ilustrados nas figuras 2.1 e 2.2.

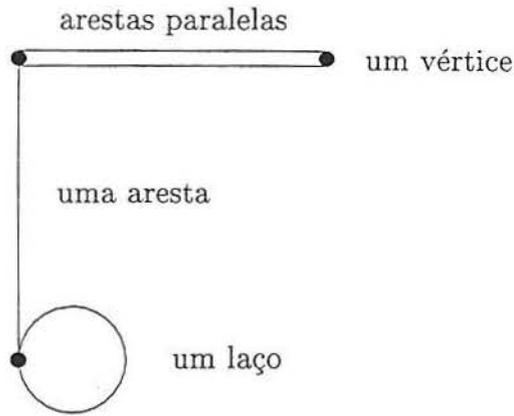


Figura 2.1 Os conceitos básicos

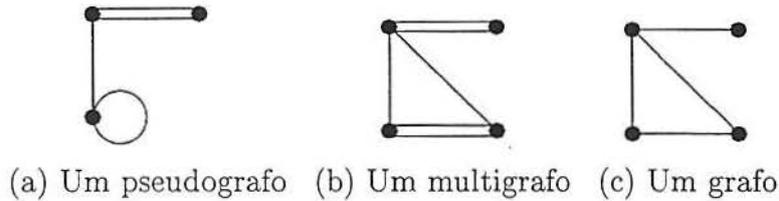


Figura 2.2 Alguns exemplos

Às vezes as arestas de um grafo se cruzam como na figura 2.3(a). Isto não é significativo na teoria dos grafos.

Um *subgrafo*  $H = (W, F)$  de  $G = (V, E)$  consiste de um subconjunto  $W \subset V$  dos vértices de  $G$  e um subconjunto  $F \subset E$  das arestas de  $G$ , com a propriedade que para cada aresta no subgrafo, os dois extremos estão no subgrafo.

Um subgrafo *gerador* é um subgrafo que contém todos os vértices de  $G$ . O subgrafo *induzido* de  $G$  sobre um conjunto  $W$  de vértices consiste de  $W$  junto com todas as arestas de  $G$  que unem os vértices em  $W$ . (Este subgrafo induzido é também denominado o subgrafo *gerado* por  $W$ .)

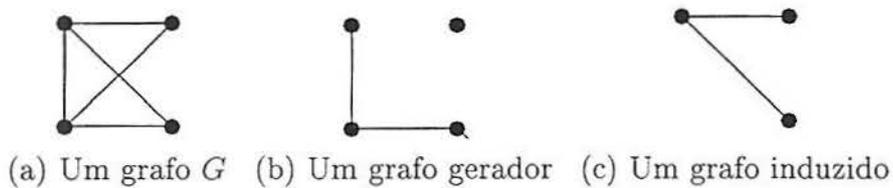


Figura 2.3 Um grafo e alguns subgrafos

Um grafo é *completo* se é simples e todo par de vértices diferentes são adjacentes (um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ ), de *k-partes* se seus vértices podem ser particionados em  $k$  conjuntos disjuntos de modo que nenhum par de vértices no mesmo conjunto sejam adjacentes; e *completo de k-partes* se todo par de vértices em diferentes conjuntos são adjacentes. Se  $k = 2$ , chamamos o grafo de duas partes ou bipartido, e se o grafo é bipartido e completo, denotamos por  $K_{p,q}$ , onde  $p$  e  $q$  são o número de vértices nos dois conjuntos disjuntos de vértices. A figura 2.4(a) mostra um  $K_4$  e a figura 2.4(c) mostra  $K_{3,2}$ .

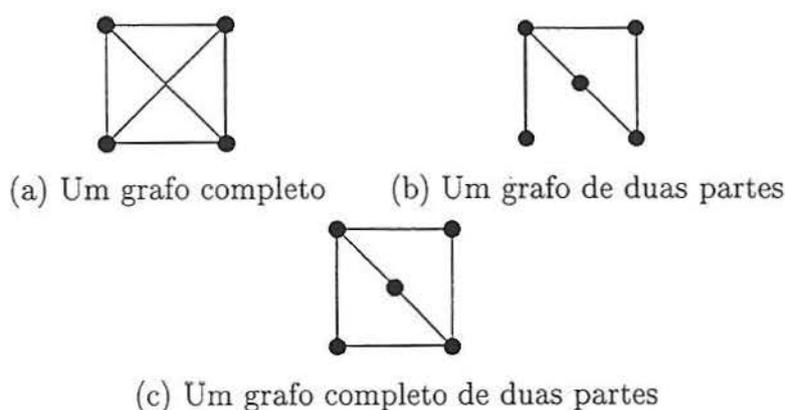


Figura 2.4 Alguns grafos a mais

Um grafo completo de três partes é mostrado na figura 2.5.

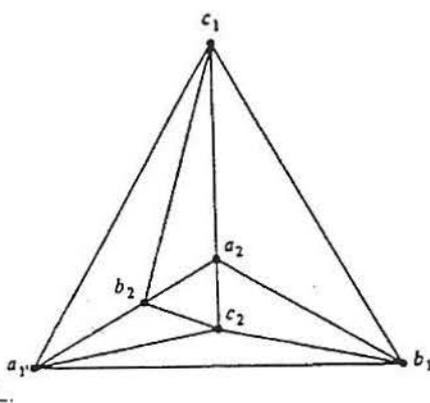


Figura 2.5 Grafo triparte completo

Por exemplo, na figura 2.6 abaixo,  $H_1$  é um subgrafo de  $G$  mas não um subgrafo completo. Por outro lado,  $H_2$  é completo e  $H_3$  é gerador. Observe que um

subgrafo completo  $G'$  de  $G$  está completamente determinado por seu conjunto de vértices.

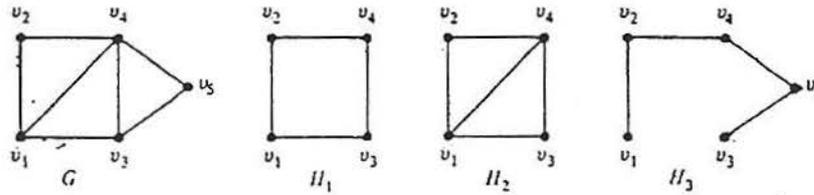


Figura 2.6 Grafo  $G$ , subgrafo  $H_1$ , subgrafo completo  $H_2$  e subgrafo gerador  $H_3$ .

As definições seguintes dizem respeito a um conjunto de arestas de um grafo. Há diversas possibilidades e precisamos distinguí-las entre elas.

A seqüência de  $n$  arestas,  $e_1, \dots, e_n$  em um grafo  $G$  é chamado um *caminho* ou *progressão de arestas de comprimento  $n$*  se existir uma seqüência apropriada de  $n + 1$  (não necessariamente diferentes) vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  tal que  $e_i$  é incidente a  $v_{i-1}$  e a  $v_{i,1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Um caminho é *fechado* se  $v_0 = v_n$  ou senão, *aberto*. Se  $e_i \neq e_j$  para todo  $i$  e  $j$ ,  $i \neq j$ , o caminho é chamado uma *trilha* ou *cadeia*. Uma cadeia fechada é chamada um *circuito*. Um conjunto de arestas é também referido como *trilha*.

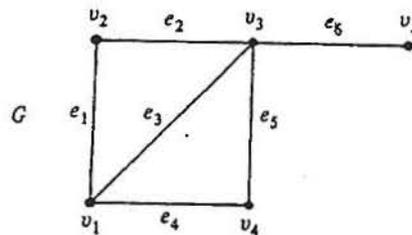


Figura 2.7 *Caminho*

Se todos os seus vértices são diferentes, um caminho é chamado de uma *cadeia simples* enquanto, se  $v_0 = v_n$  e todos os outros vértices são diferentes, temos um *circuito simples* se  $n \geq 3$ .

Uma *trajetória* é uma trilha em que todos os vértices são diferentes (exceto possivelmente  $v_1$  e  $v_{n+1}$ ). Um ciclo é um circuito que não contém um vértice duas vezes (exceto no começo ou no final).

Um grafo pode estar em um ou em diversos pedaços chamados *componentes*. Um grafo é chamado de uma peça ou *conexo* se todo par de vértices pode ser unido por um caminho. Uma *componente conexa* de um grafo é um subgrafo conexo maximal.

O *grau* (ou *valência*) de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes ao vértice  $v$  e é denotado por  $\deg(v)$ . Esta é uma maneira numérica importante para distinguir os vértices. Um laço conta duas vezes. Escrevemos

$$\delta(G) = \min_{v \in V} \deg(v)$$

e

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg(v).$$

É interessante observar que há um número par de vértices em qualquer grafo, cujo grau é ímpar. Para ver isto, seja  $m$  o número de arestas e  $n$  o número de vértices; então

$$2m = \sum_{v \in N} \deg(v) = \sum_{\text{ímpar}} \deg(v) + \sum_{\text{par}} \deg(v).$$

Usamos  $2m$  porque cada aresta é contada duas vezes. Segue que  $\sum_{\text{par}} \deg(v)$  deve ter um número par de termos.

## 2.2 Circuitos de Euler

Euler foi um famoso matemático suíço do século XVIII. Acredita-se que ele inventou a teoria de grafos no seu artigo sobre o Problema da Ponte de Königsberg em 1736, embora não desenhou grafo algum, ou usou a palavra ‘grafo’. De fato, o uso da palavra grafo foi utilizada no contexto pela primeira vez por Sylvester em 1878.

De maneira simples, o problema consiste em ver se é possível caminhar ao redor da cidade de Königsberg, atravessando cada uma das sete pontes exatamente uma vez, e voltar ao ponto de partida. A figura 2.8 mostra uma representação esquemática das pontes sobre o rio Pregel na data. Um processo de tentativa e erro é convincente para mostrar que não é possível tal passeio. A contribuição de Euler foi produzir uma prova rigorosa disto, e generalizá-la a um critério para decidir, dado um arranjo de pontes, se tal passeio existe. Ele provou a necessidade desta condição, mas aparentemente não viu a necessidade de provar a suficiência.

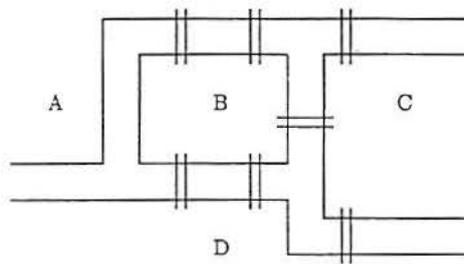


Figura 2.8 *As pontes de Königsberg*

A idéia é associar as quatro áreas (as duas ilhas e os dois lados da beira do rio) com quatro letras A, B, C e D. Então exceto no início e no fim do passeio, cada vez que se entra ou sai de uma das áreas A, B, C ou D, utiliza-se uma ponte para entrar e outra para sair. Dessa maneira são utilizadas até duas pontes por vez, e portanto utiliza-se um número par de pontes ao todo. Infelizmente, cada uma das quatro áreas A, B, C e D tem um número ímpar de pontes, de maneira que tal passeio é impossível. De fato, o ponto inicial não é diferente de um dos outros: é

utilizada uma ponte para sair inicialmente, depois duas cada vez que se entra e sai, e finalmente mais uma ponte para voltar na última vez. Então novamente deveria-se ter um número par de pontes desde esse ponto.

Isto pode ser expresso na linguagem da teoria de grafos substituindo as áreas por vértices, e as pontes entre elas por arestas. Dessa maneira obtém-se um multigrafo, como na figura 2.9. Correspondente ao fato que cada área A, B, C e D tem um número ímpar de pontes, o fato está em que cada um dos vértices do multigrafo tem um grau ímpar. O passeio que estava-se procurando é um circuito que utiliza uma aresta exatamente uma vez. Tal circuito em qualquer multigrafo é denominado agora como *circuito de Euler*. A discussão anterior contém essencialmente a prova de Euler do seguinte teorema, embora ele não utilizou a moderna linguagem da teoria de grafos.

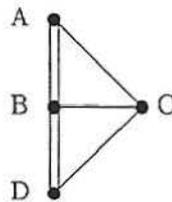


Figura 2.9 O Multigrafo das pontes de Königsberg

**Teorema 2.1.** *Um multigrafo possui um circuito de Euler somente se o grau de cada vértice é par, e cada aresta está na mesma componente (em outras palavras, é conexo exceto para vértices isolados).*

Observe que não tem-se provado a recíproca deste resultado! Não é tão fácil quanto se pensa. O problema é que se o passeio continua poderia se sair para lugares desde os quais se está, enquanto não se utilizem todas as pontes em alguma outra parte do multigrafo. Assim, poderia voltar e inserir um circuito extra dentro do passeio em algum lugar. Formalmente é preciso expressar isto como uma prova por indução ou a seguinte versão de contra-posição (uma prova por contradição).

**Teorema 2.2.** *Um multigrafo possui um circuito de Euler se é conexo e o grau de todo vértice é par.*

**Prova:** Suponha que  $G$  é um multigrafo conexo e o grau de cada vértice é par. Se  $G$  não possui um circuito de Euler, então seja  $v_1e_1v_2e_2 \dots v_n e_n v_1$  um circuito que é tão comprido quanto possível sujeito a não conter uma aresta mais de uma vez. Denomine este circuito por  $C$ . Por suposição, existe uma aresta  $e$  que não está em  $C$ . Como  $G$  é conexo, pode-se supor que um dos extremos de  $e$  já está em  $C$ ; seja este extremo  $v_i$ , e seja  $w_1$  o outro extremo de  $e$ . Agora um número par (possivelmente 0) das arestas incidentes a  $w_1$  já estão sendo utilizadas em  $C$ . Além do mais,  $e$  é incidente a  $w_1$ , e  $w_1$  tem grau par, de modo que há outra aresta,  $f_1$ , incidente a  $w_1$  que não está sendo utilizada em  $C$ .

Seja  $w_2$  o outro extremo de  $f_1$ . O mesmo argumento agora se aplica a  $w_2$  e por indução obtém-se um caminho

$$v_i e w_1 f_1 w_2 f_2 \dots$$

tal que todas as arestas  $e, f_1, f_2, \dots$  não estão sendo utilizadas em  $C$ . Como o multigrafo é finito, este processo certamente pára, mas a única maneira disto acontecer é se voltar a um vértice depois de ter-se utilizado todas as arestas incidentes a ele, que é um número par de arestas. Mas o único vértice onde isto pode acontecer é  $v_i$ , de maneira que é obtido um circuito

$$v_i e w_1 f_1 w_2 f_2 \dots w_k f_k v_i$$

e então

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{i-1} v_i e w_1 f_1 w_2 f_2 \dots w_k f_k v_i e_i \dots v_n e_n v_1$$

é um circuito mais comprido que  $C$ , sem arestas repetidas. Esta contradição completa a prova.  $\square$

## 2.3 Grafos Isomorfos

Dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  são ditos isomorfos entre si se existe uma correspondência entre os seus vértices e arestas de tal maneira que a relação de incidência seja preservada. Em outros termos, existe uma função biunívoca  $f : V_1 \rightarrow V_2$ , tal que  $(i, j)$  é elemento de  $E_1$  se, e somente se  $(f(i), f(j))$  é elemento de  $E_2$ . Essencialmente, um isomorfismo é somente uma re-rotulação dos vértices e arestas. Eis alguns exemplos de grafos isomorfos:

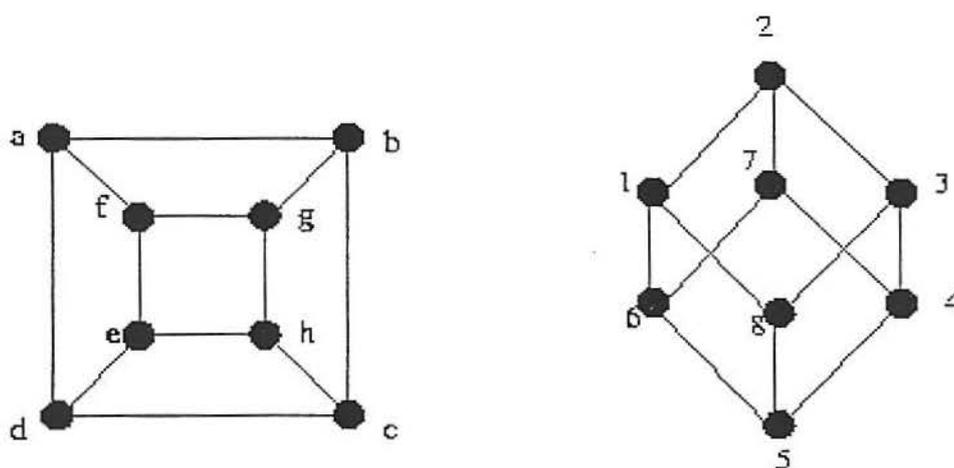


Figura 2.10 Isomorfismo

Para ver o isomorfismo dos grafos da figura 2.10, podemos utilizar a seguinte função:

$$f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 8, f(e) = 5, f(f) = 6, f(g) = 7, f(h) = 4.$$

Para verificar o isomorfismo dos grafos nas figuras 2.11(a) e 2.11(b) utiliza-se a seguinte função:

$$f(a) = s, f(b) = t, f(c) = u, f(d) = v, f(e) = r, f(f) = m, f(g) = n,$$

$$f(h) = o, f(i) = p, f(j) = q.$$

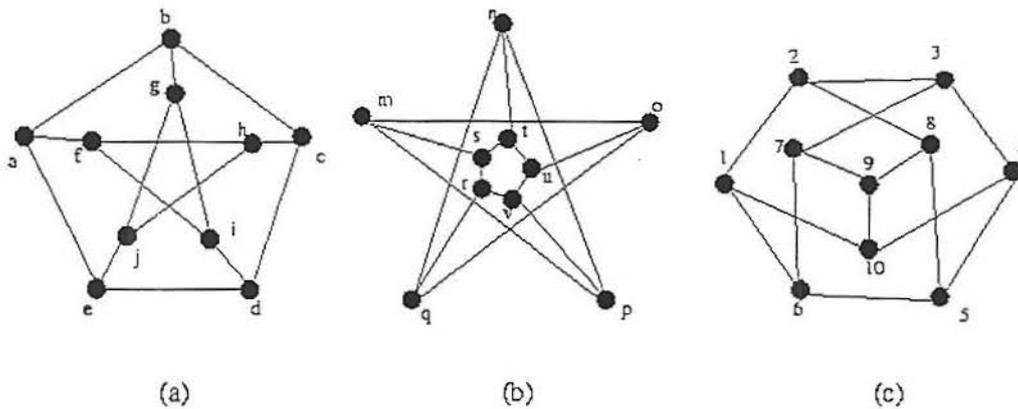


Figura 2.11 Isomorfismo de Grafos

Para verificar o isomorfismo dos grafos nas figuras 2.11(a) e 2.11(c), utiliza-se a seguinte função:

$$f(a) = 1, f(b) = 10, f(c) = 4, f(d) = 5, f(e) = 6, f(f) = 2, f(g) = 9,$$

$$f(h) = 3, f(i) = 8, f(j) = 7.$$

Um grafo  $H$  é chamado homeomorfo a um grafo  $G$ , se  $H$  puder ser obtido de  $G$  pela inserção de vértices de grau 2 em pontos intermediários de suas arestas.  $H$  é também uma subdivisão de  $G$ .

Denomina-se subdivisão de uma aresta  $(v, w)$  de um grafo  $G$  a uma operação que transforma  $(v, w)$  num caminho  $v, z_1, \dots, z_k, w$ , sendo  $k \geq 0$  onde  $z_i$  são vértices de grau 2 adicionados a  $G$ . As figuras 2.12(a) e (b) ilustram uma subdivisão de aresta. Diz-se que um grafo  $G_2$  é uma subdivisão de um grafo  $G_1$ , quando  $G_2$  puder ser obtido de  $G_1$ , através de uma seqüência de subdivisões de arestas de  $G_1$ . O grafo da figura 2.12(d) é uma subdivisão da figura 2.12(c).

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Uma *subdivisão elementar* de  $G$  é obtida substituindo alguma aresta  $e$ , cujos extremos são  $v$  e  $w$ , com arestas  $e'$  e  $e''$ , onde  $e'$  tem extremos  $v$  e  $x_e$  e  $e''$  extremos  $x_e$  e  $w$ . Assim, adicionamos um novo vértice

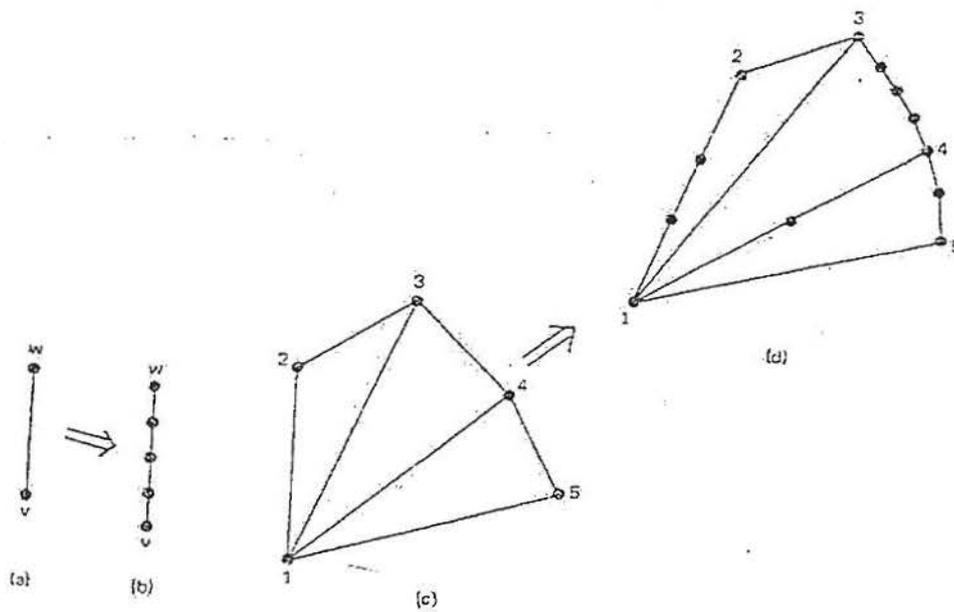


Figura 2.12 Subdivisão de Arestas e Grafos

$x_e$  e substituímos uma aresta velha  $e$  com duas arestas novas  $e'$  e  $e''$ .  $G'$  é uma subdivisão de  $G$  se há uma seqüência finita de grafos  $G_1, \dots, G_k$  onde  $G_{i+1}$  é uma subdivisão elementar de  $G_i$ , ( $1 \leq i \leq k-1$ ) e  $G_1 = G$ ,  $G_k = G$ . Dois grafos  $G$  e  $H$  são *homeomorfos* se existem subdivisões  $G'$  de  $G$  e  $H'$  de  $H$  tal que  $G'$  e  $H'$  sejam isomorfos.

Por exemplo, na figura 2.13,  $G_1$  e  $G_2$  são homeomorfos.



Figura 2.13 Grafos homeomorfos  $G_1$  e  $G_2$

## 2.4 Grafos Planares

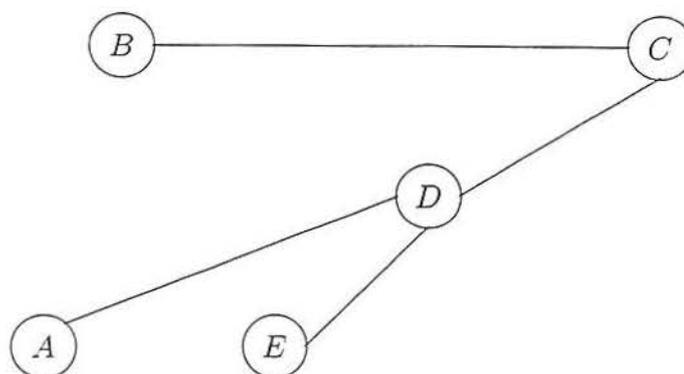
Existem grafos tais que, independentemente da forma como o desenhamos, algumas de suas arestas sempre se cruzam em um ponto que não é um vértice.

Um grafo é *planar* se for possível desenhá-lo no plano, de modo que as arestas não se cruzem. Tal desenho é uma *realização gráfica planar* do grafo ou simplesmente *realização planar*.

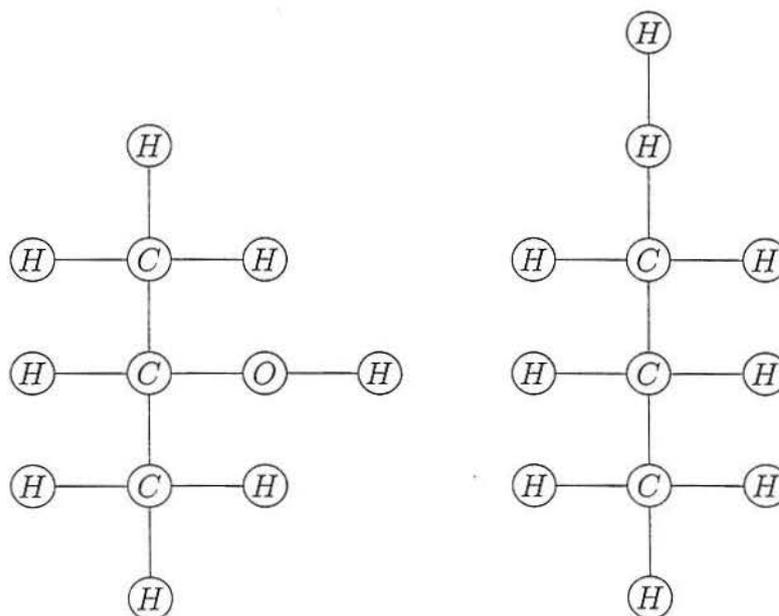
### 2.4.1 Exemplos de Grafos Planares

**Rede de Comunicações:** Deseja-se configurar uma rede de comunicações entre as cidades  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , de tal maneira que possa haver comunicação entre cada par de cidades. As ligações devem ser efetuadas por cabos telefônicos. Admitimos que mensagens possam ser retransmitidas, isto é, qualquer cidade pode mandar mensagem para outra por uma terceira.

A figura 2.14 mostra uma possível configuração de cabos entre as cidades que satisfaz a exigência que cada cidade possa se comunicar com qualquer outra. O conjunto de cidades corresponde ao conjunto de vértices e cada aresta corresponde a um cabo telefônico.

Figura 2.14 *Rede de Comunicações*

**Isômeros químicos:** Se associarmos os átomos de uma molécula a vértices e as ligações entre os átomos a arestas, obtemos um grafo que representa a molécula. É possível que dois ou mais grafos correspondam à mesma fórmula química, como por exemplo os gráficos da figura 2.15.

Figura 2.15 *Isômeros de  $C_3H_7OH$* 

Embora correspondam à mesma fórmula, as moléculas associadas aos diferentes grafos são diferentes e apresentam propriedades distintas. Moléculas deste

tipo são chamadas de *isômeros*. Para alcançar seu objetivo, Cayley resolveu sucessivamente os seguintes problemas de enumeração: árvores enraizadas (nas quais um determinado vértice é diferenciado dos demais), árvores cujos vértices têm grau no máximo 4 e, finalmente, árvores cujos vértices tem grau ou 1 ou 4.

**Ciclo Hamiltoniano:** Consideramos o problema de construir um ciclo que inclua todos os vértices de um dado grafo. Tal ciclo é chamado de *Hamiltoniano*, devido ao matemático irlandês do século XIX, Sir W. R. Hamilton, que o definiu. Um grafo que contém este tipo de ciclo é chamado de *grafo hamiltoniano*. O grafo da figura 2.16 é hamiltoniano. Este grafo foi a base de um jogo, “o Dodecaedro do Viajante”, concebido por Hamilton e comercializado sem muito sucesso. O nome dodecaedro decorre do fato que o grafo provém do poliedro sólido com doze faces, cada uma delas com cinco lados. Para formar o grafo imagine que o sólido é elástico e uma de suas faces é esticada pelos seus vértices até que o resto do sólido possa ser projetado dentro dela, [38].

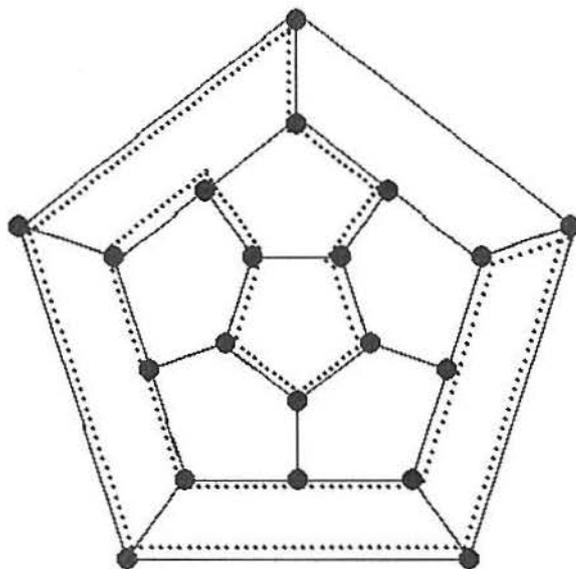


Figura 2.16 *Grafo e ciclo hamiltonianos*

**Fornecimento de Serviços:** Três companhias públicas devem fornecer três tipos de serviços, por exemplo, água, luz e gás, a três prédios públicos, como é mostrado na figura 2.17.

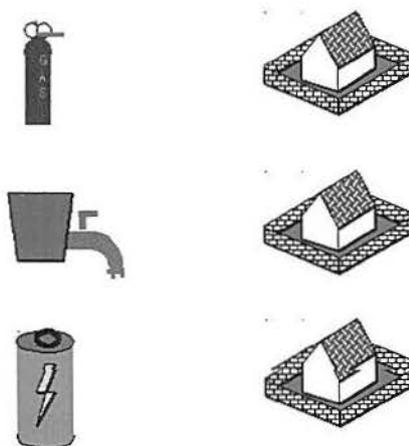


Figura 2.17 *Problema de fornecimento de serviços*

Decidiu-se usar tubulações subterrâneas, todas com a mesma profundidade por motivos de segurança. Este é um exemplo famoso em teoria de grafos, usado para ilustrar a não planaridade.

Obviamente o grafo não pode ser tomado como um plano físico adequado para a construção das tubulações (supondo que os vértices estejam na posição relativa correta), pois as arestas se cruzam no desenho, o que seria vedado pelas condições do problema (todas as tubulações ficam na mesma profundidade).

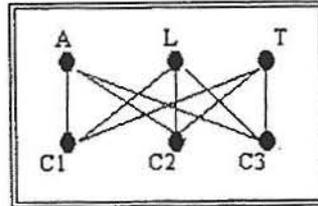


Figura 2.18 Grafo  $K_{3,3}$

Uma planta para a construção das tubulações pode ser interpretada como um desenho, uma representação do grafo conforme a figura 2.18. Para que esta planta satisfaça as condições do problema, as arestas não devem se interceptar. A não planaridade do grafo, que será vista no capítulo 4, mostra que não é possível fazer uma planta com estas características.

### 3 MAPAS PLANARES E COLORAÇÃO

Neste capítulo estudaremos mapas planares e os seus conceitos básicos. Além disso, estudaremos a caracterização de mapas que são 1, 2 e 3-coloríveis. Também apresentaremos uma prova de que mapas são coloríveis com 5 cores.

#### 3.1 Introdução

Um mapa é uma representação no plano de elementos geográficos, onde as arestas correspondem às fronteiras das regiões e os vértices representam intersecções de três ou mais regiões. É necessário então definir um *mapa planar* para satisfazer estas restrições.

Cada mapa está associado a um grafo planar. A coloração de um mapa consiste na designação de cores às regiões de um mapa, e portanto, este conceito é equivalente à designação de cores às arestas ou vértices de um grafo. O problema mais difícil de coloração é o teorema das quatro cores.

#### 3.2 Mapas Planares

Um *mapa* ou *mapa planar*  $M$  consiste de um pseudografo planar conexo  $G = U(M)$ , denominado *pseudografo fundamental* de  $M$ , junto com uma realização planar de  $M$  no plano, isto é, um desenho no plano onde os vértices não se cruzam. Na verdade este conceito de mapa é ainda muito geral. Quando se pensa em desenhar um mapa, com linhas (arestas) correspondentes às fronteiras entre os países, só é preciso colocar os vértices onde três ou mais regiões se encontram. Os vértices de grau zero ou um não podem acontecer e os de grau dois podem ser eliminados. Assim, pode-se assumir que todo vértice de  $G$  tem grau pelo menos três.

Duas regiões são *adjacentes* se suas fronteiras têm pelo menos uma aresta em comum, não meramente um vértice em comum. Denominamos as arestas na fronteira de uma região como seus *lados*. Por motivos técnicos, quando consideramos a coloração dos mapas, considera-se a região exterior do plano como um dos países que precisa ser colorido.

Observamos que um grafo pode corresponder a diferentes mapas planares, isto é, mapas diferentes podem ter o mesmo grafo fundamental. Por exemplo, na figura 3.1, o grafo que consiste de um quadrado e dois triângulos todos se encontrando em um vértice é desenhado no plano de duas formas: uma tem ambos os triângulos dentro do quadrado; a outra tem um dentro do outro e outro fora do quadrado. No segundo mapa não há nenhuma região de quatro lados, enquanto no primeiro mapa a região exterior ao quadrado tem quatro lados.

Uma *k-coloração* de um mapa (grafo) (algumas vezes, chamada uma *k-coloração própria*) é uma designação de  $k$  cores às regiões do mapa (vértices do grafo) de forma que nenhum par de regiões adjacentes (vértices) recebam a mesma cor. Um mapa (grafo) é *k-colorível* se ele tem uma *k-coloração*.

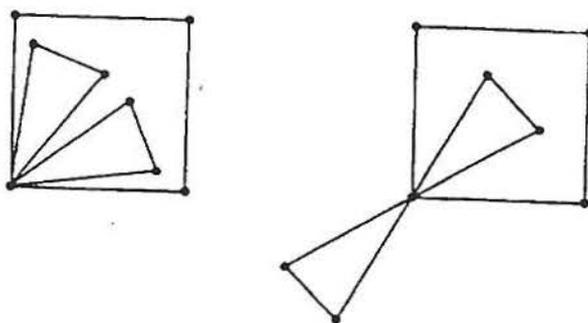


Figura 3.1 Quadrado e Dois Triângulos

Dois mapas são *isomorfos* se há uma deformação contínua do plano sobre ele mesmo que leva os vértices, arestas, e regiões de um mapa sobre os vértices, arestas, e regiões do outro.

O *grafo dual*  $D(M)$  a um mapa  $M$  é construído como segue. O conjunto de vértices de  $D(M)$  está em correspondência um-a-um com o conjunto de regiões de  $M$ . Denotemos a correspondência das regiões com os vértices por  $R \leftrightarrow \hat{R}$ . Se  $R$  e  $S$  são regiões (não necessariamente distintas) de  $M$ , então unimos  $\hat{R}$  e  $\hat{S}$  mediante uma aresta  $\hat{e}$  para  $R$  e  $S$ .

A aresta  $\hat{e}$  é chamada *ortogonal* a  $e$ . O fato mais importante sobre grafos duais é que eles são planares.

**Teorema 3.1.**  $D(M)$  é planar, para qualquer mapa  $M$ .

**Prova:** Simplesmente mostramos como desenhar  $D(M)$  no plano. Escolha um ponto  $\hat{R}$  no interior de cada região  $R$ . Se duas regiões  $R$  e  $S$  tem uma aresta fronteira em comum  $e$ , então conecta-se os pontos  $\hat{R}$  e  $\hat{S}$  mediante um arco simples  $\hat{e}$ , com extremos  $\hat{R}$  e  $\hat{S}$ , que passa pelo interior da aresta  $e$ . Ilustramos isto na figura 3.2.

□

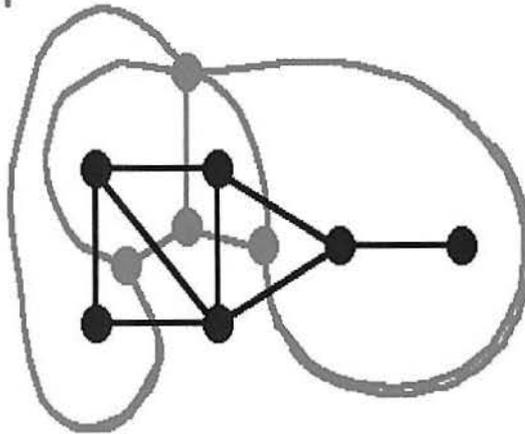


Figura 3.2 Grafo Dual (em vermelho)

Embora haja várias alternativas quanto a onde escolher os pontos  $\hat{R}$  e  $\hat{S}$  e as curvas  $\hat{e}$ , o mapa resultante  $M^*$  é único (mediante isomorfismos) e o chamamos de *mapa dual* para  $M$ . Ainda,  $D(M) = U(M^*)$ .

Agora, tem-se a questão, como as propriedades de  $D(M)$  estão relacionadas às propriedades de  $M$ ? Tem-se visto que se  $M$  tem  $p$  vértices,  $q$  arestas

e  $r$  faces, então  $D(M)$  tem  $r$  vértices e  $q$  arestas. Para mostrar que  $D(M)$  é verdadeiramente um “dual” a  $M$  é necessário mostrar que  $D(D(M))$  é isomorfo a  $M$ , e em particular que  $D(M)$  tem  $p$  faces.

Para ver isto, note que um vértice  $v$  de grau  $d$  em  $M$  está circundado por  $d$  regiões, cada uma adjacente a outras duas. Assim, em  $D(M)$ , obtém-se um ciclo de vértices, limitando uma região que contém  $v$  e (devido a que  $M$  é convexo) nenhum outro vértice de  $M$ . Mais ainda, toda região de  $D(M)$  tem arestas de  $M$  se estendendo nela, de maneira que contém pelo menos um vértice de  $M$ . Assim, na construção de  $D(D(M))$ , poderia-se tomar os vértices de  $M$ , e similarmente para as arestas (veja a figura 3.3).

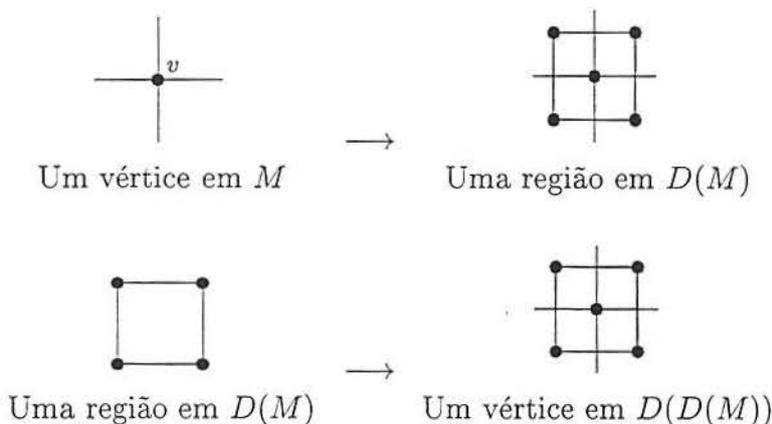


Figura 3.3 Correspondência entre vértices e faces

Isto significa que um vértice de grau  $d$  em  $M$  corresponde a uma região com  $d$  lados em  $D(M)$ , e vice-versa. Em particular, um vértice de grau 1 corresponde a um laço sem nada no seu interior. Mas geralmente, qualquer laço em  $M$  corresponde a uma ponte no dual  $D(M)$ . Similarmente, um par de arestas paralelas em  $M$  corresponde a um par de arestas em  $D(M)$  cuja remoção desconecta  $D(M)$ .

Pode-se pensar que o grafo dual de um mapa consiste de vértices representando as cidades capitais de todos os países, e as arestas representam estradas entre essas cidades, onde cada estrada cruza a fronteira entre dois países adjacentes. O grafo dual fornece uma maneira mais fácil para estabelecer uma forma matemática

precisa do problema das quatro cores. Em lugar de colorir países, podem-se colorir as cidades capitais – é claro que isto é equivalente, pois as cidades capitais estão em correspondência um-a-um com os países. A condição que nenhum par de países adjacentes tenha a mesma cor significa agora que quaisquer duas cidades capitais conectadas por uma estrada direta não devem ter a mesma cor. Equivalentemente, tenta-se colorir os vértices de  $D(M)$  de tal maneira que os vértices adjacentes tenham cores diferentes.

Agora é claro que os laços devem ser ignorados, pois é impossível colorir um vértice com duas cores diferentes. Além do mais, se dois vértices são adjacentes, então não importa quantas arestas existem que os unem. Assim, pode-se simplificar arestas múltiplas para arestas simples. Em outras palavras, é suficiente considerar os grafos. É claro que se a conjectura das quatro cores é provada para grafos conexos, pode ser provada para todos os grafos.

O conceito de dualidade pode ser aplicado de forma mais geral, a qualquer pseudografo conexo planar. Observe que geralmente um grafo planar dado pode ser realizado no plano de maneiras diferentes, é claro que a conjectura das quatro cores não depende da realização planar particular utilizada. Porém, a *interpretação* do grafo como o grafo dual de um mapa pode ser completamente diferente.

Dizendo de outra maneira, diferentes realizações planares de um grafo  $G$  podem dar grafos duais diferentes  $D(G)$ . Em outras palavras, podem-se ter grafos isomorfos com duais não-isomorfos (veja a figura 3.4). Aqui, a face externa do primeiro grafo tem 5 arestas, de maneira que o grafo dual tem um vértice de grau 5. Por outro lado, todas as faces do segundo grafo tem 3 ou 4 arestas, de maneira que todos os vértices do grafo dual tem grau 3 ou 4. Portanto, os dois grafos duais não podem ser isomorfos.

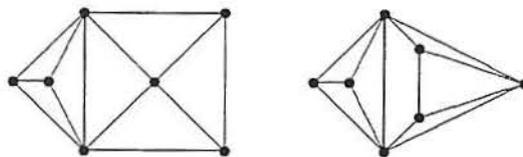


Figura 3.4 *Dois grafos isomorfos com duais não-isomorfos*

### 3.3 Métodos de Coloração de Mapas

Na seção seguinte tem-se o propósito de uma introdução sistemática aos problemas de coloração elementares e suas soluções. Pretende-se fornecer um pouco de familiaridade com as idéias do assunto e, em particular, com seus métodos.

O primeiro tipo de questão que tratamos diz respeito à caracterização da estrutura dos grafos e mapas que são coloríveis com uma, duas ou três cores. Mas este assunto não generaliza além deste pequeno número de cores. Em particular, não há tal caracterização para a colorabilidade com quatro cores.

O segundo tipo de questão que examinamos tem a ver com o número mínimo de cores, chamado de *número cromático*, que é suficiente para colorir um grafo dado. Damos limites gerais neste número para um grafo arbitrário. Também, mostramos em poucas linhas a suficiência das seis cores para colorir qualquer mapa ou grafo planar. O método há muito existente de *Kempe (1879)*, que provou ser inválido para quatro cores mas que foi refinado por *Heawood (1890)*, é usado para provar que cinco cores são suficientes para colorir um grafo planar arbitrário.

É fácil dar exemplos de grafos planares que requerem quatro cores. A parte do limite superior do argumento é a parte difícil no mapa, pois, infelizmente, o argumento do limite superior no número de *Heawood* não é aplicável ao plano.

Na subseção final, temos um algoritmo para colorir qualquer mapa, não necessariamente com o número exato de cores, mas pelo menos dá um caminho para colorir que é por enquanto, um dos “bons” caminhos fáceis para fazê-lo.

### 3.4 Coloração com um, dois e três cores

A seguir investigamos a coloração com uma, duas e três cores dos grafos e mapas. Apesar destes resultados serem a parte mais fácil, eles levam naturalmente a algumas das idéias básicas na teoria de grafos e sugerem a importância da coloração.

O que significaria ser capaz de colorir um mapa  $M$  com somente uma cor? Refletindo um pouco, podemos mostrar que  $M$  deve ser um mapa *degenerado* que consiste de uma região simples (não limitada), pois se  $M$  contém uma região limitada  $R$ , as arestas na fronteira de  $R$  devem separar  $R$  de algumas outras regiões  $S$ , e  $R$  e  $S$  devem receber cores diferentes. Por exemplo, tal mapa poderia parecer com o mostrado na figura 3.5.

Poderíamos adotar “grafo” como a noção básica e definir um “mapa” como um desenho particular de algum grafo (planar). Esta abordagem tem certas vantagens. Por exemplo, se queremos excluir mapas como na figura 3.6, seria difícil descartar este tipo de mapa sem invocar a conectividade não-simples ou algum outro estigma topológico ligeiramente esotérico. Mas, na expressão acima, podemos meramente insistir que  $U(M)$  seja um grafo conexo. Isto significa que se pode juntar quaisquer dois pontos (vértices) em  $U(M)$  com uma cadeia situada inteiramente dentro de  $U(M)$ .

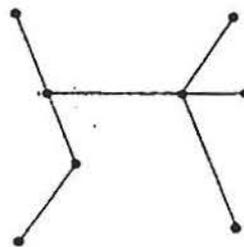


Figura 3.5 Mapa 1

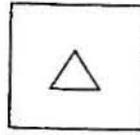


Figura 3.6 Mapa 2

Suponha que  $U(M)$  contém um circuito  $G$ . Se  $C$  é uma curva simples fechada, ela deve dividir o plano em duas regiões. Reciprocamente, se  $M$  tem duas ou mais regiões, então pelo menos uma delas deve estar cercada por um circuito. A presença de circuitos prolifera o número de regiões adjacentes. Então podemos concluir que  $M$  pode ser colorido com uma cor se e somente se  $U(M)$  não contiver circuito.

Mas temos um nome para um grafo que é conexo e não tem circuitos. É uma árvore.

Assim temos provado o fato elementar:

**Teorema 3.2.** *As regiões de um mapa  $M$  são coloríveis com uma cor se e somente se  $U(M)$  é uma árvore.*

A situação para grafos é ainda mais simples (ver figura 3.7). É claro que se qualquer dois vértices tem uma aresta em comum, eles precisariam duas cores.



Figura 3.7 Mapa Um Colorível

**Teorema 3.3.** *Os vértices de um grafo  $G$  são coloríveis com uma cor se e somente se  $G$  não tem arestas.*

É claro, segue que um grafo conexo é colorível com uma cor se e somente se ele consiste de um vértice simples. Nesse caso é chamado *trivial*. Isto nos permite restabelecer o fato de que um mapa  $M$  colorível com uma cor tem uma região simples. Para ver isto observamos que se  $M$  é colorível com uma cor, então  $D(M)$  também é. Mas  $D(M)$  é um grafo conexo e, portanto, ele tem um vértice simples; mas então  $M$  tem uma região simples.

A situação para a colorabilidade com duas cores é ligeiramente mais complicada mas ainda gerenciável. Quando um mapa é colorível com duas cores? O exemplo favorito de um mapa colorível com duas cores é o do tabuleiro de damas (ver figura 3.8), mas é realmente enganador. Como deveríamos colorir a região externa, já que ela toca os quadrados preto e branco?

É claro, o tabuleiro infinito não apresenta este problema, mas estamos interessados em mapas com número finito de regiões. Assim, aqui temos um exemplo melhor de um mapa colorível com duas cores. Se observarmos a figura 3.9 cuidadosamente, veremos que cada ponto do mapa se encontra em um número par de linhas. O número de linhas que se encontra em um vértice é chamado de grau do vértice. Observe que na figura 3.8 há vértices de grau ímpar.

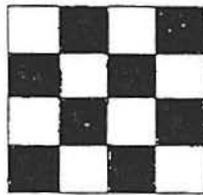


Figura 3.8 Mapa Dois Colorível

**Teorema 3.4.** *Um mapa  $M$  pode ser colorível com duas cores se e somente se cada vértice de  $U(M)$  tem grau par  $\geq 2$ .*

**Prova:** Há diversas provas deste teorema. Aqui tentamos uma muito simples.

Primeiro,  $U(M)$  não pode ter um vértice de grau ímpar senão as regiões que estão ao redor deste vértice iriam requerer mais do que duas cores.

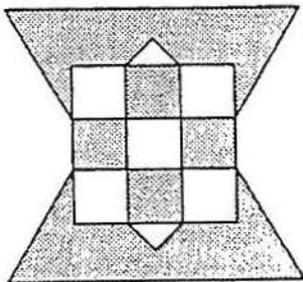


Figura 3.9 Mapa Dois Colorível

Provamos a recíproca em três passos.

1. Suponha que geramos um mapa em todo o plano desenhando linhas retas estendidas indefinidamente em ambas direções. Desenhemos uma linha e colorimos uma metade do plano com uma cor e a outra metade do plano com outra cor. Podemos colorir tal mapa gerado por  $n$  linhas com duas cores se, sempre que acrescentamos uma linha nova, invertemos todas as cores (por exemplo, trocando preto para branco e branco para preto) nas regiões que estão em somente um lado da linha. Por indução no número de linhas, este processo leva a uma coloração apropriada do mapa.
2. O mesmo se aplica a um mapa gerado desenhando círculos no plano e tratando o interior e o exterior de um círculo como sendo os dois lados de uma linha reta.
3. Voltamos para nosso mapa com vértices de grau par ( $\geq 2$ ). Comece uma volta a partir de qualquer vértice passando pelas arestas. Esta volta gerará um circuito em algum lugar uma vez que ele retorna a algum vértice. Isto porque há um número finito de vértices, e eventualmente a volta deve passar novamente por si mesma. Remova as arestas do circuito assim gerado. Nenhum vértice aumentou o seu grau. O grafo

desconsiderado também tem todos os seus vértices de grau par e repetimos o processo, decompondo o grafo em circuitos e cadeias. Então tratamos os circuitos como círculos e cadeias como linhas para colorir o mapa com duas cores.  $\square$

Voltando à coloração com duas cores dos grafos. Observamos que um circuito de comprimento ímpar não pode ser colorido com duas cores. Assim, qualquer grafo colorível com duas cores não pode conter tal circuito. O próximo resultado diz que a recíproca é também satisfeita. (ver figura 3.10)

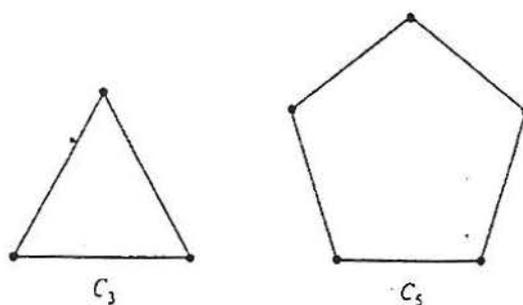


Figura 3.10 Mapa Dois Colorível de Inversão

**Teorema 3.5.** *Os vértices de um grafo  $G$  podem ser coloríveis com duas cores se e somente se  $G$  contém nenhum circuito de comprimento ímpar.*

**Prova:** Para ver a recíproca, escolha somente um vértice  $v$  e colorir de vermelho. Agora colorir todos os vértices adjacentes de  $v$  azuis. Continue assim até que todos os vértices estejam coloridos.

Tudo estaria bem se pudéssemos afirmar agora que quaisquer dois vértices  $w, x$  coloridos iguais não são adjacentes. No entanto, a figura poderia parecer como mostrada na figura 3.11, na qual  $w$  e  $x$  são adjacentes e coloridas iguais.

A cadeia de arestas de  $v$  para  $w$  e a cadeia de  $v$  para  $x$ , junto com uma aresta de  $w$  para  $x$ , será denotada por  $U$ .

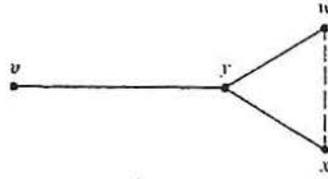


Figura 3.11 Mapa Dois Colorível

Se  $U$  for um circuito, certamente tem comprimento ímpar já que as cadeias de  $v$  para  $w$  e  $v$  para  $x$  têm a mesma paridade porque  $w$  e  $x$  são coloridas iguais e a aresta de  $w$  para  $x$  faz o comprimento ímpar. Em qualquer caso, é fácil ver que  $U$  deve conter ao menos um circuito de comprimento ímpar.  $\square$

Vamos agora tratar de mapas (grafos) que são 3-coloríveis. Infelizmente não há mais caracterizações completas.

Chama-se mapa cúbico se cada vértice tiver grau 3.

**Teorema 3.6.** *Um mapa cúbico é colorível com três cores se e somente se cada região estiver limitada por um número par de lados.*

**Prova:** Primeiro, provemos que a colorabilidade com três cores de um mapa cúbico implica que cada região está limitada por um número par de arestas. Suponha que há uma região  $R_1$  com um número ímpar de arestas. Podemos colorir  $R_1$  com  $C_1$  e suas regiões circundantes com cores  $C_2$  e  $C_3$  alternadamente, mas então temos que colorir a última das regiões vizinhas com uma quarta cor como se tivesse uma fronteira com três regiões com três cores diferentes. Isto contradiz a colorabilidade com três cores e completa a primeira parte da prova.

Agora deve ser mostrado que se cada região em um mapa cúbico tem um número par de arestas, então o mapa pode ser colorido com três cores. A prova é por indução no número de regiões  $r$  do mapa.

Quando  $r = 3$ , o resultado é trivial.

Quando  $r = 4$ , pode ser mostrado facilmente por exaustão de todos os casos possíveis que ele pode ser colorido com três cores (ver figura 3.12).

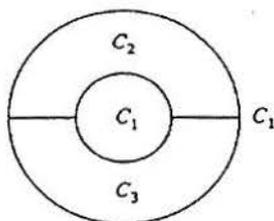


Figura 3.12 Mapa Três Colorível

Assumamos que o teorema é verdadeiro quando houver  $r-1$  ou  $r$  regiões. Seja  $M$  um mapa cúbico com  $r+1$  regiões e suponha que cada região tem um número par de arestas. Vemos que, (Corolário 3.3), em qualquer mapa deve existir uma região  $R$  com no máximo cinco arestas. Como cada região em  $G$  tem um número par de arestas,  $R$  tem duas ou quatro arestas.

*Caso 1* (Figura 3.13)  $R$  tem duas arestas, digamos comuns com as regiões  $R_1$  e  $R_2$ . Se apagarmos a aresta entre  $R$  e  $R_1$ , obtemos um mapa  $M'$  que tem  $r$  regiões onde cada região tem ainda um número par de arestas. (Em  $M'$  cada região tem o mesmo número de arestas que em  $M$ , exceto que a região  $R'_1 = R_1 + R$  tem duas arestas menos que  $R_1$  e, similarmente,  $R'_2$  tem duas menos que  $R_2$ . Assumimos que as arestas incidentes a um vértice de grau 2 são contadas como uma aresta).

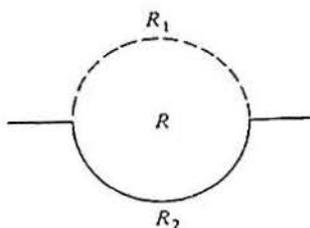


Figura 3.13 Mapa Três Colorível

Portanto,  $M'$  é colorível com três cores, digamos com cores  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ . Se  $R'_1$  tem cor  $C_1$  e  $R'_2$  tem cor  $C_2$  em  $M'$ , então restituímos a aresta apagada e colorimos  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R$  com cores  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , respectivamente, mantendo as cores das outras regiões. Então  $M$  é obviamente colorível com três cores.

*Caso 2* (Figura 3.14)  $R$  tem quatro arestas, digamos com regiões  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ , no sentido horário. Suponha que as regiões  $R_1$  e  $R_2$  tenham uma aresta em comum ou coincidam. Então, obviamente,  $R_2$  e  $R_4$  não podem coincidir nem ter uma aresta em comum. Removendo as arestas entre  $R$  e  $R_2$  e entre  $R$  e  $R_4$ , obtemos um mapa  $M'$  que tem  $r - 1$  regiões; pode facilmente ser visto na figura 3.14, que cada região tem ainda um número par de arestas. Então  $M'$  pode ser colorível com as cores  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , pela hipótese de indução. Somente resta mostrar que as regiões  $R'_1$  e  $R'_3$  têm a mesma cor em  $M'$  (isto é óbvio se elas coincidem).

Suponha que a região  $R' = R + R_2 + R_4$  tem cor  $C_1$ . Como há um número ímpar de arestas de  $v_a$  para  $v_b$  ao longo da parte da fronteira de  $R'$ , as regiões vizinhas ao longo destas arestas podem ter uma seqüência alternada de cores  $C_2, C_3, C_2, \dots, C_3, C_2$ , pois  $M'$  é colorido com três cores. Então é óbvio que as regiões  $R'_1$  e  $R'_3$  têm a mesma cor  $C_3$ .

Recuperando as arestas apagadas e colorindo as regiões  $R$ ,  $R_2$  e  $R_4$  com as cores  $C_2$ ,  $C_1$  e  $C_1$ , respectivamente, mantendo as cores das outras regiões as mesmas que em  $M'$ , temos um mapa  $M$  completamente colorido com três cores.  $\square$

Enunciaremos agora dois resultados sobre 3-coloração. As provas desses resultados podem ser encontradas em [37].

Um mapa é *triangular* se cada região tiver três lados. Há uma boa caracterização de mapas triangulares que podem ser coloridos com três cores.

**Teorema 3.7.** *Um mapa triangular  $M$  pode ser colorido com três cores se e somente se  $U(M) \neq K_4$ .*

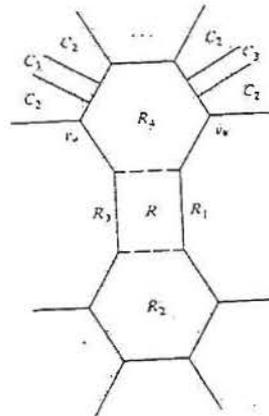


Figura 3.14 Mapa Triangular

**Comentário:** Este teorema é uma aplicação direta do Teorema de *Brooks* ao grafo dual  $D(M)$ . Observe que a versão dual do teorema 3.6 declara que os vértices de qualquer grafo triangular  $M$  podem ser colorido com três cores se e somente se cada vértice tiver um grau par.

O seguinte teorema, devido a *Grötzsch (1958)*, é um dos poucos resultados gerais sobre a coloração com três cores de grafos planares.

**Teorema 3.8.** *Se  $G$  é um grafo planar que contém nenhum ciclo de comprimento 3, então  $G$  pode ser colorido com três cores.*

### 3.5 O Número Cromático

Já que não é mais possível caracterizar grafos que não são coloríveis com um número dado de cores, revertemos a questão e perguntamos qual o número mínimo de cores necessárias para colorir um grafo.

Daremos aqui uns poucos resultados gerais sobre coloração. Determinamos que se pode construir indutivamente uma  $k$ -coloração de um grafo  $G$  se cada subgrafo de  $G$  contém algum vértice de grau menor ou igual a  $k - 1$ , e este resultado dará a chave aos problemas de coloração.

O número cromático  $\chi(G)$  de um grafo  $G$  é o menor inteiro  $k$  para o qual  $G$  pode ser  $k$ -colorido;  $G$  é chamado  $k$ -cromático. As mesmas definições se aplicam a mapas. Para qualquer grafo  $G$ ,  $\Delta(G)$  denota o grau máximo de qualquer vértice e  $\delta(G)$  o grau mínimo. O seguinte teorema dá um limite para  $\chi(G)$  em termos de  $\Delta(G)$ .

**Teorema 3.9.** *Para qualquer grafo  $G$ ,  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ .*

**Prova:** Por indução sobre o número  $n$  de vértices. Se  $G$  tem um vértice, o resultado é certamente verdadeiro. Assuma que é também satisfeito se  $G$  tem  $n-1$  vértices ( $n \geq 2$ ) e seja  $G$  qualquer grafo com  $n$  vértices. Suponha que o grau de  $v$  é  $\Delta(G)$ . Então, pela hipótese indutiva,  $\chi(G') \leq 1 + \Delta(G') \leq 1 + \Delta(G)$ , onde  $G' = G - v$  é obtido de  $G$  pela remoção de  $v$  e suas arestas incidentes. Mas agora podemos colorir  $v$  usando uma das cores  $1 + \Delta(G)$  não usada pelos vértices  $\Delta(G)$  de  $G$  que são adjacentes a  $v$ .  $\square$

Que o resultado é o melhor possível segue do fato que  $\chi(K_{n+1}) = n + 1$  enquanto  $\Delta(K_{n+1}) = n$ .

No entanto, em (quase) todos os outros casos podemos melhorar o teorema precedente substituindo  $n + 1$  por  $n$ , mediante o teorema seguinte [14], [ver [37], pg.137]

**Teorema 3.10.** *Seja  $G$  um grafo conexo e seja  $n = \Delta(G)$ . Então  $\chi(G) \leq n$  exceto quando*

- (a)  $G$  é um grafo completo de ordem  $n + 1$  ou
- (b)  $n = 2$  e  $G$  é um ciclo de comprimento ímpar.

O limite dado no teorema anterior, embora seja um resultado geral muito útil, não se aproxima bem do número cromático real conhecido em muitos casos importantes. Por exemplo mostraremos que  $\chi(G) \leq 5$  para qualquer grafo planar  $G$ , mesmo que exista grafo planar com graus máximos arbitrariamente grandes.

De fato, se  $G$  for grafo qualquer conexo não-trivial e  $r$  for um inteiro positivo, podemos ligar uma “ramificação” em forma de estrela (como indicado na figura 3.15) para obter um  $\tilde{G}$  com  $\Delta(\tilde{G}) \geq r$  e  $\chi(\tilde{G}) = \chi(G)$ . Se  $G$  for planar, então  $\tilde{G}$  também é.

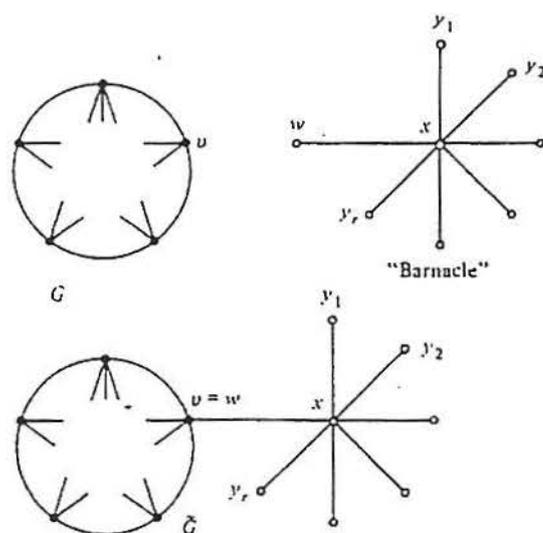


Figura 3.15 Grafo em Forma de Estrela

Se reexaminamos a prova do teorema 3.9, podemos ver que somente a existência de algum vértice de grau especificado é requerida. Isto sugere uma definição. Seja

$$sw(G) = \max\{\delta(H) : H \text{ é subgrafo de } G\}.$$

O resultado seguinte de *Szekeres e Wilf (1968)* é agora provado exatamente como o teorema 3.9.

**Teorema 3.11.**  $\chi(G) \leq 1 + sw(G)$ .

**Prova:** Na realidade prova-se que  $\chi(G') \leq 1 + sw(G)$  para qualquer subgrafo  $G'$  de  $G$ .

Seja  $n'$  o número de vértices em  $G'$ ; usamos a indução em  $n'$ . Se  $n' = 1$ , o resultado é claro.

Suponha que ele é satisfeito para  $n' = k \geq 1$  e  $G'$  tem  $k + 1$  vértices. Por definição de  $sw(G)$  há um vértice  $v$  em  $G'$  com grau de no máximo  $sw(G)$ . Pela hipótese indutiva  $G' - v$  pode ser colorido com no máximo  $1 + sw(G)$  cores e os vizinhos de  $v$  podem usar até no máximo  $sw(G)$  destas cores, deixando uma livre para  $v$ . Portanto,  $\chi(G') \leq 1 + sw(G)$ .  $\square$

Mas o que  $sw(G)$  significa? Claramente,  $sw(G) = 0$  se e somente se  $G$  não tiver arestas. Se cada vértice do grafo  $G$  tiver grau  $> 1$ , então  $G$  contém um circuito. Portanto, uma árvore não-trivial deve ter pelo menos um vértice de grau 1 (chamado uma *folha* da árvore), e é uma consequência fácil que  $sw(G) = 1$  se  $G$  for uma árvore não-trivial. Por outro lado, se  $G$  é não trivial e não é uma árvore, então  $G$  contém um circuito  $C$  e  $sw(G) \geq \delta(C) = 2$ .

Portanto um grafo não trivial conexo  $G$  satisfaz  $sw(G) = 1$  se e somente se  $G$  for uma árvore. Assim, pelo teorema 3.9 qualquer árvore pode ser colorida com duas cores. É claro, poderíamos também deduzir este resultado do teorema 3.5 já que uma árvore certamente não tem circuitos ímpares.

A condição  $sw(G) = 2$  não é muito restritiva, pois se  $G$  for qualquer grafo, podemos formar um novo grafo  $G^*$  introduzindo um novo vértice de grau 2 no meio de cada aresta de  $G$  (ver figura 3.16). O significado desta construção é que,  $G$  é planar se e somente se  $G^*$  é planar.

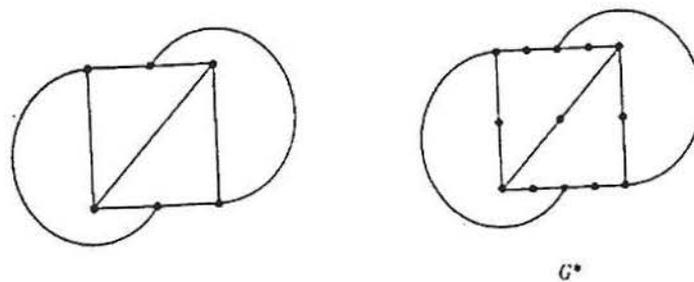


Figura 3.16 Grafo Planar  $G$  e  $G^*$

**Teorema 3.12.** *Seja  $G$  um grafo planar. Então  $\delta(G) \leq 5$*

**Corolário 3.1.** *Se  $G$  for planar, então  $sw(G) \leq 5$ .*

**Corolário 3.2.** *Qualquer mapa tem uma região com no máximo cinco lados.*

**Prova:** Seja  $d = d(G) = (1/n)\Sigma deg(v)$  o grau médio de um vértice de  $G$ . Como  $2m = \Sigma deg(v)$ ,  $v$  um vértice de  $G$ , temos  $dn = 2m$ . Mas  $m \leq 3n - 6$  (ver teorema 4.3) então  $d < 6 - (12/n) < 6$ . Portanto,  $deg(v) \leq 5$  para algum vértice  $v$  em  $G$ , se não, o grau médio seria pelo menos 6.

O corolário 3.1 é satisfeito pois cada subgrafo de um grafo planar é planar. Portanto,  $\delta(H) \leq 5$  para cada subgrafo  $H$  de  $G$ . O corolário 3.2 é deduzido da aplicação do teorema do grafo dual do mapa.

O seguinte teorema, que é uma consequência imediata do teorema 3.11 e 3.12 é na realidade redundante, pois podemos provar que cada grafo planar pode ser colorido com cinco cores. No entanto, o enunciámos de qualquer forma já que muitos resultados de coloração, são análogos a este teorema fácil em lugar do teorema mais difícil das cinco-cores.

**Teorema 3.13.** *(Teorema das seis-cores) Seja  $G$  ser um grafo planar. Então  $G$  pode ser colorido com seis cores.*

**Corolário 3.3.** *Qualquer mapa pode ser colorido com seis cores.*

Desde muito cedo conjecturou-se que quatro cores bastariam para resolver o problema de coloração de grafos planares. O problema das quatro cores diz que é possível colorir as regiões de qualquer mapa desenhado no plano usando no máximo quatro cores, de maneira que nenhum par de regiões que tenham uma fronteira em comum sejam da mesma cor.

Para transformar este problema em um problema de grafos, associamos a cada região um vértice e as fronteiras a arestas.

Este problema desafiou grandes matemáticos por mais de um século e muitos acreditavam que a resposta era ou quatro ou cinco, alguns referiram-se a uma conjectura de cinco cores.

Após várias tentativas, finalmente em 1976, Appel e Haken apresentaram uma prova. Esta prova envolve, além de argumentos elaborados e sofisticados, 1200 horas de cálculo de um computador (IBM 370). O problema das quatro cores não está contemplado neste contexto pela sua complexidade, razão pela qual tratamos dos demais casos de coloração de mapas.

### 3.6 Teorema das Cinco Cores

Provar que um mapa pode ser colorido com cinco cores é muito mais trabalhoso. Lembremos agora sobre o problema das quatro cores, antes de provarmos o teorema das cinco cores.

Desde muito cedo se conjecturou que 4 cores bastariam para resolver o problema da coloração de grafos planares. O cartógrafo inglês Francis Guthrie, já em 1852, reclamava a suficiência de 4 cores para distinguir os países num mapa planar e foi precisamente nesse ano (1852) que Augusto De Morgan, numa carta que enviou a W. R. Hamilton, afirmou ter tomado conhecimento deste problema, que designou por problema das 4 cores, através de um seu aluno, Frederik Guthrie (irmão de Francis Guthrie).

Em 1878, numa comunicação apresentada nos "Proceedings of the London Mathematical Society", Cayley referiu-se ao problema das 4 cores como sendo um problema em aberto. Em 1879, Kempe propôs uma pretensa solução que só em 1890 foi refutada por Heawood, no seu primeiro trabalho escrito onde provou a suficiência de 5 cores para a coloração dos vértices de grafos planares. O teorema que segue estabelece precisamente o resultado obtido por Heawood, com base no método utilizado por Kempe onze anos antes (ver mais em [34]).

Este teorema é parte da razão porque o problema das 4 cores é tão atormentante. Sabia-se que a resposta correta era ou 4 ou 5, mas não sabia-se qual! Não podemos deixar de mencionar que muitos ótimos matemáticos realmente

acreditavam que a resposta era 5 não 4 e alguns se referiam a uma conjectura cinco-cores, que é a asserção de algum grafo planar cinco-cromático existia (mais em [37]).

**Teorema 3.14.** (*Teorema das cinco cores*) *Todo grafo planar pode ser colorido com cinco cores.*

**Corolário 3.4.** *Todo mapa pode ser colorido com cinco cores.*

**Primeira Prova:** A prova será feita por indução sobre o número  $n$  de vértices. Quando  $n \leq 5$ , o resultado é trivial. Suponha que é satisfeito para  $n - 1$ , e seja  $G$  um grafo planar arbitrário com  $n$  vértices. Pelo teorema 3.12, escolha um vértice  $v$  de grau  $\leq 5$  e seja  $G' = G - v$ . Agora  $G'$  tem  $n - 1$  vértices e, portanto, pela hipótese indutiva,  $G'$  tem uma coloração com cinco cores  $C'$ . Se  $v$  tiver menos que cinco vértices adjacentes em  $G$ , então  $C'$  pode ser estendido a uma coloração com cinco cores  $C$  de  $G$  associando a  $v$  uma das cores não usadas por qualquer de seus vizinhos. Portanto, podemos supor que  $v$  tem precisamente cinco vizinhos, digamos  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ , listados em sentido horário, e que as cinco cores designadas a estes vértices são todas distintas (ver figura 3.17). Se  $x$  e  $y$  forem cores, denotemos por  $G'(x, y)$  o subgrafo cheio de  $G'$  induzido por todos os vértices coloridos  $x$  ou  $y$ . (Isto significa que quando dois vértices de  $G'(x, y)$  são adjacentes em  $G$ , eles são adjacentes em  $G'(x, y)$ .) Uma componente de  $G'(x, y)$  é também chamado um componente  $x - y$ .

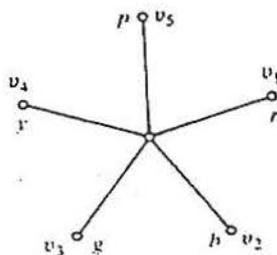


Figura 3.17 Mapa Cinco Colorível

Podemos agora mostrar como alterar a coloração  $C'$  para que todas as cinco cores usadas pelos vizinhos de  $v$  não sejam distintas, permitindo-nos então colorir  $v$  com uma das cores restantes.

Considere  $v_1$  e  $v_3$ ; ou elas pertencem ao mesmo componente  $r - g$  ou não. Se não, então podemos modificar a coloração  $C'$  invertendo as cores  $r$  e  $g$  no componente  $r - g$  contendo  $v_1$ . Então  $v_1$  e  $v_3$  são ambas coloridas  $g$ , enquanto as cores de  $v_2, v_4$  e  $v_5$  não mudam.

Se  $v_1$  e  $v_3$  pertencem à mesma componente  $r - g$ , então há uma cadeia em  $G'(r, g)$  de  $v_1$  para  $v_3$ , e esta cadeia junto com as duas arestas  $v_1, v$  e  $v_3, v$  em  $G$  formam um circuito que separa  $v_2$  de  $v_4$ . Assim, não pode haver uma cadeia em  $G'(b, y)$  de  $v_2$  para  $v_4$  então a componente  $b - y$  de  $v_2$  não inclui  $v_4$ . Portanto podemos inverter as cores  $b$  e  $y$  nesta componente, para que ambos  $v_2$  e  $v_4$  sejam coloridos  $y$ . Este tipo de argumento é chamado um *argumento da cadeia de Kempe*, e o processo pelo qual modificamos  $C'$  é chamado *cadeiamento de Kempe*.

**Segunda Prova:** Uma vez mais, por indução, supomos que todo grafo planar com menos que  $n$  vértices pode ser colorido com cinco-cores e seja  $G$  planar com  $n$  vértices. Escolha um vértice  $v$  em  $G$  com grau no máximo 5. Como antes, podemos assumir que  $\deg(v) = 5$ . Se cada par de vértices adjacentes para  $v$  fossem eles adjacentes entre si,  $G$  conteria um subgrafo isomorfo a  $K_5$  (de fato, ele conteria um subgrafo isomorfo a  $K_6$ !) e isto é impossível, pois  $K_6$  é não planar (ver próximo capítulo). Sejam  $v_1$  e  $v_2$  vértices adjacentes a  $v$  mas não adjacentes um ao outro. Seja  $e$  uma aresta juntando  $v_1$  e  $v$  e  $f$  uma aresta juntando  $v_2$  e  $v$ ; apague toda outra aresta incidente com  $v$ . Contraindo as arestas  $e$  e  $f$  produz um novo grafo  $\bar{G}$  no qual  $v_1$  e  $v_2$  são identificados com  $v$  para produzir um novo vértice  $\bar{v}$  e no qual nenhuma adjacência entre os vértices além de  $v$  são adicionadas ou removidas (ver figura 3.18).

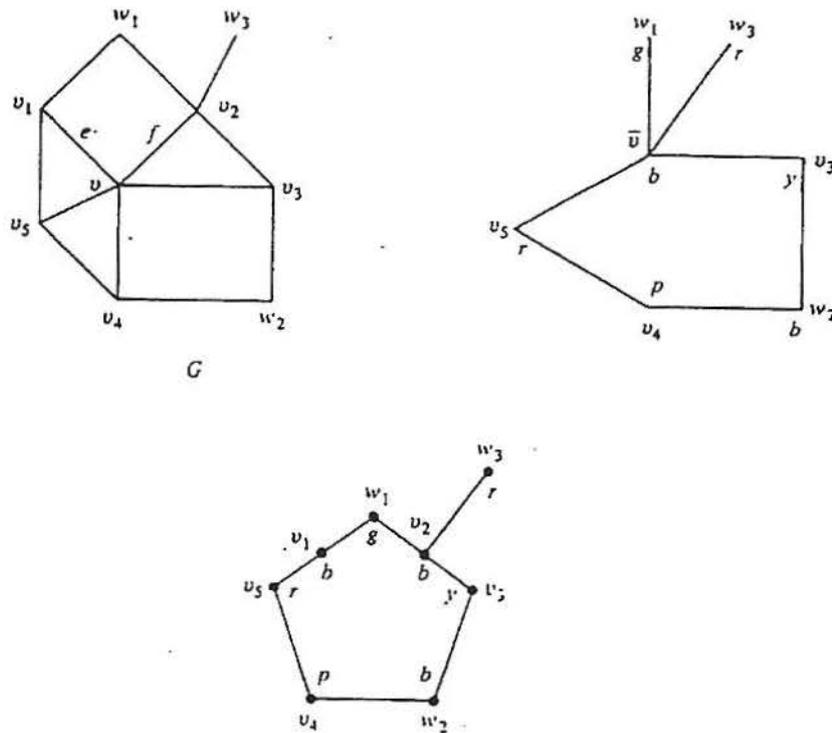


Figura 3.18 Mapa Cinco Colorível  $G$ ,  $\bar{G}$ ,  $G - v$

No entanto,  $\bar{G}$  é planar e tem menos que  $n$  vértices então  $\bar{G}$  pode ser colorido com cinco cores. Mas uma coloração com cinco cores de  $\bar{G}$  produz uma coloração com cinco-cores de  $G - v$  no qual os dois vértices  $v_1$  e  $v_2$  recebem a mesma cor. Como antes, isto basta para colorir  $G$  com cinco cores.

Observe que a segunda prova somente requer que  $K_6$  seja não-planar.

Quando *Heawood* (1890) provou o teorema das cinco cores descartando a suposta prova da C4C fundamentada por *Kempe*, ele deu um contra exemplo para mostrar que o argumento de *Kempe* era falso, além de adaptar o método para provar a suficiência das cinco cores.

O contra-exemplo de *Heawood* é direcionado às inversões de coloração de cadeias de *Kempe*. Ele não diz respeito a se pode, por uma escolha judiciosa,

recolorir alguns dos vértices. Este exemplo tem 25 vértices e sabido que é colorido com quatro cores pela teoria existente.

Usando o argumento indutivo no número de vértices  $n$ , assume-se que cada grafo planar com menos de 25 vértices é colorível com quatro cores. Considere um grafo com 25 vértices e remova um vértice  $v$  (o qual tem cinco vizinhos) e suas arestas conectadas, e cora com quatro cores com o grafo resultante em 24 vértices. Reponha  $v$  e tente colorir o grafo resultante.

Há uma cadeia  $b-g$  de 2 para 4. Há também uma cadeia  $b-y$  de 2 para 5. A inversão de cores em cada cadeia não livrará uma cor para  $v$ . Isto deixa  $r$  em dois lugares. Agora não há cadeia  $r-g$  de 1 para 4. No entanto, pode-se inverter  $r$  por  $g$  na cadeia  $r-g$  começando em 1. Mas o outro  $r$  em 3 deve também ser invertido para  $g$  ou para  $y$  para obter a cor disponível para  $v$ . Isto não é possível porque 4, que tem cor  $g$  é adjacente a 3 que ficará colorido com  $g$ . Por outro lado, se invertermos as cores na cadeia  $r-y$  começando em 3, os dois vértices do triângulo externo que estão conectados por uma aresta seriam ambos designados  $r$  pelas inversões  $r-g$  e  $r-y$  começando em 1 e em 3, respectivamente contradizendo a coloração própria. Assim, não se pode substituir  $r$  por  $g$  em ambos 1 e 3, nem por  $g$  em 1 e por  $y$  em 3. Observe que em 1,  $r$  não pode inverter  $y$  porque ele é adjacente a um  $y$  em 5. *Heawood* escreveu, “infelizmente, é concebível que uma ou outra transposição removeria um  $r$  ambas não podem remover ambos os  $r$ ”. (É claro que a inversão de cores na parte da cadeia  $y-r$  começando em 5 seguida para uma inversão na cadeia  $r-g$  começando em 1, livra a cor  $y$  para  $v$ , mas isto não justifica o argumento de *Kempe*).

### 3.7 Um Algoritmo para Colorir

Dado um grafo razoavelmente grande, digamos com 20 vértices ou mais, é extremamente difícil ver como colori-lo com muita eficiência. Com este fim, apre-

sentamos um resultado muito simples e elegante de *Welsh e Powell (1967)*. Basicamente, a idéia do algoritmo é ser eficiente. Escolha um vértice e colorir de vermelho. Vá a outro vértice não adjacente a vértices vermelhos e colorir de vermelho. Quando todos os vértices que podem ser coloridos de vermelho estiverem terminados, colorir algum vértice azul e vá por todos os vértices novamente. Continue começando com novas cores até que todos os vértices estejam coloridos. O truque é primeiro ordenar os vértices em termos de graus não crescentes para que os primeiros vértices considerados sejam aqueles de grau mais alto que podem causar problemas.

Agora, damos as maneiras do método:

*Algoritmo:* Seja  $G$  um grafo com vértices  $v_1, \dots, v_n$  listados de forma que os graus correspondentes sejam não crescentes  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ . Seja  $T_1 \subset V(G)$  ser definido como segue.

Coloque  $v_1 \in T_1$ . Se  $v_{i_1}, \dots, v_{i_m} \in T_1$  ( $1 = i_1 < \dots < i_m$ ), coloque  $v_j \in T_1$  se  $j > i_m$  e  $v_j$  não é adjacente a nenhum vértice já em  $T_1$ . Para definir  $T_2$ , seja  $i$  o menor inteiro tal que  $v_i \notin T_1$ . Coloque  $v_i \in T_2$ . Se  $v_{j_1}, \dots, v_{j_p} \in T_2$  ( $2 \leq j_1 < \dots < j_p$ ), coloque  $v_m \in T_2$  se  $m > j_p$  e  $v_m$  não é adjacente a um vértice em  $T_2$ . Continuando desta forma, defina uma seqüência  $T_i$  de subconjuntos disjuntos de  $V(G)$  tal que  $V(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ . É claro, para  $r$  suficientemente grande,  $T_r = \emptyset$  e fazemos  $\alpha(G)$  igual ao maior índice  $i$  para o qual  $T_i \neq \emptyset$ . Obviamente,  $G$  pode ser colorido com  $\alpha(G)$  cores.

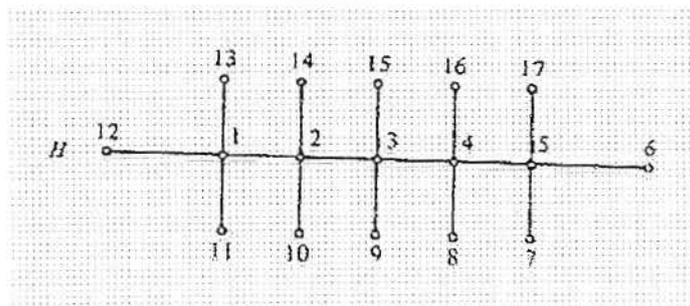


Figura 3.19 Grafo  $H$

**Teorema 3.15.**  $\alpha(G) \leq k(G) = \min \{j/j \leq d_j + 1\}$ .

**Prova:** Antes de provar o teorema, primeiro observamos que  $k(G) = \max_i \min\{d_i + 1, i\}$ . Agora, por construção, cada vértice  $v$ , em  $V(G) = \bigcup_{j=1}^m T_j$  é adjacente a pelo menos um vértice em cada um dos conjuntos  $T_1, \dots, T_m$ . Portanto  $d_i \geq m$ . Então,  $v_i \in \bigcup_{j=1}^{d_i+1} T_j$ . Mas, por definição  $v_i \in \bigcup_{j=1}^i T_j$  e então  $v_i \in \bigcup_{j=1}^{\mathcal{O}(i)} T_j$ , onde  $\mathcal{O}(i) = \min\{i, d_i + 1\}$ . Portanto,  $V(G) \subset \bigcup_{j=1}^{k(G)} T_j$  já que  $K(G) = \max \mathcal{O}(i)$ ; então  $\alpha(G) \leq k(G)$ .

Considere o seguinte grafo  $H$  (ver figura 3.19) identificado de modo que  $d_1 \geq \dots \geq d_{17}$ . Para esta árvore,  $k(H) = 5$ , o que não é impressionante. Por outro lado,  $\alpha(H) = 2$ . Observe que  $\alpha$  na verdade depende da ordenação dos vértices. Por exemplo, se reordenarmos os vértices de  $H$  como na figura 3.20, conseguimos  $\alpha(H) = 3$ ;  $T_1 = \{1, 2, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 17\}$ ,  $T_2 = \{3, 4, 8, 11, 12, 13, 16\}$ ,  $T_3 = \{5\}$ .

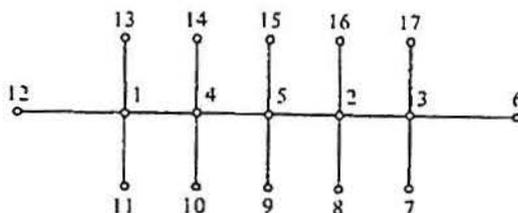


Figura 3.20 Ordenação de Vértices de  $H$

A razão para esta ambigüidade em  $\alpha(H)$  é que  $H$  tem muitos vértices do mesmo grau. Técnicas heurísticas que utilizavam ordenações baseadas nos graus dos vértices adjacentes para um vértice dado mostraram algum potencial de melhoria nestes resultados.

Vimos que, enquanto o limite superior teórico permanecia o mesmo, o número de cores realmente obtidas pela aplicação do algoritmo depende da ordenação particular dos vértices. *William* sugeriu uma modificação heurística interessante. Ordene os  $n$  vértices de um grafo  $G$  de certo modo, digamos  $v_1, \dots, v_n$ . Defina um vetor coluna  $d^\circ$  de comprimento  $n$  por  $d_i^\circ = 1$ , ( $1 \leq i \leq n$ ).

Indutivamente, para  $j \geq 0$ , defina  $d^{j+1} = Ad^j$ , onde  $A = (a_{rs})$  é a matriz  $n \times n$  cujo elemento  $(r, s)$   $a_{rs}$  é igual a 1 se  $v_r$  é adjacente a  $v_s$ , e a 0 caso contrário.

Observe que  $d^1$  é justamente o vetor dos graus - ver (a) abaixo. A idéia de *Williams* é usar  $d^k$ ,  $k$  grande, ao invés de  $d^1$  para ordenar os vértices antes de aplicar o método de *Welsh-Powell*. Os vetores  $d^k$  convergem para o autovetor dominante de  $A$ , e esta convergência parece ocorrer computacionalmente depois de aproximadamente  $n^{1/3}$  de iterações

- (a) Prove-se que  $d_j^i = \deg(v_i)$  e que  $d_i^2 = \sum_{v_j \sim v_i} \deg(v_j)$ .
- (b) Use  $d^2$  com o método *Welsh-Powell* para colorir o grafo na figura 3.19).

## 4 A FÓRMULA DE EULER E APLICAÇÕES

Como veremos neste capítulo, há poucas fórmulas simultaneamente elegantes e úteis como a fórmula de *Euler*.

### 4.1 Introdução

A fórmula de Euler relaciona os números  $n$  de vértices,  $m$  de arestas, e  $p$  o de componentes conexas de  $G$  com  $f$  o número de faces ou regiões, em um mapa planar de  $G$ . Provaremos que:  $n - m + f = p + 1$

Antes de provar a fórmula de *Euler*, no entanto, precisaremos desenvolver outros dois conceitos: árvores e pontes. Uma *árvore* é um grafo conexo sem circuito (ver figura 4.1). As árvores ocorrem freqüentemente na natureza, por exemplo, muitos componentes químicos podem ser representados por árvores.

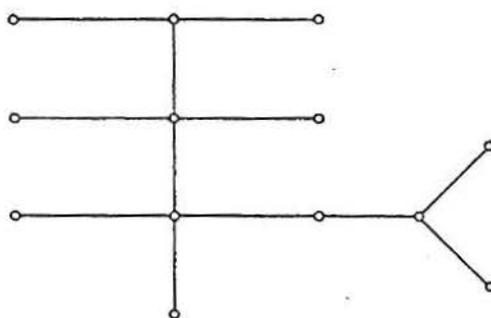


Figura 4.1 Árvore

**Teorema 4.1.** *Seja  $G$  uma árvore com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então  $n - m = 1$ .*

**Prova:** Use indução em  $m$ . Se  $m = 0$ , a árvore consiste de um vértice simples e a fórmula é cumprida. Agora suponha que  $m$  é qualquer inteiro positivo e assumamos que a fórmula é cumprida para  $m - 1$ . Como que  $m$  é positivo, cada vértice

na árvore tem um grau positivo (senão,  $G$  não seria conexo). Se  $\delta(G) \geq 2$ , então se pode facilmente verificar que  $G$  conteria um circuito. Portanto, há pelo menos um vértice de grau 1. Chame-o vértice  $v$  e seja  $H = G - v$ .

Então  $H$  é uma árvore com  $m - 1$  arestas e  $n - 1$  vértices e então, por indução,  $(n - 1) - (m - 1) = 1$ . Mas  $n - m = (n - 1) - (m - 1)$ .

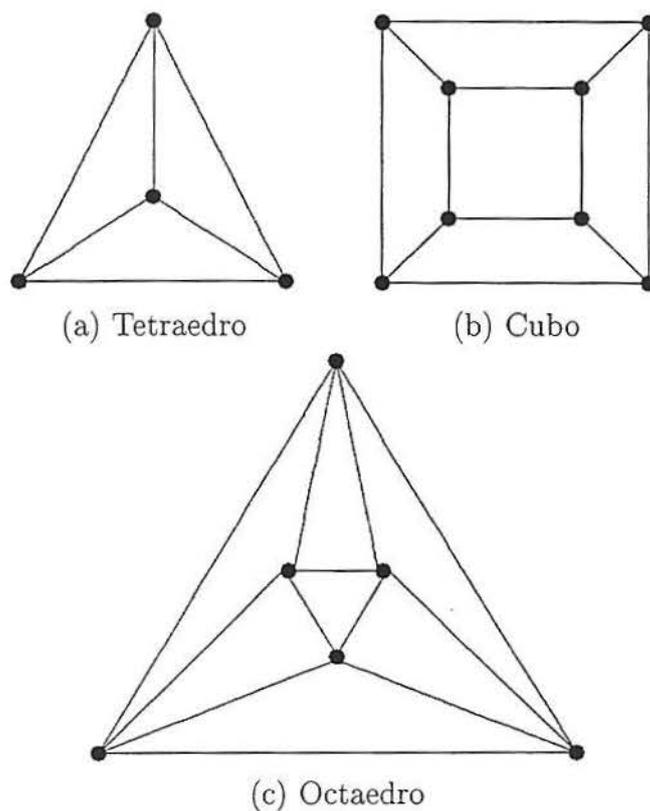
A recíproca deste teorema, também é verdadeira, isto é, se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices e  $m$  arestas e  $n - m = 1$ , então  $G$  é uma árvore. Podemos sempre remover arestas de um grafo conexo até que obtenhamos uma árvore, com o mesmo número de vértices que o grafo original e com  $m'$  arestas. Se  $G$  não é uma árvore então  $m' \neq m$  então  $1 = n - m \neq n - m'$ .

Árvores com mais de um vértice têm outra propriedade interessante: a remoção de qualquer aresta deixa o grafo não-conexo. Isto nos leva a definir uma *ponte* como uma aresta em um grafo conexo cuja remoção faz o grafo não-conexo.

## 4.2 A Fórmula de Euler

A fórmula de Euler é vista na geometria elementar: um poliedro regular que tem  $V$  vértices,  $E$  arestas e  $F$  faces, satisfaz  $V - E + F = 2$ . Existem cinco poliedros regulares e esta fórmula pode ser verificada para cada caso na tabela 4.1. Mas ainda, como este é um resultado puramente combinatório, que não depende da forma real dos poliedros, estes podem ser modificados e desenhados como mapas e grafos no plano. Estes grafos estão desenhados nas figuras 4.2 e 4.3. Observe que cada uma das faces do poliedro tem-se transformado em toda a região externa do mapa.

	$V$	$E$	$F$	$V - E + F$
Tetraedro	4	6	4	2
Cubo	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

Tabela 4.1 *Fórmula de Euler para os cinco sólidos platônicos*Figura 4.2 *Os grafos fundamentais dos cinco sólidos platônicos I*

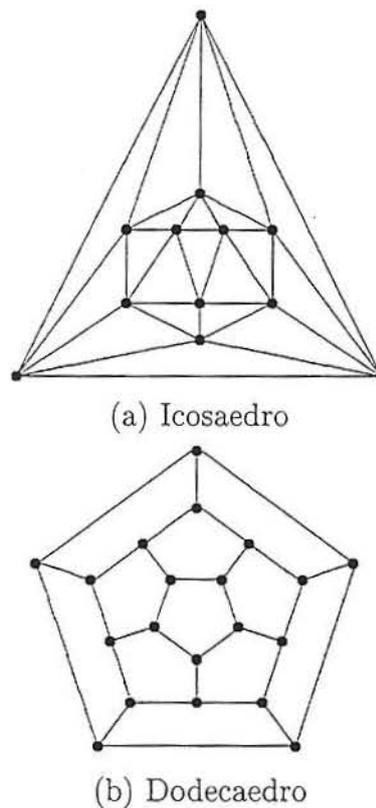


Figura 4.3 *Os grafos fundamentais dos cinco sólidos platônicos II*

O que não é bem conhecido, é que a fórmula de Euler de fato é satisfeita para qualquer grafo planar  $p$ -conexo, ou ainda para qualquer pseudografo planar  $p$ -conexo. Euler anunciou este resultado em 1750, mas admitiu que não podia prová-lo. A sua prova publicada em 1752 na verdade não cobria todos os casos, e a primeira prova completa foi dada por Cauchy em 1813.

**Teorema 4.2. (Teorema de Euler)** *Se  $M$  é um mapa cujo pseudografo  $G$  é planar e  $p$ -conexo, com  $n$  vértices,  $m$  arestas e  $f$  faces, então*

$$n - m + f = p + 1.$$

**Prova:** Provamos o teorema inicialmente para  $p = 1$  e depois usaremos este resultado para obter a fórmula para qualquer  $p$ .

A demonstração para o caso de  $G$  conexo utiliza indução no número de arestas. É trivialmente verdadeira para  $m = 0$ , pois nesse caso,  $G$  é constituído por apenas um vértice e qualquer realização gráfica de  $G$  por um ponto, portanto  $f = 1$  e substituindo estes valores na fórmula anterior, comprovamos a validade da equação no enunciado do teorema (lembre-se que  $p = 1$ ). Suponhamos que a fórmula é válida para grafos com  $m$  arestas, onde  $m \geq 1$ . Considere uma realização planar de  $G$  e suponha que passemos a construí-la a partir de um vértice fixo qualquer, acrescentando sempre arestas incidentes ao subgrafo já construído (isto é possível, pois estamos supondo que  $G$  é conexo). Sejam  $n_i$ ,  $m_i$  e  $f_i$  os números de vértices, arestas e faces da realização após acrescentarmos a  $i$ -ésima aresta, respectivamente. Então,  $n_0 = 1$ ,  $m_0 = 0$  e  $f_0 = 1$ . Em particular,  $m_i = i$ . Pela hipótese de indução temos que o subgrafo de  $G$  obtido após colocarmos  $m - 1$  arestas satisfaz o teorema, portanto

$$n_{m-1} - m_{m-1} + f_{m-1} = 2.$$

Acrescamos agora a  $m$ -ésima aresta. Por construção, uma das extremidades deste arco pertence ao subgrafo com  $m - 1$  arestas já construído. Quanto à outra extremidade, temos duas possibilidades. Uma delas é que a outra extremidade não pertença ao subgrafo. Neste caso acrescentamos um vértice e uma aresta ao subgrafo. Note que este novo vértice pertence a uma das faces do subgrafo com  $m - 1$  arestas, na fronteira da qual se situa a outra extremidade (veja a figura 4.4 - a  $m$ -ésima aresta é a tracejada), caso contrário a  $m$ -ésima aresta interceptaria alguma outra aresta na realização já construída, contradizendo sua planaridade. Sendo assim, a nova aresta não cria uma nova região (não faz parte de um ciclo) e, portanto, o número de faces não se altera. Temos então

$$n_m - m_m + f_m = n_{m-1} + 1 - (m_{m-1} + 1) + f_{m-1} = 2$$

onde a primeira igualdade decorre das observações feitas e a segunda da hipótese de indução.

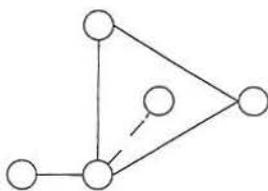


Figura 4.4 *Uma das extremidades não pertence ao subgrafo*

A outra possibilidade é que a  $m$ -ésima aresta ligue dois vértices já pertencentes ao subgrafo construído, com  $m - 1$  arestas conforme indicado na figura 4.5. Neste caso, estas duas extremidades devem estar na fronteira de uma face comum, caso contrário teríamos uma intersecção. Esta face é então subdividida em duas pela  $m$ -ésima aresta enquanto que o número de vértices não se altera. Substituindo, obtemos

$$n_m - m_m + f_m = n_{m-1} + 1 - (m_{m-1} + 1) + (f_{m-1} + 1) = 2,$$

onde a última igualdade decorre, como antes, da hipótese de indução.

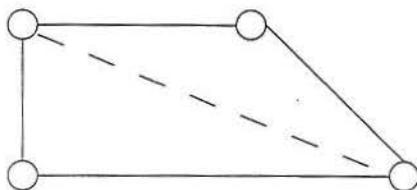


Figura 4.5 *Uma duas extremidades pertencem ao subgrafo*

Passamos agora ao caso  $p > 1$ . Denotemos por  $G_1, G_2, \dots, G_p$ , os componentes de  $G$ , e por  $n_i, m_i$  e  $f_i$  o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, do  $i$ -ésimo componente. Logo, para cada  $i$

$$n_i - m_i + f_i = 2. \tag{4.1}$$

Observe que a realização gráfica planar de cada componente de  $G$  é obtida da realização gráfica de  $G$ , considerando-se cada componente por vez. Para cada  $f_i$ , uma das faces que contribui para o total é a face exterior. No entanto, esta face exterior é contada novamente como a face interior de outro componente ou como a face exterior da realização gráfica planar de  $G$ . Estas possibilidades estão ilustradas nas figuras 4.6 e 4.7 abaixo. A figura fornece duas representações gráficas planares para o grafo  $G$ , composto pelos componentes conexos  $G_1$  e  $G_2$ . Os vértices do componente  $G_1$  não tem sombreado. Na figura 4.6, a face exterior de  $G_1$  coincide com a (única) face interna de  $G_2$ . Na figura 4.7, a face exterior de  $G$  contém as faces exteriores de  $G_1$  e  $G_2$ . Portanto, da soma dos  $f_i$  devemos descontar  $p$  (faces exteriores, uma para cada componente) e somar 1 (a face exterior de  $G$  que após o desconto não foi contada nenhuma vez) para obtermos  $f$ , o número de faces de  $G$ , ou seja,

$$f = \sum_{i=1}^p f_i - p + 1.$$

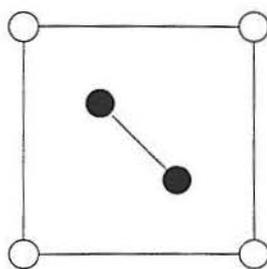


Figura 4.6  $G_1$  na face interior de  $G_2$

Portanto, somando (4.1) para todos os componentes obtemos

$$\sum_{i=1}^p (n_i - m_i + f_i) = n - m + f + p - 1 = 2p \quad (4.2)$$

que, reescrevendo, fornece a equação do enunciado do teorema.  $\square$

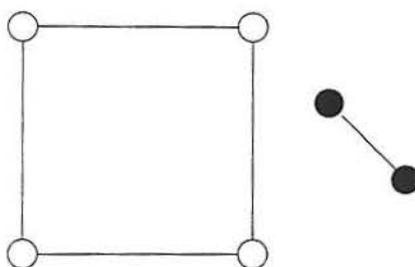


Figura 4.7 Face exterior de  $G$  contém faces exteriores de  $G_1$  e  $G_2$

### 4.3 Aplicações

Existem algumas desigualdades úteis envolvendo  $n$ ,  $m$  e  $f$  para grafos planares, que provém da fórmula de Euler e um simples argumento de contagem. Em alguns casos, mas não em todos, essas desigualdades são generalizadas para multigrafos e pseudografos.

O argumento de contagem básico é o denominado *lema do aperto de mãos*, que afirma que se um grupo de pessoas apertam as mãos então o total de mãos sendo apertadas (contadas com multiplicidade) é par. Isto é óbvio devido a que cada aperto de mãos envolve duas mãos. Segue-se que o número de pessoas que tem apertado as mãos um número ímpar de vezes é par. De modo mais geral, se é somado o número de mãos que cada pessoa apertou, obtém-se duas vezes o número total de apertos de mãos. Este resultado aparece no artigo de Euler de 1736. Na linguagem da teoria de grafos, tem-se:

**Lema 4.1.** *A soma dos graus dos vértices de um pseudografo é igual a duas vezes o número de arestas. Escrevendo  $n_i$  o número de vértices de grau  $i$ , isto pode ser expresso como*

$$\sum_{i=1}^{\infty} in_i = 2m$$

**Prova:** Primeiro, note que esta soma é na verdade uma soma finita, pois não existe vértices de grau maior que  $m$ . Agora divida cada aresta em duas semi-arestas.

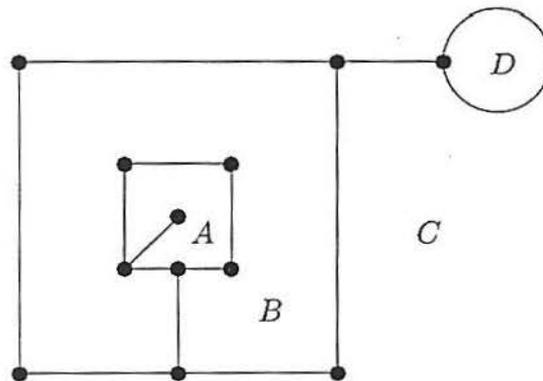
Assim, o número total de semi-arestas é  $2m$ . Por outro lado, cada semi-aresta é incidente com um único vértice. Portanto, o número total de semi-arestas é a soma dos graus dos vértices.  $\square$

Existe uma versão dual disto para pseudografos planares, obtida contando as arestas ao redor das faces. Como cada aresta é por sua vez contada duas vezes, tem-se:

**Lema 4.2.** *Se  $G$  é um pseudografo planar, e  $r_i$  é o número de faces com  $i$  lados, então*

$$\sum_{i=1}^{\infty} ir_i = 2m$$

Nesta fórmula, uma aresta é contada duas vezes se ocorre duas vezes no caminho de fronteira da face. Assim, por exemplo, na figura 4.8 a face  $A$  tem 7 lados, a face  $B$  tem 12 lados, a face  $C$  tem 8 lados e a face  $D$  tem um lado.



As faces  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  tem 7, 12, 8 e 1 aresta(s), respectivamente

Figura 4.8 *Contando arestas de faces incomuns*

Os seguintes são simples corolários das duas formas do lema de aperto de mãos.

**Corolário 4.1.** *Para qualquer pseudografo  $G$ , o grau médio dos vértices é  $2m/n$*

**Corolário 4.2.** *Para qualquer pseudografo  $G$ , o número médio de lados das faces é  $2m/r$ .*

Muitos resultados úteis para grafos planares podem ser obtidos combinando os lemas de aperto de mãos com a fórmula de Euler. Por exemplo:

**Proposição 4.1.** *Em qualquer grafo planar em que todas as faces são triângulos,  $m = 3n - 6$ .*

**Prova:** Como cada face (incluindo a face exterior) tem três arestas, e toda aresta pertence a duas faces, o lema do aperto de mãos diz que  $2m = 3r$ . Substituindo na equação de Euler obtém-se  $6 = 3n - 3m + 3r = 3n - r$ , isto é,  $m = 3n - 6$ .  $\square$

**Teorema 4.3.** *Em qualquer grafo planar com pelo menos 3 vértices,  $m \leq 3n - 6$ .*

**Prova:** Primeiro faça uma realização planar do grafo, e então adicione arestas até ter um grafo conexo  $G$ , que contém um ciclo. Isto é possível, pois existem pelo menos três vértices. Se  $m \leq 3n - 6$  para um novo grafo  $G$ , então isto é verdade para o grafo original. Agora,  $G$  tem pelo menos duas faces, e assim, pelo menos 3 lados para cada face. Portanto,  $3r \leq 2m$ , e pela fórmula de Euler

$$6 = 3r - 3m + 3n \leq 3n - m$$

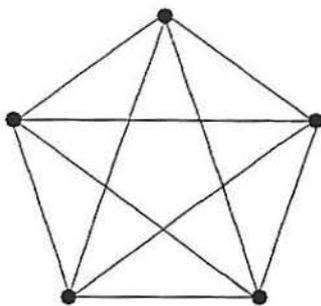
o que prova o resultado.  $\square$

Os resultados anteriores podem ser utilizados em algumas circunstâncias para provar que um grafo não é planar. O grafo *completo sobre  $n$  vértices*, denotado por  $K_n$ , está definido unindo todos os pares de vértices por uma aresta.

**Corolário 4.3.**  *$K_5$  é não planar, (veja a figura 4.9).*

**Prova:**  $K_5$  tem 5 vértices e 10 arestas, de modo que  $n = 5$  e  $m = 10$ , e assim  $m \not\leq 3n - 6$ .  $\square$

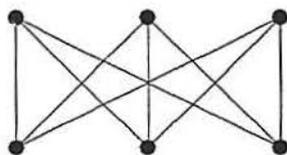
**Corolário 4.4.**  *$K_n$  é não planar para todo  $n \geq 5$ .*

Figura 4.9 O grafo completo  $K_5$ 

Por outro lado,  $K_4$  é planar e é isomorfo ao tetraedro (veja-se figura 4.2(a)).

**Observação:** Möbius originou o problema das quatro cores em 1840. De fato, de acordo com May, 1965, a observação de Möbius era equivalente à afirmação que  $K_5$  é não planar. É um erro comum (compartilhado até por De Morgan em 1852) que isto implica o teorema das quatro cores. Porém, o fato que um grafo planar não contém o subgrafo  $K_5$  simplesmente significa que não existe obstrução *local* para uma 4-coloração dos vértices. Poderia haver ainda uma obstrução *global* à 4-coloração, e isto é a dificuldade essencial do problema.

O grafo completo bipartido  $K_{m,n}$  tem  $m + n$  vértices e  $mn$  arestas. Vamos mostrar que  $K_{3,3}$  é não planar. Este grafo é denominado às vezes o “grafo dos serviços domésticos”: três casas devem possuir três serviços: gás, eletricidade e água. Pode isto ser feito de modo que nenhum fio ou tubulação se cruze? O grafo é como na figura 4.10 e um pouco de raciocínio é convincente para mostrar que não é possível desenhar tal grafo sem que as arestas se cruzem.

Figura 4.10 O grafo dos “serviços domésticos”  $K_{3,3}$ 

**Corolário 4.5.**  $K_{3,3}$  é não planar.

**Prova:** De fato, isto pode ser provado a partir da fórmula de Euler: os ciclos mais curtos no grafo têm comprimento 4 (todos os ciclos em um grafo de duas partes tem comprimento par, pois devem-se alternar entre dois conjuntos de vértices), de modo que se fosse planar, todas as faces teriam que ter pelo menos quatro arestas. Isto implica que  $2m \geq 4r$ , isto é,  $m \geq 2r$ , e substituindo na fórmula de Euler tem-se  $4 = 2n - 2m + 2r \leq 2n - 2m + m$ , que é  $m \leq 2n - 4$ . Porém, no grafo  $K_{3,3}$  tem-se  $2n - 4 = 8$  mas  $m = 9$ . Assim  $m \not\leq 2n - 4$ , de modo que o grafo não pode ser planar.  $\square$

**Corolário 4.6.**  $K_{m,n}$  é não planar sempre que  $m \geq 3$  e  $n \geq 3$ .

**Corolário 4.7.**  $K_{2,n}$  é planar para qualquer  $n$ .

Define-se o contorno de um grafo como o comprimento do ciclo mais curto no grafo. Observe que este é definido só para grafos que contém ciclos. Assim,  $K_5$  tem contorno 3, enquanto que  $K_{3,3}$  tem contorno 4. Com esta definição, pode-se generalizar o teorema 4.3.

**Teorema 4.4.** Em qualquer grafo planar de contorno  $l$ ,

$$m \leq \frac{l}{l-1}(n-2).$$

**Prova:** Primeiro adicione um número suficiente de arestas para fazer o grafo conexo, sem mudar o contorno. Então cada face tem pelo menos  $l$  lados, de modo que o lema do aperto de mãos diz que  $2m \geq lr$ . Agora, substitua  $r \leq \frac{2m}{l}$  na fórmula de Euler  $n - m + r = 2$ , obtendo-se

$$\begin{aligned} n - 2 &= m - r \\ &\geq m - \frac{2m}{l} \\ &\geq \frac{l-2}{l}m \end{aligned}$$

e portanto  $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$  o que prova o resultado.  $\square$

O grafo de Petersen pode ser definido tomando dez vértices correspondentes aos pares não ordenados a partir dos números 1, 2, 3, 4 e 5 e unindo dois vértices quando os pares correspondentes não tem um número em comum.

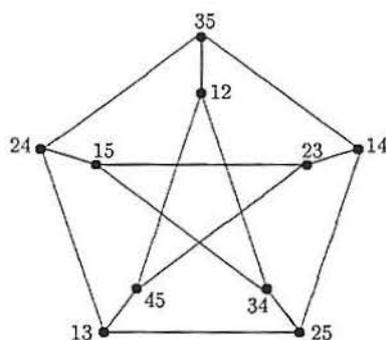


Figura 4.11 O grafo de Petersen

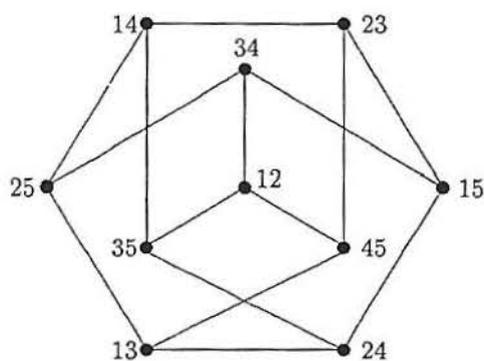


Figura 4.12 Outro desenho do grafo de Petersen

**Corolário 4.8.** *O grafo de Petersen não é planar.*

**Prova:** Por observação, o grafo (veja as figuras 4.11 e 4.12) tem contorno 5 e tem 10 vértices e 15 arestas, mas  $15 \not\leq \frac{5}{3} \times 8$ , de modo que o grafo não é planar.  $\square$

Tem-se provado vários corolários da fórmula de Euler, e tem-se deduzido que certos grafos são não planares. É claro que se  $G$  é um grafo não planar, e  $G$  é um subgrafo de um grafo  $H$ , então  $H$  é não planar. Mas, na verdade, podemos fazer melhor do que isso. Por exemplo, o grafo de Petersen contém um subgrafo que é uma ‘subdivisão’ de  $K_{3,3}$ , e isto mostra que o grafo de Petersen é não planar.

**Corolário 4.9.** *Todo pseudografo conexo planar  $G$  com todos os vértices de grau pelo menos 3 tem uma face com no máximo 5 lados.*

**Prova:** Por contradição. Suponha que todos os vértices tem grau pelo menos 3, e todas as faces tem pelo menos 6 lados. Então os lemas do aperto de mãos implicam que  $2m \geq 3n$  e  $2m \geq 6r$ , e substituindo na fórmula de Euler obtém-se

$$2 = n - m + r \leq \frac{2}{3}m - m + \frac{1}{3}m = 0$$

o que é uma contradição. □

Este resultado pode ser estendido de várias maneiras. Primeiro, tem-se um lema que utiliza somente o lema do aperto de mãos e não utiliza a fórmula de Euler.

**Lema 4.3.** *Em qualquer pseudografo planar,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (6 - i)r_i = 6r - 2m$$

onde  $r_i$  denota o número de faces (regiões) com  $i$  lados.

(Em um multigrafo não existem faces de 1 lado, de maneira que a soma começa em  $i = 2$ . Em um grafo não existem faces com um ou dois lados, de maneira que a soma começa em  $i = 3$ .)

**Prova:** Primeiro observe que a soma  $\sum_{i=1}^{\infty} (6 - i)r_i$  é na verdade uma soma finita, pois o número de faces é finito. Observe que  $\sum_{i=1}^{\infty} ir_i$  é a soma sobre todas as faces, do número de lados dessa face. Em outras palavras, conta todas as arestas exatamente duas vezes, pois cada aresta está na fronteira de exatamente duas faces. (Em certos casos, estas duas faces podem ser na verdade a mesma face.) Assim  $\sum_{i=1}^{\infty} ir_i = 2m$ ,

como no lema 4.2 e similarmente  $\sum_{i=1}^{\infty} r_i = r$ , o número total de faces. Portanto,

$$6r - 2m = 6 \sum_{i=1}^{\infty} r_i - \sum_{i=1}^{\infty} i r_i = \sum_{i=1}^{\infty} (6 - i) r_i.$$

□

**Proposição 4.2.** *Em qualquer pseudografo conexo planar  $G$  com todos os vértices de grau pelo menos 3,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (6 - i) r_i \geq 12.$$

(Se  $G$  é multigrafo a soma começa em  $i = 2$  e se é grafo, em  $i = 3$ .)

**Prova:** Como os vértices têm grau pelo menos 3, tem-se  $2m \geq 3n$ , de modo que  $6n - 4m \leq 0$ . A partir da fórmula de Euler tem-se que

$$12 = 6n - 6m + 6r \tag{4.3}$$

$$= (6n - 4m) + (6r - 2m) \tag{4.4}$$

$$\leq 6r - 2m \tag{4.5}$$

de modo que  $6r - 2m \geq 12$ . Agora aplique o lema 4.3. □

**Corolário 4.10.** *Todo pseudografo conexo planar  $G$  com todos os vértices de grau pelo menos 3, e nenhuma face com menos de 5 lados, tem pelo menos 12 faces com 5 lados.*

**Prova:** Os termos da soma  $\sum_{i=1}^{\infty} (6 - i) r_i$  são todos negativos para  $i > 6$ , e zero para  $i = 6$ , para a soma ser positiva, pelo menos um dos  $r_i$  para  $i \leq 5$  deve ser não nulo. Se, mais ainda, para  $r_i = 0$  para  $i < 5$ , obtém-se  $r_5 \geq 12$ . □

Os resultados anteriores podem ser enunciados na forma requerida para a versão de coloramento de faces de mapas. Todos tem formas 'duais' utilizando vértices no lugar de faces, mas deve-se ter cuidado para obter condições corretas

sobre os grafos. Em particular, a dualidade só faz sentido para grafos planares conexos, de modo que é preciso considerar separadamente a questão de maneira que o resultado permaneça válido para grafos não conexos. Os enunciamos aqui, mas sem prova. Em cada caso, tem-se dado o enunciado para grafos planares mas como a realização planar real é irrelevante, os resultados são válidos para grafos planares.

**Lema 4.4.** *Em qualquer pseudografo,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (6-i)n_i = 6n - 2m$$

onde  $n_i$  denota o número de vértices de grau  $i$ .

**Proposição 4.3.** *Em qualquer grafo conexo e planar com pelo menos três vértices,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (6-i)n_i \geq 12,$$

onde  $n_i$  denota o número de vértices de grau  $i$ . Equivalentemente,

$$\sum_v (6 - \delta(v)) \geq 12,$$

onde a soma é tomada sobre todos os vértices  $v$ . As mesmas desigualdades são verdadeiras sem a condição de conexidade.

**Corolário 4.11.** *Todo grafo conexo e planar tem um vértice com grau no máximo 5. Mais ainda, se não existe vértice com grau menor que 5, então existem pelo menos doze vértices de grau 5.*

*O mesmo é verdadeiro sem a condição de conexidade.*

## 5 O TEOREMA DE KURATOWSKI

A mais famosa caracterização de grafos planares é o teorema de Kuratowski, que fornece uma maneira prática de mostrar que um grafo dado é não planar. Por outro lado, a maneira mais fácil de mostrar que um grafo dado é planar é desenhar um grafo planar que seja isomorfo a ele.

Como já vimos anteriormente, o grafo completo em cinco vértices  $K_5$  é não planar, bem como o grafo completo de duas partes  $K_{3,3}$ . O que o teorema de Kuratowski afirma, de alguma maneira, é que todo grafo não planar ‘contém’ um destes dois grafos.

### 5.1 Introdução

Para enunciar o teorema lembra-se que uma subdivisão de um grafo  $G$  é um grafo obtido a partir de  $G$  mediante um número finito de operações da seguinte forma: introdução de um novo vértice se juntamente com a retirada da aresta  $(v, w)$  e uma substituição por duas arestas  $(v, x)$  e  $(x, w)$ . Pode-se pensar simplesmente como a adição de um vértice no meio de uma aresta já existente. Obviamente se um grafo é planar então qualquer subdivisão dele é planar, e vice-versa, qualquer subdivisão de um grafo não planar é também não planar. Em particular, como  $K_5$  e  $K_{3,3}$  são não planares, segue-se que qualquer grafo que contém uma subdivisão  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  é não planar. O que é notável é que esta é uma condição necessária para que um grafo seja não planar, bem como suficiente. Este último fato é estabelecido no teorema de Kuratowski enunciado na seção a seguir.

## 5.2 Teorema de Kuratowski

**Teorema 5.1. (Kuratowski)** *Se  $G$  é um grafo não planar, então contém um subgrafo  $H$  que é uma subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .*

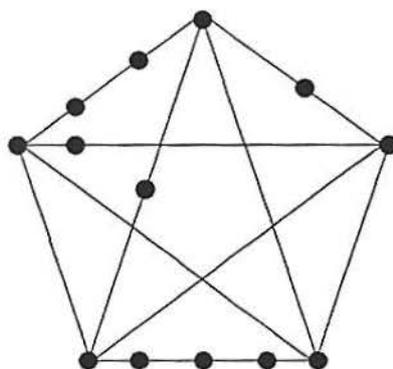


Figura 5.1 Uma subdivisão de  $K_5$

Existe um teorema muito similar devido a Wagner, [44], que usa *contrações* no lugar de subdivisões. Uma *contração elementar* de um grafo é a operação de substituir dois vértices adjacentes por um só vértice: o novo vértice é unido a todos os outros vértices que estavam unidos a um ou ambos vértices originais. Uma *contração* de  $G$  é então qualquer grafo que pode ser obtido a partir de  $G$  mediante uma seqüência finita de contrações elementares.

**Teorema 5.2. (Wagner)** *Se  $G$  é um grafo não planar, então contém um subgrafo  $H$  que tem  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  como uma contração.*

Primeiro prova-se o teorema de Kuratowski. A prova é bastante difícil: a versão dada aqui é uma mistura das provas apresentadas em [22] e [13]. Antes de abordar a prova, fornecem-se algumas definições importantes no contexto do nosso trabalho.

**Definição 5.1.** *A conectividade  $\kappa(G)$  de um grafo  $G$  é o número mínimo de vértices que precisam ser removidos para desconectar o grafo (ou reduzi-lo) a um grafo de 1 vértice, no caso em que  $G$  não possa ser desconectado removendo os vértices).*

Nesta definição, observe que quando um vértice é removido, devem-se remover todas as arestas incidentes a aquele vértice, pois uma aresta não pode existir sem seus extremos. Pode-se provar que os grafos completos são os únicos grafos conexos que não podem ser desconectados removendo os vértices.

**Definição 5.2.** Um grafo é denominado  $k$ -conexo se  $k \leq \kappa(G)$ , isto é, se é requerida a remoção de pelo menos  $k$  vértices (e as arestas incidentes) para desconectar o grafo, ou para transformá-lo em um grafo de 1 vértice.

Em particular, um grafo 1-conexo é a mesma coisa que um grafo conexo. Um subgrafo 1-conexo maximal de um grafo é uma componente conexa de  $G$ . Observe que a definição implica que todo grafo  $k$ -conexo tem pelo menos  $k + 1$  vértices. Também observe que se  $G$  é  $k$ -conexo, então  $G$  é  $l$ -conexo para todo  $l \leq k$ . Os grafos completos  $K_n$  são  $(n - 1)$ -conexos mas não  $n$ -conexos.

De maneira mais geral, se  $G$  tem um vértice  $v$  de grau  $d$ , então a remoção de todos os vizinhos de  $v$  desconectará o grafo, de maneira que  $G$  é no máximo  $d$ -conexo. Em outras palavras,  $\kappa(G) \leq \delta(G)$ . Por exemplo, uma árvore é 1-conexo mas não é 2-conexo. Um ciclo é 2-conexo mas não é 3-conexo. O octaedro (figura 4.2(c)) é 4-conexo mas não 5-conexo. A figura 5.2 mostra o ciclo  $C_6$  que tem conectividade 2 e a roda  $W_7$ , que tem conectividade 3.

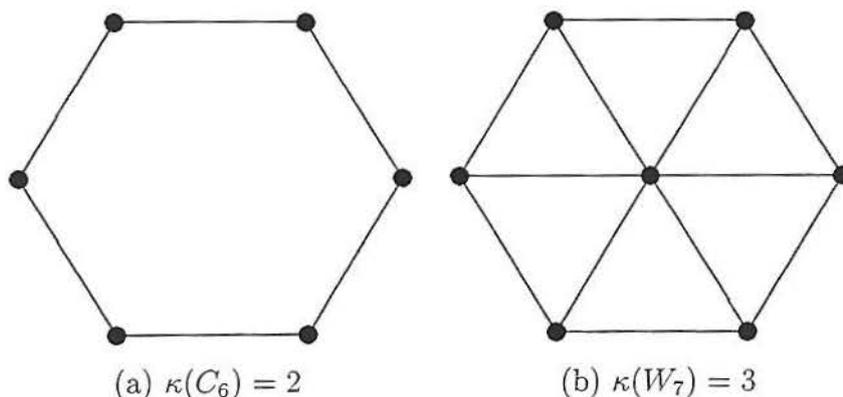


Figura 5.2 Grafos 2-conexos e 3-conexos

Um *vértice de corte* (às vezes chamado de *ponto de corte* ou *vértice de articulação*) de um grafo é um vértice cuja remoção desconecta o grafo. Assim um grafo conexo com um vértice de corte é 1-conexo mas não 2-conexo. Lembre que uma *ponte* é uma aresta cuja remoção desconecta o grafo.

**Definição 5.3.** *Seja  $G$  um grafo. Então os blocos de  $G$  são*

- (a) *os subgrafos 2-conexos maximais, e*
- (b) *as pontes com seus dois extremos.*

Na figura 5.3 se dá um exemplo de um grafo 1-conexo e seus blocos.

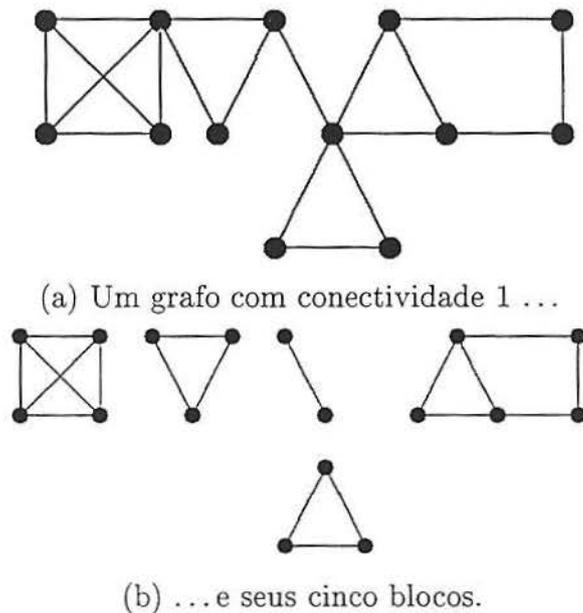


Figura 5.3 Os blocos de um grafo 1-conexo

**Definição 5.4.** *Um grafo  $G$  é  $k$ -conexo por arestas se requer a remoção de pelo menos  $k$  arestas para desconectar o grafo. A conectividade por arestas  $\kappa'(G)$  de um grafo  $G$  é o número mínimo de arestas que precisam ser removidas para desconectar o grafo. Assim,  $G$  é  $k$ -conexo por arestas, se e somente se,  $k \leq \kappa'(G)$ .*

Estes números estão relacionados pelas seguintes desigualdades simples.

**Teorema 5.3.**  $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$ , onde  $\delta(G)$  é o grau mínimo dos vértices de  $G$ .

**Prova:** Para provar a segunda desigualdade, escolha um vértice  $v$  de grau mínimo, isto é, de grau  $\delta(G)$ , e remova todas as arestas incidentes a  $v$ . Isto desconecta  $G$  removendo  $\delta(G)$  arestas, portanto  $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ .

Para provar a primeira desigualdade, consideremos um conjunto desconectante de  $\kappa'(G)$  arestas. Agora, remova um dos dois vértices incidentes a cada uma das tais arestas. Isto força a remover também as arestas, e portanto desconecta o grafo, removendo no máximo  $\kappa'(G)$  vértices. Portanto,  $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ .  $\square$

O próximo lema é crucial para a prova do teorema de Kuratowski. Pode ser pensado como um caso especial do teorema de Menger, que afirma que se  $G$  tem pelo menos  $k + 1$  vértices, então  $G$  é  $k$ -conexo se e somente se todo par de vértices  $u$  e  $v$  está conectado por pelo menos  $k$  trajetórias disjuntas (internamente) (isto é, trajetória que só se interceptam em  $u$  e  $v$ ). A parte ‘se’ do teorema de Menger é fácil: se  $u$  está conectado a  $v$  por pelo menos  $k$  trajetórias disjuntas internamente, então é preciso remover pelo menos um vértice interno de cada uma dessas trajetórias para desconectar  $u$  de  $v$ . Porém, o lema enunciado é o caso  $k = 2$  da parte ‘somente se’, que é o necessário para nosso problema. Este afirma que se  $G$  é 2-conexo, então todo par de vértices está conectado mediante duas trajetórias disjuntas internamente. Em outras palavras

**Lema 5.1.** *Se  $G$  é um grafo 2-conexo, então todo par de vértices pertence a um ciclo.*

**Prova:** Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices diferentes, e suponha que não há ciclo contendo  $u$  e  $v$ . Espera-se uma contradição. Escolha um ponto  $w$  que está em um ciclo contendo  $u$ , tão perto quanto possível de  $v$ , no sentido que exista uma trajetória de  $w$  a  $v$  com um número mínimo de arestas possível. Observe que existe algum ciclo não trivial envolvendo  $u$ , pois senão uma das arestas incidentes a  $u$  é uma ponte, contradizendo

a 2-conexidade. Em particular,  $w \neq u$ . Agora, escolha um ciclo  $u - w - u$  e a trajetória mais curta de  $w$  a  $v$  (veja figura 5.4).

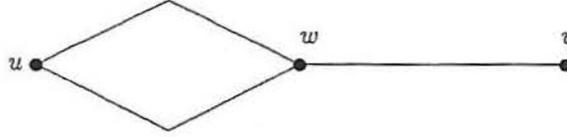


Figura 5.4 Nenhum ciclo passando por  $u$  e  $v$

Agora, a 2-conexidade implica que existe uma trajetória  $P$  de  $u$  a  $v$  que não passa por  $w$ . Esta nova trajetória envolve pelo menos um dos vértices no ciclo  $u - w - u$  (em particular, envolve  $u$ ); seja  $u'$  o último de tais vértices ao longo de  $P$  na direção de  $u$  a  $v$ . Similarmente, a seção da nova trajetória  $P$  de  $u'$  a  $v$  envolve pelo menos um vértice na antiga trajetória  $w - v$  (em particular, envolve  $v$ ); seja  $v'$  o primeiro de tais vértices (veja a figura 5.5).

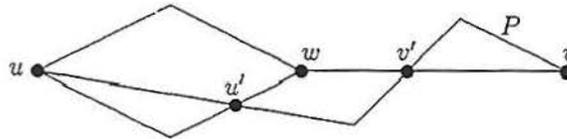


Figura 5.5 Estendendo o ciclo a  $v'$

Então a nova trajetória de  $u'$  a  $v'$  é internamente disjunta de todas as antigas trajetórias, e pode-se ver na figura que existe um ciclo que passa por  $u$  e  $v'$ , tomando a antiga trajetória de  $v'$  a  $w$ , depois o antigo ciclo de  $w$  a  $u$  de  $u$  a  $u'$ , e finalmente a nova trajetória de  $u'$  a  $v'$ . Isto contradiz a escolha de  $w$ , que é o vértice mais próximo de  $v$ .  $\square$

### 5.3 Um contra-exemplo minimal para o teorema de Kuratowski

O teorema de Kuratowski será provado por contradição. Deve-se, então, supor que o teorema é falso, o que significa que existe um grafo não planar que não contém uma subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . Seja  $G$  tal grafo com o número mínimo

possível de arestas. (Tal grafo é um *contra-exemplo minimal* para o teorema de Kuratowski.)

**Lema 5.2.**  $G$  é 3-conexo.

**Prova:** Suponha que  $G$  não é 3-conexo, e escolha vértices  $u$  e  $v$  que desconectam  $G$ . Assim,  $G$  é a união de dois grafos que se interceptam em  $u$  e  $v$ , e possivelmente na aresta  $uv$ . Agora adicione a aresta  $uv$  a cada um destes subgrafos se é que ainda não estão presentes. Então ou pelo menos um dos dois grafos resultantes é não planar, ou ambos são planares.

No primeiro caso, tem-se construído um contra-exemplo menor para o teorema de Kuratowski, o que é uma contradição. No segundo caso, pode-se desenhar cada um dos grafos no plano, com a aresta  $uv$  na face externa. Então, podem-se unir ao longo desta aresta, e produzir um encaixe planar de  $G$ , o que é, por sua vez, uma contradição.  $\square$

Agora, escolha qualquer aresta  $u_0v_0$  de  $G$ , e seja  $F$  o grafo obtido removendo essa aresta. Pela minimalidade de  $G$ , sabe-se que  $F$  é planar. Pois se  $F$  não é planar, então por hipótese, não é um contra-exemplo para o teorema de Kuratowski, de modo que contém um subgrafo que é uma subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  e portanto,  $G$  também contém tal subgrafo.

**Corolário 5.1.**  $F$  é 2-conexo.

**Prova:** Se  $F$  pode ser desconectado removendo um vértice  $x$ , então  $G$  pode ser desconectado removendo  $u_0$  (e portanto a aresta  $u_0v_0$ ) e  $x$ . Isto contradiz o lema 5.2.  $\square$

Em particular, tem-se o seguinte

**Lema 5.3.** O grafo  $F$  contém um ciclo  $C$  que passa por  $u_0$  e  $v_0$ .

**Prova:** Isto segue-se imediatamente do corolário 5.1 e o lema 5.1

## 5.4 A Prova do Teorema de Kuratowski

Com  $G$ ,  $F$  e  $C$  como vimos anteriormente, escolhe-se o ciclo  $C$  e uma realização planar de  $F$ , tal que  $C$  tem tantas regiões interiores quanto possível. Agora  $F$  deve ser tal que é impossível desenhar a aresta  $u_0v_0$  sem cruzar algumas arestas de  $F$ . Isto significa que  $u_0$  e  $v_0$  devem estar separados por uma parte do grafo dentro de  $C$ , ou por uma parte do grafo fora de  $C$ .

Para fazer estas noções precisas, considere o subgrafo 'externo'  $F_1$  que consiste de todos os vértices e arestas fora de  $C$ , junto com aqueles vértices de  $C$  que são incidentes a tais arestas. Define-se uma 'parte externa' como uma componente conexa de  $F_1$ . Por conveniência, divide-se o ciclo  $C$  em uma trajetória esquerda  $C_l$  no sentido anti-horário desde  $u_0$  até  $v_0$ , e uma trajetória direita  $C_r$  no sentido horário desde  $u_0$  até  $v_0$  (veja a figura 5.6).

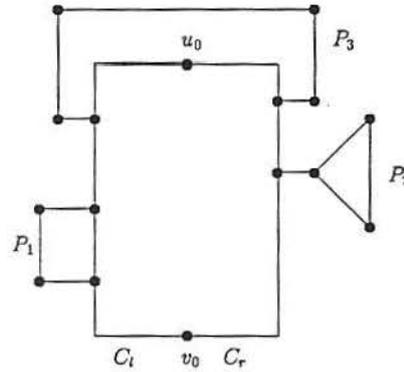


Figura 5.6 *Começando a prova do teorema de Kuratowski*

**Lema 5.4.** *Cada parte externa consiste de uma só aresta com seus dois extremos, um dos quais está em  $C_l$  e o outro em  $C_r$ .*

**Prova:** Primeiro, note que uma parte externa  $P$  não pode encontrar  $C_l$  em mais de um vértice, pois se assim fosse,  $C$  poderia ser modificado para conter mais regiões, dando uma volta por  $P$  (veja a parte  $P_1$  na figura 5.6). Similarmente,  $P$  não pode encontrar  $C_r$  em mais de um vértice. Portanto,  $P$  encontra  $C_l$  e  $C_r$  em exatamente um vértice, pois senão  $P$  encontra  $C$  em um só vértice, e então esse vértice é um

vértice de corte de  $F$ , contradizendo o fato que  $F$  é 2-conexo (veja a peça  $P_2$  na figura 5.6). De fato,  $P$  deve ser uma só aresta, pois senão seus dois extremos em  $C$  não só desconectam  $F$ , mas também desconectam  $G$ , contradizendo o fato que  $G$  é 3-conexo (veja a parte  $P_3$  na figura 5.6).  $\square$

Agora pode-se ordenar as partes externas verticalmente, de modo que  $P_i$  encontre  $C_l$  em  $u_i$ , e encontre  $C_r$  em  $v_i$  de tal maneira que  $C_l$  passe por  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, v_0$  um por vez, e  $C_r$  passe por  $u_0, v_1, v_2, \dots, v_n, v_0$  um por vez (veja a figura 5.7).

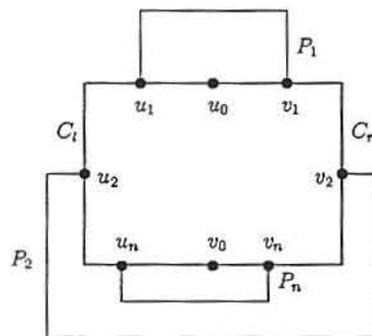


Figura 5.7 Algumas peças externas de  $F$

A seguir, considere-se as partes internas de  $F$ , definidas de maneira análoga. Aquelas que não separam nenhum  $u_i$  do  $v_i$  correspondente podem ser redesenhadas fora de  $C$ , pois não cruzam nenhuma das partes externas  $P_i$ . Se, após ter feito isso, nenhuma das partes internas separa  $u_0$  de  $v_0$ , então pode-se desenhar a aresta  $u_0v_0$  dentro de  $C$  sem transgredir a planaridade (veja a figura 5.8). Isto é uma contradição. Portanto, pelo menos uma das partes internas separa  $u_0$  de  $v_0$ , e simultaneamente algum  $u_i$  de  $v_i$ . Pode-se supor que  $i = 1$ .

Pode-se separar em casos de acordo com onde esta parte interna encontra o ciclo  $C$ . Sejam  $w_0$  e  $x_0$  lugares onde ela separa  $u_0$  de  $v_0$ , e sejam  $w_1$  e  $x_1$  lugares onde ela separa  $u_1$  de  $v_1$ . Para sermos claros, suponha que  $w_1$  está entre  $u_1$  e  $v_1$  no sentido anti-horário ao redor de  $C$ , e  $x_1$  está entre  $v_1$  e  $u_1$ .

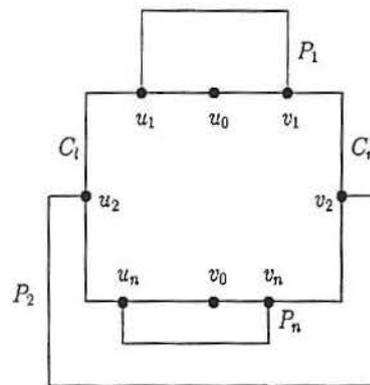


Figura 5.8 *Desenhando  $u_0v_0$  dentro de  $C$*

Observe que existe uma simetria de toda a situação mudando os índices 0 e 1. Pois se é substituído  $u_0v_0$  e desenhado fora do ciclo  $C$ , então o problema é prevenir o desenho da aresta  $u_1v_1$  dentro de  $C$ . Isto pode ser utilizado para reduzir o número de casos que precisam ser considerados.

**Caso 1.**  $w_1$  e  $x_1$  estão sobre lados opostos de  $u_0v_0$ ,

**Caso 2.**  $w_1$  e  $x_1$  estão sobre o mesmo lado de  $u_0v_0$ ,

**Caso 3.** um destes pontos é igual a  $u_0$  ou  $v_0$ ,

**Caso 4.** ambos esses pontos são iguais a  $u_0$  ou  $v_0$ .

Em cada caso, pode-se remover do grafo tanto quanto quiser, e ignorar as subdivisões de arestas (vértices de grau 2), até obter  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . Isto vai mostrar que em cada caso tem-se um subgrafo que é uma subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  (veja as figuras 5.9 e 5.10).

**Caso 1.** Neste caso, obtém-se  $K_{3,3}$ .

**Caso 2.** Neste caso, a peça interna deve também separar  $u_0$  e  $v_0$  sobre o outro lado. Encontra o ciclo em  $v_1$  ou encontra ele em algum outro ponto. No primeiro caso (caso 2a), omite-se a trajetória  $v_1v_0$  e obtém-se uma

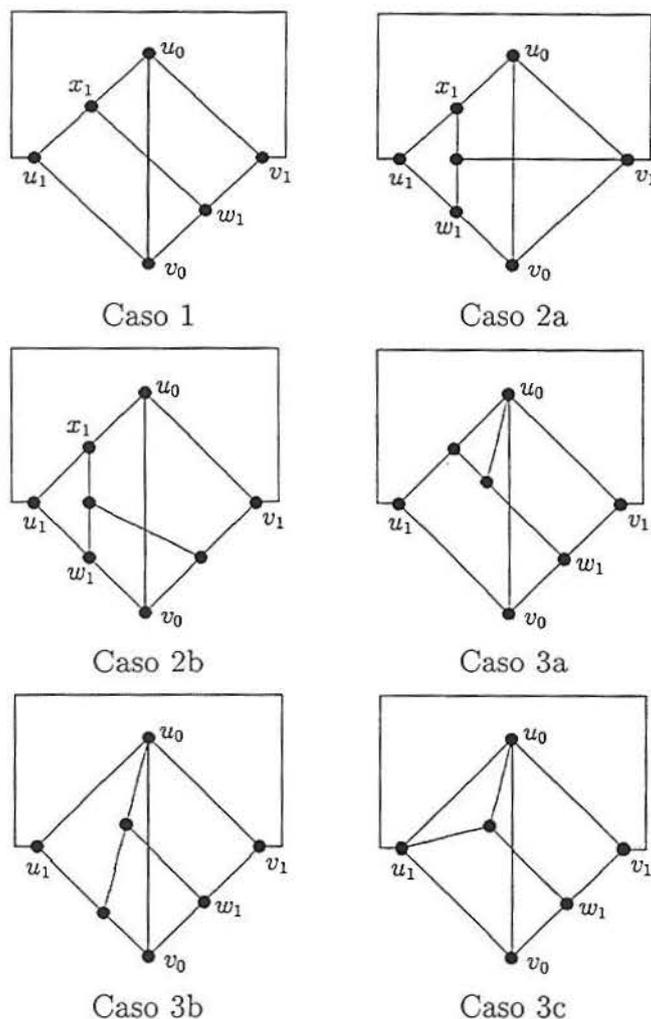


Figura 5.9 Casos 1-3 na prova do teorema de Kuratowski

subdivisão de  $K_{3,3}$ . No segundo caso (caso 2b), existe um subgrafo parecido ao caso 1.

**Caso 3.** Sem perda de generalidade, tem-se que  $x_1 = u_0$ , e  $w_1$  está debaixo de  $u_1$  e  $v_1$  no ciclo, de modo que sem perda de generalidade  $w_1$  está entre  $v_0$  e  $v_1$ . Para separar  $u_0$  de  $v_0$ , esta peça encontra  $C$  também em  $C_l$ , encima ou debaixo ou em  $u_1$ . O primeiro caso (caso 3a) contém o caso 1 como um subgrafo, enquanto que o segundo (caso 3b) é equivalente ao caso 2a quando  $u_0$  e  $v_0$  são trocados mutuamente por  $u_1$  e  $v_1$ . O

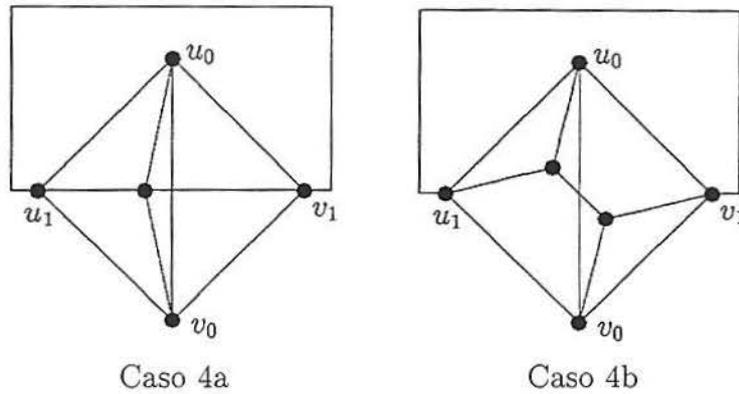


Figura 5.10 Casos 4 na prova do teorema de Kuratowski

terceiro caso (caso 3c) dá uma subdivisão de  $K_{3,3}$  quando é removida a trajetória  $u_0u_1$ .

**Caso 4.** Por simetria, (isto é, trocando  $u_0$  por  $u_1$  e  $v_0$  por  $v_1$  se necessário) podem ser tratados todos os casos exceto quando  $w_0$  e  $x_0$  são iguais a  $u_1$  ou  $v_1$ . Agora existem dois casos: ou as trajetórias  $w_1x_1$  e  $w_0x_0$  se encontram em um só ponto, que dá uma subdivisão de  $K_5$  (caso 4a), ou se encontram em uma trajetória não trivial, em cujo caso tem-se uma subdivisão de  $K_{3,3}$  (caso 4b).

Isto conclui a prova do teorema de Kuratowski. □

Agora, considera-se o teorema de Wagner, [44], o teorema 5.2. Historicamente, este foi provado primeiro como um corolário do teorema de Kuratowski, mas na próxima seção se dará uma prova direta.

Antes de provar o teorema, observe que se  $G$  é planar, e  $G'$  é o grafo obtido a partir de  $G$  contraindo a aresta  $vw$ , então  $G'$  pode ser desenhado no plano contraindo fisicamente a aresta  $vw$  até que  $v$  e  $w$  coincidam. Portanto,  $G'$  é também planar. Segue-se, por indução, que qualquer contração de um grafo planar é planar.

**Teorema 5.4. (Wagner)** *Um grafo  $G$  é planar se e somente se não contém subgrafo algum que tenha  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  como contração.*

**Prova:** Se  $G$  não é planar, então pelo teorema de Kuratowski (teorema 5.1)  $G$  contém um subgrafo  $H$  que é uma subdivisão de  $K$ , onde  $K$  é ou  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . Então  $H$  pode ser contraído em  $K$  simplesmente contraindo as arestas sub-divisórias uma por vez. Assim  $G$  contém um subgrafo que tem  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  como uma contração.

Reciprocamente, se  $H$  contrai-se em  $K$  e  $K$  não é planar, então  $H$  não pode ser planar, pois se fosse, então  $K$  poderia ser planar pelas observações anteriores.  $\square$

Por exemplo, considere o grafo de Petersen. Se são contraídas as cinco arestas que conectam o 5-ciclo externo com o interno, então obtém-se  $K_5$  (veja figura 5.11). Portanto, o grafo de Petersen não é planar.

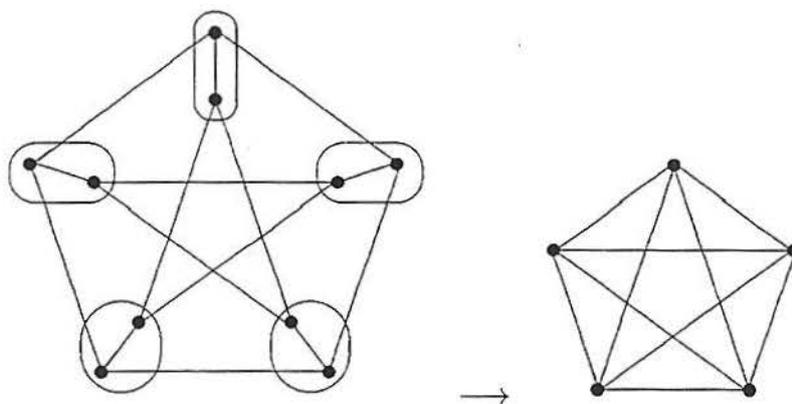


Figura 5.11 *Contraíndo o grafo de Petersen em  $K_5$*

**Observação:** Observe que tem-se utilizado o fato que se  $G$  é uma subdivisão de  $H$ , então  $G$  contrai-se em  $H$ . Vale a pena observar que o recíproco disto é falso (veja a seção seguinte).

## 5.5 Uma Abordagem Alternativa

Embora o teorema de Kuratowski é mais antigo que o teorema de Wagner, e historicamente o último foi deduzido a partir do primeiro, talvez é mais fácil provar o teorema de Wagner primeiro, e deduzir o teorema de Kuratowski a partir

dele. Esta é a abordagem adotada por Diestel, cuja prova em linhas gerais é como segue.

Toma-se  $G$  como o contra-exemplo minimal para o teorema de Wagner. Assim  $G$  é um grafo não-planar minimal que não tem subgrafo algum que se contrai em  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . Em particular, se é contraída qualquer aresta de  $G$ , então pode-se obter um grafo planar, pois obviamente não pode-se ter subgrafo algum que se contrai em  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .

Primeiro, mostra-se que  $G$  é 3-conexo, da mesma maneira que na seção 5.3.

**Lema 5.5.** *Qualquer contra-exemplo minimal para o teorema de Wagner é 3-conexo.*

**Prova:** Como no lema 5.2. □

A seguir, mostra-se como pode-se escolher uma aresta a ser contraída, de tal maneira que o grafo resultante é ainda 3-conexo.

**Lema 5.6.** *Se  $G$  é qualquer grafo 3-conexo diferente de  $K_4$ , então  $G$  tem uma aresta tal que o grafo resultante a partir de  $G$  contraindo aquela aresta é ainda 3-conexo.*

**Prova:** Se não, então contraindo *qualquer* aresta em  $G$  resulta em um grafo que não é 3-conexo. De modo que se  $uv$  é qualquer aresta em  $G$ , então existe um vértice  $x$  tal que  $\{u, v, x\}$  desconecta  $G$ , em componentes  $G_1, G_2, \dots$ . Mais ainda, cada um dos  $u, v, x$  é adjacente a algum vértice em cada componente  $G_i$ , pois senão algum subconjunto próprio de  $\{u, v, x\}$  já teria desconectado  $G$ .

Agora, escolha  $uv$  e  $x$  de maneira que exista uma componente  $G_1$  com o menor número possível de vértices, e escolha  $y$  adjacente a  $x$  em  $G_1$ . Aplicando o mesmo argumento agora na aresta  $xy$ , encontra-se um vértice  $z$  tal que  $\{x, y, z\}$  desconecta  $G$ , em componentes  $H_1, H_2, \dots$ . Agora mostramos que uma dessas componentes tem menos vértices que  $G_1$ , e esta contradição provará o lema (veja a figura 5.12).

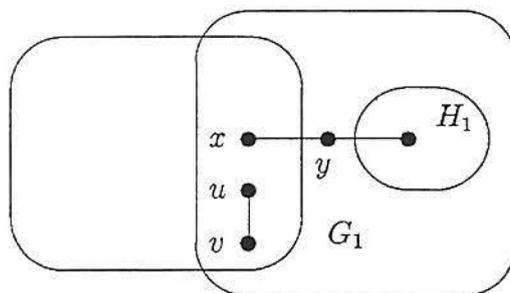


Figura 5.12 A prova do lema 5.6

Seja  $H_1$  uma componente que não contém  $u$ , e portanto não contém  $v$  (pois  $u$  e  $v$  são adjacentes). Agora,  $H_1$  contém pelo menos um vizinho de  $y$ , mas não contém  $u$ ,  $v$  ou  $x$ , de modo que está inteiramente contido em  $G_1$ . De outro lado,  $H_1$  não contém  $y$ , de modo que  $H_1$  é um subgrafo de  $G_1$ , com estritamente menos vértices, o que prova o resultado.  $\square$

**Prova:** (do teorema de Wagner.) Seja  $G$  um contra-exemplo minimal, de modo que, pelo lema 5.5,  $G$  é 3-conexo, e certamente  $G$  não é  $K_4$ , de maneira que pelo lema 5.6 pode-se escolher uma aresta  $uv$  em  $G$  tal que contraindo  $uv$  produz-se um grafo 3-conexo  $F$ . Pela minimalidade de  $G$ , sabe-se que  $F$  é planar, de modo que é desenhado no plano, com um vértice  $w$  correspondente aos dois vértices  $u$  e  $v$  em  $G$ . Então as faces incidentes a  $w$  juntas formam uma região  $R$  do plano, que encerra  $w$ , e com um ciclo  $C$  como fronteira. Agora tenta-se desenhar  $u$  e  $v$  dentro de  $R$ , e uní-los aos vértices apropriados do ciclo.

Primeiro, desenhe  $u$  e una-o aos seus vizinhos em  $C$  – sejam estes  $u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1} = u_1$  em ordem cíclica ao redor de  $C$ . Agora, separe os casos de acordo em qual parte do ciclo caem os vizinhos de  $v$ . Observe que  $v$  tem pelo menos dois vizinhos  $v_1$  e  $v_2$  no ciclo, pois o único outro vizinho é  $u$ , e  $G$  é 3-conexo. Se existem vizinhos  $v_1$  estritamente entre  $u_i$  e  $u_{i+1}$  e  $v_2$  entre  $u_j$  e  $u_{j+1}$  com  $i \neq j$ , então contraindo as arestas do ciclo entre  $u_{i+1}$  e  $u_j$  se necessário, obtém-se um  $K_{3,3}$  no conjunto de vértices  $\{u, v_1, v_2\} \cup \{v, u_i, u_{i+1}\}$  (veja a parte superior da figura 5.13).

A mesma coisa acontece se  $v_1$  é como antes e  $v_2 = u_j$ , com  $j \neq i, i + 1$  (veja o segundo quadro na figura 5.13).

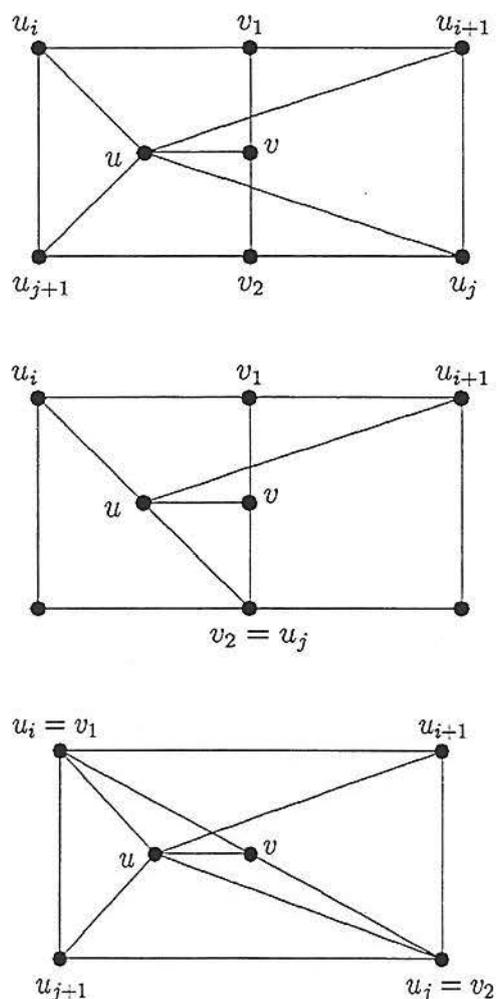


Figura 5.13 Três casos na prova do teorema de Wagner

De outra maneira, todos os vizinhos de  $v$  no ciclo são vizinhos de  $u$ . Se dois são não adjacentes, por assim dizer  $v_1 = u_i$  e  $v_2 = u_j$ , então obtém-se um  $K_{3,3}$  sobre o conjunto de vértices  $\{u, v_1, v_2\} \cup \{v, u_{i+1}, u_{j+1}\}$  (veja o terceiro quadro na figura 5.13). Se todos são adjacentes, então ou existem só dois deles, por assim dizer  $v_1 = u_i$  e  $v_2 = u_{i+1}$  e é fácil desenhar  $v$  e todas as arestas requeridas dentro do triângulo  $uu_iu_{i+1}$ ; ou existem três deles, e o ciclo é um triângulo  $u_1u_2u_3$ , de maneira que os vértices  $u, v, u_1, u_2, u_3$  formam um  $K_5$  (veja a figura 5.14).  $\square$

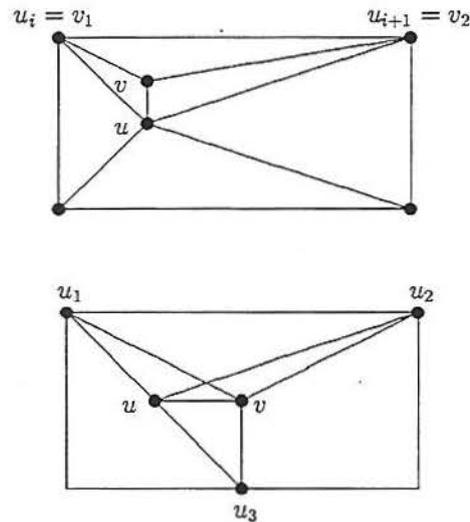


Figura 5.14 Mais dois casos na prova do teorema de Wagner

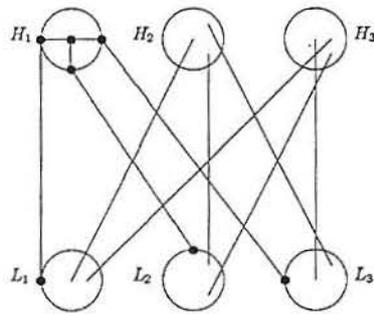
Agora, pode-se deduzir o teorema de Kuratowski a partir do teorema de Wagner. Tudo o que tem-se a mostrar é que se  $H$  contrai-se em  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  então  $H$  contém uma subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ . Observe-se, porém, que a contração e a subdivisão não necessariamente são as mesmas. Por exemplo, o grafo de Petersen contrai-se em  $K_5$  mas não contém uma subdivisão de  $K_5$ .

**Teorema 5.5.** *Se  $H$  é um grafo que contrai-se em  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ , então  $H$  contém uma subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .*

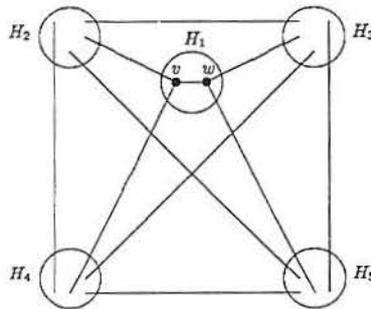
**Prova:** Primeiro suponha que  $H$  contrai-se em  $K_{3,3}$ . Assim,  $H$  contém seis subgrafos induzidos conexos, por assim dizer,  $H_1, H_2, H_3, L_1, L_2, L_3$  e arestas entre cada  $H_i$  e  $L_j$ , para todo  $i$  e  $j$ , mas nenhuma aresta entre qualquer  $H_i$  e  $H_j$ , ou entre  $L_i$  e  $L_j$ , para  $i \neq j$  (veja a figura 5.15(a)). Se é escolhido um conjunto adequado entre estes subgrafos, então em cada subgrafo, deseja-se unir os extremos das arestas apropriadas. De qualquer maneira que se proceda, termina-se com três trajetórias se encontrando em um vértice. O subgrafo que tem-se desenhado conectando estes seis vértices é então uma subdivisão de  $K_{3,3}$ .

Agora, suponha que  $H$  contrai-se em  $K_5$ , e que estes subgrafos correspondentes aos vértices dos  $K_5$  são  $H_1, \dots, H_5$ . Em cada  $H_i$  existem agora duas

possibilidades sobre como podem essas quatro arestas entrantes podem ser unidas. Ou obtém-se quatro trajetórias se encontrando em um só ponto, ou tem-se duas trajetórias se encontrando em um vértice  $v$ , e as outras duas se encontrando em um vértice  $w$ , unido por uma trajetória desde  $v$  até  $w$ . Se todos estes cinco subgrafos tem as quatro trajetórias se encontrando em um só ponto, então tem-se uma subdivisão de  $K_5$ . De outra maneira, tem-se um subgrafo consistindo de  $v$  e  $w$  a partir, por exemplo, de  $H_1$ , e todos os  $H_2, H_3, H_4$  e  $H_5$ , que se contrai em  $K_{3,3}$ , do modo que chega-se ao primeiro caso (veja a figura 5.15(b)).  $\square$



(a)  $H$  contrai-se em  $K_{3,3}$



(b)  $H$  contrai-se em  $K_5$

Figura 5.15 Dois casos na prova do teorema 5.5

## 6 CONCLUSÃO

A teoria de grafos é utilizada na matemática aplicada como uma ferramenta analítica para o modelamento e determinação de resultados teóricos e práticos, tais como algoritmos para serem aplicados em uma variedade de áreas científicas, dentre elas a química, física, biologia, engenharia elétrica, pesquisa operacional.

Quando falamos em grafos, logo nos vem à tona o problema da ponte de Königsberg que impulsionou a teoria de grafos. Mas, o problema que desafiou gerações de matemáticos e que teve a sua solução envolvendo conceitos da teoria de grafos foi o *teorema das quatro cores*, que é um problema de coloração de mapas, isto é, um problema topológico. Para isto foi necessário uma fundamentação teórica dos conceitos básicos de grafos e mapas. Tal empreendimento foi cumprido nos capítulos 2 e 3.

Como parte fundamental das implicações geométricas, foi demonstrada detalhadamente a fórmula de Euler, que tem origem geométrica, e que é uma das fórmulas matemáticas mais elegantes e úteis da geometria, além de ser uma condição necessária para a planaridade. Mediante esta fórmula é possível demonstrar a não planaridade de muitos grafos que aparecem em situações reais, tais como o grafo dos serviços domésticos,  $K_{3,3}$  e o grafo de Petersen e o  $K_5$ . Diversas outras aplicações e conseqüências da fórmula de Euler foram descritas no capítulo 4.

Em relação às implicações topológicas da planaridade, aborda-se o problema de coloração de mapas. São enunciados e provados resultados sobre a coloração com uma, duas e três cores. Para um número de cores são descritas ferramentas analíticas tais como o número de Heawood. Destaca-se que a partir do erro de Kempe (1879) (na tentativa de provar o teorema das quatro cores), Heawood provou a suficiência de cinco cores para colorir um grafo planar arbitrário [37]. Todos estes fatos são descritos no capítulo 3.

Foram demonstrados resultados clássicos envolvendo a planaridade de um grafo que são importantes, não só pelo resultado em si mas principalmente pelas técnicas empregadas nas demonstrações. São eles o *teorema de Kuratowski*, que um grafo não planar contém uma subdivisão  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  e o teorema de Wagner que enuncia que um grafo não planar contém uma contração de  $K_{3,3}$  ou de  $K_5$ .

Neste trabalho tem-se destacado o conceito de planaridade pela simplificação que o mesmo oferece na modelagem e resolução de problemas de interesse atual.

## Referências Bibliográficas

- [1] Appel, K., The proof of the four-colour theorem. *New Scientist*, V. 172, pp. 154-155, 1976.
- [2] Appel, K. & Haken, W. The solution of the four-colour-map problem. *Scientific American*, V. 237, 4, pp. 108-121, 1977.
- [3] Appel, K. & Haken, W. Every planar map is four colourable. *Contemporary Mathematics*, V. 98, American Mathematical Society, 1989.
- [4] Appel, K. & Haken, W. Every planar map is four colourable, Part I: discharging, *Illinois Journal of Mathematics*, V. 21, pp. 429-490, 1977.
- [5] Appel, K. & Haken, W. Every planar map is four colourable, Part II: reducibility, *Illinois Journal of Mathematics*, V. 21, pp. 491-567, 1977.
- [6] Battista, G., Eades, P., Tamassia, P. & Tollis, I. *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [7] Bezhad, M. , Chartrand, G., Allyn & Bacon, *Introduction to the Theory of Graphs*, Boston, 1971.
- [8] Birkhoff, G. D. A determinant formula for the number of ways of coloring a map, *Annals of Mathematics (2)*, V. 14, pp. 42-46, 1912-3.
- [9] Birkhoff, G. D. The reducibility of maps, *American Journal of Mathematics* , V. 35, pp. 115-128, 1913.
- [10] Boaventura, P. O. *Teoria e Modelos de Grafos*, Edgar Blucher- São Paulo, 1979.
- [11] Boaventura, P. O. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*, Edgar Blucher- São Paulo, 1996.

- [12] Bollobás, B.      *Graph Theory - An Introductory Course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1979.
- [13] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R.      *Graph Theory with Applications*, Macmillan, 1976.
- [14] Brooks, R. L.,      On Colouring the Nodes of a Network, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 37, pp. 194-197, 1941.
- [15] Cayley, A.      On the colouring of maps, *Proceedings of the London Mathematical Society*, V. 9, p. 148, 1878.
- [16] Diestel, R.      *Graph Theory*, Springer, 1997, 2nd. Ed., 2000.
- [17] Even, S.      *Graph Algorithms*, Computer Science Press, 1979.
- [18] Foulds, L. R.      *Graph theory applications*, New York: Springer-Verlag, 1992.
- [19] Furtado, A. L.      *Teoria dos Grafos - Algoritmos*, PUC-RJ/LTC, 1973.
- [20] Franklin, P.,      The Four Colour Problem, *Scripta Math.*, vol. 6, pp. 149-156 and 197-210, 1939.
- [21] Fritsch, R., Fritsch, G. & Peschke, J.      *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof*, Springer-Verlag, 1998
- [22] Harary, F.      *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.
- [23] Jensen, T. R. & Toft, B.,      *Graph coloring problems*, Wiley, 1995.
- [24] Kempe, A. B.      On the geographical problem of the four colours, *American Journal of Mathematics*, V. 2, pp. 193-200, 1879
- [25] Kuratowski, K.      Sur le problème des courbes gauche en topologie, *Fundamenta Mathematicae*, V. 15, pp. 271-283, 1930.
- [26] Liu, C. L.      *Introduction to Combinatorial Mathematics*, New York: McGraw Hill, 1968.

- [27] Lucchesi, C. L., *Introdução à Teoria dos Grafos*, IMPA 12 CBM, Poços de Caldas, 1979.
- [28] Lucchesi, C. L., Contributions of Jayme Luiz Swarcfiter to Graph Theory and Computer Science, *Journal of the Brazilian Computer Society*, Vol. 7 N. 3, April 2002.
- [29] May, K. O. The origin of the four-colour conjecture, *Isis*, V. 56, pp. 346-348, 1965.
- [30] Morgado, A. C. O., Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P. & Fernandes, P., *Análise Combinatória e Probabilidade*, Rio de Janeiro: IMPA, 1991.
- [31] Ore, O., *The Four-Colour Problem*, Academic Press, New York, 1967.
- [32] Polya, G., Tarjan, R. E. & Woods, D. R. *Introduction to Combinatorics*, Boston: Birkhauser, 1983.
- [33] Petersen, J. Sur le théorème de Tait, *L'Intermédiaire de Mathématiciens*, V. 5, pp. 225-227, 1898.
- [34] Ringel, G. & Youngs, J. W. T. Solution of the Heawood Map Coloring Problem, *Proc. Nat'l Acad. Sci*, vol 60, pp 438-445, 1968.
- [35] Robertson, N., Sanders, D. P., Seymour, P. & Thomas, R. A new proof of the four-colour theorem, *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, V. 2, pp. 17-25, 1996.
- [36] Saaty, T. L., Remarks on the Four Colour Theorem, the Kempe Catastrophe, *Math. Mag.*, vol. 40, pp. 31-36, 1967.
- [37] Saaty, T. L. & Kainen, P. C. *The Four-Colour Problem: Assaults and Conquest*, Dover, 1986.
- [38] Santos, J. P .O., Mello, M. P. & Murari, I. *Introdução à Análise Combinatória*, Editora da UNICAMP, 1998.

- [39] Szwacfter, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*, Rio de Janeiro, Campus, 1984.
- [40] Toranzos, F. A., *Introducción a la Teoría de Grafos*, Programa Regional de Desarrollo Científico Y Tecnológico, OEA, 1976.
- [41] Townsend, M. *Discrete Mathematics: Applied combinatorics and graph theory*, Menlo-Park: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1987.
- [42] Veloso, P., Santos, C., Azeredo, P. & Furtado, A. *Estrutura de Dados*, Ed. Campus Ltda, 1993.
- [43] Villas, M. V., Ferreira, A. G. M., Leroy, P. G., Miranda, C. & Bookman, C. L. *Estrutura de Dados: Conceitos e Técnicas de Implementação*, Ed. Campus, Rio de Janeiro, 1998.
- [44] Wagner, K., Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, *Jahresbericht Deutsch. Math-Verein.*, V. 46, pp. 26-32, 1936.
- [45] Wilson, R. A. *Graphs, Colourings and the Four-Colour Theorem*, Oxford University Press, 2002.
- [46] Wilson, R. J. *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1985.
- [47] Wilson, R. J., An Euler trail through Königsberg, *Journal of Graph Theory*, V. 10, pp. 265-275, 1986.