

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

UM PROBLEMA DE DIRICHLET NÃO LINEAR
NA BOLA UNITÁRIA DO \mathbb{R}^N E SUAS
APLICAÇÕES

ROGÉRIO RICARDO STEFFENON

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática
como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Porto Alegre, Maio de 1992

Dedico a presente dissertação ao orientador e amigo Prof. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, pela orientação segura, paciente e dedicada sem a qual este trabalho não se realizaria.

UNIGS
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
BIBLIOTECA SETORIAL DE MATEMÁTICA

Deixo aqui meus agradecimentos às pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram para eu ter chegado até aqui. É provável que omissões graves ocorram. Peço, desde já, desculpas aos omitidos.

Agradeço:

Aos Professores Paulo R. de A. Zíngano e Pedro Nonvosad por terem aceito prontamente fazer parte da banca de tese.

Aos meus colegas na Matemática, em particular, ao Leonardo, ao Claus, ao Alvino e à Virgínia.

Aos amigos cefavianos, em particular, ao Fábio, ao Dimas, ao Auri, ao Sérgio, ao Ulisses, ao José Henrique e ao Pedro.

À minha esposa Carla que me incentivou bastante, principalmente na reta final.

Aos amigos Rosalvo e Marines pelo trabalho de digitação da tese.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o problema de Dirichlet não linear

$$\begin{cases} \Delta u + b(|x|)f(u) = 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

onde B é a bola unitária de \mathbf{R}^N , com $N \geq 3$. O exemplo típico corresponde ao caso particular em que $b(|x|) = |x|^l$ e $f(u) = |u|^{\tau-1}u$, com $l \geq 0$ e $\tau > 1$. Nesse caso, provamos que o problema possui uma solução clássica, positiva, radialmente simétrica para $\tau < \frac{N+2+2l}{N-2}$ e que não possui solução para $\tau \geq \frac{N+2+2l}{N-2}$. A solução do problema é obtida usando um método variacional, procurando um ponto crítico de um funcional. Na obtenção desse ponto crítico é usado o conhecido Teorema da Passagem pela Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz.

ABSTRACT

We study the nonlinear Dirichlet problem

$$\begin{cases} \Delta u + b(|x|)f(u) = 0 & \text{on } B \\ u = 0 & \text{on } \partial B, \end{cases}$$

where B is the unit ball of \mathbf{R}^N , with $N \geq 3$. The typical example corresponds to the case $b(|x|) = |x|^l$ and $f(u) = |u|^{\tau-1}u$, with $l \geq 0$ and $\tau > 1$. In this case we prove that the above problem has a classical positive radially symmetric solution if $\tau < \frac{N+2+2l}{N-2}$ and has no solution if $\tau \geq \frac{N+2+2l}{N-2}$. The solution is obtained by a variational method, searching for a critical point of a functional. To this end we use the well known Mountain Pass Theorem of Ambrosetti and Rabinowitz.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
Capítulo 1 - PRELIMINARES	6
Capítulo 2 - O PRINCÍPIO DO MÁXIMO CLÁSSICO	12
Capítulo 3 - SIMETRIA DA SOLUÇÃO POSITIVA DO PROBLEMA DE DIRICHLET	20
Capítulo 4 - IDENTIDADE DE POHOZAEV	30
Capítulo 5 - UM PROBLEMA DE DIRICHLET NÃO LINEAR NA BOLA UNITÁRIA DO \mathbf{R}^N	38
APÊNDICE	51
REFERÊNCIAS	59

INTRODUÇÃO

No presente trabalho vamos estudar o problema de Dirichlet não linear

$$(0.1) \quad \begin{cases} \Delta u + b(|x|)f(u) = 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

onde B é a bola unitária de \mathbf{R}^N e sobre b e f imporemos algumas condições. Mostraremos que o problema (0.1) possui uma solução positiva, radialmente simétrica.

O exemplo típico corresponde ao caso particular em que $b(|x|) = |x|^l$ e $f(u) = |u|^{\tau-1}u$, com $l \geq 0$ e $\tau > 1$. Nesse caso, teremos o problema (0.1) na forma

$$(0.2) \quad \begin{cases} \Delta u + |x|^l |u|^{\tau-1}u = 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

com $N \geq 2$, $l \geq 0$, $\tau > 1$.

Encontrar uma solução radial de (0.2), onde $r = |x|$, é equivalente a resolver o seguinte problema de contorno para uma equação diferencial ordinária:

$$(0.3) \quad \begin{cases} r^{1-N} D_r (r^{N-1} D_r u) + r^l |u|^{\tau-1}u = 0, & \text{para } r \in (0, 1) \\ D_r u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 0. \end{cases}$$

A equação da forma (0.3) com $l = 0$ é conhecida na astrofísica desde o início deste século como sendo a equação de Lane-Emden.

Consideremos o modelo de estrela em que a propagação da energia se dá preferencialmente por convecção e não por irradiação. Suponhamos ainda que a estrela está em equilíbrio gravitacional e convectivo. Por equilíbrio convectivo se entende que as superfícies de nível da densidade e da temperatura se mantêm constantes. Nestas condições sabe-se, de [C], que estamos diante de um processo adiabático e politrópico, valendo as seguintes equações :

$$(0.4) \quad D_r M_r = 4\pi r^2 \rho, \quad P = K \rho^\gamma$$

$$D_r P = -\frac{GM_r \rho}{r^2}, \quad P = \frac{R}{\mu} \rho T,$$

onde P é a pressão, ρ é a densidade, T é a temperatura, M_r é a massa no interior da esfera de raio r , μ é o peso molecular, G é a constante gravitacional, γ , R e K são especificadas em [C].

Reduzimos estas duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, eliminando M_r , P e ρ e usando T como variável dependente:

$$\rho = \left(\frac{R}{\mu} \frac{1}{K}\right)^{1/(\gamma-1)} T^{1/(\gamma-1)}, \quad P = \left(\frac{R}{\mu}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{1}{K}\right)^{1/(\gamma-1)} T^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Além disso,

$$D_r P = \frac{R}{\mu} D_r(\rho T) = -\frac{GM_r \rho}{r^2}$$

e da primeira equação de (0.4) obtemos

$$D_r(r^2 D_r T) = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu}{R} 4\pi G \left(\frac{R}{\mu} \frac{1}{K}\right)^{1/(\gamma-1)} r^2 T^{1/(\gamma-1)}.$$

Introduzimos uma nova variável y , definida por $T = yT_c$, onde T_c é a temperatura no centro da esfera. Deste modo, y vale 1 no centro e $y < 1$ no restante da esfera. Introduzindo nova variável x , dada por:

$$x^2 = r^2 \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu}{R} 4\pi G \left(\frac{R}{\mu} \frac{1}{K}\right)^{1/(\gamma-1)} T_c^{(2-\gamma)/(\gamma-1)},$$

obtemos a equação

$$D_x(x^2 D_x y) + x^2 y^{1/(\gamma-1)} = 0.$$

A razão pela qual transformamos a equação do equilíbrio nessa forma é para obtermos uma expressão que contenha somente o parâmetro γ . É usual tomar $\gamma = 1 + (1/n)$, onde n é chamado de índice politrópico.

A equação diferencial fundamental que uma esfera gasosa em equilíbrio convectivo deve obedecer é

$$x^{-2}D_x(x^2D_xy) + y^n = 0.$$

Esta expressão é chamada Equação de Emden e corresponde à equação (0.2) com u radialmente simétrica, $l = 0$ e $\tau = n$.

Em 1930, Matukuma, um astrofísico, propôs o seguinte modelo matemático para descrever a dinâmica de aglomerados globulares de estrelas:

$$(0.5) \quad \Delta u + (1 + |x|^2)^{-1}u^p = 0,$$

onde $x \in \mathbf{R}^3$, $p > 1$, u representa o potencial gravitacional (portanto $u > 0$), $\rho = -(4\pi)^{-1}\Delta u = \{4\pi(1 + |x|^2)\}^{-1}u^p$ representa a densidade e $\int \int \int \rho dx$ representa a massa total. Já que o aglomerado globular possui simetria radial, estamos interessados em soluções positivas radialmente simétricas de (0.5).

Em 1973, Henon propôs a equação (0.3) com $l \neq 0$ para descrever a estrutura estelar esférica e estudou sua estabilidade através de computação numérica. Além disso, o caso $N \geq 3$, $l = 0$ e $\tau = (N + 2)/(N - 2)$ é relevante para o Problema de Yamabe em Geometria Diferencial. Dada uma variedade riemanniana M com uma métrica g_0 , e de curvatura R_0 e dada uma função real R definida em M , o Problema de Yamabe consiste em procurar uma nova métrica g em M que seja pontualmente conforme a g_0 , isto é, da forma $g = wg_0$ onde $w > 0$ é uma função real C^∞ , tal que, com a nova métrica, a curvatura escalar seja R . Escrevendo $w = u^{4/(N-2)}$, vale a seguinte relação :

$$(0.6) \quad L_0u = -\gamma_0\Delta_0u + R_0u = Ru^\alpha,$$

onde Δ_0 é o laplaciano com respeito a g_0 , $\gamma_0 = \frac{4(N-1)}{N-2}$, $\alpha = \frac{N+2}{N-2}$ e N é a dimensão da variedade riemanniana M . Como caso particular, podemos considerar (M, g) como sendo o \mathbf{R}^N com a métrica usual. Nesse caso $\Delta_0 = \Delta$ é o laplaciano usual, $R_0 = 0$ e reduzimos a equação (0.6) à seguinte equação :

$$(0.7) \quad \frac{4(N-1)}{N-2}\Delta u + Ku^{(N+2)/(N-2)} = 0.$$

Fazendo $u = \alpha v$, obtemos

$$\frac{4(N-1)}{N-2} \alpha \Delta v + K \alpha^{(N+2)/(N-2)} v^{(N+2)/(N-2)} = 0.$$

Daí vemos que existe $\alpha > 0$ tal que $\frac{4(N-1)}{N-2} \alpha = \alpha^{(N+2)/(N-2)}$, dado por $\alpha = \left[\frac{4(N-1)}{N-2} \right]^{(N-2)/4}$, donde basta estudarmos a equação

$$\Delta u + K(x) u^{(N+2)/(N-2)} = 0.$$

Para resolver o problema (0.2) vamos usar um método variacional, ou seja, consideraremos um funcional $J : E \rightarrow \mathbf{R}$ da forma

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 dx - \int_B |x|^t F(u) dx,$$

onde E é o completamento das funções radialmente simétricas em $C_c^\infty(B)$ e

$$F(t) = \int_0^t |s|^\tau ds \quad \left(F(u) = \frac{|u|^\tau u}{\tau + 1} \right)$$

e procuraremos um ponto crítico de J , isto é, $u \in E$ tal que $J'(u) = 0$. Neste caso, u será uma solução fraca ou generalizada para o problema (0.2), isto é,

$$\int_B \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_B |x|^t |u|^{\tau-1} u v dx, \forall v \in E.$$

Posteriormente será verificado que a solução fraca de (0.2) é na verdade uma solução clássica.

Para a obtenção do ponto crítico de J , o principal ingrediente será o bem conhecido Teorema da Passagem pela Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz.

A presente dissertação é dividida em cinco capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo encontraremos definições e resultados básicos dos elementos envolvidos na dissertação, como por exemplo, o Teorema de Imersão de Sobolev, o Teorema de Rellich-Kondrachov e as aplicações de Nemytskii, entre outros. No segundo capítulo obtemos uma série de resultados referentes a princípios do máximo para operadores diferenciais uniformemente elípticos lineares da forma

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^N b^i(x) D_i u + c(x)u,$$

onde $a^{ij} = a^{ji}$ para $i, j = 1, \dots, N$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ (Ω aberto), com $N \geq 2$ e existem constantes positivas λ e Λ tais que

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Dentre os princípios do máximo que consideraremos neste capítulo está o Princípio do Máximo de Hopf que é bastante conhecido no caso $c(x) \geq 0$ (ver [PW]) e que será provado também para o caso $c(x) < 0$.

No terceiro capítulo será provado que qualquer solução u do problema

$$(0.8) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u, r) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B \\ u \geq 0, u \not\equiv 0 & \text{em } B, \end{cases}$$

é radialmente simétrica, se f e $D_u f$ são contínuas e f decrescente em r . No quarto capítulo estabeleceremos alguns resultados referentes à não existência de soluções não triviais para o problema (0.2). Para isso será provada a Identidade de Pohozaev. No quinto capítulo trataremos o problema (0.1) e provaremos que ele possui uma solução clássica, positiva, radialmente simétrica para

$$\tau < \frac{N + 2 + 2l}{N - 2}.$$

Para isso usaremos o Teorema da Passagem pela Montanha, ao qual dedicamos o apêndice do presente trabalho. Além desse teorema, usaremos outros resultados para achar a solução radial clássica do problema (0.1), como por exemplo, o Lema Radial, o Lema de Compacidade e alguns resultados importantes da Teoria da Regularidade Elíptica.

1 - PRELIMINARES

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, definimos $C_c^\infty(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, cujo suporte é compacto. Podemos escrever $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, onde $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$ e K_n é compacto para todo n . Dado $K \subset \Omega$ compacto, temos que

$$\mathbf{D}_K = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subset K\}$$

é um espaço de Fréchet com as semi-normas

$$p_n(\varphi) = \sup_{x \in K; |\alpha| \leq n} |D^\alpha \varphi(x)|,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ é uma N -upla de números inteiros não negativos com $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ e

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Deste modo, obtemos $C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{D}_{K_n}$, onde $\mathbf{D}_{K_n} \subset \text{int}\mathbf{D}_{K_{n+1}}$. Cada \mathbf{D}_{K_n} é de Fréchet e a topologia que $\mathbf{D}_{K_{n+1}}$ induz em \mathbf{D}_{K_n} coincide com a topologia original de \mathbf{D}_{K_n} . Vamos colocar em $C_c^\infty(\Omega)$ a maior topologia localmente convexa que induz sobre os \mathbf{D}_{K_n} a topologia original. Anotamos por $\mathbf{D}(\Omega)$ o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ com esta topologia. Denotamos por $\mathbf{D}'(\Omega)$ ao conjunto das distribuições em Ω , ou seja, $T \in \mathbf{D}'(\Omega)$ se, e só se, $T : \mathbf{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo. Denotamos, daqui em diante, $D_j u$ como sendo a derivada parcial da função u em relação à j -ésima variável. Dadas $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$, dizemos que v é a derivada parcial de u no sentido das distribuições e denotamos por $v = D_j u$ se, e somente se,

$$\int_{\Omega} u D_j \varphi dx = - \int_{\Omega} \varphi v dx,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Antes de enunciarmos alguns resultados importantes, definimos os

seguintes espaços:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D_j u \in L^2(\Omega) \text{ no sentido das distribuições} \}.$$

O produto interno em $H^1(\Omega)$ é dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N D_j u \cdot D_j \bar{v} dx$$

que induz a norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^N \|D_j u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$H_0^1(\Omega)$ é o fecho das funções $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

$$H^{-1}(\Omega) = \{T \in \mathbf{D}'(\Omega) \mid T = f_0 + \sum_{j=1}^N D_j f_j, f_j \in L^2(\Omega)\}.$$

Se Ω for limitado, temos que a norma definida acima é equivalente à norma

$$\|u\|_0 = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

em $H_0^1(\Omega)$. Neste caso, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado. Então a aplicação*

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$$

é uma isometria de $H_0^1(\Omega)$ sobre $H^{-1}(\Omega)$.

No caso de Ω não ser limitado, a proposição continua valendo se substituirmos $-\Delta$ por $1 - \Delta$ e usarmos a norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Outro resultado importante é a proposição abaixo, que é um caso particular do Teorema de Imersão de Sobolev.

Proposição 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, com $N \geq 3$. A inclusão*

$$I : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^{2N/(N-2)}(\Omega)$$

é contínua.

Corolário 1.3. *A aplicação adjunta da inclusão acima*

$$I' : (L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega))' \rightarrow (H_0^1(\Omega))'$$

é contínua, ou seja,

$$I' : L^{2N/(N+2)}(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

é contínua.

Proposição 1.4. (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aberto limitado, com $N \geq 3$. Então qualquer que seja $q < 2N/(N-2)$, o espaço $H_0^1(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^q(\Omega)$.*

Embora aqui $N \geq 3$ sempre temos que, para $N = 2$, o Teorema de Rellich nos diz que a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta se Ω for limitado.

Nosso próximo objetivo é expor alguns resultados referentes às aplicações de Nemytskii.

Definição . Seja $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aberto, com $N \geq 1$. Uma função $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é dita uma função de Carathéodory se:

- (a) para cada $s \in \mathbf{R}$ fixo, a função $x \rightarrow f(x, s)$ é mensurável à Lebesgue em Ω ;
- (b) para $x \in \Omega$ fixo, a função $s \rightarrow f(x, s)$ é contínua em \mathbf{R} .

Seja \mathbf{M} o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. Deste modo, uma função de Carathéodory f define uma aplicação $N_f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, dada por $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$, que é chamada uma aplicação de Nemytskii. Estamos interessados em saber quando N_f aplica um certo espaço L^p num outro espaço L^q .

Proposição 1.5. *Suponhamos que existam uma constante $c > 0$, uma função*

$b(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, e $r > 0$ tais que $|f(x, s)| \leq c|s|^r + b(x)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbf{R}$.

Então :

(a) N_f aplica $L^{qr}(\Omega)$ sobre $L^q(\Omega)$;

(b) N_f é contínua e limitada (isto é, aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados).

No entanto, precisamos de certas noções de diferenciabilidade para estas aplicações de Nemytskii. Para isto, vamos utilizar a seguinte definição :

Definição . Sejam E um espaço de Banach real e $J : E \rightarrow \mathbf{R}$ um funcional. Dizemos que J é Fréchet-diferenciável em $u \in E$ se existir uma aplicação linear contínua $L = L(u) : E \rightarrow \mathbf{R}$ satisfazendo: para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que

$$|J(u + v) - Ju - Lv| \leq \varepsilon \|v\|$$

para todo $\|v\| \leq \delta$. A aplicação L é usualmente denotada por $J'(u)$. Se J for Fréchet-diferenciável em todos os pontos, dizemos que J é continuamente Fréchet-diferenciável se a aplicação $J' : E \rightarrow E'$ for contínua. Notemos que $J'(u) \in E'$. Um ponto $u \in E$ é dito ponto crítico de J se $J'(u) = 0$, isto é, $J'(u)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in E$. O valor de J no ponto crítico u é chamado valor crítico de J .

Seja $f(x, s)$ uma função de Carathéodory para a qual existem constantes $m > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e uma função $b(x) \in L^{p/m}(\Omega)$ tais que $|f(x, s)| \leq c|s|^m + b(x)$. Denotando por

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau) d\tau,$$

obtemos que $|F(x, s)| \leq c_1|s|^{m+1} + c(x)$, onde $c(x) \in L^{p/(m+1)}(\Omega)$. Então

$$N_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^{p/m}(\Omega) \quad \text{e} \quad N_F : L^p(\Omega) \rightarrow L^{p/(m+1)}(\Omega).$$

Em particular, se $p = m + 1$ as desigualdades acima tornam-se

$$(1.1) \quad |f(x, s)| \leq c|s|^{p-1} + b(x), \quad b(x) \in L^{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{e}$$

$$|F(x, s)| \leq c_1|s|^p + c(x), \quad c(x) \in L^1(\Omega)$$

e temos que $N_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ e $N_F : L^p(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$.

Proposição 1.6. *Suponhamos que valem as condições (1.1). Então*

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$$

define um funcional contínuo $\Psi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ que é continuamente Fréchet-diferenciável e vale

$$\Psi'(u).v = \int_{\Omega} f(x, u)v \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Consideremos o problema de Dirichlet

$$(1.2) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em \mathbf{R}^N , $N \geq 2$ e $\partial\Omega$ denota sua fronteira. Suponhamos que $f : \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função de Carathéodory. Entendemos por solução clássica de (1.2) como sendo uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ que satisfaz a equação em cada ponto $x \in \Omega$ e que se anula na fronteira. Entendemos por solução generalizada ou fraca de (1.2) como sendo uma função de $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz (1.2) no sentido fraco, isto é,

$$(1.3) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x, u)v \, dx, \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Vemos que, para (1.3) estar bem definida, a função $f(x, s)$ deve obedecer algumas condições de crescimento na variável s para garantir que $f(x, u)v$ seja integrável. Não especificaremos quais são, já que uma hipótese mais forte será suposta, quando olharmos para solução generalizada formulamos (1.2) como sendo um problema com ponto crítico de um funcional. A saber, consideramos

$$(1.4) \quad \Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

$$\text{onde } F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau) d\tau.$$

Para termos $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ bem definido exigimos que $F(x, u) \in L^1(\Omega)$ para $u \in H_0^1(\Omega)$. Devido ao Teorema de Imersão de Sobolev, $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^p(\Omega)$ se $1 \leq p \leq (2N)/(N-2)$ se $N \geq 3$ e $1 \leq p < \infty$ se $N = 2$. Assim, usando a Proposição 1.6 exigimos que f satisfaça a condição

$$(1.5) \quad |f(x, s)| \leq c|s|^{p-1} + b(x),$$

onde p satisfaz as condições de Imersão de Sobolev e $b(x) \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Usando, novamente, a Proposição 1.6 concluímos que:

Se f satisfaz a condição (1.5) então o funcional Φ definido em (1.4) é continuamente Fréchet-diferenciável, isto é, $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega); \mathbf{R})$, e vale

$$(1.6) \quad \Phi'(u).v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2 - O PRINCÍPIO DO MÁXIMO CLÁSSICO

O propósito deste capítulo é estender os princípios do máximo clássicos para o operador de Laplace para operadores diferenciais uniformemente elípticos lineares da forma

$$(2.1) \quad Lu = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^N b^i(x) D_i u + c(x)u,$$

onde $a^{ij} = a^{ji}$ para $i, j = 1, \dots, N$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$ e existem constantes positivas λ e Λ tais que,

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^N$. A menos de menção contrária, supomos que a^{ij}, b^i, c são funções limitadas e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

É importante salientar que o princípio do máximo é uma característica das equações elípticas de segunda ordem que as distingue das equações de ordens superiores e dos sistemas de equações. Para muitas aplicações é suficiente termos o seguinte princípio do máximo fraco.

Teorema 2.1 (Princípio do Máximo Fraco). *Seja L um operador da forma (2.1) num domínio limitado Ω . Suponhamos que*

$$(2.2) \quad Lu \leq 0 \quad (\geq 0) \quad \text{em } \Omega, \quad c = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Então o máximo (mínimo) de u em $\bar{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$, isto é,

$$(2.3) \quad \sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

É evidente que a conclusão continua válida se $a^{ij}, b^i \in C^0(\Omega)$. Também, se u não for contínua em $\bar{\Omega}$, a conclusão (2.3) pode ser substituída por

$$(2.4) \quad \sup_{\Omega} u = \limsup_{x \rightarrow \partial\Omega} u(x) \quad (\inf_{\Omega} u = \liminf_{x \rightarrow \partial\Omega} u(x)).$$

Demonstração . De fato, se $Lu < 0$ em Ω então vale o princípio do máximo forte, isto é, u não pode assumir máximo no interior. Suponhamos x_0 ponto de máximo de u com $x_0 \in \Omega$. Neste caso temos que $Du(x_0) = 0$ e a matriz Hessiana $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)]$ é não positiva. Mas, como L é uniformemente elíptico, a matriz $[a^{ij}(x_0)]$ é positiva. Conseqüentemente

$$Lu(x_0) = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x_0) D_{ij}u(x_0) \geq 0,$$

conforme observação após a demonstração, contradizendo $Lu < 0$. Consideremos agora o caso geral, ou seja, $Lu \leq 0$. Como b^i é limitado para $i = 1, \dots, N$, então, já que $a^{11} \geq \lambda$, existe a constante suficientemente grande γ para a qual

$$Le^{\gamma x_1} = (-\gamma^2 a^{11} + \gamma b^1) e^{\gamma x_1} \leq -\lambda(\gamma^2 - \gamma b^0) < 0.$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, $L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) < 0$, donde

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon e^{\gamma x_1})$$

pelo que vimos acima. Fazendo ε tender a zero, vemos que

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \diamond$$

Observação 2.2. Vamos demonstrar um resultado elementar de Álgebra Linear utilizado na prova do teorema acima. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes simétricas reais $N \times N$ não negativas. Então

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij} b_{ij} \geq 0.$$

Demonstração .

1º Caso. A é uma matriz diagonal. Neste caso

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

com $\lambda_j = \langle Ae_j, e_j \rangle \geq 0$. Da mesma forma temos $b_{jj} = \langle Be_j, e_j \rangle \geq 0$. Logo vemos que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}b_{ij} = \sum_{j=1}^N \lambda_j b_{jj} \geq 0.$$

2º Caso (geral). A é uma matriz simétrica. Neste caso A é diagonalizável numa base ortonormal, ou seja, existe Q matriz inversível tal que $Q^* = Q^{-1}$ e $A = Q^*DQ$ com D diagonal. Como A é não negativa, todo autovalor é não negativo pois se $Av = \lambda v$ então $0 \leq \langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$, donde $\lambda \geq 0$. Logo $A = Q^*DQ$ com

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

e $\lambda_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, N$. Seja $(c_{ij}) = C = AB^*$. Então

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik}b_{kj}^* = \sum_{k=1}^N a_{ik}b_{jk}, \text{ donde } c_{ii} = \sum_{k=1}^N a_{ik}b_{ik}.$$

Daí obtemos que

$$\text{tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^N c_{ii} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}b_{ij}$$

Em nosso caso $B = B^*$. Mas $\text{tr}(AB) = \text{tr}(Q^*DQB) = \text{tr}(DQBQ^*)$, pois $\text{tr}(RS) = \text{tr}(SR)$ para todas as matrizes R, S $N \times N$. Basta verificar que QBQ^* é não negativa e recaímos no 1º Caso. Porém, $\langle (QBQ^*)x, x \rangle = \langle B(Q^*x), Q^*x \rangle \geq 0$. Além disso, QBQ^* é simétrica, pois $(QBQ^*)^* = (Q^*)^*B^*Q^* = QBQ^*$. Logo QBQ^* é não negativa. \diamond

Observação 2.3. É claro, da demonstração do Teorema 2.1, que ele continua válido sob a hipótese fraca de que a matriz de coeficientes $[a^{ij}]$ é não negativa e que para algum k o quociente $|b^k|/a^{kk}$ é localmente limitado.

É conveniente introduzir a seguinte terminologia, sugerida pelo princípio do máximo: uma função u satisfazendo $Lu = 0$ ($\leq 0, \geq 0$) em Ω é uma solução (subsolução, supersolução) de $Lu = 0$ em Ω . Quando L é o laplaciano estes termos correspondem respectivamente às funções harmônica, sub-harmônica e super-harmônica.

Suponhamos, mais geralmente, que $c \geq 0$ em Ω . Considerando o subconjunto $\Omega^+ \subset \Omega$ em que $u > 0$, vemos que se $Lu \leq 0$ em Ω , então

$$L_0 u = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^N b^i D_i u \leq -cu \leq 0$$

em Ω^+ , donde o máximo de u em $\bar{\Omega}^+$ deve ser atingido em $\partial\bar{\Omega}^+$ e portanto também em $\partial\Omega$. Assim, escrevendo $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$, obtemos

Corolário 2.4. *Seja L um operador da forma (2.1) num domínio limitado Ω . Suponhamos que, em Ω ,*

$$(2.5) \quad Lu \leq 0 \ (\geq 0), \quad c \geq 0.$$

Então

$$(2.6) \quad \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Se $Lu = 0$ em Ω , então

$$(2.7) \quad \sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Neste corolário, a condição $c \geq 0$ não pode ser relaxada para admitir $c < 0$, como é evidente da existência de autovalores negativos K para o problema: $-\Delta u + Ku = 0$ em Ω , $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Uma aplicação imediata e importante do princípio do máximo fraco é o problema de unicidade e dependência contínua de soluções com valores de fronteira. Do Corolário 2.4 segue automaticamente um resultado de unicidade para o problema de Dirichlet clássico para operadores L .

Teorema 2.5. *Seja L um operador da forma (2.1) em Ω , com $c \geq 0$ em Ω . Suponhamos que u e v são funções em $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, satisfazendo $Lu = Lv$ em Ω , $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u = v$ em Ω .*

Embora o princípio do máximo fraco seja suficiente para a maioria das aplicações, é, muitas vezes, necessário termos a forma forte que exclui a existência de máximos interiores não triviais.

Devemos obter um resultado semelhante para operadores uniformemente elípticos localmente, fazendo uso do seguinte lema de ponto na fronteira. O domínio Ω é dito satisfazer uma condição esférica interior em $x_0 \in \partial\Omega$ se existir uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$.

Observação 2.6. Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u \geq 0$, $x_0 \in \partial\Omega$ e $u(x_0) = 0$ então $D_\nu u(x_0) \leq 0$. O lema abaixo reforça esta desigualdade se $Lu \geq 0$.

Lema 2.7. *Suponhamos L um operador da forma (2.1), $c = 0$ e $Lu \geq 0$ em Ω . Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

(i) *u é contínua em x_0 ;*

(ii) *$u(x_0) < u(x) \forall x \in \Omega$;*

(iii) *$\partial\Omega$ satisfaz uma condição esférica interior em x_0 . Então a derivada normal exterior de u em x_0 , se existir, satisfaz a desigualdade estrita*

$$(2.8) \quad D_\nu u(x_0) < 0.$$

Se $c \geq 0$, as mesmas conclusões valem desde que $u(x_0) \leq 0$.

Demonstração . Já que Ω satisfaz uma condição esférica interior em x_0 , existe uma bola $B = B_R(y) \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$. Para $0 < \rho < R$, introduzimos uma função auxiliar v , definindo $v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$, onde $r = |x - y| > \rho$ e α é uma constante positiva ainda a determinar. Cálculos diretos nos dão

$$\begin{aligned}
Lv(x) &= e^{-\alpha r^2} \left[-4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) + 2\alpha \sum_{i=1}^N (a^{ii} - b^i(x_i - y_i)) \right] + cv \leq \\
&\leq e^{-\alpha r^2} \left[-4\alpha^2 \lambda r^2 + 2\alpha \sum_{i=1}^N (a^{ii} - b^i(x_i - y_i)) + c \right].
\end{aligned}$$

Por hipótese, a^{ii}, b^i e c são limitados. Portanto, α pode ser escolhido de tal modo que $Lv \leq 0$ em toda região anular $A = B_R(y) - B_\rho(y)$. Já que $u - u(x_0) > 0$ em $\partial B_\rho(y)$, existe $\varepsilon > 0$ para o qual $u - u(x_0) - \varepsilon v \geq 0$ em $\partial B_\rho(y)$. Esta desigualdade é também satisfeita em $\partial B_R(y)$ onde $v = 0$. Deste modo, temos $L(u - u(x_0) - \varepsilon v) \geq -cu(x_0) \geq 0$ em A e $u - u(x_0) - \varepsilon v \geq 0$ em ∂A . O princípio do máximo fraco (Corolário 2.4) implica que $u - u(x_0) - \varepsilon v \geq 0$ em todo A . Utilizando a Observação 2.6, obtemos

$$D_\nu u(x_0) \leq \varepsilon D_\nu v(x_0) = \varepsilon v'(R) < 0. \diamond$$

Mais geralmente, quer exista ou não a derivada normal exterior, obtemos

$$(2.9) \quad \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} < 0,$$

onde o ângulo entre o vetor $x - x_0$ e a normal em x_0 é menor que $\pi/2 - \delta$ para algum $\delta > 0$ fixo.

Embora a condição esférica possa ser levemente relaxada, não é possível afirmar (2.9) sem conveniente suavidade de $\partial\Omega$ em x_0 . Por exemplo, seja $L = -\Delta$ e Ω o primeiro quadrante em \mathbf{R}^2 , então para $u(x) = -x_1 x_2$ em Ω temos $u < 0$ em Ω , $u(0) = 0$ e $-\Delta u = 0$, entretanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{|x|} = 0,$$

donde (2.9) é falso.

O resultado a seguir, devido a Hopf, é bastante conhecido no caso $c(x) \geq 0$ (ver [PW]) e menos conhecido no caso $c(x) < 0$. No capítulo 3, este resultado será utilizado diversas

vezes.

Teorema 2.8 (Princípio do Máximo de Hopf). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, B bola com $B \subset \Omega$, $p \in (\partial\Omega) \cap \partial B$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup \{p\})$. Suponhamos L um operador da forma (2.1) com $Lu \geq 0$, $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ e $u(p) = 0$. Então $D_\nu u(p) < 0$, no sentido de que*

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{u(p) - u(q)}{|p - q|} < 0$$

quando $q \rightarrow p$ ao longo do raio.

Demonstração . Vamos usar o caso $c(x) \equiv 0$ para provar o caso geral. Definimos $v(x) = e^{-\alpha x_1} u(x)$, para $\alpha > 0$ ainda a determinar. Cálculos elementares nos dão

$$\begin{aligned} Lu(x) = L\left(e^{\alpha x_1} v(x)\right) &= e^{\alpha x_1} \left[- \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) D_{ij} v + \sum_{i=1}^N b^i(x) D_i v - 2\alpha \sum_{i=1}^N a^{1i}(x) D_i v \right] + \\ &+ \left[c(x) + b^1(x)\alpha - a^{11}(x)\alpha^2 \right] e^{\alpha x_1} v. \end{aligned}$$

Como $a^{11}(x) \geq \lambda > 0$ e b^1 e c são limitados, temos que $c(x) + b^1(x)\alpha - a^{11}(x)\alpha^2 \leq 0$ para α suficientemente grande. Logo obtemos que

$$L'(v) = - \sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) D_{ij} v + \sum_{i=1}^N b^i(x) D_i v - 2\alpha \sum_{i=1}^N a^{1i}(x) D_i v \geq 0$$

em Ω . Como $v(p) = 0$, temos pela forma usual do Princípio do Máximo de Hopf $D_\nu v(p) < 0$. Mas, $D_\nu v(p) = (e^{-\alpha x_1} D_\nu u)(p) < 0$, donde $D_\nu u(p) < 0$. \diamond

Teorema 2.9 (Princípio do Máximo Forte). *Seja L um operador da forma (2.1), $c = 0$ e $Lu \leq 0$ (≥ 0) num domínio Ω (não necessariamente limitado). Então, se u atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω , u é uma constante. Se $c \geq 0$ e c é limitado, então u não pode atingir um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de Ω , a menos que seja constante. A conclusão continua válida se L satisfizer (2.1) apenas localmente e b^i e c forem localmente limitados.*

Demonstração . Suponhamos que u é não constante e atinge seu máximo $M \geq 0$ no interior de Ω , então o conjunto Ω^- no qual $u < M$ satisfaz $\Omega^- \subset \Omega$ e $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset$. Seja $x_0 \in \Omega^-$ tal que x_0 está mais próximo de $\partial\Omega^-$ do que de $\partial\Omega$, e considere a maior bola $B \subset \Omega^-$ com centro em x_0 . Então $u(y) = M$ para algum ponto $y \in \partial B$, enquanto $u < M$ em B . O Lema 2.7 implica $Du(y) \neq 0$, o que é impossível num máximo interior y . \diamond

Se $c > 0$ em algum ponto, então a constante do teorema é obviamente zero. Teoremas de unicidade para outros tipos de problemas de valores de fronteira são conseqüências do Lema 2.7 e do Teorema 2.9. Em particular, temos o seguinte teorema de unicidade para o problema de Neumann clássico.

Teorema 2.10. *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ uma solução de $Lu = 0$ num domínio limitado Ω , onde L é um operador da forma (2.1), $c \geq 0$, c é limitado e Ω satisfaz uma condição esférica interior em cada ponto de $\partial\Omega$. Se a derivada normal está definida em toda fronteira de Ω e $D_\nu u = 0$ em $\partial\Omega$, então u é constante em Ω . Se, também, $c > 0$ em algum ponto de Ω , então $u \equiv 0$.*

Demonstração . Se u for não constante, poderemos supor que u ou $-u$ atinge um máximo não negativo M num ponto $x_0 \in \partial\Omega$ e é menor que M em Ω , pelo Teorema 2.9. Aplicando o Lema 2.7, em x_0 temos que $D_\nu u(x_0) \neq 0$, contradizendo as nossas hipóteses. \diamond

3 - SIMETRIA DA SOLUÇÃO POSITIVA DO PROBLEMA DE DIRICHLET

Este capítulo é dedicado ao estudo das propriedades de simetria da solução do seguinte problema

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B \\ u > 0 & \text{em } B, \end{cases}$$

onde $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$ e f é uma função sobre a qual imporemos algumas condições

.

Enunciamos, a seguir, alguns teoremas que serão demonstrados no decorrer deste capítulo.

Teorema 3.1. *Se $u \in C^2(\overline{B})$ é solução de (3.1), com $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ então u é radialmente simétrica e $D_r u < 0$ se $r > 0$.*

Teorema 3.2. *A mesma conclusão do Teorema 3.1 vale se $f = f(u, r)$ com f e $D_u f$ contínuas e f decrescente em r . Em particular, a equação pode ser $-\Delta u + g(u) = p(|x|)$, com $p(r)$ decrescente.*

Teorema 3.3. *Se u é solução de*

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u, r) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B \\ u \geq 0, u \not\equiv 0 & \text{em } B, \end{cases}$$

com f como no Teorema 3.2 e $N \geq 2$ então $u > 0$ em B e, em consequência, vale a conclusão do Teorema 3.1.

Observação 3.4. Se $N = 1$ a conclusão do Teorema 3.3 pode não valer, pois $u(x) = 1 - \cos 2\pi x$ é solução de

$$(3.3) \quad \begin{cases} u'' + 4\pi^2(u - 1) = 0 & \text{em } (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \\ u \geq 0, u \not\equiv 0 & \text{em } (-1, 1). \end{cases}$$

Entretanto, $u(0) = 0$.

Antes de prosseguirmos faz-se necessário fixar algumas notações que serão usadas daqui em diante.

Notação . Fixamos $e \in \mathbb{R}^N$ com $|e| = 1$. Para $0 \leq \lambda < 1$, sejam

$$\Sigma_\lambda = \{x \in B \mid x \cdot e > \lambda\}, \quad T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot e = \lambda\}$$

e seja Σ'_λ a imagem de Σ_λ refletida em relação a T_λ . Para $x \in \partial B$ seja $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_N(x))$ o vetor normal exterior unitário no ponto x . Ainda, x^λ denota a imagem de $x \in \Sigma_\lambda$ refletida em relação a T_λ .

Para demonstrar os três teoremas citados acima usaremos os resultados de dois lemas, a saber:

Lema 3.5. *Seja $f = f(u, x)$ tal que f e $D_u f$ são contínuas e vale uma das duas alternativas:*

$$(i) \quad f(0, x) \geq 0 \quad \forall x \in B, \text{ ou}$$

$$(ii) \quad f(0, x) < 0 \quad \forall x \in B.$$

Se $x_0 \in \partial B$, com $\nu_1(x_0) > 0$, $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \{x \in B \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$, $u \in C^2(\overline{B_\varepsilon})$,

$u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ em B_ε , $u(x) = 0$ se $x \in \partial B$ e $|x - x_0| < \varepsilon$, $-\Delta u = f(x, u)$ em B_ε então existe $\delta > 0$ tal que $D_1 u < 0$ em B_δ .

Demonstração . Já que $\nu_1(x_0) > 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\nu_1(x) > 0$ se $x \in \partial B$ e $|x - x_0| < \varepsilon$. Este fato mais a hipótese de que $u \geq 0$ em $|x - x_0| < \varepsilon$ implica que $D_1 u \leq 0 \forall x \in \partial B$ com $|x - x_0| < \varepsilon$. Se $D_1 u(x_0) < 0$, o resultado segue por continuidade. O caso $D_1 u(x_0) = 0$ é mais delicado. Neste caso, como $u = 0$ em $\overline{B_\varepsilon} \cap \partial B$, segue que $\nabla u(x_0) = 0$. Para completar a demonstração consideramos os dois casos citados no enunciado do lema.

Caso (i). $f(0, x) \geq 0 \forall x \in B$.

Neste caso, aplicando o Teorema do Valor Médio à variável u temos que

$$0 \leq f(0, x) = -\Delta u - f(u(x), x) + f(0, x) = -\Delta u - D_u f(\theta(x)u(x), x)u(x),$$

onde $0 < \theta(x) < 1$. Tomando $L = -\Delta - D_u f$ no Teorema 2.8, obtemos que $D_1 u(x_0) < 0$, ficando provado o lema.

Caso (ii). $f(0, x) < 0 \forall x \in B$.

Já vimos que $D_1 u \leq 0$ em $\overline{B_\varepsilon} \cap \partial B$. Basta provar que $D_{11} u > 0$ em B_δ , se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno. Para isto é suficiente verificar que $D_{11} u(x_0) > 0$. Se $N \geq 2$, para $k \in \{2, \dots, N\}$, tomamos $y = (-\nu_k(x_0), 0, \dots, 0, \nu_1(x_0), 0, \dots, 0)$, onde $\nu_1(x_0)$ está na k -ésima coordenada. Daí vemos que y é tangente a ∂B em x_0 . Logo existe $\phi : (-1, 1) \rightarrow \partial B$ de classe C^2 tal que $\phi(0) = x_0$ e $\phi'(0) = y$. Já que $D_1 u(x_0) = 0$ e $D_1 u \leq 0$ em $\overline{B_\varepsilon} \cap \partial B$, vemos que $D_1 u(\phi(t))$ tem um máximo local em $t = 0$. Em particular, temos que

$$0 = \frac{d}{dt} [D_1 u(\phi(t))] \Big|_{t=0} = \nabla D_1 u(x_0) \cdot y = D_{11} u(x_0) \cdot (-\nu_k(x_0)) + D_{1k} u(x_0) \nu_1(x_0),$$

ou seja,

$$(3.4) \quad D_{11} u(x_0) \nu_k(x_0) = D_{1k} u(x_0) \nu_1(x_0).$$

Por outro lado, como $u(\phi(t)) \equiv 0$, derivando duas vezes em relação à variável t em $t = 0$, obtemos

$$\sum_{i,j=1}^N D_{ij}u(x_0)\phi'_i(0)\phi'_j(0) + \nabla u(x_0) \cdot \phi''(0) = 0,$$

ou seja,

$$(3.5) \quad D_{11}u(x_0)\nu_k(x_0)^2 - 2D_{1k}u(x_0)\nu_1(x_0)\nu_k(x_0) + D_{kk}u(x_0)\nu_1(x_0)^2 = 0.$$

Combinando as estimativas (3.4) e (3.5), vemos que

$$D_{11}u(x_0)\nu_k(x_0)^2 - 2D_{11}u(x_0)\nu_k(x_0)^2 + D_{kk}u(x_0)\nu_1(x_0)^2 = 0,$$

isto é,

$$D_{kk}u(x_0) = \left(\frac{\nu_k(x_0)}{\nu_1(x_0)}\right)^2 D_{11}u(x_0)$$

para todo $k \in \{2, \dots, N\}$. Logo temos que

$$\Delta u(x_0) = \left[1 + \sum_{k=2}^N \left(\frac{\nu_k(x_0)}{\nu_1(x_0)}\right)^2\right] D_{11}u(x_0).$$

Como $u(x_0) = 0$, obtemos que

$$0 < -f(0, x_0) = \Delta u(x_0) = D_{11}u(x_0) \left[1 + \sum_{k=2}^N \left(\frac{\nu_k(x_0)}{\nu_1(x_0)}\right)^2\right],$$

donde $D_{11}u(x_0) > 0$.

Se $N = 1$, o resultado segue trivialmente pois no ponto $x = 1, u''(1) = -f(0) > 0$. \diamond

Lema 3.6 *Sejam B a bola unitária de \mathbf{R}^N e $x_0 \in \partial B$, com $\nu_1(x_0) > 0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $e = (1, 0, \dots, 0)$. Seja $f = f(u, x)$ uma função tal que $f, D_u f$ são contínuas e $f(s, x) \leq f(s, x^\lambda)$, $\forall x \in \Sigma_\lambda$, $\forall \lambda \in [0, 1)$, $\forall s \geq 0$. Seja $u \in C^2(\overline{B})$ tal que*

$$(3.6) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u, x) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B \\ u \geq 0, u \not\equiv 0 & \text{em } B. \end{cases}$$

Suponhamos que, para um certo $\lambda \in [0, 1)$, valem

$$(3.7) \quad D_1 u \leq 0 \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

$$(3.8) \quad u(x) \leq u(x^\lambda) \quad \text{para todo } x \in \Sigma_\lambda.$$

$$(3.9) \quad u(x) \not\equiv u(x^\lambda) \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

Então

$$(3.10) \quad u(x) < u(x^\lambda) \quad \text{para todo } x \in \Sigma_\lambda.$$

$$(3.11) \quad D_1 u(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in T_\lambda \cap B.$$

Demonstração . Seja $v(x) = u(x^\lambda)$. Então vemos que $-\Delta v = f(v, x^\lambda)$ em Σ_λ . Pondo $w = v - u$, temos $w \geq 0$, $w \not\equiv 0$ em Σ_λ e

$$\begin{aligned} -\Delta w &= -\Delta v + \Delta u = f(v, x^\lambda) - f(u, x) \geq f(v, x) - f(u, x) = \\ &= D_u f\left((1 - \theta(x))u(x) + \theta(x)v(x), x\right)(v - u), \end{aligned}$$

com $0 < \theta(x) < 1$, pelo Teorema do Valor Médio aplicado à primeira variável. Daí obtemos

$$(3.12) \quad \begin{cases} -\Delta w + c(x)w \geq 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ w \geq 0, w \not\equiv 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ w = 0 & \text{em } T_\lambda \cap B, \end{cases}$$

onde $c(x) = -D_u f\left((1 - \theta(x))u(x) + \theta(x)v(x), x\right)$. Pelo Teorema 2.8, temos que $D_1 w > 0$ em $T_\lambda \cap B$. Mas $D_1 w(x) = -D_1 u(x^\lambda) - D_1 u(x)$. Logo $D_1 u = -\frac{1}{2}D_1 w < 0$ em $T_\lambda \cap B$, ou seja, vale (3.11). Escrevendo $c = c^+ + c^-$, onde $c^+ = \max\{c, 0\}$ e $c^- = \min\{c, 0\}$. Como $-\Delta w + cw \geq 0$ em Σ_λ obtemos

$$(3.12) \quad \begin{cases} -\Delta w + c^+ w \geq 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ w \geq 0, w \not\equiv 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \end{cases}$$

pelo Teorema 2.9, segue que $w > 0$ e Σ_λ . Logo vale (3.10). \diamond

Enunciamos, a seguir, um resultado que segue imediatamente do Lema 3.5.

Corolário 3.7. *Seja $u \in C^2(\overline{B})$ solução de*

$$(3.13) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

com f satisfazendo as mesmas hipóteses do Lema 3.5 sabendo-se que $u \not\equiv 0$ e $u \geq 0$ numa vizinhança da fronteira de B , segue que $u > 0$ numa vizinhança de ∂B .

Demonstração . Como a fronteira de B é compacta, basta provar que, para $x_0 \in \partial B$ qualquer, existe uma vizinhança de x_0 em B onde $u > 0$. Supondo, sem perda de generalidade, que $\nu_1(x_0) > 0$ o resultado segue do Lema 3.5. \diamond

Agora estamos em condições de demonstrar os teoremas enunciados no início deste capítulo.

Demonstração do Teorema 3.2. Como o problema é invariante por rotações, basta provar que, para $\lambda = 0$, vale $u(x^0) = u(x)$ e que $D_1 u(x) < 0$ se $x_1 > 0$. Consideremos a condição

$$(3.14) \quad u(x) < u(x^\lambda), \quad D_1 u(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in \Sigma_\lambda$$

Pelo Lema 3.5, a condição (3.14) vale para λ suficientemente próximo de 1. Vamos dimi-

nuindo λ até atingir um valor crítico μ , onde (3.14) deixa de valer ou onde $\mu = 0$. Vamos mostrar que $\mu = 0$. Mais precisamente, seja μ definido por

$$\mu = \inf \{ \lambda > 0 \mid (3.14) \text{ vale para } \Sigma_\lambda \}.$$

Suponhamos, por absurdo, que $\mu > 0$. Por continuidade, como (3.14) vale para todo $\lambda > \mu$, então valem (3.7) e (3.8) para μ . Para todo $x \in (\partial \Sigma_\mu) \setminus T_\mu$, como $x^\mu \in B$, temos $0 = u(x) < u(x^\mu)$. Logo vale também (3.9) e, portanto (3.14), para μ . Pelo Lema 3.6, valem (3.10) e (3.11) para μ . Além disso, aplicando o Lema 3.5 nos pontos de $T_\mu \cap \partial B$ e usando a

continuidade de D_1u , temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $D_1u < 0$ em $\Sigma_{\mu-\varepsilon}$. Como μ é ínfimo, existe uma seqüência (λ_j) com $0 < \lambda_j \uparrow \mu$, existem $x_j \in \Sigma_{\lambda_j}$ tais que $u(x_j) \geq u(x_j^{\lambda_j})$. Também existe uma subseqüência, ainda denotada por (x_j) , tal que $x_j \rightarrow z \in \overline{\Sigma_\mu}$. Então $x_j^{\lambda_j} \rightarrow z^\mu$. Logo $u(z) \geq u(z^\mu)$. Como vale (3.14) para Σ_μ , segue que $z \in \partial \Sigma_\mu$. Se $z \notin T_\mu$ então $z \in \partial B$ e $z^\mu \in B$. Então $0 = u(z) < u(z^\mu)$, o que nos dá uma contradição. Logo $z \in T_\mu$ e $z^\mu = z$. Mas o segmento de reta $[x_j, x_j^{\lambda_j}] \subset B$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $y_j \in [x_j, x_j^{\lambda_j}]$ tal que $D_1u(y_j) \geq 0$. Mas, $y_j \rightarrow z$, donde $D_1u(z) \geq 0$, o que nos dá um absurdo. Isso mostra que $\mu = 0$. Portanto $u(x) \leq u(x^0)$ e $D_1u(x) < 0$ para todo $x \in \Sigma_0$. Por reflexão, temos que $u(x) \geq u(x^0)$ e, portanto, u é simétrica em relação a T_0 . \diamond

Demonstração do Teorema (3.3). Suponhamos que exista $y \in B$ tal que $u(y) = 0$. Pelo Corolário 3.7, existe $\alpha < 1$ tal que qualquer um destes y satisfaz $|y| \leq \alpha$. Podemos então supor que y tem norma maximal. Como Δ e f são invariantes por rotação, podemos supor, sem perda de generalidade, que $y = (\delta, 0, \dots, 0)$ com $\delta \geq 0$. Então existe $t \geq 1/2$, para o qual não vale (3.10) e, portanto, não vale pelo menos uma das condições (3.7), (3.8) ou (3.9). Definimos ζ por

$$\zeta = \inf\{s \in [0, 1] \mid (3.7), (3.8) \text{ e } (3.9) \text{ valem em } \Sigma_t \text{ para todo } t \in (s, 1)\}$$

Pelo Lema 3.5, temos que $\zeta < 1$. Logo $\frac{1}{2} \leq \zeta < 1$. Por continuidade valem (3.7) e (3.8) em Σ_ζ . Se não valesse (3.9) em Σ_ζ , teríamos $u(x^\zeta) \equiv u(x)$ em Σ_ζ . Pela figura (3.15), vemos que isto nos dá uma contradição. Logo valem (3.7), (3.8) e (3.9) em Σ_ζ . Pelo Lema 3.6, vale (3.11) para Σ_ζ , isto é, $D_1u(x) < 0$ para todo $x \in T_\zeta \cap B$. Pelo Lema 3.5, temos que $D_1u(x) < 0$ para todo $x \in T_\zeta \cap \partial B$. Logo obtemos $D_1u < 0$ em $T_\zeta \cap \overline{B}$. Por compacidade, existe $\eta > 0$ tal que $D_1u < 0$ em $\Sigma_{\zeta-\eta}$. Afirmamos que existe $\gamma \in (0, \eta)$ tal que $\forall \lambda \in (\zeta - \gamma, \zeta)$, $\forall x \in \Sigma_\lambda$ vale $u(x) \leq u(x^\lambda)$.

De fato, se não existisse tal γ , então existiriam seqüências $\lambda_n \uparrow \zeta$ e $x_n \in \Sigma_{\lambda_n}$ tais que $u(x_n) > u(x_n^{\lambda_n})$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_n \rightarrow z \in \overline{\Sigma_\zeta}$. Como

$$u(z^\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n^{\lambda_n}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = u(z),$$

concluimos que $z \notin \Sigma_\zeta$, pois em Σ_ζ vale (3.10). Logo $z \in (\partial B) \cup T_\zeta$. Se $z \in T_\zeta \cap \bar{B}$ então $x_n^{\lambda_n} \rightarrow z^\zeta = z$. Pelo Teorema do Valor Médio existiria y_n no segmento $[x_n, x_n^{\lambda_n}]$ tal que $D_1 u(y_n) \geq 0$. Mas, para n suficientemente grande, $y_n \in \Sigma_{\zeta-\eta}$, contradizendo o fato de que $D_1 u < 0$ em $\Sigma_{\zeta-\eta}$. Logo $z \notin T_\zeta \cap \bar{B}$, donde $z \in \partial B$ e $z_1 > \zeta$. Para $x \in \bar{\Sigma}_\zeta$ definimos $w(x) = u(x^\zeta) - u(x)$. Como (3.10) vale em Σ_ζ , temos que $w > 0$ em Σ_ζ . Mas,

$$u(z^\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n^{\lambda_n}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) \leq u(z) = 0,$$

donde $w(z) = 0$. Pelo Teorema 2.8, vemos que $D_1 w(z) < 0$. Mas,

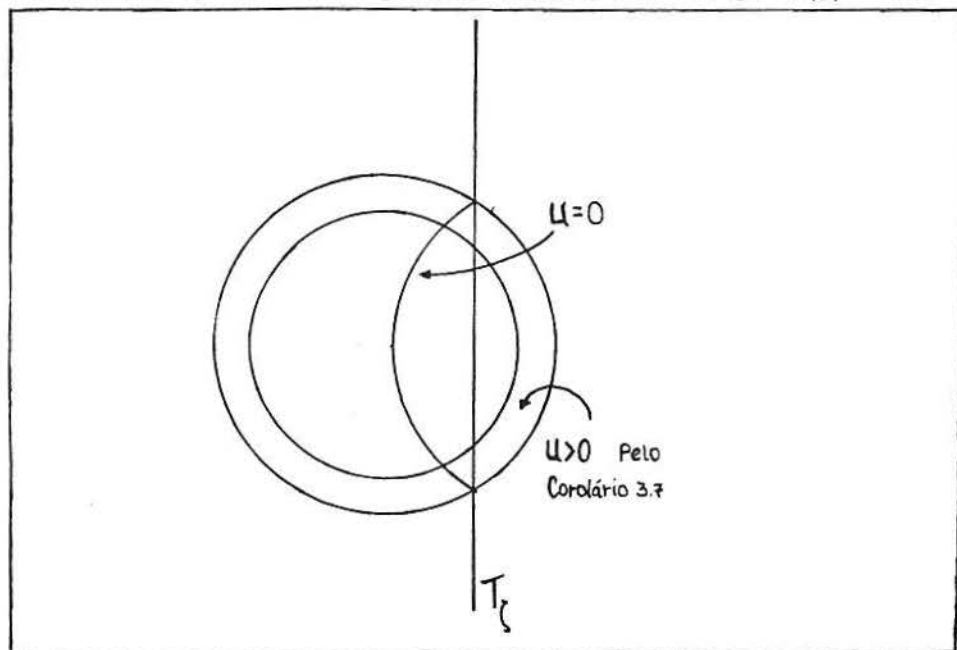
$$D_1 w(z) = -D_1 u(z^\zeta) - D_1 u(z) \text{ e } u(z^\zeta) = 0, z^\zeta \in B, u \geq 0,$$

isto é, z^ζ é um ponto de mínimo local de u . Daí obtemos $D_1 u(z^\zeta) = 0$ e $u(z) = 0, z \in \partial B, \nu_1(z) > 0, u \geq 0$, donde $D_1 u(z) \leq 0$. Mas isto nos dá $D_1 w(z) \geq 0$, o que contradiz a conclusão acima. Logo realmente existe $\gamma \in (0, \eta)$ tal que

$$\forall \lambda \in (\zeta - \gamma, \zeta), \forall x \in \Sigma_\lambda \text{ vale } u(x) \leq u(x^\lambda).$$

Portanto, para todo $\lambda \in (\zeta - \eta, \zeta]$ valem (3.7), (3.8) e (3.9). Isto contradiz a definição de ζ como ínfimo. Finalmente, concluimos que não existe $y \in B$ tal que $u(y) = 0$. \diamond

(3.15)



Observação 3.8 O Teorema 3.1 é válido para f localmente de Lipschitz, como podemos

ver em [GNN], pg. 220. No entanto, o exemplo a seguir mostra que é falso se f for apenas Hölder-contínua. Para $p > 2$ definimos

$$w : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}, w(x) = \begin{cases} (1 - |x|^2)^p & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Daí, vemos que

$$\begin{aligned} -\Delta w &= w'' + \frac{N-1}{r} w' = -2p(p-2)w^{1-2/p} + \\ &+ 2p(N+2p-2)w^{1-1/p} = f(w), \end{aligned}$$

donde f é uma função Hölder-contínua com expoente $1 - 2/p$. Fixamos x_0 como $|x_0| = 3$ e definimos $u(x) = w(x) + w(x - x_0)$. Então u satisfaz a condição

$$(3.16) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } |x| < 5 \\ u = 0 & \text{em } |x| = 5 \\ u \geq 0 & \text{e } u \not\equiv 0. \end{cases}$$

No entanto, u não é radialmente simétrica e tem zeros no interior. Mesmo w tem zeros no interior.

Observação 3.9. A construção acima mostra que sempre que o problema

$$(3.17) \quad \begin{cases} -\Delta w = f(w) & \text{em } B \\ w = D_\nu w = D_{\nu\nu} w & \text{em } \partial B \\ w \geq 0, & w \not\equiv 0. \end{cases}$$

tiver uma solução, é possível construir uma solução $u \geq 0$ numa bola grande, não radial, com zeros no interior.

Observação 3.10. A conclusão do Teorema 3.2 pode não valer se f não for decrescente em r . Isto pode ser visto, como segue:

Seja w autofunção não radial de

$$(3.18) \quad \begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{em } B \\ w = 0 & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Para $\varepsilon > 0$, seja $u(x) = 1 - |x|^2 + \varepsilon w$. Logo, $\Delta u = -2N - \varepsilon \lambda w$ e, portanto, u satisfaz a condição

$$(3.19) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda(u + r^2 - 1) + 2N & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Como $D_\nu(1 - |x|^2) = -2$, segue que $u > 0$ em B se ε for suficientemente pequeno. No entanto, u não tem simetria radial. O Teorema 2.3 não pode ser aplicado porque $f(u, r) = \lambda(u + r^2 - 1) + 2N$ não é decrescente em r .

4 - IDENTIDADE DE POHOZAEV

Estabeleceremos neste capítulo alguns resultados referentes à não existência de soluções não triviais para o problema

$$(4.1) \quad \begin{cases} \Delta u = |x|^l |u|^{\tau-1} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $l \geq 0$, $\tau > 1$ e sobre a geometria de Ω imporemos algumas restrições .

Para simplificar, pensaremos primeiro no caso $l = 0$ e demonstraremos a Identidade de Pohozaev que é bastante útil para responder às questões de existência de solução para o problema (4.1). Antes disso, porém, precisamos provar a seguinte

Proposição 4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado com fronteira de classe C^1 . Se $u \in C^2(\bar{\Omega})$, com $u = 0$ em $\partial\Omega$, então*

$$(4.2) \quad \int_{\Omega} [2(x \cdot \nabla u) \Delta u + (N - 2)u \Delta u] dx = \int_{\partial\Omega} (D_{\nu} u)^2 (x \cdot \nu) d\sigma.$$

Demonstração . Através de cálculos elementares obtemos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} 2(\nabla u \cdot \nabla v) \Delta u &= \operatorname{div}[2(\nabla u \cdot \nabla v) \nabla u - |\nabla u|^2 \nabla v] + \\ &+ |\nabla u|^2 \Delta v - 2 \sum_{i,j=1}^N D_i u D_{ij} v D_j u. \end{aligned}$$

Usando a identidade acima, com $v = |x|^2/2$, temos que

$$2(x \cdot \nabla u) \Delta u = \operatorname{div}[2(x \cdot \nabla u) \nabla u - x |\nabla u|^2] + N |\nabla u|^2 - 2 |\nabla u|^2.$$

Integrando a expressão acima em Ω , obtemos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) \Delta u dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}[2(x \cdot \nabla u) \nabla u - x |\nabla u|^2] dx + \\ &+ (N - 2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Divergência, segue que

$$2 \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} [2(x \cdot \nabla u)(\nu \cdot \nabla u) - |\nabla u|^2 x \cdot \nu] d\sigma + (N-2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

Como $u = 0$ em $\partial\Omega$, temos que $\nabla u = \pm |\nabla u| \nu$ em $\partial\Omega$, donde $|\nabla u|^2 = (D_{\nu}u)^2$ em $\partial\Omega$.

Segue também que $(x \cdot \nabla u)(\nu \cdot \nabla u) = |\nabla u|^2 x \cdot \nu = (D_{\nu}u)^2 x \cdot \nu$, donde

$$2 \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (D_{\nu}u)^2 x \cdot \nu d\sigma + (N-2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Como $u = 0$ em $\partial\Omega$, integrando por partes, vemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega} u \Delta u dx.$$

Finalmente, obtemos

$$\int_{\Omega} [2(x \cdot \nabla u) \Delta u + (N-2)u \Delta u] dx = \int_{\partial\Omega} (D_{\nu}u)^2 x \cdot \nu d\sigma. \diamond$$

Corolário 4.2. (Identidade de Pohozaev). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado com fronteira de classe C^1 . Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(0) = 0$ e $u \in C^2(\bar{\Omega})$ uma solução de*

$$(4.3) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} .$$

Então vale

$$(4.4) \quad 2N \int_{\Omega} F(u) dx - (N-2) \int_{\Omega} u f(u) dx = \int_{\partial\Omega} (D_{\nu}u)^2 (x \cdot \nu) d\sigma,$$

onde $F(t) = \int_0^t f(s) ds$.

Demonstração . Primeiramente, observemos que

$$\nabla(F(u)) = F'(u) \nabla u = f(u) \nabla u = -(\Delta u) \nabla u \text{ em } \Omega.$$

Logo, temos que

$$\int_{\Omega} 2(x \cdot \nabla u) \Delta u dx = - \int_{\Omega} 2x \cdot \nabla(F(u)) dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} 2x \cdot \nabla(F(u)) dx = \int_{\partial\Omega} 2(x \cdot \nu) F(u) d\sigma - \int_{\Omega} F(u) \operatorname{div}(2x) dx.$$

Como $u = 0$ em $\partial\Omega$ e $F(0) = 0$, segue que

$$\int_{\partial\Omega} 2(x \cdot \nu) F(u) d\sigma = 0.$$

Logo, vemos que

$$\int_{\Omega} 2x \cdot \nabla(F(u)) dx = -2N \int_{\Omega} F(u) dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} 2(x \cdot \nabla u) \Delta u dx = 2N \int_{\Omega} F(u) dx.$$

Finalmente, usando a Proposição 4.1 e como $f(u) = -\Delta u$ em Ω , concluímos que

$$2N \int_{\Omega} F(u) dx - (N-2) \int_{\Omega} u f(u) dx = \int_{\partial\Omega} (D_{\nu} u)^2 (x \cdot \nu) d\sigma. \diamond$$

Como aplicação do Corolário 4.2 vemos o seguinte

Exemplo 4.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto estrelado, com fronteira de classe C^1 . Seja $f(u) = |u|^{\tau-1}u$. Se $\tau \geq \frac{N+2}{N-2}$ então o problema

$$(4.5) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

não tem nenhuma solução não trivial $u \geq 0$.

Demonstração . Como Ω é estrelado, temos que $x \cdot \nu > 0$ em $\partial\Omega$. Supondo que exista $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solução clássica de (4.5), obtemos do Corolário 4.2 e do fato de Ω ser estrelado que vale

$$2N \int_{\Omega} F(u) dx - (N-2) \int_{\Omega} u f(u) dx = \int_{\partial\Omega} (D_{\nu} u)^2 (x \cdot \nu) d\sigma \geq 0,$$

ou seja,

$$\left[\frac{2N}{\tau+1} - (N-2) \right] \int_{\Omega} |u|^{\tau+1} dx \geq 0.$$

Se u é solução não trivial de (4.5) então

$$\int_{\Omega} |u|^{\tau+1} > 0.$$

Logo

$$\frac{2N}{\tau+1} - (N-2) \geq 0,$$

donde $\tau \leq (N+2)/(N-2)$. Vamos mostrar que o caso $\tau = (N+2)/(N-2)$ não pode ocorrer. Se $\tau = (N+2)/(N-2)$ então

$$\frac{2N}{\tau+1} - (N-2) = 0.$$

De (4.4) segue que

$$\int_{\partial\Omega} (D_{\nu}u)^2(x \cdot \nu) d\sigma = 0,$$

donde $D_{\nu}u \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Como estamos procurando soluções não negativas para (4.5), temos que $-\Delta u = |u|^{\tau-1}u = |u|^{\tau} \geq 0$ em Ω . Daí vemos que valem

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u \geq 0, u \not\equiv 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.8 resulta que $D_{\nu}u < 0$ em Ω , o que nos dá uma contradição. Logo, se $\tau \geq (N+2)/(N-2)$ então o problema (4.5) não tem solução não trivial $u \geq 0$. \diamond

Observação 4.4. O Exemplo 4.3 nos mostra que se $\tau > (N+2)/(N-2)$ então o problema (4.5) não possui solução não trivial, mesmo não satisfazendo $u \geq 0$. Também vale que se $\tau = (N+2)/(N-2)$ então o problema (4.5) não possui solução não trivial. De fato, se $\tau = (N+2)/(N-2)$ e u é solução de (4.5) vemos, pelo Exemplo 4.3, que vale

$$\begin{cases} -\Delta u - fu = 0 & \text{em } \Omega \\ u = D_{\nu}u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f = |u|^{\tau-1}$ é limitada. Daí, pelo Teorema de Calderon, segue que $u \equiv 0$ em Ω como podemos ver em [M], pg. 252.

Vamos considerar agora uma generalização do problema (4.5). Para isto necessitamos de uma generalização da Identidade de Pohozaev.

Consideremos o seguinte problema

$$(4.6) \quad \begin{cases} -\Delta u = g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nosso objetivo é provar que vale

$$(4.7) \quad \int_{\Omega} [2x \cdot \nabla_x G(x, u(x)) + 2NG(x, u(x)) + (N-2)u\Delta u] dx = \int_{\partial\Omega} (D_\nu u)^2 (x \cdot \nu) d\sigma,$$

onde

$$G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds.$$

Primeiramente, vemos que

$$\nabla [G(x, u(x))] = (\nabla_x G)(x, u(x)) + D_t G(x, u(x)) \nabla u,$$

ou seja,

$$\nabla [G(x, u(x))] = (\nabla_x G)(x, u(x)) + g(x, u(x)) \nabla u.$$

Em Ω , temos

$$\nabla [G(x, u(x))] = (\nabla_x G)(x, u(x)) - \Delta u \nabla u.$$

Fazendo o produto interno por x , segue que

$$x \cdot \nabla [G(x, u(x))] = x \cdot (\nabla_x G)(x, u(x)) - (x \cdot \nabla u) \Delta u,$$

ou seja,

$$2(x \cdot \nabla u) \Delta u = 2x \cdot \nabla_x [G(x, u(x))] - 2x \cdot \nabla [G(x, u(x))].$$

Integrando em Ω , temos que

$$(4.8) \quad \int_{\Omega} 2(x \cdot \nabla u) \Delta u dx = \int_{\Omega} 2x \cdot \nabla_x [G(x, u(x))] dx - \int_{\Omega} 2x \cdot \nabla [G(x, u(x))] dx$$

e, integrando por partes, vemos que

$$\int_{\Omega} 2x \cdot \nabla [G(x, u(x))] dx = \int_{\partial\Omega} G(x, u(x)) (2x \cdot \nu) d\sigma - \int_{\Omega} G(x, u(x)) \operatorname{div}(2x) dx.$$

Como $u = 0$ em $\partial\Omega$ e $G(x, 0) = 0$, segue que

$$\int_{\partial\Omega} G(x, u(x))(2x \cdot \nu) d\sigma = 0.$$

Logo, verificamos que

$$\int_{\Omega} 2x \cdot \nabla \left[G(x, u(x)) \right] dx = -2N \int_{\Omega} G(x, u(x)) dx.$$

Usando a relação (4.8), concluímos que vale

$$(4.9) \quad \int_{\Omega} 2(x \cdot \nabla u) \Delta u dx = \int_{\Omega} 2x \cdot \nabla_x \left[G(x, u(x)) \right] dx + 2N \int_{\Omega} G(x, u(x)) dx.$$

Juntando as relações (4.9) e (4.2) segue, imediatamente, (4.7). \diamond

Exemplo 4.5. Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$. Consideremos o problema

$$(4.10) \quad \begin{cases} -\Delta u = |x|^l |u|^{\tau-1} u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B, \text{ com } l > 0 \text{ e } \tau > 1. \end{cases}$$

Neste caso $x \cdot \nu = R > 0$ e $g(x, u) = |x|^l |u|^{\tau-1} u$. Cálculos elementares nos dão

$$G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds = \int_0^t |x|^l |s|^{\tau-1} s ds = \frac{|x|^l |t|^{\tau+1}}{\tau + 1},$$

ou seja,

$$G(x, u) = \frac{|x|^l |u|^{\tau+1}}{\tau + 1}.$$

Daí vemos que

$$\nabla_x G(x, u(x)) = \frac{l|x|^{l-2}|u|^{\tau+1}}{\tau + 1} x,$$

donde

$$x \cdot \nabla_x G(x, u(x)) = \frac{l|x|^l |u|^{\tau+1}}{\tau + 1}.$$

Se supusermos que o problema (4.10) possui solução, pela relação (4.7) e do fato de que $x \cdot \nu = R > 0$ em $\partial\Omega$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{2l|x|^l|u|^{\tau+1}}{\tau+1} + \frac{2N|x|^l|u|^{\tau+1}}{\tau+1} - (N-2)|x|^l|u|^{\tau+1} \right] dx = \\ = \int_{\partial\Omega} (D_{\nu}u)^2(x.\nu)d\sigma \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left[\frac{2l}{\tau+1} + \frac{2N}{\tau+1} - (N-2) \right] \int_{\Omega} |x|^l|u|^{\tau+1} dx \geq 0.$$

Se (4.10) possuir solução não trivial então

$$\int_{\Omega} |x|^l|u|^{\tau+1} dx > 0.$$

Logo,

$$\frac{2l}{\tau+1} + \frac{2N}{\tau+1} - (N-2) \geq 0,$$

donde

$$\tau \leq \frac{N+2+2l}{N-2}.$$

Vamos provar que o caso

$$\tau = \frac{N+2+2l}{N-2}$$

não pode ocorrer. Se

$$\tau = \frac{N+2+2l}{N-2}$$

então

$$\frac{2(l+N)}{\tau+1} - (N-2) = 0.$$

De (4.7) segue que

$$\int_{\partial\Omega} (D_{\nu}u)^2(x.\nu)d\sigma = 0,$$

donde $D_{\nu}u \equiv 0$ em $\partial\Omega$. No entanto, estamos procurando soluções não negativas para o problema (4.10), o que nos dá

$$-\Delta u = |x|^l|u|^{\tau-1}u \geq 0 \quad \text{em } B.$$

Daí temos que valem

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } B. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo de Hopf (Teorema 2.8) resulta que $D_\nu u < 0$ em ∂B , o que nos dá uma contradição. Logo, se

$$\tau \geq \frac{N+2+2l}{N-2}$$

então o problema (4.10) não possui solução não trivial não negativa.

Observação 4.6. Pelo mesmo raciocínio feito na Observação 4.4 obtemos que se

$$\tau \geq \frac{N+2+2l}{N-2}$$

então o problema (4.10) não possui nenhuma solução não trivial.

5 - UM PROBLEMA DE DIRICHLET NÃO LINEAR
NA BOLA UNITÁRIA DO \mathbb{R}^N

Neste capítulo consideramos o seguinte problema elíptico de fronteira

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = b(r)f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

onde $r = |x|$, B é a bola unitária \mathbb{R}^N , $b(r)$ e $f(z)$ são funções satisfazendo as seguintes hipóteses:

$$(5.2) \quad b(r) \text{ é uma função Hölder-contínua (localmente), não negativa, com } b(0) = 0 \text{ e } b \not\equiv 0 \text{ em } B.$$

$$(5.3) \quad b(r) = O(r^l) \text{ em } r = 0, \text{ para algum } l > 0.$$

$$(5.4) \quad f \text{ é uma função Hölder-contínua (localmente), } f(z) \geq 0, \forall z > 0, f(z) = o(z) \text{ em } z = 0 \text{ e } f(z)/z \rightarrow \infty \text{ ao } z \rightarrow \infty.$$

$$(5.5) \quad |f(z)| \leq C(1 + |z|)^p, \text{ onde } p < ((N + 2 + 2l)/(N - 2)).$$

$$(5.6) \quad \text{Existem constantes } \theta \in (0, 1/2) \text{ e } M > 0 \text{ tais que}$$

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt \leq \theta z f(z),$$

para $z \geq M$.

Observamos que a condição (5.2) implica (5.3), onde l é o expoente de Hölder-continuidade (local) de b . Enunciamos (5.3) explicitamente para enfatizar a dependência

do comportamento de $f(z)$ para z grande, em (5.5), em relação ao comportamento local de b em $r = 0$.

Ambrosetti e Rabinowitz em [AR] tratam o problema (5.1) com um termo não linear mais geral $g(x, u)$, e um domínio arbitrário (limitado) com fronteira suave. Entretanto, em [AR], o crescimento de g em u deve ser menor que $|u|^p$, para algum $p < (N+2)/(N-2)$, que é justamente a potência de crescimento que mais nos interessa aqui, conforme ressaltamos no capítulo de introdução. De fato, a Observação 4.4 mostra que o problema (5.1) não possui solução não trivial no caso em que

$$b \equiv 1, \quad f(u) = |u|^{\tau-1}u, \quad \tau \geq (N+2)/(N-2)$$

e Ω é um domínio estrelado. Portanto, (5.1), em geral, não tem solução quando $f(z)$ cresce mais rapidamente que $z^{(N+2)/(N-2)}$.

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar o seguinte

Teorema 5.1. *Sob as hipóteses (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), o problema (5.1) possui uma solução clássica positiva.*

Enfatizamos que o ponto interessante aqui parece ser o expoente de crescimento de f no infinito.

Observação 5.2 Consideremos o caso $b = r^l$ e $f(u) = |u|^{\tau-1}u$ com $l \geq 0$ e $\tau > 1$. Se $l = 0$ e $\tau < (N+2)/(N-2)$ vamos provar que (5.1) possui uma solução clássica positiva e, portanto, pelo Teorema 3.1, esta solução será radialmente simétrica. No entanto, a existência de soluções não radiais com sinal não constante é um problema em aberto, como se pode ver em [Na]. Se $l > 0$ e $\tau < (N+2+2l)/(N-2)$ não poderemos aplicar o Teorema 3.3, pois $|x|^l$ não é decrescente. No entanto, provaremos que o problema (5.1) possui uma solução clássica, positiva, radialmente simétrica e ficará em aberto a existência de soluções não radiais (mesmo positivas), como se pode ver em [Na]. Antes de prosseguirmos, vamos fazer algumas definições.

Definição . (A Condição de Palais-Smale). Sejam E um espaço de Banach real e denotemos por $C^1(E; \mathbf{R})$ o conjunto dos funcionais que são Fréchet-diferenciáveis e cujas derivadas de Fréchet são contínuas em E . Dado $J \in C^1(E; \mathbf{R})$, dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale (daqui em diante denotada por (PS)) se qualquer seqüência $(u_n) \subset E$ para a qual $J(u_n)$ é limitada e $J'(u_n) \rightarrow 0$ ao $n \rightarrow \infty$ possui uma subseqüência convergente. A condição (PS) é importante pois implica que

$$K_c = \{u \in E \mid J(u) = c \text{ e } J'(u) = 0\},$$

isto é, o conjunto dos pontos críticos, tendo o valor crítico c , é compacto para qualquer $c \in \mathbf{R}$. A demonstração do Teorema 5.1 usa o importante resultado abaixo devido a Ambrosetti e Rabinowitz.

Teorema 5.3. (Teorema da Passagem pela Montanha). *Sejam E um espaço de Banach e $J \in C^1(E; \mathbf{R})$ satisfazendo a condição (PS). Suponhamos que valem:*

- (i) $J(0) = 0$ e $J(e) = 0$ para algum $e \neq 0, e \in E$;
 - (ii) existem $\rho \in (0, \|e\|)$ e $\alpha > 0$ tais que $J(u) \geq \alpha, \forall u \in S_\rho = \{u \in E \mid \|u\| = \rho\}$.
- Então J tem um valor crítico positivo

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(h(t)) \geq \alpha > 0,$$

onde $\Gamma = \{h \in C([0, 1]; E) \mid h(0) = 0, h(1) = e\}$.

A prova do Teorema acima é feita no Apêndice.

Outro resultado importante para a prova do Teorema 5.1 é o seguinte:

Lema 5.4. (Lema Radial). Denotando por B a bola unitária de \mathbf{R}^N , toda $u \in H_0^1(B)$ função radial é contínua em $B \setminus \{0\}$ e satisfaz

$$(5.7) \quad u(x) \leq \frac{1}{\sqrt{(N-2)w_N}} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(B)}}{|x|^{(N-2)/2}},$$

onde w_N é a área da superfície da bola unitária de \mathbf{R}^N .

Observação 5.5. Quando dizemos que u é contínua, queremos dizer que na sua classe de equivalência existe uma função contínua, isto é, existe v contínua tal que $u = v$ q.t.p.

Demonstração do Lema Radial.

1º Caso. $u \in C^1(\overline{B})$ com $u = 0$ em ∂B . Do Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$u(1) - u(x) = \int_{|x|}^1 u'(t) dt.$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|u(x)| \leq \int_{|x|}^1 |u'(t)| dt \leq \left(\int_{|x|}^1 |u'(t)|^2 \cdot t^{N-1} dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{|x|}^1 t^{1-N} dt \right)^{1/2}.$$

Mas,

$$\int_{|x|}^1 t^{1-N} dt = \frac{1}{N-2} \left(\frac{1}{|x|^{N-2}} - 1 \right) \leq \frac{1}{N-2} \frac{1}{|x|^{N-2}}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{|x|}^1 |u'(t)|^2 \cdot t^{N-1} dt &= \frac{1}{w_N} \int \left(\int_{|x|}^1 |u'(t)|^2 \cdot t^{N-1} dt \right) \cdot w(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{w_N} \int_{|x| \leq |y| \leq 1} |\nabla u|^2 dy \leq \frac{1}{w_N} \|\nabla u\|_{L^2(B)}^2, \end{aligned}$$

onde $dy = t^{N-1} w(\theta) dt d\theta$.

2º Caso (geral). $u \in H_0^1(B)$ radial qualquer. Usando a densidade de $C_c^1(B)$ em $H_0^1(B)$ tomamos uma seqüência $u_n \in C_c^1(B)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(B)$, u_n radial para todo $n \in \mathbb{N}$

Pelo caso já provado, temos que

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{(N-2)w_N}} \frac{\|u_n - u_m\|_{H_0^1(B)}}{|x|^{(N-2)/2}}.$$

Daí segue que, para todo $\delta > 0$, (u_n) converge uniformemente em $[\delta, 1]$. O limite dessa seqüência é $u(x)$, pois como $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(B)$ e, portanto, em $L^2(B)$, uma subsequência de (u_n) deve convergir quase sempre a u . Logo u é contínua em $[\delta, 1]$ para todo $\delta > 0$. Segue que u é contínua em $B \setminus \{0\}$.

Novamente, pelo caso anterior

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{(N-2)w_N}} \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(B)}}{|x|^{(N-2)/2}}, \quad \forall x \in B \setminus \{0\}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, como $u_n \rightarrow u(x)$ e $\|\nabla u_n\|_{L^2(B)} \rightarrow \|\nabla u\|_{L^2(B)}$, segue que

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{(N-2)w_N}} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(B)}}{|x|^{(N-2)/2}}. \quad \diamond$$

Para tornar a prova do Teorema 5.1 transparente, provamos primeiro o seguinte caso particular e então indicamos as modificações necessárias para obter o Teorema 5.1.

Teorema 5.6. *O problema elíptico de valor de fronteira*

$$(5.8) \quad \begin{cases} -\Delta u = |x|^l |u|^{\tau-1} u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B \end{cases}$$

possui uma solução clássica positiva se $\tau \in (1, (N+2+2l)/(N-2))$, onde $l \geq 0$.

Demonstração . Em vez disso, devemos provar que

$$(5.9) \quad \begin{cases} -\Delta u = |x|^l |u|^\tau & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B \end{cases}$$

possui uma solução não trivial u em B . Então, como $-\Delta u \geq 0$ em B , pelo Teorema 2.9 temos que $u > 0$ em B , donde u será também solução de (5.8).

Seja E o completamento das funções radialmente simétricas em $C_c^\infty(B)$ com a norma $\|u\|_E^2 = \int_B |\nabla u|^2 dx$. Então E é justamente o subespaço de $H_0^1(B)$ formado pelas funções radialmente simétricas, isto é, as normas são equivalentes.

Consideremos $J : E \rightarrow \mathbf{R}$ dado por

$$(5.10) \quad J(u) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla u|^2 dx - \int_B |x|^l F(u) dx,$$

onde

$$F(t) = \int_0^t |s|^\tau ds,$$

ou seja,

$$F(u) = \frac{|u|^\tau u}{\tau + 1} .$$

A verificação das hipóteses do Teorema da Passagem pela Montanha para J depende do seguinte lema de compacidade:

Lema 5.7.(Lema de Compacidade). *Para $m \geq 0$, a aplicação $u \mapsto |x|^m \cdot u$ de E em $L^p(B)$ é compacta, para $p \in [1, \tilde{m})$, onde*

$$\tilde{m} = \begin{cases} \frac{2N}{N-2-2m} , & \text{se } m < \frac{N-2}{2} \\ \infty , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração . No caso $m = 0$ temos, pela Proposição 1.4, que a inclusão de E em $L^p(B)$ é compacta para todo $p < \frac{2N}{N-2}$. Para $m > 0$, usando o Lema 5.4., temos que

$$\begin{aligned} \int_B |x|^{mp} \cdot |u|^p dx &\leq C^p \cdot \int_B r^{mp} \cdot \frac{r^{N-1}}{r^{(N/2-1)}} dr \cdot \int_{S^{N-1}} w(\theta) d\theta \cdot \|\nabla u\|_{L^2(B)}^p = \\ &= C^p \cdot w_N \cdot \frac{1}{N - p(N/2 - m - 1)} \cdot \|\nabla u\|_{L^2(B)}^p, \end{aligned}$$

onde $C = \frac{1}{\sqrt{(N-2)w_N}}$. Daí obtemos que

$$(5.11) \quad \||x|^m u\|_{L^p(B)} \leq C \cdot (w_N)^{1/p} \left[\frac{1}{N - p(N/2 - m - 1)} \right]^{1/p} \cdot \|\nabla\|_{L^2(B)} .$$

Isto nos mostra que a aplicação é contínua para todo $p \in [1, 2N/(N - 2 - 2m))$. Agora provaremos a compacidade. Primeiro notemos que a Proposição 1.4 implica que E está compactamente imerso em $L^1(B)$. Então , pela desigualdade de Hölder para $a \in (0, 1)$, vemos que

$$(5.12) \quad \int_B (|x|^m \cdot |u|)^p dx = \int_B |x|^{mp} \cdot |u|^{p-a} \cdot |u|^a dx \leq \\ \leq \left(\int_B |u| dx \right)^a \cdot \left(\int_B |x|^{mp/(1-a)} \cdot |u|^{(p-a)/(1-a)} dx \right)^{1-a}.$$

Somente precisamos verificar que

$$(5.13) \quad p^* = \frac{p-a}{1-a} < \frac{2N}{N-2-2m^*}, \quad \text{onde } m^* = \left(\frac{mp}{1-a} \right) / \left(\frac{p-a}{1-a} \right)$$

se $m < (N-2)/2$ (já que $m^* \geq m$). É fácil verificar que (5.13) vale se, e somente se,

$$(5.14) \quad p(N-2-2m) < 2N(1-a) + a(N-2).$$

Assim, para um $p < 2N/(N-2-2m)$ fixo, (5.14) pode ser facilmente conseguido escolhendo a suficientemente pequeno. De (5.11) e (5.12) concluímos

$$(5.15) \quad \| |x|^m u \|_{L^p(B)} \leq C \cdot \| u \|_{L^1(B)}^{a/p} \cdot \| \nabla u \|_{L^2(B)}^{(p-a)/p},$$

onde $a > 0$ e é pequeno. A aplicação linear $u \mapsto |x|^m \cdot u$ é uma aplicação compacta de E em $L^p(B)$ para $p \in \left[1, 2N/(N-2-2m) \right)$. De fato, se (u_n) é uma seqüência em E com $\|u_n\|_E \leq 1$, então existe uma subseqüência $u_{n_k} \rightarrow u$ em $L^1(B)$, pois a imersão de E em $L^1(B)$ é compacta. Usando a desigualdade (5.15) obtemos

$$\| |x|^m (u_{n_k} - u_{n_r}) \|_{L^p(B)} \leq C \cdot \| u_{n_k} - u_{n_r} \|_{L^1(B)}^{a/p} \cdot \| \nabla u_{n_k} - \nabla u_{n_r} \|_{L^2(B)}^{(p-a)/p}.$$

Como $u_{n_k} \rightarrow u$ em $L^1(B)$ e $\|u_n\|_E \leq 1$ vemos que $\|u_{n_k} - u_{n_r}\|_{L^1(B)}$ tende a zero e $\|\nabla u_{n_k} - \nabla u_{n_r}\|_{L^2(B)} \leq 2$. Logo $|x|^m u_{n_k}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^p(B)$, donde converge em $L^p(B)$. \diamond

Agora podemos concluir a prova do Teorema 5.6. Primeiro vemos que (5.10) está bem definido, já que

$$\int_B |x|^l \cdot |u|^{\tau+1} dx = \int_B \left(|x|^{l/(\tau+1)} |u| \right)^{\tau+1} dx < \infty$$

pelo Lema 5.4 e supondo que $\tau < (N+2+2l)/(N-2)$. Em seguida, temos que verificar que J satisfaz a hipótese do Teorema 5.3. Já que $\tau > 1$, $\tau+1 > 2$, por (5.11) temos que

$$\int_B |x|^l F(u) dx = o \left(\| \nabla u \|_{L^2(B)}^2 \right) \quad \text{em } u = 0$$

(onde $m = l/(\tau + 1), p = \tau + 1$). Assim, (ii) do Teorema 5.3 está cumprido, pois usando a estimativa (5.11) com $p = \tau + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(B)}^2 - \int_B |x|^l F(u) dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(B)}^2 - C \|\nabla u\|_{L^2(B)}^{\tau+1} \geq \frac{1}{4} \alpha, \end{aligned}$$

se $\rho = \|\nabla u\|_{L^2(B)}$ é suficientemente pequeno, isto é, $J(u) \geq \frac{1}{4} \alpha, \forall u \in S_\rho$. A condição (i) do Teorema 5.3 é fácil de ser verificada, pois da expressão

$$J(tu) = \frac{t^2}{2} \int_B |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{\tau+1}}{\tau+1} \int_B |u|^\tau u dx,$$

para todo $t \geq 0$ e do fato que $\tau > 1$ segue que se $u \in E$, com $u \geq 0$ e $u \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(tu) = -\infty$$

e, portanto, que existe $u \in E$ com $\|u\| > \rho$ e $J(u) < 0$. Para completar a demonstração do Teorema 5.6, resta mostrar que J satisfaz a condição (PS). Seja (u_n) uma seqüência, com $(J(u_n))$ limitada e $J'(u_n) \rightarrow 0$. Já que

$$J'(u)(v) = \int_B (\nabla u) \cdot (\nabla v) dx - \int_B |x|^l \cdot |u|^\tau \cdot v dx,$$

$J'(u_n) \rightarrow 0$ implica

$$|J'(u_n)(u_n)| = \left| \|\nabla u_n\|_{L^2(B)}^2 - \int_B |x|^l \cdot |u_n|^\tau \cdot u_n dx \right| \leq \|J'(u_n)\| \cdot \|u_n\|_E \leq \|u_n\|_E$$

para n suficientemente grande e $|J(u_n)| \leq C$ é equivalente a

$$\left| \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_{L^2(B)}^2 - \int_B |x|^l \cdot F(u_n) dx \right| \leq C.$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^2(B)}^2 &\leq 2C + \frac{2}{\tau+1} \left| \int_B |x|^l \cdot |u_n|^\tau \cdot u_n dx \right| \leq \\ &\leq 2C + \frac{2}{\tau+1} \|\nabla u_n\|_{L^2(B)}^2 + \frac{2}{\tau+1} \|\nabla u_n\|_{L^2(B)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\left(1 - \frac{2}{\tau + 1}\right) \|\nabla u_n\|_{L^2(B)}^2 \leq 2C + \frac{2}{\tau + 1} \|\nabla u_n\|_{L^2(B)}.$$

Como $1 - \frac{2}{(\tau+1)} > 0$, segue que (u_n) é uma seqüência limitada em E . Definimos $T : E \rightarrow E$ por

$$\langle Tu, v \rangle_E = \int_B |x|^l |u|^\tau v dx, \forall v \in E.$$

Então, $\langle -\Delta Tu, v \rangle_{L^2(B)} = \langle |x|^l |u|^\tau, v \rangle_{L^2(B)}, \forall v \in E$ e, portanto, $Tu = -\Delta^{-1}(|x|^l |u|^\tau)$.

Assim, T pode ser decomposto como segue:

$$T : u \mapsto |x|^{l/\tau} \cdot u \mapsto |x|^{l/\tau} \cdot |u| \mapsto |x|^l |u|^\tau \mapsto |x|^l |u|^\tau \mapsto Tu$$

$$E \xrightarrow{T_1} L^{2N\tau/(N+2)} \xrightarrow{T_2} L^{2N\tau/(N+2)} \xrightarrow{T_3} L^{2N/(N+2)} \xrightarrow{T_4} H^{-1} \xrightarrow{T_5} E.$$

Pelo Lema 5.7 T_1 é compacto, já que temos

$$\frac{2N\tau}{N+2} < \frac{2N}{N-2-\frac{2l}{\tau}}$$

se $l/\tau < (N-2)/2$ (da hipótese $\tau < (N+2+2l)/(N-2)$). T_2 é claramente contínua. T_3 é contínuo como mostra a Proposição 1.5. A continuidade da imersão T_4 é implicada pelo Corolário 1.3, e pela Proposição 1.1 vemos que $T_5 = -\Delta^{-1}$ é uma isometria de H^{-1} em $H_0^1 = E$. Assim, fica provado que $T = T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ é uma aplicação compacta de E em E . Além disso, temos que

$$J'(u_n)v = \int_B (\nabla u_n \cdot \nabla v - |x|^l |u_n|^\tau v) dx = \langle u_n - T(u_n), v \rangle, \forall v \in E.$$

O Teorema da Representação de Riesz para um funcional linear contínuo num espaço de Hilbert implica que $\|J'(u_n)\|_{E'} = \|u_n - T(u_n)\|_E$. Mas, do fato de (u_n) ser limitada e como $J'(u_n) \rightarrow 0$ ao $n \rightarrow \infty$ obtemos $u_n - T(u_n) \rightarrow 0$ em E , donde (u_n) possui uma subseqüência convergente. Isto demonstra que J satisfaz a condição de Palais-Smale. Portanto, o Teorema da Passagem pela Montanha assegura que J tem um valor crítico não trivial, donde J possui um ponto crítico não trivial $u \in E$. Resta provar que $u \in C^2(\bar{B})$ e,

portanto será uma solução clássica do problema 5.8. Para isso usamos alguns resultados da Teoria da Regularidade Elíptica, que podem ser vistos em [LU] e [GT], os quais passamos a enunciar. Nos três teoremas que vamos citar supomos que $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ é um aberto limitado satisfazendo a condição do cone exterior uniformemente e

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}(x)D_j u + b_i(x)u) + \sum_{i=1}^N c_i(x)D_i u + d(x)u$$

é tal que $\exists \lambda > 0$ com

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbf{R}^N$$

e $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$ para $i, j = 1, \dots, N$.

Teorema 5.8. *Além das hipóteses acima, suponhamos que as funções*

$$b_i, c_i \in L^q(\Omega), d \in L^{q/2}(\Omega), f^i \in L^q(\Omega), g \in L^{q/2}(\Omega)$$

para algum $q > N$. Se a fronteira de Ω é de classe $C^{(0,\beta)}$ e $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de

$$Lu = g + \sum_{i=1}^N D_i f^i$$

em Ω , satisfazendo uma condição de fronteira

$$u|_{\partial\Omega} \in C^{(0,\beta)}(\partial\Omega), \text{ isto é, } \exists \varphi \in C^{(0,\beta)}(\bar{\Omega})$$

tal que $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$ então $\exists \alpha \in (0, 1)$ tal que $u \in C^{(0,\alpha)}(\bar{\Omega})$.

Teorema 5.9. *Suponhamos que as funções a_{ij}, b_i são uniformemente lipschitzianas em Ω ,*

$$c_i, d \in L^\infty(\Omega), f \in L^2(\Omega), \varphi \in H^2(\Omega)$$

e a fronteira de Ω de classe C^2 . Se $u \in H^1(\Omega)$ é solução de

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \text{ no sentido fraco} \\ u - \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

então $u \in H^2(\Omega)$ e a equação $Lu = f$ é satisfeita em quase todo ponto.

Teorema 5.10. *Suponhamos que as funções $a_{ij}, b_i, c_i, d, f \in C^{(l,\alpha)}(\bar{\Omega})$, onde $l \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0, 1)$, $\varphi \in C^{(l+2,\alpha)}(\bar{\Omega})$ e a fronteira de Ω é de classe $C^{(l+2,\alpha)}$. Se $u \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é solução de*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u - \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

então $u \in C^{(l+2,\alpha)}(\bar{\Omega})$ e é solução clássica do problema acima.

Para completar a demonstração do Teorema 5.6 enunciamos a seguinte proposição, onde a função u é o ponto crítico do funcional J obtido anteriormente.

Proposição 5.11. *Sejam B a bola unitária de \mathbb{R}^N , $l \geq 0$ e*

$$1 < \tau < \frac{N + 2 + 2l}{N - 2}.$$

Seja $u \in H_0^1(B)$ radial solução fraca de $\Delta u + r^l u^\tau = 0$, $u > 0$ em B . Então $u \in C^2(\bar{B})$ e é uma solução clássica de

$$\begin{cases} \Delta u + r^l u^\tau = 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Demonstração Devemos pensar na equação diferencial na forma $\Delta u + du = 0$, com $d = r^l u^{\tau-1}$. Para aplicar o Teorema 5.8 acima, precisamos mostrar que $d \in L^{q/2}(B)$, para algum $q > N$. Como $u \in H_0^1(B)$ é radial temos, pelo Lema 5.4, que existe uma constante $c > 0$ tal que $u(r) \leq cr^{1-N/2}$. Segue daí que para uma constante positiva, ainda denotada por c , temos $r^l u^{\tau-1} \leq cr^{l-(\tau-1)(N/2-1)}$. Mas

$$1 < \tau < \frac{N + 2 + 2l}{N - 2},$$

ou seja, $0 < \tau - 1 < (4 + 2l)/(N - 2)$, donde $0 < (\tau - 1)(\frac{N}{2} - 1) < 2 + l$. Portanto, obtemos que

$$\int_B (r^l u^{\tau-1})^{\tilde{q}} dx \leq \tilde{c} \int_0^1 r^{\tilde{q}[l-(\tau-1)(N/2-1)]} r^{N-1} dr < \infty$$

se

$$\tilde{q}[l - (\tau - 1)(\frac{N}{2} - 1)] + N - 1 > -1, \quad \text{ou melhor, } N > \tilde{q}[(\tau - 1)(\frac{N}{2} - 1) - l]$$

Como $(\tau - 1)(\frac{N}{2} - 1) - l < 2$ pelo cálculo feito acima, vemos que esta última condição é satisfeita para algum $\tilde{q} > \frac{N}{2}$. Tomando $q = 2\tilde{q}$, temos que $q > N$ e $d \in L^{q/2}(B)$. Segue, pelo Teorema 5.8, que $\exists \alpha \in (0, 1)$ tal que $u \in C^{(0, \alpha)}(\overline{B})$, donde $d \in L^\infty(B)$. Como a fronteira de B é de classe C^∞ obtemos do Teorema 5.9 que $u \in L^\infty(B)$. Aplicando o Teorema 5.10 obtemos que $u \in C^{(2, \alpha)}(\overline{B})$ e é uma solução clássica do problema

$$\begin{cases} \Delta u + r^l u^\tau = 0 & \text{em } B \\ u = 0 & \text{em } \partial B. \quad \diamond \end{cases}$$

Como generalização desta proposição obtemos o resultado proposto pelo Teorema 5.1, como segue:

Demonstração do Teorema 5.1. Neste caso, temos a equação diferencial da forma $\Delta u + b(r)f(u) = 0$. O raciocínio é o mesmo feito na demonstração da Proposição 5.11. Consideramos a equação $\Delta u + d(r)u = 0$, onde

$$d(r) = \frac{b(r)f(u(r))}{u(r)}$$

e u é radial. Pela hipótese (5.2), vemos que $f(u) = o(u)$ em $u = 0$, donde $f(u)/u$ está bem definida e se anula em $u = 0$. Como $b(r)$ é contínua em $[0, 1]$ segue que $b(r)$ é limitada. Este fato junto com a hipótese (5.3) implica que existe uma constante $c > 0$ tal que $0 \leq b(r) \leq cr^l$, para todo $r \in [0, 1]$. Como $u \in H_0^1(B)$ é radial segue, pelo Lema 5.4, que $u(r) \leq cr^{1-N/2}$, para todo $r \in [0, 1]$. Daí obtemos que

$$b(r)u^\tau \leq cr^{l-(\tau-1)(N/2-1)}$$

para

$$1 < \tau < \frac{N + 2 + 2l}{N - 2}.$$

Pela hipótese (5.5) temos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\frac{f(z)}{z} \leq cz^{\tau-1},$$

para z grande. Daí segue que

$$\frac{f(z)}{z} \leq c(1 + z^{\tau-1}),$$

para todo $z \in [0, +\infty)$. Portanto, concluímos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$0 \leq d(r) \leq c(r^{l-(\tau-1)(N/2-1)} + r^l),$$

para todo $r \in [0,1]$. Usando a Proposição 5.11, obtemos que $d \in L^q(B)$ para algum $q > N$ e, portanto $u \in C^2(\bar{B})$ é solução clássica do problema (5.1). \diamond

APÊNDICE

O TEOREMA DA PASSAGEM PELA MONTANHA

Neste apêndice vamos provar a versão usual do Teorema da Passagem pela Montanha. As idéias envolvidas na prova deste teorema são muito simples. Um ingrediente chave nesta demonstração é o Teorema da Deformação. Antes de provar este teorema precisamos enunciar uma definição e um lema, a saber

Definição . Sejam E um espaço de Banach real, $U \subset E$ aberto e $J \in C^1(U; \mathbf{R})$. Então $v \in E$ é dito um vetor pseudo-gradiente para J em $u \in U$ se valem:

$$(A.1) \quad \|v\| \leq 2 \|J'(u)\| \quad e$$

$$(A.2) \quad J'(u)v \geq \|J'(u)\|^2.$$

Daqui em diante, denotaremos pseudo-gradiente por p.g. Notemos que um vetor p.g. não é único e qualquer combinação convexa de vetores p.g. para J em u é também um vetor p.g. para J em u .

Sejam $J \in C^1(E; \mathbf{R})$ e $\tilde{E} \equiv \{u \in E | J'(u) \neq 0\}$. Então $V : \tilde{E} \rightarrow E$ é dito um campo vetorial p.g. em \tilde{E} se V é localmente de Lipschitz e $V(x)$ é um vetor p.g. para J para todo $x \in \tilde{E}$.

Para demonstrar o lema abaixo usaremos um resultado conhecido dos Espaços Métricos. Uma família $\mathbf{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço topológico X chama-se localmente finita quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos C_λ . Dadas duas coberturas \mathbf{C} e \mathbf{C}' de um espaço topológico X , dizemos que \mathbf{C} é um refinamento de \mathbf{C}' quando para todo $C \in \mathbf{C}$ existe algum $C' \in \mathbf{C}'$ tal que

$C \subset C'$. Um espaço topológico X chama-se paracompacto quando toda cobertura aberta de X possui um refinamento que é localmente finito. Todo espaço métrico é paracompacto. Vamos usar o fato de que \tilde{E} é paracompacto para provar o

LEMA A.1. *Se $J \in C^1(E; \mathbf{R})$, existe um campo vetorial p.g. para J em \tilde{E} .*

Demonstração. Para cada $u \in \tilde{E}$, podemos achar um vetor $w \in E$ tal que $\|w\| = 1$ e $J'(u)w > 2/3\|J'(u)\|$. Então $z = 3/2\|J'(u)\|w$ é um vetor p.g. para J em u com desigualdades estritas em (A.1) e (A.2). Pela continuidade de J' vemos que z é um vetor p.g. para todo $v \in N_u$, onde N_u é uma vizinhança aberta de u . Já que $\{N_u | u \in E\}$ é uma cobertura aberta de \tilde{E} , ela possui um refinamento localmente finito que denotamos por $\{M_j\}$. Denotemos por $\rho_j(x)$ a distância de x ao complemento de M_j . Então $\rho_j(x)$ é de Lipschitz e $\rho_j(x) = 0$ se $x \notin M_j$. Seja $\beta_j(x) = \rho_j(x) / \sum_k \rho_k(x)$. O denominador de cada β_j é uma soma finita, já que cada $x \in E$ pertence a um número finito dos conjuntos M_k . Cada conjunto M_j está contido em algum N_{u_j} . Seja $z_j \equiv 3/2\|J'(u_j)\|w_j$, o vetor p.g. para J em N_{u_j} construído acima e tomemos $V(x) = \sum_j z_j \beta_j(x)$. Já que $0 \leq \beta_j(x) \leq 1$ e $\sum_j \beta_j(x) = 1$, para cada $x \in \tilde{E}$, $V(x)$ é uma combinação convexa de vetores p.g. para J em x . Além disso, V é localmente de Lipschitz. \diamond

Definimos $A_s \equiv \{u \in E | J(u) \leq s\}$ e $K_s \equiv \{u \in E | J(u) = s \text{ e } J'(u) = 0\}$. Agora queremos provar a seguinte versão do Teorema da Deformação.

Teorema A.2. (Teorema da Deformação). *Sejam E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E; \mathbf{R})$ satisfazendo (PS). Se $c \in \mathbf{R}, \bar{\varepsilon} > 0$, e O é uma vizinhança qualquer de K_c , então existem $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0, 1] \times E; E)$ tais que:*

$$(A.3) \quad \eta(0, u) = u \text{ para todo } u \in E.$$

$$(A.4) \quad \eta(t, u) = u \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ se } J(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}].$$

$$(A.5) \quad \eta(t, u) \text{ é um homeomorfismo de } E \text{ em } E \text{ para cada } t \in [0, 1].$$

$$(A.6) \quad \|\eta(t, u) - u\| \leq 1 \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e } u \in E.$$

$$(A.7) \quad J(\eta(t, u)) \leq J(u) \text{ para todo } t \in [0, 1] \text{ e } u \in E.$$

$$(A.8) \quad \eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus O) \subset A_{c-\varepsilon}.$$

$$(A.9) \quad \text{Se } K_c = \emptyset, \eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}.$$

Demonstração . A função η desejada é construída como sendo a solução de um fluxo gradiente negativo para J modificado convenientemente. Alguns preliminares são necessários antes de tomarmos a equação diferencial citada acima. Pela (PS), K_c é compacto. Seja $N_\delta \equiv \{u \in E \mid d(u, K_c) < \delta\}$, onde $d(u, K_c)$ denota a distância de u até K_c . Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, obtemos $N_\delta \subset O$. Notemos também que se $K_c = \emptyset$ então $N_\delta = \emptyset$, assim vale (A.9) em vez disso. Exigimos que existam constantes $b, \hat{\varepsilon} > 0$ tais que vale

$$(A.10) \quad \|J'(u)\| \geq b \text{ para todo } u \in A_{c+\hat{\varepsilon}} \setminus (A_{c-\hat{\varepsilon}} \cup N_{\delta/8}).$$

Caso contrário, existem seqüências $b_n \rightarrow 0, \hat{\varepsilon}_n \rightarrow 0$, e $u_n \in A_{c+\hat{\varepsilon}_n} \setminus (A_{c-\hat{\varepsilon}_n} \cup N_{\delta/8})$ tais que $\|J'(u_n)\| < b_n$. Pela (PS), temos que existe uma subseqüência de u_n convergindo a $u \in K_c \setminus N_{\delta/8}$. Mas, este conjunto é vazio. Portanto, existem as constantes $b, \hat{\varepsilon}$ em (A.10). Já que (A.10) continua válido se $\hat{\varepsilon}$ for diminuído, podemos supor, além disso, que

Livro
 Matemática
 Instituto de Física de São Carlos

$$(A.11) \quad 0 < \hat{\varepsilon} < \min\left(\bar{\varepsilon}, \frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8}\right) .$$

Escolhendo qualquer $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon})$, definimos

$$A \equiv \{u \in E | J(u) \leq c - \hat{\varepsilon}\} \cup \{u \in E | J(u) \geq c + \hat{\varepsilon}\}$$

$$\text{e } B \equiv \{u \in E | c - \varepsilon \leq J(u) \leq c + \varepsilon\}$$

Portanto, $A \cap B = \emptyset$. Toma

$$g(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} .$$

Então $g = 0$ em A , $g = 1$ em B , $0 \leq g \leq 1$, e g é de Lipschitz em E . Similarmente, existe uma função de Lipschitz f em E tal que $f = 1$ em $E \setminus N_{\delta/4}$, $f = 0$ em $N_{\delta/8}$, e $0 \leq f \leq 1$. Em seguida, definimos $h(s) = 1$ para $s \in [0, 1]$ e $h(s) = 1/s$ para $s \geq 1$. Já que $J \in C^1(E; \mathbf{R})$, pelo Lema A.1, existe um campo vetorial p.g. V para J em \tilde{E} . Finalmente, tomamos $W(x) = -f(x)g(x)h(\|V(x)\|)V(x)\chi_{\tilde{E}}$, onde $\chi_{\tilde{E}}$ denota a função característica de \tilde{E} . Então, pela maneira como foi construída, W é localmente de Lipschitz em E com $0 \leq \|W(x)\| \leq 1$. Agora podemos definir a aplicação de η . Consideremos o problema de Cauchy:

$$(A.12) \quad \frac{d\eta}{dt} = W(\eta), \quad \eta(0, u) = u.$$

O teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias implica que, para cada $u \in E$, (A.12) tem solução única, definida para t num intervalo maximal $(t^-(u), t^+(u))$. Afirmamos que $t^\pm(u) = \pm\infty$. Para isto, suponhamos que $t^+(u) < \infty$. Tomamos $t_n \uparrow t^+(u)$. Integrando a expressão (A.12), obtemos

$$(A.13) \quad \|\eta(t_{n+1}, u) - \eta(t_n, u)\| \leq |t_{n+1} - t_n|, \text{ já que } \|W(\cdot)\| \leq 1.$$

Mas, então $\eta(t_n, u)$ é uma seqüência de Cauchy e, portanto, converge para algum \bar{u} ao $t_n \rightarrow t^+(u)$. A solução para (A.12) com dado inicial \bar{u} fornece uma continuação de $\eta(t, u)$ para valores maiores que $t^+(u)$, contradizendo a sua maximalidade. Similarmente, provamos que $t^-(u) = -\infty$. A dependência contínua de soluções de (A.12) com dado inicial u implica que $\eta \in C([0, 1] \times E; E)$ e de (A.12) segue (A.3). Já que $\bar{\varepsilon} > \hat{\varepsilon}$, $g(x) = 0$ em A , donde (A.4) é satisfeito. A propriedade de semigrupo para soluções de (A.12) nos dá (A.5). Integrando (A.12), usando o fato que $\|W(\cdot)\| \leq 1$ e (A.3) obtemos (A.6). Para verificar (A.7), notemos primeiro que se $W(u) = 0$, $\eta(t, u) \equiv 0$ é solução de (A.12) (pela unicidade), assim (A.7) é trivialmente satisfeito. Se $W(u) \neq 0$, então $u \in \tilde{E}$ e assim $V(u)$ está definida, bem como $V(\eta(t, u))$ e de (A.2) segue

$$(A.14) \quad \begin{aligned} \frac{dJ(\eta(t, u))}{dt} &= J'(\eta(t, u)) \frac{d\eta}{dt} = \\ &= -J'(\eta(t, u))f(\eta(t, u))g(\eta(t, u))h(\|V(\eta(t, u))\|)V(\eta(t, u)) \leq 0, \end{aligned}$$

donde obtemos (A.7).

Resta somente verificar (A.8), ou ainda, que $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus N_\delta) \subset A_{c-\varepsilon}$. Se $u \in A_{c-\varepsilon}$ então $J(\eta(t, u)) \leq c - \varepsilon$ por (A.7). Deste modo, necessitamos somente provar que

$$u \in Y \equiv A_{c+\varepsilon} \setminus (A_{c-\varepsilon} \cup N_\delta) \text{ implica que } \eta(1, u) \in A_{c-\varepsilon}.$$

Seja $u \in Y$. O raciocínio usado para provar (A.7) mostrou

$$(A.15) \quad \frac{dJ(\eta(t, u))}{dt} \leq 0.$$

Já que $g = 0$ em $A_{c-\hat{\varepsilon}}$, a órbita $\eta(t, u)$ não pode entrar em $A_{c-\hat{\varepsilon}}$. Portanto, (A.15) implica

$$(A.16) \quad J(\eta(0, u)) - J(\eta(t, u)) \leq \varepsilon + \hat{\varepsilon} < 2\hat{\varepsilon}$$

para todo $t \geq 0$. Suponhamos que $u \in Y$ e $\eta(t, u) \in Z \equiv A_{c+\varepsilon} \setminus (A_{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/2})$ para $s \in [0, t]$. Isto, certamente, acontece quando t for suficientemente pequeno. Então, para tal s , $\eta(s, u) \in \tilde{E}$ (por (A.10)) e $f(\eta(s, u)) = 1 = g(\eta(s, u))$. Por (A.16) temos que

$$\begin{aligned}
2\hat{\varepsilon} &\geq \int_t^0 -J'(\eta(s, u))h(\|V(\eta(s, u))\|)V(\eta(s, u))ds = \\
&= \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|)J'(\eta(s, u))V(\eta(s, u))ds \geq \\
&\geq \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|)\|J'(\eta(s, u))\|^2 ds \geq \\
(A.17) \quad &\geq b \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|)\|J'(\eta(s, u))\| ds \geq \\
&\geq \frac{b}{2} \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|)\|V(\eta(s, u))\| ds \geq \\
&\geq \frac{b}{2} \left\| \int_0^t h(\|V(\eta(s, u))\|)V(\eta(s, u)) ds \right\| = \\
&= \frac{b}{2} \left\| \int_0^t W(\eta(s, u)) ds \right\| = \frac{b}{2} \|\eta(t, u) - u\|,
\end{aligned}$$

onde usamos, sucessivamente, (A.2), (A.10) e (A.1). Portanto, por (A.17) e (A.11),

$$\|\eta(t, u) - u\| \leq \frac{4\hat{\varepsilon}}{b} < \frac{\delta}{8}.$$

Deste modo, a órbita $\eta(t, u)$ não pode sair de Z entrando em $N_{\delta/2}$. Conseqüentemente, o único modo para o qual $\eta(t, u)$ pode sair de Z é entrando em $A_{c-\varepsilon}$. Afirmamos que isto ocorre para algum $t \in (0, 1)$, ficando, assim, provado (A.8). Caso contrário, teríamos $\eta(t, u) \in Z$ para todo $t \in (0, 1)$ e como em (A.17), vemos que

$$(A.18) \quad \frac{dJ(\eta(t, u))}{dt} \leq -h\left(\|V(\eta(t, u))\|\right)\|J'(\eta(t, u))\|^2.$$

Se, para algum $t \in (0, 1)$, valem $\|V(\eta(t, u))\| \leq 1$, $h(\|V(\eta(t, u))\|) = 1$, (A.10) e (A.18) implicam

$$(A.19) \quad \frac{dJ(\eta(t, u))}{dt} \leq -b^2.$$

Por outro lado, se para algum $t \in (0, 1)$, valem

$$\|V(\eta(t, u))\| < 1 \quad , \quad h(\|V(\eta(t, u))\|) = \|V(\eta(t, u))\|^{-1},$$

donde (A.1) e (A.18) nos dão

$$(A.20) \quad \frac{dJ(\eta(t, u))}{dt} \leq -\frac{1}{4}.$$

Conseqüentemente, para todo $t \in (0, 1)$, temos

$$(A.21) \quad \frac{dJ(\eta(t, u))}{dt} \leq -\min(b^2, \frac{1}{4}).$$

Integrando (A.21) e combinando esse resultado com (A.16), segue que

$$\min(b^2, \frac{1}{4}) \leq J(u) - J(\eta(t, u)) \leq 2\hat{\varepsilon},$$

o que contradiz (A.11). \diamond

Uma decorrência imediata do Teorema A.2 é o

Corolário A.3. *Seja E um espaço de Banach real. Suponhamos que $J \in C^1(E; \mathbf{R})$, satisfazendo (PS). Para $s, c \in \mathbf{R}$, tomemos $K_c \equiv \{u \in E \mid J(u) = c \text{ e } J'(u) = 0\}$ e $A_s \equiv \{u \in E \mid J(u) \leq s\}$. Se c não é um valor crítico de J , dado qualquer $\bar{\varepsilon} > 0$, existem $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0, 1] \times E; E)$, tais que:*

$$(A.22) \quad \eta(1, u) = u \text{ se } J(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}],$$

$$(A.23) \quad \eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}.$$

Finalmente, podemos provar o seguinte:

Teorema A.4. (Teorema da Passagem pela Montanha). *Sejam E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E, \mathbf{R})$ satisfazendo (PS). Suponhamos que $J(0) = 0$ e que valem*

$$(A.24) \quad \text{existem constantes } \rho, \alpha > 0 \text{ tais que } J \Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha,$$

$$(A.25) \quad \text{existe } e \in E \setminus B_\rho \text{ tal que } J(e) \leq 0 .$$

Então J possui um valor crítico $c \geq \alpha$, caracterizado como

$$(A.26) \quad c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1]; E) | g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Demonstração . A maneira como c foi definido nos mostra que $c < \infty$. Se $g \in \Gamma$, $g([0,1]) \cap \partial B_\rho \neq \emptyset$. Portanto, por (A.24) segue que

$$\max_{u \in g([0,1])} J(u) \geq \inf_{w \in \partial B_\rho} J(w) \geq \alpha.$$

Conseqüentemente, $c \geq \alpha$. Suponhamos que c não seja um valor crítico de J . Então, pelo Corolário A.3, com $\bar{\varepsilon} = \alpha/2$, vemos que $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ e η é da forma dada pelo Corolário A.3. Escolhamos $g \in \Gamma$, tal que

$$(A.27) \quad \max_{u \in g([0,1])} J(u) \leq c + \varepsilon$$

e consideremos $h(t) \equiv \eta(1, g(t))$. Claramente, $h \in C([0,1]; E)$. Também, $g(0) = 0$ e $J(0) = 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \bar{\varepsilon}$ implicam $h(0) = 0$ por (A.22). Similarmente, $g(1) = e$ e $J(e) \leq 0$ implicam que $h(1) = e$. Conseqüentemente, $h \in \Gamma$ e por (A.26) segue que

$$(A.28) \quad c \leq \max_{u \in h([0,1])} J(u).$$

Mas, por (A.27), $g([0,1]) \subset A_{c+\varepsilon}$, assim (A.23) nos dá $h([0,1]) \subset A_{c-\varepsilon}$, isto é,

$$(A.29) \quad \max_{u \in h([0,1])} J(u) \leq c - \varepsilon,$$

contradizendo (A.28). Deste modo, c é um valor crítico de J . \diamond

REFERÊNCIAS

- [AR] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., 14, 349-381 (1973).
- [C] Chandrasekhar, S., "An Introduction to the Study of Stellar Structure", Dover (1957).
- [CS] Castro, A.; Shivaji, R., *Nonnegative solutions to a semilinear Dirichlet Problem in a ball are positive and radially symmetric*. Comm. Partial Differential Equations, 14, 1091-1100 (1989).
- [F] Figueiredo, D.G., "The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours", Springer-Verlag (1989).
- [GNN] Gidas, B.; Ni, W.M.; Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the Maximum Principle*, Comm. Math. Phys., 68, 209-243 (1979).
- [GT] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S., "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag (1977).
- [KW] Kazdan, J.; Warner, F.W., *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., 28, 567-597 (1975).
- [LU] Ladyzhenskaya, O.; Uraltseva, N., "Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Academic Press (1968).
- [M] Mizohata, S., "The Theory of Partial Differential Equation", Cambridge Univ. Press (1973).
- [N] Ni, W.M., *A nonlinear Dirichlet Problem on the unit ball and its applications*, Ind. Univ. Math. J., 31, 801-807 (1982).

- [Na] Nagasaki, K., *Radial solutions for $\Delta u + |x|^l |u|^{p-1} u = 0$ on the unit ball in \mathbf{R}^n* . J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 36, 211-232 (1989).
- [NY] Ni, W.N.; Yotsutani, S., *On Matukuma's Equations and related topics*, Proc. Japan Acad., 62, Ser.A (1986).
- [P] Pohozaev, S.I., *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Soviet Math. Doklady, 6, 1408-1411 (1965).
- [PW] Protter, M.H.; Weinberger, H.F., "Maximum Principles in Differential Equations", Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall (1967).
- [R] Rabinowitz, P., "Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations", Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society Providence, Rhode Island (1986).