Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

ANÁLISE ESPECTRAL DE UMA CLASSE DE TRANSFORMAÇÕES CAÓTICAS

por

Rafael Rigão Souza

Porto Alegre, Julho de 1998

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Artur Oscar Lopes

A meus pais

minha irmã Juliana

e Flávia

Agradecimentos

Agradeço aos professores do Curso de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, em especial aos professores Eduardo Brietzke, Marcos Sebastiani, Sara Carmona e Miguel Ferrero, pela importante contribuição à minha formação.

Agradeço especialmente ao meu orientador Artur Oscar Lopes pelo estímulo à pesquisa, pelas várias disciplinas habilmente ministradas nas mais diversas áreas e pelo esforço empreendido em me proporcionar a melhor formação possível.

Resumo

O objetivo deste trabalho é calcular explicitamente a função densidade espectral do processo estocástico estacionário dado por

$$X_t = T_\alpha^t(X_0)\,,\ \ t \in \mathbb{N}$$

onde $T_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ é definida por

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha}, & \text{se} \quad 0 \leq x < \alpha \\ \\ \frac{\alpha(x-\alpha)}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

α é um parâmetro em (0,1) e X_0 tem distribuição ν, onde ν é a (única) medida invariante absolutamente contínua em relação a Lebesgue. Mostramos ainda que vale a Lei Forte dos Grandes Números para o processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ e obtemos uma estimativa de α baseada em uma série temporal.

Abstract

The purpose of this work is to show explicitly the spectral density function of the stationary stochastic process given by

$$X_t = T_\alpha^t(X_0)\,,\ \ t \in \mathbb{N}$$

where $T_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ is defined by

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha}, & \text{if} \quad 0 \leq x < \alpha \\ \\ \frac{\alpha(x-\alpha)}{1-\alpha}, & \text{if} \quad \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

α is a parameter in (0,1) and X_0 has distribution ν, where ν is the (unique) invariant measure for T_α absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. We also show that the Strong Law of Large Numbers holds for the process $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ and obtain an estimate for the parameter α based on a time series.

Índice

1. Introdução

Considere a transformação $T_\alpha : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha}, & \text{se} \quad 0 \le x < \alpha \\ \frac{\alpha(x-\alpha)}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha \le x \le 1 \end{cases} \tag{1}$$

onde $\alpha \in (0,1)$ é uma constante.

Estamos interessados na análise espectral do processo estocástico estacionário determinado pelos iterados desta função. Tal processo é definido por

$$X_t = T_\alpha^t(X_0)\,, \quad t \in I\!N \tag{2}$$

onde T_α^t é o t-ésimo iterado de T_α, ν é a (única) medida invariante absolutamente contínua em relação a Lebesgue para T_α, calculada na seção 2, e X_0, a variável aleatória inicial, tem distribuição ν. Neste caso, X_t, para todo t natural, também tem distribuição ν.

Calcularemos explicitamente a função densidade espectral deste processo, definida (ver Brockwell e Davis (1991)) por

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda} \rho(k)\ , \tag{3}$$

para todo $\lambda \in (-\pi, \pi]$, onde $\rho(k)$ é o coeficiente de correlação de ordem k do processo $\{X_t\}_{t\in I\!N}$

$$\rho(k) = \frac{Cov[X_t, X_{t+k}]}{\sqrt{Var[X_t]}\sqrt{Var[X_{t+k}]}} = \frac{I\!E[X_t T_\alpha^k(X_t)] - I\!E[X_t] I\!E[T_\alpha^k(X_t)]}{\sqrt{Var[X_t]}\sqrt{Var[T_\alpha^k(X_t)]}}\ , \tag{4}$$

se $k \in I\!N$ e $\rho(k) = \rho(-k)$, se $-k \in I\!N$.

Note que, sendo ν invariante, (4) independe de t e se reduz a:

$$\rho(k) = \frac{I\!E[X_t T_\alpha^k(X_t)] - (I\!E[X_t])^2}{Var[X_t]}\ . \tag{5}$$

A medida invariante ν será usada na obtenção de três equações de recorrência envolvendo os coeficientes $\rho(k)$ da função densidade espectral (Proposições 2, 3 e 4). Tais coeficientes não serão calculados explicitamentes, mas das três equações acima e através do uso de três séries de potência auxiliares (ver expressão (18)) obteremos a função densidade espectral (expressão (3)) (ver Teorema 1) (ver Lopes, Lopes e Souza (1997a) para os resultados descritos até aqui).

Mostraremos ainda que a medida invariante ν é ergódica. Concluiremos que vale a Lei Forte dos Grandes Números para o processo $\{X_t\}_{t\in \mathbb{N}}$. Calculando suas esperança, variância e coeficientes de correlação de ordem 0 e 1 (Proposição 4) vamos obter estimativas para α a partir de uma série temporal, através do Teorema Ergódico de Birkhoff (método dos momentos).

Em Lopes, Lopes e Souza (1997b) usamos técnicas semelhantes para fazer a análise espectral de um processo gerado pelos iterados de uma outra função T no intervalo $[0,1]$. Essa função é dada pela divisão de $[0,1]$ em n intervalos encaixados B_i, $i \in \{1,2,...,n\}$, e pela divisão, para cada $i \in \{1,2,...,n\}$, do intervalo B_i em n subintervalos encaixados B_{ij}, $j \in \{1,2,...,n\}$. Fazemos T ligar o intervalo B_{ij} ao intervalo B_j por uma reta crescente, que une as extremidades inferior e superior de B_{ij} às extremidades inferior e superior de B_j, respectivamente. Desta vez a medida invariante é dada por uma densidade constante em cada intervalo B_i, e a função densidade espectral é dada pelo mesmo Teorema 1 aqui provado, em função da série de potências γ relativa a este outro processo (análoga à definida em (18)).

Finalmente, Lopes, Lopes e Souza (1996) contém um resumo destes dois casos e do outros tratados anteriormente (ver Lopes e Lopes (1998)).

2. A medida invariante

Inicialmente calcularemos uma medida ν invariante para T_α absolutamente contínua com relação a Lebesgue. Depois mostraremos que esta medida é única e é ergódica, e do Teorema Ergódico de Birkhoff obteremos a Lei Forte dos Grandes Números para o processo $\{X_t\}_{t\in \mathbb{N}}$.

Evidências computacionais sugerem uma medida ν dada por uma densidade constante por partes $g(x)$ da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} c\,, & \text{se} \quad x \in [0,\alpha) \\ d\,, & \text{se} \quad x \in [\alpha,1]\ . \end{cases} \tag{6}$$

Provaremos que ν, definida pela densidade g, é invariante para T_α , desde que com constantes c e d adequadas.

Sendo densidade em [0,1], $g(x)$ deve satisfazer

$$\nu([0,1]) = \int_0^1 g(x)dx = \alpha c + (1-\alpha)d = 1 \tag{7}$$

e, por ser invariante, deve satisfazer a seguinte equação funcional

$$\nu(T_\alpha^{-1}([a,b])) = \nu([a,b]) \ , \tag{8}$$

para quaisquer $0 \leq a < b \leq 1$.

Reescrevendo a equação (8) em termos de c e d, temos três possíveis casos:

i) se $a < b \leq \alpha$, então

$$T_\alpha^{-1}([a,b]) = [\alpha a, \alpha b] \cup \left[\alpha + \frac{a(1-\alpha)}{\alpha}, \alpha + \frac{b(1-\alpha)}{\alpha}\right]$$

e (8) pode ser reescrita como

$$\alpha(b-a)c + (b-a)\frac{(1-\alpha)}{\alpha}d = (b-a)c\,. \tag{9}$$

ii) se $a \leq \alpha \leq b$, então

$$T_\alpha^{-1}([a,b]) = [\alpha a, \alpha b] \cup \left[\alpha + \frac{1-\alpha}{\alpha}a, 1\right]$$

e (8) pode ser reescrita como

$$\alpha(b-a)c + \left(1 - \alpha - \frac{1-\alpha}{\alpha}a\right)d = (b-\alpha)d + (\alpha - a)c\,. \tag{10}$$

iii) se $\alpha \leq a < b$, então

$$T_\alpha^{-1}([a,b]) = [\alpha a, \alpha b]$$

e (8) pode ser reescrita como

$$\alpha(b-a)c = d(b-a)\,. \tag{11}$$

Nos três casos acima, a resolução do sistema formado pelas expressões (7) e (9) ou (10) ou (11) resulta em c e d como função de α apenas, não dependendo de a e b:

$$c = \frac{1}{\alpha(2-\alpha)} \quad \text{e} \quad d = \frac{1}{2-\alpha}\,. \tag{12}$$

Portanto, provamos que a densidade $g(x)$, definida por (6), com c e d escolhidos como em (12), é tal que

$$\nu(T_\alpha^{-1}([a,b])) = \nu([a,b])$$

para todos a e b pertencentes a $[0,1]$. Como a semi-álgebra dos intervalos gera a σ-álgebra de Borel em $[0,1]$, temos que a medida ν, dada pela densidade $g(x)$, é invariante para T_α.

Para mostrarmos que ν é a única medida invariante absolutamente contínua em relação a Lebesgue e que é ergódica, usaremos o seguinte resultado (ver Lasota e Yorke (1973) e Lasota e Mackey (1994)):

Proposição: *Se T é uma transformação expansora definida em um intervalo, então existe uma única medida invariante absolutamente contínua com relação a Lebesgue. Além disso, essa medida é ergódica.*

A transformação T_α em (1) é expansiva se e somente se $\alpha > \frac{1}{2}$. Porém, podemos mostrar que T_α^2 é sempre expansiva. Para isto basta considerar a expressão de T_α^2

$$T_\alpha^2(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha^2}, & \text{se} \quad 0 \le x < \alpha^2 \\ \frac{x-\alpha^2}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha^2 \le x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha \le x \le 1\,, \end{cases}$$

onde a derivada de T_α^2 é

$$\frac{1}{\alpha^2}\,, \quad \text{se} \quad 0 \leq x < \alpha^2$$

e

$$\frac{1}{1-\alpha}\,, \quad \text{se} \quad \alpha^2 \leq x \leq 1\,,$$

que são valores sempre maiores que 1, qualquer que seja α, $0 < \alpha < 1$.

Logo, da proposição acima temos a ergodicidade de ν para T_α^2. E isto implica que ν é ergódica também para T_α, pois:

$$T_\alpha^{-1}(A) = A \Rightarrow (T_\alpha^2)^{-1}(A) = T_\alpha^{-1}(T_\alpha^{-1}(A)) = T_\alpha^{-1}(A) = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu(A) = 0 \text{ ou } \nu(A) = 1\,,$$

onde a última implicação vem da ergodicidade de T_α^2.

Podemos então usar o Teorema Ergódico de Birkhoff (ver Robinson (1995) ou Lasota e Mackey (1994)) para obtermos a Lei Forte dos Grandes Números para o processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$.

Teorema Ergódico de Birkhoff: *Seja $T: M \to M$ uma transformação mensurável e ν uma medida invariante e ergódica para T. Então, existe um conjunto A de medida ν total tal que, para toda função integrável φ de M em $\mathbb{R}$, e z_0 em A, temos*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(T^k(z_0)) = \int \varphi(z)d\nu(z)\,.$$

Para utilizar o teorema acima, considere $M = [0,1]$, $T = T_\alpha$ e $\varphi = Id$. Então

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_t = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} T_\alpha^t(z_0) = \int z d\nu(z) = \mathbb{E}[X_t]\,, \quad \forall z_0 \in A,$$

onde A é um conjunto de medida $\nu(A) = 1$.

O Teorema Ergódico de Birkhoff será usado mais tarde para obtermos uma estimativa de α a partir de uma série temporal do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$.

3. Cálculo da Densidade Espectral

Nesta seção obteremos a expressão explícita da função densidade espectral dada pela expressão (3).

A próxima proposição caracteriza o k-ésimo iterado da transformação $T_\alpha(x)$ através de uma fórmula recursiva.

Proposição 1: *O k-ésimo iterado da transformação $T_\alpha(x)$ dada pela expressão (1) é definido por*

$$T_\alpha^k(x) = \begin{cases} T_\alpha^{k-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right), & se \quad 0 \leq x < \alpha \\ \\ T_\alpha^{k-2}\left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right), & se \quad \alpha \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{13}$$

para qualquer inteiro $k \geq 2$.

Prova: A prova é feita por indução em k. Primeiro verificamos a validade da expressão (13) quando $k = 2$, sabendo que

$$T_\alpha^2(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha^2}, & \text{se} \quad 0 \leq x < \alpha^2 \\ \\ \frac{x-\alpha^2}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha^2 \leq x < \alpha \\ \\ \frac{x-\alpha}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Como $T_\alpha^0 \equiv Id$, pelo uso da fórmula de recorrência quando $k = 2$ temos

$$T_\alpha^2(x) = \begin{cases} T_\alpha^1\left(\frac{x}{\alpha}\right), & \text{se} \quad 0 \leq x < \alpha \\ \\ \frac{x-\alpha}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Sabemos que

$$T_\alpha^1\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\frac{x}{\alpha}}{\alpha} = \frac{x}{\alpha^2}\,, \qquad \text{se} \quad 0 \leq \frac{x}{\alpha} < \alpha,$$

e que

$$T^1_\alpha\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) = \frac{\alpha\Big(\frac{x}{\alpha} - \alpha\Big)}{1-\alpha} = \frac{x-\alpha^2}{1-\alpha}, \qquad \text{se} \quad \alpha \le \frac{x}{\alpha} \le 1,$$

Portanto temos

$$T^2_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha^2}, & \text{se} \quad 0 \le x < \alpha^2 \\ \frac{x-\alpha^2}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha^2 \le x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{1-\alpha}, & \text{se} \quad \alpha \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Logo, a fórmula de recorrência vale para $k = 2$. Suponha agora que (13) vale para k. Mostraremos que também vale para $k+1$. Suponha $0 \le x < \alpha$. Então,

$$T^{k+1}_\alpha(x) = T^k_\alpha(T_\alpha(x)) = T^k_\alpha\Big(\frac{x}{\alpha}\Big).$$

Se $\alpha \le x \le 1$ então

$$\begin{aligned} T^{k+1}_\alpha(x) &= T^k_\alpha(T_\alpha(x)) = T^k_\alpha\Big(\frac{\alpha(x-\alpha)}{1-\alpha}\Big) = \\ &= T^{k-1}_\alpha\Big(T_\alpha\Big(\frac{\alpha(x-\alpha)}{1-\alpha}\Big)\Big) = T^{k-1}_\alpha\Big(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\Big), \end{aligned}$$

já que

$$\frac{\alpha(x-\alpha)}{1-\alpha} \le \alpha\,,$$

quando $x \in [0,1]$. Portanto,

$$T^{k+1}_\alpha(x) = \begin{cases} T^k_\alpha\Big(\frac{x}{\alpha}\Big), & \text{se} \quad 0 \le x < \alpha \\ T^{k-1}_\alpha\Big(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\Big), & \text{se} \quad \alpha \le x \le 1 \end{cases}$$

e a proposição está demonstrada.

Proposição 2: *A integral*

$$A(k) = \int_0^1 T^k_\alpha(x)dx$$

satisfaz a equação recursiva

$$A(k) = \alpha A(k-1) + (1-\alpha)A(k-2) \tag{14}$$

para todo inteiro $k \geq 2$, com as condições iniciais

$$A(0) = \frac{1}{2} \quad e \quad A(1) = \frac{\alpha}{2}(2-\alpha)\,.$$

Prova: Da Proposição 1 temos, para todo inteiro $k \geq 2$,

$$A(k) = \int_0^1 T_\alpha^k(x)dx = \int_0^\alpha T_\alpha^{k-1}\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)dx + \int_\alpha^1 T_\alpha^{k-2}\Big(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\Big)dx\,.$$

Por uma mudança da variável x para a variável

$$y = \frac{x}{\alpha}$$

na primeira integral da expressão de $A(k)$ acima, e da variável x para

$$z = \frac{x-\alpha}{1-\alpha}$$

na segunda integral da expressão de $A(k)$ acima, temos

$$A(k) = \int_0^1 T_\alpha^{k-1}(y)\alpha dy + \int_0^1 T_\alpha^{k-2}(z)(1-\alpha)dz = \alpha A(k-1) + (1-\alpha)A(k-2),$$

para todo inteiro $k \geq 2$. Logo, a equação (14) vale. Os valores de $A(0)$ e $A(1)$ podem ser calculados diretamente por

$$A(0) = \int_0^1 T_\alpha^0(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{aligned}
A(1) &= \int_0^1 T_\alpha^1(x)dx = \int_0^\alpha \frac{x}{\alpha}dx + \int_\alpha^1 \alpha\frac{(x-\alpha)}{1-\alpha}dx = \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\Big(\frac{1}{2} - \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2\Big) = \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\Big(\frac{1}{2} - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\Big) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}(1 - 2\alpha + \alpha^2) = \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}(1-\alpha) = \frac{\alpha}{2}(2-\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Logo a proposição está provada.

Proposição 3: *A integral*

$$B(k) = \int_0^1 xT_\alpha^k(x)dx$$

satisfaz a equação de recorrência

$$B(k) = \alpha^2 B(k-1) + (1-\alpha)^2 B(k-2) + \alpha(1-\alpha)A(k-2) \ , \qquad (15)$$

para todo inteiro $k \geq 2$, com as condições iniciais

$$B(0) = \frac{1}{3} \quad e \quad B(1) = \frac{\alpha}{6}(1+\alpha)(2-\alpha) \, .$$

Prova: Da Proposição 1, para todo inteiro $k \geq 2$ temos,

$$B(k) = \int_0^1 xT_\alpha^k(x)dx = \int_0^\alpha xT_\alpha^{k-1}\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)dx + \int_\alpha^1 xT_\alpha^{k-2}\Big(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\Big)dx.$$

Por uma mudança da variável x para a variável

$$y = \frac{x}{\alpha}$$

na primeira integral da expressão de B(k) acima e da variável x para

$$z = \frac{x-\alpha}{1-\alpha}$$

na segunda integral da da expressão de B(k) acima, temos

$$\begin{aligned}
B(k) &= \int_0^1 \alpha y T_\alpha^{k-1}(y)\alpha dy + \int_0^1 [z(1-\alpha)+\alpha]T_\alpha^{k-2}(z)(1-\alpha)dz = \\
&= \alpha^2 \int_0^1 yT_\alpha^{k-1}(y)dy + (1-\alpha)^2 \int_0^1 zT_\alpha^{k-2}(z)dz + \\
&+ \alpha(1-\alpha)\int_0^1 T_\alpha^{k-2}(z)dz = \\
&= \alpha^2 B(k-1) + (1-\alpha)^2 B(k-2) + \alpha(1-\alpha)A(k-2) \ ,
\end{aligned}$$

para todo inteiro $k \geq 2$. Logo, a equação (15) vale. As condições iniciais são dadas por

$$B(0) = \int_0^1 x T_\alpha^0(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

e

$$\begin{aligned}
B(1) &= \int_0^1 x T_\alpha^1(x)dx = \int_0^\alpha x\frac{x}{\alpha}dx + \int_\alpha^1 x\frac{\alpha(x-\alpha)}{1-\alpha}dx = \\
&= \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^3}{2}\right) = \\
&= \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^3}{6}\right) = \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha}{6(1-\alpha)}(2 - 3\alpha + \alpha^3) = \\
&= \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha}{6}(\alpha^2 + \alpha - 2) = \frac{\alpha}{6}(2\alpha - \alpha^2 - \alpha + 2) = \\
&= \frac{\alpha}{6}(2 + \alpha - \alpha^2) = \frac{\alpha}{6}(1+\alpha)(2-\alpha) \,.
\end{aligned}$$

e a proposição está demonstrada.

Das Proposições 2 e 3 vamos derivar a função de autocorrelação $\rho(k), k \in I\!N$, do processo $\{X_t\}_{t\in I\!N}$.

Proposição 4: *Seja $\{X_t\}_{t\in I\!N}$ o processo estocástico estacionário dado pela expressão (2). A função de autocorrelação de ordem k do processo $\{X_t\}_{t\in I\!N}$, definida na expressão (5), é dada por*

$$\rho(k) = \frac{I\!E[X_t T_\alpha^k(X_t)] - \left(\frac{1+\alpha-\alpha^2}{2(2-\alpha)}\right)^2}{\frac{(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha^2-5\alpha+5)}{12(2-\alpha)^2}} = \frac{C(k)-\mu^2}{\sigma^2}\,, \tag{16}$$

para todo $k \in I\!N$, onde

$$\mu = I\!E[X_t] = \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2(2-\alpha)}\;,\quad \sigma^2 = Var[X_t] = \frac{(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha^2-5\alpha+5)}{12(2-\alpha)^2}$$

e $C(k) = I\!E[X_t T_\alpha^k(X_t)]$ é dado pela relação de três termos

$$C(k) = \alpha^2\, c\, B(k-1) + (1-\alpha)^2 d\, B(k-2) + \alpha(1-\alpha) d\, A(k-2)\,, \tag{17}$$

para todo inteiro $k \geq 2$, com $A(k)$ dado por (14), $B(k)$ dado por (15) e as constantes c e d definidas na expressão (12). Ainda, as condições iniciais são dadas por

$$C(0) = \frac{1+\alpha^2-\alpha^3}{3(2-\alpha)} \quad e \quad C(1) = \frac{\alpha(4-\alpha-\alpha^2)}{6(2-\alpha)}.$$

Como $\rho(k) = \rho(-k)$ para todo $k < 0$, definindo $C(k) = C(-k)$ para todo $k < 0$ temos a validade da expressão (16) para todo inteiro k.

Prova: Da estacionaridade do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$, temos

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t+k}] \equiv \mathbb{E}[T_\alpha^k(X_t)]$$

e

$$Var[X_t] = Var[X_{t+k}] \equiv Var[T_\alpha^k(X_t)]\,.$$

O valor esperado do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= \int_0^1 x d\nu(x) = c\int_0^\alpha x dx + d\int_\alpha^1 x dx = \\
&= \frac{1}{\alpha(2-\alpha)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha + \frac{1}{2-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1 = \frac{\alpha^2}{2\alpha(2-\alpha)} + \frac{1-\alpha^2}{2(2-\alpha)} = \\
&= \frac{1+\alpha-\alpha^2}{2(2-\alpha)}\,.
\end{aligned}$$

O segundo momento do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] &= \int_0^1 x^2 d\nu(x) = c\int_0^\alpha x^2 dx + d\int_\alpha^1 x^2 dx = \\
&= \frac{1}{\alpha(2-\alpha)}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha + \frac{1}{2-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^1 = \frac{\alpha^2}{3(2-\alpha)} + \frac{1-\alpha^3}{3(2-\alpha)} = \\
&= \frac{1+\alpha^2-\alpha^3}{3(2-\alpha)}\,.
\end{aligned}$$

Logo, a variância do processo $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ é dada por

$$Var[X_t] = \mathbb{E}[X_t^2] - [\mathbb{E}[X_t]]^2 = \frac{1+\alpha^2-\alpha^3}{3(2-\alpha)} - \left(\frac{1+\alpha-\alpha^2}{2(2-\alpha)}\right)^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4(1+\alpha^2-\alpha^3)(2-\alpha)-3(1+\alpha-\alpha^2)^2}{12(2-\alpha)^2} = \\
&= \frac{8+8\alpha^2-12\alpha^3-4\alpha+4\alpha^4-3-6\alpha+3\alpha^2+6\alpha^3-3\alpha^4}{12(2-\alpha)^2} = \\
&= \frac{\alpha^4-6\alpha^3+11\alpha^2-10\alpha+5}{12(2-\alpha)^2} = \frac{(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha^2-5\alpha+5)}{12(2-\alpha)^2} .
\end{aligned}
$$

A função de autocorrelação de ordem k do processo $\{X_t\}_{t\in \mathbb{N}}$ é dada por

$$
\begin{aligned}
C(k) &\equiv \mathbb{E}[X_t\, T_\alpha^k(X_t)] = \int_0^1 x T_\alpha^k(x) d\nu(x) = \\
&= c\int_0^\alpha x T_\alpha^k(x)dx + d\int_\alpha^1 xT_\alpha^k(x)dx = \\
&= c\int_0^\alpha xT_\alpha^{k-1}\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)dx + d\int_\alpha^1 xT_\alpha^{k-2}\Big(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\Big)dx .
\end{aligned}
$$

A última igualdade acima vêm da Proposição 1. Por uma mudança da variável x para

$$y = \frac{x}{\alpha}$$

na primeira integral da expressão de C(k) acima e da variável x para

$$z = \frac{x-\alpha}{1-\alpha}$$

na segunda integral da expressão de C(k) acima temos

$$
\begin{aligned}
C(k) &= c\int_0^1 \alpha y T_\alpha^{k-1}(y)\alpha dy + d\int_0^1 ((1-\alpha)z+\alpha)T_\alpha^{k-2}(z)(1-\alpha)dz = \\
&= c\alpha^2\int_0^1 yT_\alpha^{k-1}(y)dy + d(1-\alpha^2)\int_0^1 zT_\alpha^{k-2}(z)dz + \\
&+ \ d\alpha(1-\alpha)\int_0^1 T_\alpha^{k-2}(z)dz = \\
&= c\alpha^2 B(k-1) + d(1-\alpha)^2B(k-2) + d\alpha(1-\alpha)A(k-2) ,
\end{aligned}
$$

para todo inteiro $k \geq 2$, onde $A(k)$ é dado por (14), $B(k)$ é dado por (15) e as constantes c e d por (12). Portanto, vale a expressão (17). Já os valores de $C(0)$ e $C(1)$ são calculados diretamente por

$$C(0) = \int_0^1 xT_\alpha^0(x)d\nu(x) = \int_0^1 x^2 d\nu(x) =$$

$$
\begin{aligned}
&= c\int_0^\alpha x^2dx + d\int_\alpha^1 x^2dx = c\frac{\alpha^3}{3} + \frac{d}{3}(1-\alpha^3) = \\
&= \frac{1}{\alpha(2-\alpha)}\frac{\alpha^3}{3} + \frac{1}{3(2-\alpha)}(1-\alpha^3) = \frac{1+\alpha^2-\alpha^3}{3(2-\alpha)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
C(1) &= \int_0^1 xT_\alpha^1(x)d\nu(x) = c\int_0^\alpha xT_\alpha(x)dx + d\int_\alpha^1 xT_\alpha(x)dx = \\
&= c\int_0^\alpha x\frac{x}{\alpha}dx + d\int_\alpha^1 x\alpha\frac{(x-\alpha)}{1-\alpha}dx = \\
&= \frac{1}{\alpha(2-\alpha)}\Big(\frac{\alpha^2}{3}\Big) + \frac{\alpha}{(2-\alpha)(1-\alpha)}\Big(\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^3}{2}\Big) = \\
&= \frac{\alpha}{3(2-\alpha)} + \frac{\alpha}{6(2-\alpha)(1-\alpha)}(2-3\alpha+\alpha^3) = \\
&= \frac{\alpha}{3(2-\alpha)} - \frac{\alpha}{6(2-\alpha)}(\alpha^2+\alpha-2) = \\
&= \frac{2\alpha-\alpha^3-\alpha^2+2\alpha}{6(2-\alpha)} = \frac{\alpha(4-\alpha-\alpha^2)}{6(2-\alpha)},
\end{aligned}
$$

e a proposição está demonstrada.

Introduziremos agora três séries de potências, a última das quais será usada no cálculo da função densidade espectral. Definimos $\varphi(z)$, $\psi(z)$ e $\gamma(z)$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \sum_{k\geq 0} A(k)z^k \\
\psi(z) &= \sum_{k\geq 0} B(k)z^k \\
\gamma(z) &= \sum_{k\geq 0} C(k)z^k\,, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

se $|z|<1$ e pelo limite radial quando $|z|=1$. Por exemplo, se $|z|=1$ então por limite radial entendemos

$$\gamma(z) = \lim_{r\uparrow 1}\gamma(rz)\,.$$

Note que $|A(k)|$, $|B(k)|$ e $|C(k)|$ são menores que 1. Logo as três séries em (18) convergem para $|z| < 1$. Na próxima proposição provaremos que o limite radial $\gamma(z) = \lim_{r\uparrow 1} \gamma(rz)$ existe, para todo z unitário e diferente de 1.

Proposição 5: *As séries de potência com coeficientes $A(k)$, $B(k)$ e $C(k)$ definidas pela expressão (18) são dadas, respectivamente, por*

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1+\alpha z(1-\alpha)}{2[(1-\alpha)z+1](1-z)}, \\
\psi(z) &= \frac{2-\alpha z(\alpha^2+\alpha-2)+6\alpha(1-\alpha)z^2\varphi(z)}{6[1-\alpha^2 z-(1-\alpha)^2 z^2]} \quad e \\
\gamma(z) &= \frac{2\alpha^2(1-\alpha)+2+\alpha z(2-\alpha-\alpha^2)}{6(2-\alpha)} + \\
&+ \left[\frac{\alpha z+(1-\alpha)^2 z^2}{2-\alpha}\right]\psi(z) + \frac{\alpha(1-\alpha)z^2}{2-\alpha}\varphi(z), \qquad (19)
\end{aligned}
$$

quando $|z| < 1$.

Antes de provarmos a Proposição 5, note que as três funções acima são analíticas em $\{z : |z| < 1+\delta\}$ a não ser por um pólo simples em 1, onde $\delta > 0$. No caso em consideração, o limite radial

$$\gamma(z) = \lim_{r\uparrow 1} \gamma(rz)$$

existe, para todo z unitário e diferente de 1, o mesmo valendo para as funções φ e ψ.

Prova: Da Proposição 2 temos a fórmula recursiva para $A(k)$, para todo inteiro $k \geq 2$, e as duas condições iniciais. Logo

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= A(0)+A(1)z+\sum_{k\geq 2}[\alpha A(k-1)+(1-\alpha)A(k-2)]z^k = \\
&= A(0)+A(1)z+\alpha\sum_{k\geq 2}A(k-1)z^k+(1-\alpha)\sum_{k\geq 2}A(k-2)z^k =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}(2-\alpha)z + \alpha z[\varphi(z) - A(0)] + (1-\alpha)z^2\varphi(z) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}z(2-\alpha) + \alpha z\varphi(z) - \frac{\alpha z}{2} + (1-\alpha)z^2\varphi(z) \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi(z) = \frac{1+\alpha z - \alpha^2 z}{2[1-\alpha z-(1-\alpha)z^2]} = \frac{1+\alpha z(1-\alpha)}{2[(1-\alpha)z+1](1-z)} \ .$$

e vale a primeira igualdade em (19).

Para provarmos a segunda igualdade em (19) consideramos a fórmula recursiva para $B(k)$, para todo inteiro $k \geq 2$, com as duas condições iniciais dadas na Proposição 3. Então,

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \sum_{k\geq 0} B(k)z^k = B(0) + B(1)z + \\
&+ \sum_{k\geq 2}[\alpha^2 B(k-1) + (1-\alpha)^2 B(k-2) + \alpha(1-\alpha)A(k-2)]z^k = \\
&= B(0) + B(1)z + \alpha^2\sum_{k\geq 2} B(k-1)z^k + \\
&+ (1-\alpha)^2\sum_{k\geq 2} B(k-2)z^k + \alpha(1-\alpha)\sum_{k\geq 2} A(k-2)z^k = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6}(1+\alpha)(2-\alpha)z + \alpha^2 z[\psi(z) - B(0)] + \\
&+ (1-\alpha)^2 z^2\psi(z) + \alpha(1-\alpha)z^2\varphi(z) = \\
&= \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{6}z(1+\alpha)(2-\alpha) + \alpha^2 z\psi(z) - \frac{\alpha^2 z}{3} + \\
&+ (1-\alpha)^2 z^2\psi(z) + \alpha(1-\alpha)z^2\varphi(z) \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{2+\alpha(1+\alpha)(2-\alpha)z - 2\alpha^2 z + 6\alpha(1-\alpha)z^2\varphi(z)}{6[1-\alpha^2 z-(1-\alpha)^2 z^2]} = \\
&= \frac{2-\alpha z(\alpha^2+\alpha-2) + 6\alpha(1-\alpha)z^2\varphi(z)}{6[1-\alpha^2 z-(1-\alpha)^2 z^2]} \ .
\end{aligned}$$

E vale a segunda igualdade em (19). Para provarmos a terceira igualdade em (19) consideramos a fórmula recursiva para $C(k)$, para todo inteiro $k \geq 2$, com as duas condições iniciais dadas na Proposição 4. Então,

$$\begin{aligned}
\gamma(z) &= \sum_{k\geq 0} C(k)z^k = C(0) + C(1)z + \sum_{k\geq 2} \alpha^2 c\, B(k-1)z^k + \\
&+ \sum_{k\geq 2} (1-\alpha)^2 d\, B(k-2) + \alpha(1-\alpha)d\, A(k-2)z^k = \\
&= C(0) + C(1)z + \alpha^2 c \sum_{k\geq 2} B(k-1)z^k + (1-\alpha)^2 d \sum_{k\geq 2} B(k-2)z^k + \\
&+ \alpha(1-\alpha)d \sum_{k\geq 2} A(k-2)z^k = \\
&= \frac{1+\alpha^2-\alpha^3}{3(2-\alpha)} + \frac{\alpha(4-\alpha-\alpha^2)z}{6(2-\alpha)} + \alpha^2 c\, z[\psi(z) - B(0)] + \\
&+ (1-\alpha)^2 d\, z^2\psi(z) + \alpha(1-\alpha)d\, z^2\varphi(z) = \\
&= \frac{2(1+\alpha^2-\alpha^3) + \alpha(4-\alpha-\alpha^2)z}{6(2-\alpha)} + \alpha^2 c\, z\psi(z) - \frac{1}{3}\alpha^2 c\, z + \\
&+ (1-\alpha)^2 d\, z^2\psi(z) + \alpha(1-\alpha)d\, z^2\varphi(z) = \\
&= \frac{2(1+\alpha^2-\alpha^3) + \alpha z(2-\alpha-\alpha^2)}{6(2-\alpha)} + \left[\frac{\alpha z + (1-\alpha)^2 z^2}{2-\alpha}\right]\psi(z) + \\
&+ \frac{\alpha(1-\alpha)z^2}{2-\alpha}\varphi(z)\ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\gamma(z) &= \frac{2\alpha^2(1-\alpha) + 2 + \alpha z(2-\alpha-\alpha^2)}{6(2-\alpha)} + \\
&+ \frac{1}{2-\alpha}\Big[(\alpha z + (1-\alpha)^2 z^2)\psi(z) + \alpha(1-\alpha)z^2\varphi(z)\Big]\ ,
\end{aligned}$$

e a proposição está demonstrada.

Relacionemos a função γ com a função densidade espectral.

Lema 1: *A função*

$$\sum_{k\geq 0}(C(k)-\mu^2)z^k$$

é contínua em $\{z : |z| \leq 1, z \neq 1\}$.

Prova: Se $|z| < 1$, as séries $\sum_{k\geq 0} C(k)z^k$ e $\sum_{k\geq 0}\mu^2 z^k$ convergem e podemos dividir a série acima em

$$\sum_{k\geq 0}(C(k)-\mu^2)z^k = \sum_{k\geq 0} C(k)z^k - \sum_{k\geq 0}\mu^2 z^k =$$

$$= \gamma(z) - \mu^2\frac{1}{1-z} \; .$$

As duas funções acima estão bem definidas e são contínuas no conjunto $\{z : |z| \leq 1, z \neq 1\}$. Logo, redefinindo

$$\sum_{k\geq 0}(C(k)-\mu^2)z^k = \gamma(z) - \mu^2\frac{1}{1-z} \; ,$$

quando $|z| = 1$, provamos o Lema 1.

Teorema 1: *A função densidade espectral*

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda}\rho(k)$$

é dada por

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}(\gamma(e^{i\lambda}) + \gamma(e^{-i\lambda}) - C(0)) \; ,$$

para todo $\lambda \in (0, 2\pi)$*, onde* γ *é dado pela Proposição 5,* $C(0) = \mathbb{E}[X_t^2]$ *e* $\sigma^2 = Var[X_t]$.

Prova: Considere $z = e^{-i\lambda}$ e $\lambda \in (0, 2\pi)$. Como

$$\rho(k) = \frac{c(k) - \mu^2}{\sigma^2} ,$$

para todo k inteiro, temos

$$2\pi\sigma^2 f_X(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (C(k) - \mu^2)z^k =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(C(k) - \mu^2)z^k + \sum_{k\leq 0}(C(k) - \mu^2)z^k - (C(0) - \mu^2) . \tag{20}$$

Pelo Lema 1, a primeira série acima é dada por

$$\sum_{k\geq 0}(C(k) - \mu^2)z^k = \lim_{r\uparrow 1} \sum_{k\geq 0}(C(k) - \mu^2)(rz)^k .$$

Como $r < 1$, as séries $\sum_{k\geq 0} C(k)(rz)^k$ e $\sum_{k\geq 0} \mu^2(rz)^k$ convergem, e portanto podemos dividir o somatório acima em

$$\sum_{k\geq 0}(C(k) - \mu^2)(rz)^k = \sum_{k\geq 0} C(k)(rz)^k - \sum_{k\geq 0} \mu^2(rz)^k =$$

$$= \gamma(rz) - \mu^2 \frac{1}{1 - rz} .$$

Logo,

$$\sum_{k\geq 0}(C(k) - \mu^2)z^k = \lim_{r\uparrow 1} \left\{ \gamma(rz) - \mu^2 \frac{1}{1 - rz} \right\} =$$

$$= \gamma(z) - \mu^2 \frac{1}{1 - z} . \tag{21}$$

Examinando a segunda série em (20), temos que:

$$\sum_{k\leq 0}(C(k) - \mu^2)z^k = \sum_{k\geq 0}(C(-k) - \mu^2)z^{-k}) =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(C(k) - \mu^2)(z^{-1})^k = \lim_{r\uparrow 1} \sum_{k\geq 0}(C(k) - \mu^2)(rz^{-1})^k ,$$

onde a segunda igualdade vêm do fato de $C(-k) = C(k)$, $\forall k \in I\!N$, e a terceira vêm do Lema 1. Como $r > 1$, as séries $\sum_{k\geq 0} C(k)(rz^{-1})^k$ e

$\sum_{k\geq 0}\mu^2(rz^{-1})^k$ convergem e novamente podemos dividir o somatório acima em

$$\sum_{k\geq 0}(C(k)-\mu^2)(rz^{-1})^k = \sum_{k\geq 0}C(k)(rz^{-1})^k - \mu^2\sum_{k\geq 0}(rz^{-1})^k =$$

$$= \gamma(rz^{-1}) - \mu^2\frac{1}{1-rz^{-1}} \ .$$

Logo,

$$\sum_{k\leq 0}(C(k)-\mu^2)z^k = \lim_{r\uparrow 1}\left\{\gamma(rz^{-1}) - \mu^2\frac{1}{1-rz^{-1}}\right\} =$$

$$= \gamma(z^{-1}) - \mu^2\frac{1}{1-z^{-1}} \ . \tag{22}$$

Portanto, substituindo (21) e (22) em (20) temos

$$2\pi\sigma^2 f_X(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(C(k)-\mu^2)z^k =$$

$$= \gamma(z) + \gamma(z^{-1}) - \mu^2\left\{\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z^{-1}}\right\} - C(0) + \mu^2 =$$

$$= \gamma(z) + \gamma(z^{-1}) - C(0) =$$

$$= \gamma(e^{-i\lambda}) + \gamma(e^{i\lambda}) - C(0) \ ,$$

e o Teorema 1 está demonstrado.

Observação: Note que um estimador de α para a série temporal $X_t, t \in \{1, ..., N\}$, pode ser obtido da Proposição 4.

Isto segue do fato de que

$$\frac{\alpha(4-\alpha-\alpha^2)}{6(2-\alpha)} = C(1) = \int xT(x)d\nu(x).$$

Usando o Teorema Ergódico de Birkhoff podemos estimar α resolvendo a equação

$$\hat{C}(1) \equiv \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}X_tX_{t+1} = \frac{\alpha(4-\alpha-\alpha^2)}{6(2-\alpha)},$$

na variável α.

Bibliografia

1. Bogomolny, E. e Carioli, M. (1993). Quantum Maps from Transfer Operators. *Physica D*, **67**, 88-112.

2. Brockwell, P. J. e Davis, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*, 2nd. edn. New York: Springer-Verlag.

3. Lasota, A. e Yorke, J. A. (1973). On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **186**, 481-488.

4. Lasota, A. e Mackey, M. (1994). *Chaos, Fractals and Noise*, 2nd. edn. New York: Springer-Verlag.

5. Lopes, A. e Lopes, S. (1998). Parametric Estimation and Spectral Analysis of Piecewise Linear Maps of the Interval. *Advances in Applied Probability Journal*, **30**, No 3.

6. Lopes, A., Lopes, S. e Souza, R. R. (1997a). On the Spectral Density of a Class of Chaotic Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, **18**, No. 5, 465-474.

7. Lopes, A., Lopes, S. e Souza, R. (1996). Spectral Analysis of Chaotic Transformations. *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, **10**, No. 2, 151-179.

8. Lopes, A., Lopes, S. e Souza, R. (1997b). Spectral Analysis of Expanding One-Dimensional Chaotic Transformations. *Random & Computational Dynamics Journal*, **3**, No. 1, 107-117.

9. Parry, W. e Pollicott, M. (1990). Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics. *Asterisque*, **187-188**.

10. Robinson, C. (1995). *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. Boca Raton: CRC Press.