Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática

APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES GERAIS DE SEGUNDA ORDEM EM CONTROLE

por

ALEXANDRE GUIRLAND NOWOSAD

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenão do grau de Mestre.

Orientador

Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeyssen

Porto Alegre, Abril de 1993.

RESUMO

Esta tese objetiva estudar aplicações de sistemas lineares gerais de segunda ordem ao controle de sistemas. É mostrada fórmula para solução da equação evolutiva matricial de segunda ordem, tanto de tempo discreto como contínuo, e são descritos testes para a contolabilidade e observabilidade de sistemas modelados por equações deste tipo, desenvolvidos por J. C. R. Claeyssen. Somando-se a isto A. G. Nowosad analisa algumas aplicações destes sistemas 'a engenharia aero-espacial, especialmente ao controle de satélites.

ABSTRACT

This thesis concerns the study of second-order general linear systems' applications to control systems. The authors show a formula for the solution of second-order matrix evolutive equations, both continuous and discrete-time, and tests for controlability and observability of systems modelled by these kinds of equations, developed by J. C. R. Claeyssen. Adding to this, A. G. Nowosad analyses some applications of these systems to aerospace engineering, specially satellite control.

PREFÁCIO

Este trabalho objetiva estudar aplicações de sistemas lineares gerais de segunda ordem ao controle. É mostrada fórmula para solução da equação evolutiva matricial de segunda ordem, tanto de tempo discreto como contínuo, e sao descritos testes para a contolabilidade e observabilidade de sistemas modelados por equações deste tipo, desenvolvidos por J. C. R. Claeyssen. Somando-se a isto A. G. Nowosad analisa algumas aplicações destes sistemas 'a engenharia aero-espacial, especialmente ao controle de satélites.

No primeiro capítulo são apresentados os conceitos básicos de importância para a análise de sistemas lineares. Explicamos que equaçoes evolutivas podem ser solucionadas por métodos operacionais, modais [9] e não-modais [5], sendo destacado o método mais eficiente na prática da ciência aplicada [2]. Depois o leitor é introduzido 'a teoria moderna de controle, mais explicitamente falando 'a controlabilidade e observabilidade de sistemas, conhecendo testes para estas duas importantes propriedades deles [10].

O segundo capítulo trata de sistemas dinamicos matriciais de segunda ordem. Dois métodos para soluçao destas equações são citados, o de Hamilton [11], modal, e o de Claeyssen [4], não-modal, mostrando-se a vantagem do segundo.

A controlabilidade e observabilidade de sistemas matriciais de segunda ordem são estudadas no terceiro capítulo deste volume. Testes destas propriedades para uma classe bem mais ampla de sistemas do que Ahmedian [1] e Hughes et al [7] consideraram são descritos.

Aplicaçoes de sistemas dinamicos lineares de segunda ordem 'a engenharia aero-espacial [1,6,7,8] são apresentados no quarto capítulo, o final. Nowosad mostra que os testes para controlabilidade e observabilidade de casos particulares dos sistemas em questão elaborados por Hughes e Skelton (caso conservativo), e Ahmedian (caso não-conservativo) são casos particulares dos testes propostos por Claeyssen citados no capítulo anterior.

Os autores deste volume tentam levar o leitor a tomar ciência de que existem métodos eficientes em termos computacionais para a análise e o controle de sistemas lineares gerais de segunda ordem. Tais sistemas podem ser mecânicos, elétricos, térmicos, acústicos ou de qualquer natureza dinâmica, embora suponha-se que sejam de parâmetros concentrados. Talvez, realizando-se uma análise estatística segundo a formulação de Claeyssen para os problemas físicos descritos pela equação evolutiva em questão, aspectos interessantes deles se revelassem.

Capítulo I EQUACOES EVOLUTIVAS MATRICIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Seção 1 - INTRODUÇÃO

Sistemas de equações lineares de diferença de primeira ordem de coeficientes constantes

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} q_{Dj}(k+1) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_{Dj}(k) + f_{Di}(k), i=1,\ldots,n$$

ou de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \frac{d}{dt} q_{aj}(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_{aj}(t) + f_{ai}(t), i=1,\ldots,n$$

podem ser escritas de maneira compacta

$$P(\Omega) q=f \quad (1.1.1)$$

onde

$$P(\Omega)=\Omega . M-B$$

sendo

$$M=[m_{ij}], q=\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

e Ω denotando o operador

$$\Omega . q=\Omega . q_D(k)=q_D(k+1)=q_D'(k)$$

no caso da variavel q ser de tempo discreto k ou

$$\Omega . q=\Omega . q_a(t)=\frac{d}{dt} q_a(t)=q_a'(t)$$

no caso da variavel ser de tempo contínuo t.Tanto para tempo discreto como para contínuo o operador Ω obedece a regra da potenciação

$$\Omega^{m+s}=\Omega^m\Omega^s$$

para m e s inteiros positivos, sendo por convenção $\Omega^0=I$ o operador identidade, isto é, $\Omega^0 q=q$ [3].

A resolução de (1.1.1), munida de uma condição no tempo inicial zero pode ser realizada com o uso da transformada unificada

$$\Gamma\{q(t,k)\}=aQ_a(s)+bQ_D(z),$$

onde

$$q(t,k)=aq_a(t)+bq_D(k),$$

denotando $Q_a(s)$ e $Q_D(z)$ a transformada de Laplace de $q_a(t)$ e a Transformada Z de $q_D(k)$, respectivamente. Aqui **a** e **b** sao numeros reais tais que **a+b**=1 e **ab**=0.

Usando propriedades das transformadas ja mencionadas obtem-se

$$\Gamma\{\Omega.q(t,k)\}=a.[sQ_a(s)-q_a(0)]+b.[zQ_D(z)-zq_D(0)].$$

Da aplicação do operador Ω 'a equação (1.1.1) decorre a equação operacional

$$\Gamma\{q(t,k)\}=a.P^{-1}(s)[Mq_a(0)+F_a(s)]+b.P^{-1}(z)[zMq_D(0)+F_D(z)] \quad (1.1.2)$$

onde

$$\Gamma\{f(t,k)\}=aF_a(s)+bF_D(z)$$

para

$$f(t,k)=af_a(t)+bf_D(k).$$

Da equacao (1.1.2) decorre finalmente que

$$q(t,k)=a.L^{-1}\{P^{-1}(s)\,[Mq_a(0)+F_a(s)]\}+b.Z^{-1}\{P^{-1}(z)\,[zMq_D(0)+F_D(z)\}.$$
(1.1.3)

Para sistemas regulares com det M≠0 temos que

$$P^{-1}(\Omega)M=(\Omega I-M^{-1}B)$$

e concluimos de (1.1.3) que

$$q(t,k)=E(t,k)q(0,0)+E*f$$

onde

$$E(t,k)=a.\exp(M^{-1}Bt)+b.(M^{-1}B)^k=aD_a(t)+bD_D(k)$$

e

$$E*f=a\int_0^t \exp(M^{-1}B(t-\tau))\,d\tau+b\sum_{l=0}^{k-1}(M^{-1}B)^{k-l-1}f_D(l).$$

De agora em diante suporemos M a matriz identidade.

Exemplo [10]:
Seja o sistema

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\u\end{bmatrix}$$

onde u(t) é a função degrau unitário de tempo contínuo tal que

$$u(t)\begin{cases}=0, & t<0\\=1, & t\geq 0\end{cases}$$

Para este sistema

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix},\ f=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$E(t,k)=e^{Bt}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix},$$

$$E*f=\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}d\tau$$

$$\begin{bmatrix}q_1(t)\\q_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1(0)\\q_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

Seção 2 - CÁLCULO DE E(t,k)

O problema de valor inicial matricial de primeira ordem

$$\Omega E(t,k)=AE(t,k),A_{nxn}$$
$$E(0,0)=I,$$

tem a solução

$$E(t,k)=L^{-1}\{P^{-1}(s)\}+bZ^{-1}\{P^{-1}(z)\}$$

onde

$$P(\Omega)=\Omega I-A.$$

Para s de módulo suficientemente grande, tal que $|s|>\|A\|$ ou $|s|>\|A\|$ (o raio espectral de A), temos que [5]

$$(sI-A)^{-1}=s^{-1}(I-As^{-1})^{-1}=s^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{A}{s})^{l}$$

é uma série convergente.

Assim, de

$$E(t,k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma}P^{-1}(s)\,[ae^{st}+bs^{k}]\,ds,\ (1.2.1)$$

onde γ é um círculo de raio R>$\|A\|$, decorre que

$$e^{At}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma}(sI-A)^{-1}e^{st}ds=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^{l}t^{l}}{l!}$$
$$A^{l}=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma}(sI-A)^{-1}s^{l}ds.$$

Estas fórmulas analíticas, convenientes do ponto de vista téorico, devem, na prática, ser calculadas. A seguir estabeleceremos dois tipos de algoritmos para o calculo de E(t,k). O primeiro será chamado de modal por requerer o conhecimento dos autovalores de A e o segundo de não-modal, por não necessitar do espectro de A para o calculo de E(t,k).

ALGORITMO MODAL PARA CALCULAR A^k

O Algoritmo Modal de La Salle [9] consiste em escrever A^k segundo uma fórmula de variação de parâmetros

$$A^{k}=\sum_{j=1}^{r}w_{j}(k)\,\theta_{j-1}.$$

Deduzimos a fórmula partindo do polinômio

$$\Psi(\lambda)=\prod_{j=1}^{r}(\lambda-\lambda_{j})=\lambda^{r}+a_{r-1}\lambda^{r-1}+...+a_{0},$$

que é um polinômio qualquer tal que $\Psi(A)=0$. Nao precisamos supor, relativamente ao algoritmo, que as raizes de Ψ sao autovalores de A, embora cada autovalor de A seja raiz de Ψ. Seria vantajoso para o calculo de A^k tomar para Ψ o polinômio mínimo de A, mas sempre podemos tomar para ele o polinômio caraterístico de A. defina relativo a Ψ

$$Q_{j}=(A-\lambda_{j})Q_{j}-1,Q_{0}=I,\ (1.2.1)$$

tal que $Q_r=0$ e

$$AQ_{j-1}=Q_{j}+\lambda_{j}Q_{j-1},\ j\geq1.$$

Entao $A_0=Q_0$, $A_1=AQ_0=Q_1+\lambda Q_0$, $A_2=Q_2+(\lambda_1+\lambda_2)Q_1+\lambda_1^2Q_0$, ..., e vemos que

$$A^k=\sum_{j=1}^{r} w_j(k)\,Q_{j-1},\ (1.2.2)$$

onde os $w_j(k)$ podem ser determinados. Fazendo

$$X(k)=\sum_{j=1}^{r} w_j(k)\,Q_{j-1},$$

precisamos encontrar $w_j(k)$ para os quais $X(0)=I$ e $AX(k)=X(k+1)$. Como nao supomos que $\Psi(\lambda)$ é o polinômio mínimo de A, os Q_j não podem ser linearmente independentes e (1.2.2) não nessariamente determina os $w_j(k)$ unicamente. Entretanto a condição inicial é satisfeita selecionando

$$w_1(k)=1,\ w_2(k)=\ldots=w_r(k)=0,$$

e $X(k+1)=AX(k)$ é satisfeita se

$$\sum_{j=1}^{r} w_j(k+1)\,Q_{j-1}=A\Big[\sum_{j=1}^{r} w_j(k)\,Q_{j-1}\Big]=\sum_{j=1}^{r} w_j(k)\,[Q_j+\lambda Q_{j-1}].$$

Logo (1.2.2) é verdadeira se

$$\begin{array}{c} w_1(k+1)=\lambda w_1(k),\ w_1(0)=1 \\ w_j(k+1)=\lambda w_j(k)+w_{j-1}(k),\ w_j(0),\ j=2,\ldots,r \end{array} \quad (1.2.3)$$

As equações (1.2.3) e (1.2.1) são algoritmos para o cálculo de Q_j e $w_j(k)$, isto é, para o cálculo de A^k dadas as raizes do polinômio Ψ. Tais polinômios podem ser calculados. Note que o algoritmo é válido para qualquer matriz quadrada A, real ou complexa.

ALGORITMO NÃO-MODAL PARA CALCULAR E(t,k)

O algoritmo não-modal consiste em escrever $(sI-A)^{-1}$ como

$$(sI-A)^{-1}=B(s)p(s)^{-1}$$

onde

$$p(s)=\det[sI-A]=\sum_{l=0}^{n} b_l s^{n-l}, b_0=1$$

e

$$B(s)=adj(sI-A)=\sum_{l=0}^{n} B_l s^{l}$$

sendo

$$B_{n-1}=I,\ B_{n-l-1}=AB_{n-l}+b_l-I,\ l=1,..,n-1,$$

donde

$$B(s)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i s_i^{j-i-1} A^{n-j}.$$

Portanto, notando que

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma}\frac{s^{j-i-1}(ae^{st}+bs^{k})}{p(s)}ds=\Omega^{j-i-1}d(t,k),$$

onde d(t,k) é a solucao dinâmica da equação escalar

$$P(\Omega)d(t,k)=0$$
$$d(0,0)=1,$$

podemos dizer que

$$E(t,k)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma}\frac{s^{j-i-1}[ae^{st}+bs^{k}]}{p(s)}ds\right]A^{n-j}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i\Omega^{j-i-1}d(t,k)A^{n-j}$$

onde d(t,k) satisfaz o problema de valor inicial escalar

$$(\Omega I-A)d(t,k)=0$$
$$d(0,0)=1.$$

Exemplo:

Em meteorologia aparecem equações diferenciais matriciais do tipo [2]

$$\frac{dZ}{dt}+AZ=0$$

onde

$$A=\begin{bmatrix} E & F & 0 & F \\ F & E & F & 0 \\ 0 & F & E & F \\ F & 0 & F & E \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & .1 & 0 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z=\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix}, Z_k \text{ é } 3x3 \text{ para } k=1 \text{ até } k=4.$$

Sabemos que $Z(t)=e^{At}.Z(0)=D(t).Z(0)$. Devido 'a estrutura especial de A, $D(t)=e^{At}=\Lambda^{*}e^{Lt}\Lambda$ onde

$$e^{Lt}=\begin{bmatrix} e^{L_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{L_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{L_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{L_4 t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4(t) \end{bmatrix}.$$

Portanto o problema se reduz a calcular cada um dos $D_k(t)$, que é solução de

$$V_k'(t)=-L_k V_k(t),\ V_k(0)=I_{3x3}$$

$$L_k=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha_k \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_k=2\left[\cos\left(\frac{2\pi(k-1)}{4}\right)-1\right].$$

Como $\det(sI-L_k)=s^3-\mu_k^2 s$, onde $\mu_k=0.1\alpha_{k-1}$, para k=1 até k=4, temos que

$$b_4=1,\ b_3=b_2=b_0=0,\ b_1=-\mu_k^2.$$

Devemos portanto resolver os problemas de valor inicial

$$d_k'''(t)-\mu_k^2 d_k'(t)=0$$
$$d_k''(0)=1, d_k'(0)=d_k(0)=0.$$

A solução para k=1 até k=4 é

$$d_k(t)=\frac{1}{\mu_k^2}\left[\frac{e^{\mu_k t}+e^{-\mu_k t}}{2}-1\right].$$

Devido a isto

$$D_k(t)=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(-L_k)^{(4-j)}=$$

$$=\frac{1}{\mu_k}\begin{bmatrix}(\mu_k^2+1) & 0 & -\alpha_k\\ 0 & 0 & 0\\ 0.1 & 0 & -1\end{bmatrix}+\cos(\theta_k t)\begin{bmatrix}-1 & 0 & \alpha_k\\ 0 & \mu_k^2 & 0\\ 0.1 & 0 & (\mu_k^2+1)\end{bmatrix}+\frac{sen(\theta_k)}{\theta_k}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & \alpha_k\\ 0 & 0.1 & 0\end{bmatrix},$$

sendo $\theta_k=\mathrm{Im}[\mu_k]$.

Seção 3 - CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Um sistema é dito controlável no ponto (t_0,k_0) se é possível, usando-se um vetor de controle arbitrário (sem restrições), transferir em tempo finito qualquer estado inicial $q(t_0,k_0)$ para qualquer estado inicial $q(t_0,k_0)$ para qualquer outro estado $q(t_1,n)$.

Um sistema é dito observável no ponto (t_0,k_0) se, sendo o estado do sistema naquele ponto $q(t_0,k_0)$, é possível determinar este estado a partir da observação da saida num tempo finito.

Estudaremos as condições de controlabilidade e observabilidade para o sistema

$$\begin{matrix}\Omega q=Aq+Bu\\ y=Cq\end{matrix} \quad (1.3.1)$$

onde q é vetor de estado nx1, u é sinal de controle mx1, A é matriz nxn e B é matriz nxm [10]. Note que $u(t,k)=au_s(t)+bu_D(k)$, onde $u_D(t)$ é constante para $k\le t<k+1$ e **a** e **b** são como definidos na seção 1.

CONTROLABILIDADE COMPLETA DE ESTADO

Sem perda de generalidade, podemos supor que o estado inicial é arbitrário e que o estado final é a origem do espaço de estados. Se todo estado é controlavel, entao o sistema é dito de estado completamente controlável.

Derivaremos uma condição operacional para a controlabilidade de estado usando o fato de que, se um sistema é de estado completamente controlável, então existe um sinal de controle u(t,k) que transferirá qualquer estado inicial para a origem em tempo finito.

A solucao da equacao (1.3.1) é

$$q(t,k)=a[e^{At}q_a(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu_a(\tau)\,d\tau]+b[A^k q_D(0)+\sum_{l=0}^{k-1}A^{k-1-l}Bu_D((l)].$$

Se o sistema é controlável, então partindo de um q(0,0) arbitrário, podemos levar o estado para a origem, ou q(t,k)=0 para $t \geq t_1$ e $k \geq n$. Portanto

$$0=a[e^{At}q_a(0)+\int_0^t e^{At}Bu_a(\tau)\,\partial\tau]+b[A^{kq_D}(0)+\sum_{l=0}^{k-1}A^{k-1-l}Bu_D(l)].$$

ou

$$ae^{At}q_a(0)+\int_0^t e^{-A\tau}Bu_a(\tau)\,d\tau]=-b[A^n q_D(0)+\sum_{l=0}^{n-1}A^{n-1-l}Bu_D(l)].$$

Usando o teorema de Cayley-Hamilton, obtêm-se que

$$A^n=\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{Dl}A^l$$
$$e^{-A\tau}=\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{ar}(\tau)A^r,$$

donde

$$\int_0^t e^{-A\tau}Bu_a(\tau)\,d\tau=\sum_{r=0}^{n-1}[A^r B\int_0^t \alpha_{ar}(\tau)\,u_a(\tau)\,d\tau]=\sum_{r=0}^{n-1}A^r B\beta_{ar}$$

onde

$$\beta_{ar}=\int_0^t \alpha_{ar}(\tau)\,u_a(\tau)\,d\tau$$

Assim

$$ae^{At}[q_a(0)+\sum_{r=0}^{n-1} A^r B\beta_{ar}]=-b\sum_{r=0}^{n-1}[A^{n-1-l}Bu_D(l)+\alpha_{Dl}A^l q_D(0)]$$

ou

$$ae^{At}[q_a(0)+\mathfrak{C}_a\beta_a]=-b[\mathfrak{C}_D+\theta_D q_D(0)]$$

onde

$$\mathfrak{C}_a=\mathfrak{C}_D=[B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B]=\mathfrak{C}$$
$$\beta_a=[\beta_{a0}\ \beta_{a1}\ \dots\ \beta_{a(n-1)}]^T$$
$$\theta=\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{Dl}A^l$$
$$u_D=[u_D(n-1)\ \ u_D(n-2)\ \dots u_D(0)]$$

Devido 'as naturezas de **a** e **b**, podemos observar que

$$\mathfrak{C}\beta=-q_a(0)\,,\ \mathfrak{C}u_D=-\theta_D q_D(0)$$

possuem solução para arbitrários $q_a(0)$ e $q_D(0)$ quando

posto $\mathfrak{C}$ =posto[B AB ... A^{n-1}B]=n.

Esta condição de controlabilidade, obtida por Kalman, é também suficiente.

Exemplos:
Considere o sistema dado por

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[u]$$

onde u(k) é o degrau unitário de tempo discreto tal que

$$u(k)\begin{cases} =0\,, k<0 \\ =1\,, k\geq 0 \end{cases}$$

Como

$$[B\ AB]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=singular,$$

o sistema não é de estado completamente controlável.

Já o sistema dado por

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

onde u=u(t) é de estado completamente controlável pois

$$posto[B\ AB]=posto\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=2.$$

OBSERVABILIDADE COMPLETA DE ESTADO

Agora discutiremos a observabilidade de sistemas lineares. Considere o sistema não-excitado descrito pelas seguintes equações:

$$\Omega q=Aq$$
$$y=Cq$$

onde q é o vetor nx1 de estado, y é o vetor mx1 de saida, A é uma matriz nxn e C matriz mxn.

A razão pela qual consideramos o sistema não excitado é a seguinte: se o sistema é descrito por

$$\Omega q=Aq+Bu \quad (1.3.2)$$

$$y=ay_a(t)+by_D(k)=Cq \quad (1.3.3)$$

então

$$y(t,k)=a[Ce^{At}q_a(0)+Ce^{At}*u_a(t)]+b[CA^k q_D(0)+CA^k*u_D(k)],$$

lembrando que **a** e **b** obedecem as condições da seção 1. Como as matrizes A, B,C e u(t,k) sao conhecidas, os termos em convolução no lado direito desta última equação são grandezas conhecidas. Portanto elas podem ser subtraidas do valor observado y(t,k).

A seguir derivaremos a condição para observabilidade completa do sistema descrito pelas equações (1.3.2) e (1.3.3). Como a solução é

$q(t,k)=ae^{At}q_a(0)+bA^kq_D(0)$

o vetor de saida é

$y(t,k)=aCe^{At}q_a(0)+bCA^kq_D(0)$.

Observando que

$$e^{At}=\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{ar}(t)A_r$$
$$A^k=\sum_{r=0}^{n-1}\alpha_{Dr}A_r$$

obtemos

$$y(t,k)=a\sum_{r=0}^{n-1}CA^r\alpha_{ar}q_a(0)+b\sum_{r=0}^{n-1}CA^r\alpha_{Dr}q_D(0)\,.$$

Assim

$$ay_a(t)+by_D(k)=a.\alpha_a(t).\mho_a.q_a(0)+b.\alpha_D(k).\mho_D.q_D(0)$$

onde

$$\mho_a=\mho_D=\mho=[C\ \ CA\ \ldots\ CA^{n-1}]^T$$
$$\alpha_a(t)=[\alpha_{a0}(t)\ \ \alpha_{a1}(t)\ \ldots\ \alpha_{a(n-1)}$$
$$\alpha_D(k)=[\alpha_{D0}(k)\ \ \alpha_{D1}(k)\ \ldots\ \alpha_{D(n-1)}(k)]\,.$$

Devido 'as naturezas de **a** e **b** podemos escrever que

$$\alpha_a(t).\mho.q_a(0)=y_a(t)$$
$$\alpha_D(0).\mho.q_D(0)=y_D(k)$$

possuem solução para arbitrários $y_a(t)$ e $y_D(k)$ quando

posto $\mho$=posto$[C\ CA\ \ldots\ CA^{n-1}]^T=n$.

Esta condição de observabilidade, obtida por Kalman, e também suficiente.

Exemplos:
O sistema descrito por

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

é de estado completamente observável porque

$$posto \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = posto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Já o sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = [4 \quad 5 \quad 1] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix},$$

tem

$$posto \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = posto \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} < 3,$$

logo não é de estado completamente observável.

Capítulo II EQUAÇÕES EVOLUTIVAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Seção 1 - INTRODUÇÃO

Sistemas de equações lineares de diferença de segunda ordem com coeficientes constantes

$$q_D(k+2)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}q_{Dj}(k+1)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_D(k)=f_{Di}(k),i=1,\dots,n$$

ou de equações diferenciais ordinárias lineares

$$\frac{d^2}{dt^2}q_{ai}(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{d}{dt}q_{aj}(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_{aj}(t)=f_{ai}(t),i=1,\dots,n$$

podem ser escritas de forma compacta

$$P(\Omega).q=f \quad (2.1.1)$$

onde

$$\mathrm{P}(\Omega)=\Omega^2\mathrm{I}+\Omega\mathrm{B}+\mathrm{A}$$

sendo

$$B=[b_{ij}],q=\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},f=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

e Ω denotando o operador já definido no capítulo 1.

A resolução de (2.1.1), munida de condições iniciais apropriadas para cada tipo de equação, pode ser realizada com a formulação de Hamilton ou o uso da transformada unificada Γ definida no capítulo 1.

Seção 2 - FORMULAÇÃO DE HAMILTON

A formulação de Hamilton [11] consiste em escolher um novo conjunto de variáveis de estado $\{v_1, v_2\}$ tal que

$$\begin{gathered} v_1 = av_{1a}(t) + bv_{1D}(k) = a.q_a(t) + b.q_D(k) \\ v_2 = av_{2a}(t) + bv_{2D}(k) = a\frac{d}{dt}q_a(t) + bq_D(k+1) \\ \frac{d}{dt}v_1 = av_{1a}(t) + bv_{1D}(k+1) = v_2 \\ \frac{d}{dt}v_2 = -Av_1 - Bv_2 + f \\ a+b=1, \\ ab=0, \end{gathered}$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}v = \mathring{A}v + \mathscr{F}$$

onde

$$\mathring{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \mathscr{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}.$$

Do capítulo 1 temos que

$v = E(t,k)v(0,0) + E*f$

onde

$$\begin{gathered} E(t,k) = ae^{\mathring{A}t} + b\mathring{A}^k = aD_a(t) + bD_D(k) \\ E*f = a\int_0^t e^{\mathring{A}(t-\tau)} f_a(\tau)\,d\tau + b\sum_{l=0}^{k-1} \mathring{A}^{k-1-l} f_D(l), \end{gathered}$$

e

$$v(0)=v(0,0)=\begin{bmatrix} v_1(0,0) \\ v_2(0,0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} av_{1a}(0)+bv_{1D}(0) \\ av_{2a}(0)+bv_{2D}(0) \end{bmatrix}$$

logo

$$q=q(t,k)=\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}v.$$

Seja agora a variável $D=D(t,k)=aD_a(t)+bD_D(k)$ que será a solução dinâmica associada 'a equação dada. As soluções dinâmicas $D_a(t)$ e $D_D(k)$ são definidas como as soluções matriciais nxn dos problemas de valor inicial

$$\frac{d^2}{dt^2}D_a(t)+B\frac{d}{dt}D_a(t)+AD_a(t)=0,\frac{d}{dt}D_a(t)\,|_{t=0}=I,D_a(0)=0 \quad (2.2.1)$$

$$D_D(k+2)+BD_D(k+1)+AD_D(k)=0,D_D(1)=I,D_D(0)=0, \quad (2.2.2)$$

respectivamente.

Poderemos então escrever E(t,k) na forma de bloco

$$E(t,k)=\begin{bmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix},$$

onde

$C_1=D'+DB,\ D_1=D,\ C_2=D''+D'B, D_2=D',$

resultando em que

$$q=[C_1 \quad D_1]\begin{bmatrix} q(0) \\ q'(0) \end{bmatrix}+[C_1 \quad D_1]*\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix},$$

ou seja,

$q = C_1 q(0) + D_1 q'(0) + D_1 * f.$

Nesta última equação $q'(0) = aq'_a(0) + bq_D(1)$.

É claro que nesta formulação não apenas precisamos calcular $E(t,k) = ae^{\AA t} + b\AA^k$ como também identificar C_1 e D_1. Estas dificuldades serão evitadas pelo método desenvolvido por Claeyssen, que é descrito na próxima seção.

Seção 3 - <u>FORMULAÇÃO OPERACIONAL</u>

Na formulação operacional [4] usamos o operador Γ que possui as seguintes propriedades, lembrando que $q = q(t,k)$ e $q(0) = Q(0,0)$:

$$\Gamma\{q\} = aQ_a(s) + bQ_D(z)$$
$$\Gamma\{\Omega q\} = a[sQ_a(s) - q_a(s) - q_a(0)] + b[zQ_D(z) - zq_D(0)]$$
$$\Gamma\{\Omega^2 q\} = a[s^2 Q_a(s) - sq_a(0) - q_a(0)] + b[z^2 Q_D(z) - z^2 q_D(0) - zq_D(1)].$$

Da aplicação do operador Γ 'a equação (2.1.1) decorre a equação operacional

$$\Gamma\{q\} = a[P^{-1}(s)[q_a(0) + (sI + B)q_a(0) + F_a(s)]] + b[P^{-1}(z)[zq_D(1) + (z^2 I + zB)q_D(0) + F_D(z)]].$$

(2.3.1)

A solução q é portanto

$$q = Dq'(0) + (D' + DB)q(0) + D * f.$$

Para achar D precisamos calcular $P^{-1}(s)$ e $P^{-1}(z)$, o que não é imediato. Portanto discutir-se-á primeiro o seguinte sistema:

$$w' = Cw, C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, \quad (2.3.2)$$

que é equivalente 'a equação

$$q'' + Bq' + Aq = 0$$

através da mudança de variáveis $w_1 = q$, $w_2 = q'$ tal que $w = [w_1 \ w_2]^T$.

Como

$$\begin{bmatrix} D \\ D' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} D' \\ D'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D' \\ -A-BD'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ D' \end{bmatrix},$$

temos que

$$E(t,k) = \begin{bmatrix} D \\ D' \end{bmatrix} = (ae^{Ct} + bC^k) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (2.3.3)$$

porque a solução geral da equação (2.3.2) é da forma $w = (ae^{Ct} + bC^k)w(0)$.

Como ae^{Ct} satisfaz (2.3.2), podemos escrever que

$$\mathscr{E}(s,z) = \Gamma\{ae^{Ct} + bC^k\} = a(sII-C)^{-1} = a\frac{H(s)}{p(s)} + b\frac{H(z)}{p(z)} = a\left(\frac{H(x)}{p(x)}\right)_{x=s} + b\left(\frac{H(x)}{p(x)}\right)_{x=z}, \quad (2.3.4)$$

onde $\mathscr{E}(s,z)$ é a transformada unificada de $ae^{Ct} + bC^k$, II é a matriz identidade 2nx2n, $H(x) = adj(xII-C)$ e $p(x)$ é o polinômio característico

$$p(x) = \det(x^2 I + xB + A) = \sum_{i=0}^{2n} b_i x^{2n-i}, b_0 = 1, \quad (2.3.5)$$

que coincide com o determinante de (xII-C).

Escrevendo a matriz adjunta na forma

$$H(x) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i x^{j-i-1} C^{2n-j}, \quad (2.3.6)$$

obtemos

$$ae^{Ct} + bC^k = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma \frac{(ae^{st} + bC^k)}{p(s)} H(s)\, ds = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i=0}^{j-1} b_i [ad_a^{j-i-1}(t) + bd_D(k+j-i-1)] C^{2n-j}, \quad (2.3.7)$$

onde $d_a^{(l)}(t)$ denota a l-ésima derivada da função

$$d_a^{(l)}(t) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{e^{st}}{p(s)} ds,$$

e onde $d_D(k+1)$ denota o l-ésimo avanço da função

$$d_D(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{s^{k-1}}{p(s)} ds,$$

e γ é um círculo contendo as raizes de p(s). Estas últimas funções satisfazem os problemas de valor inicial

$$\sum_{j=1}^{2n} b_j d_a^{(2n-j)}(t) = 0, d_a^{(2n-1)}(0) = 1, d_a(0) = d_a^{(1)}(0) = \ldots = d_a^{(2n-2)}(0) = 0,$$

(2.3.8)

$$\sum_{j=1}^{2n} b_j d_D(2n-j) = 0, d_D(2n-1) = 1, d_D(0) = d_D(1) = \ldots = d_D(2n-2) = 0.$$

(2.3.9)

Notando agora que

$$D_a(t) = \sum_{l=0}^{\infty} D_{al}\frac{t^l}{l!}, D_{al} = D_a^{(l)}(0),$$

se diferenciarmos

$$\begin{bmatrix} D_a(t) \\ D_a'(t) \end{bmatrix} = e^{Ct}\begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix},$$

em t = 0 obteremos

$$\begin{bmatrix} D_{al} \\ D_{a(l+1)} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.3.10)$$

Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} D_D(l) \\ D_D(l+1) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (2.3.11)$$

Logo substituindo as equações (2.3.10) e (2.3.11) na equação (2.3.7) chegamos a

$$D=\sum_{j=1}^{2n}\left[a\left(\sum_{i=0}^{j-1} d_a^{(j-i-1)}(t)\right)D_{a(2n-j)}+b\left(\sum_{i=0}^{j-1} d_D(k+j-i-1)\right)D_D(2n-j)\right]$$

(2.3.12)

para $k \geq 2$. Aqui $d_a(t)$ é a solução de (2.3.8), $d_D(k)$ é a solução de (2.3.9), os b_i são os coeficientes do polinômio característico p(x) e os coeficientes matriciais D_{al} são obtidos através da recursão

$$D_{a(l+2)}+BD_{a(l+1)}+AD_{al}=0, D_{al}=I, D_{a0}=0, \quad (2.3.13)$$

e os $D_D(k)$ são obtidos através da recursão (2.2.2). Note que as duas recursões são iguais para $k=l$, logo podemos encontrar $D_{al}=D_D(l)=D_l$ usando a recursão

$$D_{l+2}+BD_{l+1}+AD_l=0, D_l=I, D_0=0. \quad (2.3.14)$$

Exemplo:
Considere o sistema com autovalores repetidos

$$q''(t)+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} q'(t)+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = f(t).$$

O polinômio característico

$$P(s)=\det\begin{bmatrix} s^2+2s+1 & 1 \\ 0 & s^2-s+\frac{1}{4}\end{bmatrix}=s^4+s^3-\frac{3}{4}s^2-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}$$

tem os coeficientes

$$b_1=1, b_2=-\frac{3}{4}, b_3=-\frac{1}{2}, b_4=\frac{1}{4},$$

A solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &d^{(iv)}(t)+d^{(iii)}(t)-\frac{3}{4}d''(t)-\frac{1}{2}d'(t)+\frac{1}{4}d(t)=0, \\ &d^{(iv)}(0)=1, \qquad d(0)=d'(0)=d''(0)=0. \end{aligned}$$

é então dada por

$$d(t)=\frac{16}{27}e^{-t}+\frac{4}{9}te^{-t}-\frac{16}{27}e^{t/2}+\frac{4}{9}te^{t/2}.$$

Agora resolve-se

$$D_{l+2}+BD_{l+1}+AD_l=0,\ D_1=I,\ D_0=0,$$

para l = 2 e l = 3, sendo

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1\end{bmatrix} \text{ e } A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

obtendo-se

$$D_2=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix},\ D_3=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}.$$

Portanto, aplicando estes valores numéricos na equação (2.3.12) obtem-se a solução dinâmica

$$D(t)=\begin{bmatrix} te^{-t} & (-\frac{4}{9}te^{-t}-\frac{16}{27}e^{-t}-\frac{4}{9}te^{t/2}+\frac{16}{27}e^{t/2}) \\ 0 & te^{t/2} \end{bmatrix}.$$

A vantagem desta solução sobre a de Hamilton é que a maioria das grandezas a serem calculadas é escalar, a única grandeza matricial sendo dada por uma função recursiva facilmente implementável.

INVERSÃO DE POLINÔMIOS MATRICIAIS

No início desta seção mencionamos as dificuldades na computação de $P^{-1}(s)$, onde P(s) é o polinômio matricial

$$P(s)=s^2I+Bs+A,$$

sendo A e B nxn.

Escolhendo $a=1$ e $b=0$ na equação (2.3.1) temos que

$$P(s)^{-1}=L\{D_a(t)\},$$

portanto da equação (2.3.12) concluimos que

$$P^{-1}(s)=\sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i\Phi_{j-i-1}(s)D_{2n-j},$$

onde

$$\Phi_{j-i-1}(s)=s^{j-i-1}\Delta_a(s)-\sum_{l=0}^{j-i-2} s^{j-i-l}d_a^{(l)}(0)$$

$$\Delta_a(s)=P^{-1}(s)=L\{d_a(t)\}.$$

Devemos observar que de (2.3.6) temos que

$$(sI-C)^{-1}=\sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-i-1}C^{2n-j}P^{-1}(s).$$

Capítulo III CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES GERAIS DE SEGUNDA ORDEM

Seção 1 - INTRODUÇÃO

As definições de controlabilidade e observabilidade para um sistema

$$\begin{gathered} P(\Omega).q=Gu \\ P(\Omega)=\Omega I-A \\ q=aq_a(t)+bq_D(k) \\ u=u_a(t)+bu_D(k) \\ a+b=1, ab=0, \end{gathered} \qquad (3.1.1)$$

onde q é vetor de estado nx1, u é sinal de controle mx1, A é matriz e G é matriz nxm, foram feitas na seção 3 do capítulo 1.

Aquelas definições se mantêm para qualquer polinômio $P(\tau)$. Apresentaremos a seguir condições para controlabilidade e observabildade de sistemas lineares gerais evolutivos de segunda ordem, para os quais

$$P(\Omega)=\Omega^2 I+\Omega B+A,$$

desenvolvidas por recentemente por Claeyssen [5].

Seção 2 - CONTROLABILIDADE

A solução da equação (3.1.1) é

$$\begin{aligned} q=&a[C_a(t)q_a(0)+D_a(t)q_a'(0)+\int_0^t D_a(t-\tau)Gu_a(\tau)d\tau]+ \\ &+b[C_D(k)q_D(0)+D_D(k)q_D(1)+\sum_{l=0}^{k-1} D_D(k-1-l)Gu_D(l)] \end{aligned}$$

onde

$$C = D' + DB$$
$$D_a(t) = \sum_{l=0}^{\infty} D_{al}\frac{t^l}{l!}$$
$$D_{al} = D_a^{(l)}(0)$$
$$D_{Dl} = D_D(l).$$

Se o sistema é de estado completamente controlável então podemos transferir qualquer estado $\{q(0), q'(0)\}$ para a origem $\{0,0\}$ num tempo finito através de um controle u, donde

$$0 = a\left[C_a(t)q_a(0) + D_a(t)q_a'(0) + \int_0^t D_a(t-\tau)Gu_a(\tau)d\tau\right] +$$

$$+ b\left[C_D(k)q_D(0) + D_D(k)q_D(1) + \sum_{l=0}^{2n-1} D_D(2n-1-l)Gu_D(l)\right]$$

$$0 = a\left[C_a(t)q_a(0) + D_a(t)q_a'(0) + \int_0^t D_a(t-\tau)Gu_a(\tau)d\tau\right] +$$

$$+ b\left[C_D(k+1)q_D(0) + C_D(k+1)q_D(1) + \sum_{l=0}^{2n} D_D(2n-l)Gu_D(l)\right].$$

Isto pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}C_a(t) & D_a(t)\\ \frac{d}{dt}C_a(t) & \frac{d}{dt}D_a(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_a(0)\\ q_a'(0)\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}D_a(t-\tau)G\\ \frac{d}{dt}D_a(t-\tau)G\end{bmatrix}u_a(\tau)d\tau+$$

$$+b\begin{bmatrix}C_D(k) & D_D(k)\\ C_D(k+1) & D_D(k+1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_D(0)\\ q_D(1)\end{bmatrix}+\sum_{l=0}^{2n-1}\begin{bmatrix}D_D(2n-1-l)G\\ D_D(2n-l)G\end{bmatrix}u_D(l)+\begin{bmatrix}0\\ D_D(0)Gu_D(2n)\end{bmatrix},$$

ou notando que $D_D(0)=0$,

$$0=a\{e^{\mathring{A}t}\begin{bmatrix}q_a(0)\\ q_a'(0)\end{bmatrix}+\int_0 e^{\mathring{A}(t-\tau)}\begin{bmatrix}0\\G\end{bmatrix}u_a(\tau)d\tau\}+b\{\mathring{A}^k\begin{bmatrix}q_D(0)\\ q_D(1)\end{bmatrix}+\sum_{l=0}^{2n-1}\mathring{A}^{2n-1-l}\begin{bmatrix}0\\G\end{bmatrix}u_D(l),$$

onde

$$\mathring{A}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -A & -B\end{bmatrix},\quad e^{\mathring{A}t}=\begin{bmatrix}C_a(t) & D_a(t)\\ \frac{d}{dt}C_a(t) & \frac{d}{dt}D_a(t)\end{bmatrix},\quad \mathring{A}^k=\begin{bmatrix}C_D(k) & D_D(k)\\ C_D(k+1) & D_D(k+1)\end{bmatrix}$$

Prosseguindo,

$$0=a\left[e^{\mathring{A}t}\{\begin{bmatrix}q_a(0)\\ q_a'(0)\end{bmatrix}+\int_0^t e^{-\mathring{A}\tau}\begin{bmatrix}0\\G\end{bmatrix}u_a(\tau)d\tau\}\right]+b\left(\mathring{A}^{2n}\begin{bmatrix}q_D(0)\\ q_D(1)\end{bmatrix}+\sum_{l=0}^{2n-1}\mathring{A}^{2n-1-l}\begin{pmatrix}0\\G\end{pmatrix}u_D(l)\right),$$

e observando que

$$e^{-\mathring{A}t}=\sum_{j=0}^{2n-1}\alpha_{aj}(\tau)\mathring{A}^j,$$

$$\mathring{A}^{2n}=\sum_{l=0}^{2n-1}\alpha_{Dl}\mathring{A}^l,$$

pois $\mathring{A}$ é 2nx2n, concluimos que

$$0=a\left(e^{\AA t}\left\{\begin{bmatrix}q_a(0)\\ q_a'(0)\end{bmatrix}+\sum_{j=0}^{2n-1}\AA^j\begin{bmatrix}0\\ G\end{bmatrix}\left(\int_0^t \alpha_{aj}(\tau)\,d\tau\right)\right\}\right)+b\left(\sum_{l=0}^{2n-1}\alpha_{Dl}\AA^l\begin{bmatrix}q_D(0)\\ q_D(1)\end{bmatrix}+\sum_{l=0}^{2n-1}\AA^{2n-1-l}\begin{bmatrix}0\\ G\end{bmatrix}u_D(l)\right),$$

ou

$$0=a[e^{\AA t}[v_a(0)-\mathfrak{C}_a.\beta_a]]+b[\theta_D.v_D(0)+\mathfrak{C}_D.u_D],$$

onde

$$v_a(0)=\begin{bmatrix}q_a(0)\\ q_a'(0)\end{bmatrix}, v_D(0)=\begin{bmatrix}q_D(0)\\ q_D(1)\end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{C}_a=\mathfrak{C}_D=\mathfrak{C}=\left[\begin{pmatrix}0\\ G\end{pmatrix}\ A\begin{pmatrix}0\\ G\end{pmatrix}\ \cdots\ A^{2n-1}\begin{pmatrix}0\\ G\end{pmatrix}\right]$$

$$\theta_D=\sum_{l=0}^{2n-1}\alpha_D\AA^l$$

$$\beta_a=[\beta_{a0}\ \ \beta_{a1}\ \cdots\ \beta_{a(2n-1)}]$$

$$u_D=[u_D(2n-1)\ \cdots\ u_D(2n-2)\ \cdots\ u_D(0)]^T.$$

Porém, por um lado

$$\AA^j=\left[\frac{d^j}{dt^j}e^{\AA t}\right]_{t=0}=\begin{bmatrix}C_a^{(j)}(t) & D_a^{(j)}(t)\\ C_a^{(j+1)}(t) & D_a^{(j+1)}(t)\end{bmatrix}_{t=0},$$

donde

$$\AA^j\begin{bmatrix}0\\ G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_a^{(j)}(0) & D_a^{(j)}(0)\\ C_a^{(j+1)}(0) & D_a^{(j+1)}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_a^{(j)}(0)G\\ D_a^{(j+1)}(0)G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{aj}G\\ D_{a(j+1)}G\end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\mathring{A}^{l}=\begin{bmatrix} C_D(l) & D_D(l) \\ C_D(l+1) & D_D(l+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{Dl} & D_{Dl} \\ C_{D(l+1)} & D_{D(l+1)} \end{bmatrix},$$

logo também

$$\mathring{A}^{l}\begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{Dl}G \\ D_{D(l+1)}G \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_a=\mathfrak{C}_D=\begin{bmatrix} D_0G & D_1G & \dots & D_{2n-1}G \\ D_1G & D_2G & \dots & D_{2n}G \end{bmatrix}$$

onde D_{al} é dado pela equação (2.3.13) e $D_{Dl}=D_D(l)$ é dado pela equção (2.2.2).

Devido 'as naturezas de **a** e **b**, podemos observar que

$$\mathfrak{C}.\beta=-v_a(0)$$
$$\mathfrak{C}.u_D=-\theta_D.v_D(0)$$

possuem soluções para arbitrários $v_a(0)$ e $v_D(0)$ quando

$$posto\,\mathfrak{C}=posto\begin{bmatrix} D_0G & D_1G & \dots & D_{2n-1}G \\ D_1G & D_2G & \dots & D_{2n}G \end{bmatrix}=2n.$$

Seção 3 - OBSERVABILIDADE

Segundo o explicado na seção três do capítulo 1, a equção que usaremos para deduzir a condição de observabilidade do sistema em questão é

$$y = ay_a + by_D = a[\Psi q_a(t) + \Phi q_a'(t)] + b[\Psi q_D(k) + \Phi q_D(k+1)] =$$
$$= a\{\Psi[C_a(t) q_a(0) + D_a(t) q_a'(0)] + \Phi[C_a(t) q_a(0) + D_a(t) q_a'(0)]\} +$$
$$+ b\{\Psi[C_D(k) q_D(0) + D_D(k) q_D(1)] + \Phi[C_D(k+1) q_D(0) + D_D(k+1) q_D(1)]\},$$

onde C_a, D_a, C_D, D_D, a e b são como explicados na seção anterior.

Se o sistema é de estado completamente observável então podemos calcular o estado inicial {q(0),q'(0)} a partir da saida y num tempo finito. Logo

$$y = a\left([\Psi C_a(t) \quad \Psi D_a(t)]\begin{bmatrix} q_a(0) \\ q_a'(0) \end{bmatrix} + [\Phi C_a'(t) \quad \Phi D_a'(t)]\begin{bmatrix} q_a(0) \\ q_a'(0) \end{bmatrix}\right) +$$
$$+ b\left([\Psi C_D(k) \quad \Psi C_D(k)]\begin{bmatrix} q_D(0) \\ q_D(1) \end{bmatrix} + [\Phi C_D(k+1) \quad \Phi C_D(k+1)]\begin{bmatrix} q_D(0) \\ q_D(1) \end{bmatrix}\right).$$

Isto pode ser escrito como

$$y = \{[\Psi \quad 0] + [0 \quad \Phi]\}.a\left(\begin{bmatrix} C_a(t) & D_a(t) \\ C_a'(t) & D_a'(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_a(0) \\ q_a'(0 \end{bmatrix}\right) + b\begin{bmatrix} C_D(k) & D_D(k) \\ C_D(k+1) & D_D(k+1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_D(0) \\ q_D(1) \end{bmatrix},$$

ou

$$y = [\Psi \quad \Phi].[ae^{\AA t} v_a(0) + b\AA^k V_D(0)]$$

onde

$$\AA = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & -B \end{bmatrix}, e^{\AA t} = \begin{bmatrix} C_a(t) & D_a(t) \\ C_a'(t) & D_a'(t) \end{bmatrix}, \AA^k = \begin{bmatrix} C_D(k) & D_D(k) \\ C_D(k+1) & D_D(k+1) \end{bmatrix}$$
$$v_a(0) = \begin{bmatrix} q_a(0) \\ q_a'(0) \end{bmatrix}, v_D(0) = \begin{bmatrix} q_D(0) \\ q_D(1) \end{bmatrix}.$$

Porém

$$e^{\mathring{A}t}=\sum_{j=0}^{2n-1}\alpha_{aj}(t)\mathring{A}^{j},$$
$$\mathring{A}^{k}=\sum_{l=0}^{2n-1}\alpha_{Dl}\mathring{A}^{l},$$

então

$$
\begin{aligned}
y(t,k)&=[\Psi\quad\Phi].[a\sum_{j=0}^{2n-1}\alpha_{aj}\mathring{A}^{j}v_a(0)+b\sum_{l=0}^{2n-1}\alpha_{Dl}\mathring{A}^{l}v_D(0)]=\\
&=a\sum_{j=0}^{2n-1}\alpha_j(t)[\Psi\quad\Phi]\mathring{A}^{j}v_a(0)+b\sum_{l=0}^{2n-1}\alpha_{Dl}[\Psi\quad\Phi]\mathring{A}^{l}v_D(0)=\\
&=a.\alpha_a(t).\theta_a.v_a(0)+b.\alpha_D.\theta_D.v_D(0),
\end{aligned}
\qquad(3.3.1)
$$

onde

$$\alpha_a(t)=[\alpha_{a0}(t)\ \ \cdots\ \ \alpha_{a(2n-1)}(t)]$$
$$\alpha_D=[\alpha_{D1}\ \ \cdots\ \ \alpha_{D(2n-1)}]$$
$$\mho=\mho_a=\mho_D=\begin{bmatrix}\Psi & \Phi\\ \Psi\mathring{A} & \Phi\mathring{A}\\ \vdots & \vdots\\ \Psi\mathring{A}^{2n-1} & \Phi\mathring{A}^{2n-1}\end{bmatrix}.$$

Entretanto

$$\mathring{A}^{j}=\begin{bmatrix}C_a^{(j)} & D_a^{(j)}\\ C_a^{(j+1)} & D_a^{(j+1)}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}D_a^{(j+1)}(t)+D_a^{(j)}(t).B & D_a^{(j)}(t)\\ D_a^{(j+2)}(t)+D_a^{(j+1)}.B & D_a^{(j+1)}(t)\end{bmatrix}_{t=0}=$$
$$=\begin{bmatrix}D_a^{(j+1)}(0)+D_a^{(j)}(0).B & D_a^{(j)}(0)\\ D_a^{(j+2)}(0)+D_a^{(j+1)}.B & D_a(j+1)(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{D(l+1)}+D_{Dl}.B & D_{Dl}\\ D_{D(l+2)}+D_{D(l+1)}+D_{D(l+1)}.B & D_{D(l+1)}\end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\mathring{A}^l=\begin{bmatrix} D_D(l+1)+D_D(l).B & D_D(l) \\ D_D(l+2)+D_D(l+1).B & D_D(l+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D_{D(l+1)}+D_{Dl}.B & D_{Dl} \\ D_{D(l+2)}+D_{D(l+1)}.B & D_{D(l+1)}\end{bmatrix}.$$

Então

$$[\Psi \quad \Phi]\mathring{A}^l=[\Psi(D_{i+1}+D_iB)+\Phi(D_{i+2}+D_{i+1}B) \quad \Psi D_i+\Phi D_{i+1}],$$

onde os D_{aj} e os D_{Dl} são fornecidos pela equação mencionada na seção anterior.

Portanto

$$\mho=\begin{bmatrix} \Psi & \Phi \\ \Psi(D_2+D_1B)+\Phi(D_3+D_2B) & \Psi D_1+\Phi D_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Psi(D_{2n}+D_{2n-1}B)+\Phi(D_{2n+1}+D_{2n}B) & \Psi D_{2n-1}+\Phi D_{2n}\end{bmatrix}.$$

Finalmente observamos que devido 'as naturezas de **a** e **b**, a equação (3.3.1) tem solução para $v_a(0)$ e $v_D(0)$ arbitrários quando

posto $\mho=2n$.

Esta condição para observabilidade, obtida por Claeyssen, é necessária e suficiente.

Capítulo IV APLICAÇÕES DE SISTEMAS MATRICIAIS GERAIS DE SEGUNDA ORDEM 'A ENGENHARIA AEROESPACIAL

Seção 1 - INTRODUÇÃO

O comportamento de muitos sistemas de importância na prática de engenharia [6,7,8] é governado por

$$\begin{aligned} P(\Omega).q&=f \\ P(\Omega)&=\Omega^2 I+\Omega B+A \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

onde q é o vetor de estado e f, B, A são vetor e matrizes arbitrários.

O modelo (4.1.1) pode descrever sistemas elétricos, mecânicos, térmicos, acústicos e de outros tipos através de analogias bem conhecidas. Portanto os resultados nas seções seguintes são aplicáveis a todos estes tipos de sistemas.

Este modelo pode resultar diretamente de modelos de parâmetros concentrados, ou de aproximações finitas para sistemas de parâmetros distribuídos desritos por equações diferenciais parciais. Uma classe grande de sistemas de atual importância são estruturas espaciais grandes ("Large Space Structures" ou "LSS"), que são grandes sistemas de parâmetros distribuídos comumentemente discretizados pelo método dos elementos finitos para a forma (4.1.1). O problema de controlar "LSS" motivou os estudos deste capítulo.

No contexto dos "LSS" q é um vetor deslocamento, f é um vetor força, A é a matriz de rigidez e B é uma matriz compreendendo parcelas amortecedoras e giroscópicas. Normalmente estas matrizes são de dimensão muito grande podendo ser esparsas.

Num sistema mecânico geral q consiste em variáveis de configuração e f é uma matriz de entrada de forças ou torques.

Nas seções seguintes serão examinadas condições de controlabilidade e observabilidade para os sistemas de segunda ordem já descritos usando as condições de Claeyssen [5] apresentadas no capítulo anterior.

Seção 2 - SISTEMAS CONSERVATIVOS

Considere o sistema não-amortecido [7]

$$q'' + Aq = Gu$$
$$y = \Psi q + \Phi q'$$

onde $A^T=A$ é matriz nxn. A explicação a seguir se refere a sistemas de tempo contínuo, embora os resultados desta seção sejam gerais.

Forças conservativas, representadas por -Aq, são funções apenas da posição. Para forças elásticas, A>0 quando o sistema é fisicamente conectado a uma estrutura de referência inercial. Veículos de vôo, por outro lado, são uma classe importante de sistemas em que $A \geq 0$.

Existem exceções importantes, mas em geral as variáveis de saída correspondem somente a variáveis de configuração e suas taxas de variação, caso em que ψ e Φ em (4.2.1) têm a estrutura

$$\Psi = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_\Psi \; colunas \\ n_\Phi \; colunas \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} = \Phi ,$$

onde n_ψ e n_Φ são o número de saídas relacionadas 'as configurações e suas taxas de variação, respectivamente. Quando (4.2.2) é verdadeira, dizemos que as saídas estão separadas. De maneira comum, entretanto, y corresponde a saídas ou medidas misturadas. Quando y representa medidas, propriedades de observabilidade podem ser importantes nas decisões de localização de sensores e no projeto de controle e de realimentação de medidas. Quando y representa saídas que queremos controlar (p. e. problemas de controle de mínimos quadrados), as propriedades de observabilidade são novamente importantes em teoremas de existência e estabilidade.

CONTROLABILIDADE

Têm-se que a condição para controlabilidade completa de estado [5] é dada por

$$\text{posto } \mathfrak{C} = 2n$$

onde

$$\mathfrak{C}=\begin{bmatrix} D_0G & D_1G & \dots & D_{2n-1}G \\ D_1G & D_2G & \dots & D_{2n}G \end{bmatrix}$$

e

$$D_{l+2}+AD_l=0,\ D_1=I,\ D_0=0.$$

Notando que

$$D_l=\begin{cases} i^{\,l+3}A^{\frac{l-1}{2}}, & l \text{ ímpar} \\ 0, & l \text{ par} \end{cases}$$

podemos escrever que

$$posto\begin{bmatrix} 0 & G & 0 & -AG & \dots & (-1)^n A^{n-1}G \\ G & 0 & -AG & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}=2n$$

É portanto necessário e suficiente que

$$posto[G\ AG\ \dots\ A^{n-1}G]=n. \quad (4.2.3)$$

Prosseguindo, de acordo com Hughes e Skelton supomos que $A^T=A$, donde existe uma transformação T tal que

$$T^TAT=diag\{\omega_1^2\ \dots\ \omega_n^2\},$$

Seja $q=Tz$; o sistema transformado é

$$z''+\mathbf{A}z=\mathbf{G}u,\ y=\Psi z+\Phi z'$$

(4.2.4)

onde

$$\underline{G}\doteq T^TG,\ \underline{C}\doteq CT,\ \underline{D}\doteq DT.$$

Podemos então numerar as linhas de G para corresponder 'as multiplicidades dos ω_i^2:

$$\underline{G}=\begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_R \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \ \textit{linhas} \\ \vdots \\ n_R \ \textit{linhas} \end{matrix},$$

onde $n_1+\ldots+n_R=n$ e R é o número de ω_i^2 distintos. Então (4.2.3) é equivalente a posto$[G_r]=n_r$ ($r=1,\ldots R$). Isto prova que o sistema é de estado completamente controlável se

$$posto\ \underline{G_r}=n_r \qquad (r=1,\ldots,R). \quad (4.2.5)$$

Esta condição é necessária e suficiente.

Note que quando A=0 o sistema é controlável se posto G=n.

OBSERVABILIDADE

A condição para observabilidade [5] completa de estado é que

$$\text{posto } \mho = 2n.$$

onde

$$\mho=\begin{bmatrix} \Psi & \Phi \\ \Psi(D_2+D_1B)+\Phi(D_3+D_2B) & \Psi D_1+\Phi D_2 \\ \Psi(D_3+D_2B)+\Phi(D_4+D_3B) & \Psi D_2+\Phi D_3 \\ \vdots & \vdots \\ \Psi(D_{2n-1}+D_{2n-2}B)+\Phi(D_{2n}+D_{2n-1}B) & \Psi D_{2n-2}+\Phi_{2n-1} \\ \Psi(D_{2n}+D_{2n-1}B)+\Phi(D_{2n+1}+D_{2n}B) & \Psi D_{2n-1}+\Phi D_{2n} \end{bmatrix}.$$

Lembrando que B=0 e que além disto

$$\begin{gathered} D_1=I \\ D_3=-A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{2n-1}=(-1)^n A^{n-1} \\ D_{2n+1}=(-1)^n A^n, \end{gathered}$$

sendo

$D_2=D_4=\ldots=D_{2n-2}=D_{2n}=0$,

chegamos 'a seguinte condição para observabilidade:

$$posto \begin{bmatrix} \Psi & \Phi \\ -\Phi A & \Psi \\ -\Psi A & -\Phi A \\ \Phi A^2 & -\Psi A \\ \vdots & \vdots \\ \Psi(-1)^n A^{n-1} & \Phi(-1)^n A^{n-1} \\ \Phi(-1)^n A^n & \Psi(-1)^n A^{n-1} \end{bmatrix} = 2n. \quad (4.2.6)$$

Notando que o sinal de uma linha não afeta o posto, (4.2.6) é equivalente a

$$posto\,[F\ FH\ \dots\ FH^{n-1}]=2n, \quad (4.2.7)$$

onde

$$F=\begin{bmatrix} \Psi & \Phi \\ -\Phi A & \Psi \end{bmatrix}\ e\ H=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Para obtermos uma condição de observabilidade completa de estado mais simples seguiremos os passos de Hughes e Skelton. A partir de (4.2.4) usaremos as formas bloco-diagonalizadas (se possível)

$$\underline{F}=\begin{bmatrix} \underline{\Psi} & \underline{\Phi} \\ -\underline{\Phi}\underline{A} & \underline{\Psi} \end{bmatrix}\ e\ \underline{H}=\begin{bmatrix} \underline{A} & 0 \\ 0 & \underline{A} \end{bmatrix}.$$

Mesmo $\underline{H}$ sendo diagonal elementos idênticos não estão adjacentes. Este defeito é corrigido aplicando uma transformação ortonormal a $\underline{H}$. Defina-se U como segue:

$$U \doteq [1_1\ 1_2\ \dots\ 1_{n_1}\ 1_{n+1}\ \dots\ 1_{n+n_1}\ \dots\ 1_f\ \dots\ 1_{2n}],$$

onde 1_i é uma coluna de 2n zeros exceto na i-ésima posição e $f=n-n_{R+1}$. Note que

$$U^TU=UU^T=I_{2n}\ e\ que\ U^T\underline{H}U=diag\{\omega_1^2\ \dots\ \omega_1^2\ \dots\ \omega_R^2\ \dots\ \omega_R^2\}=\boldsymbol{H}.$$

Elementos repetidos de $\underline{H}$ são trazidos para posições adjacentes em **H**. Porque $\underline{H}$=UHUT, (4.2.6) pode ser escrito

$$\text{posto } [\mathbf{F}\ \mathbf{FH}\ \ldots\ \mathbf{FH}^{n-1}]\mathrm{T}=2n,$$

onde $\mathbf{F}=\underline{F}\mathrm{U}$.

Agora particionamos $\mathbf{F}$ em colunas para corresponder 'as multiplicidades de $a_r=\omega_r^2$ em $\mathbf{G}$, observando que se a multiplicidade de a_r em A é n_r, então sua multiplicidade em $\mathbf{G}$ é $2n_r$:

$$\mathbf{F}=[\mathbf{F}_1\ \ldots\ \mathbf{F}_R],$$

onde $\mathbf{F}$ tem $2n_r$ colunas. Da mesma forma particionamos **PSI** e **PHI**:

$$\boldsymbol{\Psi}\doteq[\boldsymbol{\Psi}_1\ \ldots\ \boldsymbol{\Psi}_R],\ \boldsymbol{\Phi}\doteq[\boldsymbol{\Phi}_1\ \ldots\ \boldsymbol{\Phi}_R],$$

de modo que

$$\boldsymbol{F}_r=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}_r & \boldsymbol{\Phi}_r\\ -a_r\Phi_r & \Psi_r\end{bmatrix}.$$

Então o sistema é de estado completamente observável se

$$posto\ \boldsymbol{F}_r=2n_r\ (r=1,\ldots,R).\ (4.2.8)$$

Esta condição é necessária e suficiente.

Podemos observar que quando a=0 o sistema (4.2.1) é observável se posto ψ=n.

Agora voltamos a permitir a_i indistintos e consideramos condições em que as saídas estão separadas no sentido de (4.2.2). Podemos particionar ψ e Φ como segue:

$$\boldsymbol{\Psi}_r\doteq\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_r\\ 0\end{bmatrix}\begin{matrix}n_\Psi\ linhas\\ n_\Phi\ linhas\end{matrix}\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{V}_r\end{bmatrix}\doteq\Phi_r.$$

Então (4.2.7) se reduz a

$$posto\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_r\\ -a_r\boldsymbol{V}_r\end{bmatrix}=n_r\quad e\quad (4.2.8a)$$

$$posto \begin{bmatrix} L_r \\ V_r \end{bmatrix} = n_r \qquad (r=1,\ldots,R). \quad (4.2.8b)$$

Se nenhum dos a_r é zero podemos eliminá-los em (4.2.8a), logo as duas condições serão idênticas. Se um dos a_r for zero (os a_r são, relembre, distintos por definição, diferentemente dos a_i) suponha $a_1=0$ sem perda de generalidade; para r=1 (4.2.8) se torna posto $L_1=n_1$. Estes resultados serão resumidos a seguir.

A condição para observabilidade completa de estado do sistema (4.2.1) é

$$posto\ L_r = n_r \qquad (r=1,\ldots,R), \quad (4.2.9)$$

a não ser que $a_1=0$, caso em que (4.2.9) para r=1 é substituída por

$$posto\ L_1 = n_1. \quad (4.2.10)$$

Os comentários a seguir se referem a sistemas de tempo contínuo.

Quando apenas saídas de posição estão disponíveis, y=Lq, o sistema (4.2.1) é de estado completamente observável se

$$posto\ L_r = n_r \qquad (r=1,\ldots,R). \quad (4.2.11)$$

Quando apenas saídas de taxa de variação estão disponíveis, y=Vq', o sistema (4.2.1) é de estado completamente observável se

$$\begin{aligned} &i)\ a_r \neq 0 && (r=1,\ldots,R) \\ &ii)\ posto\ V_r = n_r. && \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Estas condições são necessárias e suficientes.

Seção 3 - <u>SISTEMAS NÃO-CONSERVATIVOS</u>

Considere o sistema não-conservativo [1]

$$q'' + Bq' + Aq = Gu.$$

Embora os resultados desta seção sejam gerais, a explicação no parágrafo seguinte se refere a sistemas mecânicos.

As matrizes de amortecimento e rigidez são B e A no caso de sistemas mecânicos. Estas matrizes são gerais assimétricas incluindo vários tipos de forças (elásticas, não-conservativas, dissipativas e groscópicas, por exemplo).

Dito isto, as saídas de sensores podem ser representadas, como na seção anterior, por

$$y=\psi q+\Phi q',$$

onde y é o vetor de saída e as matrizes ψ e Φ representam os coeficientes de deslocamento e taxa de variação, respectivamente, no exemplo de sistemas mecânicos.

Examinando a equação dinâmica

$$D_{l+2}+BD_{l+1}+AD_l=0, D_0=0, D_1=I,$$

Ahmadian propôs o uso da representação

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} X_{l+1}=\begin{bmatrix} 0 & A \\ -A & -B \end{bmatrix} X_l,$$

onde

$$X_l=\begin{bmatrix} D_l \\ D_{l+1} \end{bmatrix}, X_0=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Supondo em segida que a matriz A é simetrizável com autovalores positivos, isto é,

$$A=S_1S_2, S_1=S_1^T>0, S_2=S_2^T>0,$$

obtemos nova simplificação resultando em

$$E_{l+1}=\begin{bmatrix} 0 & A^{-\frac{1}{2}} \\ -A^{\frac{1}{2}} & -B \end{bmatrix} E_1,$$

onde

$$E_l=\begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}}D_l \\ D_{l+1} \end{bmatrix},\ E_0=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Nomeando

$$F=\begin{bmatrix} 0 & A^{\frac{1}{2}} \\ -A^{\frac{1}{2}} & -B \end{bmatrix}$$

é sabido que existe

$$\boldsymbol{F}=U^T F U=diag[\boldsymbol{F}_1\ \boldsymbol{F}_2\ \dots\ \boldsymbol{F}_R],$$

onde as $\mathbf{F}_r$ são a soma direta de matrizes 2x2 do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{bmatrix}$$

com dimensões iguais a $2n_r$, onde n_r é a multiplicidade da freqüencia modal ω_r. Note que

$$\mathbf{F}_r^2=-\omega_r^2 \mathrm{I}.$$

Usaremos os $\mathbf{E}_l$, calculados por

$$\boldsymbol{E}_l=U^T E_l,\ \boldsymbol{E}_0=U^T\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},\ E_{l+1}=F$$
$$\boldsymbol{E}_{l+1}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{E}_l.$$

<u>CONTROLABILIDADE</u>

A partir do exposto acima, a condição para controlabilidade completa de estado [5],

$$posto\mathfrak{C}=\begin{bmatrix} D_0G & D_1G & \dots & D_{2n-1}G \\ D_1G & D_2G & \dots & D_{2n}G \end{bmatrix}=2n,$$

se torna

$$posto\,\mathfrak{C}=posto[X_0G\ X_2G\ \ldots\ X_{2n-1}G]=$$
$$=posto[E_0G\ E_1G\ \ldots\ E_{2n-1}G]=2n.$$

Fazendo $\mathbf{E}_l=U^T E_l$, e lembrando que $\mathbf{E}_l=\mathbf{F}^l.\mathbf{E}_0.G$,

$$posto\,\mathfrak{C}=posto[\boldsymbol{E}_0G\ \boldsymbol{E}_1G\ \ldots\ \boldsymbol{E}_{2n-1}G]=$$
$$=posto\left[\begin{pmatrix}0\\U^TG\end{pmatrix}\ \boldsymbol{F}\begin{pmatrix}0\\U^TG\end{pmatrix}\ \ldots\ \boldsymbol{F}^{2n-1}\begin{pmatrix}0\\U^TG\end{pmatrix}\right]=$$
$$=posto[U^TG\ \boldsymbol{F}U^TG\ \ldots\ \boldsymbol{F}^{2n-1}U^TG]=2n.$$

Particionando $\mathbf{G}=U^TG$ de acordo com os blocos $\mathbf{F}_r$ e levando em consideração que $\mathbf{F}_r^2=-\omega_r^2 I$ basta-nos testar se

$$posto[\mathbf{G}_r\quad \mathbf{F}_r.G_r]=2n_r\ (r=1,\ldots,R).$$

Esta condição é necessária e suficiente.

Exemplo [8]:

Usamos o satélite RAE/B, consistindo num núcleo rígido com seis hastes flexíveis siando dele, para testar a validade e capacidade do método apresentado. Supomos que a espaçonave se move num campo gravitacional de força central, com seu centro de massa descrevendo uma dada órbita circular em torno do centro daquela força com velocidade angular constante ω. Usando um método de discretização baseado no enfoque Ritz-Galerkin e depois transformando as coordenadas de físicas para modais, resultando na forma bloco-diagonalizada de $\mathbf{F}$, chegamos a blocos $\mathbf{F}_r$ do tipo (onde as unidades são radianos por segundo):

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}0 & -3.60066038x10^{-4}\\ 3.60066038x10^{-4} & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_4=\begin{bmatrix}0 & -1.46350711x10^{-3} & 0 & 0\\ 1.46350711x10^{-3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1.46350711x1\\ 0 & 0 & 1.46350711x10^{-3} & 0\end{bmatrix}$$

Os correspondentes blocos $\mathbf{G}_r$ são:

$$G_1=\begin{bmatrix}1.24910252x10^{-2} & 6.01546355x10^{-2}\\ 1.96711830x10^{-2} & -8.77485690x10^{-1}\end{bmatrix}$$

$$G_4=\begin{bmatrix}-5.13582555x10^{-2} & 3.95604625x10^{-3}\\ -1.07861314x10^{-1} & -1.59586273x10^{-3}\\ 3.0883022x10^{-4} & -6.74433850x10^{-1}\\ 5.22351286x10^{-4} & 4.68817151x10^{-1}\end{bmatrix}$$

Vemos que

$$\det \mathbf{G}_1=-1.2144x10^{-2},$$

que é um número da ordem de grandeza dos componentes das matrizes $\mathbf{F}_r$ e $\mathbf{G}_r$, logo consideramos

$$\text{posto } [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{F}_1\mathbf{G}_1]=2,$$

e dizemos que este modo é controlável. Por outro lado

$$\det [\mathbf{G}_4 \quad \mathbf{F}_4\mathbf{G}_4]=-2.0622x10^{-8},$$

que é um número de ordem de grandeza muito inferior 'a das matrizes $\mathbf{F}_r$ e $\mathbf{G}_r$, portanto consideramos

$$\text{posto } [\mathbf{G}_4 \quad \mathbf{F}_4\mathbf{G}_4]<4$$

e dizemos que este modo não é controlável.

OBSERVABILIDADE

A condição para observabilidade completa de estado [5] é

$$posto\ \mho=\begin{bmatrix}\Psi & \Phi\\ \Psi(D_1B+D_2)+\Phi(D_2B+D_3) & \Psi D_1+\Phi D_2\\ \vdots & \vdots\\ \Psi(D_{2n-1}B+D_{2n})+\Phi(D_{2n}B+D_{2n+1}) & \Psi D_{2n-1}+\Phi D_{2n}\end{bmatrix}=2n.$$

Note que

$$\begin{bmatrix}D_l\\ D_{l+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}E_l=\begin{bmatrix}A^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}U\boldsymbol{E}_l=\boldsymbol{\beta}UE_l,$$

por isto

$$
\begin{aligned}
posto\ \mho_1 &= [\Psi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}UE_1+\Phi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}UFE_1\ \ [\Psi\ \ \Phi]UE_1] = \\
&= [(\Psi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}U+\Phi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}UF)\boldsymbol{E_1}\ \ [\Psi\ \ \Phi]UE_1] = \\
&= [(\Psi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}U+\Phi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}UF)\ \ [\Psi\ \ \Phi]U]\boldsymbol{E_1} = \\
&= [\underline{\Psi}\ \ \underline{\Phi}]\boldsymbol{E_1},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\underline{\Psi} = (\Psi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}U+\Phi[B\ \ I]\boldsymbol{\beta}UF),\ \underline{\Phi} = [\Psi\ \ \Phi]U
$$

e $\mho_l$ é a matriz na l-ésima bloco-linha de $\mho$.

Como

$$
\begin{aligned}
posto\mho_1 &= posto[(\underline{\Psi}\ \ \underline{\Phi})\boldsymbol{E_1}] = posto[(\underline{\Psi}\ \ \underline{\Phi})\boldsymbol{F^1E_0}] = \\
&= posto\left[(\underline{\Psi}\ \ \underline{\Phi})\boldsymbol{F^1}\begin{pmatrix}0\\U^T\end{pmatrix}\right] = posto[(\underline{\Psi}\ \ \underline{\Phi})\boldsymbol{F^1}],
\end{aligned}
$$

particionando $\mho_l$ segundo os blocos $\mathbf{F}_r$ e lembrando que $\mathbf{F}_r=-\omega_r^2$, o teste se reduz a

$$
posto\begin{bmatrix}(\underline{\Psi_r}\ \ \underline{\Phi_r})\\(\underline{\Psi_r}\ \ \underline{\Phi_r})\boldsymbol{F}\end{bmatrix} = 2n_r.
$$

Esta condição é necessária e suficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Ahmadian, M. Controlability and observability of general linear lumped-parameter systems. **J. Guidance and Control**, 8(5) : 669-672, Sept.-Oct. 1985.

2. Campos Velho, H. F. de **Matriz não-modal em integração num modelo barotrópico e um estudo numérico da dispersão vertical turbulenta**, Tese de Doutorado, PROMEC/UFRGS, Outubro de 1992.

3. Claeyssen, J. C. R., Gallicchio, E., Vilhena, M. T. Inversion of higher-order matrix difference and differential equations through their dynamical solutions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 149(2) : 369-376, July 1990.

4. Claeyssen, J. C. R. On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using dinamical matrix solutions. **J. Sound and Vibration**, 140(1) : 73-84, 1990.

5. Claeyssen, J. C. R. **entrevista**, Porto Alegre, Janeiro de 1992.

6. Hashemipour, H. R., Laub, A. J. Kalman filtering for second-order models. **J. Guidance and Control**, 11(2) : 181-186, March-April 1988.

7. Hughes, P. C., Skelton, R. E. Controlability and Observability of linear matrix-second order systems. **Tr. ASME, J. Appl. Mechanics**, 47 : 415-420, June 1980.

8. Juang, J., Balas, M. J. Dynamics and control of large spinning spacecraft. **J. Astronautical Sciences**, 28 : 31-48, Jan.-Mar. 1980.

9. La Salle, J. P. The Stability and Control of Discrete Processes, s.l., Springer-Verlag, 1986.

10. Ogata, K. **Modern Control Engineering**, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, s. d..

11. Wolovich **Linear Multivariable Systems**, s. l., Springer-Verlag, s. d..