Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Um Problema de Dirichlet com não Linearidade Exponencial em Domínios Circulares

por
Marilaine de Fraga Sant'Ana

dezembro de 1994.

dedico este trabalho ao Alvino e ao Victor

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob orientação do Prof.Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

AGRADECIMENTOS:

Agradeço ao meu orientador, Prof. Eduardo Brietzke, pela dedicação e estímulo.

Do mesmo modo, agradeço aos professores Artur Lopes e Pedro Nowosad o aceite em participar da banca e as sugestões.

Também quero expressar com carinho agradecimentos aos colegas pela amizade e estímulo, em especial aos colegas Flamarion, Pedro, Rogério, Claus, Nice e Virgínia.

Finalmente, quero agradecer ao Alvino e ao Victor, por todo carinho, paciência e compreensão com relação às minhas faltas, enquanto me dedicava a este trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação abordamos o problema:

$$\Delta u + \lambda e^u = 0 \text{ em } \Omega$$

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

para $\lambda \geq 0$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nos casos em que $\Omega = D = \{x \mid \mid x \mid < 1\}$ ou $\Omega = A = \{x \mid \ a < \mid x \mid < 1\}$, $a \in (0,1)$. Encontramos primeiro as soluções radiais e depois estudamos a existência de soluções não radiais no anel com auxílio de argumentos variacionais.

ABSTRACT

In this thesis we investigate the problem:

$$\Delta u + \lambda e^u = 0 \text{ in } \Omega$$

$$u = 0 \text{ in } \partial\Omega$$

for $\lambda \geq 0$ and $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in the cases of $\Omega = D = \{x \mid \mid x \mid < 1\}$ or $\Omega = A = \{x \mid \ a < \mid x \mid < 1\}$, $a \in (0,1)$. First we find the radial solutions and then we study the existence of nonradial solutions in the case of the annulus by a variational approach.

Índice

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação estudamos o problema

$$\Delta u + \lambda e^{u} = 0 \text{ em } \Omega$$

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

onde $\lambda \geq 0$ é constante e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, mostrando a existência da solução u.

Esta equação possui uma interpretação em Geometria Diferencial quando se procuram os coeficientes da primeira forma fundamental, satisfazendo $E = G$ e $F = 0$, para superfícies com curvatura Gaussiana, K, constante, já que $\Delta(log\, E) + 2Ke^{log\, E} = 0$, como mostramos no apêndice.

No capítulo 1, apresentamos alguns tópicos que são pré-requisitos para a leitura do que segue. Dividimo-lo em quatro secções. A primeira trata do Teorema de Banach sobre pontos fixos. A segunda, da convergência fraca e do Teorema de Banach-Saks. A terceira, dos multiplicadores de Lagrange. Na quarta, é feita uma revisão de distribuições e espaços de Sobolev.

No segundo capítulo, abordamos o problema nos casos em que Ω é o disco unitário $D = \{x \mid |x| < 1\}$ e o anel $A = \{x \mid a < |x| < 1\}$, $a \in (0, 1)$ e apresentamos as soluções radiais, que, para $\Omega = D$ são as únicas soluções.

Finalmente, no terceiro capítulo, usando argumentos variacionais, através dos multiplicadores de Lagrange, provamos a existência de soluções não radiais do problema no caso em que Ω é o anel $A = \{x \mid a < |x| < 1\}$.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo, apresentamos as noções preliminares para a compreensão dos capítulos 2 e 3.

1.1 Teorema do Ponto Fixo

Definição 1.1 *Sejam X e Y espaços métricos. Uma aplicação $f : X \to Y$ chama-se uma contração quando existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c.d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in X$.*

Teorema 1.2 *(Teorema de Banach Sobre Pontos Fixos de Contrações)*
Se X é um espaço métrico completo, então, toda contração $f : X \to X$ possui um único ponto fixo em X, isto é, um único y tal que $f(y) = y$.

Demonstração : Ver [9], página 198.

1.2 Convergência Fraca

Definição 1.3 *Seja X um espaço normado, o espaço dual de X, X^*, é o conjunto de todos os funcionais lineares limitados definidos em X.*

Definição 1.4 *Seja X, um espaço normado, $(x_n)_{n\in I\!N}$ seqüência de elementos de X e $x_0 \in X$. Se, para todos os funcionais $f \in X^*$, a seqüência $f(x_n) \to f(x_0)$ ao $n \to \infty$, então dizemos que (x_n) coverge fracamente para x_0, e escrevemos $x_n \stackrel{w}{\to} x_0$.*

Teorema 1.5 *(Teorema de Banach-Saks)*
Se $(x_n)_{n\in I\!N}$ converge fracamente para x_0, então existe uma sequência

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\Big), \text{ com } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \;\; \lambda_i \geq 0 \; \forall i,$$

que converge fortemente para x_0.

Demonstração : Ver [10], página 123.

1.3 Multiplicadores de Lagrange

Teorema 1.6 *Seja X espaço de Banach sobre $I\!R$, $B_r(x_0) \subset X$, $J : B_r(x_0) \to I\!R$ e $\Phi : B_r(x_0) \to I\!R$ continuamente diferenciáveis com $\Phi(x_0) = 0$. Além disso, suponhamos que*

$$J(x_0) = min\{J(x) : x \in B_r(x_0) \text{ e } \Phi(x) = 0\}.$$

Então, existem multiplicadores de Lagrange $\mu \in I\!R$ e $\nu \in I\!R$, não nulos simultaneamente, tais que

$$\mu\, J'(x_0).\varphi + \nu\, \Phi'(x_0).\varphi = 0.$$

Além disso, se $\Phi'(x_0) \neq 0$, então $\mu \neq 0$.

Demonstração : Ver [5], página 333.

1.4 Distribuições e Espaços de Sobolev

Definição 1.7 *Dado $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, define-se*

$$| \alpha | = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

D^α é o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, ..., 0)$, define-se $D^0 u = u$. D_i representa a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Definição 1.8 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções numéricas em Ω, com suporte compacto e possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados funções testes.*

Definição 1.9 *Diz-se que uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ é convergente para zero, quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

a)Os suportes de todas as funções testes φ_ν da sucessão dada estão contidas em um compacto fixo de Ω.

b)Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sucessão $(D^\alpha \varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para zero uniformemente em Ω.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, diz-se que a sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando a sucessão $(\varphi_\nu - \varphi)_{\nu \in \mathbb{N}}$ convege para zero no sentido acima.

Definição 1.10 *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é representado por $D(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.11 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Uma distribuição sobre Ω é uma forma linear T sobre $D(\Omega)$ que é contínua na convergência definida sobre $D(\Omega)$. Isto é, para toda sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$, convergente para zero no sentido da definição 3, a sucessão*

$(< T, \varphi_\nu >)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *converge para zero em* K *(*$K = \mathbb{R}$ *ou* C *e* $< T, \varphi_\nu >$ *é o valor de* T *em* φ_ν *).*

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω *é um espaço vetorial, o qual representa-se por* $D'(\Omega)$*. Neste espaço, uma sucessão* $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *converge para zero quando, para toda função teste* $\varphi \in D(\Omega)$*, a sucessão* $(< T_\nu, \varphi >)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *converge para zero em* K*.*

Neste caso, escreve-se

$$\lim_{\nu \to \infty} T_\nu = 0 \text{ em } D'(\Omega).$$

$$\text{Diz} - \text{se } \lim_{\nu \to \infty} T_\nu = T \text{ em } D'(\Omega) \text{ quando } \lim_{\nu \to \infty} (T_\nu - T) = 0 \text{ em } D'(\Omega).$$

Seja u uma função localmente integrável, a forma linear

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

representa uma distribuição T_u sobre Ω.

Lema 1.12 *(Lema de Du Bois Raymond)*

Seja u *uma função localmente somável em* Ω*. Então* $T_u = 0$ *se e somente se* $u = 0$ *em* Ω *quase sempre.*

Observação

O lema de Du Bois Raymond assegura que, dada u localmente somável em Ω, tem-se T_u univocamente determinada por u sobre Ω. Isto nos permite identificar a distribuição T_u com a função u.

Definição 1.13 *Seja* T *uma distribuição sobre* Ω *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*. A derivada de ordem* α *de* T *é definida como sendo o funcional linear* $D^\alpha T$*, dado em* $D(\Omega)$ *por*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi > \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Definição 1.14 *Seja* Ω *aberto do* $\mathbb{R}^n$*, representa-se por* $W^{m,p}(\Omega)$ *o espaço vetorial de todas as funções* $u \in L^p(\Omega)$ *tais que, para todo* α *com* $|\, \alpha \,| \leq m$*,* $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$*, sendo* $D^\alpha u$ *a derivada no sentido das distribuições.*

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos a norma de u por

$$\| u \|_{m,p}^{p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} | D^{\alpha} u(x) |^{p} \, dx.$$

O espaço normado $W^{m,p}(\Omega)$ é denominado espaço de Sobolev.

Definição 1.15 *No caso particular $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega)$é representado por $H^{m}(\Omega)$.*

Observação: O espaço $H^{m}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar dado por

$$(u \mid v)_{m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha} u \mid D^{\alpha} v)_{L^{2}(\Omega)}.$$

Definição 1.16 *Define-se o espaço $W_{0}^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $m = 2$, escrevemos $H_{0}^{m}(\Omega)$ em lugar de $W_{0}^{m,p}(\Omega)$.*

Observação: Intuitivamente, para uma função $u \in H^{1}(\Omega)$ a condição $u \in H_{0}^{1}(\Omega)$ significa que $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Capítulo 2

SOLUÇÕES RADIAIS EM DOMÍNIOS CIRCULARES

Seja a equação dada por

$$\Delta u + \lambda e^u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

Fazendo uma mudança para variáveis complexas, a colocamos na forma da equação de Liouville, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} log f = \frac{+f}{2a^2}$.

Neste capítulo, vamos determinar soluções radiais quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é $D = \{x \mid \mid x \mid < 1\}$ ou $A = \{x \mid \ a < \mid x \mid < 1\}$ com $0 < a < 1$.

A mudança de variáveis para obtenção da equação de Liouville é a seguinte:

Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$. Consideremos Ω domínio também em $\mathbb{C}$.

$$z = x_1 + ix_2 \quad \text{e} \quad w = x_1 - ix_2, \text{ assim,}$$

$$x_1 = \frac{z + w}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{z - w}{2i}.$$

Pela regra de cadeia

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x_2} \quad .$$

$$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

isto é,

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{1}{4i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{4i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big) = \frac{1}{4}\Delta u.$$

Substituindo em (2.1)

$$\Delta u + \lambda e^u = 0 \text{ e } 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w} + \lambda e^u = 0.$$

Então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w} = -\frac{\lambda}{4} e^u. \tag{2.2}$$

Assim, obtemos a equação na forma de Liouville para $f = e^u$.

Diferenciando (2.2) com respeito a z, eliminamos o termo $-\frac{\lambda}{4}e^u$.

Por (2.2) $u_{zw} = -\frac{\lambda}{4}e^u$

$$u_{zzw} = -\frac{\lambda}{4}e^u u_z = u_{zw}u_z.$$

Logo obtemos

$$u_{zzw} = u_{zw}u_z. \tag{2.3}$$

Como

$$\frac{\partial u_z^2}{\partial w} = 2u_z u_{zw},$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2) = 0$$

e assim

$$u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 = S(z), \tag{2.4}$$

onde S é uma função holomorfa de z.

Seja agora $v = v(z,w) = exp(-\frac{1}{2}u(z,w))$.

$$v_z = \Big(-\frac{1}{2}u_z\Big)exp\Big(-\frac{1}{2}u\Big) = -\frac{1}{2}vu_z$$

$$v_{zz} = -\frac{1}{2}(vu_{zz} + v_z u_z) = -\frac{1}{2}\Big(vu_{zz} - \frac{1}{2}vu_z^2\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}v\Big(u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2\Big) \overset{(2.4)}{=} -\frac{1}{2}vS(z).$$

Logo

$$v_{zz} + \frac{1}{2}S(z)v = 0. \tag{2.5}$$

Consideramos agora (2.5) como uma equação linear somente da variável z e tomamos um sistema fundamental de soluções $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$.

Logo

$$v = exp(-\frac{1}{2}u(z,w)) = f_1(w)\varphi_1(z) + f_2(w)\varphi_2(z), \tag{2.6}$$

onde $f_i(w)(i = 1,2)$ são holomorfas. Substituimos (2.6) em (2.2) temos

$$v = exp(-\frac{1}{2}u) \text{ e } e^u = v^{-2}$$

$$v_w = (-\frac{1}{2}u_w)exp(-\frac{1}{2}u) = v\,(-\frac{1}{2}u_w).$$

Logo $u_w = -\dfrac{2v_w}{v}$ e $u_{zw} = \dfrac{-2(v_{zw}v - v_w v_z)}{v^2} \overset{(2.2)}{=} -\dfrac{\lambda}{4}e^u$.

Assim $\dfrac{v_{zw}v - v_w v_z}{v^2} = \dfrac{\lambda}{8}v^{-2}$, ou seja, $v_{zw}v - v_w v_z = \dfrac{\lambda}{8}$.

$$\text{Mas } v_{zw}v - v_w v_z =$$

$$= (f_1'(w)\varphi_1'(z) + f_2'(w)\varphi_2'(z))(f_1(w)\varphi_1(z) + f_2(w)\varphi_2(z)) -$$
$$-(f_1'(w)\varphi_1(z) + f_2'(w)\varphi_2(z))(f_1(w)\varphi_1'(z) + f_2(w)\varphi_2'(z)) =$$

$$= \varphi_1'(z)\varphi_2(z)f_1'(w)f_2(w) + \varphi_1(z)\varphi_2'(z)f_1(w)f_2'(w) -$$
$$-\varphi_1(z)\varphi_2'(z)f_1'(w)f_2(w) - \varphi_1'(z)\varphi_2(z)f_1(w)f_2'(w) =$$

$$= W(\varphi_1, \varphi_2)W(f_1, f_2),$$

onde $W(f,g) = fg' - f'g$ é o Wronskiano de f e g.
Então

$$W(\varphi_1, \varphi_2)W(f_1, f_2) = \frac{\lambda}{8}. \tag{2.7}$$

Observemos que, para uma equação linear homogênea de segunda ordem $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, que tem f e g,soluções linearmente independentes, o Wronskiano de f e g, $W(f,g)$, é solução de $W' + a(x)W = 0$. Portanto, como $a(x) = 0$, temos $W' = 0$ e, assim, W constante. Logo podemos supor em (2.7)

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = 1$$

e

$$W(f_1, f_2) = \frac{\lambda}{8}.$$

Temos, agora,

$$e^u = \frac{\frac{8}{\lambda}F_1'(z)G_1'(w)}{(1 + F_1(z)G_1(w))^2}, \tag{2.8}$$

onde $F_1(z) = \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}$ e $G_1(w) = \frac{f_2(w)}{f_1(w)}$, pois

$$\frac{(1 + F_1(z)G_1(w))^2}{(\frac{8}{\lambda}F_1'(z)G_1'(w))} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)} \frac{f_2(w)}{f_1(w)}\right)^2}{\frac{1}{f_1(w)f_2'(w) - f_1'(w)f_2(w)} \left(\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}\right)' \left(\frac{f_2(w)}{f_1(w)}\right)'} =$$

$$= \frac{1 + 2\frac{\varphi_2(z)f_2(w)}{\varphi_1(z)f_1(w)} + \frac{\varphi_2^2(z)f_2^2(w)}{\varphi_1^2(z)f_1^2(w)}}{\frac{1}{f_1(w)f_2'(w) - f_1'(w)f_2(w)} \frac{\varphi_2'(z)\varphi_1(z) - \varphi_2(z)\varphi_1'(z)}{\varphi_1^2(z)} \frac{f_2'(w)f_1(w) - f_2(w)f_1'(w)}{f_1^2(w)}} =$$

$$= \frac{\varphi_1^2(z)f_1^2(w) + 2\varphi_2(z)f_2(w) + \varphi_2^2(z)f_2^2(w)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} =$$

$$= (f_1(w)\varphi_1(z) + f_2(w)\varphi_2(z))^2 = v^2.$$

$$\text{Portanto, } e^u = v^{-2} = \frac{(\frac{8}{\lambda}F_1'(z)G_1'(w))}{(1 + F_1(z)G_1(w))^2}.$$

Obtemos de (2.8)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial w} = -\frac{\lambda}{4}e^u = -\frac{\lambda}{4} \frac{(\frac{8}{\lambda}F_1'(z)G_1'(w))}{(1 + F_1(z)G_1(w))^2} =$$

$$= \frac{-2F_1'(z)G_1'(w)}{(1 + F_1(z)G_1(w))^2} = \frac{-\partial^2}{\partial z \partial w}(log(1 + F_1(z)G_1(w))^2)$$

ou,

$$\Delta u = -\Delta log(1 + F_1(z)G_1(w))^2. \tag{2.9}$$

Como a solução u é real, então o produto $F_1(z)G_1(w)$ em (2.9) também é. Por outro lado, $F_1(z)$ e $G_1(w)$ são funções analíticas com, no máximo, zeros ou pólos simples e, além disso, $G_1(w)$ é o conjugado de alguma função analítica $G_2(z)$, $z = \overline{w}$, a saber, $G_1(w) = \overline{G_2(z)}$. Conseqüentemente, $F_1(z)\overline{G_2(z)}$ é real.

Seja $F_1(z) = P(z) + iQ(z)$ e $G_2(z) = p(z) + iq(z)$ onde P, Q, p, q são funções de valores reais. Vemos que a parte imaginária de $F_1(z)\overline{G_2(z)}$ é zero, isto é, $Im(F_1(z)\overline{G_2(z)}) = 0 = Q(z)p(z) - P(z)q(z)$ e

$$\left(\frac{F_1}{G_2}\right)(z) = \frac{P(z) + iQ(z)}{p(z) + iq(z)} =$$

$$= \frac{(P(z)p(z) + Q(z)q(z)) + i(Q(z)p(z) - P(z)q(z))}{p^2(z) + q^2(z)} = \frac{P(z)p(z) + Q(z)q(z)}{p^2(z) + q^2(z)}$$

é de valores reais, o que significa que é constante, pois se $\frac{F_1}{G_1} = A(x,y) + iB(x,y)$ e $B \equiv 0$ temos $B_x = A_y = B_y = A_x = 0$, o que implica $A \equiv constante$.

Assim $G_2(z) = CF_1(z)$ para $C \in \mathbb{R}$.

Além disso, por (2.8), temos

$$0 < e^u = \frac{\frac{8}{\lambda}F_1'G_1'}{(1 + F_1G_1)^2} = \frac{\frac{8}{\lambda}\frac{G_2'\overline{G_2'}}{C}}{(1 + \frac{G_2\overline{G_2}}{C})^2}, \text{ o que implica } C > 0.$$

Lema 2.1 *A equação (2.1) tem uma integral*

$$\frac{\lambda}{8}e^u = \frac{\mid F'(z) \mid^2}{(1 + \mid F(z) \mid^2)^2}. \tag{2.10}$$

Em outras palavras, cada solução u de (2.1) é expressa por (2.10), onde $F(z)$ é uma função analítica tal que o lado direito de (2.10) é de valores únicos e positiva em Ω. Além disso, se Ω é simplesmente conexo, $F(z)$ pode ser tomada como uma função meromorfa (de valores únicos) com, no máximo, zeros e pólos simples.

Demonstração :

$$\text{Por (2.8) } e^u = \frac{\frac{8}{\lambda}F_1'(z)G_1'(w)}{(1 + F_1(z)G_1(w))^2}, \text{ mas}$$

$$\overline{G_2(z)} = G_1(w) \text{ e } G_2(z) = CF_1(z)$$

assim

$$G_1(w) = c\overline{F_1(z)}$$

e segue

$$e^u = \frac{\frac{8}{\lambda}CF_1'(z)\overline{F_1'(z)}}{(1 + CF_1(z)\overline{F_1(z)})^2} = \frac{\frac{8}{\lambda}C \mid F_1'(z) \mid^2}{(1 + C \mid F_1(z) \mid^2)^2}.$$

Em geral Ω não é simplesmente conexo. Quando for, F tem valores únicos.

Tomamos $F(z) = C^{\frac{1}{2}} F_1(z)$. Assim

$$e^u = \frac{8}{\lambda} \frac{|F'(z)|^2}{(1+|F(z)|^2)^2}.$$

Observação:

1) Quando Ω não for simplesmente conexo, a função $F(z)$ pode não ser de valores únicos, pelo fato de que as soluções $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$ de uma equação diferencial linear homogênea podem ser deste tipo. Um exemplo desta situação é a equação $y" + \frac{1}{z}y' = 0$ em $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 <|z|< 1\}$, com $\varphi_1(z) = 1$ e $\varphi_2(z) = \log z$.

2)A função $F(z)$ não é unicamente determinada pela solução u, como nos mostra o exemplo abaixo.

Exemplo:

Se $F(z) = z$,

$$\frac{|F'(z)|}{1+|F(z)|^2} = \frac{1}{1+|z|^2} = \frac{1}{2} \quad em \quad \partial D.$$

Logo $\left(\frac{\lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, ou seja, $\lambda = 2$.

Então

$$\frac{\lambda}{8}e^u = \frac{1}{4}e^u = \left(\frac{1}{1+|z|^2}\right)^2 = \frac{1}{(1+r^2)^2},$$

resultando

$$e^u = \frac{4}{(1+r^2)^2}.$$

Assim a equação

$$\Delta u + 2\lambda e^u = 0 \quad em \quad D$$

$$u = 0 \quad em \quad \partial D$$

tem por solução $u = \log\frac{4}{(1+r^2)^2}$.

Por (2.5), temos $u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 = S(z)$, $S(z)$ função holomorfa de z.

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \qquad r = (zw)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}(zw)^{-\frac{1}{2}}w = \frac{1}{2r}w$$

$$u_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial z}\Big)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{1}{4}(zw)^{-\frac{3}{2}}w^2 = -\frac{1}{4r^3}w^2.$$

Assim

$$u_{zz} = u_{rr}\frac{w^2}{4r^2} + u_r\Big(-\frac{w^2}{4r^3}\Big)$$

e

$$S(z) = u_{zz} - \frac{1}{2}u_z^2 = \frac{w^2}{4r^2}u_{rr} - \frac{w^2}{4r^3}u_r - \frac{w^2}{8r^2}u_r^2.$$

Mas

$$u = log4 - 2log(1+r^2) \text{ o que implica } u_r = -\frac{4r}{1+r^2}.$$

Então

$$u_{rr} = \frac{8r^2 - 4(1+r^2)}{(1+r^2)^2} = \frac{4(r^2-1)}{(1+r^2)}.$$

Logo

$$S(z) = \frac{w^2}{r^2}\frac{r^2-1}{(1+r^2)^2} - \frac{w^2}{r^2(1+r^2)} - \frac{2w^2}{(1+r^2)^2}, \quad \text{implicando } S(z) = 0,$$

pois depende apenas de z.

Assim a equação (2.5) fica $v_{zz} + \frac{1}{2}S(z)v = v_{zz} = 0$.

Se tomarmos $\varphi_1 = 1$ e $\varphi_2 = z$, obtemos $F(z) = \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)} = z$, que tem um zero simples e nenhum pólo. Outra possibilidade é $\varphi_1(z) = z$ e $\varphi_2(z) = 1$, obtendo $F(z) = \frac{1}{z}$ que tem um pólo simples e nenhum zero e $F'(z) = -\frac{1}{z^2}$. Nestas duas possibilidades $\frac{|F'(z)|^2}{(1+|F(z)|)^2} = \frac{1}{(1+r^2)^2}$.

Podemos, ainda, ter $\varphi_1(z) = z+1$ e $\varphi_2(z) = z-1$, assim $F(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$ que tem um zero e um pólo simples e $F'(z) = \frac{2}{(z+1)^2}$.

Também $\frac{|F'(z)|^2}{(1+|F(z)|^2)^2} = \frac{\left(\frac{2}{|z+1|^2}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{|z-1|}{|z+1|}\right)^2\right)^2} = \left(\frac{2}{|z+1|^2+|z-1|^2}\right)^2 =$

$$= \Big(\frac{2}{(z+1)(w+1)+(z-1)(w-1)}\Big)^2 =$$

$$= \Big(\frac{2}{zw+z+w+1+zw-z-w+1}\Big)^2 = \frac{1}{(1+r^2)^2}.$$

Pelo lema anterior, o problema (P_λ), isto é, o problema (P) ($\Delta u + \lambda e^u = 0$ em Ω e $u = 0$ em $\partial\Omega$), para λ fixo, é reduzido a encontrar $F = F(z)$ da forma descrita, satisfazendo

$$\frac{\mid F'(z) \mid}{1 + \mid F(z) \mid^2} = \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ em } \partial\Omega, \tag{2.11}$$

já que $\frac{\lambda}{8}e^u = \frac{|F'(z)|}{(1+|F(z)|^2)^2}$ e $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Seja, agora, $\Omega = D = \{x \mid \mid x \mid < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. A equação para $u = u(r)$ é

$$(ru')' + \lambda r e^u = 0 \text{ para } r > 0, \qquad u'(0) = 0, \tag{2.12}$$

já que

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} =$$
$$= \frac{1}{r}(ru_{rr} + u_r) = \frac{1}{r}(ru')'.$$

A equação (2.12) é integrável.
Fazendo a mudança de variável

$$u(r) = v(s) - 2s \text{ e } r = e^s \tag{2.13}$$

temos

$$u'(r) = v'(s)\frac{ds}{dr} - 2\frac{ds}{dr}\ , \ r = e^s \text{ e } s = log\, r \text{ assim, } \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r} = e^{-s},$$

logo $u'(r) = (v'(s) - 2)e^{-s}$,

$$ru'(r) = v'(s) - 2,$$

$$(ru'(r))' = v''(s)\frac{\partial s}{\partial r} = v''(s)e^{-s},$$

$$(ru'(r))' + \lambda e^u = (ru'(r))' + \lambda e^s e^{v(s)} e^{-2s} =$$

$$= (v''(s) + \lambda e^{v(s)})e^{-s} = 0.$$

Assim

$$v''(s) + \lambda e^{v(s)} = 0 \text{ e } \lim_{s\to-\infty} e^{-s}(v'(s) - 2) = 0. \tag{2.14}$$

Vamos agora integrar (2.14)

$$v'' + \lambda e^v = 0$$

$$v'v'' + \lambda v'e^v = 0,\ \Big(\frac{1}{2}(v')^2 + \lambda e^v\Big)' = 0,\ ((v')^2 + 2\lambda e^v)' = 0$$

$$\text{e} \quad (v')^2 + 2\lambda e^v = K,\ K \text{ constante.}$$

Seja $h = 2\lambda e^v$

$$h' = 2\lambda e^v v', \quad h' = hv', \quad v' = \frac{h'}{h}.$$

Substituindo,

$$\Big(\frac{h'}{h}\Big)^2 + h = K, \text{ e } (h')^2 = (K-h)\,h^2. \text{ Assim, } h' = \pm(\sqrt{K-h})h$$

$$\lim_{s\to-\infty} e^{-s}(v'(s) - 2) = 0 = \lim_{s\to-\infty} e^{-s}\Big(\frac{h'(s)}{h(s)} - 2\Big)$$

e, como $h(s) > 0$, $h'(s) > 0$, obtemos $h'(s) = (\sqrt{K-h})h$.

Temos, portanto,

$$\frac{dh}{h\sqrt{K-h}} = ds,\ \frac{1}{\sqrt{K}}log\Big(\frac{\sqrt{K-h}-\sqrt{K}}{\sqrt{K-h}+\sqrt{K}}\Big) = s + M,\ M \text{ constante.}$$

$$\text{Assim } \frac{\sqrt{K-h}-\sqrt{K}}{\sqrt{K-h}+\sqrt{K}}\ \frac{\sqrt{K-h}-\sqrt{K}}{\sqrt{K-h}-\sqrt{K}} = Le^{\sqrt{K}s} \quad (L = e^{\sqrt{K}M}),$$

$$\frac{K-h+K-2\sqrt{K-h}\sqrt{K}}{K-h-K} = Le^{\sqrt{K}s},$$

$$\frac{2K-h-2\sqrt{K}\sqrt{K-h}}{-h} = Le^{\sqrt{K}s},$$

$$-2\sqrt{K}\sqrt{K-h} = h(1-Le^{\sqrt{K}s}) - 2K,$$

$$4K(K-h) = h^2(1-Le^{\sqrt{K}s})^2 - 4Kh(1-Le^{\sqrt{K}s}) + 4K^2$$

$$eh(1 - Le^{\sqrt{K}s})^2 = -4KLe^{\sqrt{K}s}$$

$$h = \frac{-4KLe^{\sqrt{K}s}}{(1 - Le^{\sqrt{K}s})^2}.$$

Seja $C = -L$. Temos

$$h = \frac{4KCe^{\sqrt{K}s}}{(1 + Ce^{\sqrt{K}s})^2}$$

$$h' = \frac{\sqrt{K}4KCe^{\sqrt{K}s}(1 + Ce^{\sqrt{K}s})^2 - 4KCe^{\sqrt{K}s}2(1 + Ce^{\sqrt{K}s})\sqrt{K}Ce^{\sqrt{K}s}}{(1 + Ce^{\sqrt{K}s})^4}$$

$$h' = \sqrt{K}4KCe^{\sqrt{K}s}\frac{(1 - Ce^{\sqrt{K}s})}{(1 + Ce^{\sqrt{K}s})^3}$$

$$v' = \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt{K}(1 - Ce^{\sqrt{K}s})}{(1 + Ce^{\sqrt{K}s})}.$$

Devemos ter $\lim_{s \to -\infty} e^{-s}(v'(s) - 2) = 0$.

$$\lim_{s \to -\infty} e^{-s}(v'(s) - 2) = \lim_{s \to -\infty} \frac{e^{-s}(\sqrt{K}(1 - Ce^{\sqrt{K}s}) - 2(1 + Ce^{\sqrt{K}s}))}{(1 + Ce^{\sqrt{K}s})} =$$

$$= \lim_{s \to -\infty} \frac{\sqrt{K} - 2 - (\sqrt{K} + 2)Ce^{\sqrt{K}s}}{e^s(1 + Ce\sqrt{K}s)}, \text{ com } \lim_{s \to -\infty} Ce^{\sqrt{K}s} = 0 = \lim_{s \to -\infty} e^s(1 + Ce^{\sqrt{K}s}).$$

Logo a única possibilidade de tal limite ser nulo é para $\sqrt{K} = 2$.Neste caso

$$\lim_{s \to -\infty} e^{-s}(v'(s) - 2) = \lim_{s \to -\infty} \frac{4Ce^{2s}}{e^s(1 + Ce^{2s})} = \lim_{s \to -\infty} \frac{4Ce^s}{(1 + Ce^{2s})} = 0,$$

como desejávamos.

$$\text{Assim } h = \frac{16Ce^{2s}}{(1 + Ce^{2s})^2}$$

$$\text{e, } e^v = \frac{8}{\lambda}\frac{Ce^{2s}}{(1 + Ce^{2s})^2}, \text{ ou } e^u = e^{v-2s} = \frac{8}{\lambda}\frac{C}{(1 + Cr^{2s})^2}, \text{ com } C > 0. \tag{2.15}$$

Por outro lado, foi provado por Gidas, Ni e Nirenberg em [6] que toda solução de (P_λ) para $\lambda > 0$ deve ser radial. Conseqüentemente, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.2 *Quando $\Omega = D \subset I\!R^2$, o problema (P_λ) tem solução somente para $\lambda \in [0,2]$. Para estes λ's, as soluções de (P_λ) são expressas explicitamente por*

$$u_{\pm} = log\frac{(\frac{8}{\lambda})C_{\pm}}{(1+C_{\pm}r^2)^2} \text{ com, } C_{\pm} = \frac{1}{\lambda}(4-\lambda \pm 2\sqrt{4-2\lambda}) \tag{2.16}$$

onde $r = \mid x \mid$.

Demonstração :
$u \equiv 0$ em $\partial\Omega$

$$\Leftrightarrow u(1) = log\frac{\frac{8}{\lambda}C}{(1+C)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{\lambda}C = (1+C)^2$$

$$\Leftrightarrow 8C = \lambda(1+C)^2 \Leftrightarrow \lambda C^2 + (2\lambda - 8)C + \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{-2\lambda + 8 \pm \sqrt{(2\lambda-8)^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda} = \frac{-2\lambda + 8 \pm \sqrt{4\lambda^2 - 2.2.8\lambda + 8^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda}$$

$$C = \frac{-2\lambda + 8 \pm 4\sqrt{-2\lambda+4}}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}(4 - \lambda \pm 2\sqrt{4-2\lambda}).$$

Para obtermos tal C, λ deve pertencer ao intervalo $[0,2]$.□

Aqui observamos que estas soluções radiais podem ser associadas com $F(z) = C^{\frac{1}{2}}z\,(c > 0)$ em (2.11), já que

$$F'(z) = C^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\frac{\mid F'(z) \mid}{1 + \mid F(z) \mid^2} = \frac{\mid C \mid^{\frac{1}{2}}}{1 + \mid C \mid \mid z \mid^2}.$$

Logo

$$\frac{\mid F'(z) \mid}{1 + \mid F(z) \mid^2} = \frac{\mid C \mid^{\frac{1}{2}}}{1 + \mid C \mid} = \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ em } \partial\Omega, \tag{2.17}$$

onde $C = C_{\pm} = \frac{1}{\lambda}(4 - \lambda \pm 2\sqrt{4-2\lambda})$.

A quantidade $\rho(z) \equiv \frac{|F'(z)|}{1+|F(z)|^2}$ tem o seguinte significado geométrico que é muito importante.

Sejam $\mathcal{K}$ a esfera de Riemann de diâmetro unitário, tangente ao plano ω na origem, onde $\omega = F(z)$, $F : \Omega \to \mathbb{C}$, $P : \mathbb{C} \to \mathcal{K}$, a projeção estereográfica e $\overline{F} = P \circ F : \Omega \to \mathcal{K}$.

Mostraremos que a área de $\overline{F}(\Omega)$ em $\mathcal{K}$ é dada por

$$\Sigma \equiv \int_\Omega \frac{| F' |^2}{(1+ | F |^2)^2} dx.$$

Seja, agora, $d\sigma =| dz |$ e $d\tau$ os elementos de comprimento em Ω e em $\mathcal{K}$, respectivamente, $d\tau$ induzido por $\overline{F} : \Omega \to \mathcal{K}$, a transformação conforme natural associada a F.

Então é satisfeita a relação

$$d\tau = \frac{| F' |}{1+ | F |^2} d\sigma,$$

De fato, na projeção, um ponto $(x, y) \in \mathbb{C}$ corresponde a $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{K}$ e (x, y) é a imagem de (u, v) por F.

Assim

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$d\tau = \sqrt{\frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}} d\sigma = \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \cdot \frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} d\sigma$$

$$F(u, v) = (x, y), \text{ logo } | F' |^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \text{ e}$$

$$\overline{F}(u, v) = (\xi, \eta, \zeta),$$

então

$$d\tau = \sqrt{| F' |^2 \frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} d\sigma.$$

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{x}(x^2 + y^2 + 1) - x(2x\dot{x} + 2y\dot{y})}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{\dot{x}(y^2 - x^2 + 1) - 2xy\dot{y}}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

$$\dot{\eta} = \frac{\dot{y}(x^2 - y^2 + 1) - 2xy\dot{x}}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \text{ e}$$

$$\dot{\zeta} = \frac{2x\dot{x} + 2y\dot{y}}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

$$\text{Assim } \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

$$\frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \text{ e}$$

$$d\tau = \sqrt{| F' |^2 \frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} d\sigma = \frac{| F' |}{\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2}} d\sigma = \frac{| F' |}{1 + | F |^2} d\sigma.$$

Nesta terminologia, a igualdade (2.11) significa que o comprimento induzido de $\overline{F}(\partial\Omega)$ em $\mathcal{K}$ é igual a

$$\Lambda = \int_{\partial\Omega} \frac{| F' |}{1 + | F |^2} d\sigma = \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}} | \partial\Omega |, \tag{2.18}$$

onde $| \partial\Omega |$ denota o comprimento de $\partial\Omega$. Como F é conforme, a área de $\overline{F}(\Omega)$ em $\mathcal{K}$ é dada por

$$\Sigma \equiv \int_{\Omega} \frac{| F' |^2}{(1 + | F |^2)^2} dx = \int_{\Omega} \frac{C}{(1 + C | z |^2)^2} dx = \frac{\lambda}{8} \int_{\Omega} e^u dx. \tag{2.19}$$

Quando $\Omega = D$, para uma solução (λ, u) de (P) definimos s por

$$s = 8\Sigma = \lambda \int_{\Omega} e^u dx. \tag{2.20}$$

Utilizando (2.16) obtemos

$$s = \lambda \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{8}{\lambda} \frac{C_{\pm}}{(1 + C_{\pm} r^2)^2} r dr d\theta = 2\pi.4 \int_0^1 \frac{2C_{\pm} r}{(1 + C_{\pm} r^2)^2} dr.$$

Seja $t = C_{\pm} r^2$, portanto $dt = 2C_{\pm} r$ e t varia entre 0 e $C_{\pm}$. Então

$$s = 2\pi.4 \int_0^{C_{\pm}} \frac{dt}{(1 + t)^2} = 2\pi.4 \left[\frac{-1}{1 + t}\right]_0^{C_{\pm}} = 2\pi.4 (\frac{-1}{1 + C_{\pm}} + 1) =$$

$$2\pi \frac{4C_{\pm}}{1 + C_{\pm}} = 2\pi \frac{\frac{4}{\lambda}(4 - \lambda \pm 2\sqrt{4 - 2\lambda})}{1 + \frac{1}{\lambda}(4 - \lambda \pm 2\sqrt{4 - 2\lambda})} =$$

$$= 2\pi\frac{2(4-\lambda \pm 2\sqrt{4-2\lambda})}{2\pm\sqrt{4-2\lambda}} = 2\pi\frac{(2\pm\sqrt{4-2\lambda})^2}{2\pm\sqrt{4-2\lambda}} = 2\pi(2\pm\sqrt{4-2\lambda}).$$

Logo todas as soluções (λ, u) de (P) podem ser parametrizadas por $s \in [0, 8\pi]$, já que $0 < \lambda \leq 2$.

Teorema 2.3 *Quando $\Omega = D$, existe uma correspondência contínua e injetiva entre $s \in [0, 8\pi]$ em (2.20) e a solução $(\lambda, u) \in I\!R^+ \times C(\overline{\Omega})$ de (P).Denotando a solução correspondente a s por (λ_s, u_s), temos*

$$\lambda_s = \frac{1}{8\pi^2}s(8\pi - s), \tag{2.21}$$

$$m(s) \equiv \int_\Omega e^{u_s}dx = \frac{s}{\lambda_s} = \frac{8\pi^2}{8\pi - s} \quad \text{e} \tag{2.22}$$

$$\eta(s) \equiv \int_\Omega |\nabla u_s|^2\, dx = -16\pi log(8\pi - s)\{1 + o(1)\} \text{ quando } s \to 8\pi^-. \tag{2.23}$$

Demonstração :
Como já foi calculado,

$$s = 2\pi(2\pm\sqrt{4-2\lambda}). \tag{2.24}$$

Logo

$$\frac{s}{2\pi} - 2 = \pm\sqrt{4-2\lambda_s},\ \frac{s^2}{4\pi^2} - \frac{4s}{2\pi} + 4 = 4 - 2\lambda_s.$$

$$\text{Assim } \lambda_s = \frac{s}{\pi} - \frac{s^2}{8\pi^2} = \frac{8\pi s - s^2}{8\pi^2} = \frac{1}{8\pi^2}s(8\pi - s).$$

Portanto

$$\lambda_s = \frac{1}{8\pi^2}s(8\pi - s). \tag{2.25}$$

Assim obtemos (2.22), já que

$$m(s) \equiv \int_\Omega e^{u_s}dx = \frac{s}{\lambda_s} = \frac{s}{\frac{1}{8\pi^2}s(8\pi - s)} = \frac{8\pi^2}{8\pi - s}.$$

Por outro lado, por (2.16)

$$C_{\pm} = \frac{1}{\lambda_s}(4 - \lambda_s \pm 2\sqrt{4 - 2\lambda_s}) = \frac{8\pi^2}{s(8\pi - s)}\Big(4 - \frac{s(8\pi - s)}{8\pi^2} \pm 2\sqrt{4 - \frac{s(8\pi - s)}{4\pi^2}}\Big) =$$

$$= \frac{8\pi^2}{s(8\pi - s)}\Big(\frac{32\pi^2 - 8s\pi + s^2}{8\pi^2} \pm \frac{8\pi}{8\pi^2}\sqrt{16\pi^2 - 8s\pi + s^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{s(8\pi - s)}(32\pi^2 - 8s\pi + s^2 \pm 8\pi(4\pi - s)).$$

Assim,

$$C_+ = \frac{(8\pi - s)^2}{s(8\pi - s)} = \frac{8\pi - s}{s}, \ C_- = \frac{s^2}{s(8\pi - s)} = \frac{s}{8\pi - s}$$

$$\text{e } u = u_{\pm}(r) = log\frac{(\frac{8}{\lambda})C_{\pm}}{(1 + C_{\pm}r^2)^2}.$$

$$\text{Seja } u_s(r) = u_-^s(r) = log\frac{(\frac{8}{\lambda_s})C_-^s}{(1 + C_-^s r^2)^2} \text{ e } u_+^s(r) = log\frac{(\frac{8}{\lambda_s})C_+^s}{(1 + C_+^s r^2)^2}.$$

$$\text{onde } C_-^s = \frac{s}{8\pi - s} \text{ e } C_+^s = \frac{8\pi - s}{s}.$$

Basta tomar $u_s = u_-^r$ pois $u_+^s(r) = u_-^{8\pi - s}(r)$, já que, $C_-^s = C_+^{8\pi - s}$.
Passamos agora à expressão de $\eta(s)$.

$$\eta(s) = \int_\Omega |\nabla u_s|^2 \, dx = -\int_\Omega u_s \Delta u_s dx = \lambda_s \int_\Omega u_s e^{u_s} dx =$$

$$= \lambda_s \int_\Omega \frac{\frac{8}{\lambda_s}C_-^s}{(1 + C_-^s r^2)^2}\Big(log\Big(\frac{8C_-^s}{\lambda_s}\Big) - 2log(1 + C_-^s r^2)\Big)dx.$$

$$\eta(s) = 8\pi \int_0^1 \frac{2C_-^s r}{(1 + C_-^s r^2)^2}\Big(log\Big(\frac{8C_-^s}{\lambda_s}\Big) - 2log(1 + C_-^s r^2)\Big)dr. \tag{2.26}$$

Seja $t = 1 + C_-^s r^2$, $dt = 2C_-^s r \, dr$ e $1 < t < 1 + C_-^s$, então

$$\eta(s) = 8\pi\Big(\int_1^{1+C_-^s} log\Big(\frac{8C_-^s}{\lambda_s}\Big)\frac{dt}{t^2} - 2\int_1^{1+C_-^s} \frac{log\, t}{t^2}dt\Big) =$$

$$= 8\pi\Big(log\Big(\frac{8C_-^s}{\lambda_s}\Big)\Big[\frac{-1}{t}\Big]_1^{1+C_-^s} - 2\Big(\Big[\frac{-log\,t}{t}\Big]_1^{1+C_-^s} - \int_1^{1+C_-^s}\frac{-1}{t^2}dt\Big)\Big) =$$

$$= 8\pi\Big(log\Big(\frac{8C_-^s}{\lambda_s}\Big)\Big(\frac{C_-^s}{1+C_-^s}\Big) + \frac{2\,log(1+C_-^s)}{1+C_-^s} - \frac{2C_-^s}{1+C_-^s}\Big) =$$

$$= 8\pi\Big(log\Big(\frac{\frac{8s}{8\pi-s}}{\frac{s(8\pi-s)}{8\pi^2}}\Big)\Big(\frac{\frac{s}{8\pi-s}}{1+\frac{s}{8\pi-s}}\Big) + \frac{2log\Big(1+\frac{s}{8\pi-s}\Big)}{1+\frac{s}{8\pi-s}} - 2\frac{\frac{s}{8\pi-s}}{1+\frac{s}{8\pi-s}}\Big) =$$

$$= 8\pi\Big(2log\Big(\frac{8\pi}{8\pi-s}\Big)\Big(\frac{s}{8\pi-s}\Big) + 2log\Big(\frac{8\pi}{8\pi-s}\Big)\Big(\frac{8\pi-s}{8\pi}\Big) - \frac{2s}{8\pi}\Big) =$$

$$= 16\pi\Big(log\Big(\frac{8\pi}{8\pi-s}\Big) - \frac{s}{8\pi}\Big).$$

$$\eta(s) = -16\pi log(8\pi - s) + 16\pi log\,8\pi - 2s. \tag{2.27}$$

Agora basta provar que

$$-16\pi log(8\pi - s) + 16\pi log\,8\pi - 2s = -16\pi log(8\pi - s)\{1 + o(1)\}$$

quando $s \to 8\pi^-$.

De fato, $\lim_{s\to 8\pi^-}\frac{16\pi log\,8\pi - 2s}{-16\pi log(8\pi - s)} = 0$. Assim,

$$\frac{16\pi log\,8\pi - 2s}{-16\pi log(8\pi - s)} = o(1),$$

o que mostra a afirmação acima. □

De agora em diante, vamos estudar as soluções radiais de (P) no caso

$$\Omega = A = \{x \mid a <\mid x \mid< 1\} \subset \mathbb{R}^2, \text{ onde } 0 < a < 1.$$

Toda solução radial $v = v(r)$ de (P_λ) com $\lambda > 0$, onde (P_λ) é o problema (P) para um λ fixo, é obtida como uma solução do problema de equações ordinárias (RP_λ), a saber:

$$(RP_\lambda) \qquad (rv')' + \lambda r e^v = 0 \text{ para } r \in (a,1),\ v(a) = v(1) = 0. \tag{2.28}$$

Aqui a função $v(r)$ é positiva para $r \in (a,1)$,pelo princípio do máximo, pois $-\Delta v = \lambda e^v \geq 0$ em A e $v = 0$ em ∂A. Assim, também, $v'(r)$ é positiva em $r = a$.Veremos a seguir que toda solução $v = v(r)$ de (RP_λ) é caracterizada por seu comportamento perto de $r = 0$.

Lema 2.4 *Seja $v = v(r)$ uma solução do problema*

$$(rv')' + \lambda re^v = 0, \tag{2.29}$$

$$v(a) = 0 \text{ e } v'(a) > 0, \tag{2.30}$$

onde $\lambda > 0$. Então, $v = v(r)$ pode ser prolongada para $0 < r \leq 1$ e existem números reais $L > 0$ e M, tais que

$$\lim_{r \to 0^+} (v(r) - L\log r) = M, \tag{2.31}$$

$$\lim_{r \to 0^+} \left(v'(r) - \frac{L}{r}\right) = 0. \tag{2.32}$$

Lema 2.5 *Para cada par de números $L > 0$ e M, existe uma única solução $v = v(r)$ de (2.29) que satisfaz as condições (2.31) e (2.32).*

Observação:
A função v não tem mínimos locais.
Demonstração :
Reescrevemos $(rv'(r))' + \lambda re^{v(r)} = 0$ como $rv''(r) + v'(r) + \lambda re^{v(r)} = 0$.
Se r é ponto crítico, então $v'(r) = 0$, logo $rv''(r) = -\lambda e^{v(r)} < 0$ e, portanto, r é ponto de máximo local estrito.□

Observação:
Toda solução de uma equação do tipo $y'' = f(x, y, y')$ com f contínua se estende a uma solução maximal, isto é, uma solução que não pode ser prolongada a um intervalo maior.

Seja $(rv')' + \lambda re^v = 0$ e suponhamos que $v = v(r)$ esteja definida em $[r_0, r_1)$. Vamos primeiro provar um resultado auxiliar.

Afirmação:

Se existir $lim_{r \to r_1 -} v(r)$, então v pode ser prolongada a um intervalo $[r_0, r_2)$, com $r_2 > r_1$.

Demonstração :

De fato, se

$$v_0 = \lim_{r \to r_1 -} v(r) ,$$

então,

$$\lim_{r \to r_1 -} (rv'(r))' = -\lambda r_1 e^{v_0} .$$

Logo, $(rv'(r))'$ é limitada em $[r_0, r_1)$ e rv' é de Lipschitz neste intervalo, sendo assim uniformemente contínua. E existe $\lim_{r \to r_1 -} rv'(r)$, portanto, existe $\lim_{r \to r_1 -} v'(r) = v_1$.

O problema de valor inicial

$$(rv')' + \lambda r e^{v} = 0, \quad v(r_1) = v_0, \quad v'(r_1) = v_1$$

possui solução em uma vizinhança de r_1, logo possui solução em um intervalo $[r_1, r_2)$ com $r_2 > r_1$. Isto permite estender v ao intervalo $[r_0, r_2)$. $\square$

Se v é solução de $(rv')' + \lambda r e^v = 0$ em $[r_0 r_1)$ e $v(r) > 0$ $\forall r \in [r_0, r_1)$, então

$$(rv'(r))' = -\lambda r e^{v(r))} < -\lambda r.$$

Assim $(rv'(r) + \frac{\lambda r^2}{2})' < 0$ e $rv'(r) + \frac{\lambda r^2}{2}$ é decrescente, portanto, é limitada superiormente. Logo $rv'(r) + \frac{\lambda r^2}{2} < M_1$, $M_1 > 0$ e $v'(r) < -\frac{\lambda r}{2} + \frac{M_1}{r}$, $\forall r \in [r_0, r_1)$.

Isto implica que existe $\lim_{r \to r_1 -} v(r)$ e, pela afirmação, temos que v se prolonga a um intervalo maior.

Como v não possui mínimos locais, v ou não tem pontos críticos, ou tem um só de máximo local estrito.

Logo, ou v é monótona, ou existe $r \in (r_0, r_1)$ tal que v é crescente em $[r_0, r]$ e decrescente em $[r, r_1)$.

Mas, se v é crescente em $[r_0, r_1)$, como v' é limitada superiormente, segue que v é limitada superiormente, portanto, existe $\lim_{r \to r_1 -} v(r)$ e, se v é decrescente em $[r, r_1)$, como $v > 0$, existe $\lim_{r \to r_1 -} v(r)$.

Lema 2.6 *Se v é uma solução de $(rv'(r))' + \lambda re^v = 0$, v positiva em um ponto $r_0 \in (0,\infty)$, então v se prolonga ao intervalo $[r_0,\infty)$ e tem exatamente um zero $r_1 \in [r_0, r_\infty)$.*

Demonstração :

Seja $r_m > r_0$ tal que $[r_0, r_m)$ é maximal. $v(r) > 0\ \forall r \in [r_0, r_m)$, então $r_m = \infty$.

Mas $v'(r) < -\frac{\lambda r}{2} + \frac{M_1}{r}$, logo $\lim_{r\to\infty} v'(r) = -\infty$, contradizendo que $v > 0$ em $[r_0,\infty)$. Assim existe $r_1 \in [0, r_m)$ tal que $v(r_1) = 0$. Como v não tem pontos de mínimo local, $v(r) < 0\ \forall r \in (r_1, r_m)$ e $(rv'(r))' = -\lambda re^{v(r)} > -\lambda r\ \forall r \in (r_1, r_m)$. Portanto $v'(r) > -\frac{\lambda r}{2} - \frac{M_2}{r}\ \forall r \in (r_1, r_m)$ com $M_2 > 0$.

Mas, $v(r_1) = 0$, $v < 0$ em (r_1, r_m), v não tem ponto de mínimo local implicam v decrescente em (r_1, r_m), assim, $\lim_{r\to r_m-} v(r) = -\infty$ ou $r_m = \infty$.

A alternativa $r_m < \infty$ não pode ocorrer pois contradiz a desigualdade

$$v'(r) > -\frac{\lambda r}{2} - \frac{M_2}{r}\ \forall r \in (r_1, r_m).$$

Logo $r_m = \infty$. □

Demonstração do Lema 2.4

Devido ao princípio do máximo, $v(r) < 0$ para $r \in (0, a)$, já que, $v'(a) > 0$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que $v(\varepsilon) = -T < 0$, pois, $\lim_{r\to 0^+} v(r) = -\infty$, assim $v(r) < 0$ para $r \in (0, a)$, pois, caso existisse $0 < x < a$ tal que $v(x) = 0$, teríamos um anel, cuja fronteira seria o disco de raio x unido com o disco de raio a, de modo que, neste anel, v se anula na fronteira sendo negativo no interior, assumindo assim mínimo interior, o que é um absurdo.

Por isso, de (2.29), obtemos

$$e^v < 1,\ -\lambda re^v > -\lambda r,\ -\lambda r < (rv'(r))' < 0. \tag{2.33}$$

Integrando (2.33) de r até a, com $0 < r < a$, temos

$$\int_r^a -\lambda t dt < \int_r^a (tv'(t))' dt < 0,$$

isto é,

$$-\frac{\lambda}{2}(a^2 - r^2) < av'(a) - rv'(r) < 0.$$

Existem números positivos C_1 e C_2 tais que

$$C_2 < rv'(r) < C_1 \tag{2.34}$$

e

$$C_2 = av'(a) \text{ e } C_1 = \frac{\lambda}{2}a^2.$$

Afirmação

A função $v = v(r)$ pode ser prolongada à direita de $r = 0$.

De fato, como $a > 0$, $v(a) = 0$ e $v'(a) > 0$, então, para $r > a$, r próximo de a, $v(r) > 0$ e, para $r < a$, r próximo de a, $v(r) < 0$. Pelo Lema 2.6, a solução se prolonga até ∞.

Seja (α, ∞) o intervalo maximal de definição. Vamos mostrar que $\alpha = 0$.

Como $v(r) < 0\ \forall r \in (a - \sigma, a)$ e v não tem mínimos locais, segue que $v(r) < 0$ para $r \in (\alpha, a)$. Então $-\lambda r < (rv'(r))' = -r\lambda e^v < 0$. Logo, $C_2 < rv'r < C_1\ \forall r \in (\alpha, a)$ e $C_2, C_1 > 0$.

Assim, se $\alpha > 0$, teremos v' limitada em (α, a) e existe $\lim_{r \to \alpha^+} v(r)$. Logo v se prolonga a um intervalo maior, contradizendo que (α, ∞) é o intevalo maximal.

Sendo assim, $\alpha = 0$.

Além disso, como $rv'(r)$ é monótona decrescente e limitada com respeito a $r \in (0, a)$, podemos tomar um número positivo L tal que

$$\lim_{r \to 0^+} rv'(r) = L.$$

De (2.33), obtemos, do mesmo modo acima,

$$\frac{-\lambda}{2}(r^2 - \varepsilon^2) < rv'(r) - \varepsilon v'(\varepsilon) < 0, \tag{2.35}$$

onde $0 < \varepsilon < r < a$.

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (2.35) e divididindo por r a expressão, concluímos que

$$-\frac{\lambda}{2}r \leq v'(r) - \frac{L}{r} \text{ para } r \in (0, a), \tag{2.36}$$

de onde obtemos (2.32).

Por (2.36) sabemos que $v(r) - L\,log\,r$ é não crescente e limitada, já que

$$(v(r) - L\,log\,r)' = v'(r) - \frac{L}{r}$$

$$\text{Logo } \lim_{r\to 0^+}(v(r) - L\,log\,r) = M. \qquad \square$$

Demonstração do lema 2.5

Seja $\varphi(r) \equiv v(r) - L\,log\,r$. Podemos considerar o problema equivalente para φ

$$(r\varphi')' + \lambda r^{L+1}e^{\varphi} = 0, \tag{2.37}$$

$$\lim_{r\to 0^+}\varphi(r) = M \text{ e } \lim_{r\to 0^+}\varphi'(r) = 0. \tag{2.38}$$

pois,

$$(r\varphi')' + \lambda r^{L+1}e^{\varphi} = \left(r\left(v' - \frac{L}{r}\right)\right)' + \lambda r^{L+1}e^{v}e^{-L\,log\,r} = (rv')' + \lambda re^{v} = 0.$$

A mudança de variáveis

$$r = e^t \text{ e } \psi(t) = \varphi(r) - M \tag{2.39}$$

transforma o problema (2.37) com (2.38), no problema

$$\psi"(t) + \lambda e^{(L+2)t+M}e^{\psi(t)} = 0, \tag{2.37$'$}$$

$$\lim_{t\to-\infty}\psi = \lim_{t\to-\infty}e^{-t}\psi'(t) = 0, \tag{2.38$'$}$$

$$\text{pois, } \varphi'(r) = \psi'(t)\frac{dt}{dr},\ t = log\,r \text{ e } \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} = e^{-t}.$$

$$\text{Logo } \varphi'(r) = \psi'(t)e^{-t},$$

$$r\varphi'(r) = \psi'(t) \text{ e } (r\varphi'(r))' = \frac{d\psi'(t)}{dr} = \psi"(t)e^{t},$$

$$(r\varphi'(r))' + \lambda r^{L+1}e^{\varphi(r)} = 0,\quad \psi"(t)e^{-t} + \lambda e^{(L+2)t}e^{\psi}(t)e^{M} = 0.$$

$$\text{Assim } \psi"(t) + \lambda e^{(L+2)t+M}e^{\psi(t)} = 0.$$

Também

$$\psi"(t) = -\lambda e^{(L+2)t+M}e^{\psi(t)}$$

que, junto com (2.38), implica

$$\psi(t) = -\lambda \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\eta} e^{(L+2)\xi + M} e^{\psi(\xi)} d\xi \, d\eta. \tag{2.40}$$

Logo o problema (2.37)' com (2.38)' é equivalente à equação integral (2.40).

O que será provado é a existência de uma única solução $\psi = \psi(t) de (2.40)$. Para este propósito, tomamos o espaço de Banach

$$X = \{\psi = \psi(t) \mid \psi \in C(-\infty, -T] \text{ e } \lim_{t \to -\infty} \psi(t) = 0\}$$

com a norma do sup, onde $T > 0$, e um operador Ψ em X tal que $\Psi(\psi)$ é definido pelo lado direito de (2.40). Então, para T apropriadamente grande, o operador Ψ torna-se uma contração na bola unitária $\{\psi \mid \psi \in X, sup_{(-\infty,-T]} \mid \psi(t) \mid \leq 1\}$ em X. Já que

$$\mid \Psi(\psi_1)(t) - \Psi(\psi_2)(t) \mid \leq \lambda \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\eta} e^{(L+2)\xi + M} \mid e^{\psi_1(\xi)} - e^{\psi_2(\xi)} \mid d\xi d\eta \leq$$

$$\leq \lambda \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\eta} e^{(L+2)\xi} e^{M+1} d\xi d\eta \mid \psi_2(\xi) - \psi_2(\xi) \mid =$$

$$= \lambda e^{M+1} \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{(L+2)\eta}}{L+2} d\eta \mid \psi_1(\xi) - \psi_2(\xi) \mid$$

$$\frac{\lambda e^{M+1} e^{(L+2)t}}{(L+2)^2} sup_\xi \mid \psi_1(\xi) - \psi_2(\xi) \mid \leq \frac{\lambda e^{M+1-(L+2)T}}{(L+2)^2} sup_\xi \mid \psi_1(\xi) - \psi_2(\xi) \mid .$$

Assim, para obtermos uma contração, basta escolhermos

$$T > \frac{1}{L+2}(log\, \lambda + M + 1 - 2\, log(L+2)).$$

Conseqüentemente, existe um único $\psi^* = \psi^*(t)$ ponto fixo de Ψ. Estendendo $\psi^*(t)$ para $t > -T$, obtemos uma solução clássica de (2.37)' com (2.38)'. □

Lema 2.7 *A solução $v = v(r)$ do problema (2.29) com (2.31) e (2.32) é dada por*

$$v(r) = log \frac{\left(\frac{8}{\lambda}\alpha^2 \beta^2 r^{2(\alpha-1)}\right)}{(1 + \beta^2 r^{2\alpha})^2}, \tag{2.41}$$

onde

$$\alpha = 1 + \frac{L}{2} \text{ e } \beta = \frac{1}{2+L}\left(\frac{\lambda}{2} e^M\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.42}$$

Demonstração :
De fato, $v(r)$ dada por (2.41) satisfaz (2.29), pois

$$v'(r) = \frac{\lambda(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}{8\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}}\times$$

$$\times\frac{8\alpha^2\beta^2 2(\alpha-1)r^{2\alpha-3}\lambda(1+\beta^2r^{2\alpha})^2 - 8\alpha^2\beta^2r^{2(\alpha-1)}\lambda 2(1+\beta^2r^{2\alpha})2\alpha\beta^2r^{2\alpha-1}}{\lambda^2(1+\beta^2r^{2\alpha})^4} =$$

$$= \frac{2(\alpha-1)}{r} - \frac{4\alpha\beta^2r^{2\alpha-1}}{1+\beta^2r^{2\alpha}}, \text{ assim } rv'(r) = 2(\alpha-1) - \frac{4\alpha\beta^2r^{2\alpha}}{1+\beta^2r^{2\alpha}} \text{ e}$$

$$(rv'(r))' = \frac{-8\alpha^2\beta^2r^{2\alpha-1}(1+\beta^2r^{2\alpha}) + 4\alpha\beta^2r^{2\alpha}2\alpha\beta^2r^{2\alpha-1}}{(1+\beta^2r^{2\alpha})^2} =$$

$$= -\lambda\frac{8}{\lambda}\frac{\alpha^2\beta^2r^{2\alpha-1}}{(1+\beta^2r^{2\alpha})^2} = -\lambda e^{v(r)}.$$

Substituindo $v(r)$ em (2.31) e (2.32), temos

$$\lim_{r\to0^+}(v(r) - L\,log\,r) = \lim_{r\to0^+} log\Big(\frac{\frac{8}{\lambda}\alpha^2\beta^2r^{2\alpha-2-L}}{(1+\beta^2r^{2\alpha})^2}\Big) = M \text{ e}$$

$$\lim_{r\to0^+}\Big(v'(r) - \frac{L}{r}\Big) = \lim_{r\to0^+}\Big(\frac{2\alpha-2-L}{r} - \frac{4\alpha\beta^2r^{2\alpha-1}}{1+\beta^2r^{2\alpha}}\Big) = 0.$$

Vejamos, agora, que estas condições são satisfeitas se α e β são determinadas por (2.42)

$$\lim_{r\to0^+}\Big(\frac{2\alpha-2-L}{r} - \frac{4\alpha\beta^2r^{2\alpha-1}}{1+\beta^2r^{2\alpha}}\Big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{r\to0^+}\frac{4\alpha\beta^2r^{2\alpha}}{1+\beta^2r^{2\alpha}} = 2\alpha-2-L,$$

$$\text{mas } \lim_{r\to0^+}\frac{4\alpha\beta^2r^{2\alpha}}{1+\beta^2r^{2\alpha}} = 4\alpha\lim_{r\to0^+}\frac{1}{\frac{1}{\beta^2r^{2\alpha}}+1} = 0.$$

$$\text{Logo } \lim_{r\to0^+}\Big(\frac{2\alpha-2-L}{r} - \frac{4\alpha\beta^2r^{2\alpha-1}}{1+\beta^2r^{2\alpha}}\Big) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha-2-L = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1+\frac{L}{2}$$

$$e \quad \lim_{r\to0^+} log\Big(\frac{8\alpha^2\beta^2r^{2\alpha-2-L}}{\lambda(1+\beta^2r^{2\alpha})^2}\Big) = M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{r\to 0^+}\Big(\frac{8\alpha^2\beta^2 r^{2\alpha-2-L}}{\lambda(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}\Big) = e^M \Leftrightarrow \frac{8}{\lambda}\lim_{r\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{L}{2}\right)^2\beta^2 r^{2(1+\frac{L}{2})-2-L}}{(1+\beta^2 r^{2(1+\frac{L}{2})})^2} = e^M$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 = \lim_{r\to 0^+}\frac{\beta^2}{(1+\beta^2 r^{2+L})^2} = \frac{\lambda}{8}\frac{4}{(2+L)^2}e^M = \Big(\frac{1}{2+L}\Big)^{-1}\frac{\lambda}{2}e^M.$$

$$\text{Logo } \beta = \frac{1}{2+L}\Big(\frac{\lambda}{2}e^M\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Como a unicidade de $v = v(r)$ já foi provada no Lema 2.5, de fato, $v(r)$ é dada por (2.41) com a condição (2.42). Assim, resta-nos apenas determinar os valores de α e β tais que $v(r)$ em (2.41) satisfaça às condições em (2.28),ou seja, $v(a) = v(1) = 0$.

Mas

$$v(a) = log\Big(\frac{8}{\lambda}\frac{\alpha^2\beta^2 a^{2(\alpha-1)}}{(1+\beta^2 a^{2\alpha})^2}\Big) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{\lambda}\frac{(\alpha\beta a^{\alpha-1})^2}{(1+\beta^2 a^{2\alpha})^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta a^{\alpha-1}}{1+\beta^2 a^{2\alpha}} = \Big(\frac{\lambda}{8}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$$v(1) = log\Big(\frac{8}{\lambda}\frac{\alpha^2\beta^2}{(1+\beta^2)^2}\Big) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{\lambda}\frac{\alpha^2\beta^2}{(1+\beta^2)^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{1+\beta^2} = \Big(\frac{\lambda}{8}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo se $a^\alpha = \zeta$

$$\frac{\alpha\beta a^{\alpha-1}}{1+\beta^2 a^{2\alpha}} = \frac{\alpha\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \frac{\zeta a^{-1}}{1+\beta^2\zeta^2} = \frac{1}{1+\beta^2} \Rightarrow \zeta(1+\beta^2) = a(1+\beta^2\zeta^2)$$

$$\Rightarrow \beta^2(\zeta - a\zeta^2) = a - \zeta \Rightarrow \beta^2 = \frac{a-\zeta}{\zeta(1-a\zeta)}. \tag{2.43}$$

Temos também

$$\zeta = a^\alpha = e^{\alpha\, log\, a},\ \alpha = \frac{log\,\zeta}{log a}.$$

Substituindo as expressões de α e β^2 em

$$\frac{\alpha\beta a^{\alpha-1}}{1+\beta^2 a^{2\alpha}} = \Big(\frac{\lambda}{8}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

obtemos

$$\frac{\frac{\log\zeta}{\log a}\frac{(a-\zeta)^{\frac{1}{2}}}{\zeta^{\frac{1}{2}}(1-a\zeta)^{\frac{1}{2}}}\zeta\, a^{-1}}{1+\frac{a-\zeta}{\zeta(1-a\zeta)}\zeta^2} = \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\log\zeta)(a-\zeta)^{\frac{1}{2}}(1-a\zeta)^{\frac{1}{2}}\zeta^{\frac{1}{2}}}{a\,(\log a)((1-a\zeta)+(a-\zeta)\zeta)} = \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{8}a^2(\log a)^2 = \frac{(\log\zeta)^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)}{(1-\zeta^2)^2} \equiv G(\zeta) \tag{2.44}$$

com

$$\zeta = a^{\alpha}. \tag{2.45}$$

Por (2.42), $\alpha > 1$ e por isto ζ varia de 0 até a. Cada solução $v = v(r)$ de (P_λ) em $\Omega = A$ corresponde a uma solução $\zeta \in (0, a)$ de (2.44). Assim, vamos investigar a função $G(\zeta)$.

Afirmação 1:
$G(\zeta)$ é positiva em $(0, a)$.
Demonstração :

$$G(\zeta) > 0 \text{ em } (0,a) \Leftrightarrow (a-\zeta)(1-a\zeta) > 0 \text{ em } (0,a)$$
$$\Leftrightarrow a\zeta < 1 \text{ em } (0,a), \text{ mas } \zeta = a^{\alpha} \Rightarrow a\zeta = a^{\alpha+1} < 1$$
$$\text{pois } a < 1 \text{ e } \alpha + 1 > 1.$$

Afirmação 2:

$$\lim_{\zeta\to 0^+} G(\zeta) = G(a) = 0.$$

Demonstração :

$$\lim_{\zeta\to 0^+} G(\zeta) = \lim_{\zeta\to 0^+} \frac{(log\,\zeta)^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)}{(1-\zeta^2)^2} =$$

$$\lim_{\zeta\to 0^+} \frac{(log\,\zeta)^2}{\zeta^{-1}} \lim_{\zeta\to 0^+} \frac{(a-\zeta)(1-a\zeta)}{(1-\zeta^2)^2} = a \lim_{\zeta\to 0^+} \frac{(log\,\zeta)^2}{\zeta^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Logo

$$\lim_{\zeta\to 0^+} G(\zeta) = a \lim_{\zeta\to 0^+} \frac{2(log\,\zeta)\frac{1}{\zeta}}{-\frac{1}{\zeta^2}} = -2a \lim_{\zeta\to 0^+} \frac{log\,\zeta}{\zeta^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Novamente

$$\lim_{\zeta\to 0^+} G(\zeta) = -2a \lim_{\zeta\to 0^+} \frac{\frac{1}{\zeta}}{-\frac{1}{\zeta^2}} = 2a \lim_{\zeta\to 0^+} \zeta = 0.$$

Afirmação 3:

$$\lim_{\zeta\to 0^+} G'(\zeta) = \infty \text{ e } G'(a) < 0.$$

Demonstração :

$$G'(\zeta) = \frac{1}{(1-\zeta^2)^4}\Big[(log\,\zeta)^2\Big(-\zeta(1-a\zeta) + (a-\zeta)(1-a\zeta) - a(a-\zeta)\zeta +$$

$$+\frac{2}{log\,\zeta}(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)\Big)(1-\zeta^2)^2 - 2(1-\zeta^2)(-2\zeta)(log\,\zeta)^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)\Big].$$

Portanto, $\lim_{\zeta\to 0^+} G'(\zeta) = \infty$.

Finalmente

$$G'(a) = \frac{1}{(1-a^2)^4}\Big((log\,a)^2(1-a^2)^2(-a(1-a^2))\Big) < 0.$$

Lema 2.8 *Quando $a \in (0.1)$, $G(\zeta)$ tem um único ponto crítico em $(0, a)$.*

Demonstração :
Substituindo $\zeta = a\eta$ no lado direito de (2.44), temos

$$G(\zeta) = \frac{(\log a\eta)^2(a - a\eta)a\eta(1 - a^2\eta)}{(1 - a^2\eta^2)^2} = a^2(\log a\eta)^2\frac{(1 - \eta)\eta(1 - a^2\eta)}{(1 - a^2\eta^2)^2} \equiv a^2 g(\eta)$$

e

$$g'(\eta) = (\log a\eta)^2\frac{(1 - \eta)(1 - a^2\eta)}{(1 - a^2\eta^2)^2}\Big(\frac{2}{\log a\eta} - h(\eta)\Big), \tag{2.46}$$

$$\text{com } h(\eta) = -1 + \frac{1}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - a^2\eta} - \frac{1}{1 - a\eta} - \frac{1}{1 + a\eta},$$

pois $\log g(\eta) = 2\log(\log a\eta) + \log(1 - \eta) + \log\eta + \log(1 - a^2\eta) - 2\log(1 - a^2\eta^2)$,

$$\frac{g'(\eta)}{g(\eta)} = \frac{2}{\log a\eta}\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1 - \eta} + \frac{1}{\eta} - \frac{a^2}{1 - a^2\eta} + \frac{2a^2\eta}{1 - a^2\eta^2},$$

$$\text{assim } g'(\eta) = (\log a\eta)^2\frac{(1 - \eta)(1 - a^2\eta)}{(1 - a^2\eta^2)^2}\Big(\frac{2}{\log a\eta} - h(\eta)\Big),$$

$$\text{com } -h(\eta) = 1 - \frac{\eta}{1 - \eta} - \frac{a^2\eta}{1 - a^2\eta} + \frac{2a^2\eta^2}{1 - a^2\eta^2} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \eta - 1}{1 - \eta} + \frac{1 - a^2\eta - 1}{1 - a^2\eta} - \frac{2 - 2a^2\eta^2 - 2}{1 - a^2\eta^2} =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{1 - \eta} + 1 - \frac{1}{1 - a^2\eta} - 2 + \frac{2}{1 - a^2\eta^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \eta} - \frac{1}{1 - a^2\eta} + \frac{1}{1 - a\eta} + \frac{1}{1 + a\eta}.$$

$$\text{Logo } h(\eta) = -1 + \frac{1}{1 - \eta} + \frac{1}{1 - a^2\eta} - \frac{1}{1 - a\eta} - \frac{1}{1 + a\eta}$$

e, notando que $A^2 + B^2 \geq 2AB$,

$$h'(\eta) = \frac{1}{(1 - \eta)^2} + \frac{a^2}{(1 - a^2\eta)^2} - \frac{a}{(1 - a\eta)^2} + \frac{a}{(1 + a\eta)^2} \geq$$

$$\geq \frac{2a}{(1 - \eta)(1 - a^2\eta)} - \frac{4a^2\eta}{(1 - a^2\eta^2)^2} > \frac{2a}{(1 - \eta)(1 - a^2\eta)} - \frac{8a^2\eta}{(1 - a^2\eta^2)^2} > 0.$$

Conseqüentemente $h(\eta)$ é monótona crescente, enquanto $\frac{1}{\log a\eta}$ é monótona decrescente em (0,1). Logo, $g'(\eta)$ troca de sinal somente uma vez em (0,1), também, $G'(\zeta)$ troca de sinal somente uma vez em $(0, a)$. □

Seja m^*, o valor máximo de $G(\eta)$ em $(0, a)$ e $\lambda^* = \frac{8m^*}{a^2(\log a)^2}$. Então, do Lema 2.7, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.9 *Existe um número positivo λ^* tal que o problema (RP_λ) tem , respectivamente, duas, uma e nenhuma solução para $\lambda \in (0, \lambda^*)$, $\lambda = \lambda^*$ e $\lambda \in (\lambda^*, \infty)$.*

Demonstração :

$$\text{Como } \lambda = \frac{8G(\zeta)}{a^2(\log a)^2} \text{ e } G(0) = G(a) = 0, \text{ temos, para } \lambda < \lambda^* = \lambda(m^*),$$

dois pontos correspondentes e, portanto, duas soluções de (RP_λ). Da mesma forma, para $\lambda = \lambda^*$, uma solução e, para $\lambda > \lambda^*$, nenhuma solução. □

Observação:
Como foi descrito acima, toda solução radial de (P) em $\Omega = A$ corresponde unicamente a $\zeta \in (0, a)$, e então a $\alpha \in (1, \infty)$. Além disso, a correspondência é contínua.

Para $\lambda \in (0, \lambda^*)$, existem duas raízes $\overline{\zeta}$ e $\underline{\zeta}$ de (2.44), uma perto de zero e outra perto de a. As soluções correspondentes $\overline{v_\lambda}$ e $\underline{v_\lambda}$ de (P_λ) serão chamadas, solução "grande" e solução "pequena", respectivamente.

Lema 2.10 *Para qualquer r fixo em $(a, 1)$, temos:*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \overline{v}_\lambda(r) = \infty \tag{2.47}$$

e

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \underline{v}_\lambda(r) = 0. \tag{2.48}$$

Demonstração :
No caso de $\underline{v}_\lambda$ correspondente a $\underline{\zeta}$, α e β satisfazem $\zeta \to a$, $\alpha \to 1$, $\beta \to 0$ e, conseqüentemente,

$$\frac{8}{\lambda}\alpha^2\beta^2 = (1 + \beta^2)^2 \to 1 \text{ ao } \lambda \to 0^+.$$

Como, por (2.41), $v(r) = \frac{log \frac{8}{\lambda} \alpha^2 \beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}$, temos $\lim_{\lambda \to 0^+} \underline{v}_\lambda(r) = 0$.

No caso de $\overline{v}_\lambda$, notemos que $\lambda = \lambda(\zeta)$ pode ser tomada como uma função suave de ζ perto de zero, e assim também α e β.

Sejam agora $K \equiv \left(\frac{8}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha\beta = 1 + \beta^2$ e $A = A(\zeta)$, $B = B(\zeta)$, dados por

$$A(\zeta) \equiv \frac{1}{Ka^{\alpha-1}} \text{ e } B(\zeta) \equiv \frac{\beta^2}{K}.$$

Tais funções têm as seguintes propriedades assintóticas:

$$A(\zeta) \equiv \frac{1}{Ka^{\alpha-1}} = \frac{1-a\zeta}{1-\zeta^2} = 1 - a\zeta + O(\zeta^2), \tag{2.49}$$

e

$$B(\zeta) \equiv \frac{\beta^2}{K} = \frac{a-\zeta}{a(1-\zeta^2)} = 1 - \frac{\zeta}{a} + O(\zeta^2), \tag{2.50}$$

pois,

$$\frac{1}{Ka^{\alpha-1}} = \frac{1}{(1+\beta^2)\frac{\zeta}{a}} = \frac{a}{\left(1 + \frac{a-\zeta}{\zeta(1-a\zeta)}\right)\zeta} = \frac{1-a\zeta}{1-\zeta^2},$$

$$\frac{\beta^2}{K} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} = \frac{a-\zeta}{\zeta(1-a\zeta)\left(\frac{\zeta(1-a\zeta)+(a-\zeta)}{\zeta(1-a\zeta)}\right)} = \frac{a-\zeta}{a(1-\zeta^2)}$$

e

$$\frac{1-a\zeta}{1-\zeta^2} - 1 - a\zeta = \frac{1 - a\zeta - 1 + a\zeta + \zeta^2 - a\zeta^3}{1-\zeta^2} = \frac{\zeta^2(1-a\zeta)}{1-\zeta^2},$$

$$\text{com } \lim_{\zeta \to 0^+} \frac{\zeta^2 \frac{(1-a\zeta)}{(1-\zeta^2)}}{\zeta^2} = 1 < \infty.$$

Vamos, agora, obter $\overline{v}_\lambda(r)$ em termos de $A(\zeta)$ e $B(\zeta)$.

$$\overline{v}_\lambda(r) = log\left(\frac{\frac{8}{\lambda}\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}\right) = 2log\left(\frac{\left(\frac{8}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha\beta r^{\alpha-1}}{1+\beta^2 r^{2\alpha}}\right) =$$

$$= -2log\Big(\Big(\frac{\lambda}{8}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{1+\beta^2r^{2\alpha}}{r^{\alpha-1}}\Big) =$$

$$= -2log\Big(\frac{1}{K}\Big(\frac{1}{r^{\alpha-1}}+\beta^2r^{\alpha+1}\Big)\Big) = -2log\Big(\frac{1}{Ka^{\alpha-1}}\Big(\frac{a}{r}\Big)^{\alpha-1}+\frac{\beta^2}{K}r^{\alpha+1}\Big).$$

$$\text{Assim } \overline{v}_\lambda(r) = -2log\Big(A(\zeta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^{\alpha-1}+B(\zeta)r^{\alpha+1}\Big). \tag{2.51}$$

Temos, agora, $\zeta \to 0$, $\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$ e, conseqüentemente, $A(\zeta) \to 1$ e $B(\zeta) \to 1$ se $\lambda \to 0^+$. Assim

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \overline{v}_\lambda(r) = \lim_{\lambda\to 0^+} -2\,log\Big(\frac{a^{\alpha-1}}{r^{\alpha-1}}+r^{\alpha+1}\Big) = -2log(0) = \infty. \qquad \square$$

No Teorema 2.3, todas as soluções de (P) em $\Omega = D$ são parametrizadas por $s = 8\Sigma$, onde Σ é dado em (2.19) por $\Sigma = \int_\Omega \frac{|F'|}{(1+|F|^2)^2} = \frac{\lambda}{8}\int_\Omega e^u dx$ e representa a área de $\overline{F}(\Omega)$ na esfera de Riemann K para $F(z) = C^{\frac{1}{2}}z$. Entretanto, para o caso $\Omega = A$, tomamos $F(z) = \beta z^\alpha$. Neste caso, $F(z) = \beta z^\alpha = \beta\, exp(\alpha\, log\, z) = \beta\, exp(\alpha(log \mid z \mid +i\, arg\, z)) = \beta\, exp(\alpha\, log \mid z \mid +i\, Arg\, z + i\alpha 2\pi)$, onde $Arg\, z$ é o argumento principal de z.

Para α do tipo $\frac{1}{n}$, n inteiro, $F(z) = \beta\, exp\Big(\frac{1}{n}\, log \mid z \mid +i\frac{Arg\, z}{n} + i\frac{2\pi}{n}\Big)$ que é n-valorada. Conseqüentemente, a área de $\overline{F}(\Omega)$ em K é dada por $n\Sigma = \Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\Sigma$. Este fato sugere que toda solução radial (λ, v) de (P) no anel A possa ser parametrizada por $\frac{\lambda}{\alpha}\int_\Omega e^u dx$.

Vamos agora mostrar que isto vale de fato para as soluções $(\lambda, \overline{v}_\lambda)$ com λ suficientemente pequeno.

Definimos um parâmetro σ para a solução "grande" $(\lambda, \overline{v}_\lambda)$ de (P) em A por

$$\sigma \equiv \frac{\lambda}{\alpha}\int_\Omega e^{\overline{v}_\lambda}dx. \tag{2.52}$$

Lema 2.11 *A função que a cada ζ associa σ é injetiva quando ζ se aproxima de zero. Além disso,*

$$\sigma = 8\pi\Big(1-\Big(a+\frac{1}{a}\Big)\zeta + O(\zeta^2)\Big) \text{ quando } \zeta \to 0^+ \tag{2.53}$$

e, portanto,

$$\zeta = \frac{1}{8\pi}\Big(a+\frac{1}{a}\Big)^{-1}(8\pi-\sigma)\big(1+O(8\pi-\sigma)\big) \text{ quando } \sigma \to 8\pi^-. \tag{2.54}$$

Demonstração :
Seja a função

$$f(\zeta) \equiv \frac{\lambda a}{8\alpha^2\zeta} \overset{(1)}{=} \frac{(a-\zeta)(1-a\zeta)}{a(1-\zeta^2)^2} \overset{(2)}{=} 1 - \left(a + \frac{1}{a}\right)\zeta + O(\zeta^2) \tag{2.55}$$

ao $\zeta \to 0^+$.

$$(1)\ \frac{\lambda a}{8\alpha^2\zeta} = \frac{\alpha^2\beta^2}{1+\beta^2}\,\frac{a}{\alpha^2\zeta} = \frac{\frac{a-\zeta}{\zeta\,(1-a\zeta)}}{\left(1+\frac{a-\zeta}{\zeta\,(1-a\zeta)}\right)^2}\,\frac{a}{\zeta} =$$

$$= \frac{(a-\zeta)\zeta^2(1-a\zeta)^2 a}{(\zeta - a\zeta^2 + a - \zeta)^2\zeta\,\zeta\,(1-a\zeta)} = \frac{(a-\zeta)(1-a\zeta)}{a(1-\zeta^2)^2}.$$

$$(2)\ \lim_{\zeta\to 0^+} \frac{(a-\zeta)(1-a\zeta) - a(1-\zeta^2)^2 + (1-\zeta^2)^2(1+a^2)\zeta}{a(1-\zeta^2)^2\zeta^2} =$$

$$\lim_{\zeta\to 0^+} \frac{a - a^2\zeta - \zeta + a\zeta^2 - a + 2a\zeta^2 - a\zeta^4 + a^2\zeta - 2a^2\zeta^3 + a^2\zeta^5 + \zeta - 2\zeta^3 + \zeta^5}{a(1-\zeta^2)^2\zeta^2} =$$

$$\lim_{\zeta\to 0^+} \frac{\zeta^2(a - a\zeta^2 - 2a^2\zeta + a^2\zeta^3 - 2\zeta + \zeta^3)}{\zeta a(1-\zeta^2)^2} = \frac{a}{a} = 1.$$

De (2.51) e (2.52), temos

$$\sigma = \frac{\lambda}{\alpha}\int_\Omega \left(A(\zeta)\left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha-1} + B(\zeta)r^{\alpha+1}\right)^{-2} dx =$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_a^1 \left(a^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(A(\zeta)\left(\frac{\sqrt{a}}{r}\right)^{\alpha-1} + aB(\zeta)\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\right)^{\alpha+1}\right)\right)^{-2} r\,drd\theta =$$

$$\overset{(2.55)}{=} \frac{8\alpha^2\zeta f(\zeta)}{a\,\alpha}2\pi a^{-\alpha+1}\int_a^1 \left(A(\zeta)\left(\frac{\sqrt{a}}{r}\right)^{\alpha-1} + aB(\zeta)\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\right)^{\alpha+1}\right)^{-2} r\,dr =$$

$$= 16\pi\alpha f(\zeta)\int_a^1 \left(A(\zeta)\left(\frac{\sqrt{a}}{r}\right)^{\alpha-1} + aB(\zeta)\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\right)^{\alpha+1}\right)^{-2} r\,dr.$$

Seja, agora, a mudança de variável

$$t = \Big(\frac{r}{\sqrt{a}}\Big)^{2\alpha}, \; r = \sqrt{a}\, t^{\frac{1}{2\alpha}}, \; dr = \frac{\sqrt{a}}{2\alpha} t^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}} dt.$$

Logo

$$\sigma = 16\pi\alpha f(\zeta) \int_\zeta^{\zeta^{-1}} (A(\zeta) t^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} + aB(\zeta) t^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}})^{-2} \sqrt{a}\, t^{\frac{1}{2\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{2\alpha} t^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}}\, dt =$$

$$= 8\pi f(\zeta) \int_\zeta^{\zeta^{-1}} (t^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}})^{-2} (A(\zeta) + aB(\zeta) t)^{-2} a\, t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{8\pi f(\zeta)}{B(\zeta)} \int_\zeta^{\zeta^{-1}} \frac{aB(\zeta)}{(A(\zeta) + aB(\zeta) t)^2} dt.$$

Assim

$$\sigma = \frac{8\pi f(\zeta)}{B(\zeta)} \Big[\frac{-1}{A(\zeta) + aB(\zeta) t}\Big]_\zeta^{\zeta^{-1}} = \frac{8\pi a (1-\zeta^2) f(\zeta)}{(A(\zeta) + aB(\zeta)\zeta)(A(\zeta)\zeta + aB(\zeta))}, \tag{2.56}$$

já que

$$\frac{8\pi f(\zeta)}{B(\zeta)} \Big(\frac{-1}{A(\zeta) + \frac{aB(\zeta)}{\zeta}} + \frac{1}{A(\zeta) + aB(\zeta)\zeta}\Big) = \frac{8\pi f(\zeta)}{B(\zeta)} \Big(\frac{-\zeta A(\zeta) - aB(\zeta)\zeta^2 + A(\zeta)\zeta + aB(\zeta)}{(A(\zeta)\zeta + aB(\zeta))(A(\zeta) + aB(\zeta)\zeta)}\Big).$$

Substituindo (2.49), (2.50) e (2.55) em (2.56), obtemos

$$\sigma = \frac{8\pi a (1-\zeta^2)\Big(1 - \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta + O(\zeta^2)\Big)}{\Big(\frac{1-a\zeta}{1-\zeta^2} + \frac{a(a-\zeta)\zeta}{a(1-\zeta^2)}\Big)\Big(\frac{(1-a\zeta)\zeta}{1-\zeta^2} + \frac{a(a-\zeta)}{a(1-\zeta^2)}\Big)} =$$

$$= \frac{8\pi a (1-\zeta^2)\Big(1 - \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta + O(\zeta^2)\Big)}{\Big(\frac{1-\zeta^2}{1-\zeta^2}\Big)\Big(a\frac{1-\zeta^2}{1-\zeta^2}\Big)} = 8\pi\Big(1 - \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta + O(\zeta^2)\Big).$$

O elemento $O(\zeta^2)$ em (2.53) é suave e sua derivada tende a zero quando $\zeta \to 0^+$, pois é dado por $f(\zeta)$.

$$O(\zeta^2) = \frac{(a-\zeta)(1-a\zeta)}{a(1-\zeta^2)^2} - 1 + \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta$$

$$(O(\zeta^2))' = \frac{(-(1-a\zeta)-a(a-\zeta))\,a(1-\zeta^2)^2 - 2a(1-\zeta^2)(-2\zeta)(a-\zeta)(1-a\zeta)}{a^2(1-\zeta^2)^2} + \Big(a+\frac{1}{a}\Big) =$$

$$= \frac{-1+6a\zeta - a^2 + \zeta^2 + 2a\zeta^3 - 3a^2\zeta^2 - 4\zeta^2}{a(1-\zeta^2)} + a + \frac{1}{a},$$

que tende a $\frac{-1-a^2}{a} + a + \frac{1}{a} = 0$ ao $\zeta \to 0^+$.

Conseqüentemente,

$$\lim_{\zeta\to 0^+} \frac{d\sigma}{d\zeta} = -8\pi\Big(a+\frac{1}{a}\Big).$$

Também, $\lim_{\zeta\to 0^+}\ \sigma = 8\pi$, logo podemos definir $\sigma(0) = 8\pi$ e

$$\lim_{\sigma\to 8\pi^-} \frac{d\zeta}{d\sigma} = -\frac{1}{8\pi\Big(a+\frac{1}{a}\Big)} = \zeta'(8\pi).$$

Assim $\zeta(\sigma) = \zeta(8\pi) + \zeta'(8\pi)(\sigma - 8\pi) + (\sigma - 8\pi)O(\sigma - 8\pi)$ ao $\zeta \to 8\pi^-$

$$\text{e } \zeta(\sigma) = \frac{-1}{8\pi}\Big(a+\frac{1}{a}\Big)^{-1}(\sigma - 8\pi) + (\sigma-8\pi)O(\sigma-8\pi) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\Big(a+\frac{1}{a}\Big)^{-1}(8\pi - \sigma)(1 + O(8\pi - \sigma)). \qquad \square$$

Eventualmente podemos considerar

$$\mu \equiv \int_\Omega e^{\overline{v}_\lambda} dx \tag{2.57}$$

e

$$\nu \equiv \int_\Omega |\nabla \overline{v}_\lambda|^2\, dx \tag{2.58}$$

como funções de σ, $\mu = \mu(\sigma)$ e $\nu = \nu(\sigma)$, devido ao lema 2.10. Além disso, o comportamento assintótico de σ perto de 8π pode ser precisamente determinado.

Lema 2.12

$$\mu(\sigma) = \frac{8\pi^2(a+1)\log a}{(8\pi - \sigma)\log(8\pi - \sigma)}(1 + o(1)) \text{ quando } \sigma \to 8\pi^-. \tag{2.59}$$

Demonstração :
Temos em (2.44)

$$\frac{\lambda}{8}a^2(\log\, a)^2 = \frac{(\log\,\zeta)^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)}{(1-\zeta^2)^2}, \text{ com } \zeta = a^\alpha$$

e

$$\lambda = \frac{8(\log\,\zeta)^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)}{a^2(\log\, a)^2(1-\zeta^2)^2}.$$

Assim

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\alpha a^2(log\, a)^2(1-\zeta^2)^2}{8(log\,\zeta)^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)}, \text{ mas, como } \zeta = a^\alpha \text{ e } \alpha = \frac{log\,\zeta}{log a},$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{a^2(log\, a)(1-\zeta^2)^2}{8(log\,\zeta)(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)} = \frac{a\, log\, a}{8\zeta\, log\,\zeta}\Big(1 + \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta + O(\zeta^2)\Big),$$

$$\text{pois } \frac{\frac{a^2\,(log\, a)\,(1-\zeta^2)^2}{8\,(log\zeta)\,(a-\zeta)\,\zeta\,(1-a\zeta)}}{\frac{a\, log\, a}{8\,\zeta\, log\,\zeta}} - 1 - \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta =$$

$$= \frac{a^2(1-2\zeta^2+\zeta^4) - (a - a^2\zeta - \zeta + a\zeta^2)a - a^2(a - a^2\zeta = \zeta + a\zeta^2)\zeta}{(a-\zeta)(1-a\zeta)a}$$

$$-\frac{(a - a^2\zeta - \zeta + a\zeta^2)\zeta}{(a-\zeta)(1-a\zeta)a} =$$

$$= \frac{a^2 - 2a^2\zeta^2 + a^2\zeta^4 - a^2 + a^3\zeta + a\zeta - a^2\zeta^2 - a^3\zeta}{(a-\zeta)(1-a\zeta)a} +$$

$$+ \frac{a^4\zeta^2 + a^2\zeta^2 - a^3\zeta^3 - a\zeta + a^2\zeta^2 + \zeta^2 - a\zeta^3}{(a-\zeta)(1-a\zeta)a} =$$

$$= \frac{-a^2\zeta^2 + a^2\zeta^4 + a^4\zeta^2 - a^3\zeta^3 + \zeta^2 - a\zeta^3}{(a-\zeta)(1-a\zeta)a} \text{ e}$$

$$\lim_{\zeta\to 0^+} \frac{-a^2\zeta^2 + a^2\zeta^4 + a^4\zeta^2 - a^3\zeta^3 + \zeta^2 - a\zeta^3}{(a-\zeta)(1-a\zeta)a\zeta^2} =$$

$$\lim_{\zeta\to 0^+} \frac{-a^2 + a^2\zeta^2 + a^4 - a^3\zeta + 1 - a\zeta}{(a-\zeta)(1-a\zeta)a} = \frac{-a^2 + a^4 + 1}{a^2} < \infty.$$

De (2.53), temos

$$\mu(\sigma) = \frac{\alpha}{\lambda}\sigma = \frac{a\,log\,a}{8\zeta\,log\,\zeta}\Big(1 + \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta + O(\zeta^2)\Big)8\pi\Big(1 - \Big(a + \frac{1}{a}\Big)\zeta + O(\zeta^2)\Big),$$

e portanto

$$\mu(\sigma) = \frac{\pi a\,log\,a}{\zeta\,log\,\zeta}(1 + O(\zeta^2)) \text{ ao } \zeta \to 0^+, \tag{2.60}$$

pois $\Big(a + \dfrac{1}{a}\Big)^2\zeta^2 = O(\zeta^2)$.

Substituímos agora (2.54) em (2.60)

$$\mu(\sigma) =$$

$$\frac{\pi a(log\,a)(1 + O(\zeta^2))}{\frac{1}{8\pi}\Big(a + \frac{1}{a}\Big)^{-1}(8\pi - \sigma)(1 + O(8\pi - \sigma))log\Big(\frac{1}{8\pi}\Big(a + \frac{1}{a}\Big)^{-1}(8\pi - \sigma)(1 + o(8\pi - \sigma))\Big)} =$$

$$= \frac{8\pi^2(log\,a)(a^2 + 1)(1 + O(8\pi - \sigma))(1 + O(\zeta^2))}{(8\pi - \sigma)\Big(-log\,8\pi - log\Big(a + \frac{1}{a}\Big) + log(8\pi - \sigma) + log(1 + O(8\pi - \sigma))\Big)}$$

$$= \frac{8\pi^2(log\,a)(a^2 + 1)(1 + o(1))}{(8\pi - \sigma)\Big(-log\,8\pi - log\Big(a + \frac{1}{a}\Big) + log(8\pi - \sigma) + O(8\pi - \sigma)\Big)} =$$

$$= \frac{8\pi^2(log\,a)(a^2 + 1)(1 + o(1))}{(8\pi - \sigma)log(8\pi - \sigma)} \text{ ao } \sigma \to 8\pi^-.$$

Lema 2.13

$$\nu(\sigma) = \frac{-8\pi}{log\,a}\Big(log\frac{1}{8\pi - \sigma}\Big)^2(1 + o(1)) \text{ ao } \sigma \to 8\pi^-. \tag{2.61}$$

Demonstração :

Temos que

$$\nu(\sigma) = \int_\Omega |\nabla \overline{v}_\lambda|^2 \, dx = -\int_\Omega \overline{v}_\lambda \, \Delta \overline{v}_\lambda dx = \lambda \int_\Omega e^{\overline{v}_\lambda} \overline{v}_\lambda dx.$$

Substituindo (2.51) na relação acima

$$\nu(\sigma) = -4\pi\lambda \int_a^1 \Big(A(\zeta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^{\alpha-1} + B(\zeta) r^{\alpha+1}\Big)^{-2}.$$

$$log\Big(A(\zeta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^{\alpha-1} + B(\zeta) r^{\alpha+1}\Big) r \, dr. \tag{2.62}$$

$$\text{Seja } t = \Big(\frac{r}{\sqrt{a}}\Big)^{2\alpha}. \text{ Assim } r = t^{\frac{1}{2\alpha}}\sqrt{a} \text{ e } dr = \frac{\sqrt{a}}{2\alpha} t^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}} dt.$$

Então

$$\nu(\sigma) = -4\pi\lambda \int_\zeta^{\zeta^{-1}} \Big(A(\zeta) \frac{a^{\frac{\alpha-1}{2}}}{t^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}} + B(\zeta) \, a^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}} \, t^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\Big)^{-2}.$$

$$.log\Big(A(\zeta) \frac{a^{\frac{\alpha-1}{2}}}{t^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}} + B(\zeta) \, a^{\frac{\alpha+1}{2}} \, t^{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\Big) \sqrt{a} \, t^{\frac{1}{2\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{2\alpha} t^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}} dt =$$

$$= -4\lambda \int_\zeta^{\zeta^{-1}} \frac{a^{-(\alpha-1)}}{t^{-\frac{(\alpha-1)}{2\alpha}}} (A(\zeta) + aB(\zeta)t)^{-2}.log\Big(\frac{a^{\frac{\alpha-1}{2}}}{t^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}} (A(\zeta) + aB(\zeta)t)\Big) \frac{a}{2\alpha} t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dt =$$

$$= \frac{-4\pi\lambda a^2}{2\alpha\zeta} \int_\zeta^{\zeta^{-1}} (A(\zeta) + aB(\zeta)t)^{-2}.$$

$$.\Big(log\, a^{\frac{\alpha-1}{2}} - log\, t^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} + log(A(\zeta) + aB(\zeta)t)\Big) t^{\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}} dt$$

$$= \frac{-2\pi\lambda a^2}{\alpha\zeta} \int_\zeta^{\zeta^{-1}} (A(\zeta) + aB(\zeta)t)^{-2}.$$

$$.\Big(\frac{\alpha-1}{2} log\, a + \frac{1-\alpha}{2\alpha} log\, t + log(A(\zeta) + aB(\zeta)t)\Big) dt.$$

Portanto

$$\nu(\sigma) = \frac{-2\pi\lambda a^2}{\alpha\zeta}(I_1 + I_2 + I_3). \tag{2.63}$$

$$I_1 = \frac{\alpha-1}{2} log\, a \int_{\zeta}^{\zeta^{-1}} (A(\zeta) + aB(\zeta)t)^{-2} dt =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2} log\, a \Big[\frac{-1}{aB(\zeta)(aB(\zeta)t + A(\zeta))}\Big]_{\zeta}^{\zeta^{-1}} =$$

$$\frac{\alpha-1}{2} log\, a \Big(\frac{-1}{aB(\zeta)(aB(\zeta)\zeta^{-1} + A(\zeta))} + \frac{1}{aB(\zeta)(aB(\zeta)\zeta + A(\zeta))}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2} log\, a \Big(\frac{-\zeta}{aB(\zeta)(aB(\zeta) + A(\zeta)\zeta)} + \frac{1}{aB(\zeta)(aB(\zeta)\zeta + A(\zeta))}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2}(log\, a)\frac{-aB(\zeta)\zeta^2 - A(\zeta)\zeta + aB(\zeta) + A(\zeta)\zeta}{aB(\zeta)(aB(\zeta) + A(\zeta)\zeta)(aB(\zeta)\zeta + A(\zeta))} =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2} log\, a \frac{1-\zeta^2}{(A(\zeta)\zeta + aB(\zeta))(A(\zeta) + aB(\zeta)\zeta)} =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2} log\, a \frac{1-\zeta^2}{\Big(\Big(\frac{1-a\zeta}{1-\zeta^2}\Big)\zeta + \frac{a(a-\zeta)}{a(a-\zeta^2)}\Big)\Big(\frac{1-a\zeta}{1-\zeta^2} + \Big(\frac{a(a-\zeta)}{a(a-\zeta^2)}\Big)\zeta\Big)} =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2}(log\, a)\frac{(1-\zeta^2)^3}{(\zeta - a\zeta^2 + a - \zeta)(1 - a\zeta + a\zeta - \zeta^2)} =$$

$$= \frac{\alpha-1}{2}(log\, a)\frac{(1-\zeta^2)}{a} = \frac{\alpha-1}{2a}(log\, a)(1 + O(\zeta^2)).$$

$$I_2 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\int_{\zeta}^{\zeta^{-1}} (log\, t)(A(\zeta) + aB(\zeta)t)^{-2} dt.$$

Seja $\tau = B(\zeta)A(\zeta)^{-1}at$, $t = B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}\tau$, $dt = B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}d\tau$, então para $\tau_+ = B(\zeta)A(\zeta)^{-1}a\zeta$ e $\tau_- = B(\zeta)A(\zeta)^{-1}a\zeta^{-1}$,

$$I_2 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}\int_{\tau_+}^{\tau_-} log(B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}\tau).$$

$$.(A(\zeta)+aB(\zeta)B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}\tau)^{-2}B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}d\tau =$$

$$= \frac{1-\alpha}{2\alpha}\int_{\tau_+}^{\tau_-}(log(B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1})+log\,\tau)A(\zeta)^{-2}(1+\tau)^{-2}B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}d\tau =$$

$$= \frac{1-\alpha}{2\alpha}(A(\zeta)B(\zeta)a)^{-1}\int_{\tau_+}^{\tau_-}(1+\tau)^{-2}(log\,\tau - log(B(\zeta)A(\zeta)^{-1}a))d\tau.$$

Notando que $A(\zeta)$, $B(\zeta)\to 1$ e $\alpha\to\infty$ ao $\zeta\to 0^+$, temos

$$I_2 = \frac{1-\alpha}{2\alpha}(A(\zeta)B(\zeta)a)^{-1}\int_{\tau_+}^{\tau_-}(1+\tau)^{-2}(log\,\tau - log\,B(\zeta)A(\zeta)^{-1}a)d\tau =$$

$$= \frac{-1}{2a}\int_0^{\infty}(1+\tau)^{-2}(log\,\tau - log\,a)d\tau + o(1) = O(1) \text{ ao } \zeta\to 0^+.$$

$$I_3 = \int_{\zeta}^{\zeta^{-1}} log(A(\zeta)+aB(\zeta)t)\,(A(\zeta)+aB(\zeta)t)^{-2}dt.$$

Seja $\tau = B(\zeta)A(\zeta)^{-1}a\,t$, como na resolução de I_2. Então

$$I_3 = \int_{\tau_+}^{\tau_-} log(A(\zeta)+aB(\zeta)B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}\tau).$$

$$.(A(\zeta)+aB(\zeta)B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}\tau)^{-2}B(\zeta)^{-1}A(\zeta)a^{-1}d\tau =$$

$$= \int_{\tau_+}^{\tau_-}(log\,A(\zeta)+log(1+\tau))(1+\tau)^{-2}(B(\zeta)A(\zeta)a)^{-1}d\tau.$$

Como $A(\zeta)\to 1$, $B(\zeta)\to 1$ e $\alpha\to\infty$ ao $\zeta\to 0^+$

$$I_3 = \frac{1}{a}\int_0^{\infty}(1+\tau)^{-2}log(1+\tau)dt + o(1) = O(1) \text{ ao } \zeta\to 0^+.$$

Assim

$$\nu(\sigma) = \frac{-2\pi\lambda a^2}{\alpha\zeta}\Big(\frac{\alpha-1}{2a}(log\,a)(1+O(\zeta^2)) + 2O(1)\Big) =$$

$$= \frac{-2\pi\lambda a^2(\alpha-1)}{\alpha\zeta 2a}(log\,a)\Big(1+O(\zeta^2)+\frac{4a}{(\alpha-1)log\,a}O(1)\Big) =$$

$$= \frac{-\pi\lambda a log\, a}{\zeta}(1 + o(1)),$$

já que

$$\lim_{\zeta\to 0^+} \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{\zeta\to 0^+}\Big(O(\zeta^2) + \frac{4a}{(\alpha-1)log\, a}O(1)\Big) = \lim_{\zeta\to 0^+}\Big(\zeta^2\frac{O(\zeta^2)}{\zeta^2} + \frac{4aO(1)}{(\alpha-1)log\, a}\Big) = 0.$$

Além disso

$$\nu(\sigma) = \frac{-\pi\lambda a\, log\, a}{\zeta}(1+o(1)) = \frac{-8\pi(log\,\zeta)^2}{log\, a}(1+o(1)) \text{ ao } \zeta \to 0^+ \tag{2.64}$$

pois, por (2.44)

$$\frac{\lambda a\, log\, a}{\zeta} = \frac{8(log\,\zeta)^2(a-\zeta)(1-a\zeta)}{(1-\zeta^2)^2 a\, log\, a} \xrightarrow{\zeta\to 0^+} \frac{8(log\,\zeta)^2 a}{a\, log\, a}.$$

Substituindo a expressão de ζ dada por (2.54) em (2.64) obtemos (2.61), pois

$$(log\,\zeta)^2 = \Big(log\, 8\pi - log\Big(a + \frac{1}{a}\Big) + log(8\pi - \sigma) + log(1 + O(8\pi - \sigma))\Big)^2 =$$

$$= \Big(log\, 8\pi - log\Big(a+\frac{1}{a}\Big) + log(8\pi-\sigma) + O(8\pi - \sigma)\Big)^2 =$$

$$= (log(8\pi - \sigma) + O(1))^2 = (log(8\pi-\sigma))^2(1 + o(1)) \text{ ao } \sigma \to 8\pi,$$

já que

$$(log(8\pi-\sigma) + O(1))^2 = (log(8\pi - \sigma))^2(1+o(1)) \text{ ao } \sigma\to 8\pi$$

equivale a

$$\Big(1 + \frac{O(1)}{log(8\pi-\sigma)}\Big)^2 = 1 + o(1) \text{ ao } \sigma \to 8\pi,$$

ou seja,

$$1 + \frac{2O(1)}{log(8\pi-\sigma)} + \frac{O(1)}{(log(8\pi-\sigma))^2} = 1 + o(1) \text{ ao } \sigma\to 8\pi,$$

o que é verdade. □

Observação :

As funções $p_\lambda(r) = \lambda e^{\overline{v}_\lambda}$ têm a propriedade peculiar

$$\lim_{\lambda\to 0^+} p_\lambda(r) = \infty \text{ para } r = \sqrt{a},$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} p_\lambda(r) = 0 \text{ para } r \neq \sqrt{a}.$$

Demonstração :

$$p_\lambda(r) = \lambda e^{\overline{v}_\lambda(r)} = \lambda\Big(A(\zeta)\Big(\frac{a}{r}\Big)^{\alpha-1} + B(\zeta)r^{\alpha+1}\Big)^{-2}.$$

Por (2.41), (2.42) e (2.43), temos

$$\lambda = \frac{8\alpha^2\beta^2}{(1+\beta^2)^2} = \frac{8\alpha^2\Big(\frac{a-\zeta}{\zeta(1-a\zeta)}\Big)}{\Big(1+\frac{a-\zeta}{\zeta(1-a\zeta)}\Big)^2} = \frac{8\alpha^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)}{a^2(1-\zeta^2)^2}$$

$$p_\lambda(r) = \frac{8\alpha^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)}{a^2(1-\zeta^2)^2}\Big(A(\zeta)\Big(\frac{\sqrt{a}}{r}\Big)^{\alpha-1} + aB(\zeta)\Big(\frac{r}{\sqrt{a}}\Big)^{\alpha+1}\Big)^{-2} =$$

$$= \frac{8\alpha^2(a-\zeta)\zeta(1-a\zeta)a^{-\alpha}a}{a^2(1-\zeta^2)^2}\Big(A(\zeta)\Big(\frac{\sqrt{a}}{r}\Big)^{\alpha-1} + aB(\zeta)\Big(\frac{r}{\sqrt{a}}\Big)^{\alpha+1}\Big)^{-2} =$$

$$= 8\alpha^2\frac{a}{a}\Big(1-\frac{\zeta}{a}\Big)(1-a\zeta)(1-\zeta^2)^{-2}\Big(A(\zeta)\Big(\frac{\sqrt{a}}{r}\Big)^{\alpha-1} + aB(\zeta)\Big(\frac{r}{\sqrt{a}}\Big)^{\alpha+1}\Big)^{-2}$$

e, lembrando que $\zeta \to 0^+$, $A(\zeta)\to 1$, $B(\zeta)\to 1$ e $\alpha\to\infty$ ao $\lambda\to 0^+$.

Para $r = \sqrt{a}$,

$$p_\lambda(\sqrt{a}) = 8\alpha^2\Big(1-\frac{\zeta}{a}\Big)(1-a\zeta)(1-\zeta^2)^{-2}(A(\zeta)+aB(\zeta))^{-2},$$

$$\text{implicndo } p_\lambda(\sqrt{a}) \to 8.\infty.(1+a)^{-2} = \infty.$$

Para $r \neq \sqrt{a}$,

$$p_\lambda(r) = 8\alpha^2\Big(1-\frac{\zeta}{a}\Big)(1-a\zeta)(1-\zeta^2)^{-2}\Big(A(\zeta)\frac{a^{\frac{\alpha-1}{2}}}{r^{\alpha-1}} + aB(\zeta)\frac{r^{\alpha+1}}{a^{\frac{\alpha+1}{2}}}\Big)^{-2} =$$

$$= 8\alpha^2\Big(1-\frac{\zeta}{a}\Big)(1-a\zeta)(1-\zeta^2)^{-2}\Big(A(\zeta)\frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{a}r^{\alpha-1}} + aB(\zeta)\frac{r^{\alpha+1}\sqrt{a}}{\sqrt{\zeta}}\Big)^{-2}.$$

Vamos estudar

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{8\alpha^2}{\left(A(\zeta)\frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{a}\,r^{\alpha-1}}+aB(\zeta)\frac{r^{\alpha+1}\sqrt{a}}{\sqrt{\zeta}}\right)^2}=$$

$$=\lim_{\zeta\to 0^+}\frac{8(log\,\zeta)^2}{(log\,a)^2\left(\frac{A(\zeta)\zeta+a^2B(\zeta)r^{2\alpha}}{\sqrt{a}\,r^{\alpha-1}\sqrt{\zeta}}\right)^2}=$$

$$=\frac{8}{(log\,a)^2}\lim_{\zeta\to 0^+}\frac{ar^{2\alpha-2}\zeta(log\,\zeta)^2}{(A(\zeta)\zeta+a^2B(\zeta)r^{2\alpha})^2}$$

$$\lim_{\zeta\to 0^+}\zeta(log\,\zeta)^2=\lim_{\zeta\to 0^+}\frac{(log\,\zeta)^2}{\frac{1}{\zeta}}=\lim_{\zeta\to 0^+}\frac{2\,log\,\zeta\frac{1}{\zeta}}{\frac{-1}{\zeta^2}}=$$

$$=\lim_{\zeta\to 0^+}\frac{-2\,log\,\zeta}{\frac{1}{\zeta}}=\lim_{\zeta\to 0^+}\frac{\frac{-2}{\zeta}}{\frac{-1}{\zeta^2}}=\lim_{\zeta\to 0^+}2\zeta=0.$$

Assim, $\lim_{\lambda\to 0^+}p_\lambda(r)=0$. para $r\neq\sqrt{a}$. □

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as soluções radiais (λ, v) de (P) e $\mathcal{L}$ o das soluções "grandes" $(\lambda,\overline{v}_\lambda)$ parametrizadas por σ pelo Lema2.11. Além disso, definimos σ, μ e ν para cada $(\lambda, v)\in\mathcal{S}$ com v no lugar de $\overline{v}_\lambda$, respectivamente. Podemos, então, resumir tais procedimentos no teorema abaixo.

Teorema 2.14 *As soluções $(\lambda,\overline{v}_\lambda)$ em $\mathcal{L}$ são parametrizadas por σ e têm as propriedades assintóticas (2.59) e (2.61). Especialmente, μ e ν não são limitadas em $\mathcal{L}$. Por outro lado, elas são uniformemente limitadas em $\mathcal{S}-\mathcal{L}$.*

Demonstração :
Devido aos Lemas 2.11 e 2.12, temos que mostrar apenas a parte final.
Em primeiro lugar, notemos que em

$$v_\lambda=log\Big(\frac{\frac{8}{\lambda}\alpha^2\beta^2r^{2(\alpha-1)}}{(1+\beta^2r^{2\alpha})^2}\Big)$$

temos $0 < 1 < \alpha < A$ e $\overline{B} < \beta < B$, para $\lambda \in [\varepsilon_0, \lambda^*]$, pois $\alpha > 1$, já que $\alpha = 1 + \frac{L}{2}$ com $L > 0$ e, se $\alpha \to \infty \Rightarrow \zeta = a^\alpha \to 0 \Rightarrow \lambda \to 0$ por (2.44). Logo, para $\lambda > \varepsilon_0$, existe A, constante, tal que $1 < \alpha < A$.

Também,

$$\frac{a - \zeta}{\zeta(1 - a\zeta)} \to \infty, \text{ quando } \beta \to \infty.$$

Assim, as únicas possibilidades para ζ seriam:

Primeira: $\zeta \to a^{-1}$, o que é impossível pois $\alpha > 1$.

Segunda: $\zeta \to \infty$

Neste caso,

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{a - \zeta}{\zeta(1 - a\zeta)} = \lim_{\zeta \to \infty} \frac{-1}{1 - 2a\zeta} = 0$$

Logo, existe B constante tal que $\beta < B$.

Por outro lado, se $\beta \to 0$, então, por (2.43), $\zeta \to a$,

$$\text{seguindo que } \alpha \to 1, \ \frac{\alpha\beta}{1 + \beta^2} \to 0 \text{ e } \lambda \to 0.$$

Como $\lambda > 0$, existe $\overline{B} > 0$ tal que $\overline{B} < \beta < B$.

Temos agora

$$0 < \mu = \int_\Omega e^{\overline{v}_\lambda} dx = \int_\Omega \frac{\frac{8}{\lambda}\alpha^2 \beta^2 r^{2(\alpha - 1)}}{(1 + \beta^2 r^{2\alpha})^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{8}{\lambda} \frac{\alpha^2 \beta^2 r^{2(\alpha-1)} r}{(1 + \beta^2 r^{2\alpha})^2} dr.$$

Para

$$0 < r < 1, \ \varepsilon_0 \leq \lambda \leq \lambda^*, \ 1 < \alpha < A \text{ e } \overline{B} < \beta < B.$$

$$\text{Assim } \frac{8}{\lambda} \frac{\alpha^2 \beta^2 r^{2\alpha - 1}}{(1 + \beta^2 r^{2\alpha})^2} \leq \frac{8}{\varepsilon_0} A^2 B^2$$

$$\text{e } \mu \leq \frac{16\pi}{\varepsilon_0} A^2 B^2.$$

Também,

$$| \nu | = | \int_\Omega | \nabla v_\lambda |^2 dx | = | \lambda \int_\Omega e^{v_\lambda} dx | =$$

$$= \mid 2\pi\lambda \int_0^1 \frac{8}{\lambda} \frac{\alpha^2\beta^2 r^{2\alpha-1}}{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2} log\Big(\frac{8\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{\lambda(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}\Big) dr \mid .$$

$$\text{Como } 0 \le \frac{\alpha^2\beta^2 r^{2\alpha-1}}{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2} \le A^2 B^2,$$

basta, agora, limitar o integrando quando $r \to 0$

$$\lim_{r\to 0} 16\pi \frac{\alpha^2\beta^2 r^{2\alpha-1}}{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2} log\Big(\frac{8\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{\lambda(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}\Big) =$$

$$16\pi\alpha^2\beta^2 \lim_{r\to 0} \frac{log\Big(\frac{8\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{\lambda(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}\Big)}{\frac{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}{r^{2\alpha-1}}} = \frac{-\infty}{\infty},$$

mas

$$\frac{d}{dr} log\Big(\frac{8\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{\lambda(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}\Big) = \frac{d}{dr}\Big(log\Big(\frac{8}{\lambda}\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}\Big) - 2log(1+\beta^2 r^{2\alpha})\Big) =$$

$$= \frac{\frac{8}{\lambda}\alpha^2\beta^2 2(\alpha-1) r^{2\alpha-3)}}{\frac{8}{\lambda}\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}} - 2\frac{2\alpha r^{2\alpha-1}}{1+\beta^2 r^{2\alpha}} = 2r^{2\alpha-1}\Big(\frac{(\alpha-1)r^{-2}}{r^{2(\alpha-1)}} - \frac{2\alpha}{1+\beta^2 r^{2\alpha}}\Big)$$

$$= 2r^{2\alpha-1}\Big(\frac{\alpha-1}{r^{2\alpha}} - \frac{2\alpha}{1+\beta^2 r^{2\alpha}}\Big) = 2r^{2\alpha-1}\frac{(\alpha-1)(1+\beta^2 r^{2\alpha}) - 2\alpha r^{2\alpha}}{r^{2\alpha}(1+\beta^2 r^{2\alpha})},$$

enquanto que

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}{r^{2\alpha-1}}\Big) = \frac{2(1+\beta^2 r^{2\alpha})\beta^2 2\alpha r^{2\alpha-1} r^{2\alpha-1} - (1+\beta^2 r^{2\alpha})^2(2\alpha-1)r^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-2}} =$$

$$= \frac{4\alpha\beta^2(1+\beta^2 r^{2\alpha})r^{4\alpha-2} - (2\alpha-1)(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2 r^{2\alpha-2}}{r^{4\alpha-2}} =$$

$$= \frac{4\alpha\beta^2(1+\beta^2 r^{2\alpha})r^{2\alpha} - (2\alpha-1)(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}{r^{2\alpha}}.$$

Assim

$$16\pi\alpha^2\beta^2 \lim_{r\to 0} \frac{log\Big(\frac{8\alpha^2\beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{\lambda(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}\Big)}{\frac{(1+\beta^2 r^{2\alpha})^2}{r^{2\alpha-1}}} =$$

$$= 16\pi\alpha^2\beta^2 \lim_{r\to 0} \frac{\frac{2r^{-1}(\alpha-1)(1+\beta^2r^{2\alpha})-2\alpha r^{2\alpha}}{(1+\beta^2r^{2\alpha})}}{\frac{4\alpha\beta^2(1+\beta^2r^{2\alpha})r^{2\alpha}-(2\alpha-1)(1+\beta^2r^{2\alpha})^2}{r^{2\alpha}}} =$$

$$= 16\pi\alpha^2\beta^2 \lim_{r\to 0} 2r^{2\alpha-1} \frac{(\alpha-1)(1+\beta^2r^{2\alpha})-2\alpha r^{2\alpha}}{4\alpha\beta^2(1+\beta^2r^{2\alpha})r^{2\alpha}-(2\alpha-1)(1+\beta^2r^{2\alpha})^2} =$$

$$= 16\pi\alpha^2\beta^2 \frac{0}{-(2\alpha-1)} = 0.$$

Logo existe uma constante D tal que $\mid \nu \mid < D$.

Também, pelo Lema 2.9, a solução "pequena" é limitada para $\lambda \in (0, \varepsilon_0]$.Portanto, observando que $\mathcal{S} - \mathcal{L}$ não contém nenhuma solução além destas, completamos a demonstração.□

Capítulo 3

SOLUÇÕES NÃO RADIAIS EM ANÉIS

No caso $\Omega = A$, mostraremos a existência de soluções não radiais através de um método variacional com multiplicadores de Lagrange. Para tal, introduzimos o problema geral similar de autovalores

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda f(u) &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f = f(t)$ é uma função contínua satisfazendo

$$0 < f(t) \leq C\, exp \mid t \mid^q \text{ para } q \in (0,2) \text{ e } C > 0. \tag{3.2}$$

Seja T_m a rotação de $\frac{2\pi}{m}$ em $\mathbb{R}^2$, isto é,

$$T_m(x) = \Big(r\, cos\Big(\theta + \frac{2\pi}{m}\Big),\, r\, sen\Big(\theta + \frac{2\pi}{m}\Big)\Big), \tag{3.3}$$

para $x = (r\, cos\, \theta,\, r\, sen\, \theta)$.

Definimos os subespaços V_∞ e V_m de $H_0^1(\Omega)$ como segue

$$V_\infty = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v \text{ radial } \}$$

e

$$V_m = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v(T_m x) = v(x) \text{ para quase todo } x \in \Omega\}$$

e, por V compreendemos V_∞ ou V_m.

É fácil ver que para $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, a solução w do problema

$$\begin{aligned} \Delta w + \lambda f(v) &= 0 \text{ em } \Omega \\ w &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.4}$$

também pertence a V.

Introduzimos dois funcionais

$$\Phi(u) \equiv \int_\Omega F(u)dx \ \text{ e } \ J(u) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \tag{3.5}$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$, onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, e definimos subconjuntos K_c de V por

$$K_c = \{v \in V \mid \Phi(v) = c\} \text{ para } c \in \mathbb{R}$$

e números não negativos j_c por

$$j_c = inf\{J(v) \mid v \in K_c\} \text{ quando } K_c \neq \emptyset. \tag{3.6}$$

Observação: Φ está bem definido.

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado, o Teorema de Imersão de Sobolev nos diz que $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [2, \infty)$, ou seja, para qualquer função da forma $h(t) = |t|^q$, $2 \leq q < \infty$ vale

$$\int_\Omega h(u(x))dx < \infty, \ \forall u \in H^1(\Omega).$$

Mas as funções h da forma acima não são ótimas. Pode-se obter uma condição do mesmo tipo para uma função h de crescimento muito mais rápido.

De fato, no estudo de imersões de espaços de Sobolev em espaços de Orlicz, prova-se que a condição acima vale para $h(t) = e^{t^2}$, como pode ser visto em [1], página 242, teorema 8.25. Está bem definido, portanto, o funcional

$$\Phi_0 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega F_0(u(x))dx,$$

para toda $F_0 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ satisfazendo $F_0(t) \leq Ce^{t^2}$.

Combinando este fato com a compacidade das imersões entre espaços de Orlicz (ver [1], página 241, teorema 8.22), obtemos que o funcional Φ definido em (3.5) satisfaz $v_k \to v_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ implica $\Phi(v_k) \to \Phi(v_0)$.

Lema 3.1 *Existe $v_c \in K_c$ minimizante tal que $j_c = J(v_c)$ e que satisfaz a equação*

$$\Delta v_c + \lambda_c f(v_c) = 0 \text{ em } \Omega, \ v_c = 0 \text{ em } \partial\Omega \tag{3.7}$$

para um multiplicador de Lagrange λ_c no sentido clássico.

Demonstração :

Seja $\{v_k\}$ uma sequência minimizante de J em K_c; então podemos supor que uma subsequência, ou mesmo $\{v_k\}$, para simplificar, converge fracamente para algum $v_0 \in V$ em H_0^1.

Deste modo,

$$J(v_0) \leq \lim_{k\to\infty} J(v_k) = j_c$$

e $\Phi(v_0) = c$, pois se v_k converge fracamente para v_0, então existe w_k combinação convexa de $\{v_1, ..., v_k\}$tal que w_k coverge fortemente para v_0(pelo teorema de Banach-Saks). Logo $J(w_k)$ converge para $J(v_0)$, mas $w_k = \sum_1^k \alpha_i v_i$ e

$$J(w_k) = J(\sum_1^k \alpha_i v_i) \leq \sum_1^k \alpha_i J(v_i) \leq \sum_1^k \alpha_i (I + \varepsilon) \leq I + \varepsilon$$

$$\text{para } \ I = \lim_{k\to\infty} J(v_k).$$

Na linha acima, para um $\varepsilon > 0$ dado, estamos supondo sem perda de generalidade que $J(v_i) \leq I + \varepsilon \ \forall i$.

Assim $J(v_0) \leq I + \varepsilon$ para todo ε, o que implica $J(v_0) \leq I$.

Além disso, $\Phi(v_k) = c \ \forall k$, portanto, pela observação anterior que afirma que $v_k \to v_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ implica $\Phi(v_k) \to \Phi(v_0)$, temos $\Phi(v_0) = c$.

Desta forma $v_0 \in K_c$ e vemos que v_0 é um minimizante de J em K_c. Ainda, Φ e J têm derivadas de Fréchet, respectivamente

$$\Phi'(v)\varphi = \int_\Omega f(v)\varphi \, dx \text{ e } J'(v)\varphi = \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi \, dx$$

para $\varphi \in V$, pois

$$\Phi(v) = \int_\Omega F(v) dx$$

$$\Phi'(v) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ linear},$$

$$\Phi'(v)\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(v + t\varphi) - \Phi(v)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(v+t\varphi)-F(v)}{t} dx = \lim_{t\to o} \int_\Omega \frac{F(v+t\varphi)-F(v)}{t\varphi}\varphi\, dx =$$

$$= \int_\Omega F'(v)\varphi\, dx = \int_\Omega f(v)\varphi\, dx$$

e

$$J'(v)\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{J(v+t\varphi)-J(v)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\mid \nabla(v+t\varphi)\mid^2 - \mid \nabla v \mid^2}{t} dx = \quad (v = v(x_1,x_2)\varphi = \varphi(x_1,x_2))$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\mid \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + t\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} + t\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)\mid^2 - \mid \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\mid^2}{t} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + t\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + t\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2}{t}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\lim_{t\to 0} \frac{2t\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + t^2\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2\right)}{t}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega 2\nabla v \nabla \varphi\, dx = \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi\, dx.$$

Então existem multiplicadores de Lagrange μ e ν $(\mu,\nu) \neq (0,0)$ tais que

$$\mu \int_\Omega \nabla v_c \nabla \varphi\, dx + \nu \int_\Omega f(v_c)\varphi\, dx = 0 \ \forall \varphi \in V. \tag{3.8}$$

Aqui $\mu \neq 0$, pois, se $\mu = 0$, substituindo $w \in V$ no lugar de ϕ em (3.8), onde w solução do problema $\Delta w + f(v_c) = 0$ em Ω e $w = 0$ em $\partial\Omega$, teríamos

$$f(v_c) = -\Delta w \text{ e } 0 = \nu \int_\Omega -\Delta w.w\, dx = \nu \int_\Omega \mid \nabla w \mid^2\, dx.$$

Temos então $\nabla w = 0$,logo $w = 0$($pois$ $\nabla w = 0$ implica $w =$ constante mas $w \equiv 0$ em$\partial\Omega$) e, conseqüentemente $f(v_c) = 0$, o que contradiz (3.2).

Seja, agora, $\lambda_c = -\frac{\nu}{\mu}$. Temos

$$\int_\Omega \nabla v_c \nabla \varphi \, dx - \lambda_c \int_\Omega f(v_c)\varphi \, dx = 0 \ \forall \phi \in V. \tag{3.9}$$

Isto garante que v_c é uma solução clássica de (3.6), como vemos abaixo.
No caso $V = V_\infty$, $v_c = v_c(r)$ é uma função de $r = \mid x \mid$ e pertence a $H_0^1(a,1)$. Então

$$v_c = v_c(r), \ \ x_1 = r\cos\theta, \ \ x_2 = r\,sen\,\theta, \ \ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ e } dx = r\,dr\,d\theta.$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{r\,sen\,\theta}{r} = sen\,\theta.$$

$$\text{Logo } \nabla v_c = \Big(\frac{\partial v_c}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial v_c}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_2}\Big) = v_c'(r)(\cos\theta, sen\,\theta),$$

$$\nabla\varphi = \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_2}\Big) = \varphi'(r)(\cos\theta, sen\,\theta)$$

$$\text{e } \nabla\varphi\nabla v_c = v_c'\varphi'.$$

Assim (3.9) transforma-se em

$$2\pi\int_a^1 (rv_c'\varphi' - \lambda_c r f(v_c)\varphi)\,dr = 0 \text{ para } \varphi = \varphi(r) \in C_0^1(a,1).$$

Isto significa que $v_c(r)$ é a solução fraca, isto é, no sentido de distribuições, da equação

$$\frac{1}{r}(rv_c')' + \lambda_c f(v_c) = 0 \text{ em } (a,1), \tag{3.10}$$

$$\text{pois, como } 2\pi\int_a^1 (rv_c'\varphi' - \lambda_c r f(v_c)\varphi)\,dr = 0,$$

$$\int_a^1 (rv_c'\varphi' - \lambda_c r f(v_c)\varphi)\,dr = 0.$$

$$\text{Mas } \int_a^1 (rv_c'\varphi')\,dr = \Big[rv_c'\varphi\Big]_a^1 - \int_a^1 (rv_c')'\varphi\,dr =$$

$$= -\int_a^1 (rv_c')'\varphi\,dr.$$

$$\text{Assim} \int_a^1 \Big(\frac{1}{r}(rv_c')' + \lambda_c f(v_c)\Big)\varphi\, dr = 0,$$

obtendo (3.10).

Dos teoremas de regularidade de soluções fracas, obtemos que $v_c(r)$ é suave com respeito a r (ver [7]).

Da mesma maneira acima, no caso $V = V_m$ vamos mostrar também que v_c é uma solução fraca de (3.7).

Seja $h \in C_0^1(\Omega)$ com suporte em

$$\Sigma_m = \Big\{x = (r\cos\theta, r\,sen\,\theta) \mid a < r < 1, \mid \theta \mid < \frac{\pi}{m}\Big\}. \tag{3.11}$$

Definimos $H \in V_m$ por

$$H(x) = h(x) + h(T_m x) + h(T_m^2 x) + ... + h(T_m^{m-1} x),$$

onde T_m é dado em (3.3).

Para verificar que de fato $H \in V_m$, vamos provar que $H(x) = H(T_m x)$.

$$H(x) = h(x) + h(T_m x) + h(T_m^2 x) + ... + h(T_m^{m-1} x),$$

$$H(T_m x) = h(T_m x) + h(T_m^2 x) + ... + h(T_m^{m-1} x) + h(T_m^m x).$$

Logo basta notar que $T_m^m x = x$.

Isto é claro, pois

$$T_m^k x = \Big(r\cos\Big(\theta + k\frac{2\pi}{m}\Big), r\,sen\Big(\theta + k\frac{2\pi}{m}\Big)\Big).$$

Por indução

$$\text{para } k = 1,\ T_m x = \Big(r\cos\Big(\theta + \frac{2\pi}{m}\Big), r\,sen\Big(\theta + \frac{2\pi}{m}\Big)\Big).$$

$$\text{Supondo } T_m^{k-1} x = \Big(r\cos\Big(\theta + (k-1)\frac{2\pi}{m}\Big), r\,sen\Big(\theta + (k-1)\frac{2\pi}{m}\Big)\Big)$$

Seja $\Theta = \theta + (k-1)\frac{2\pi}{m}$,

$$T_m^k x = T_m T_m^{k-1} x = \Big(r\cos\Big(\Theta + \frac{2\pi}{m}\Big), r\,sen\Big(\Theta + \frac{2\pi}{m}\Big)\Big) =$$

$$= \Big(r\cos\Big(\theta + k\frac{2\pi}{m}\Big), r\,sen\Big(\theta + k\frac{2\pi}{m}\Big)\Big).$$

Assim
$$T_m^m x = \Big(r\,cos\Big(\theta + m\frac{2\pi}{m}\Big), r\,sen\Big(\theta + m\frac{2\pi}{m}\Big)\Big) = x.$$
Então, temos de (3.9)
$$m\int_{\Sigma_m}(\nabla v_c \nabla H - \lambda_c f(v_c)H)dx = 0$$
e, conseqüentemente,
$$\int_\Omega (\nabla v_c \nabla h - \lambda_c f(v_c)h) = 0. \tag{3.12}$$
Similarmente, para $h \in C_0^1(\Omega)$ cujo suporte está contido em Σ_m após uma rotação apropriada, nós ainda temos (3.12).

Sejam agora, uma função $\psi \in C_0^1$ e uma cobertura de Ω formada por $U_j = T_m^j \Sigma_m$. Existe Θ_j com suporte em U_j tal que $\sum \Theta_j(x) = 1$. Seja $h_j = \psi\Theta_j$.

Assim, temos
$$supp(h_j) \subset U_j,\ \psi = \sum_j h_j \tag{3.13}$$
e
$$\int_\Omega (\nabla v_c \nabla \psi - \lambda_c f(v_c)\psi)\,dx =$$
$$= \sum_j \int_\Omega (\nabla v_c \nabla h_j - \lambda_c f(v_c)h_j)\,dx = 0. \tag{3.14}$$
Isto significa que v_c é uma solução fraca de (3.7). □

Observação :

Pela demonstração acima, observamos que a afirmação do lema é válida mesmo enfraquecendo a hipótese, ou seja, se tivéssemos $\Phi(v_c)$ = constante e $f(v_c) = 0$ ainda obteríamos a conclusão do lema. Logo poderíamos trocar a condição (3.2), $0 < f(t) < exp \mid t \mid^q$, por $f(t) < exp \mid t \mid^q$ e, ou $f(v_c) > 0$ ou $\Phi(v_c) \neq$ constante.

Introduzimos um novo funcional
$$M(v) = \int_\Omega e^v dx, \quad \text{para } v \in H_0^1(\Omega).$$

E definimos $j_m[\mu]$ por

$$j_m[\mu] = inf\{J(v) \mid v \in K_{m,\mu}\}, \tag{3.15}$$

onde J é dado em (3.5) e $K_{m,\mu} = \{v \in V_m \mid M(v) = \mu\}(m = 1, 2, ..., \infty)$.

Então existe um minimizante $v = v_{m,\mu} \in K_{m,\mu}$ que resolve

$$\Delta v + \lambda e^v = 0 \text{ em } \Omega, \; v \equiv 0 \text{ em } \partial\Omega \tag{3.16}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Quando } \mu > \mid \Omega \mid, \tag{3.17}$$

onde $\mid \Omega \mid$ é a medida de Ω, temos $\lambda > 0$ e obtemos a solução (λ, v) para o problema (P).

De fato, se supusermos $\lambda < 0$, temos

$$\lambda e^v < 0 \text{ e } \Delta v \geq 0 \text{ assim } Lv = -\Delta v \geq 0$$

e o máximo de v é assumido na fronteira, mas $v \equiv 0$ em $\partial\Omega$, assim, $v \leq 0$ em Ω, o que contradiz (3.17).

Agora estabelecemos um lema, através do qual encontramos as soluções de (P).

Lema 3.2 *Para qualquer inteiro positivo m, a desigualdade*

$$j_\infty[\mu] > j_m[\mu] \tag{3.18}$$

é verdadeira se μ é suficientemente grande.

Demonstração :

Como foi visto no teorema 2.13, para soluções "pequenas" $\underline{v}_\lambda$, μ é uniformemente limitado. Então, a solução (λ, v_∞) com $v_\infty \in K_{\infty,\mu}$ é única $(\overline{v}_\lambda)$ para μ suficientemente grande. Por isto, o ínfimo $j_\infty[\mu]$ de $J(v)$ em $K_{\infty,\mu}$ é obtido por $v = v_\infty$.

Além disso, (λ, v_∞) é parametrizada por $\sigma \in (0, 8\pi)$ com as relações

$$\mu = \mu(\sigma) = \frac{8\pi^2(a^2+1)log\, a}{(8\pi - \sigma)log\,(8\pi - \sigma)}(1 + o(1)) \tag{3.19}$$

e

$$j_\infty[\mu] = \frac{1}{2}\nu(\sigma) = \frac{-4\pi}{log\, a}\left(log\, \frac{1}{8\pi - \sigma}\right)^2(1 + o(1)) \tag{3.20}$$

dos lemas 2.11 e 2.12. Portanto μ suficientemente grande determina σ perto de 8π via (3.19).

Agora tornamos a estimar $j_m[\mu]$ para $m < \infty$. Para este fim precisamos fazer uso das soluções radiais para $\Omega = D$.

Seja ω_m um disco unitário em Σ_m dado por (3.11), com centro em x_0 e raio ε, definimos funções $U \in H_0^1(\Sigma_m)$ e $W_s \in V_m$ sucessivamente por

$$U(x) = u_s\Big(\frac{1}{\varepsilon}(x - x_0)\Big) \text{ em } \omega_m \text{ e } U(x) = 0 \text{ em } \Omega - \omega_m$$

e

$$W_s(x) = U(x) + U(T_m x) + U(T_m^2 x) + \dots + U(T_m^{m-1} x) \text{ em } \Omega, \tag{3.21}$$

onde u_s é a solução em $\Omega = D$ no teorema 2.3. Então

$$M(W_s) = \int_\Omega e^{W_s}\, dx = m \int_{\Sigma_m} e^{W_s}\, dx =$$

$$= m \int_{\omega_s} e^{U(x)}\, dx + m \int_{\Sigma_m - \omega_s} e^{U(x)}\, dx =$$

$$= m \int_{\omega_s} e^{u_s\left(\frac{1}{\varepsilon}(x-x_0)\right)}\, dx + m \int_{\Sigma_m - \omega_s} 1\, dx =$$

$$= m \int_D e^{u_s(y)} \varepsilon^2\, dy + m(\mid \Sigma_m \mid - \varepsilon^2 \pi) \ (\mid \Sigma_m \mid, \textit{ medida de } \Sigma_m)$$

através da mudança de variável $y = \frac{1}{\varepsilon}(x - x_0) \in D$.

Assim

$$M(W_s) = m\varepsilon^2 m(s) + \mid \Omega \mid - m\varepsilon^2 \pi, \tag{3.22}$$

onde $m(s)$ é dado em (2.22) por

$$m(s) = \int_\Omega e^{u_s} dx = \frac{8\pi^2}{8\pi - s},$$

$\mid \Omega \mid$ é a medida de Ω e

$$J(W_s) = \frac{1}{2} \int_\Omega \mid \nabla W_s \mid^2\, dx = \frac{1}{2} m \int_{\Sigma_m} \mid \nabla W_s \mid^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{\omega_s} | \nabla W_s |^2 \, dx.$$

Como

$$W_s |_{\omega_s} = u_s\Big(\frac{1}{\varepsilon}(x - x_0)\Big), \text{ temos } \nabla W_s = \frac{1}{\varepsilon} \nabla u_s$$

$$\text{e } | \nabla W_s |^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} | \nabla u_s |^2 .$$

Assim

$$J(W_s) = \frac{1}{2} m \int_D \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 | \nabla u_s |^2 \, dy = \frac{1}{2} m \eta(s), \tag{3.23}$$

onde $\eta(s)$ é dado por

$$\eta(s) = \int_\Omega | \nabla | \, dx = -16\pi log(8\pi - s)\{1 + o(1)\} \text{ ao } s \to 8\pi^-.$$

Como no caso de σ, μ suficientemente grande determina s perto de 8π unicamente por $M(W_s) = \mu$.

Conseqüentemente σ e s correspondem-se pela relação

$$m\varepsilon^2 \frac{8\pi^2}{8\pi - s} + | \Omega | - m\varepsilon^2 \pi = \frac{8\pi^2(a^2 + 1) log\, a}{(8\pi - \sigma) log(8\pi - \sigma)}(1 + o(1)). \tag{3.24}$$

Como W_s (em (3.21)) pertence a $K_{m,\mu}$ e, por (3.23) e (3.24),

$$j_m[\mu] \leq J(W_s) = \frac{1}{2} m \eta(s) = \frac{1}{2} m(-16\pi\, log(8\pi - \sigma))(1 + o(1)) =$$

$$= 8\pi m\, log\Big(\frac{1}{8\pi - \sigma}\Big)(1 + o(1)) \text{ ao } \sigma \to 8\pi^-. \tag{3.25}$$

Comparando os lados direitos de (3.20) e (3.25) quando $\sigma \to 8\pi^-$, obtemos

$$\frac{-4\pi}{log\, a}\Big(log\Big(\frac{1}{8\pi - \sigma}\Big)\Big)^2 > 8\pi m \Big(log\Big(\frac{1}{8\pi - \sigma}\Big)\Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{log(8\pi - \sigma)}{log\, a} > 2m \text{ ao } \sigma \to 8\pi^-,$$

o que é verdade, pois $\frac{log(8\pi - \sigma)}{log\, a} \to \infty$ ao $\sigma \to 8\pi^-$ já que $a < 1$.

Assim,

$$j_\infty[\mu] > J(W_s) \geq j_m[\mu]$$

para μ suficientemente grande. $\square$

Para caracterizar estas soluções não radiais temos que separar os valores críticos de $j_m[\mu]$ para m finito.

Lema 3.3 *Para qualquer m inteiro positivo temos*

$$j_1[\mu] \leq j_2[\mu] \leq ... \leq j_m[\mu] \leq ... \leq j_\infty[\mu]. \tag{3.26}$$

Além disso, $j_m[\mu] < j_\infty[\mu]$ implica

$$j_1[\mu] < j_2[\mu] < ... < j_m[\mu]. \tag{3.27}$$

Demonstração :

Para cada $v = v(re^{i\theta}) \in V_m$, onde $re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ é identificado com $x = (r\cos\theta, r\,sen\,\theta) \in \mathbb{R}^2$, seja $\widetilde{v}(re^{i\theta'}) = v(re^{i\theta})$ com $\theta' = m\theta\,(0 \leq \theta' < 2\pi)$, assim, a função $S_m : v \in V_m \longrightarrow \widetilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ é sobrejetiva.

Além disso

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^1 \left(r\Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)^2 + r^{-1}\Big(\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)^2\right) dr\, d\theta =$$

$$= \frac{m}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{m}}\int_a^1 \left(r\Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)^2 + r^{-1}\Big(\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)^2\right) dr\, d\theta =$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^1 \left(r\Big(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial r}\Big)^2 + m^2 r^{-1}\Big(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \theta'}\Big)^2\right) dr\, d\theta. \tag{3.28}$$

(1)

$$|\nabla v|^2 = \Big(\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{r} = \frac{2\cos\theta}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(arc\,sen\Big(\frac{x_2}{r}\Big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x_2^2}{r^2}}}\,\frac{-x_2\,2x_1}{2r^3} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{r^2-x_2^2}}{r}} \frac{-x_1x_2}{r^3} = \frac{-x_1x_2}{x_1r^2} = \frac{-x_2}{r^2} = -\frac{r\, sen\,\theta}{r^2} = -\frac{sen\,\theta}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = cos\,\theta\,\frac{\partial v}{\partial r} + \Big(\frac{-sen\,\theta}{r}\Big)\frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big)^2 = cos^2\,\theta\Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)^2 - \frac{2\cos\theta\, sen\,\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{sen^2\,\theta}{r^2}\Big(\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{2r} = sen\,\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(arc\,cos\Big(\frac{x_1}{r}\Big)\Big) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x_1^2}{r^2}}}\frac{-x_1x_2}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{r^2-x_1^2}}{r}} \frac{x_1x_2}{r^3} = \frac{x_1x_2}{x_2r^2} = \frac{x_1}{r^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{cos\,\theta}{r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = sen\,\theta\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{cos\,\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$\text{e}\ \Big(\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)^2 = sen^2\,\theta\Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)^2 + \frac{2\,sen\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{cos^2\,\theta}{r^2}\Big(\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)^2$$

Assim

$$\Big(\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x_2}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial v}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big)^2.$$

(2)

$$\theta' = m\theta,\ d\theta' = md\theta,\ 0 \le \theta < \frac{2\pi}{m} \Rightarrow 0 \le \theta' < 2\pi,$$

$$\widetilde{v}(re^{im\theta}) = \widetilde{v}(re^{i\theta'}) = v(re^{i\theta}),$$

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \theta} = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = m \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \theta'}$$

e

$$M(v) = \int_\Omega e^v \, dx = m \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \int_a^1 e^v r \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^1 e^{\widetilde{v}} r \, dr \, d\theta' = M(\widetilde{v}). \tag{3.29}$$

Portanto, vemos que

$$j_m[\mu] = inf\{J_m(v) \mid v \in K_{1,\mu}\}, \tag{3.30}$$

onde

$$J_m(v) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^1 \left(r\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + m^2 r^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 \right) dr \, d\theta \tag{3.31}$$

para $v = v(re^{i\theta}) \in H_0^1(\Omega)$.

Seja $v_m = v_m(re^{i\theta})$ um minimizante para J_m em $K_{1,\mu}$. Então

$$j_{m-1}[\mu] \leq J_{m-1}(v_m) \leq J_m(v_m) = j_m[\mu]$$

$j_{m-1}[\mu] = j_m[\mu]$ implica que $J_m(v_m) = J_{m-1}(v_m)$,portanto, $\frac{\partial v_m}{\partial \theta} = 0$. Em outras palavras, $v_m \in V_\infty$ e, conseqüentemente, $j_m[\mu] = j_\infty[\mu]$.

Logo (3.27) segue de $j_m[\mu] < j_\infty[\mu]$ por indução, pois

$$j_1[\mu] < j_2[\mu].$$

De fato, $j_1[\mu] = j_2[\mu] \Rightarrow J_2(v_2) = J_1(v_2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow v_2 \in V_\infty \Rightarrow j_2[\mu] = j_\infty[\mu].$$

Suponhamos $j_1[\mu] < j_2[\mu] < \ldots < j_{m-1}[\mu]$.

Obtemos $j_{m-1}[\mu] < j_m[\mu]$, pois

$$j_{m-1}[\mu] = j_m[\mu] \Rightarrow J_m(v_m) =$$

$$= J_{m-1}(v_m) \Rightarrow \frac{\partial v_m}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow v_m \in V_\infty \Rightarrow j_m[\mu] = j_\infty[\mu]. \qquad \square$$

Definição 3.4 *Definimos a classe da solução v para o problema (P_λ) como o maior m $(m = 1, 2, ..., \infty)$ tal que $v \in V_m$.*

Teorema 3.5 *Para qualquer inteiro positivo m, existe um número μ_m tal que, para qualquer $\mu > \mu_m$, o problema (P) tem solução não radial (λ, v) de classe m satisfazendo $M(v) = \mu$.*

Demonstração :
Já obtivemos a solução $v = v_{m,\mu} \in V_m$ tal que $J(v) = j_m[\mu] < j_\infty[\mu]$ para μ suficientemente grande no lema 3.2. Por isso, temos apenas que mostrar que a classe de v é precisamente m.
Suponhamos que $v \in V_k$ para algum $k > m$. Então

$$j_k[\mu] \leq J(v) = j_m[\mu] < j_\infty[\mu]. \tag{3.32}$$

Mas (3.32) contradiz o lema 3.3.
Isto mostra que a classe de v é precisamente m. $\square$

APÊNDICE

Vamos mostrar que

$$\Delta u + \lambda e^u = 0$$

para $u = log\, E$ e $\lambda = 2K$ onde E, G e F são os coeficientes da primeira forma fundamental para uma superfície tais que $E = G$ e $F = 0$ e K é a curvatura Gaussiana. Logo esta equação expressa a procura dos coeficientes da primeira forma fundamental para superfícies de curvatura Gaussiana constante.

Definição 4.1 *Definimos o produto misto dos vetores P, Q e R por*

$$[P\,Q\,R] = \det \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix}$$

para $P = (P_1, P_2, P_3) \in I\!R^3$, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3) \in I\!R^3$ e $R = (R_1, R_2, R_3) \in I\!R^3$.

Lema 4.2 *Dados P, Q, R, A, B, C vetores de $I\!R^3$,*

$$[P\,Q\,R]\,[A\,B\,C] = \det \begin{pmatrix} P.A & P.B & P.C \\ Q.A & Q.B & Q.C \\ R.A & R.B & R.C \end{pmatrix}$$

onde $M.N$ é o produto interno dos vetores M e N.

Demonstração :

$$P = (P_1, P_2, P_3) \quad A = (A_1, A_2, A_3)$$

$$Q = (Q_1, Q_2, Q_3) \quad B = (B_1, B_2, B_3)$$
$$R = (R_1, R_2, R_3) \quad C = (C_1, C_2, C_3)$$

$$[P\,Q\,R].[A\,B\,C] = \det \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} . \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} P.A & P.B & P.C \\ Q.A & Q.B & Q.C \\ R.A & R.B & R.C \end{pmatrix}$$

□

Lema 4.3 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

$$\det A - \det B = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i-n \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ l & m & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração :

$$\det A - \det B = g.\det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} - h.\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} + i.\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

$$-l.\det \begin{pmatrix} b & j \\ e & k \end{pmatrix} + m.\det \begin{pmatrix} a & j \\ d & k \end{pmatrix} - n.\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} =$$

$$= g.\det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} - h.\det \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} + (i-n).\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

$$-(l.\det \begin{pmatrix} b & j \\ e & k \end{pmatrix} - m.\det \begin{pmatrix} a & j \\ d & k \end{pmatrix}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i-n \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ l & m & 0 \end{pmatrix}$$

□

Sejam, agora, S uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e K a sua curvatura gaussiana num ponto p. Sabemos que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

onde

$$E = X_u.X_u,\ F = X_u.X_v,\ G = X_v.X_v,$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}[X_u, X_v, X_{uu}],$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}[X_u, X_v, X_{uv}] \text{ e}$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}[X_u, X_v, X_{vv}],$$

para X parametrização de S.

Lema 4.4

$$-\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} = X_{uu}.X_{vv} - X_{uv}.X_{uv}$$

Demonstração :

$$E = X_u.X_u \quad E_v = 2\,X_{uv}.X_u$$

$$E_{vv} = 2\,(X_{uvu}.X_u + X_{uv}.X_{uv})$$

$$F = X_u.X_v \quad F_u = X_{uu}.X_v + X_u.X_{uv}$$

$$F_{uv} = X_{uuv}.X_v + X_{uu}.X_{vv} + X_{uv}.X_{uv} + X_u.X_{uvv}$$

$$G = X_u.X_v \quad G_u = 2\,X_{uv}.X_v$$

$$G_{uu} = 2\,(X_{uuv}.X_v + X_{uv}.X_{uv})$$

Assim,

$$-\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} =$$

$$= -X_{uvv}.X_u - X_{uv}.X_{uv} + X_{uuv}.X_v + X_{uu}.X_{vv} + X_{uv}.X_{uv} + X_u X_{uvv} - X_{uuv}.X_v - X_{uv}.X_{uv} =$$

$$= X_{uu}.X_{vv} - X_{uv}.X_{uv} \qquad \square$$

Agora, substituindo e, f, g, E, F e G em K, obtemos:

$$K = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2} = \frac{1}{(E\,G - F^2)^2}([X_u, X_v, X_{uu}].[X_u, X_v, X_{vv}] - ([X_u, X_v, X_{uv}])^2)$$

Pelo lema 4.2:

$$K = \frac{1}{(E\,G - F^2)^2}\Big[\det\begin{pmatrix} X_u.X_u & X_u.X_v & X_u.X_{vv} \\ X_v.X_u & X_v.X_v & X_v.X_{vv} \\ X_{uu}.X_u & X_{uu}.X_v & X_{uu}.X_{vv} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} X_u.X_u & X_u.X_v & X_u.X_{uv} \\ X_v.X_u & X_v.X_v & X_v.X_{uv} \\ X_{uv}.X_u & X_{uv}.X_v & X_{uv}.X_{uv} \end{pmatrix}\Big]$$

Pelo lema 4.3:

$$K = \frac{1}{(E\,G - F^2)^2}\Big[\det\begin{pmatrix} E & F & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} & X_{uu}.X_{vv} - X_{uv}.X_{uv} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{pmatrix}\Big]$$

pelo lema 4.4:

$$K = \frac{1}{(E\,G - F^2)^2}\Big[\det\begin{pmatrix} E & F & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_u - \frac{E_v}{2} & -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}Guu \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{pmatrix}\Big]$$

No caso em que $F = 0$ temos

$$K = \frac{1}{(EG)^2}\Big[\det\begin{pmatrix} E & 0 & -\frac{G_u}{2} \\ 0 & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & -\frac{E_v}{2} & -\frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} E & 0 & \frac{E_v}{2} \\ 0 & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{pmatrix}\Big] =$$

$$= \frac{1}{(E\,G)^2}\Big[E\Big(G\Big(-\frac{1}{2}(E_{vv}+G_{uu})\Big)+\frac{E_v.G_v}{4}\Big)+\frac{E_u}{2}\Big(G\,\frac{G_u}{2}\Big)-E\Big(-\frac{G_u^2}{4}\Big)-\frac{E_v}{2}\Big(-G\,\frac{E_v}{2}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2(E\,G)^2}\Big[-E\,G\,E_{vv}-E\,G\,G_{uu}+\frac{1}{2}(E\,E_v\,G_v+E_u\,G_u\,G+E\,G_u^2+E_v^2\,G)\Big] =$$

$$= \frac{-1}{2(E\,G)^2}\Big[E_{vv}\,E\,G+G_{uu}\,E\,G-\frac{1}{2}(E_v^2\,G+E_v\,E\,G_v+G_u\,E_u\,G-G_u^2\,E)\Big] =$$

$$\overset{(1)\text{e}(2)}{=} \frac{-1}{2\sqrt{E\,G}}\Big[\Big(\frac{E_v}{\sqrt{E\,G}}\Big)_v+\Big(\frac{G_u}{\sqrt{E\,G}}\Big)_u\Big]$$

(1)

$$\Big(\frac{E_v}{\sqrt{E\,G}}\Big)_v = \frac{E_{vv}\,\sqrt{E\,G}-E_v\left(\frac{E_v\,G+E\,G_v}{2\sqrt{E\,G}}\right)}{E\,G} = $$
$$= \frac{E_{vv}\,E\,G-\frac{E_v}{2}(E_v\,G+E\,G_v)}{E\,G\sqrt{E\,G}}$$

(2)

$$\Big(\frac{G_u}{\sqrt{E\,G}}\Big)_u = \frac{G_{uu}\,\sqrt{E\,G}-G_u\left(\frac{E_u\,G+E\,G_u}{2\sqrt{E\,G}}\right)}{E\,G} = $$
$$= \frac{G_{uu}\,E\,G-\frac{G_u}{2}(E_u\,G+E\,G_u)}{E\,G\sqrt{E\,G}}$$

Assim, quando temos $F=0$,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{E\,G}}\Big[\Big(\frac{E_v}{\sqrt{E\,G}}\Big)_v+\Big(\frac{G_u}{\sqrt{E\,G}}\Big)_u\Big].$$

Se $E = G$ e $F = 0$, temos

$$K = -\frac{1}{2E}\Big[\Big(\frac{E_v}{E}\Big)_v + \Big(\frac{E_u}{E}\Big)_u\Big] = $$
$$= -\frac{1}{2E}\Delta(\log E)$$

pois,

$$\Delta(\log E) = (\log E)_{vv} + (\log E)_{uu} = ((\log E)_v)_v + ((\log E)_u)_u = \Big(\frac{E_v}{E}\Big)_v + \Big(\frac{E_u}{E}\Big)_u$$

Assim, se $\log E = u$, temos

$$\Delta u + 2Ke^u = 0,$$

que está na forma da equação estudada para $\lambda = 2K$.

Bibliografia

[1] ADAMS, R.A. "Sobolev Spaces". New York: Academic Press, 1975.

[2] BACHMAN, G; NARICI, L. "Functional Analysis". New York: Academic Press, 1966.

[3] BAK, J; NEWMAN, D. "Complex Analysis". Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[4] CARMO, M.P. "Differential Geometry of Curves and Surfaces". New Jersey: Prentice-Hall, 1976.

[5] DEIMLING, K. "Nonlinear Functional Analysis". Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[6] GIDAS, B; NI, W.M; NIRENBERG, L. *Simmetry and Related Properties via the Maximum Principle* . Comm.Math.Phys, v.68, p.209-243, 1979.

[7] GILBARG, D; TRUDINGER, N.S. "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order". Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[8] IÓRIO, R; IÓRIO, V. "Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução". Rio de Janeiro: CNPq:IMPA, 1988. (Projeto Euclides)

[9] LIMA, E.L. "Espaços Métricos". Rio de Janeiro: CNPq: IMPA, 1977. (Projeto Euclides)

[10] LIUSTERNIK, L.A; SOBOLEV, V.J. "Elements of Functional Analysis". New York: Frederick Ungar Publishing Company, 1961.

[11] MEDEIROS, L.A; RIVERA, P.H. "Iniciação aos Espaços de Sobolev". Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 1977.

[12] NAGASAKI, K. *Radial Solutions for* $\Delta u + \mid x \mid^{l} \mid u \mid^{p-1} u = 0$ *on the unit ball.* J.Fac.Sci.Univ, Tokio, v.36, p.211-232, 1989.

[13] NAGASAKI, K; SUZUKI, T. *Radial and Nonradial Solutions for the Eigenvalue Problem* $\Delta u + \lambda e^{u} = 0$ *on Annuli in* $\mathbb{R}^2$. J.Diff.Equations, New York, v.87, p.144-168, 1990.

[14] RUDIN, W. "Real and Complex Analysis". New York: McGraw-Hill International Editions, 1987.

[15] STEFFENON, R.R. *Um Problema de Dirichlet não Linear na Bola Unitária do* $\mathbb{R}^N$ *e suas Aplicações.* Porto Alegre: UFRGS, 1992. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.