

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Determinação do Coeficiente de Difusão  
Unidimensional Durante o Decaimento da  
Turbulência na Camada Limite Convectiva**

por

Denise Temp Flores

Dissertação submetida e aprovada como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Marco Túlio de Vilhena,  
Orientador  
Prof. Dr. Antonio Gledson Oliveira Goulart  
Co-orientador

Porto Alegre, Janeiro de 2004.

---

<sup>‡</sup>Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

'À minha mãe Haidi e aos meus irmãos.'

## Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que colaboraram para a realização deste trabalho e em particular:

- Ao Prof. Marco Túllio de Vilhena pela orientação;
- Ao Prof. Antonio Gledson Goulart pela co-orientação;
- Ao Prof. Joecir Palandi pela colaboração e discussões sobre alguns aspectos físicos;
- À Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da UFRGS;
- Aos meus amigos Bárbara e Hugo Rodriguez, Aline Flores, Jeferson, Cristina Borowschi, Julieta Monteiro, Targina Bolzan e aos meus avós Altair e Elmo Flores que durante muito tempo viabilizaram a minha presença em Porto Alegre;
- À todos os meus amigos e familiares que sempre me apoiaram;
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

# Determinação do Coeficiente de Difusão Unidimensional Durante o Decaimento da Turbulência na Camada Limite Convectiva

por

Denise Temp Flores

Dissertação submetida e aprovada como requisito parcial  
para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria de Transporte e Transformadas Integrais

Orientador: Prof. Dr. Marco Túllio de Vilhena

Co-orientador: Prof. Dr. Antonio Gledson Oliveira Goulart

Banca Examinadora:

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Alice Kozakevicius  
UFSM

Prof. Dr. Carlos Malamut  
CDTN/MG

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Cynthia Segatto  
PPGMA<sub>p</sub>/UFRGS

Prof. Dr. Sérgio Wortmann  
UFRGS

Porto Alegre, 20 de Janeiro de 2004.

Prof. Dr. Vilmar Trevisan  
Coordenador

## Resumo

O desenvolvimento de um modelo espectral para o decaimento da Camada Limite Convectiva é apresentado neste trabalho. A equação dinâmica para a densidade espectral de energia cinética é determinada a partir das equações de Navier-Stokes, nas quais o termo de produção de energia por efeito mecânico não será considerado. O termo de transferência inercial de energia é parametrizado a partir de um modelo sugerido por Pao. Para calcular o espectro inicial tridimensional da Camada Limite Convectiva foi usado uma formulação proposta por Kristensen, a qual permite calcular o espectro 3-D de um fluxo turbulento homogêneo mas não isotrópico conhecendo-se as suas componentes unidimensionais. Para calcular as componentes unidimensionais do espectro e do coeficiente de difusão durante o decaimento foi empregado um método matemático que considera uma função peso. Esta função peso informa como cada componente unidimensional participa na formação da função densidade espectral de energia. Finalmente, a componente vertical do coeficiente de difusão calculada a partir do modelo teórico foi comparada com dados de LES (*large eddy simulation*) durante o decaimento da Camada Limite Convectiva.

## Abstract

The development of a spectral model for a decaying Convective Boundary Layer is considered in this work. The dynamical equation for the energy density spectrum function is obtained from Navier-Stokes equation, in which shear and buoyancy terms were disregarded and turbulence was assumed to be homogeneous and non isotropic. The inertial energy transfer term is parametrized using a model suggested by Pao. To calculate this initial 3-D spectrum the mathematical formulation proposed by Kristensen was used, which allowed us to determine the 3-D spectrum of the homogeneous and non isotropic turbulent flow from a known one-dimensional (1-D) spectrum. To calculate the decaying one-dimensional spectrum and eddy diffusivity, a mathematical method using a weight function was utilized. This weight function gives information about how this one-dimensional component take part in the formation of the 3-D equation for the spectral density. Finally, the decaying vertical eddy diffusivity derived from the present theoretical model has been compared with the generated from LES (*large eddy simulation*) data for a decaying Convective Boundary Layer.

# Sumário

1	Introdução	1
2	Camada Limite Planetária	5
2.1	Camada Limite Convectiva . . . . .	7
3	Fundamentação Teórica	10
3.1	Equação Dinâmica Para a Função Espectro de Energia em um Fluxo Turbulento Homogêneo . . . . .	10
3.2	Modelo de Kristensen Para o Espectro de Energia na Camada Limite Planetária . . . . .	19
3.2.1	A Função Espectro de Energia . . . . .	19
3.2.2	Espectros Unidimensionais . . . . .	27
4	Determinação do Espectro de Energia e do Coeficiente de Difusão Unidimensional na CLC	31

4.1	Equação Dinâmica Para o Espectro de Energia . . . . .	31
4.2	Espectro de Energia Unidimensional obtido a partir do Espectro 3-D . . . . .	37
4.3	Coefficiente de Difusão Unidimensional . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Energia Cinética Turbulenta, Variância Unidimensional e Coe- ficiente de Difusão Vertical</b>	<b>41</b>
5.1	Cálculo da Energia Cinética durante o decaimento da turbulência na CLC . . . . .	42
5.2	Variância Unidimensional em um Fluxo Turbulento não Isotrópico	44
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>49</b>
<b>A</b>	<b>Médias</b>	<b>56</b>
A.1	Média no tempo . . . . .	56
A.2	Média no espaço . . . . .	56
A.3	Média de ensemble . . . . .	57
A.4	Regras das médias . . . . .	57
A.5	Média de Reynolds . . . . .	57



# Capítulo 1

## Introdução

Um fluxo turbulento pode ser descrito pelas equações de Navier-Stokes (Hinze, 1975), mas limitações na capacidade computacional fazem com que seja impossível resolvê-las diretamente. Por esse motivo, qualquer descrição de um fluxo turbulento com alto número de *Reynolds* está baseada em algum tipo de modelo simplificativo, dos quais podemos destacar três mais utilizados: a) modelo de '*Reynolds-stress*', que permite o cálculo dos momentos de ordem um e dois, por exemplo velocidade média, pressão média e energia cinética turbulenta; b) modelo de escala de *subgrade*, para simulações dos grandes turbilhões (*large eddy simulation* - LES - Nieuwstadt e Brost, 1986), no qual os turbilhões que contêm a principal energia cinética (grandes turbilhões) são computados diretamente e o efeito de pequena escala, que tem características mais gerais, são modelados; c) modelo de fechamento de dois pontos ou modelo espectral,

que geram informações mais detalhadas sobre a micro estrutura da turbulência, devido a estes modelos estarem baseados no tensor correlação da velocidade de dois pontos do fluido.

No presente trabalho obtém-se um modelo para a descrição do decaimento da energia cinética turbulenta em uma Camada Limite Convectiva, a partir de um modelo de fechamento de dois pontos ou modelo espectral, que possibilita obter uma parametrização dos termos desconhecidos na equação de balanço de energia. Este estudo é realizado durante o decaimento da turbulência convectiva na qual existem poucos dados experimentais, apesar de ser de extrema importância, pois ocorre na região da atmosfera mais diretamente influenciada pela presença da superfície. Apesar dessa importância existem poucos trabalhos na literatura que descrevem este período (*Nieuwstadt e Brost, 1986; Degrazia et al., 2003; Goulart et al., 2003*).

Este trabalho tem como objetivo principal calcular os coeficientes de difusão unidimensional durante a transição dia-noite, para que os modelos de dispersão possam ser usados no cálculo do campo de concentração de contaminantes durante este período de transição. O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 faz-se uma apresentação sobre Camada Limite Planetária e Camada Limite Convectiva. No capítulo 3 apresenta-se uma fundamentação teórica

que consiste na dedução da equação dinâmica para a função espectro de energia a partir das equações de Navier-Stokes (*Hinze, 1975*) e na apresentação do modelo de *Kristensen et al. (1989)*, no qual é obtido o espectro tridimensional de um fluxo turbulento homogêneo estacionário a partir de suas componentes unidimensionais. Este espectro tridimensional é a condição inicial para a resolução da equação dinâmica. No capítulo 4 é obtida uma equação dinâmica para a função espectro de energia em um fluxo turbulento homogêneo (invariante frente reflexão e translação), considerando que o fluxo de calor na superfície seja interrompido instantaneamente (*Nieuwstadt e Brost, 1986*). Esta aproximação permite considerar o termo de transferência inercial de energia parametrizado por *Pao (1965)* para um fluxo turbulento isotrópico (invariante frente rotação), e ainda, permite desconsiderar o termo de produção ou perda de energia por efeito térmico (*buoyancy*). Esta equação para o espectro é usada para obter o espectro de energia unidimensional (*Goulart et al., 2004*) e, a partir deste, obter o coeficiente de difusão unidimensional durante o decaimento da turbulência convectiva. No capítulo 5 faz-se uma análise do decaimento da energia cinética em um fluxo turbulento homogêneo não isotrópico. Os resultados obtidos são confrontados com dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*). Em seguida, faz-se uma comparação das variâncias unidimensionais e do coeficiente de difusão

vertical obtidos a partir do modelo proposto com dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*).

## Capítulo 2

# Camada Limite Planetária

A troposfera é a região da atmosfera que vai desde a superfície até cerca de 11 Km de altura. Essa região está dividida em duas partes: a Camada Limite Planetária (CLP), que é a região desde a superfície até aproximadamente 3 Km e o restante da troposfera, que é denominada Atmosfera Livre (*Stull, 1988*).

A CLP é a região da atmosfera mais diretamente influenciada pela superfície. Os forçantes superficiais são fluxos de calor, de umidade, de momentum e de poluição que estão dentro da ordem de tempo que uma perturbação entra no sistema da CLP e é absorvido por ela, e então o sistema novamente responde em equilíbrio.

A CLP se subdivide de acordo com os processos físicos envolvidos (turbulência mecânica e/ou convectiva) em Camada Limite Convectiva, Camada

Residual Noturna e Camada Limite Estável Noturna, como vemos na Figura 2.1.

O transporte na CLP é dominado na horizontal pelo vento médio e na vertical pela turbulência e sua espessura varia de cerca de 100 m à 3 Km, em função dos forçantes térmicos e mecânicos (produção de turbulência por empuxo e/ou cisalhamento do vento).

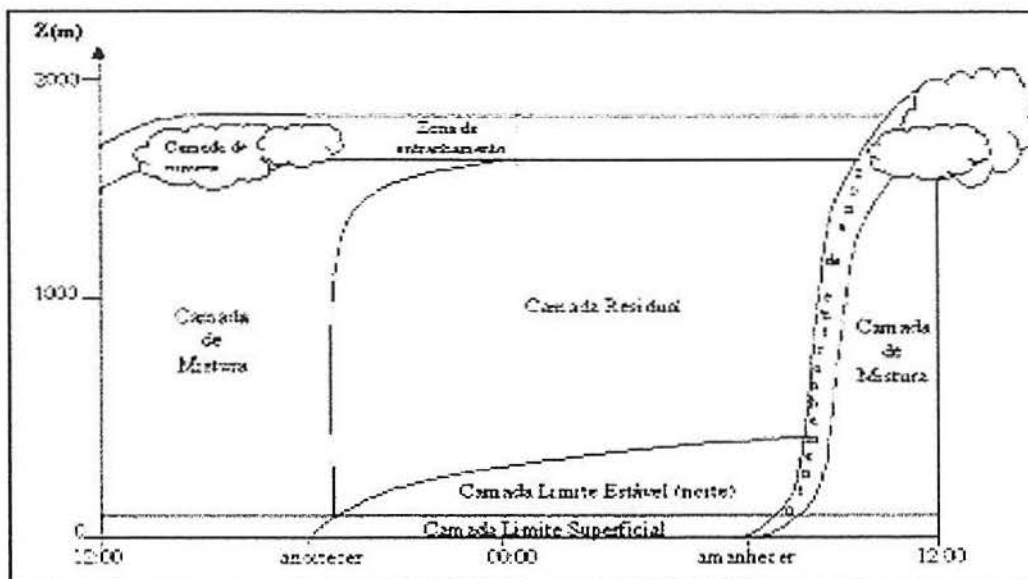


Figura 2.1: Evolução no tempo da Camada Limite Planetária (Stull, 1988)

## 2.1 Camada Limite Convectiva

A CLC é a região da atmosfera que vai desde a superfície até a base de inversão térmica ( $z = z_i$ , altura da CLC, geralmente varia de 1 Km até 3Km), e é caracterizada por uma forte mistura vertical gerada pelo fluxo de calor turbulento positivo, devido ao aquecimento solar da superfície.

A CLC pode ser subdividida em três partes em função dos parâmetros predominantes (escalas de comprimento, de velocidade e de temperatura), considerados relevantes para a descrição da turbulência.

Na Camada Limite Superficial (CLS) predomina a turbulência mecânica (cisalhamento do vento), pois esta camada está restrita a alturas menores do que  $z \leq |L|$ , onde  $L$  é o comprimento de *Monin-Obukhov*, definido por

$$L = -\frac{u_*^3}{k \frac{g}{\Theta} (\overline{w\theta})}, \quad (2.1)$$

na qual  $\Theta$  é a temperatura potencial média,  $(\overline{w\theta})$  é o fluxo de calor turbulento na superfície,  $u_*$  a velocidade de fricção na superfície,  $k$  a constante de *Von-Karman* e  $g$  a aceleração da gravidade.

Para uma CLC bem desenvolvida  $|L|$  apresenta valores típicos entre 10m e 100m de modo que em geral  $z_i/|L| \geq 10$  (*Panofsky e Dutton*, 1984). A razão  $z_i/|L|$  pode ser considerada como um parâmetro de estabilidade, uma

vez que expressa a importância da turbulência convectiva (fluxo de calor) em relação à turbulência mecânica (cisalhamento do vento). Na CLS são observados grandes gradientes de temperatura e velocidade, e o fluxo de calor turbulento é aproximadamente constante no tempo.

A Camada Limite de Mistura compreende a região entre  $|L| < z < z_i$  e é assim chamada devido a intensa mistura vertical que tende a conservar as variáveis como temperatura potencial e umidade aproximadamente constantes com a altura. A velocidade do vento nesta região é aproximadamente constante.

Modelos numéricos (*Deardorff*, 1972), observações de campo (*Kaimal e Wyngaard*, 1976) e experimentos de laboratório (*Willis e Deardorff*, 1976) mostram que os parâmetros de escala mais importantes na sua descrição são  $z_i$  e a escala de velocidade convectiva  $w_*$ , que é expressa por

$$w_* = \left( \frac{g}{\Theta} (\overline{w\theta}) z_i \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.2)$$

As dimensões dos grandes turbilhões convectivos são expressas em função de  $z_i$ , e as velocidades turbulentas são proporcionais a  $w_*$ . Um valor típico de  $w_*$  é 2m/s (*Weil e Brower*, 1984).

A escala de tempo convectiva,  $z_i/w_*$ , é da ordem de 15 min. Este é o tempo necessário para que forçantes superficiais que entraram no sistema da CLC sejam absorvidos por ela até que o sistema novamente responda em equilíbrio.



Usualmente chamado de tempo de relaxação.

A Camada Interfacial, ou zona de entranhamento (ZE) localiza-se próxima ao topo da CLP e é caracterizada por ocorrer um fluxo de calor negativo.

## Capítulo 3

# Fundamentação Teórica

Neste capítulo será apresentado, a partir das equações de Navier-Stokes, como é obtida a equação dinâmica para a função espectro de energia (*Hinze*, 1975). Em seguida mostra-se, a partir do modelo de *Kristensen et al.* (1989), como é obtido o espectro tridimensional de um fluxo turbulento homogêneo estacionário em função de suas componentes unidimensionais.

### 3.1 Equação Dinâmica Para a Função Espectro de Energia em um Fluxo Turbulento Homogêneo

Uma equação para a função correlação entre dois pontos distintos de um fluxo turbulento homogêneo pode ser obtida a partir das equações de Navier-

Stokes (*Hinze*, 1975),

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(U_i U_k) = -\delta_{i3} \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_0}\right) g - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

na qual foi usada a notação de Einstein (*Sokolnikosf*, 1964). Na equação (3.1)  $i, j, k$  representam, respectivamente, as direções longitudinal, transversal e vertical,  $\frac{\partial U_i}{\partial t}$  representa a variação com o tempo do momentum do elemento de fluido por unidade de massa,  $\frac{\partial}{\partial x_k}(U_i U_k)$  representa o gradiente do fluxo de momentum,  $-\delta_{i3} \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_0}\right) g$  representa a contribuição para a variação de momentum dada pela aceleração da gravidade, feita a aproximação de *Boussinesq* que considera a contribuição do gradiente de temperatura, sendo  $\rho$  a densidade do ar,  $\Theta$  a temperatura potencial e  $\Theta_0$  a temperatura potencial na superfície,  $-2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k$  representa a aceleração de *Coriolis* e  $\sigma_{ij}$  é o tensor tensão, que para um fluido *Newtoniano* é dado por (*Landau et al.*, 1989)

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \delta_{ij} \right], \quad (3.2)$$

na qual  $-P\delta_{ij}$  representa a contribuição da pressão exercida sobre o elemento de fluido,  $\mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$  representa a contribuição da viscosidade e  $-\mu \frac{2}{3} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{U} \right) \delta_{ij}$  representa a contribuição da dilatação do elemento de fluido, sendo  $\mu$  a viscosidade.

Será considerado um fluido incompressível ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0, \rho = cte$ ), e desprezadas

as forças externas ( $\delta_{i3}g + 2\varepsilon_{ijk}\Omega_j U_k = 0$ ), porém será mantido o termo de *Boussinesq* ( $\frac{\Theta}{\Theta_0}g\delta_{i3} \neq 0$ ). Com estas aproximações as equações de Navier-Stokes tornam-se

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = g \frac{\Theta}{\Theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}, \quad \ell = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

sendo  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  a viscosidade cinemática.

Para obter uma equação para a variação com o tempo da correlação entre as componentes turbulentas da velocidade de dois elementos de fluido localizados em dois pontos A e B vamos escrever a velocidade, a pressão e a temperatura potencial como a soma de uma componente média e outra turbulenta (*Stull,1988*),

$$(U_i = \bar{U}_i + u_i)_A, \quad P = \bar{P} + p, \quad (3.4)$$

$$(U_j = \bar{U}_j + u_j)_B, \quad \Theta = \bar{\Theta} + \theta. \quad (3.5)$$

Substituindo as relações dadas em (3.4) e (3.5) na equação (3.3), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \\ g \frac{\bar{\Theta}}{\theta_0} \delta_{i3} + g \frac{\theta}{\theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Fazendo a média de *Reynolds* (Apêndice A) na equação (3.6), tem-se

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = g \frac{\bar{\Theta}}{\theta_0} \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell}, \quad (3.7)$$

pois a média de uma flutuação é zero.

Para trabalhar somente com a perturbação, subtrai-se a equação (3.7) da equação (3.6), obtendo assim a equação para o fluxo turbulento no ponto A

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} u_i + u_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k - \bar{u}_i \bar{u}_k) = \right. \\ \left. g \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right) \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right]_A. \quad (3.8)$$

Escrevendo uma equação equivalente para o ponto B; multiplicando a equação (3.8) por  $(u_j)_B$  e a equação para o ponto B por  $(u_i)_A$ , e somando as duas equações para obter a correlação, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (u_i)_A (u_j)_B + (u_j)_B (u_k)_A \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right)_A + (u_i)_A (u_k)_B \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right)_B \\ & + (\bar{U}_k)_A \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_i)_A (u_j)_B + (\bar{U}_k)_B \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B \\ & = - \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B (u_i)_A (u_k)_A - \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (u_j)_B (u_k)_B \\ & + \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_A (u_j)_B (\bar{u}_i \bar{u}_k)_A + \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_B (u_i)_A (\bar{u}_j \bar{u}_k)_B \\ & - \frac{1}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A p_A (u_j)_B + \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_B p_B (u_i)_A \right] \\ & + \frac{g}{\theta_0} \left[ (u_i)_A \theta_B \delta_{j3} + (u_j)_B \theta_A \delta_{i3} \right] \\ & + \nu \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right)_A + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right)_B \right] (u_i)_A (u_j)_B. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Devido a não homogeneidade do fluxo turbulento, os valores dos produtos das velocidades na equação (3.9) são funções da distância entre os pontos A e B, e da localização destes pontos. Para diferenciar entre os efeitos causados pela

distância e pela localização, introduz-se as seguintes variáveis:

$$r_k = (x_k)_B - (x_k)_A \quad (x_k)_{AB} = \frac{1}{2}[(x_k)_A + (x_k)_B]. \quad (3.10)$$

Considerando os seguintes tensores correlação (Hinze, 1975),

$$\begin{aligned} \overline{(u_i)_A(u_j)_B} &= R_{i,j}(\vec{r}, t), \\ \overline{p_A(u_j)_B} &= P_{p,j}(\vec{r}, t), \\ \overline{p_B(u_i)_A} &= P_{i,p}(\vec{r}, t), \\ \overline{(u_i)_A\theta_B} &= T_{i,\theta}(\vec{r}, t), \\ \overline{\theta_A(u_j)_B} &= T_{\theta,j}(\vec{r}, t), \\ \overline{(u_i)_A(u_j)_B(u_k)_B} &= S_{i,k,j}(\vec{r}, t), \\ \overline{(u_j)_B(u_i)_A(u_k)_A} &= S_{i,k,j}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (3.11)$$

fazendo a média e a mudança de variável indicadas na relação (3.10), pode-se escrever a seguinte equação para os tensores correlação a partir da equação (3.9),

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} R_{i,j} + R_{k,j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right)_A + R_{i,k} \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right)_B \\ &+ \frac{1}{2} [(\bar{U}_k)_A + (\bar{U}_k)_B] \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} R_{i,j} + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial r_k} R_{i,j} = \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{AB} (S_{i,k,j} + S_{i,k,j}) - \frac{\partial}{\partial r_k} (S_{i,k,j} - S_{i,k,j}) \\ &- \frac{1}{2\rho} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{AB} P_{p,j} + \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{AB} P_{i,p} \right] \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} - \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} \right] + \frac{g}{\theta_0} [\delta_{3j} T_{i,\theta} + \delta_{i3} T_{\theta,j}] \\ &+ \frac{1}{2} \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right)_{AB} R_{i,j} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A relação (3.12) é a equação dinâmica completa para a correlação das velocidades entre dois elementos de fluido de um fluxo turbulento não homogêneo e não isotrópico, localizados em dois pontos distintos (*Hinze, 1975*).

Se a turbulência for homogênea, todas as derivadas em relação a  $(x_k)_{AB}$  são nulas (devido a invariância frente a translação), então a equação (3.12) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{i,j} + R_{k,j} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right)_A + R_{i,k} \left( \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right)_B + [(\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A] \frac{\partial}{\partial r_k} R_{i,j} = \\ - \frac{\partial}{\partial r_k} (S_{i,kj} - S_{ik,j}) + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} - \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} \right] + \frac{g}{\theta_0} [\delta_{3j} T_{i,\theta} + \delta_{i3} T_{\theta,j}] \\ + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Será considerado que a velocidade média do fluxo turbulento está na direção de um dos eixos do sistema de referência,

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= f(x_2), \\ \bar{U}_2 &= \bar{U}_3 = 0, \\ \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} &= cte. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como

$$R_{k,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} = R_{1,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_1} + R_{2,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_2} + R_{3,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_3},$$

tem-se pelas equações (3.14), que  $R_{1,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_1}$  e  $R_{3,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_3}$  são nulos e  $R_{2,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_2}$  se  $i \neq 1$ , então obtém-se

$$R_{k,j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} = R_{2,j} \delta_{i1} \frac{d\bar{U}_i}{dx_2}.$$

Da mesma forma,

$$R_{i,k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} = R_{i,2} \delta_{j1} \frac{d\bar{U}_j}{dx_2}.$$

Por definição  $r_2 = (x_2)_B - (x_2)_A$  e  $\frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = \frac{(\bar{U}_1)_B}{(x_2)_B}$ . Logo  $(\bar{U}_1)_B - (\bar{U}_1)_A = r_2 \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}$  e como  $\bar{U}_2 = \bar{U}_3 = 0$ , obtém-se

$$\left[ (\bar{U}_k)_B - (\bar{U}_k)_A \right] \frac{\partial}{\partial r_k} R_{i,j} = r_2 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{i,j} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}.$$

Nestas condições a equação (3.13) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{i,j} + \left( \delta_{i1} R_{2,j} + \delta_{j1} R_{i,2} + r_2 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{i,j} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = & - \frac{\partial}{\partial r_k} \left( S_{i,kj} - S_{ik,j} \right) \\ & - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} - \frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} \right] + \frac{g}{\theta_0} \left[ \delta_{3j} T_{i,\theta} + \delta_{i3} T_{\theta,j} \right] + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando a propriedade de invariância sob reflexão em um fluxo homogêneo ( $S_{ik,j} = -S_{j,ik}$  e  $P_{i,p} = -P_{p,i}$ ) (Hinze, 1975) e ainda devido a simetria do tensor correlação tripla da velocidade com respeito aos índices para um mesmo ponto ( $S_{ik,j} = S_{ki,j}$  e  $S_{i,jk} = S_{i,kj}$ ), pode-se definir

$$\begin{aligned} S_{i,j} &\equiv - \frac{\partial}{\partial r_k} \left( S_{i,kj} - S_{ik,j} \right) = \frac{\partial}{\partial r_k} \left( S_{jk,i} + S_{ik,j} \right), \\ P_{i,j} &\equiv \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} - \frac{\partial}{\partial r_i} P_{p,j} = \frac{\partial}{\partial r_j} P_{i,p} + \frac{\partial}{\partial r_i} P_{j,p}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como queremos obter a equação dinâmica para o espectro de energia cinética, faz-se a contração dos índices ( $i=j$ ) pois a energia cinética é dada pelo quadrado da mesma componente da velocidade. Considerando as definições feitas em



(3.16) e a equação da continuidade ( $P_{i,i} = 0$ ), obtém-se a seguinte expressão para a equação (3.15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R_{i,i} + \left( 2\delta_{i1} R_{i,2} + r_2 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{i,i} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = S_{i,i} + \frac{g}{\theta_0} [T_{\theta,3} + T_{3,\theta}] \\ + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial r_\ell} R_{i,i}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

A equação (3.17) descreve a variação com o tempo da correlação entre as componentes turbulentas da velocidade de dois pontos localizados em um fluxo turbulento homogêneo.

A equação dinâmica para o espectro de energia cinética é obtida a partir da Transformada de Fourier da equação (3.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{i,i}(\vec{k}, t) + \left( 2\Phi_{1,2}(\vec{k}, t) - k_1 \frac{\partial \Phi_{i,i}(\vec{k}, t)}{\partial k_2} \right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} = W_{i,i}(\vec{k}, t) + \frac{g}{\theta_0} [H_{\theta,i} + H_{i,\theta}] (\vec{k}, t) \\ - 2\nu k^2 \Phi_{i,i}(\vec{k}, t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

consideradas as seguintes Transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \Phi_{i,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint R_{i,i}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r, \\ W_{i,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint S_{i,i}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r, \\ H_{\theta,i}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint T_{\theta,i}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r, \\ H_{i,\theta}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \oint T_{i,\theta}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Integrando os termos da equação (3.18) sobre uma superfície esférica de raio  $k$ ,

$$\begin{aligned} E(k, t) &= \frac{1}{2} \int \int \Phi_{i,i}(\vec{k}, t) d\sigma, \\ W(k, t) &= \int \int W_{i,i}(\vec{k}, t) d\sigma, \\ H(k, t) &= \int \int (H_{\theta,i}(\vec{k}, t) + H_{i,\theta}(\vec{k}, t)) d\sigma, \end{aligned}$$

e definindo

$$M(k, t) \equiv -\left(2\Phi_{1,2}(k, t) - k_1 \frac{\partial \Phi_{i,i}(k, t)}{\partial k_2}\right) \frac{d\bar{U}_1}{dx_2}, \quad (3.20)$$

na qual  $k = \|\vec{k}\|$ , pode-se escrever a equação (3.18) da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = M(k, t) + W(k, t) + \frac{g}{\theta_0} H(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t). \quad (3.21)$$

Nesta equação  $E(k, t)$  é a função espectro de energia ou simplesmente espectro de energia,  $M(k, t)$  é o termo de produção de energia por efeito mecânico,  $W(k, t)$  descreve a transferência de energia cinética entre os turbilhões de diferentes números de onda por efeito inercial,  $H(k, t)$  é o termo de produção ou perda de energia por efeito térmico, e  $-2\nu k^2 E(k, t)$  representa a dissipação de energia por viscosidade molecular.

## 3.2 Modelo de Kristensen Para o Espectro de Energia na Camada Limite Planetária

A solução da equação (3.21) descreve a evolução no tempo do espectro de energia de um fluxo turbulento homogêneo. Esta equação é uma equação diferencial parcial de 1<sup>a</sup> ordem e sua solução necessita de uma condição inicial. Esta condição inicial é o espectro de energia tridimensional da CLC antes do decaimento ( $E(k, 0) = E(k)$ , pois o fluxo é estacionário), a qual é obtida a partir do modelo de *Kristensen et al.*, (1989).

### 3.2.1 A Função Espectro de Energia

Seja um campo de velocidade turbulento homogêneo. Para este campo a média de *ensemble* (Apêndice A) da velocidade é constante no espaço e o tensor correlação é (*Kristensen et al.*, 1989),

$$R_{i,j}(\vec{r}) = \langle (u_i(\vec{x}))(u_j(\vec{x} + \vec{r})) \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

Assumindo que  $R_{i,j}$  é simétrico:

$$R_{i,j}(-\vec{r}) = R_{j,i}(\vec{r}) = R_{i,j}(\vec{r}), \quad (3.23)$$

isto é,  $R_{i,j}$  é invariante frente a reflexões e translações. Não é assumido que o campo de velocidade seja isotrópico, no sentido de que não tenha direção preferencial no espaço.

O tensor espectro é definido como

$$\Phi_{i,j}(\vec{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \oint R_{i,j}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (3.24)$$

Considerando as condições citadas acima, uma apropriada forma para o tensor espectral, definido pela identidade (3.24) é

$$\Phi_{i,j}(\vec{k}) = \sum_{\ell=1}^3 A_{\ell}(k) \left\{ \delta_{\ell i} - \frac{k_{\ell} k_i}{k^2} \right\} \left\{ \delta_{\ell j} - \frac{k_{\ell} k_j}{k^2} \right\}, \quad (3.25)$$

sendo  $A_1(k)$ ,  $A_2(k)$  e  $A_3(k)$  funções reais de módulo  $k$  do vetor número de onda  $\vec{k}$ . O espectro de energia é definido como:

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{1}{2} \int \int \Phi_{i,i}(\vec{k}) d\sigma \\ &= \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi} \text{sen}(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{i=1}^3 \Phi_{i,i}(\vec{k}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Substituindo o tensor  $\Phi_{i,i}(\vec{k})$ , dado pela equação (3.25) e resolvendo as integrais com relação a  $\theta$  e  $\phi$ , obtém-se

$$E(k) = \frac{4\pi}{3} k^2 \{A_1(k) + A_2(k) + A_3(k)\}. \quad (3.27)$$

Para determinar uma expressão para  $A_1(k)$ ,  $A_2(k)$  e  $A_3(k)$  será considerado, primeiramente, a relação entre uma componente unidimensional do espectro e o tensor espectral (*Lumley e Panofsky, 1964*),

$$F_{ii}^1(k_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \Phi_{i,i}(\vec{k}) \quad (3.28)$$

Considerando a equação (3.25), obtém-se

$$\Phi_{11}(\vec{k}) = A_1(k) \left\{ \frac{k^2 - k_1^2}{k^2} \right\}^2 + A_2(k) \frac{k_2^2 k_1^2}{k^4} + A_3 \frac{k_3^2 k_1^2}{k^4}. \quad (3.29)$$

Usando coordenadas polares  $\kappa$  e  $\Theta$ , definidas por

$$\begin{aligned} k_2 &= \kappa \cos(\Theta), \\ k_3 &= \kappa \sin(\Theta), \end{aligned} \quad (3.30)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(k) &= A_1(k) \frac{\kappa^4}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} + A_2(k) \frac{\kappa^2 k_1^2}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \cos^2(\Theta) \\ &+ A_3(k) \frac{\kappa^2 k_1^2}{(k_1^2 + \kappa^2)^2} \sin^2(\Theta). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.31) em (3.28) e integrando sobre  $\Theta$  obtemos para a componente longitudinal do espectro  $F_u(k) \equiv F_{11}^1(k)$ ,

$$F_u(k) = 2\pi \int_k^\infty (K^2 - k^2) \left\{ (K^2 - k^2) A_1(K) + \frac{1}{2} k^2 (A_2(K) + A_3(K)) \right\} \frac{dK}{K^3}. \quad (3.32)$$

Da mesma forma, podem ser obtidas as seguintes expressões para as componentes transversal  $F_v(k) \equiv F_{22}^1(k)$  e vertical  $F_w(k) \equiv F_{33}^1(k)$  do espectro:

$$\begin{aligned} F_v(k) &= \pi \int_k^\infty \left\{ k^2 (K^2 - k^2) A_1(k) + \frac{1}{4} (3K^4 + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_2(K) \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_3(K) \right\} \frac{dK}{K^3}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} F_w(k) &= \pi \int_k^\infty \left\{ k^2 (K^2 - k^2) A_1(k) + \frac{1}{4} (K^2 - k^2)^2 A_2(K) + \frac{1}{4} (3K^4 \right. \\ &\left. + 2K^2 k^2 + 3k^4) A_3(K) \right\} \frac{dK}{K^3}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Se a turbulência for isotrópica, existem duas relações entre as componentes unidimensionais e a derivada primeira da componente longitudinal do espectro:  $F_v(k) = F_w(k)$  e  $2F_v(k) = F_u(k) - k \frac{dF_u(k)}{dk}$  (Panofsky e Dutton, 1984). Embora a análise não seja para um fluxo turbulento isotrópico, os seguintes resíduos serão definidos

$$H(k) = F_v(k) - F_w(k) \quad e \quad (3.35)$$

$$J(k) = F_u(k) - kF'_u(k) - (F_v(k) + F_w(k)). \quad (3.36)$$

Substituindo as equações (3.32), (3.33) e (3.34) em (3.35) e (3.36), temos

$$H(k) = \frac{\pi}{2} \int_k^\infty [A_2(K) - A_3(K)](K^2 + k^2)^2 \frac{dK}{K^3} \quad (3.37)$$

$$J(k) = 2\pi \int_k^\infty \left( A_1(K) - \frac{A_2(K) + A_3(K)}{2} \right) (K^2 - k^2)(K^2 + 2k^2) \frac{dK}{K^3} \quad (3.38)$$

Introduzindo as novas variáveis

$$s = k^{-2}, \quad (3.39)$$

$$t = K^{-2}, \quad (3.40)$$

$$f(s) = H(s^{-\frac{1}{2}})s^2, \quad (3.41)$$

$$g(s) = J(s^{-\frac{1}{2}})s^2, \quad (3.42)$$

$$\alpha(t) = \pi(A_2(t^{-\frac{1}{2}}) - A_3(t^{-\frac{1}{2}})) \quad e \quad (3.43)$$

$$\beta(t) = \pi \left[ A_1(t^{-\frac{1}{2}}) - \frac{A_2(t^{-\frac{1}{2}}) + A_3(t^{-\frac{1}{2}})}{2} \right]; \quad (3.44)$$

as equações (3.37) e (3.38) tornam-se

$$f(s) = \frac{1}{4} \int_0^s (s+t)^2 \alpha(t) \frac{dt}{t^2} \quad e \quad (3.45)$$

$$g(s) = \int_0^s \beta(t)(s-t)(s+2t) \frac{dt}{t^2}. \quad (3.46)$$

Diferenciando as equações (3.45) e (3.46) três vezes em relação ao tempo, obtém-se

$$\alpha''(s) + \frac{1}{s} \alpha'(s) - \frac{1}{2s^2} \alpha(s) = f'''(s) \quad e \quad (3.47)$$

$$\frac{3}{s} \beta'(s) - \frac{1}{s^2} \beta(s) = g'''(s). \quad (3.48)$$

Resolução da equação (3.47):

Supondo uma solução do tipo  $\alpha(s) = s^r$ , tem-se

$\alpha'(s) = r s^{r-1}$  e  $\alpha''(s) = r(r-1)s^{r-2}$ . Substituindo estas funções na equação

homogênea, obtém-se

$$s^2[r(r-1)s^{r-2}] + s[r s^{r-1}] - \frac{1}{2} s^r = 0 \text{ ou } s^r[r(r-1) + r - \frac{1}{2}] = 0.$$

Onde

$$r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad W(s) = -\frac{\sqrt{2}}{s}. \quad (3.49)$$

Então  $\alpha(s) = C_1(s)s^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C_2(s)s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ .

Seja  $\alpha_+ = s^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$  e  $\alpha_- = s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ,

$\alpha'(s) = C_1(s)\alpha'_+(s) + C_2(s)\alpha'_-(s) + C'_1(s)\alpha_+(s) + C'_2(s)\alpha_-(s)$ , tal que

$$C'_1(s)\alpha_+(s) + C'_2(s)\alpha_-(s) = 0 \quad (3.50)$$

pela variação de parâmetros.

E ainda,

$$\alpha(0) = 0 \Rightarrow C_2(0) = 0,$$

$$\alpha'(0) = 0 \Rightarrow C_1(0) = 0 \text{ e}$$

$$\alpha''(s) = C_1(s)\alpha''_+(s) + C_2(s)\alpha''_-(s) + C'_1(s)\alpha'_+(s) + C'_2(s)\alpha'_-(s).$$

Substituindo na EDO, tem-se

$$C'_1(s)\alpha'_+(s) + C'_2(s)\alpha'_-(s) = f'''(s). \quad (3.51)$$

Das equações (3.50) e (3.51), obtém-se

$$C'_1(s) = -\frac{\alpha_-(s)f'''(s)}{W(s)} \text{ e } C'_2(s) = \frac{\alpha_+(s)f'''(s)}{W(s)} \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$C_1(s) = C_1(0) - \int_0^s \frac{\alpha_-(t)f'''(t)}{W(t)} dt \text{ e } C_2(s) = C_2(0) + \int_0^s \frac{\alpha_+(t)f'''(t)}{W(t)} dt.$$

Assim,

$$\alpha(s) = \frac{s^{+\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt. \quad (3.52)$$

Resolução da equação (3.48):

Supondo uma solução do tipo  $\beta(s) = s^r$ , tem-se  $\beta'(s) = r s^{r-1}$ . Substituindo estas funções na equação homogênea, obtém-se



$$3s[rs^{r-1}] - s^r = 0 \Rightarrow s^r[3r - 1] = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{3} \text{ e}$$

$$\beta(s) = C_1(s)s^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{Seja } \beta_+ = s^{\frac{1}{3}}, \beta'(s) = C_1'(s)\beta_+(s) + C_1(s)\beta_+'(s) \text{ e}$$

$$\beta(0) = 0 \text{ e } \beta'(0) = 0 \Rightarrow C_1(0) = 0.$$

Substituindo na EDO, tem-se

$$C_1'(s) = \frac{1}{3}s^{1-\frac{1}{3}}g''' \text{ e, conseqüentemente,}$$

$$C_1(s) = C_1(0) + \frac{1}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}}g'''(t)dt.$$

Assim,

$$\beta(s) = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}}g'''(t)dt. \quad (3.53)$$

Os coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  podem ser determinados a partir do sistema formado pelas equações (3.39), (3.40), (3.43), (3.44) e da relação

$$A_2(k) + A_3(k) = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u}{dk} - \frac{4k^2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{k^2}} \beta(s)ds, \quad (3.54)$$

obtida a partir das equações (3.32) e (3.44). A relação (3.54) foi obtida com o objetivo de tornar linear o sistema de equações. Após substituir a equação (3.53) na equação (3.54) e integrar por partes, obtém-se

$$3A_1(k) - \frac{A_2(k) + A_3(k)}{2} = \frac{k}{2\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + \frac{1}{\pi} s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t)dt. \quad (3.55)$$

Das equações (3.43) e (3.39), tem-se  $\alpha(s) = \pi(A_2(k) - A_3(k))$ .

E ainda, usando a equação (3.52), obtém-se

$$A_2(k) - A_3(k) = \frac{s^{+\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt. \quad (3.56)$$

Das equações (3.44) e (3.39), tem-se  $\beta(s) = \pi[A_1(k) - \frac{A_2(k)+A_3(k)}{2}]$ .

E ainda, usando a equação (3.53), obtém-se

$$A_1(k) - \frac{A_2(k) + A_3(k)}{2} = \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt. \quad (3.57)$$

Subtraindo (3.57) de (3.55), obtém-se

$$A_1(k) = \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + \frac{1}{2\pi} \left\{ s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - \frac{s^{\frac{1}{3}}}{3} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \right\}. \quad (3.58)$$

Isolando  $A_3$  em (3.56), substituindo  $A_1$  e  $A_3$  em (3.57), obtém-se

$$\begin{aligned} A_2(k) &= \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt \right. \\ &\left. + s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt - s^{\frac{1}{3}} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Substituindo  $A_2$  em (3.56), obtém-se

$$\begin{aligned} A_3(k) &= \frac{k}{4\pi} \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} \\ &- \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt - \frac{s^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \int_0^s t^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} f'''(t) dt \right. \\ &\left. - s^{-1} \int_0^s t^2 g'''(t) dt + s^{\frac{1}{3}} \int_0^s t^{\frac{2}{3}} g'''(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Substituindo  $A_1(k)$ ,  $A_2(k)$  e  $A_3(k)$  em (3.27), obtém-se a seguinte expressão para a função espectro de energia de um fluxo turbulento homogêneo não isotrópico,

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + 2k^4 \int_0^{\frac{1}{k^2}} s^2 g'''(s) ds - \frac{14}{9} k^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{1}{k^2}} s^{\frac{2}{3}} g'''(s) ds. \quad (3.61)$$

### 3.2.2 Espectros Unidimensionais

Para que a função espectro de energia dada pela equação (3.61) possa ser escrita em termos das componentes unidimensionais, deve-se determinar uma expressão para  $g'''(s)$ . A partir da relação (3.36) pode-se escrever

$$J(k) = 2F_u(k) - F_v(k) - F_w(k). \quad (3.62)$$

Considerando as mudanças de variáveis dadas por (3.39), (3.41) e (3.42), pode-se reescrever a expressão (3.62) como

$$g(s) = 2f_u(s) - f_v(s) - f_w(s). \quad (3.63)$$

A derivada de ordem três de  $g(s)$  será

$$g'''(s) = 2f_u'''(s) - f_v'''(s) - f_w'''(s). \quad (3.64)$$

Serão considerados os espectros unidimensionais de *Degrazia et al.*, (2000) para camada limite convectiva.

$$F_i(k) = \frac{a_i}{(1 + b_i k)^{\frac{5}{3}}}, \quad i = u, v, w \quad (3.65)$$

com  $a_i = \frac{0.98}{2\pi} c_i \left(\frac{z}{z_i}\right)^{\frac{5}{3}} z_i \psi_\varepsilon^{\frac{2}{3}} w_*^2 [(f_m^*)_i^c]^{-\frac{5}{3}}$  e  $b_i = \frac{1.5}{2\pi} \frac{z}{z_i} z_i \frac{1}{(f_m^*)_i^c}$ , sendo  $c_i = \alpha_i(0.5 \pm 0.05)(2\pi\kappa)^{-\frac{2}{3}}$ ,  $\alpha_i = 1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}$  para  $u, v$  e  $w$  respectivamente (*Champagne et al.*, 1977; *Sorbjan*, 1989).  $w_* = (u_*)_o \left(-\frac{z_i}{\kappa L}\right)^{\frac{1}{3}}$  é a escala de velocidade convectiva;  $(f_m)_i^c = \frac{z}{G_i z_i}$ ;  $G_u = G_v = 1,5$ ;  $G_w = 1,8[1 - \exp(-\frac{4z}{z_i}) - 0,0003 \exp(\frac{8z}{z_i})]$  e  $\psi_\varepsilon = \frac{\varepsilon z_i}{w_*^3}$  é a função razão de dissipação molecular. Substituindo  $k = s^{-\frac{1}{2}}$  em (3.65) e considerando a equação (3.41) obtém-se

$$f_i(s) = A_i \frac{s^{\frac{17}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{5}{3}}}, \quad (3.66)$$

na qual

$$A_i = a_i \left(\frac{1}{b_i}\right)^{\frac{5}{6}}, \quad B_i = b_i^{-2}. \quad (3.67)$$

A derivada terceira de  $f_i(s)$  é

$$f_i'''(s) = \sum_{n=0}^3 \frac{C_n A_i B_i^{\frac{3-n}{2}} s^{\frac{8-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}}, \quad (3.68)$$

sendo

$$C_0 = -\frac{55}{27}, \quad C_1 = \frac{70}{9}, \quad C_2 = -\frac{725}{72}, \quad C_3 = \frac{935}{216}. \quad (3.69)$$

Em termos das componentes unidimensionais de *Degrazia et al.* (2000), a equação (3.64) será

$$g'''(s) = m_i f_i'''(s), \quad (3.70)$$

com

$$m_u = 2, \quad m_v = -1, \quad m_w = -1. \quad (3.71)$$

Substituindo a equação (3.68) na equação (3.70) obtém-se

$$g'''(s) = A_i m_i \sum_{n=0}^3 \frac{C_n B_i^{\frac{3-n}{2}} s^{\frac{8-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}}. \quad (3.72)$$

Inserindo a equação (3.72) na equação (3.61) obtém-se

$$E(k) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + A_i m_i \sum_{n=0}^3 C_n B_i^{\frac{3-n}{2}} (2k^4 I_{1i} - \frac{14}{9} k^{\frac{4}{3}} I_{2i}), \quad (3.73)$$

sendo

$$I_{1i} = \int_0^{\frac{1}{k^2}} \frac{s^{\frac{20-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}} ds \quad e \quad (3.74)$$

$$I_{2i} = \int_0^{\frac{1}{k^2}} \frac{s^{\frac{12-3n}{6}}}{(1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{14-3n}{3}}} ds. \quad (3.75)$$

Para que as integrais  $I_{1i}$  e  $I_{2i}$  possam ser escritas em uma forma algébrica, serão feitas as seguintes mudanças de variáveis:  $\sqrt{B_i s} = (Z_i^3 - 1)^{-1}$  na integral  $I_{1i}$ , e  $\sqrt{B_i s} = (Z_i^3 - 1)$  na integral  $I_{2i}$ . Com essas mudanças de variáveis, obtém-se:

$$I_{1i} = 6B_i^{\frac{26-3n}{6}} \int_{W_{1i}}^{\infty} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^5} dZ_i, \quad (3.76)$$

com  $W_{1i} = (1 + \frac{1}{\sqrt{B_i s}})^{\frac{1}{3}}$ , e

$$I_{2i} = 6B_i^{-3-\frac{n}{2}} \int_1^{W_{2i}} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^{n-5}} dZ_i, \quad (3.77)$$

com  $W_{2i} = (1 + \sqrt{B_i s})^{\frac{1}{3}}$ .

Substituindo (3.76) e (3.77) na equação (3.73), obtém-se a seguinte expressão para o espectro 3-D na Camada Limite Convectiva,

$$\begin{aligned}
 E(k) = & k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} \\
 & + 12A_i m_i B_i^{-\frac{17}{6}} k^4 \sum_{n=0}^3 C_n \int_{W_{1i}}^{\infty} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^5} dZ_i \\
 & - \frac{84}{9} A_i m_i B_i^{-\frac{3}{2}} k^{\frac{4}{3}} \sum_{n=0}^3 C_n \int_1^{W_{2i}} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^{n-5}} dZ_i.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Este espectro é a condição inicial usada para resolver a equação (3.21).

## Capítulo 4

# Determinação do Espectro de Energia e do Coeficiente de Difusão Unidimensional na CLC

Neste capítulo será obtido o espectro de energia durante o decaimento de um fluxo turbulento convectivo a partir da equação dinâmica para o espectro de energia (3.21) com a componente inicial dada pela equação (3.78) e, então, usá-lo para obter o espectro de energia unidimensional. Em seguida será obtido o coeficiente de difusão unidimensional durante o decaimento da turbulência convectiva, a partir do espectro unidimensional.

### 4.1 Equação Dinâmica Para o Espectro de Energia

Neste trabalho não será considerado o termo de produção de energia por efeito mecânico  $M(k, t)$ , pois será analisado um regime de estabilidade no qual

predomina a turbulência convectiva.

Durante o período de transição dia-noite será considerado que o fluxo de calor na superfície seja interrompido instantaneamente (*Nieuwstadt e Brost, 1986*). Esta aproximação permite desconsiderar o termo de produção ou perda de energia cinética por efeito térmico  $H(k, t)$ . Assim a equação obtida para o espectro de energia é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = W(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t). \quad (4.1)$$

Um fluxo turbulento é composto de turbilhões de diferentes tamanhos. Os pequenos turbilhões ficam expostos ao campo de tensão gerado pelos grandes turbilhões. Este campo de tensão aumenta a vorticidade dos pequenos turbilhões e, conseqüentemente, sua energia cinética. Desta forma há uma transferência de energia cinética dos grandes turbilhões para turbilhões cada vez menores, até que seja alcançada a micro escala de *Kolmogorov* e a energia seja dissipada em forma de calor. Este processo está representado pelo termo  $W(k, t)$  na equação (4.1). Este termo foi parametrizado por *Pao, (1965)* para um fluxo turbulento isotrópico, a partir de análise dimensional como:

$$W(k, t) = -\frac{\partial}{\partial k} \left( \alpha^{-1} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}} k^{\frac{5}{3}} E(k, t) \right). \quad (4.2)$$

sendo  $\alpha$  a constante de *Kolmogorov* e  $\varepsilon_0$  a razão de dissipação molecular.



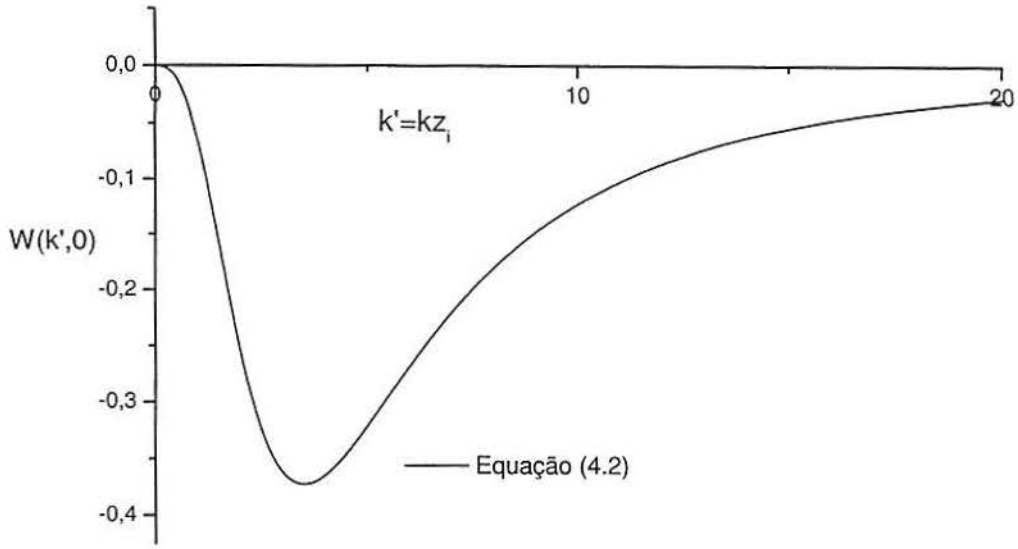


Figura 4.1:  $W(k', 0)$  calculado a partir da equação (4.2) com o espectro  $E(k, 0)$  dado pela equação (3.78) com as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.65).

A Figura 4.1 mostra que a equação (4.2) pode descrever o termo de transferência inercial de energia, pois o máximo do módulo da função  $W(k', 0)$  localiza-se em números de onda pequenos, representando uma perda de energia nessa região.

Substituindo a expressão (4.2) para  $W(k, t)$  na equação (4.1), tem-se:

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} + \alpha^{-1} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}} k^{\frac{5}{3}} \frac{\partial E(k, t)}{\partial k} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} \varepsilon_0^{\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}} E(k, t) + 2\nu k^2 E(k, t) = 0. \quad (4.3)$$

Para adimensionalizar a equação acima serão considerados os seguintes parâmetros adimensionais:

$$t_* = \frac{w_* t}{z_i}, \quad R_e = \frac{w_* z_i}{\nu}, \quad \psi_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 z_i}{w_*^3}. \quad (4.4)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais acima na equação (4.3), obtém-se

$$\frac{\partial E(k', t_*)}{\partial t_*} + \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}(k')^{\frac{5}{3}} \frac{\partial E(k', t_*)}{\partial k'} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}(k')^{\frac{2}{3}} E(k', t_*) + \frac{2}{R_e} (k')^2 E(k', t_*) = 0, \quad (4.5)$$

sendo  $k' = kz_i$ .

Resolução da equação (4.5) pelo método das características (Debnath,1997):

$$\frac{dt_*}{ds} = 1; t_*(0) = 0 \Rightarrow t_* = s, \quad (4.6)$$

$$\frac{dk'}{ds} = \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} k'^{\frac{5}{3}}; k'(0) = m. \quad (4.7)$$

De (4.7) tem-se

$$\int \frac{dk'}{k'^{\frac{5}{3}}} = \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} \int ds \Rightarrow -\frac{3}{2} k'^{-\frac{2}{3}} = \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} s + c \Rightarrow k'(s) = \left( -\frac{2}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} s + c \right)^{-\frac{3}{2}}$$

e como  $k'(0) = m$ , tem-se

$$k'(s) = \left( -\frac{2}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.8)$$

Tem-se ainda que  $\frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dt_*} \frac{dt_*}{ds} + \frac{dE}{dk'} \frac{dk'}{ds} \Rightarrow \frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dt_*} + \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} k'^{\frac{5}{3}} \frac{dE}{dk'}$ . Substituindo na equação (4.5), obtém-se

$$\frac{dE(s)}{ds} = -\left( \frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} k'^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{R_e} k'^2 \right) E(s). \quad (4.9)$$

Substituindo  $k'(s)$  dado por (4.8) na equação (4.9), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dE(s)}{E(s)} = & -\left\{ \frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} \left( -\frac{2}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{-1} \right. \\ & \left. + \frac{2}{R_e} \left( -\frac{2}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}} s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{-3} \right\} ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Integrando a equação (4.10) com respeito a  $s$ , tem-se

$$\ln |E(s)| = \ln \left| -\frac{2}{3}\alpha^{-1}\psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}s + m^{-\frac{2}{3}} \right|^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}\alpha^1\psi_\varepsilon^{-\frac{1}{3}}R_e^{-1} \left( -\frac{2}{3}\alpha^{-1}\psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{-2} + C_0$$

e, conseqüentemente,

$$E(s) = C \left( -\frac{2}{3}\alpha^{-1}\psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{5}{2}} \exp \left[ -\frac{3}{2}\alpha^1\psi_\varepsilon^{-\frac{1}{3}}R_e^{-1} \left( -\frac{2}{3}\alpha^{-1}\psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{-2} \right].$$

E ainda como,  $E(0) = E(k'(0), 0) = E(m, 0) = E_0(m)$ , obtém-se

$$C = E_0(m)m^{\frac{5}{3}} \exp \left( \frac{3}{2}\alpha^1\psi_\varepsilon^{-\frac{1}{3}}R_e^{-1}m^{\frac{4}{3}} \right) e$$

$$E(s) = T_1(s).T_2(s), \quad (4.11)$$

$$\text{sendo } T_1(s) = E_0(m)m^{\frac{5}{3}} \left( -\frac{2}{3}\alpha^{-1}\psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{5}{2}}$$

$$\text{e } T_2(s) = \exp \left[ -\frac{3}{2}\alpha^1\psi_\varepsilon^{-\frac{1}{3}}R_e^{-1} \left( -\frac{2}{3}\alpha^{-1}\psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}s + m^{-\frac{2}{3}} \right)^{-2} \right].$$

Substituindo as equações (4.6) e (4.8) em (4.11), obtém-se o espectro de energia em função de  $k'$  e  $t_*$ ,

$$E(k', t_*) = E_0(m)m^{\frac{5}{3}}k'^{-\frac{5}{3}} \exp \left[ -\frac{3}{2}\alpha^1\psi_\varepsilon^{-\frac{1}{3}}R_e^{-1} \left( k'^{\frac{4}{3}} - m^{\frac{4}{3}} \right) \right], \quad (4.12)$$

na qual  $m = \left( k'^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\alpha^{-1}\psi_\varepsilon^{\frac{1}{3}}t_* \right)^{-\frac{3}{2}}$  e  $E_0(m)$  é o espectro 3-D inicial dado pela equação (3.78).

A Figura 4.2 mostra a evolução no tempo do espectro de energia 3-D durante o decaimento da turbulência convectiva.

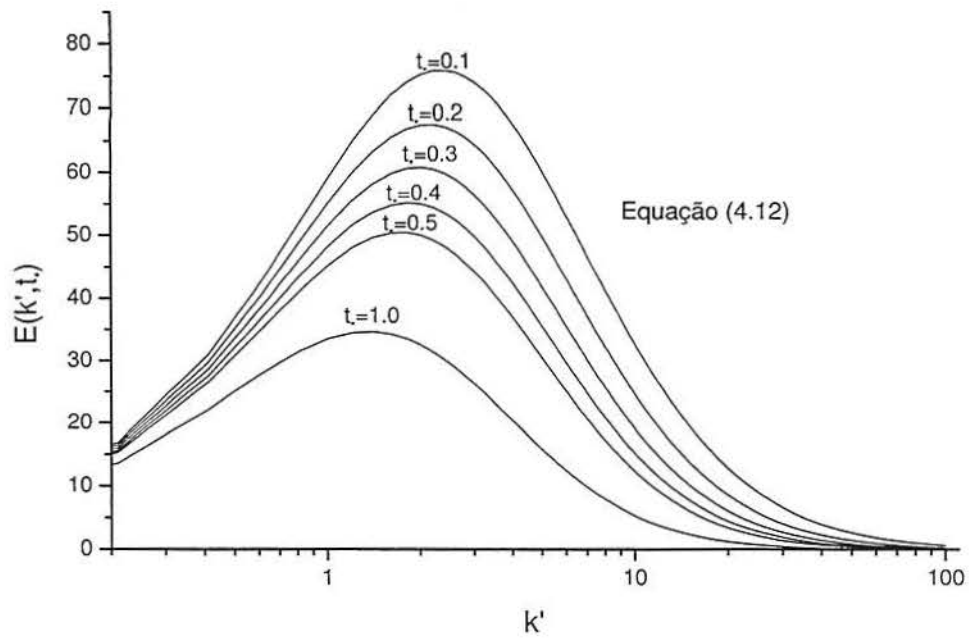


Figura 4.2: Espectro calculado a partir da equação (4.12) com o espectro  $E(k, 0)$  dado pela componente isotrópica da equação (3.78) e as componentes unidimensionais calculadas pela equação (3.65).

## 4.2 Espectro de Energia Unidimensional obtido a partir do Espectro 3-D

Para a obtenção do espectro unidimensional, foi proposta por *Goulart et al.* (2004), uma relação entre as médias dos espectros unidimensionais e tridimensional

$$E_i(k, t) \propto \frac{\overline{E}_i(k, t)}{\overline{E}(k, t)} E(k, t), \quad (4.13)$$

na qual

$$\overline{E}_i(k, t) = \frac{\int_0^t E_i(k, t') dt'}{T}; \quad (4.14)$$

e  $T$  é o tempo total do decaimento da turbulência.

Obtém-se assim

$$E_i(k, t) = C \frac{\int_0^t E_i(k, t') dt'}{\int_0^t E(k, t') dt'} E(k, t). \quad (4.15)$$

Esta relação representa a contribuição de cada componente na formação do espectro 3-D. A partir de dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*), tem-se  $C = 1$ , logo

$$E_i(k, t) = X(k, t) \int_0^t E_i(k, t') dt' \quad (4.16)$$

com

$$X(k, t) = \frac{E(k, t)}{\int_0^t E(k, t') dt'}. \quad (4.17)$$

Derivando a equação (4.16) com respeito a  $t$ , obtém-se

$$\frac{\partial E_i(k, t)}{\partial t} - \left[ \frac{1}{X(k, t)} \frac{\partial X(k, t)}{\partial t} + X(k, t) \right] E_i(k, t) = 0. \quad (4.18)$$

Resolução da equação (4.18) pelo método das características (*Debnath, 1997*):

$$\frac{dt}{ds} = 1; t(0) = 0 \Rightarrow t = s, \quad (4.19)$$

$$\frac{dk}{ds} = 0; k(0) = m \Rightarrow k = m. \quad (4.20)$$

Substituindo as equações (4.19) e (4.20) na equação (4.18), obtém-se

$$\frac{dE_i}{ds} = \left[ \frac{1}{X} \frac{dX}{ds} + X \right] E_i \Rightarrow \frac{dE_i}{E_i} = \left[ \frac{1}{X} \frac{dX}{ds} + X \right] ds. \quad (4.21)$$

Integrando a equação (4.21) com respeito a  $s$ , tem-se

$$\ln \left| \frac{E_i(k, s)}{C_1} \right| = \int_0^t \left[ \frac{1}{X} \frac{dX}{ds} + X \right] ds, \quad (4.22)$$

com  $E_i(k(0), 0) = E_i(m, 0) = E_0(m) \Rightarrow C_1 = E_0(m)$ , assim

$$\frac{E_i(k, s)}{E_0(m)} = \exp \int_0^t \left[ \frac{1}{X} \frac{dX}{ds} + X \right] ds, \quad (4.23)$$

sendo  $s = t$  e  $m = k$ . Obtém-se desta forma, o espectro unidimensional em função do espectro 3-D

$$E_i(k, t) = E_i(k, 0) \exp \int_0^t \left[ \frac{1}{X(k, t')} \frac{\partial X(k, t')}{\partial t'} + X(k, t') \right] dt', \quad (4.24)$$

com  $X(k, t)$  dado pela equação (4.17) e  $E_i(k, 0)$  é o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.65).

### 4.3 Coeficiente de Difusão Unidimensional

O coeficiente de difusão é dado por (*Batchelor* - 1949)

$$K_\alpha = \int_0^t R_{i,i}^L(\tau) d\tau \quad \alpha = x, y, z. \quad (4.25)$$

Considerando  $t \rightarrow \infty$ , e ainda multiplicando e dividindo a equação (4.25) pela variância unidimensional da velocidade ( $\sigma_i^2$ ), obtém-se

$$K_\alpha = \sigma_i^2 T_L, \quad (4.26)$$

sendo  $T_L$  a escala de tempo *Lagrangeana*.

Os dados experimentais são obtidos a partir de um ponto fixo (referencial *Euleriano*), entretanto a equação (4.26) está expressa em um referencial *Lagrangeano*. A relação entre as escalas de tempo *Lagrangeana*,  $T_L$ , e *Euleriana*,  $T_E$  é dada por (*Hanna*, 1981)

$$T_L = \beta T_E, \quad (4.27)$$

com  $\beta$  dado por (*Hanna*, 1981; *Degrazia e Anfossi*, 1998)

$$\beta = \frac{0,55U}{\sigma_i} \quad (4.28)$$

e

$$T_E = \frac{1}{6} \frac{\lambda_{max}}{U}, \quad (4.29)$$

na qual  $\lambda_{max}$  é o comprimento de onda no qual a energia é máxima.

Relacionando comprimento de onda ( $\lambda$ ) com número de onda ( $k$ ), tem-se

$$\frac{k_{max}}{2\pi} = \frac{1}{\lambda_{max}}. \quad (4.30)$$

Substituindo as equações (4.27), (4.28), (4.29) e (4.30) em (4.26), obtém-se o coeficiente de difusão unidimensional

$$K_{\alpha} = \frac{0,55\pi}{3} \frac{\sigma_i}{k_{max}}, \quad (4.31)$$

com  $\sigma_i$  dado por

$$\sigma_i^2 = \int_0^{\infty} E_i(k, t) dk \quad (4.32)$$

e  $E_i(k, t)$  é o espectro unidimensional dado pela equação (4.24).

Este coeficiente de difusão unidimensional pode ser utilizado em modelos de dispersão para determinar o campo de concentração de contaminantes durante o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva.



## Capítulo 5

# Energia Cinética Turbulenta, Variância Unidimensional e Coeficiente de Difusão Vertical

Neste capítulo será calculada a energia cinética durante o decaimento de um fluxo turbulento na CLC e o resultado será comparado com os dados de simulação numérica obtidos por Les (*Nieuwstadt e Brost, 1986*). Em seguida, serão obtidas as variâncias unidimensionais e o coeficiente de difusão vertical. Estes resultados serão comparados com dados de simulação numérica obtidos por Les (*Nieuwstadt e Brost, 1986*).

## 5.1 Cálculo da Energia Cinética durante o decaimento da turbulência na CLC

A energia cinética em um fluxo turbulento pode ser calculada a partir da função espectro de energia por

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \int_0^{\infty} E(k, t)dk \quad (5.1)$$

na qual  $E(k, t)$  é dado pela equação (4.12).

Para um fluxo turbulento isotrópico, a partir de simulação numérica dos grandes turbilhões (LES), *Charlot e Lesieur* obtiveram que o decaimento da energia cinética é proporcional a  $t^{-1,2}$ .

A Figura 5.1 mostra o decaimento da energia cinética em um fluxo turbulento na CLC determinado a partir da equação (5.1), considerando o espectro de energia dado pela equação (4.12) com as componentes unidimensionais dadas pela equação (3.65)(linha contínua) e o decaimento da energia cinética obtido por *Nieuwstadt e Brost* (1986), considerando o modelo numérico de LES para um fluxo turbulento na CLC (cruzes).

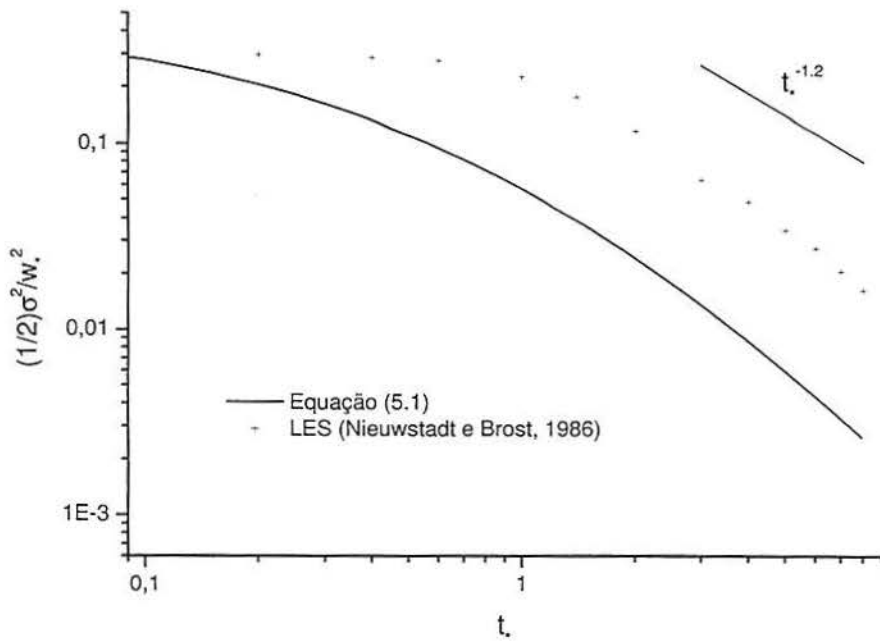


Figura 5.1: Decaimento da energia cinética na CLC, determinado a partir da equação (5.1) com o espectro dado por (4.12) e as componentes unidimensionais pela equação (3.65)(linha contínua). A linha em cruzes representa os dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*)

Pela Figura 5.1 observa-se que existe uma discrepância no cálculo da energia cinética turbulenta entre o modelo e os dados de LES para  $t_* < 1$ . Esta diferença ocorre devido ao modelo (Eq. 4.12) não considerar a variação de fluxo de calor na superfície durante o decaimento da energia cinética turbulenta. Isto é, supõe-se que o fluxo de calor foi interrompido instantaneamente. Para  $t_* > 1$  o modelo proposto está de acordo com os dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*).

O decaimento proporcional a  $t_*^{-1,2}$  obtido pelo modelo e por LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*) é característico de um fluxo turbulento isotrópico (*Charllot e Lesieur*). Este resultado justifica terem sido desprezados os termos que representam os efeitos mecânico e de empuxo na equação (3.21).

## 5.2 Variância Unidimensional em um Fluxo Turbulento não Isotrópico

A variância unidimensional em um fluxo turbulento é dada pela equação (4.32), sendo  $E_u(k, t)$  e  $E_v(k, t)$  dados pelo espectro 3-D (equação (4.12)), considerando o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.65), já que a não isotropia no presente trabalho é vertical devido ao empuxo.  $E_w(k, t)$  é dado pela equação (4.24).

As Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 mostram que as variâncias unidimensionais calculadas no presente trabalho estão de acordo com os dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*). O que confirma a validade deste modelo para o cálculo do coeficiente de difusão unidimensional durante o decaimento da turbulência convectiva, pois estes coeficientes são dados pela equação (4.31), que difere da variância apenas por uma constante. Assim, a partir da Figura 5.5 vemos, por exemplo, que o coeficiente de difusão vertical calculado pelo modelo proposto descreve adequadamente os dados de LES.

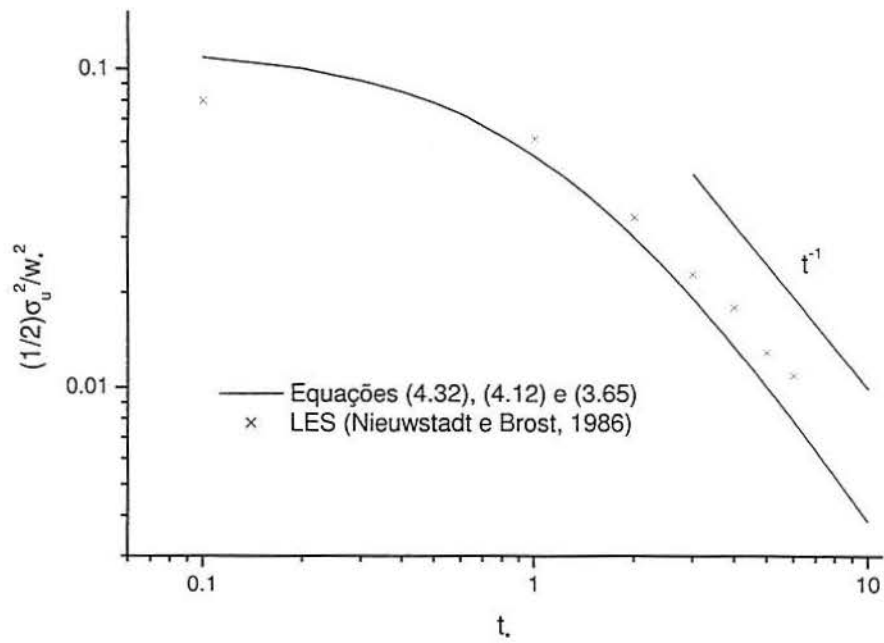


Figura 5.2: Evolução no tempo da componente longitudinal da variância da velocidade obtida a partir da equação (4.32), considerando o espectro 3-D dado pela equação (4.12) com o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.65) (linha contínua) e a partir de dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*) (cruzes).

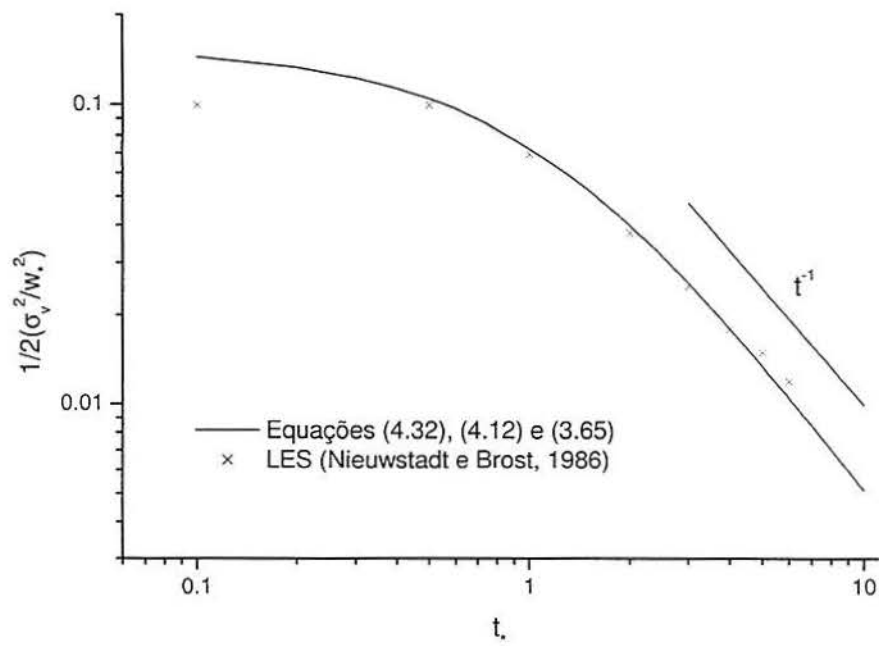


Figura 5.3: Evolução no tempo da componente transversal da variância da velocidade obtida a partir da equação (4.32), considerando o espectro 3-D dado pela equação (4.12) com o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.65) (linha contínua) e a partir de dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*) (cruzes).

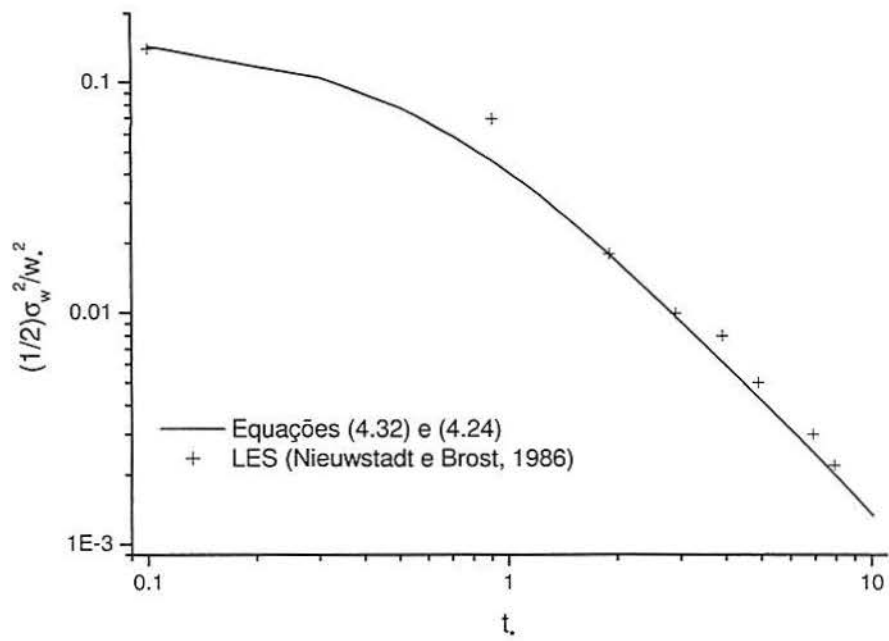


Figura 5.4: Evolução no tempo da componente vertical da variância da velocidade obtida a partir da equação (4.32), considerando o espectro vertical dado pela equação (4.24) com o espectro inicial unidimensional dado pela equação (3.65) (linha contínua) e a partir de dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*) (cruzes).

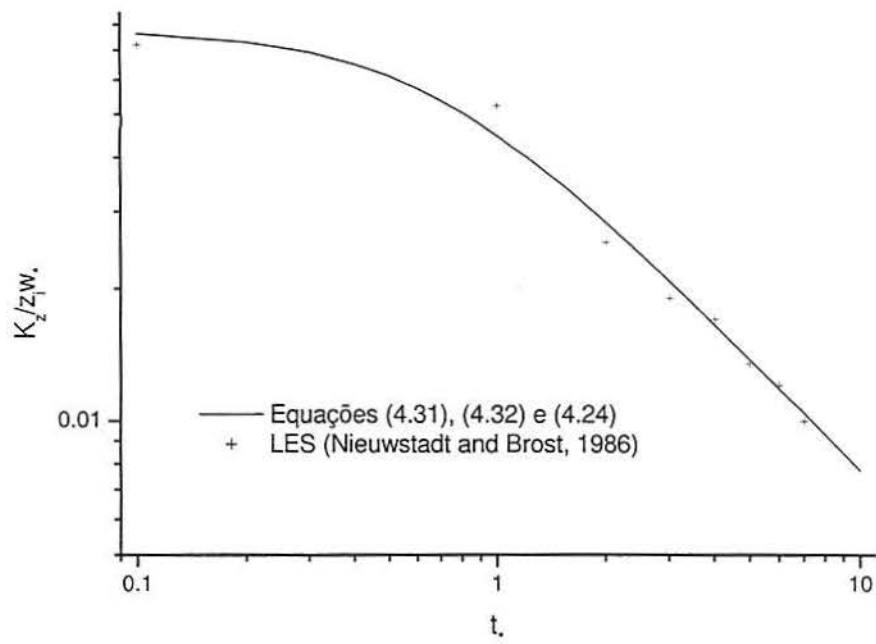


Figura 5.5: Componente vertical do coeficiente de difusão durante o decaimento da turbulência convectiva calculado a partir da equação (4.31) considerando a variância vertical dada pela equação (4.32) com o espectro unidimensional dado pela equação (4.24) (linha contínua) e a partir de dados de LES (*Nieuwstadt e Brost, 1986*) (cruzes).



# Capítulo 6

## Conclusão

No presente trabalho foi apresentado um modelo para a descrição do decaimento da energia cinética turbulenta em uma camada limite convectiva, a partir de um modelo de fechamento de dois pontos ou modelo espectral. A hipótese de que o fluxo de calor na superfície é interrompido instantaneamente possibilitou desconsiderar o termo de produção ou perda de energia por efeito térmico, e ainda, considerar o termo de transferência inercial de energia parametrizado por *Pao* (1965) para um fluxo turbulento isotrópico. O máximo do módulo da função  $W(k',0)$  localiza-se em números de onda pequenos, representando uma perda de energia nessa região.

Usou-se o modelo de *Kristensen et al.* (1989), que permite obter o espectro tridimensional de um fluxo turbulento não isotrópico estacionário a partir de suas componentes unidimensionais. Neste trabalho foram consideradas as com-

ponentes unidimensionais de *Degrazia et al.* (2000), obtendo assim o espectro tridimensional inicial que foi usado para calcular o espectro 3-D para um fluxo turbulento convectivo.

A partir desse espectro foi determinada uma expressão para a energia cinética durante o decaimento da turbulência na CLC. Pela Figura 5.1 observa-se que existe uma discrepância no cálculo da energia cinética turbulenta entre o modelo e os dados de LES para  $t_* < 1$ . Esta diferença ocorre devido ao modelo (Eq. 4.12) não considerar a variação de fluxo de calor na superfície durante o decaimento da energia cinética turbulenta. Para  $t_* > 1$  o modelo proposto está de acordo com os dados de LES (*Nieuwstadt e Brost*, 1986).

O decaimento proporcional a  $t^{-1,2}$  obtido pelo modelo e por LES (*Nieuwstadt e Brost*, 1986) é característico de um fluxo turbulento isotrópico (*Charllot e Lesieur*). Este resultado justifica terem sido desprezados os termos que representam os efeitos mecânico e de empuxo na equação (3.21).

A partir do espectro 3-D dado pela equação (4.12) foi calculado o espectro de energia unidimensional (*Goulart et al.*, 2003), para então obter as variâncias e os coeficientes de difusão unidimensionais. As Figuras 5.2, 5.3 e 5.4 mostram que as variâncias unidimensionais calculadas no presente trabalho estão de acordo com os dados de LES (*Nieuwstadt e Brost*, 1986), o que confirma a validade

deste modelo para o cálculo do coeficiente de difusão unidimensional durante o decaimento da turbulência convectiva, pois estes coeficientes são dados pela equação (4.31), que difere da variância apenas por uma constante. Concluímos portanto, que o modelo proposto neste trabalho pode ser utilizado para calcular a energia cinética turbulenta, a variância das componentes unidimensionais da velocidade e as componentes unidimensionais do coeficiente de difusão durante o período de transição dia-noite. Os coeficientes de difusão calculados neste trabalho podem ser utilizados em modelos de dispersão para determinar o campo de concentração de contaminantes durante o decaimento da turbulência na Camada Limite Convectiva.

# Referências Bibliográficas

- [1] Batchelor, G.K., 1949, 'Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence', *Cambridge University Press*, 437–450
- [2] Champagne, F.H., Friehe, C.A., La Rue, J.C. and Wyngaard, J.C., 1977, 'Flux measurements, flux estimation techniques, and fine-scale turbulence measurements in the unstable surface layer over land', *J. Atmos. Sci.*, **34**, 515–530.
- [3] Deardorff, J.W., 1972, 'Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers', *J. Atmos. Sci.*, **29**, 91–115.
- [4] Debnath, L., 1997, *Non Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston, 790 pp.
- [5] Degrazia, G., e Anfossi, D., 1998, 'Estimation of the Kolmogorov constant  $C_0$  from classical statistical diffusion theory. *Atmos. Env.*, **32**(20), 3611–3614.

- [6] Degrazia, G., Anfossi, D., Carvalho, J., Mangia, C., Tirabassi, T., Campos Velho, H., 2000, Turbulence parameterisation for PBL dispersion models in all stability conditions. *Atmos. Environment*, **34**, 3575-3583.
- [7] Degrazia, G., Goulart, A., Anfossi, D., Campos Velho, H., Lukaszcyk, P., Palandi, J., 2003, A model based on Heisenberg's theory for the eddy diffusivity in decaying turbulence applied to the residual layer. *Atmos. Environment*, **26(1)**, 39-51.
- [8] Goulart, A., Degrazia, G., Rizza, U., Anfossi, D., 2003, 'A theoretical model for the study of the convective turbulence decay and comparison with LES data', *Boundary-Layer Meteor.*, **107(1)**, 143-155.
- [9] Goulart, A., Degrazia, G., Vilhena, M., Flores, D., 2004, 'Vertical, Lateral and Longitudinal Eddy Diffusivities for a Convective Decaying Turbulence in the Residual Layer ', *Environmental Modelling and Software* . Enviado p/ publicação.
- [10] Hanna, S.R., 1981, 'Lagrangian and Eulerian time-scale in the daytime boundary layer', *J. Appl. Meteor.*, **20**, 242-249.
- [11] Hinze, J.O., 1975, *Turbulence*, Mc Graw Hill, 790 pp.

- [12] Kristensen, L., Lenschow, D., Kirkegaard, P. and Courtney, M.: 1989, 'The Spectral Velocity Tensor For Homogeneous Boundary-Layer Turbulence', *Boundary-Layer Meteor.* **47**, 149–193.
- [13] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1989, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 539 pp.
- [14] Lumley, J.L., and Panofsky, H.A., 1964, *The Structure of Atmospheric Turbulence*, Interscience, New York, 239 pp.
- [15] Nieuwstadt, F.T.M. and Brost, R.A., 1986, 'The decay of convective turbulence', *J. Atmos. Sci.*, **43**, 532–546.
- [16] Panofsky, H.A., e Dutton, J.A., 1984, *Atmospheric Turbulence*, Wiley, New York, 395 pp.
- [17] Pao, Y.H., 1965, 'Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers', *The Physics of Fluids*, **8**, 1063–1075.
- [18] Sokolnikosf, I.S., 1964, *Tensor Analisis Teory Aplications to Geometry and Mechanics of Continua*, Jonh Wiley & Sons.
- [19] Sorbjan, Z., 1989, *Structure of The Atmospheric Boundary Layer*. Prentice-Hall, Inc. 317 pp.

- [20] Stull, R.B., 1988, *An introduction to Boundary Layer Meteorology*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 666 pp.
- [21] Tennekes, H., Lumley, J.L., 1994, *A first Course in Turbulence*, Mit Press, Cambridge, 300 pp.

# Apêndice A

## Médias

### A.1 Média no tempo

A média no tempo aplica-se a um específico ponto no espaço, e consiste da soma ou integral sobre o tempo num período  $P$ . Para qualquer variável,  $A(t, s)$ , que é uma função do tempo,  $t$ , e espaço,  $s$ :

$$A(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} A(i, s), \quad A(s) = \frac{1}{P} \int_{t=0}^P A(t, s) dt,$$

sendo  $t = i\Delta t$  para o caso discreto.

### A.2 Média no espaço

A média no espaço, a qual aplica-se sobre algum instante de tempo, é descrita pela soma ou integral sobre o espaço num domínio  $S$ :

$$A(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} A(t, j), \quad A(t) = \frac{1}{S} \int_{s=0}^S A(t, s) ds,$$

sendo  $s = j\Delta s$  para o caso discreto.



### A.3 Média de ensemble

A média de ensemble consiste da soma sobre  $N$  experimentos idênticos:

$$A(t, s) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} A_i(t, s),$$

na qual  $\Delta t = \frac{P}{N}$  e  $\Delta s = \frac{S}{N}$ , sendo  $N$  o número de pontos dados.

### A.4 Regras das médias

$$\bar{c} = c$$

$$\overline{cA} = c\bar{A}$$

$$\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$$

$$\overline{(\bar{A} \cdot \bar{B})} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$\overline{\left(\frac{dA}{dt}\right)} = \frac{d\bar{A}}{dt}$$

### A.5 Média de Reynolds

As regras das médias descritas anteriormente são agora aplicadas para variáveis que são explícitas em uma parte média e outra turbulenta. Seja

$A = \overline{A} + a'$  e  $B = \overline{B} + b'$ , temos

$$\overline{a'} = 0$$

$$\overline{(\overline{B}a')} = 0$$

$$\overline{(A.B)} = \overline{A.B} + \overline{a'b'}$$