

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Considerações Numéricas Relativas
à Solução de Escoamentos
Incompressíveis Externos baseadas
no Método de Runge-Kutta**

por

Denise da Rosa Araujo

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli
Orientador

Porto Alegre, fevereiro de 2002.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Araujo, Denise da Rosa

Considerações Numéricas Relativas à Solução de Escoamentos Incompressíveis Externos baseadas no Método de Runge-Kutta / Denise da Rosa Araujo.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2002.

69 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002.

Orientador: De Bortoli, Álvaro Luiz

Dissertação: Matemática Aplicada
Modelo, Dissertação

**Considerações Numéricas Relativas
à Solução de Escoamentos
Incompressíveis Externos baseadas
no Método de Runge-Kutta**

por

Denise da Rosa Araujo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli

Banca examinadora:

Prof. Dra. Eleni Bisognin
Unifra-Santa Maria

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
UFRGS/PPGMAp

Prof. Dr. Rudnei Dias da Cunha
UFRGS/PPGMAp

Dissertação apresentada e aprovada em
21 de fevereiro de 2002.

Prof. Vilmar Trevisan
Coordenador

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	III
LISTA DE SÍMBOLOS	V
RESUMO	VII
ABSTRACT	VIII
1 INTRODUÇÃO	1
2 EQUAÇÕES GOVERNANTES	8
2.1 Equações para as velocidades	8
2.2 Equação para a pressão	10
2.3 Equações adimensionais	12
3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO	14
3.1 Contornos imersos x Coordenadas generalizadas	14
3.2 Importância da escolha apropriada da malha	19
3.3 Transformação de coordenadas	20
3.4 Diferenças finitas	25
3.5 Dissipação artificial	30
3.6 Métodos de solução	32
3.7 Condições de contorno	34
3.8 Critério de convergência	39
3.9 Fluxograma do código computacional	40
4 RESULTADOS	42
4.1 Resultados Bidimensionais	42
4.1.1 Seção de um Cilindro	42
4.1.2 Geometria complexa - Seção de um tubarão	52

4.2 Resultados Tridimensionais	54
4.2.1 Esfera	55
4.2.2 Elipsóide	58
5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	61
BIBLIOGRAFIA	64

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Malhas cartesianas para um cilindro e um tuboarão	15
Figura 3.2	Malha cartesiana com concentraçãõ para um cilindro	18
Figura 3.3	Malha generalizada para um tuboarão com amplificaçãõ	18
Figura 3.4	Arranjo co-localizado das variáveis na malha	20
Figura 3.5	Planos físico e computacional	21
Figura 3.6	Transformaçãõ do domínio físico no computacional	21
Figura 3.7	Domínio discretizado	26
Figura 3.8	Condiçãõ de contorno de parede	34
Figura 3.9	Condiçãõ de contorno de tangência	35
Figura 3.10	Condiçãõ de contorno longe do corpo; a) entrada b) saída	36
Figura 3.11	Corte	37
Figura 3.12	Malha tipo O	38
Figura 3.13	Condiçãõ de contorno de extrapolaçãõ	39
Figura 3.14	Fluxograma do código computacional	41
Figura 4.1	Malha para o cilindro; a)visãõ global, b)amplificaçãõ	43
Figura 4.2	Domínio indicando as condições de contorno	43
Figura 4.3	Variaçãõ do ângulo	44
Figura 4.4	Comparaçãõ do coeficiente de pressãõ para o cilindro; a) visãõ global, b) amplificaçãõ	45
Figura 4.5	Coeficiente de pressãõ sobre o cilindro	46
Figura 4.6	Coeficiente de pressãõ sobre o cilindro [40], [9]	46
Figura 4.7	Campo de velocidades sobre o cilindro	47
Figura 4.8	Linhas de corrente sobre o cilindro, com amplificaçãõ da parte frontal	48
Figura 4.9	Linhas de corrente sobre o cilindro [14]	48
Figura 4.10	Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 40$	49

Figura 4.11	Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 40$ [24]	50
Figura 4.12	Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 500$	50
Figura 4.13	Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 500$ [8]	51
Figura 4.14	Linhas de corrente para o cilindro - $Re = 500$ [19]	51
Figura 4.15	Tubarão Mako	52
Figura 4.16	Malha em torno do tubarão; a) visão global, b) amplificação	53
Figura 4.17	Linhas de pressão sobre geometria em forma de tubarão	53
Figura 4.18	Linhas de corrente sobre geometria em forma de tubarão	54
Figura 4.19	Malha para a esfera, $90 \times 48 \times 31$	55
Figura 4.20	Comparação do coeficiente de pressão para a esfera; a) visão global, b) amplificação	56
Figura 4.21	Linhas de coeficiente de pressão constante sobre a esfera	57
Figura 4.22	Campo de velocidades sobre a esfera	58
Figura 4.23	Malha para o elipsóide, $90 \times 48 \times 31$	59
Figura 4.24	Coeficiente de pressão sobre o elipsóide	59
Figura 4.25	Campo de velocidades sobre o elipsóide, com amplificação	60

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B	matrizes jacobianas da transformação de coordenadas
C	número de Courant
C_p	coeficiente de pressão
D_η	matriz jacobiana associada à direção η
d	equação da continuidade
e	excentricidade
$F(x + iy)$	função de uma variável complexa
i, j, k	índices que representam a localização de pontos na malha computacional
J	determinante da matriz A
L	comprimento
\vec{n}	vetor normal
p	pressão
p_0	pressão da corrente livre
p_i	pressão em um ponto da malha
p^0	pressão na iteração anterior
\vec{R}_{ijk}	discretização espacial dos termos convectivos e difusivos
Re	número de Reynolds
t	tempo
tol	tolerância especificada
u, v, w	componentes do vetor velocidade
u_0, v_0, w_0	componentes do vetor velocidade na corrente livre
\vec{V}	vetor velocidade
V_0	velocidade da corrente livre
V_i	velocidade no ponto i
\vec{V}_{ta}	vetor velocidade tangencial
\vec{W}_{ijk}	vetor das variáveis características
x, y, z	coordenadas cartesianas
C, c, K, M	constantes

Símbolos Especiais

$\alpha, \beta, \delta, \zeta, \theta, \varphi, \chi, \psi, \phi$	constantes
α_{art}	coeficiente de viscosidade artificial ou numérica
α_l	coeficientes do método de Runge-Kutta
∂	derivada parcial
ε	erro relativo da pressão
μ	viscosidade dinâmica
ν	viscosidade (μ/ρ)
θ	ângulo
ξ, η, γ	variáveis independentes no espaço computacional
$\xi_{x_i}, \eta_{x_i}, \gamma_{x_i}$	métricas do sistema de transformação de coordenadas
ϖ	fator de relaxação do método de Relaxação Sucessivas
ρ	massa específica
∇^2	Laplaciano
$\Delta x, \Delta y, \Delta z,$	espaçamento nas direções x, y e z , respectivamente
$\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \gamma$	espaçamento nas direções ξ, η e γ , respectivamente
Δt	passo de tempo
Δ	operador diferença para frente
∇	operador diferença para trás
$(\cdot)_{x_i}$	derivada em relação a x_i

RESUMO

Este trabalho apresenta um método numérico para a solução de escoamentos bi e tridimensionais de fluidos (quase) incompressíveis em torno de geometrias arredondadas. O escoamento bidimensional é analisado em torno da geometria de um cilindro (seção de um cilindro), para as equações de Euler e Navier-Stokes, e em torno da geometria aproximada de um tubarão para as equações de Euler. O escoamento tridimensional é analisado em torno de uma esfera e de um elipsóide.

O método de integração empregado baseia-se no esquema explícito de Runge-Kutta de três estágios para as equações da quantidade de movimento e no de Relaxações Sucessivas para a pressão. Adota-se o esquema em diferenças finitas visando aproximações de segunda ordem no tempo e no espaço no sistema de coordenadas generalizadas. Testes numéricos são realizados para as diferentes geometrias aplicando as equações de Navier-Stokes e Euler e os resultados obtidos comparam adequadamente com dados analíticos, experimentais e/ou numéricos encontrados na literatura.

ABSTRACT

This work presents a numerical method for the solution of (almost) incompressible bi and tridimensional flows for round geometries. Bidimensional flows over a circular cylinder, using Euler and Navier-Stokes equations, and also for a shark approximated geometry, using Euler equations, are analyzed. Extension to tridimensional flows around a sphere and an elliptical geometry is realized.

The integration method is based on the three-stage Runge-Kutta explicit scheme for momentum equations and successive under relaxation for pressure. Second order finite difference approximations for time as well as space terms in boundary fitted coordinates are employed. Numerical tests are carried out for different geometries for Euler and Navier-Stokes equations and the results showed to compare properly with analytical, numerical or experimental data found in the literature.

1 INTRODUÇÃO

A análise do movimento de fluidos é um campo que vem sendo explorado continuamente. Historicamente, a mecânica dos fluidos preocupou-se em estudar o comportamento destes de forma experimental muito antes do que de forma matemática. Leonard Euler foi quem primeiro deduziu as equações de movimento de fluidos, as chamadas equações de Euler. Porém, as descrições matemáticas do comportamento dos fluidos só ganharam forças no século XIX, na forma das *equações de Navier-Stokes*, a partir dos trabalhos pioneiros dos franceses Claude Navier [32], Simeon Poisson [36] e do inglês George Stokes [44].

Para a solução de um determinado problema em dinâmica dos fluidos dispõem-se de três ferramentas: experimentação em laboratório, métodos analíticos e métodos numéricos. A tabela 1.1 extraída de [46] segundo [13] compara estas três estratégias.

As simulações numéricas têm por finalidade diminuir a quantidade de experimentos e explorar fenômenos que não poderiam ser estudados em laboratório de forma prática, avaliando numericamente os diversos parâmetros relevantes ao problema. Esses podem ser facilmente alterados até que se obtenha o resultado final da simulação. Tudo isso de forma bem mais conveniente e a custos e tempos menores do que apenas utilizando técnicas experimentais e análises teóricas, pois o usuário tem grande facilidade para alterar parâmetros como geometria e velocidade, já que esses são apenas “dados de entrada” para o programa. Em outras palavras, a simulação numérica quase não apresenta restrições, tornando viável a solução de problemas envolvendo geometrias elaboradas e condições de contorno complicadas.

O uso de técnicas numéricas para a solução de problemas complexos é, hoje, uma realidade, graças ainda ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento. Em função dessa disponibilidade computacional, que cresce significativamente, o desenvolvimento de algorit-

Tabela 1.1: Comparação entre soluções analíticas, numéricas e experimentais

Técnica	Vantagens	Desvantagens
Experimental	* Mais realista	* Exige equipamento * Problemas de escala * Dificuldades de medição * Custo operacional
Teórica	* Mais geral * Fórmula fechada	* Restrita a geometrias e processos físicos simples * Geralmente restrita a problemas lineares
Numérica	* Não há restrição à linearidade * Geometrias e processos complicados * Evolução temporal do processo	* Erros de truncamento * Prescrição de condições de contorno apropriadas * Custos computacionais

mos para a solução dos mais diversos problemas tem recebido enorme atenção dos analistas numéricos. A ampla aceitação dos modelos numéricos pela comunidade interessada na solução desses problemas se explica pela grande versatilidade e relativa simplicidade de aplicação destas técnicas [30].

No entanto, quantificar a confiabilidade ou a precisão das simulações em dinâmica dos fluidos não é uma tarefa fácil. A validação de uma simulação computacional é desenvolvida pela comparação do resultado obtido numericamente com resultados experimentais e/ou analíticos, ou ainda, com outros resultados numéricos cuja validação já tenha sido comprovada. Mas, segundo [21], validar um método computacional não é simplesmente comparar resultados numéricos com experimentais. Antes de comparar com resultados experimentais deve-se verificar se o modelo matemático é logicamente consistente e que está aproximado por um método numérico correto, o qual também deve estar implementado corretamente.

Para estabelecer o modelo matemático deve-se analisar as propriedades do fluido e do escoamento em questão. Com relação ao fluido, este pode ser compressível ou incompressível, por exemplo. Fluidos compressíveis são aqueles cuja massa específica varia significativamente com a pressão; os incompressíveis são aqueles cuja variação da massa específica com a pressão pode ser desprezada.

Outra propriedade importante do fluido é a viscosidade, que é definida como uma medida da resistência do fluido ao cisalhamento quando este se move. Todos os fluidos têm viscosidade, o que causa atrito. A importância desse nas situações físicas depende do tipo de fluido e da configuração física ou do escoamento. Se a viscosidade é desprezível, diz-se que o fluido é invíscido ou ideal; caso contrário, o fluido é real. Os escoamentos podem ser classificados também em unidimensional, bidimensional e tridimensional, os quais são definidos como aqueles em que apenas se necessita de uma, duas e três coordenadas espaciais para sua descrição, respectivamente. Existem, ainda, dois tipos de configuração de escoamento: são os externos e internos. Por escoamento interno entende-se aquele que ocorre no interior de um tubo ou em um canal e similares, onde o fluido escoar no interior de uma estrutura confinada. O escoamento externo é o de um fluido em torno de um objeto, tal como na aerodinâmica [20].

Os escoamentos podem ainda ser classificados como laminares ou turbulentos, permanentes ou transientes [40]. O escoamento laminar é um movimento no qual os elementos fluidos ou partículas parecem deslizar uns sobre os outros em camadas ou lâminas; o fluxo (escoamento) turbulento é caracterizado por um movimento desordenado de partículas individuais e pela presença de redemoinhos de vários tamanhos. No escoamento transiente as grandezas características do fluido variam com o tempo nos pontos espaciais. No fluxo permanente nenhuma grandeza varia com o tempo em nenhum ponto do domínio, embora em geral as grandezas variem em função da posição no espaço preenchido pelo fluido [50].

Existem diversos trabalhos na literatura que tratam da simulação das equações em Dinâmica dos Fluidos, como as equações de Navier-Stokes e de Euler ([7], [15], [47], [6], [25], [34]). Neste trabalho, os escoamentos estudados são externos e permanentes, tanto os bi como os tridimensionais. Para realizar estas simulações, são empregadas diversas estratégias numéricas, todas elas merecendo atenção especial. Deve-se observar os contornos, a sua definição, as malhas uti-

lizadas, as aproximações das equações, o esquema de passo de tempo, enfim, são vários os tópicos que precisam ser analisados atentamente.

Como um dos principais enfoques deste trabalho é a complexidade das geometrias escolhidas, é preciso tratar também de temas como coordenadas generalizadas, contornos virtuais e dissipação artificial.

Durante muitos anos, acreditou-se que o método de diferenças finitas só poderia ser usado com malhas cartesianas, ao passo que o de elementos finitos e o de volumes finitos poderia ser usado para geometrias irregulares. Entretanto, Maliska [30] diz que os pesquisadores do método de diferenças finitas se concentraram na tentativa de dominar as não-linearidades dos termos convectivos e no problema do difícil acoplamento entre as equações. Por muito tempo, foi deixado para segundo plano o problema do tratamento de geometria complexas, e o método de diferenças finitas teve todo o seu desenvolvimento baseado nos sistemas coordenados ortogonais, como o cartesiano, o cilíndrico e o esférico [30]. Por esta razão, muitas pessoas ainda vinculam o método de diferenças finitas a malhas cartesianas, equivocadamente, uma vez que ele pode ser aplicado a qualquer tipo de malha, mesmo a não estruturada usada em elementos finitos.

O método de diferenças finitas tornou-se bastante versátil com o uso de coordenadas generalizadas. Dois livros que tratam amplamente do assunto são o de Thompson [49] e o de Steinberg [27]. O uso de coordenadas generalizadas implica que uma região qualquer no espaço físico é mapeada numa outra retangular no espaço computacional. As equações governantes são expressas em termos de coordenadas generalizadas como variáveis independentes e a discretização é feita no espaço computacional. Conseqüentemente, procede-se à obtenção da solução no espaço computacional [11].

Existem diversos métodos de geração de malhas, como os algébricos e os diferenciais. Os algébricos empregam diferentes tipos de interpolação, são bastante versáteis e rápidos. Na sua forma mais simples, teremos uma expressão que fornece

a transformação para cada ponto, bastando calcular o valor desta expressão. Para isso, podem ser usadas funções de interpolação de Lagrange e Hermite [23]. Os diferenciais são mais gerais mas, em contrapartida, apresentam tempo de computação elevado e maior elaboração matemática [30]. Entre os métodos diferenciais têm-se os elípticos e os hiperbólicos. Os elípticos são baseados na solução de equações parciais elípticas com algumas condições para forçar concentrações em certos pontos [48], [43]. Os métodos hiperbólicos baseiam-se nas soluções de equações diferenciais hiperbólicas, que são resolvidas por esquemas de solução *marchante* (no qual os dados são fornecidos no contorno interno de um domínio ilimitado; a malha solução é então obtida fazendo o método percorrer as linhas, de dentro para fora, bastando para isso percorrer apenas uma vez toda a malha [1], [23]).

Por outro lado, existe o método de contornos virtuais, no qual a geometria é modelada e simulada por um termo forçante adicionado às equações do escoamento mantendo-se um domínio retangular. Saiki e Biringen [39] aplicam a técnica de contornos virtuais à simulação numérica de cilindros estacionários e em movimento submetidos a um escoamento uniforme. Esta técnica permite a imposição da condição de contorno de parede (“no-slip”) via um termo forçante adicionado às equações de quantidade de movimento. Além disto, a utilização de métodos de diferenças finitas compactos (de alta ordem) facilita a eliminação de oscilações indesejáveis.

No trabalho de Goldstein et al. [16], forças são escolhidas ao longo da superfície de modo que tenham magnitude e direção opostas ao movimento, de tal forma que as partículas próximas à superfície tenham velocidade (praticamente) nula. Para escoamentos viscosos transientes o cálculo direto da força necessária é estabelecido por um esquema do tipo “feedback” (realimentação).

Fadlun et al. [10] desenvolveram um método de segunda ordem, altamente eficiente, para simular escoamentos incompressíveis transientes em três dimensões sobre geometrias complexas. Isto é obtido usando forças de corpo no con-

torno, as quais permitem a imposição das condições de contorno em uma superfície não coincidente com a malha computacional.

Baseado nos fatores mencionados anteriormente, o presente trabalho apresenta um método numérico para a solução de escoamentos bi e tridimensionais de fluidos quase incompressíveis em torno de geometrias arredondadas. A técnica empregada, quando se simula as equações de Euler, inclui o emprego de termos adicionais de dissipação artificial para amortecer as oscilações do erro. A idéia de dissipação está vinculada ao amortecimento, tanto que diz-se que as equações de Navier-Stokes possuem dissipação natural, pois apresentam os termos viscosos. Entretanto, este termo está ausente nas equações de Euler. Por isto, muitas vezes, ele é simulado artificialmente para efeitos numéricos de estabilização e rapidez do procedimento numérico de solução. A idéia [38] vem sendo desenvolvida e empregada ao longo dos anos.

Assim, neste trabalho, busca-se a simulação de escoamentos não apenas bi, mas também tridimensionais. O primeiro estudo é feito para o caso mais simples, a seção de um cilindro, com o objetivo de calibrar o código computacional (pois este possui solução analítica no caso potencial). A seguir, analisa-se o fluxo sobre uma geometria mais complexa, a seção de um tubarão. Optou-se por modelar a geometria do tubarão Mako por ser um dos peixes mais velozes. Este tubarão chega a 88 km/h e dentre os peixes só é menos rápido que o atum [31]. Para o caso tridimensional estuda-se a geometria de uma esfera e de um elipsóide.

Quanto à estrutura do trabalho, no capítulo 2 são apresentadas as equações governantes do escoamento: equações de Navier-Stokes e Euler tridimensionais na forma adimensional. Como em escoamentos incompressíveis a escolha de uma equação de evolução para a pressão não é óbvia, utiliza-se o *Método da Pressão* para obter uma equação de Poisson para a pressão.

No capítulo 3 são discutidas as vantagens e desvantagens do emprego da técnica de contornos imersos, a importância da escolha apropriada da malha, a

transformação de coordenadas do sistema cartesiano para o generalizado, a aproximação das equações pelo método de diferenças finitas, a utilização de dissipação artificial na equação da pressão. São também discutidos os métodos de solução empregados para resolver o sistema de equações, juntamente com as condições de contorno apropriadas para o escoamento, o critério de convergência utilizado nos problemas de interesse, e o fluxograma do código computacional utilizado.

No capítulo 4 são discutidos os resultados obtidos para os casos bidimensional e tridimensional. Os resultados são apresentados através das linhas de corrente, do campo de velocidade e de pressão. Estes são comparados com dados analíticos, numéricos e/ou experimentais encontrados na literatura.

Finalmente, no capítulo 5, apresentam-se as conclusões obtidas e sugestões para trabalhos futuros, que são seguidas das referências bibliográficas utilizadas.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

A natureza do escoamento de um fluido real é muito complexa. As leis básicas do movimento de um fluido não são totalmente conhecidas; portanto, a obtenção da solução de qualquer problema físico requer habilidade na criação do modelo matemático correspondente. Este deve ser tal que possa ser resolvido com tempos de computação não-proibitivos e que os resultados obtidos representem bem o fenômeno físico em questão [30], [45].

O conjunto de equações que descreve o escoamento é fundamental para a análise do fenômeno em questão. As equações governantes do escoamento analisado neste trabalho são as de Navier-Stokes ou as de Euler juntamente com uma equação para a pressão, que contém implicitamente a equação da continuidade.

Neste capítulo, apresenta-se as equações utilizadas para simular o escoamento: equação para a velocidade e para a pressão no sistema cartesiano de coordenadas e na sua forma adimensional.

2.1 Equações para as velocidades

As equações utilizadas para o cálculo das velocidades são as de conservação de quantidade de movimento nas direções x , y e z , também conhecidas como equações de Navier-Stokes. Estas são derivadas da Segunda Lei de Newton, a qual estabelece que o produto de massa e aceleração é igual à soma das forças externas atuando no corpo.

As equações de Navier-Stokes expressam a condição de equilíbrio, ou seja, para cada partícula há equilíbrio entre as forças de campo e as de superfície. As Forças de Campo (ou Corpo) agem sobre a massa de fluido como um todo, isto é, sobre cada ponto de um elemento de fluido (como exemplo tem-se a força gravitacional). Como essas forças nem sempre possuem magnitude suficiente para

influenciar o escoamento, as expressões matemáticas dessas forças são, em geral, adicionadas como termos auxiliares (fontes) nas equações do movimento. As Forças de Superfície agem apenas sobre a superfície do elemento de fluido. Decorrem da pressão exercida sobre este por um elemento exterior e das tensões viscosas normais e de cisalhamento devido ao atrito com os elementos de fluido adjacentes em movimento. Uma vez que essas forças são intrínsecas ao fluido, elas aparecem como termos constitutivos das equações do movimento [13].

As equações de Navier-Stokes sem forças de campo, escritas no sistema cartesiano de coordenadas para o escoamento incompressível (massa específica constante) nas direções x , y e z são dadas, respectivamente, por [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

onde ρ é a massa específica, u , v e w as componentes do vetor velocidade em cada direção, p a pressão e ν a viscosidade.

As equações de Euler são obtidas a partir das de Navier-Stokes, tomando-se $\nu = 0$, ou seja, considerando nulo o efeito da viscosidade, resultando

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.6)$$

Para que o movimento do fluido possa ser descrito completamente, é necessário definir uma equação para a pressão, uma vez que as equações do movimento já são conhecidas.

2.2 Equação para a pressão

A natureza segregada (equação por equação) do processo de solução requer que cada variável tenha uma equação evolutiva para ser avançada. Observando as equações para a velocidade, nota-se que as variáveis u , v e w podem ser avançadas pelas equações da quantidade de movimento (2.1), (2.2) e (2.3) em cada direção e que a influência da pressão aparece através do seu gradiente [30].

Como a massa específica não varia significativamente com a pressão, determina-se um campo de pressões que, quando inserido nas equações do movimento, origina um campo de velocidades que satisfaz a equação da continuidade. Assim, o acoplamento pressão-velocidade é importante, ainda que as variações da pressão sejam relativamente pequenas se comparadas com as da velocidade.

Para obter a equação para a pressão não basta isolar p de uma ou de outra equação do movimento; deve-se combinar os gradientes nas três direções. Portanto, precisa-se extrair p das equações do movimento de forma que as velocidades obtidas satisfaçam a continuidade; esta passa a ser uma restrição a ser obedecida pelo campo de velocidades.

A equação para a pressão é obtida através do *Método da Pressão* na formulação incompressível [17]. Considere as equações de Navier-Stokes escritas da seguinte forma [34]:

$$u_t + (uu)_x + (uv)_y + (uw)_z = -\frac{p_x}{\rho} + \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (2.7)$$

$$v_t + (uv)_x + (vv)_y + (vw)_z = -\frac{p_y}{\rho} + \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) \quad (2.8)$$

$$w_t + (uw)_x + (vw)_y + (ww)_z = -\frac{p_z}{\rho} + \nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) \quad (2.9)$$

Derivando (2.7) em relação a x , (2.8) em relação a y e (2.9) em relação a z , obtém-se

$$u_{xt} + (uu)_{xx} + (uv)_{xy} + (uw)_{xz} = -\frac{p_{xx}}{\rho} + \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})_x \quad (2.10)$$

$$v_{yt} + (uv)_{xy} + (vv)_{yy} + (vw)_{yz} = -\frac{p_{yy}}{\rho} + \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz})_y \quad (2.11)$$

$$w_{zt} + (uw)_{xz} + (vw)_{yz} + (ww)_{zz} = -\frac{p_{zz}}{\rho} + \nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz})_z \quad (2.12)$$

Somando-se (2.10), (2.11) e (2.12) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{\rho} &= -(u_x + v_y + w_z)_t - [(uu)_{xx} + (vv)_{yy} + (ww)_{zz} + 2(uv)_{xy} \\ &\quad + 2(uw)_{xz} + 2(vw)_{yz}] + \nu[(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})_x \\ &\quad + (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz})_y + (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz})_z]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Observando que o lado esquerdo de (2.14) é uma fração do Laplaciano da pressão e rearranjando os termos, chega-se a

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= -\rho[(uu)_{xx} + (vv)_{yy} + (ww)_{zz} + 2(uv)_{xy} + 2(uw)_{xz} + 2(vw)_{yz}] \\ &\quad -\rho(u_x + v_y + w_z)_t + \rho\nu[(u_x + v_y + w_z)_{xx} + (u_x + v_y + w_z)_{yy} \\ &\quad + (u_x + v_y + w_z)_{zz}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Fazendo agora

$$d = u_x + v_y + w_z, \quad (2.15)$$

obtém-se uma forma conveniente (por ser de implementação mais fácil) da equação do tipo Poisson para a pressão:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= -\rho[(uu)_{xx} + (vv)_{yy} + (ww)_{zz} + 2(uv)_{xy} + 2(uw)_{xz} + 2(vw)_{yz}] \\ &\quad -\rho d_t + \rho\nu[d_{xx} + d_{yy} + d_{zz}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $d = 0$ corresponde à continuidade (equação (2.15)). Ela reflete o princípio físico da conservação da massa, que é de grande importância. Toda a massa que entra em um sistema deve sair e/ou se acumular no mesmo. Portanto, as equações

(2.1), (2.2) e (2.3) são utilizadas para o cálculo das componentes do vetor velocidade e a equação (2.16) para o cálculo da pressão.

Para uma análise das deduções das equações mencionadas anteriormente o leitor pode consultar a bibliografia [14], [40]. No próximo item são apresentadas as equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.16) na forma adimensional.

2.3 Equações adimensionais

As equações governantes são expressas na forma adimensional, pois esta permite a solução de forma generalizada. A vantagem é que o número de parâmetros que aparece no problema é reduzido quando variáveis adimensionais são empregadas. Mais precisamente, nenhum parâmetro desaparece; eles ficam representados em certas combinações adimensionais. Embora a manipulação das dimensões não possa produzir nenhuma solução analítica completa dos problemas físicos, a análise dimensional proporciona um instrumento poderoso para a solução de problemas que não permitem soluções analíticas [14].

Os métodos da análise dimensional baseiam-se no princípio da homogeneidade dimensional, formulada por Fourier em 1822, segundo o qual toda equação que exprime um fenômeno físico deve ser dimensionalmente homogênea, isto é, as dimensões em ambos os membros da equação devem ser as mesmas. A adimensionalização pode ser realizada de várias maneiras, cada uma das quais confere a mesma redução no número de parâmetros que aparecem [29],[50].

Para tornar as equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.16) adimensionais, divide-se todos os comprimentos por um comprimento de referência L , e todas as velocidades por uma velocidade de referência V_0 , tomada como a velocidade da corrente livre. Torna-se a pressão adimensional dividindo-a por ρV_0^2 (duas vezes a pressão dinâmica da corrente livre). Denotando as quantidades adimensionais por asteriscos, adota-se [14]

$$x^* = x/L, y^* = y/L, z^* = z/L, t^* = tV_0/L, \rho^* = \rho/\rho_0$$

$$u^* = u/V_0, v^* = v/V_0, w^* = w/V_0 \text{ e } p^* = p/\rho_0V_0^2$$

Substituindo os valores com * nas equações (2.1), (2.2), (2.3), (2.16) (por conveniência, abandona-se o asterisco e usa-se o mesmo simbolismo para as equações na forma adimensional), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = & - \left(\frac{\partial^2 (uu)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (vv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (ww)}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 (uw)}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 (vw)}{\partial y \partial z} \right) \\ & - \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde Re é o número de Reynolds, dado por

$$Re = \frac{\rho L V_0}{\mu}, \quad (2.21)$$

que representa a relação entre as forças de inércia e as viscosas. Uma dedução das equações na forma adimensionalizada pode ser vista em [34].

Conhecendo-se os sistemas de equações a serem resolvidos, parte-se agora para o procedimento de solução.

3 PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Descreve-se, neste capítulo, algumas vantagens e desvantagens do emprego do método dos contornos imersos, a importância da escolha adequada da malha, a obtenção das equações governantes em coordenadas generalizadas e sua aproximação em diferenças finitas. Além disso, discute-se a utilização de dissipação artificial na equação da pressão, descreve-se os métodos iterativos de Runge-Kutta e de Relaxações Sucessivas, juntamente com as condições de contorno, bem como apresenta-se o critério de convergência e o fluxograma do código computacional utilizado.

3.1 Contornos imersos x Coordenadas generalizadas

No desenvolvimento de modelos numéricos generalizados, o uso de sistemas coordenados ortogonais conhecidos como o cartesiano, cilíndrico, esférico, etc. apresentam grandes limitações, pois são adequados apenas à geometrias cujas fronteiras coincidam com o sistema coordenado. Malhas retangulares, como mostra a figura 3.1, podem ser utilizadas; entretanto, é necessário analisar os problemas que o emprego destas malhas traria. Por exemplo, alguns pontos da malha estão no interior de um tubo onde não ocorre o fluxo. Além disso, há poucos pontos da malha (se houver algum) que coincidem com a superfície do tubo, ou seja, interpolações devem ser feitas na fronteira para aplicar as condições de contorno.

A falta de precisão na aplicação das condições de contorno pode levar a soluções bem imprecisas perto da fronteira, exatamente na região onde os parâmetros de interesse são calculados. Ter-se-ia, assim, um código computacional extremamente dependente da geometria do problema, exigindo mudanças com a substituição da geometria [30], [1]. Uma forma de contornar estes problemas é a utilização do sistema de coordenadas generalizadas ou o método MAC (Marker and Cell) [18] ou a técnica dos contornos imersos acoplada à técnica dos contornos virtuais.

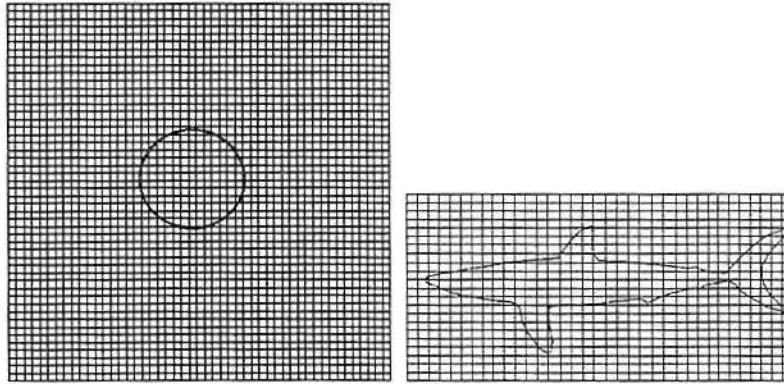


Figura 3.1: Malhas cartesianas para um cilindro e um tubarão

No método dos contornos virtuais, a geometria é modelada e simulada por um termo forçante adicionado às equações do escoamento, ou seja, a imposição de forças permite modelar o fluido como se ele estivesse passando por um objeto sólido. Desta maneira, é possível modelar o efeito de certas condições de contorno por meio da aplicação de um campo de forças externo, em vez de especificar os valores dos parâmetros de contorno. Esta técnica foi originalmente desenvolvida por Goldstein et al. [16] com base nos trabalhos iniciais de Peskin [35] e Sirovich [41],[42].

Peskin [35] desenvolveu um método que representa um corpo imerso no escoamento via um termo de força somado as equações governantes. Quando aplicado em certos pontos no escoamento, este termo de força simula o efeito do corpo no escoamento, permitindo modelar um contorno qualquer dentro de uma malha cartesiana (figura 3.1) sem a necessidade de mapeamento. Peskin implementou este método (técnica dos contornos imersos) para modelar o escoamento do sangue na válvula mitral e no coração. A principal vantagem do esquema está em sua habilidade para modelar as propriedades materiais do corpo e movimento dos contornos. Entretanto, a rigidez numérica da maioria dos problemas de contorno móveis restringem a definição explícita dos termos de força no método de Peskin para pequenos passos de tempo. Este método tem sido expandido e implementado em muitos problemas [5],[12],[39].

No trabalho de Goldstein et al. [16], forças são escolhidas ao longo da superfície de modo que tenham a magnitude e a direção oposta ao movimento tal que o escoamento é trazido para o repouso em um elemento de superfície. Para escoamentos viscosos transientes o cálculo direto da força necessária é estabelecida por um esquema do tipo “feedback”. Utilizando um método espectral, eles aplicaram este procedimento para investigar os efeitos de pequenas variações no escoamento turbulento num canal e para o escoamento entre cilindros concêntricos. Eles observaram que o termo forçante gera oscilações constantes de baixa amplitude e de alta frequência que podem ser controladas por filtros numéricos de passa-baixo e/ou pela introdução de campos de escoamento particulares no interior do corpo. Suas simulações não foram afetadas por esses sinais espúrios, mas tais oscilações numéricas podem interferir na precisão da solução quando se está simulando escoamentos em regimes instáveis ou de transição.

Para representar o contorno do corpo no campo de escoamento, Goldstein et al. [16] definiram o contorno com pontos coincidentes com a malha computacional, enquanto que Peskin [35] definiu o contorno do corpo de maneira independente da grade computacional. Peskin utilizou uma função cosseno de primeira ordem para interpolar e extrapolar informações entre o contorno imerso e a malha. Mais recentemente, Beyer [5] desenvolveu uma representação precisa de segunda ordem para contornos imersos em aplicações envolvendo o método de Peskin. Goldstein et al. implementaram interpolações espectrais precisas das velocidades dos pontos na malha para os pontos no contorno virtual e aplicaram interpolação linear para distribuir os efeitos do termo de força para os nós da grade.

Peskin [35] e Goldstein et al. [16] impuseram o termo de força somente nos pontos do contorno, assim permitindo o movimento do fluido dentro do corpo. Para o trabalho de Peskin este comportamento é desejável, já que seus cálculos são para escoamento de sangue dentro do coração e o campo externo do escoamento é ignorado. Goldstein et al. investigaram o efeito de corpos sólidos colocados dentro do campo de escoamento que fisicamente não permitem escoamento dentro do contorno

(escoamento externo). Conseqüentemente, o fluxo que foi numericamente obtido dentro de tais contornos não é físico: entretanto, o escoamento interno foi usado para atenuar as oscilações espaciais geradas pelo método em [16].

Fadlun et al. [10] desenvolveram um método de segunda ordem, altamente eficiente, para simular escoamentos incompressíveis transientes em três dimensões sobre geometrias complexas. Ele foi obtido usando forças de corpo no contorno que permitem a imposição das condições de fronteira em uma superfície não coincidente com a malha computacional. As equações governantes são discretizadas e resolvidas numa grade regular mantendo as vantagens e a eficiência do procedimento de solução. O assunto principal é a interpolação das forças sobre o “grid” (malha) que determina a precisão do esquema. Fadlun et al. [10] testaram duas forças diferentes, o que mostrou que a qualidade de solução era a mesma, mas a eficiência do cálculo depende fortemente de cada expressão particular.

Saiki e Biringen [39] aplicam a técnica de contornos virtuais à simulação numérica de cilindros estacionários e em movimento em um escoamento uniforme. Além disto, a utilização de métodos de diferenças finitas compactos (de alta ordem) facilitam a eliminação de oscilações indesejáveis.

Nos cálculos apresentados por Saiki [39] alguns dos testes ($Re=550$) convergiram para uma solução incorreta com o termo de força imposto somente para o contorno. Este comportamento foi remediado pela imposição da função força dentro do contorno do corpo, tanto quanto no corpo. Isto sugere que na implementação das técnicas de contorno virtual em problemas de corpo sólido, onde a solução é desconhecida, o termo de força deve ser aplicado no contorno e nos pontos interiores do corpo para convergir para a solução correta sistematicamente.

Tanto o método dos contornos imersos (em coordenadas cartesianas) quanto o utilizado neste trabalho (coordenadas generalizadas) apresentam dificuldades de concentração da malha em regiões de grandes gradientes. O método dos contornos imersos apresenta esta dificuldade devido ao fato de não ser possível con-

centrar as linhas em uma determinada região. Um refinamento utilizando o método dos contornos imersos resultaria em uma malha como a da figura 3.2 na qual existem pontos que não precisariam de refinamento, aumentando o custo computacional.

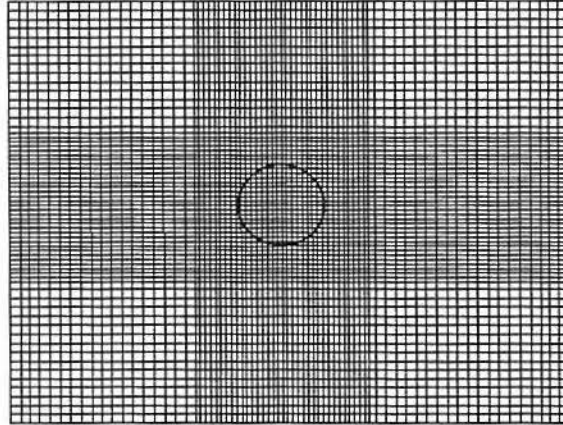


Figura 3.2: Malha cartesiana com concentração para um cilindro

Pode-se concluir que a utilização de contorno imersos não é geralmente a mais apropriada para a solução do escoamento. A alternativa que parece mais simples e adequada é o uso de sistemas de coordenadas que coincidam com a geometria do problema, conforme mostra a figura 3.3, para a geometria de um tubarão [30], [1].

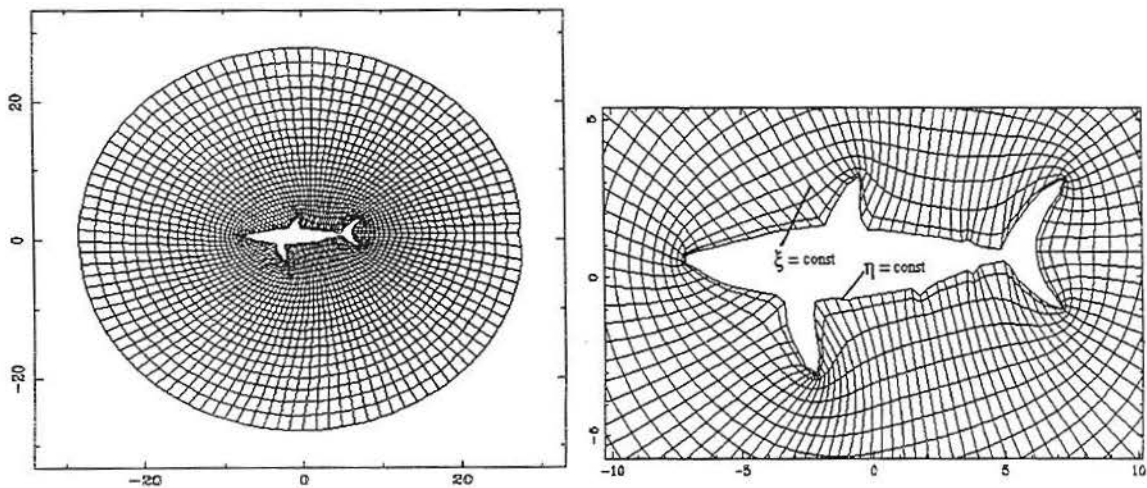


Figura 3.3: Malha generalizada para um tubarão com amplificação

No próximo item discute-se a importância de construir uma malha computacional adequada para a obtenção da solução numérica do problema.

3.2 Importância da escolha apropriada da malha

Para resolver numericamente as equações do escoamento sobre uma região, é necessário ter um domínio discreto (com número finito de pontos). Esses pontos devem estar dispostos de maneira a abranger da forma mais significativa as regiões onde ocorrem as maiores variações das variáveis velocidade e pressão devido à presença do corpo.

Uma boa solução numérica depende de uma malha de boa qualidade, isto é, que seja refinada em regiões nas quais os gradientes das variáveis dependentes são elevados, por exemplo. Geralmente, ou os pontos estão afastados ou aglutinados em áreas específicas. Os pontos aglutinados estão nas áreas em que se espera que a variação espacial da solução seja grande. Já os pontos afastados entre si estão nas regiões nas quais a solução apresenta pequena variação espacial. Portanto, parece-nos claro que domínios complexos necessitem de malhas elaboradas com espaçamento variável entre os pontos, isto é, uma malha não-uniforme, ou a utilização de multiblocos.

As malhas utilizadas neste trabalho são do tipo estruturada, pois apresentam regularidade na distribuição espacial dos pontos. Este tipo de malha confere uma série de vantagens para a implementação do programa computacional, pois a regra de ordenação dos elementos simplifica todas as rotinas. O arranjo para a disposição das variáveis na malha é o co-localizado, pois permite economia de memória e de tempo computacional, uma vez que todas as incógnitas são armazenadas no mesmo ponto conforme mostra a figura 3.4.

O problema da geração de malhas não é trivial, principalmente em regiões tridimensionais. Para a geometria da seção do cilindro e para as regiões

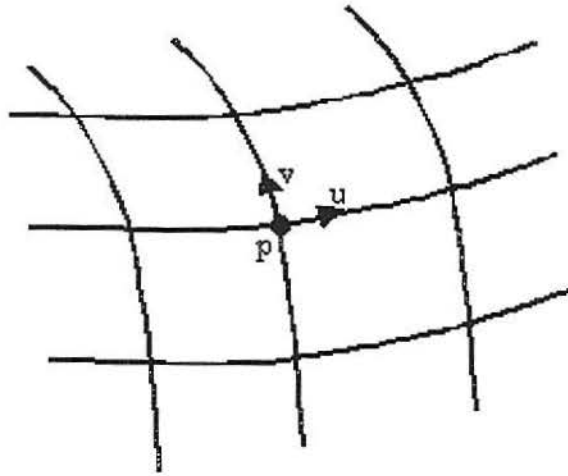


Figura 3.4: Arranjo co-localizado das variáveis na malha

tridimensionais, utiliza-se uma malha estruturada gerada através de um método algébrico de interpolação. A malha para a geometria do tubarão foi obtida com a utilização do software *MakeGrid* [23].

A seguir, passa-se ao estudo de coordenadas generalizadas que serão necessárias na implementação do nosso modelo para escoamentos em geometrias complexas.

3.3 Transformação de coordenadas

No sistema de coordenadas generalizadas a malha se adapta à geometria do domínio como mostra a figura 3.3. Novas linhas coordenadas, ξ e η , são definidas de forma que a superfície do tubarão, por exemplo, torna-se uma linha coordenada, $\eta = \text{constante}$. Tem-se, então, uma malha em conformidade com a geometria e cujos pontos são obtidos naturalmente sobre a superfície do tubarão, mas cujas linhas não estão uniformemente espaçadas. Por isto, torna-se necessário transformar o “grid” curvo, no domínio físico, em uma malha retangular no chamado domínio lógico ou computacional. A figura 3.5 mostra o plano (domínio) físico e o computacional. Observa-se que há uma correspondência entre essas duas figuras; por

exemplo, pontos a , b e c no plano físico correspondem a pontos a , b e c no plano computacional.

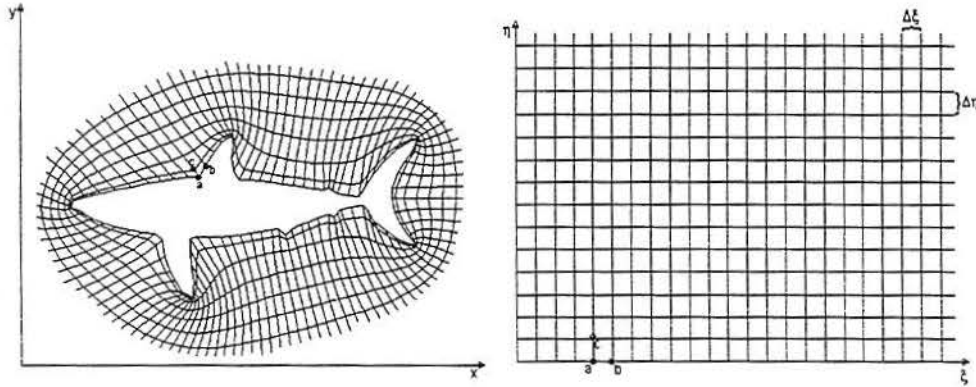


Figura 3.5: Planos físico e computacional

Além disso, quando as equações governantes são resolvidas no plano computacional, elas devem ser expressas em termos das variáveis ξ , η e γ ao invés de x , y e z , ou seja, as equações governantes devem ser transformadas de (x, y, z) para (ξ, η, γ) . Portanto, a transformação do sistema de coordenadas cartesianas para o de generalizadas permite o mapeamento da geometria irregular, escrita no sistema cartesiano (x, y, z) , em uma geometria regular no sistema (ξ, η, γ) , conforme mostra a figura 3.6.

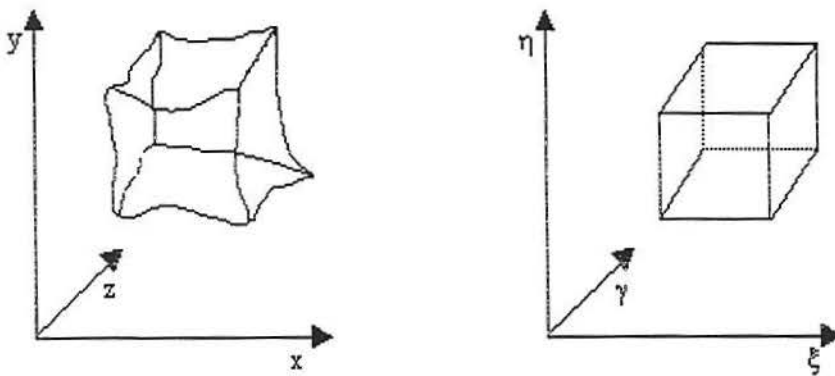


Figura 3.6: Transformação do domínio físico no computacional

Independente da geometria do plano físico, a geometria do plano computacional adotada será do tipo retangular para $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\gamma$. Utiliza-se, ainda uma

normalização para $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\gamma = 1$. Assim, os volumes no plano computacional têm dimensões unitárias, facilitando o trabalho de programação do algoritmo e evitando divisões desnecessárias.

Para descrever a transformação geral das equações governantes entre o plano físico e o computacional considera-se uma geometria tridimensional com variáveis independentes x , y e z . Quer-se transformar as variáveis no plano físico (x, y, z) para o computacional (ξ, η, γ) , onde [11]

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, z) \\ \eta &= \eta(x, y, z) \\ \gamma &= \gamma(x, y, z)\end{aligned}\tag{3.1}$$

e, desde que a transformação possua inversa, resulta

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta, \gamma) \\ y &= y(\xi, \eta, \gamma) \\ z &= z(\xi, \eta, \gamma)\end{aligned}\tag{3.2}$$

A aplicação da transformação de coordenadas consiste basicamente da utilização da regra de derivação em cadeia. Assim, os termos contendo derivadas espaciais das equações (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) para uma variável ϕ genérica tornam-se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} &= \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x_i} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x_i} + \frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\xi_{x_i}^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\eta_{x_i}^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2}\gamma_{x_i}^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}\xi_{x_i}\eta_{x_i} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\gamma}\xi_{x_i}\gamma_{x_i} \\ &\quad + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\gamma}\eta_{x_i}\gamma_{x_i} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\xi_{x_i x_i} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\eta_{x_i x_i} + \frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\gamma_{x_i x_i} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\xi_{x_i}\xi_{x_j} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}\eta_{x_i}\eta_{x_j} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2}\gamma_{x_i}\gamma_{x_j} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_{x_i}\eta_{x_j} + \xi_{x_j}\eta_{x_i}) \\ &\quad + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\gamma}(\xi_{x_i}\gamma_{x_j} + \xi_{x_j}\gamma_{x_i}) + \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\gamma}(\eta_{x_i}\gamma_{x_j} + \eta_{x_j}\gamma_{x_i}) + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\xi_{x_i x_j} \\ &\quad + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\eta_{x_i x_j} + \frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\gamma_{x_i x_j} \quad i \neq j\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde ϕ representa as velocidades u, v, w e a pressão p ; x_i as direções x, y, z e ξ_{x_i}, η_{x_i} e γ_{x_i} as métricas da transformação ou relações de comprimentos no domínio físico e transformado. Nas expressões referentes as derivadas de segunda ordem termos como $\xi_{x_i x_j}, \eta_{x_i x_j}, \gamma_{x_i x_j}$ e semelhantes são desprezados conforme a literatura [30].

Substituindo (3.3) na equação (2.17) obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &+ u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \gamma_x \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \gamma_y \right) \\ &+ w \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \gamma_z \right) = - \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial p}{\partial \gamma} \gamma_x \right) \\ &+ \frac{1}{Re} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\chi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \gamma} + 2\psi \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \gamma} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 \\ \beta &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 \\ \zeta &= \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 \\ \varphi &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z \\ \chi &= \xi_x \gamma_x + \xi_y \gamma_y + \xi_z \gamma_z \\ \psi &= \eta_x \gamma_x + \eta_y \gamma_y + \eta_z \gamma_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

A equação (3.4) representa a conservação da quantidade de movimento (2.17) em coordenadas generalizadas. As equações (2.18), (2.19) e (2.20) podem ser escritas de forma semelhante. Para a equação (2.20) resulta a forma não trivial

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= - \left\{ \frac{\partial^2(uu)}{\partial \xi^2} \xi_x^2 + \frac{\partial^2(uu)}{\partial \eta^2} \eta_x^2 + \frac{\partial^2(uu)}{\partial \gamma^2} \gamma_x^2 + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2(uu)}{\partial \xi \partial \eta} + 2\xi_x \gamma_x \frac{\partial^2(uu)}{\partial \xi \partial \gamma} \right. \\ &+ 2\eta_x \gamma_x \frac{\partial^2(uu)}{\partial \eta \partial \gamma} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial \xi^2} \xi_y^2 + \frac{\partial^2(vv)}{\partial \eta^2} \eta_y^2 + \frac{\partial^2(vv)}{\partial \gamma^2} \gamma_y^2 + 2\xi_y \eta_y \frac{\partial^2(vv)}{\partial \xi \partial \eta} \\ &+ 2\xi_y \gamma_y \frac{\partial^2(vv)}{\partial \xi \partial \gamma} + 2\eta_y \gamma_y \frac{\partial^2(vv)}{\partial \eta \partial \gamma} + \frac{\partial^2(ww)}{\partial \xi^2} \xi_z^2 + \frac{\partial^2(ww)}{\partial \eta^2} \eta_z^2 + \frac{\partial^2(ww)}{\partial \gamma^2} \gamma_z^2 \\ &+ 2\xi_z \eta_z \frac{\partial^2(ww)}{\partial \xi \partial \eta} + 2\xi_z \gamma_z \frac{\partial^2(ww)}{\partial \xi \partial \gamma} + 2\eta_z \gamma_z \frac{\partial^2(ww)}{\partial \eta \partial \gamma} + 2 \left[\frac{\partial^2(uv)}{\partial \xi^2} \xi_x \xi_y \right. \\ &+ \frac{\partial^2(uv)}{\partial \eta^2} \eta_x \eta_y + \frac{\partial^2(uv)}{\partial \gamma^2} \gamma_x \gamma_y + \frac{\partial^2(uv)}{\partial \xi \partial \eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + \frac{\partial^2(uv)}{\partial \xi \partial \gamma} (\xi_x \gamma_y + \xi_y \gamma_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2(uw)}{\partial\eta\partial\gamma}(\eta_x\gamma_y + \eta_y\gamma_x) + \frac{\partial^2(uw)}{\partial\xi^2}\xi_x\xi_z + \frac{\partial^2(uw)}{\partial\eta^2}\eta_x\eta_z + \frac{\partial^2(uw)}{\partial\gamma^2}\gamma_x\gamma_z \\
& + \frac{\partial^2(uw)}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_x\eta_z + \xi_z\eta_x) + \frac{\partial^2(uw)}{\partial\xi\partial\gamma}(\xi_x\gamma_z + \xi_z\gamma_x) + \frac{\partial^2(uw)}{\partial\eta\partial\gamma}(\eta_x\gamma_z + \eta_z\gamma_x) \\
& + \frac{\partial^2(vw)}{\partial\xi^2}\xi_y\xi_z + \frac{\partial^2(vw)}{\partial\eta^2}\eta_y\eta_z + \frac{\partial^2(vw)}{\partial\gamma^2}\gamma_y\gamma_z + \frac{\partial^2(vw)}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_y\eta_z + \xi_z\eta_y) \\
& + \left. \frac{\partial^2(vw)}{\partial\xi\partial\gamma}(\xi_y\gamma_z + \xi_z\gamma_y) + \frac{\partial^2(vw)}{\partial\eta\partial\gamma}(\eta_y\gamma_z + \eta_z\gamma_y) \right] \left. \right\} - \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{1}{Re} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right. \\
& \left. + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} + 2\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 2\chi \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \gamma} + 2\psi \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \gamma} \right) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta, \zeta, \varphi, \chi$ e ψ são dados por (3.5).

Para obter as expressões para as métricas de transformação, consideram-se as diferenciais em cada eixo coordenado no domínio transformado [30]

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$d^F = Ad^T \quad (3.7)$$

sendo as diferenciais no plano físico escritas como

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\gamma \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$d^F = Bd^T \quad (3.8)$$

Usando as equações (3.7) e (3.8), encontra-se

$$A = B^{-1} = J \begin{pmatrix} y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta & -(x_\eta z_\gamma - x_\gamma z_\eta) & x_\eta y_\gamma - x_\gamma y_\eta \\ -(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) & x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi & -(x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi) \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & -(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde J é o jacobiano da transformação que pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned} J &= \det A = \frac{1}{\det B} \\ &= [x_\xi(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) + x_\gamma(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)]^{-1} \end{aligned}$$

Logo, as métricas são dadas por

$$\begin{aligned} \xi_x &= J(y_\eta z_\gamma - y_\gamma z_\eta) \\ \xi_y &= -J(x_\eta z_\gamma - x_\gamma z_\eta) \\ \xi_z &= J(x_\eta y_\gamma - x_\gamma y_\eta) \\ \eta_x &= -J(y_\xi z_\gamma - y_\gamma z_\xi) \\ \eta_y &= J(x_\xi z_\gamma - x_\gamma z_\xi) \\ \eta_z &= -J(x_\xi y_\gamma - x_\gamma y_\xi) \\ \gamma_x &= J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \\ \gamma_y &= -J(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) \\ \gamma_z &= J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \end{aligned}$$

Na próxima seção introduz-se o método de diferenças finitas, que será utilizado para a aproximação das equações governantes.

3.4 Diferenças finitas

Antes de resolver as equações diferenciais de forma numérica, é preciso encontrar, para os termos que nela aparecem (por exemplo $\frac{\partial u}{\partial \xi}$), as respectivas expressões escritas em função dos pontos da malha. Isto é feito aqui utilizando o método de diferenças finitas. A aproximação por diferenças finitas irá substituir o operador diferencial contínuo $\frac{\partial}{\partial \xi}$ por uma aproximação discreta, calculada a partir dos valores de u em um número finito de pontos. Para entender esta aproximação considera-se, por simplificação, o caso bidimensional representado na figura 3.7, onde os pontos da malha se localizam na intersecção das linhas horizontais com as verti-

cais. Os pontos i e j identificam pontos na i -ésima coluna e na j -ésima linha, respectivamente. Assim, um dado ponto (ξ, η) possui coordenadas $(\xi_0 + i\Delta\xi, \eta_0 + j\Delta\eta)$, com (ξ_0, η_0) representando a origem do sistema de coordenadas a menos de translações.

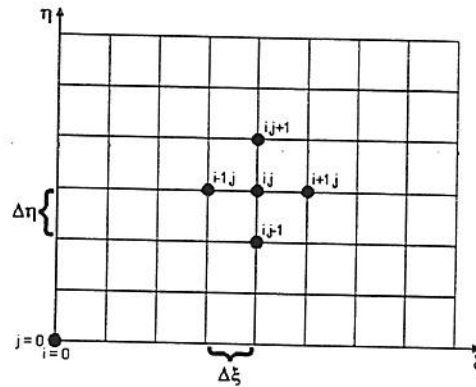


Figura 3.7: Domínio discretizado

O método de diferenças finitas consiste na aproximação de uma determinada função em torno de um ponto por expansões de Taylor. Considere $u(i, j)$ a componente do vetor velocidade na direção x em um ponto (i, j) ; então a velocidade $u(i + 1, j)$ pode ser expressa em termos de séries de Taylor conforme

$$u(i + 1, j) = u(i, j) + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \Delta\xi + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} (\Delta\xi)^2 + \dots \quad (3.10)$$

A equação (3.10) é matematicamente uma expressão exata para $u(i + 1, j)$ se [1]:

- (a) o número de termos é infinito e a série converge,
- (b) e/ou $\Delta\xi \rightarrow 0$.

No entanto, computacionalmente torna-se impraticável o emprego de um número infinito de termos. Assim, a equação (3.10) é truncada. No presente trabalho é admitido um erro de truncamento de segunda ordem, pois os termos do tipo $(\Delta\xi)^3$ e os de ordem mais alta são desprezados. Assim, por exemplo, o termo

$\frac{\partial u}{\partial \xi}$ pode ser aproximado utilizando

$$u(i+1, j) \approx u(i, j) + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \Delta \xi + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} (\Delta \xi)^2 \quad (3.11)$$

$$u(i-1, j) \approx u(i, j) - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \Delta \xi + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} (\Delta \xi)^2 \quad (3.12)$$

Subtraindo (3.11) de (3.12) tem-se

$$u(i+1, j) - u(i-1, j) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} \Delta \xi + O(\Delta \xi^2),$$

ou

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{i,j} = \frac{u(i+1, j) - u(i-1, j)}{2\Delta \xi} + O(\Delta \xi^2). \quad (3.13)$$

Adicionando (3.11) e (3.12), obtém-se

$$u(i+1, j) + u(i-1, j) = 2u(i, j) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} (\Delta \xi)^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_{i,j} = \frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{(\Delta \xi)^2} + O(\Delta \xi^2) \quad (3.14)$$

Como em geral se escolhe $\Delta \xi = 1$, as aproximações para a primeira e segunda derivada tornam-se

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \approx \frac{u(i+1, j) - u(i-1, j)}{2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \approx u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j) \quad (3.16)$$

Portanto, as expressões (3.15) e (3.16) são aproximações em diferenças finitas de segunda ordem, centrais, para a primeira e segunda derivadas de u , respectivamente.

A expressão em diferenças finitas para as derivadas em relação a η é obtida da mesma forma; assim, os termos $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ podem ser aproximados por

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \approx \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \approx u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1) \quad (3.18)$$

A aproximação para a derivada mista é obtida diretamente utilizando o mesmo raciocínio; logo, o termo $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &\approx \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \approx \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{u(i+1, j+1) - u(i-1, j+1)}{2} - \frac{u(i+1, j-1) - u(i-1, j-1)}{2} \right) \\ &\approx \frac{u(i+1, j+1) - u(i-1, j+1) - u(i+1, j-1) + u(i-1, j-1)}{4} \end{aligned} \quad (3.19)$$

A discretização para o termo temporal $\frac{\partial u}{\partial t}$, por exemplo, fornece relações entre valores de u em instantes sucessivos de tempo, ou seja, entre o tempo atual t e o tempo futuro $t + \Delta t$ conforme

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^t}{\Delta t} \quad (3.20)$$

As equações (3.15) - (3.20) são as aproximações para o caso bidimensional. Utilizando o mesmo raciocínio, obtém-se as aproximações para o caso tridimensional para uma variável genérica ϕ que pode representar as velocidades u , v e w e a pressão p , conforme (para $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \gamma = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\phi_{i,j,k}^{t+\Delta t} - \phi_{i,j,k}^t}{\Delta t} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} &= \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} &= \phi_{i+1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-1,j,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} &= \phi_{i,j+1,k} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1,k} & (3.21) \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma^2} &= \phi_{i,j,k+1} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j,k-1} \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\phi_{i+1,j+1,k} - \phi_{i+1,j-1,k} - \phi_{i-1,j+1,k} + \phi_{i-1,j-1,k}}{4} \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \gamma} &= \frac{\phi_{i+1,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k-1} - \phi_{i-1,j,k+1} + \phi_{i-1,j,k-1}}{4} \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \gamma} &= \frac{\phi_{i,j+1,k+1} - \phi_{i,j-1,k+1} - \phi_{i,j+1,k-1} + \phi_{i,j-1,k-1}}{4}
\end{aligned}$$

As aproximações (3.21) são, então, substituídas nas equações governantes do escoamento e, em cada uma delas, isola-se a variável de interesse. Um exemplo é a aproximação explícita em diferenças finitas para a equação (3.4); que resulta em:

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j,k}^{t+\Delta t} - u_{i,j,k}^t}{\Delta t} + u \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2} \xi_x + \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2} \eta_x + \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}}{2} \gamma_x \right)^t \\
&+ v \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2} \xi_y + \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2} \eta_y + \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}}{2} \gamma_y \right)^t \\
&+ w \left(\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i-1,j,k}}{2} \xi_z + \frac{u_{i,j+1,k} - u_{i,j-1,k}}{2} \eta_z + \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k-1}}{2} \gamma_z \right)^t \\
&= - \left(\frac{p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k}}{2} \xi_x + \frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j-1,k}}{2} \eta_x + \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1}}{2} \gamma_x \right)^t \\
&+ \frac{1}{Re} \left[2\varphi \frac{u_{i+1,j+1,k} - u_{i+1,j-1,k} - u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k}}{4} \right. \\
&+ \alpha(u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}) + \beta(u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}) \\
&+ \zeta(u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}) \\
&+ 2\chi \frac{u_{i+1,j,k+1} - u_{i+1,j,k-1} - u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1}}{4} \\
&\left. + 2\psi \frac{u_{i,j+1,k+1} - u_{i,j-1,k+1} - u_{i,j+1,k-1} + u_{i,j-1,k-1}}{4} \right]^t
\end{aligned}$$

No próximo item é discutida a importância da utilização de dissipação artificial e a forma como ela é usada neste trabalho.

3.5 Dissipação artificial

A dissipação artificial é útil quando do emprego das equações de Euler para escoamentos a baixa velocidade pois, como visto, estas equações não levam em consideração a viscosidade do fluido, ou seja, elas não possuem termos difusivos, responsáveis pela redução a zero da velocidade do fluido nas proximidades da superfície, o que auxilia na dissipação do erro numa solução numérica. Adiciona-se o fato de que as aproximações são todas feitas em diferenças centrais, as quais não são dissipativas. Por esta razão, é preciso simular numericamente o efeito físico representado pela viscosidade, caso contrário, a convergência do método pode ser muito lenta.

A dissipação artificial, difusão falsa ou difusão numérica é um efeito puramente numérico. Obviamente, esse efeito é indesejado em um método numérico que trata de um problema que não possui mecanismos dissipativos. Desta forma, na solução de problemas hiperbólicos complexos, muitas vezes é necessária a adição explícita de alguma difusão para estabilizar o método numérico.

Para entender a origem dessa difusão considere a equação de convecção, em que a velocidade de convecção $v > 0$ é constante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.22)$$

Aproximando esta equação em diferenças finitas obtém-se [13], por exemplo

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t - v \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^t - u_{i-1}^t) \quad (3.23)$$

Usando expansões de Taylor para os termos $u_i^{t+\Delta t}$ e u_{i-1}^t em torno do ponto (x_i, t_n) obtém-se

$$\begin{aligned} u_i^{t+\Delta t} &= u_i^t + (\Delta t) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots \\ u_{i-1}^t &= u_i^t - (\Delta x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo esses termos na equação (3.23), fica-se com

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - v \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ &+ O[(\Delta t)^3, (\Delta x)^3]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A eliminação das derivadas temporais da equação (3.25) que contenham termos até $O(\Delta t)^2$ inclusive, resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} &= v \frac{\Delta x}{2} (1 - C) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{(\Delta x)^2}{6} (2C^2 - 3C + 1) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ &+ O[(\Delta t)^3, (\Delta x)(\Delta t)^2, (\Delta x)^2(\Delta t), (\Delta x)^3]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde

$$C = v \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.27)$$

é o número de Courant [13].

A equação (3.26) é aquela que efetivamente está sendo resolvida. A equação diferencial parcial original está à esquerda; à direita estão os termos do erro local de truncamento que, quando diferentes de zero, afetam a solução numérica.

Quando $C = 1$, todos os termos que compõem o erro local de truncamento são identicamente nulos. Nesse caso, o método numérico efetivamente resolve somente a equação original, sem os erros locais de truncamento associados ao processo de discretização. É por isso que, quando $C = 1$, obtemos a solução exata $u_i^{t+\Delta t} = u_{i-1}^t$

Quando $C \neq 1$, os termos do lado direito de (3.26) são diferentes de zero. Em particular, nota-se que o termo dominante do erro local de truncamento é uma derivada de segunda ordem. O coeficiente dessa derivada,

$$\alpha_{art} = v \frac{\Delta x}{2} (1 - C) \quad (3.28)$$

é conhecido como (coeficiente de) *viscosidade artificial* ou *numérica* e, seu efeito, é o de dissipar a solução, reduzindo os gradientes. Em geral, não só as derivadas de segunda ordem, mas todas as derivadas de ordem par produzem este efeito [28], [51].

Neste trabalho, utiliza-se dissipação artificial de quarta ordem para a pressão da forma

$$\nabla \Delta \nabla \Delta p_i \quad (3.29)$$

onde,

$$\begin{aligned}\Delta p_i &= p_{i+1} - p_i \\ \nabla p_i &= p_i - p_{i-1}\end{aligned}\tag{3.30}$$

o que resulta no termo adicionado para a equação da pressão (2.20),

$$p_i = p_{i+2} - 4p_{i+1} + 6p_i - 4p_{i-1} + p_{i-2}\tag{3.31}$$

A seguir discute-se os métodos de solução adotados para resolver o sistema de equações aproximadas.

3.6 Métodos de solução

São inúmeros os métodos que podem ser empregados na resolução das equações do escoamento na forma aproximada $Ax = b$. Cada método possui vantagens e desvantagens. A escolha do método mais apropriado para resolver um determinado sistema de equações governantes de um problema físico não é uma tarefa fácil. Porém, trabalhos encontrados na literatura indicam que métodos como SUR (Método de Relaxações Sucessivas), MSI (“Modified Strongly Implicit Procedure”) e Runge-Kutta são de aplicação fácil e eficiente [9].

No problema apresentado utiliza-se um método de Runge-Kutta simplificado para o cálculo das velocidades u , v e w . Este é utilizado porque os seus coeficientes podem ser selecionados de forma a obter soluções de alta precisão temporal utilizando as características de amortecimento do erro da solução. Tratando-se de um escoamento essencialmente incompressível escolhe-se o Runge-Kutta de 3 estágios simplificado (que requer menos memória computacional que o método de Runge-Kutta clássico) [9]:

As equações (2.17)-(2.19) podem ser colocadas na forma

$$\frac{\partial \vec{W}_{ijk}}{\partial t} + \vec{R}_{ijk} = 0\tag{3.32}$$

onde $\vec{W} = \{u, v, w\}^T$ e \vec{R} é a discretização espacial dos termos convectivos e difusivos.

Então,

$$\begin{aligned}\vec{W}_{ijk}^{(0)} &= \vec{W}_{ijk}^{(t)} \\ \vec{W}_{ijk}^{(l)} &= \vec{W}_{ijk}^{(0)} - \alpha_l \Delta t \vec{R}_{ijk}^{(l-1)} & l = 1, 2, 3 \\ \vec{W}_{ijk}^{(t+\Delta t)} &= \vec{W}_{ijk}^{(l)}\end{aligned}$$

Os coeficientes para uma aproximação temporal de segunda ordem, para o esquema de 3 estágios, são [25]

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 1. \quad (3.33)$$

Para a equação da pressão utiliza-se o SUR ao método de Gauss-Seidel pois nesta não aparece o termo temporal da pressão. O SUR consiste na aplicação de uma correção para os valores calculados a cada passo, onde a constante ϖ representa a relaxação. O valor de ϖ varia entre 0 e 2, sendo classificado como um processo de sobrelaxação para $1 < \varpi < 2$ (problemas parabólicos e hiperbólicos) e, como um processo de subrelaxação para $0 < \varpi < 1$ (problemas elípticos e oscilatórios) [9]. Como a pressão tem caráter elíptico, escolhe-se $\varpi = 0,7$ (subrelaxação). O SUR aplicado para a pressão resulta em:

$$p_{ijk}^{t+\Delta t} = p_{ijk}^t + \varpi(p_{ijk}^{t+\Delta t} - p_{ijk}^t) \quad (3.34)$$

Para o caso tridimensional optou-se ainda pelo amortecimento do termo conservação da massa em relação ao tempo (d_t) usando coeficiente multiplicativo 0,1, uma vez que este auxilia a convergência e não interfere no resultado final, pois a conservação da massa tende a zero quando da convergência do processo iterativo.

Uma vez obtidos os métodos de solução das equações governantes, a seguir são apresentadas as condições de contorno utilizadas neste trabalho.

3.7 Condições de contorno

O sistema de equações diferenciais que modela os fenômenos de interesse necessita de condições de contorno e iniciais apropriadas para ser resolvido. As condições de contorno e as iniciais ditam a solução particular a ser obtida das equações governantes. Para a condição inicial os valores da corrente livre são geralmente empregados. Conhecendo-se o comportamento da solução pode-se melhorar a estimativa inicial.

As condições de contorno empregadas neste trabalho são de parede, de tangência, longe do corpo, de corte e de extrapolação; cada uma é introduzida a seguir.

* PAREDE

Estabelece a condição de fluxo nulo através da fronteira, ou seja, a velocidade no contorno do domínio ($j=1$) deve ser zero, conforme mostra a figura 3.8.

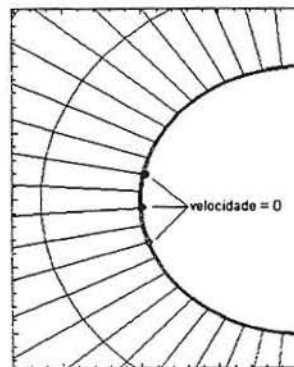


Figura 3.8: Condição de contorno de parede

Então, para parede em $j = 1$, resulta

$$\begin{aligned}
 u_{i,1,k} &= 0 \\
 v_{i,1,k} &= 0 \\
 w_{i,1,k} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

* TANGÊNCIA

Esta condição é útil no contorno da geometria quando se utiliza as equações de Euler. Para um escoamento invíscido (sem viscosidade) o fluido deve deslizar sobre a superfície; isto é feito através da velocidade tangencial (figura 3.9):

$$\vec{V}_{ta} = \vec{n} \vec{V} \cdot \vec{n}$$

onde \vec{V} é o vetor velocidade e \vec{n} é o vetor normal, ou ainda

$$u_{ta} = \frac{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \Delta x$$

$$v_{ta} = \frac{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \Delta y$$

$$w_{ta} = \frac{u\Delta x + v\Delta y + w\Delta z}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \Delta z$$

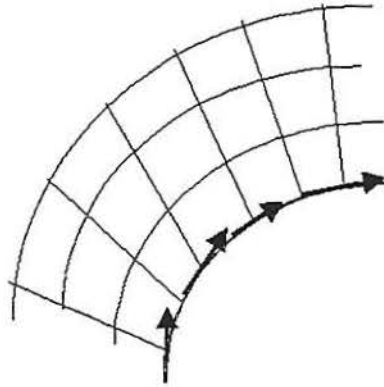


Figura 3.9: Condição de contorno de tangência

* LONGE DO CORPO (“FAR FIELD”)

A condição de contorno longe do corpo é muito importante para escoamentos externos a baixa velocidade. Esta condição é obtida empregando o conceito de variáveis características, executando a transformação de coordenadas do sistema (x, y, z) para o sistema (ξ, η, γ) . Assumindo que a fronteira longe do corpo coincida com a linha $\eta = \text{constante}$, o escoamento unidimensional, normal ao contorno, é

governado pela equação característica [52]

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + D_\eta \frac{\partial \vec{W}}{\partial \eta} = 0 \quad (3.36)$$

onde $\vec{W} = \{u, v, w, p\}^T$ e D_η é a matriz jacobiana associada à direção característica.

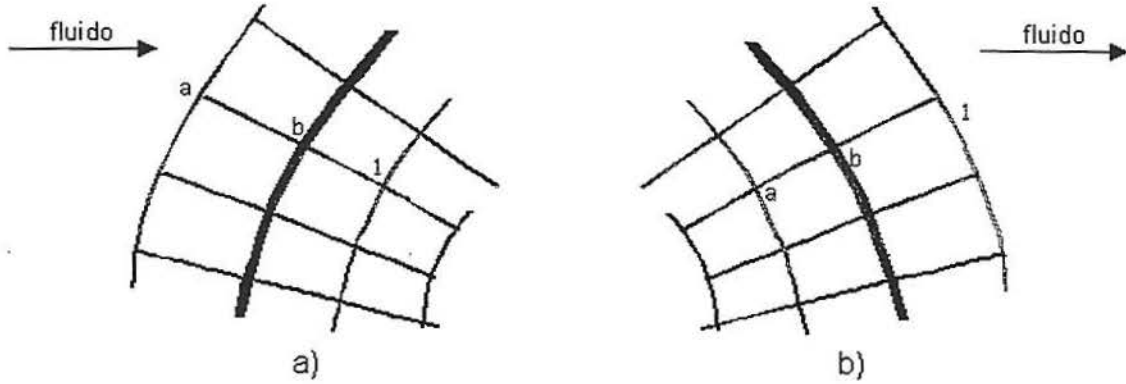


Figura 3.10: Condição de contorno longe do corpo; a) entrada b) saída

Para a entrada de fluido no domínio, de acordo com a figura 3.10 a), obtém-se [52],

$$u_b = u_a \pm \frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} \frac{p_a - p_b}{\rho_0 c_0} \quad (3.37)$$

$$v_b = v_a \pm \frac{\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} \frac{p_a - p_b}{\rho_0 c_0} \quad (3.38)$$

$$w_b = w_a \pm \frac{\eta_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} \frac{p_a - p_b}{\rho_0 c_0} \quad (3.39)$$

$$p_b = \frac{1}{2} \left\{ p_a + p_l \pm \rho_0 c_0 \left[\frac{\eta_x (u_a - u_l)}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} + \frac{\eta_y (v_a - v_l)}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} + \frac{\eta_z (w_a - w_l)}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} \right] \right\} \quad (3.40)$$

Para a saída do fluido no domínio, conforme mostra a figura 3.10 b), resulta:

$$u_b = u_a \pm \frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} \frac{p_a - p_b}{\rho_0 c_0} \quad (3.41)$$

$$v_b = v_a \pm \frac{\eta_y}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} \frac{p_a - p_b}{\rho_0 c_0} \quad (3.42)$$

$$w_b = w_a \pm \frac{\eta_z}{\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2}} \frac{p_a - p_b}{\rho_0 c_0} \quad (3.43)$$

$$p_b = p_l \quad (3.44)$$

onde ρ_0 e c_0 são valores de referência (corrente livre) e o sinal \pm que aparece nas equações anteriores é estabelecido pelo cálculo da velocidade contravariante que indica a direção do fluxo.

* UM CORTE

Uma geometria simplesmente conexa (onde qualquer segmento de reta unindo dois pontos arbitrários pertencentes a esta geometria está inteiramente contido dentro da mesma) é menos complexa e é geralmente possível mapeá-la em um único bloco retangular. Portanto, para obter uma região simplesmente conexa introduz-se cortes no domínio ligando o contorno interno ao externo da região, de tal forma a tornar a região simplesmente conexa (figura 3.11). Cuidados especiais de-

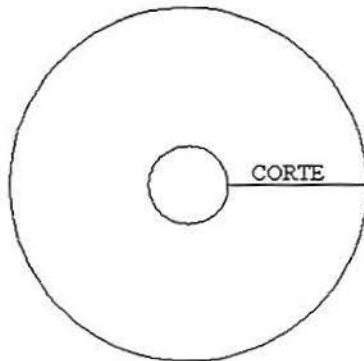


Figura 3.11: Corte

vem ser dados aos cortes. Fisicamente, esta região não apresenta nenhuma diferença em relação a qualquer outro ponto interior da malha. Isto significa que se temos continuidade das linhas coordenadas passando num ponto interior da malha, devemos ter continuidade também nas linhas coordenadas passando sobre um ponto do corte. As linhas coordenadas precisam ser suaves nos pontos do corte tal qual possuem os outros pontos; caso contrário os erros de truncamento podem ser maiores nessa região do que nas outras [49]. Assim, considere a malha tipo O da figura 3.12 em torno do corpo, onde o domínio físico é transformado para o computacional introduzindo um corte.

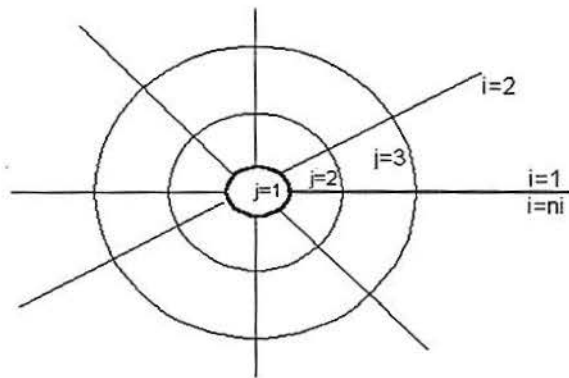


Figura 3.12: Malha tipo O

A continuidade do valor das variáveis deve ser feita da seguinte maneira

$$\vec{W}_{1,j,k} = \vec{W}_{ni,j,k} \quad j = 1, 2, \dots, nj \quad e \quad k = 1, 2, \dots, nk \quad (3.45)$$

* EXTRAPOLAÇÃO

Quando os valores das variáveis não são conhecidos na fronteira, faz-se uma extrapolação utilizando os valores de células adjacentes. Por exemplo, para saber o valor de uma variável qualquer na superfície da geometria (figura 3.13), ou seja, para o ponto $(i, 1, k)$ pode-se utilizar a seguinte extrapolação: $\phi(i, 1, k) = 2\phi(i, 2, k) - \phi(i, 3, k)$ ou a extrapolação $\phi(i, 1, k) = 0,75\phi(i, 2, k) + 0,25\phi(i, 3, k)$. A primeira utiliza maior influência da célula imediatamente vizinha que a segunda.

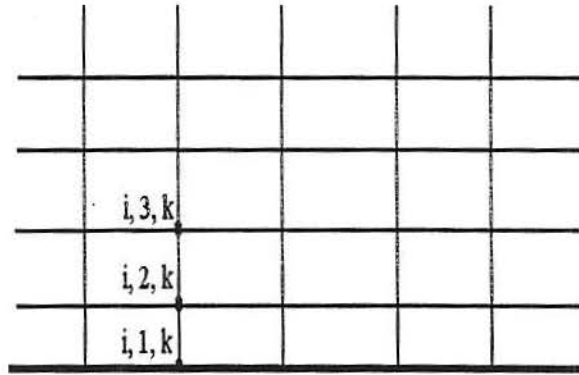


Figura 3.13: Condição de contorno de extrapolação

Segue, na próxima seção, o critério de convergência utilizado no trabalho.

3.8 Critério de convergência

A solução numérica de problemas de escoamento contém imprecisões, as quais podem ser indicadas pelo critério de convergência. A escolha do critério mais apropriado para interromper a execução do programa não é uma decisão fácil. Alguns problemas possuem convergência lenta e, caso a execução seja interrompida por um critério mal escolhido, pode-se estar longe da solução [9]. Por outro lado, usando um critério muito severo, pode-se manter o programa iterando sem necessidade. Para problemas compressíveis, geralmente o critério de convergência é baseado na massa específica. Mas como a pressão varia tanto para problemas compressíveis como incompressíveis, esta pode ser usada como critério para escoamentos a qualquer velocidade [9]. Neste trabalho, por tratar-se de um escoamento incompressível, optamos por utilizar o erro relativo na pressão como critério de convergência, sendo o mesmo:

$$\varepsilon = \frac{|p - p^0|}{p_0} < tol \quad (3.46)$$

onde

ε é o erro relativo da pressão,

p a pressão na iteração atual,

p^0 a pressão na iteração anterior,

p_0 a pressão inicial,

tol é a tolerância (precisão) especificada: $tol = 10^{-5}$.

A seguir é apresentado o fluxograma do código computacional utilizado neste trabalho.

3.9 Fluxograma do código computacional

Os programas utilizados neste trabalho são implementados em linguagem FORTRAN 90. O procedimento de solução pode ser resumido no fluxograma da figura 3.14, o qual representa o código utilizado para a solução do problema.

O primeiro passo do algoritmo é atribuir valores para as variáveis, a seguir constrói-se a malha calculando os pontos no sistema cartesiano de coordenadas; em seguida faz-se a transformação de coordenadas cartesianas para generalizadas e considera-se as condições iniciais. Após inicia-se o cálculo iterativo obtendo, em cada ponto, as componentes do vetor velocidade através do método de Runge-Kutta e a pressão pelo SUR. Após o cálculo das velocidades e da pressão considera-se as condições de contorno. No estágio seguinte avalia-se a convergência do processo; se convergiu cria-se o arquivo de dados e finaliza-se o processo e, se não convergiu, retorna-se ao cálculo iterativo para as componentes do vetor velocidade e pressão até que o critério de parada seja satisfeito ou o nível de convergência desejado seja obtido.

Uma vez apresentado o método de solução das equações governantes mostra-se, no próximo capítulo, os resultados numéricos obtidos com a metodologia descrita até o momento.

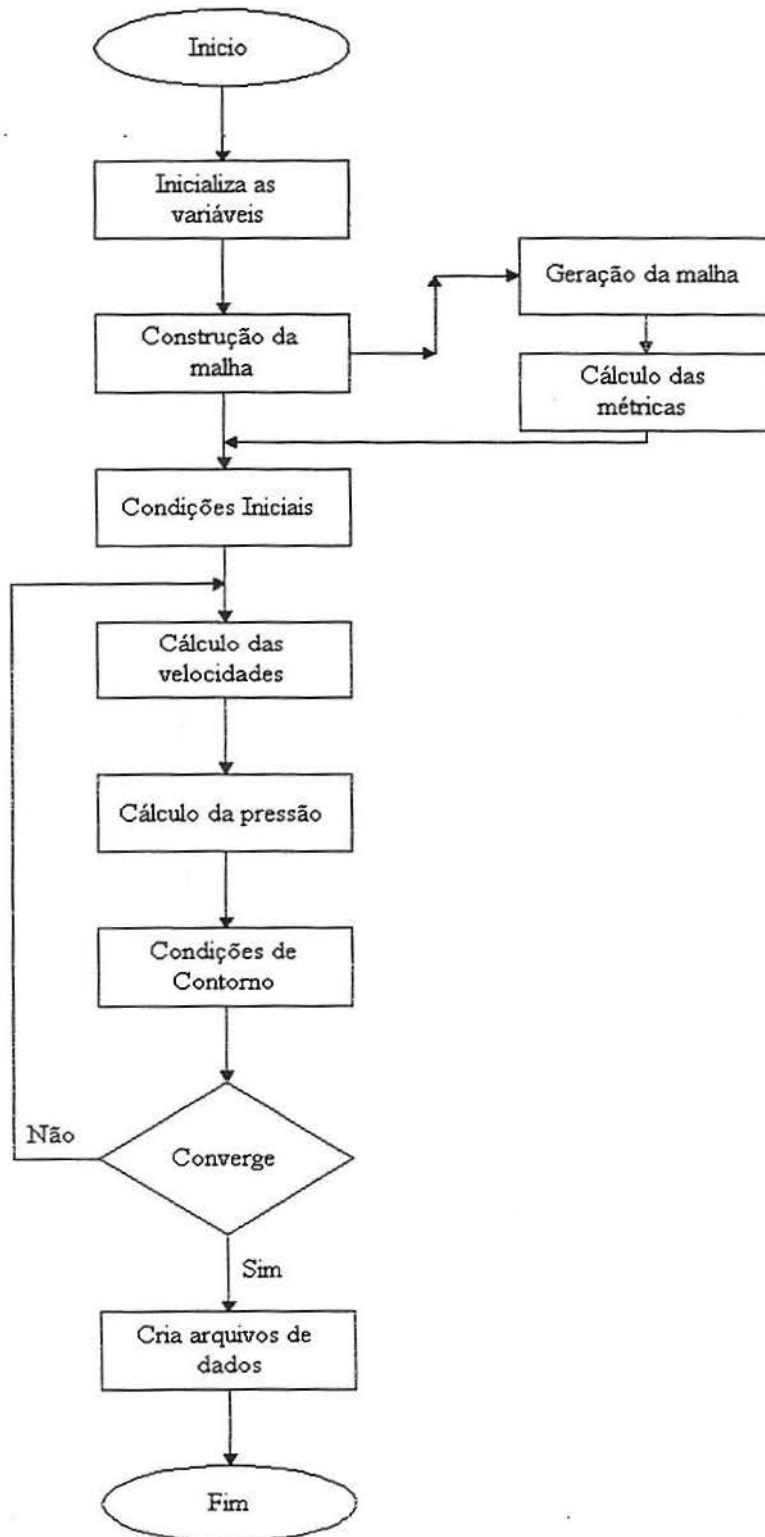


Figura 3.14: Fluxograma do código computacional

4 RESULTADOS

Neste capítulo, resultados bi e tridimensionais são apresentados para as diferentes geometrias analisadas. A visualização dos resultados é feita através dos softwares Visual 2D, Visual 3D e Graph 2D [22]. O primeiro e o segundo são utilizados na análise dos escoamentos bi e tridimensional, respectivamente, ao passo que o terceiro é utilizado para fazer a comparação dos coeficientes de pressão.

4.1 Resultados Bidimensionais

As simulações são feitas primeiramente para o caso bidimensional. A princípio, estuda-se o escoamento através da geometria da seção de um cilindro com a finalidade de calibrar o código computacional via comparação com dados analíticos existentes. Em seguida, estuda-se uma geometria mais complexa: a seção aproximada de um tubarão.

4.1.1 Seção de um Cilindro

O teste básico em dinâmica dos fluidos, o estudo do escoamento sobre um cilindro circular uniforme, tem sido examinado extensivamente tanto no âmbito computacional como no experimental; este é considerado um forte teste para diferentes métodos de soluções numéricas [39].

Para a análise do escoamento em torno da seção de um cilindro, constrói-se uma malha de 90x48 células. De acordo com a seção 3.2, uma boa malha deve ser refinada em certas regiões. Neste caso, isto deve acontecer na direção η (coincidente com a fronteira externa) próxima à superfície do corpo, onde tem-se os

maiores gradientes. A figura 4.1a ilustra a malha utilizada, sendo que o refinamento fica evidente na figura 4.1b. O raio interno do cilindro mede 10cm e o externo 3m, ou seja, o domínio externo é de 30 vezes o interno.

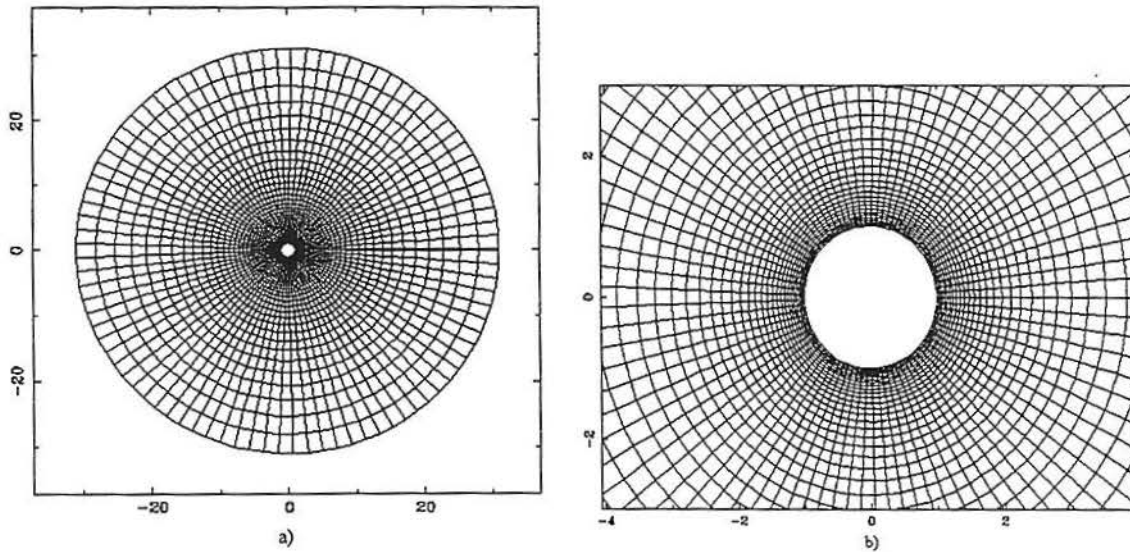


Figura 4.1: Malha para o cilindro; a)visão global, b)amplificação

O primeiro passo é realizar um teste com as equações de Euler. Para entender a aplicação das condições de contorno considere a figura 4.2, onde a posição de cada contorno está bem definida.



Figura 4.2: Domínio indicando as condições de contorno

As condições de contorno utilizadas são as seguintes: para a região sul tem-se a condição de tangência para a velocidade e de extrapolação para a pressão; para a norte, a condição “far field” para a pressão e de extrapolação para a velocidade (utilizando 75% do valor da corrente livre); para a leste/oeste, a condição de corte.

A figura 4.3 indica como está sendo considerada a variação do ângulo θ em torno do cilindro.

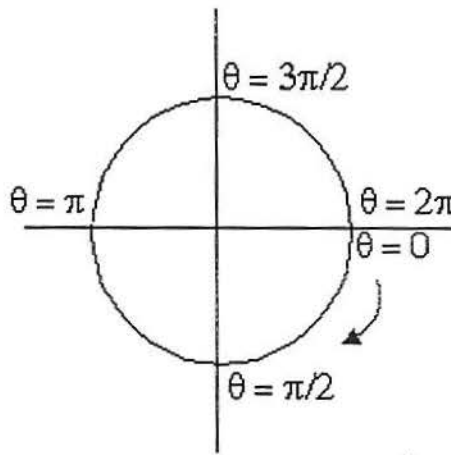


Figura 4.3: Variação do ângulo

Comparando os coeficientes de pressão da solução analítica e numérica, conforme ilustra a figura 4.4 [3], percebe-se a semelhança entre estas soluções. A solução analítica para o coeficiente de pressão do cilindro é $C_p = 2\cos(2\theta) - 1$ [26].

Para o caso incompressível, o coeficiente de pressão, em um ponto i , é obtido [2] via equação de Bernoulli

$$C_{p,i} = 1 - \left(\frac{V_i}{V_0}\right)^2 \quad (4.1)$$

onde V_i é a velocidade calculada no ponto i e V_0 é a velocidade da corrente livre,

$$V_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}$$

$$V_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$$

O coeficiente de pressão também pode ser calculado através da fórmula

$$C_{p,i} = \frac{p_i - p_0}{\frac{1}{2}\rho V_0^2} \quad (4.2)$$

onde p_i é a pressão calculada no ponto i , p_0 a pressão da corrente livre, ρ a massa específica e V_0 a velocidade da corrente livre. Utiliza-se, para o cálculo do coeficiente de pressão a equação (4.1) ao invés da (4.2) porque a distribuição é melhor se obtida pela diferença de velocidade. Tal comportamento é observado também em métodos baseados em técnicas de acoplamento pressão-velocidade como o de Patankar [33], Raithby [37] e seguidores.

Observa-se que o valor máximo obtido para o coeficiente de pressão é um. Isto ocorre em $\theta=0$, $\theta=\pi$ e $\theta=2\pi$, ou seja, nos pontos onde a velocidade é zero; portanto, de acordo com a equação (4.1) temos $C_p=1$. Pode-se observar também que o valor mínimo para o coeficiente de pressão é -3 , o qual ocorre em $\theta=\pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, ou seja, nos pontos onde a velocidade é máxima (cerca de duas vezes o valor da corrente livre) e, novamente, de acordo com a equação (4.1) temos $C_p=-3$. Nota-se, na figura 4.4 b, que a região onde o coeficiente de pressão é menor ($C_p=-3$) existe uma pequena diferença entre as soluções analítica e numérica.

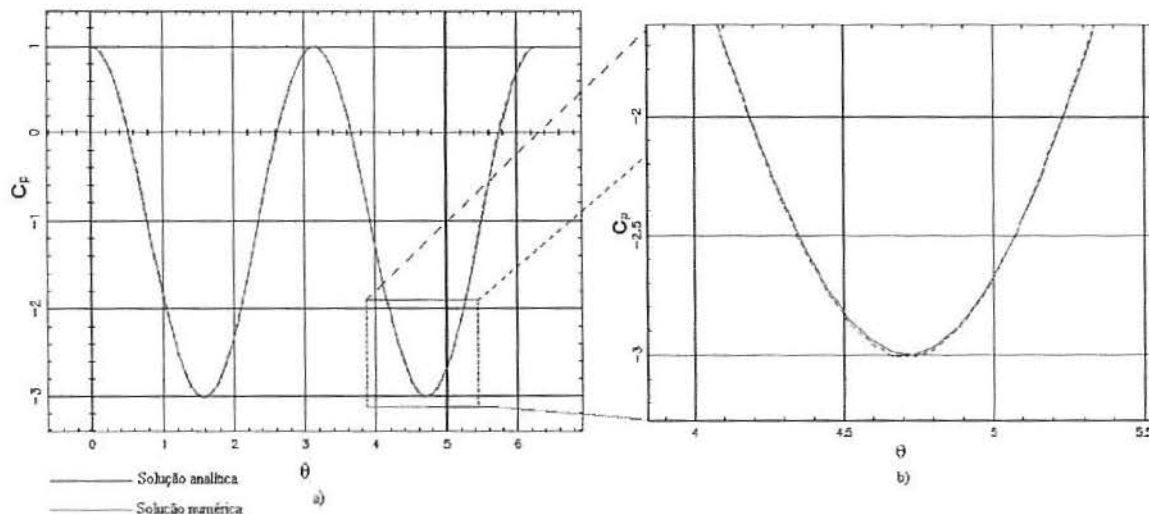


Figura 4.4: Comparação do coeficiente de pressão para o cilindro; a) visão global, b) amplificação

A figura 4.5 mostra o coeficiente de pressão em torno do cilindro. Pode-se observar que a pressão é maior nas regiões onde o ângulo entre o escoamento e o corpo é 0 ou π (figura 4.3), próximas à superfície do corpo. Isto acontece porque, nesta região, a velocidade é pequena (a pressão é inversamente proporcional ao quadrado da velocidade). Observa-se também que as linhas de pressão são simétricas, uma vez que os termos viscosos não foram considerados. A comparação deste resultado com os encontrados na literatura é adequada, conforme mostra a figura 4.6 [40].

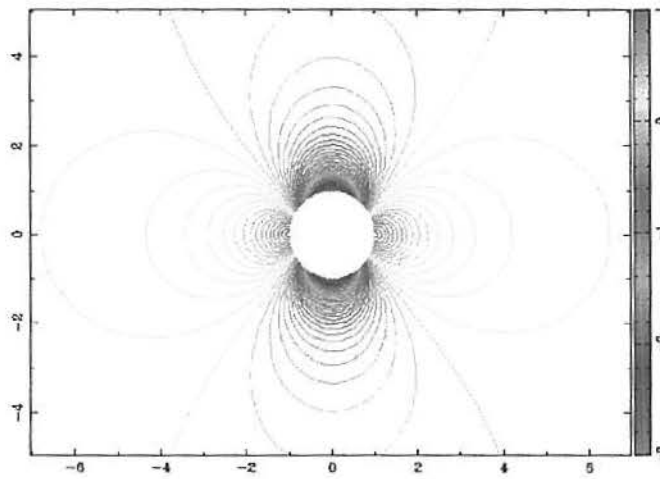


Figura 4.5: Coeficiente de pressão sobre o cilindro

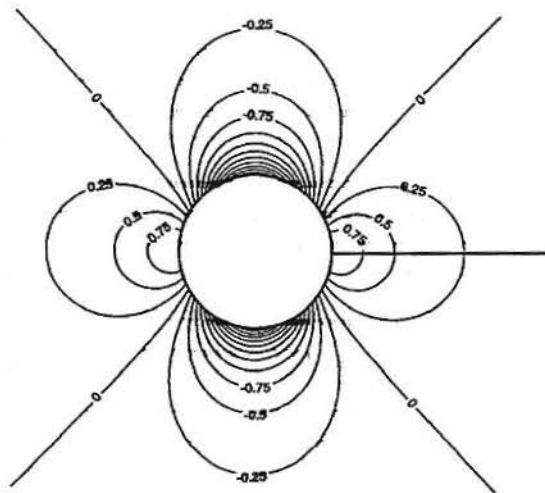


Figura 4.6: Coeficiente de pressão sobre o cilindro [40], [9]

O campo de velocidades pode ser visto na figura 4.7. Os vetores velocidade representam a direção do fluxo e mostram a variação da velocidade ao longo do escoamento, sendo a velocidade longe do corpo a da corrente livre. À medida que a proximidade do cilindro aumenta, os vetores começam a diminuir em magnitude e, ao “perceberem” a presença do corpo, sua única alternativa é contorná-lo (devido à condição de tangência). Desta forma, sua velocidade é máxima (da ordem de 2 vezes a da corrente livre) nas partes superior e inferior do cilindro (ângulos $\pi/2$ e $3\pi/2$ conforme figura 4.3).

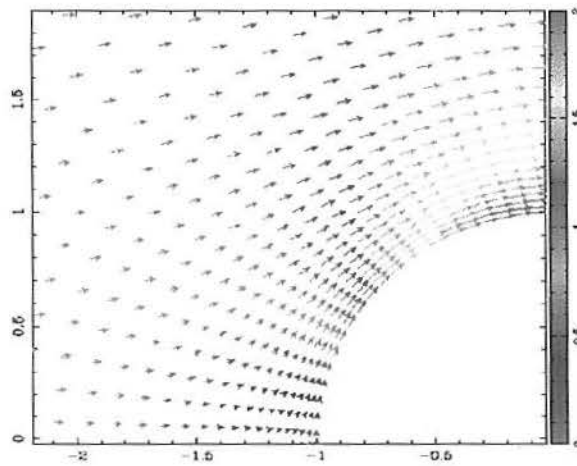


Figura 4.7: Campo de velocidades sobre o cilindro

A figura 4.8 mostra as linhas de corrente. Estas são tangentes ao vetor velocidade em cada ponto no escoamento num dado instante, não podendo haver escoamento transversalmente a elas [14]. Nota-se que as linhas de corrente são simétricas tanto em relação ao eixo dos x quanto ao dos y . Tais linhas tendem a contornar a superfície do cilindro, principalmente próximo ao corpo. Quando estão suficientemente afastadas do cilindro, as linhas de corrente têm pequenos desvios relacionados ao escoamento principal. O fluido, ao longo da linha de corrente central, colide com o cilindro em torno do ponto A, divide-se e escoar em volta dele. O ponto A é chamado de ponto de estagnação (ponto onde a velocidade é zero). Os resultados obtidos estão de acordo com o que é apresentado na literatura [14], onde as linhas de corrente podem ser vistas na figura 4.9

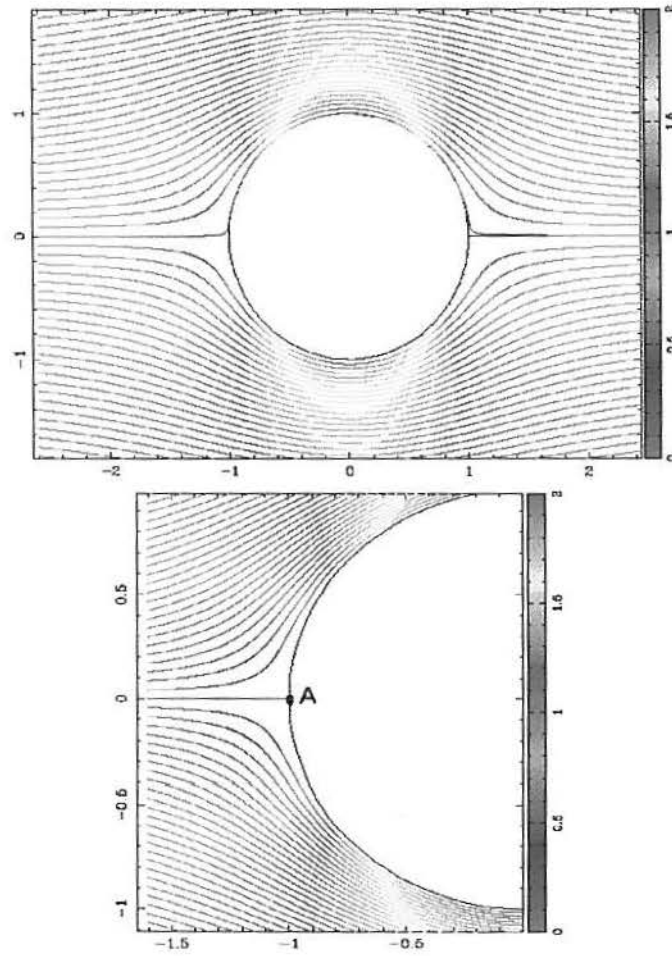


Figura 4.8: Linhas de corrente sobre o cilindro, com amplificação da parte frontal

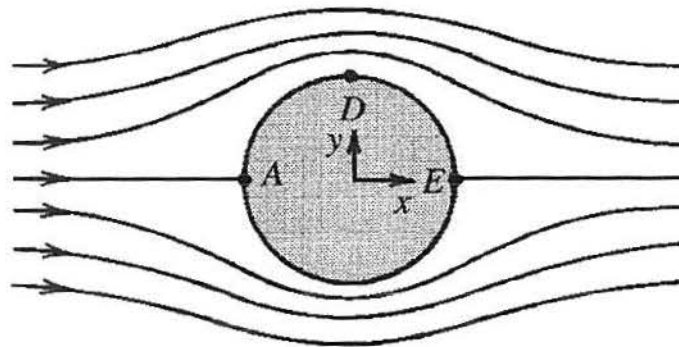


Figura 4.9: Linhas de corrente sobre o cilindro [14]

O segundo passo é a realização de testes para as equações de Navier-Stokes. As condições de contorno utilizadas são as seguintes: para a região sul do corpo tem-se a condição de parede para as velocidades ($u = v = 0$) e de extrapolação para a pressão; para a norte tem-se a condição “far field” para a pressão e de extrapolação para a velocidade, induzindo à formação de vórtices (adiciona-se uma extrapolação que oscila da forma $u(i, nj) = u(i, nj) \pm 0,00001u(i, nj)$ após uma extrapolação utilizando 75% da velocidade inicial e 25% da velocidade calculada na célula anterior); para a região leste/oeste utiliza-se a condição de contorno para um corte.

A figura 4.10 ilustra as linhas de corrente para o caso em que $Re = 40$ e a figura 4.11 mostra o resultado obtido por Kawaguti [24]. Pode-se notar a presença de um par de vórtices simétricos na parte de trás (jusante) do cilindro. Bem afastado do corpo o escoamento é do tipo ideal, sendo o atrito pouco importante. Próximo ao corpo o fluido desenvolve uma camada (uma vez que a velocidade relativa ao corpo deve ser nula na superfície do mesmo) onde a viscosidade é importante. Esta sub-região é chamada de camada limite [20].

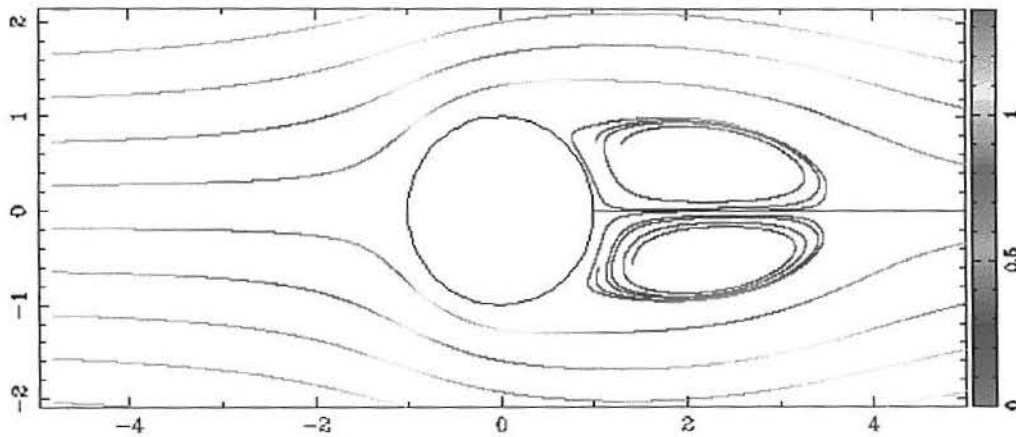


Figura 4.10: Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 40$

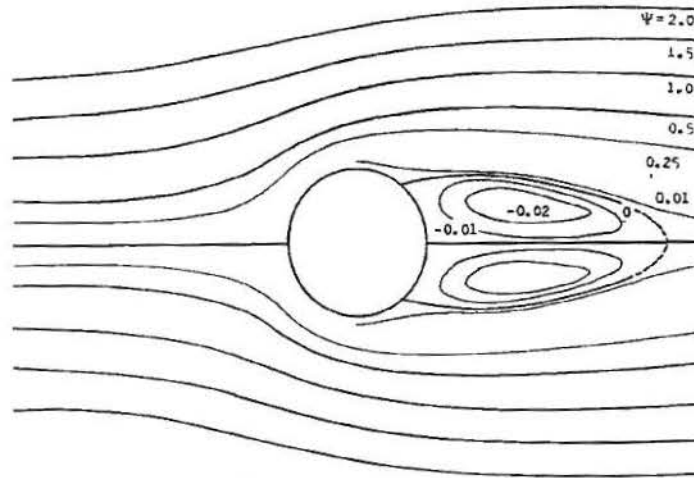


Figura 4.11: Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 40$ [24]

Testes realizados para $Re = 500$ são mostrados na figura 4.12 onde, através das linhas de corrente, observa-se o surgimento de vórtices secundários. Estes resultados quando comparados com os das figuras 4.13 e 4.14 obtidas, respectivamente, por [8] e [19] mostram concordância razoável. Salienta-se que para este número de Reynolds o escoamento é turbulento e que foi possível, mesmo sem os termos da turbulência, captar os vórtices secundários devido à utilização do sistema de coordenadas generalizadas.

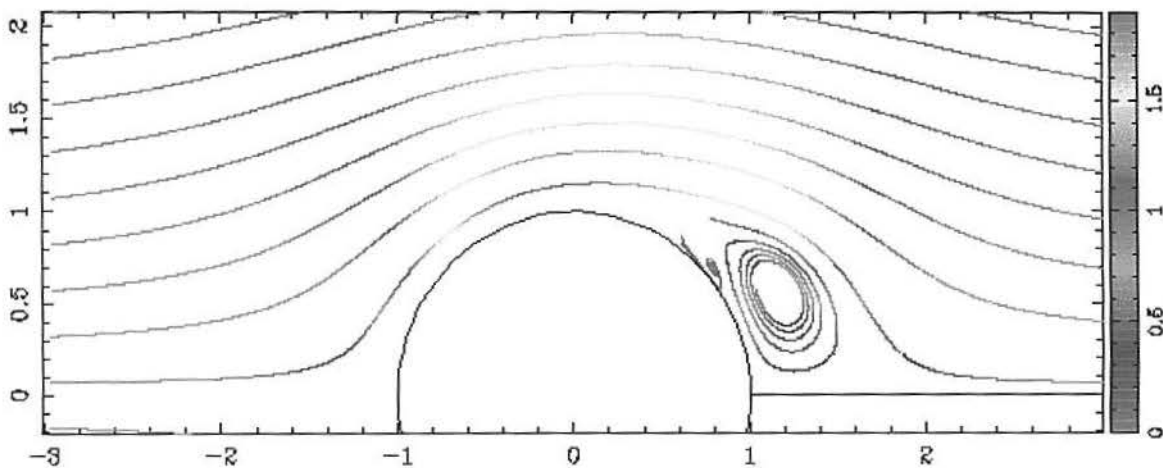


Figura 4.12: Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 500$

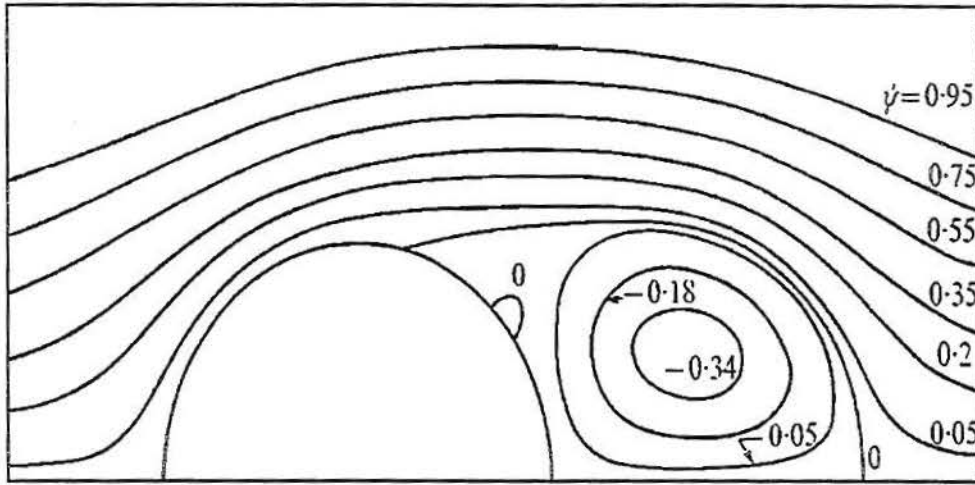


Figura 4.13: Linhas de corrente para o cilindro, $Re = 500$ [8]

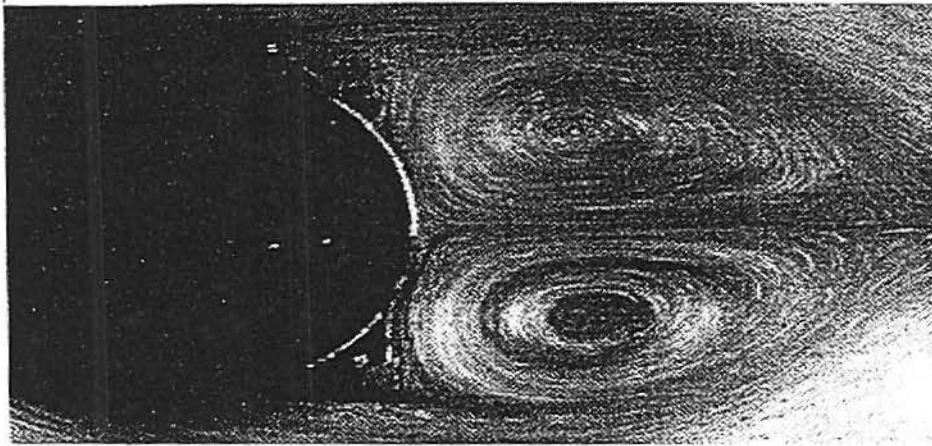


Figura 4.14: Linhas de corrente para o cilindro - $Re = 500$ [19]

Como o código desenvolvido apresenta resultados consistentes para a seção do cilindro e em boa concordância com os apresentados na literatura, considera-se que as etapas de calibração do código bidimensional estão satisfeitas. Conseqüentemente, pode-se passar para uma geometria mais complexa.

4.1.2 Geometria complexa - Seção de um tubarão

A figura 4.15 mostra a complexa geometria a ser simplificada e analisada. Optou-se por modelar a geometria do tubarão Mako por ser um dos peixes mais velozes. O tubarão Mako chega a 88 km/h e dentre os peixes só é menos rápido que o atum [31].

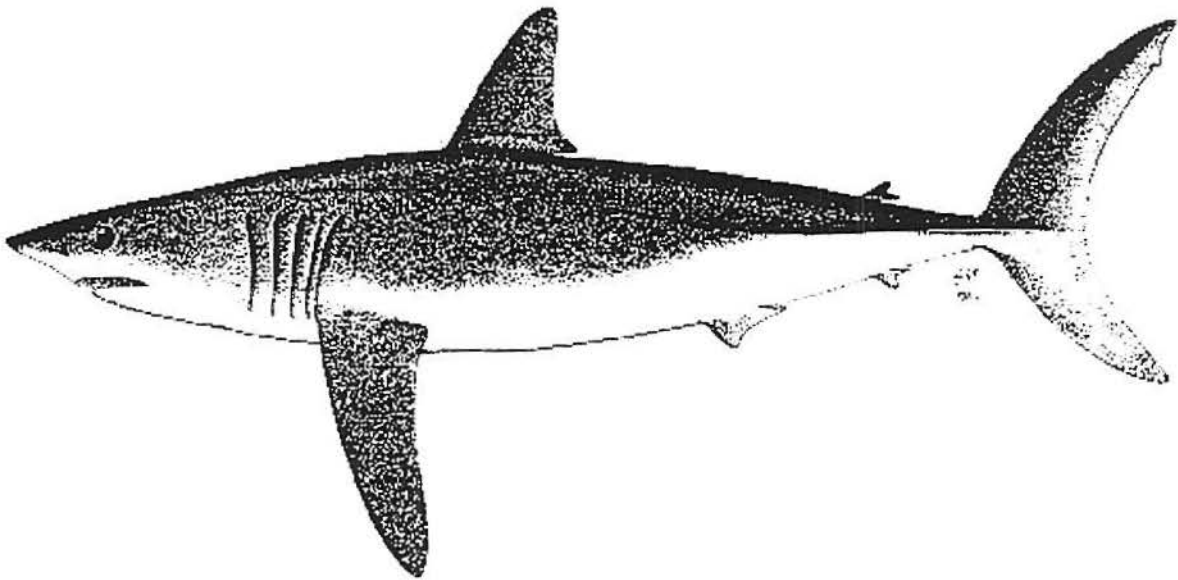


Figura 4.15: Tubarão Mako

Lembramos ainda a importância do entendimento do fluxo em torno de geometrias como esta, pois recentemente os alemães, confeccionando roupas para profissionais da natação baseadas nas características físicas dos peixes, conseguiram melhorar o desempenho destes atletas significativamente.

Para analisar de forma simplificada o fluxo em torno desta geometria utilizou-se uma malha de 92x48 células refinada próxima à superfície do corpo, como mostra a figura 4.16. É importante salientar as dificuldades para gerar esta malha; por exemplo, há dificuldade para concentrar as linhas na região de interesse pois outras regiões acabam não ficando com as células aproximadamente quadradas (razão de aspecto ≈ 1 a 2).

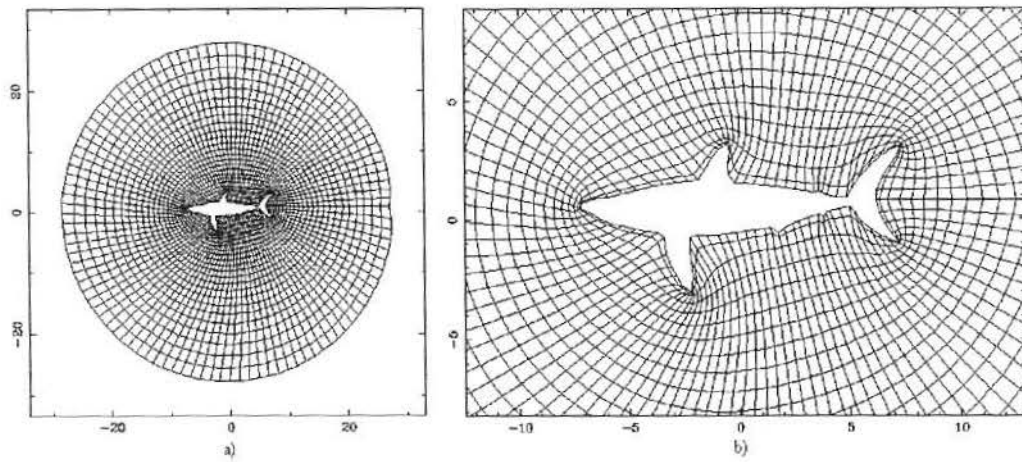


Figura 4.16: Malha em torno do tubarão; a) visão global, b) amplificação

As linhas de pressão vistas na figura 4.17 estão de acordo com o esperado, uma vez que nas regiões de baixa velocidade a pressão é elevada e, nas regiões onde a velocidade é maior, a pressão é menor.

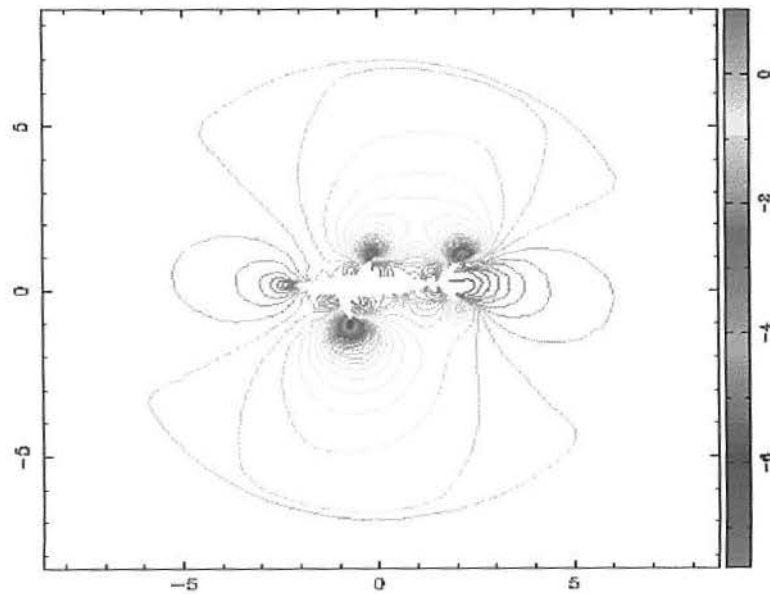


Figura 4.17: Linhas de pressão sobre geometria em forma de tubarão

A figura 4.18 mostra as linhas de corrente. Estas linhas tendem a contornar a superfície do corpo. Observa-se que algumas linhas tendem a terminar em alguns pontos, o que não é um efeito físico. Isto se deve à deficiência do “software” utilizado em representar linhas de corrente (cuja variação de magnitude é pequena).

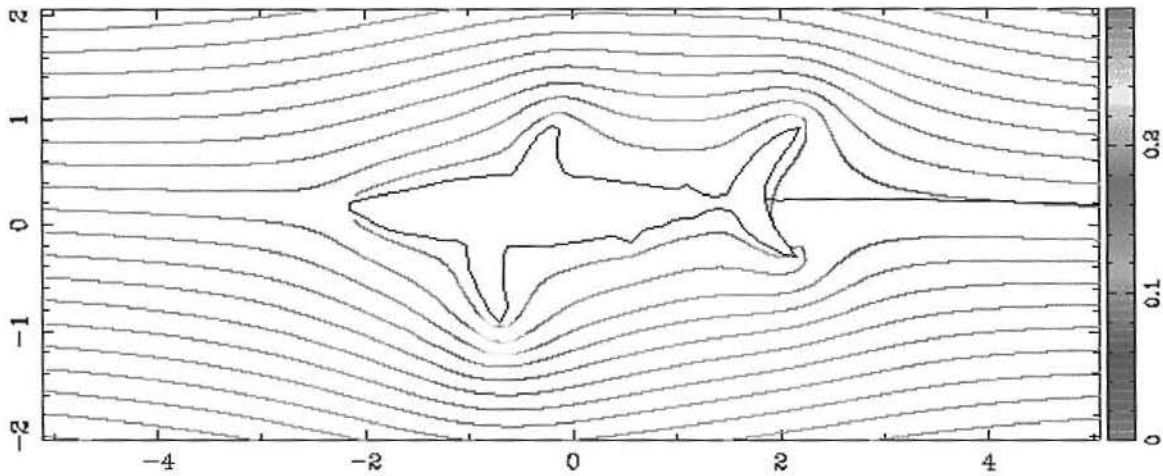


Figura 4.18: Linhas de corrente sobre geometria em forma de tubarão

Após a análise e comparação de alguns resultados bidimensionais, estende-se o estudo para o caso tridimensional em torno de uma esfera e de um elipsóide.

4.2 Resultados Tridimensionais

Antes de mais nada, é importante salientar aqui que um problema tridimensional não deve ser entendido apenas como um caso bidimensional acrescido de mais uma dimensão (visão inicial ou ilusória), mas sim como um acoplamento de k planos bidimensionais. Neste caso, o esforço computacional cresce como uma potência (maior do que 1.0) do número de células em questão.

A seguir analisa-se o escoamento através da geometria de uma esfera para calibrar o código computacional; em seguida, a geometria de um elipsóide.

4.2.1 Esfera

Para começar o estudo do escoamento tridimensional optou-se por uma geometria simples como a da esfera que possui solução analítica e cuja malha é fácil de ser obtida. A malha para a esfera tem 90 pontos na direção x , 48 na direção y e 31 na direção z , sendo esta refinada nas proximidades da superfície. Da mesma forma que para o cilindro, para a esfera utilizou-se como raio interno 10cm e como externo 3m. A figura 4.19 mostra dois planos da malha utilizada. Na figura do lado esquerdo a parte inferior representa o primeiro plano gerado o qual foi rotacionado gerando os demais k planos.

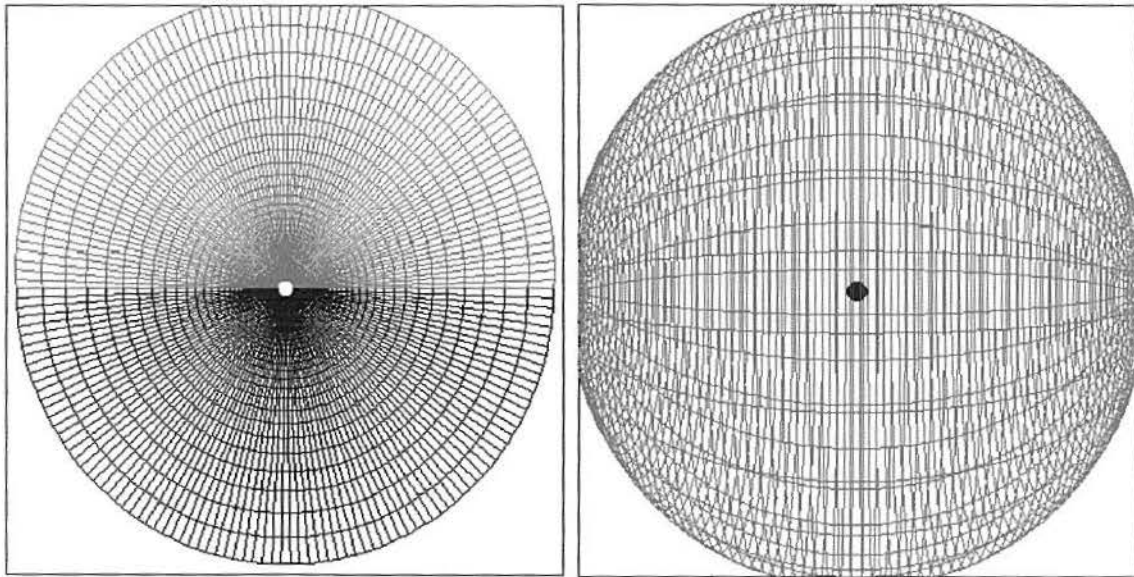


Figura 4.19: Malha para a esfera, 90x48x31

A comparação entre os coeficientes de pressão obtidos para as soluções numérica (das equações de Euler) e analítica demonstra boa concordância, como mostra a figura 4.20. Comparando as figuras 4.4 e 4.20, observa-se que existe diferença maior entre a soluções analítica e experimental que para o caso do cilindro. Isto se deve ao fato da geometria tridimensional necessitar bem mais pontos pois, como foi ressaltado, para resolver um problema tridimensional é necessário considerar o acoplamento entre k planos bidimensionais. Observa-se que o valor mínimo

para o C_p na esfera é $-1,25$ enquanto que para o cilindro é -3 . Esta diferença se deve ao fato da geometria da esfera ser mais suave, ou seja, a velocidade máxima que os vetores atingem na esfera é $1,5$ fazendo com que o C_p obtido através da equação (4.1) seja $C_p = -1,25$.

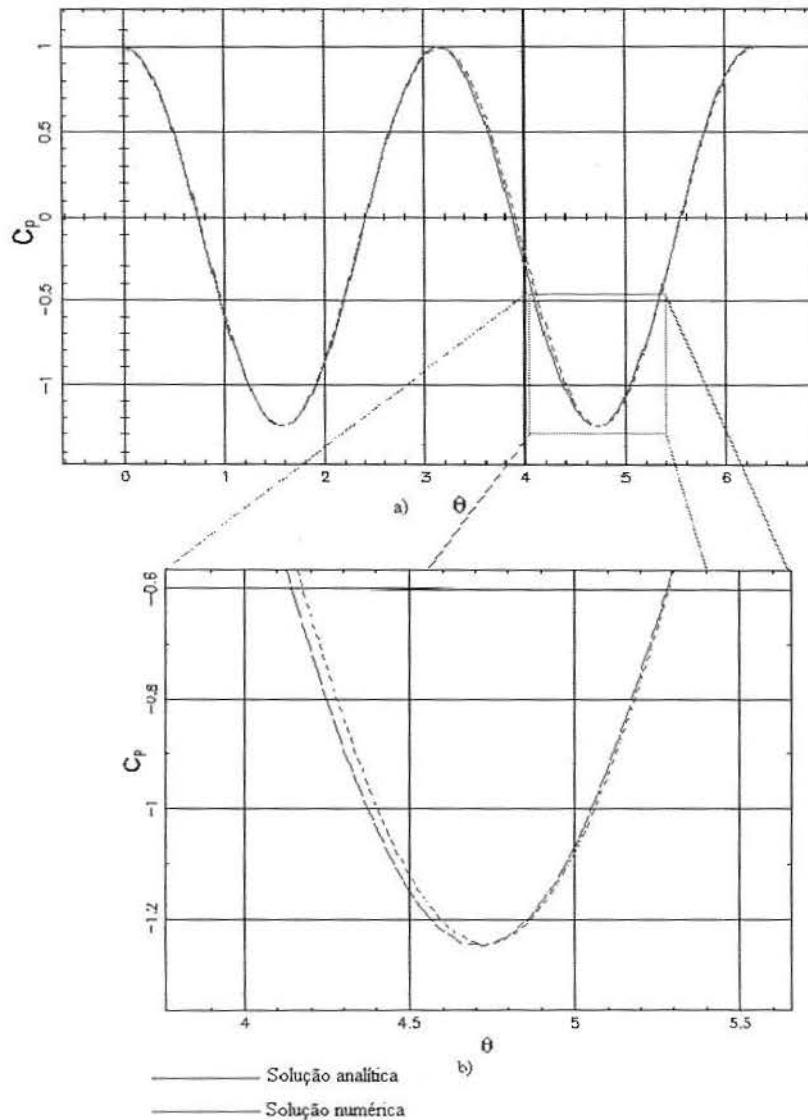


Figura 4.20: Comparação do coeficiente de pressão para a esfera; a) visão global, b) amplificação

A solução analítica para o coeficiente de pressão da esfera é dada por

[26]

$$C_p = 1 - \frac{9}{4} \text{sen}^2(\theta).$$

O cálculo numérico do coeficiente de pressão é feito utilizando a equação (4.1) onde V_i e V_0 são dados, agora em três dimensões, por

$$V_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}$$

$$V_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}$$

A figura 4.21 mostra dois planos da esfera, nos quais as linhas de pressão podem ser vistas e comparadas com o caso bidimensional da figura 4.5.

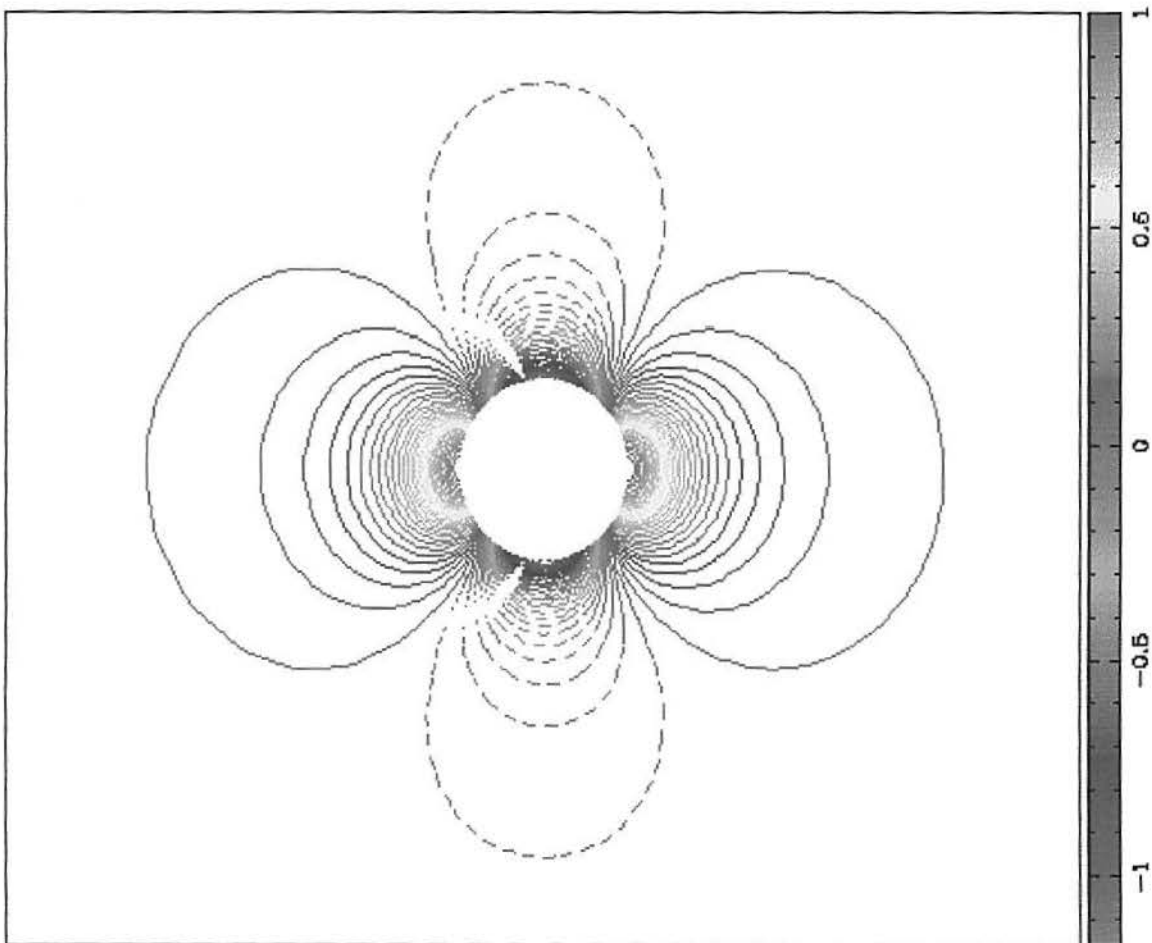


Figura 4.21: Linhas de coeficiente de pressão constante sobre a esfera

Da mesma forma que no caso bidimensional, o campo de velocidades mostrado na figura 4.22 indica que esta é maior longe do corpo e, que os vetores, ao

“notarem” a presença do corpo, perdem velocidade e contornam a esfera, tendo seu valor máximo nos pontos de menor pressão.

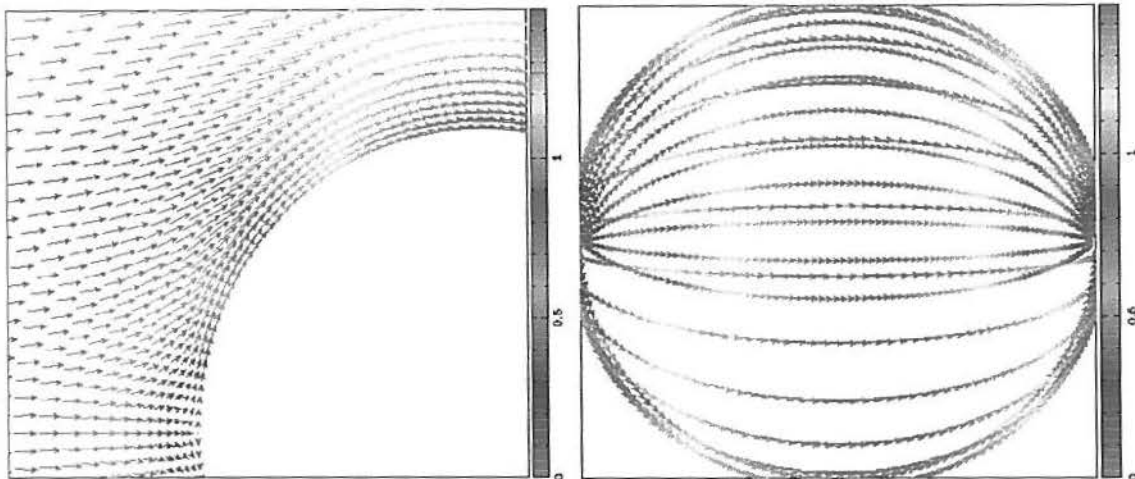


Figura 4.22: Campo de velocidades sobre a esfera

Como os resultados obtidos são consistentes para a geometria da esfera, entende-se que a fase de calibração do código tridimensional está satisfeita. Portanto, passa-se para a geometria de um elipsóide.

4.2.2 Elipsóide

O último caso analisado é a geometria de um elipsóide. Para este utiliza-se uma malha de $90 \times 48 \times 31$ pontos refinada próximo à superfície do corpo. A figura 4.23 apresenta uma visão de dois planos (na esquerda) da malha utilizada. O eixo maior da elipse mede 40cm e o menor 20cm. A excentricidade da elipse é de $e = 0,86$. Ela mede a abertura da elipse, quando $e \rightarrow 0$ a geometria está próxima de um círculo e, quando $e \rightarrow 1$ ela fica mais delgada.

A figura 4.24 mostra as linhas de pressão em torno do elipsóide. Este resultado pode ser comparado com o obtido para a esfera. Observa-se que, da mesma forma que para a esfera, a pressão tem seu valor máximo nos pontos onde

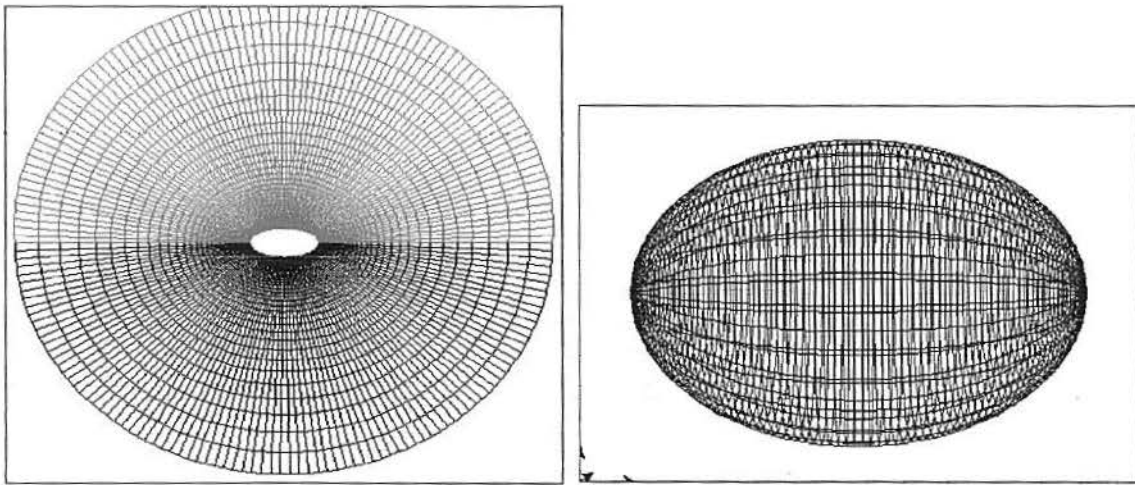


Figura 4.23: Malha para o elipsóide, 90x48x31

a velocidade é menor. A comparação entre estas duas geometrias é feita com base no princípio do mapeamento conforme. No mapeamento conforme, se existe uma relação funcional entre $\phi + i\psi$ e $x + iy$, isto é, $\phi + i\psi = F(x + iy)$; então, para cada ponto no plano $\phi\psi$, haverá um ponto correspondente no plano xy [26].

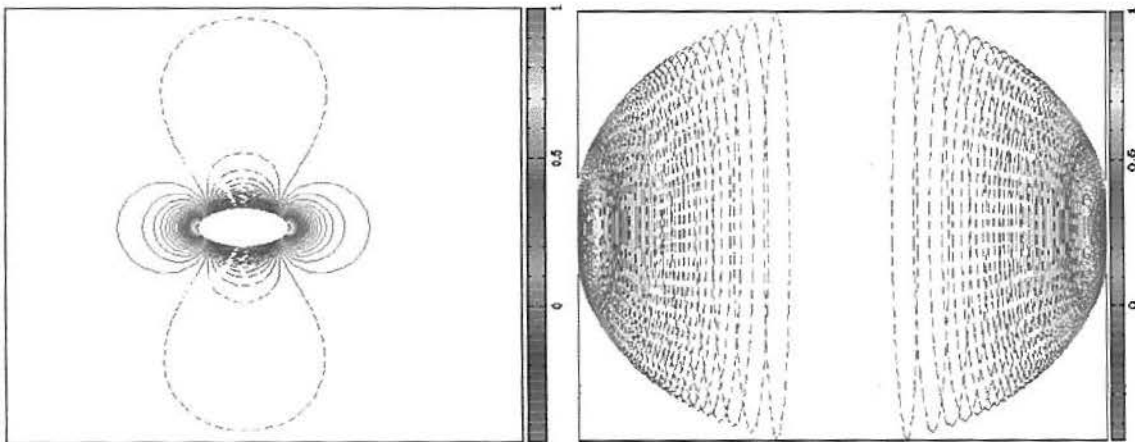


Figura 4.24: Coeficiente de pressão sobre o elipsóide

Da mesma forma que para a pressão, pode-se comparar os resultados obtidos para o campo de velocidade do elipsóide com o da esfera. O campo de velocidade é mostrado na figura 4.25, o qual é semelhante ao obtido para a figura

4.22. Adiciona-se que, para o caso tridimensional, a obtenção de vórtices necessitaria uma malha bem mais refinada que a aqui empregada.

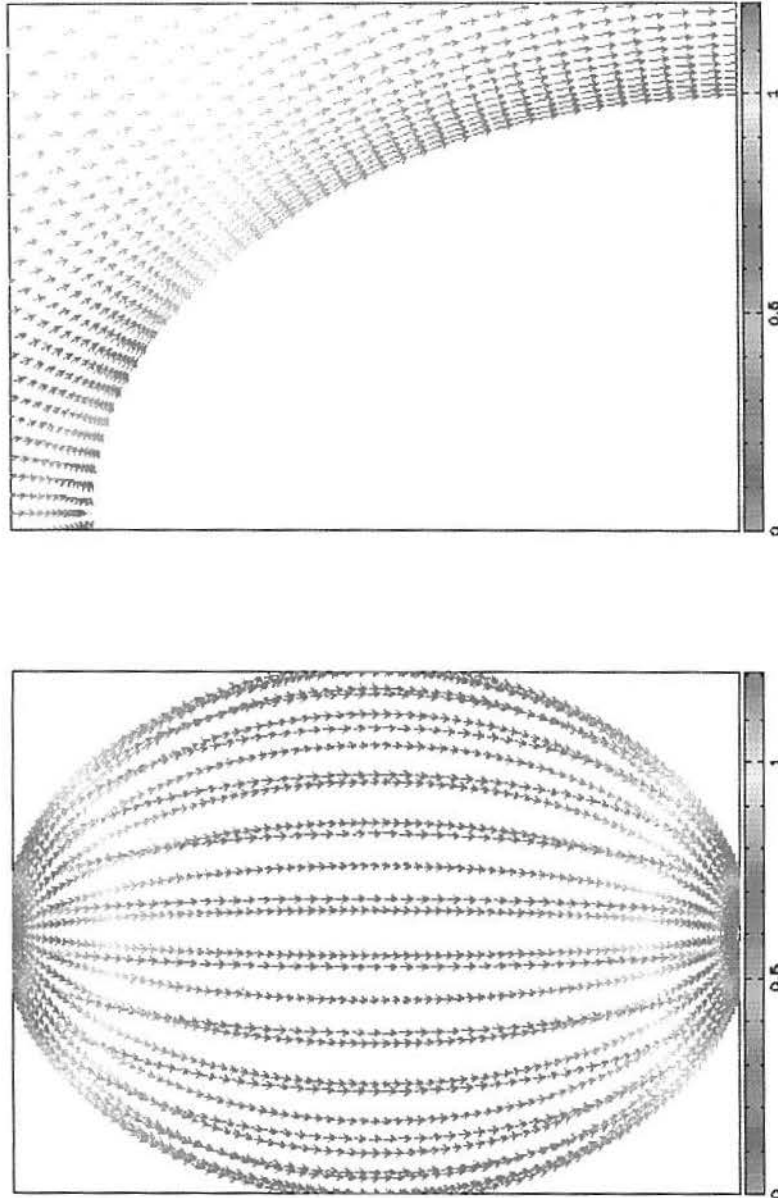


Figura 4.25: Campo de velocidades sobre o elipsóide, com amplificação

Na seqüência apresenta-se as conclusões obtidas e as sugestões para trabalhos futuros.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Tinha-se como finalidade deste trabalho analisar escoamentos incompressíveis externos em torno de geometrias arredondadas. Pode-se concluir, através de resultados numéricos, que o método implementado, utilizando Runge-Kutta para as equações da quantidade de movimento e o SUR para a pressão, foi eficiente na representação do escoamento bidimensional sobre a seção do cilindro e o perfil de um tubarão e tridimensional sobre uma esfera e um elipsóide.

Iniciou-se com a simulação do escoamento em torno da geometria de um cilindro com o objetivo de calibrar o código computacional a ser utilizado nas simulações. O primeiro teste realizado foi para as equações de Euler, onde a comparação entre a solução analítica e numérica para o coeficiente de pressão do cilindro foi obtida; os resultados estão de acordo com os encontrados na literatura. A simulação feita para o escoamento em torno do cilindro foi de fácil obtenção e a convergência ocorreu rapidamente.

Em seguida, efetuou-se testes para diferentes números de Reynolds onde, novamente, os resultados obtidos estão de acordo com a literatura. Para o caso de $Re = 40$ obteve-se a formação de vórtices, ou seja, regiões de recirculação, que eram esperadas devido ao fenômeno de separação da camada limite. Outro resultado esperado e obtido foi a simetria da solução. Nas simulações com número de Reynolds 500 obteve-se, além dos vórtices principais, vórtices secundários como esperado.

O próximo teste realizado foi para a geometria simplificada de um tubarão. A principal dificuldade na obtenção desta solução foi a criação da malha computacional correspondente devido à complexidade da geometria. A malha foi obtida com a utilização do software MakeGrid [23], estando os resultados de acordo com o esperado.

Através da simulação para o caso da esfera pôde-se verificar o funcionamento do código computacional para o escoamento tridimensional. Novamente, fez-se a comparação entre o coeficiente de pressão analítico e numérico para calibrar o código. As soluções para o escoamento em torno da esfera também estão de acordo com os da literatura. Esta não foi fácil de ser obtida devido à complexidade proporcionada pelo acoplamento de k planos bidimensionais, o que tornou a convergência do problema lenta.

A partir desta calibração, procedeu-se à simulação do escoamento em torno da geometria de um elipsóide, onde o escoamento apresentou as mesmas características que o fluxo em torno da esfera. Esta afirmação pode ser feita baseada no princípio do mapeamento conforme. Salienta-se que o número de iterações utilizadas em todos os casos foi de 80000 exceto para o caso da seção do cilindro com número de Reynolds 500 onde utilizou-se 25000 iterações.

O código utilizado para a obtenção dos dados do escoamento foi escrito na linguagem de programação Fortran 90. Inicialmente este foi compilado utilizando-se o compilador MIPSpro F90 Version 6.2 e executado no servidor da Silicon Graphics Origin 200, com dois processadores R10000 a 180 MHz, 128MBytes RAM e 8 GBytes de disco do Laboratório Integrado de Computação Científica (LIICC-IM/UFRGS). Partindo para a resolução de problemas mais complexos tornou-se necessário o uso do supercomputador Cray T94 que possui 2 CPUs de 1,8 GFLOP, 2GBytes RAM e 53 GB SCSI de disco e está localizado no Centro de Supercomputação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CESUP-RS). O compilador utilizado neste caso foi o Cray CF90 Version 3.3 e a compilação foi do tipo agressiva.

As dificuldades numéricas para a obtenção dos resultados foram diversas. Foi necessário um ajuste cuidadoso nos refinamentos a fim de que as relações entre ξ e η não levassem o algoritmo para uma situação de instabilidade, o que foi uma tarefa complexa, uma vez que se tinha valores de η muito pequenos. No entanto, a principal vantagem que o método utilizado possui é a simplicidade de implementação computacional. Salienta-se que o desempenho computacional do *software* desenvolvido

ficou aproximadamente em 900MFlops por computador para o caso bidimensional e em 400MFlops por computador para o tridimensional no Cray T94 do CESUP/RS.

Adicionalmente, resultados numéricos em torno de geometrias complexas tridimensionais ainda são um desafio para os computadores de hoje. Atualmente, inúmeros trabalhos vêm sendo desenvolvidos, porém utilizando métodos que requerem esforço computacional muito maior do que o aqui apresentado. Portanto, os resultados obtidos neste trabalho vêm contribuir com simulações numéricas para escoamentos incompressíveis em geometrias complexas.

Os resultados aqui obtidos representam apenas um primeiro passo. O objetivo maior (num trabalho mais aprofundado, por exemplo) é, ainda, a análise dos coeficientes em geometrias mais complexas como por exemplo a de um tubarão tridimensional. Visa-se, nestes casos, a análise da transição e turbulência e suas implicações, o que auxilia no sentido de obter informações mais precisas do escoamento sobre tais geometrias e sua aplicação para atividades de interesse da sociedade.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDERSON, J. D., DEGREZ, G., DICK, E., AND GRUNDMANN, R. *Computational Fluid Dynamics - An Introduction*. John F. Wendt - A Von Karman Institute Book - Springer, Germany, 1995.
- [2] ANDERSON, J. D. J. *Fundamentals of Aerodynamics*, 2 ed. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [3] ARAUJO, D. R., MANICA, R., AND DE BORTOLI, A. L. Numerical simulation of almost incompressible flows for round bodies. *Revista de Pesquisa e Pós Graduação* (2000), 255–266. URI, Erechin.
- [4] BEJAN, A. *Transferência de Calor*. Edgard Blücher, São Paulo, 1994.
- [5] BEYER, R. P. A computational model of the cochlea using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics* 98, 1 (janeiro 1992), 145–162.
- [6] BUSATTO, A. D. Solução de escoamentos compressíveis sobre o aerofólio NACA 0012 baseado no arranjo centrado em volumes finitos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Rio Grande do Sul, 1999.
- [7] CARVALHO, S. Uma simulação numérica do escoamento na artéria carótida. Dissertação de mestrado, PPGMAP/UFRGS, Porto Alegre, dezembro 1998.
- [8] COLLINS, W., AND DENNIS, S. Flow past an impulsively started circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 60 (January 1973), 105–127.
- [9] DE BORTOLI, A. L. *Introdução à Dinâmica de Fluidos Computacional*. Editora da UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [10] FADLUN, E. A., VERZICCO, R., ORLANDI, P., AND MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-

- dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics* 161 (February 2000), 35–60.
- [11] FLETCHER, C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, vol. 1,2. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [12] FOGELSON, A. L., AND PESKIN, C. S. A fast numerical method for solving the three-dimensional stokes' equation in the presence of suspended particles. *Journal of Computational Physics* 79, 1 (novembro 1988), 50–69.
- [13] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp, São Paulo, 2000.
- [14] FOX, R. W., AND McDONALD, A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, 1998.
- [15] GARBELINI, E. Simulação numérica do escoamento de líquidos através de restrições. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, fevereiro 1999.
- [16] GOLDSTEIN, D., HANDLER, R., AND SIROVICH, L. Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics* 105 (June 1993), 354–366.
- [17] GRESHO, P. M., AND SANI, R. L. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 7, 10 (October 1987), 1111–1145.
- [18] HARLOW, F. H., AND WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physics of Fluids* 8, 12 (1965), 2182–2189.
- [19] HONJI, H., AND TANEDA, S. Usteady flow past a circular cylinder. *Journal of the Physical Society of Japan* 27, 6 (December 1969), 1668–1677.

- [20] HUGHES, W. F., AND BRIGHTON, J. A. *Dinâmica dos Fluidos*. Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1974.
- [21] JAMESON, A., AND MARTINELLI, L. Mesh refinement and modeling errors in flow simulation. *AIAA Journal* 36, 5 (May 1998), 677–686.
- [22] JUSTO, D. A. R. *Visual: uma família de softwares para a visualização de fenômenos em mecânica dos fluidos*. Laboratório Integrado de Computação Científica - LICC, Porto Alegre, 1999.
- [23] JUSTO, D. A. R. Geração de malhas, condições de contorno e discretização de operadores para dinâmica de fluidos computacional. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, 2001.
- [24] KAWAGUTI, M. Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40. *Journal of the Physical Society of Japan* 8, 6 (1953), 747–757.
- [25] KELLER, S. C. Desenvolvimento de uma técnica numérica para análise de escoamentos em cavidades para Rayleigh entre 10^2 e 10^5 . Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, junho 2000.
- [26] KNUDSEN, J. G., AND KATZ, L. D. *Fluid Dynamics and Heat Transfer*. McGraw-Hill, New York, 1958.
- [27] KNUPP, P., AND STEINBERG, S. *The Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press, New Mexico, 1993.
- [28] LEVEQUE, R. J. Numerical methods for conservation laws. Lecture in Mathematics, 1992.
- [29] LIN, C. C., AND SEGEL, L. A. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1974.

- [30] MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, Rio de Janeiro, 1995.
- [31] MIRABEAU, F. Tubarão Mako (isurus oxyrinchus). <http://www.geocities.com/hist-tubaroes/mako.html>, junho 2000.
- [32] NAVIER, C. L. M. H. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France t. VI*. Paris, 1822.
- [33] PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1981.
- [34] PEDROSO, C. A. Simulação de fluxos bidimensionais, laminares e incompressíveis entre superfícies móveis. Dissertação de mestrado, PPGMAP/UFRGS, Porto Alegre, janeiro 2001.
- [35] PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics* 25 (February 1977), 220–252.
- [36] POISSON, S. D. Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluids. *Journal de l'Ecole Polytechnique* *xiii*, 1 (1829).
- [37] RAITHY, G. D., AND TORRANCE, K. E. Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. *Computer and Fluids* 2 (1974), 191–206.
- [38] RICHTMYER, R. D. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Interscience Publishers, New York, 1957.
- [39] SAIKI, E. M., AND BIRINGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: Application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics* 123, 0036 (1996), 450–465.
- [40] SCHLICHTING, H. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 1968.

- [41] SIROVICH, L. Initial and boundary value problems in dissipative gas dynamics. *The Physics of Fluids* 10, 1 (janeiro 1967), 24–34.
- [42] SIROVICH, L. Steady gasdynamic flows. *The Physics of Fluids* 11, 7 (julho 1968), 1424–1439.
- [43] SORENSON, R. L., AND STEGER, J. L. *Numerical generation of two dimensional grids by the use of Poisson equations with grid control*. NASA CP 2166 in Numerical Grid Techniques. R. E. Smith, NASA Langley Research Center, Hampton, 1980, pp. 449–461.
- [44] STOKES, G. G. *On the theory of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids*, Cambridge ed., vol. 8-287. Trans. Cambridge Phil. Society, Inglaterra, 1845.
- [45] STREETER, V. L. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1958.
- [46] TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A., AND PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2 ed. Taylor & Francis, Washington, 1997.
- [47] TAVARES, A. Simulação numérica do escoamento incompressível através de canais retos com expansão geometricamente brusca. Dissertação de mestrado, PPGMAp/UFRGS, Porto Alegre, agosto 1999.
- [48] THOMPSON, J. F., THAMES, F. C., AND MASTIN, C. W. Tomcat - a code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinates systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics* 24 (1977), 274–302.
- [49] THOMPSON, J. F., WARSI, Z. U. A., AND MASTIN, C. W. *Numerical Grid Generation - Foundations and Applications*. Elsevier Science Publishing, New York, 1985.
- [50] VENNARD, J. K., AND STREET, R. L. *Elementos de Mecânica dos Fluidos*. Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, 1978.

- [51] WARMING, R. F., AND HYETT, B. J. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. *Journal of Computational Physics* 14 (1974), 159–179.
- [52] WHITFIELD, D. L. *Three dimensional unsteady Euler equation solutions using flux vector splitting*. MS 39762, Mississippi, 1983.