

Rolamento de Carretéis Sobre um Plano Inclinado

(Spools rolling down hill)

Maria Teresinha X. Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Instituto de Física

Caixa Postal 15051, 91501-970, Porto Alegre, RS - Brasil e-mail: teca@if.ufrgs.br

Rolando Axt

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, UNIJUI

Departamento de Física, Estatística e Matemática

Caixa Postal 560, 98700-000, Ijuí, RS - Brasil

Recebido em 20 de outubro, 1998

No presente trabalho explora-se a construção de carretéis de pequeno fator geométrico que rolem com grande aceleração sobre um plano inclinado.

In this paper it is explored the design of low geometrical factor spools rolling down hill with great acceleration.

I Introdução

É bem conhecida a demonstração [1,2] de se deixar rolar sem deslizar, sobre um plano inclinado, uma esfera sólida, um cilindro maciço e um anel. Essa corrida é ganha pela esfera, mas um carretel poderia se transladar com aceleração ainda maior. Essa possibilidade é discutida no presente trabalho.

II Prolegômenos

Quando um corpo desliza sobre uma rampa uniforme, a aceleração do seu centro de massa, na ausência de atrito, é dada por

$$a = g \sin \theta,$$

onde g é a aceleração local da gravidade e θ é o ângulo de inclinação da rampa relativamente à horizontal. Quando um corpo com simetria axial rola sobre uma superfície inclinada, a aceleração do seu centro de massa será menor do que $g \sin \theta$. Não havendo deslizamento, a aceleração é dada por [3,4]

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_{CM}}{M_T R^2}}, \quad (1)$$

onde I_{CM} é o momento de inércia do corpo (calculado em relação ao eixo central que, passando pelo centro de massa CM , é perpendicular à direção de movimento),

M_T é a sua massa total e R é o raio de rolamento (distância entre a superfície e o eixo central). Sendo essas grandezas positivas, o denominador da equação 1 será sempre maior do que a unidade. Relativamente a um eixo de rotação que passa pelo centro de massa, o momento de inércia de corpos de geometria simples costuma ser representado por

$$I_{CM} = \beta M r^2,$$

onde M é a massa, r é o raio, e β é um fator geométrico que reflete, essencialmente, a forma de distribuição da massa do corpo em torno de seu eixo de rotação [4]. A tabela 1 apresenta os fatores geométricos para alguns corpos homogêneos.

Tabela 1: Fatores geométricos (β) e fatores de aceleração (f) para alguns corpos homogêneos.

Corpo	β	f
Aro	1	$1/2 = 0,50$
Casca esférica	$2/3 = 0,67$	$3/5 = 0,60$
Cilindro	$1/2 = 0,50$	$2/3 = 0,67$
Esfera sólida	$2/5 = 0,40$	$5/7 = 0,71$

Para corpos rolantes em geral, o fator geométrico pode ser expresso através da razão [4]

$$B = \frac{I_{CM}}{M_T R^2}, \quad (2)$$

onde M_T é a massa total do corpo e R é o seu raio de rolamento. Observe-se que, para corpos de geometria simples ($R = r$ e $M_T = M$), o fator geométrico generalizado B reduz-se ao fator geométrico ordinário β .

A Eq. (1) pode ser reescrita como

$$a = fg \text{sen} \theta,$$

onde f é uma constante, aqui definida como *fator de aceleração*, igual à unidade para um corpo que desliza sem atrito sobre o plano inclinado e que, para um corpo que rola sobre o plano, depende exclusivamente da forma de distribuição da massa do corpo, ou seja, do seu fator geométrico B :

$$f = \frac{1}{1+B}. \quad (3)$$

Como o fator geométrico B é, por definição (Eq. (2)), positivo e adimensional, a definição (3) assegura que o fator de aceleração f seja também uma constante adimensional positiva e menor do que a unidade. Portanto, a aceleração do centro de massa de qualquer corpo que role sobre um plano inclinado ($f < 1$) será sempre menor do que a aceleração de um corpo que só deslize, sem atrito, sobre o mesmo plano ($f \equiv 1$) [3]. A tabela 1 apresenta os fatores de aceleração para os corpos homogêneos mais comuns [4].

Nosso objetivo é desenhar corpos rolantes que permitam maximizar a aceleração de seus centros de massa, ou seja, discutir a possibilidade de construir objetos rolantes com fatores de aceleração quaisquer, de $f = 0,50$ (aro) até um valor de f próximo à unidade (característico de um corpo que somente desliza, sem atrito). Do ponto de vista teórico, isto equivale a pesquisar objetos com fatores geométricos variando de 1 (aro) até o menor valor operacionalmente possível, o que é feito na discussão que segue.

Fatores geométricos entre $B = \beta = 1$ (aro) e $B = \beta = 0,50$ (cilindro) podem ser obtidos facilmente utilizando-se, por exemplo, cilindros ôcos. O fator geométrico generalizado (expressão 2) de um cilindro ôco vale

$$B = \frac{\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)}{MR_2^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 + 1 \right],$$

onde M é a massa do cilindro ôco, e R_1 e R_2 são seus raios interno e externo, respectivamente. Como o fator geométrico do cilindro ôco depende apenas da razão R_1/R_2 de seus raios interno e externo, pode-se obter qualquer valor entre $B = 1$ ($R_1 = R_2$) e $B = 0,50$ ($R_1 = 0$). Por exemplo, para $B = 0,75$, a relação entre os raios deverá ser $R_1 = R_2/\sqrt{2}$.

Corpos rolantes que tenham fatores geométricos menores do que o de um cilindro ($B = \beta = 0,50$) são, por exemplo, carretéis. Como veremos logo a seguir,

é possível projetar e relativamente fácil construir carretéis com fatores geométricos tão pequenos quanto $B \simeq 0,1$, ou seja, que rolem sobre um plano inclinado com um fator de aceleração $f \simeq 0,9$.

A seção III é dedicada à obtenção de uma expressão que relacione o fator geométrico de um carretel com os parâmetros que o definem. A minimização desta expressão é discutida na seção IV. Na seção V são analisados alguns casos particulares.

III Obtenção do fator geométrico de um carretel

Na Fig. 1 estão identificados os parâmetros que, neste trabalho, foram adotados para um carretel de discos laterais idênticos.

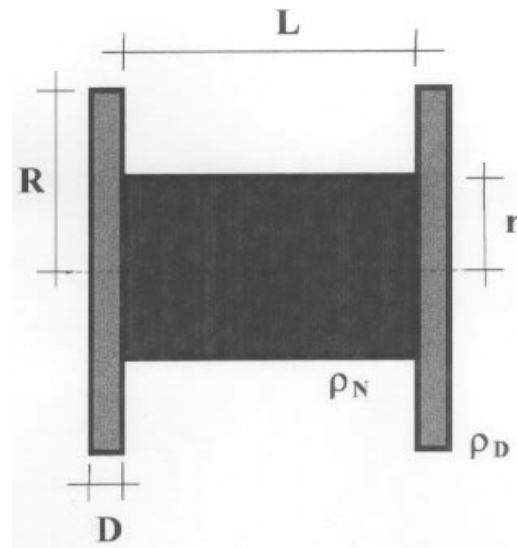


Figura 1. Parâmetros de um carretel.

Teoricamente, o problema a ser resolvido consiste em minimizar o fator geométrico do carretel em função das massas específicas e das dimensões do núcleo cilíndrico e dos discos laterais. Assim sendo, definem-se duas variáveis adimensionais convenientes:

$$X = \frac{r^2}{R^2}, \quad (4)$$

$$K = \frac{\rho_N L}{\rho_D 2D}, \quad (5)$$

onde X representa a razão entre os quadrados dos raios do núcleo cilíndrico (r) e dos discos laterais (R), e K depende das massas específicas do núcleo cilíndrico (ρ_N) e dos discos (ρ_D), bem como do comprimento do cilindro (L) e da espessura dos discos (D). Observe-se que, para um carretel feito de um único material ($\rho_N = \rho_D$), K é simplesmente a razão entre o comprimento L e o dobro da espessura D .

A Fig. 2 ilustra configurações de núcleos e discos laterais para diferentes valores de X .

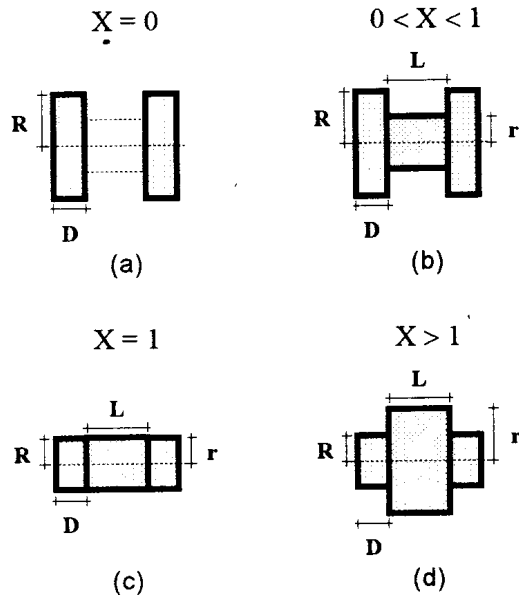


Figura 2. Visualização dos limites (discutidos no texto) da variável $X = \frac{r^2}{R^2}$.

A condição $X = 0$ (Fig. 2a) requer a inexistência do núcleo cilíndrico ($r = 0$); neste caso o corpo rolante seria um cilindro de raio R e comprimento $2D$, com fator geométrico igual a 0,50. Na Fig. 2b tem-se o carretel típico. Em 2c recai-se novamente no caso de um cilindro (não homogêneo e de comprimento $L + 2D$). Quando $X > 1$ (Fig. 2d) surge uma situação indesejada: o núcleo prevalece em tamanho sobre os discos laterais e isto causa elevação do fator geométrico. Assim sendo, as análises que seguem estão restritas ao intervalo

$$0 < X < 1,$$

ou seja,

$$0 < r < R$$

dentro do qual se tem um carretel típico (Fig. 2b).

O momento de inércia de um carretel formado por um núcleo cilíndrico e por dois discos laterais, em relação a um eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa, é dado por

$$I_{CM} = I_N + 2I_D = \beta_N M_N R_N^2 + 2\beta_D M_D R_D^2,$$

lembrando que os índices N e D referem-se ao núcleo cilíndrico e aos discos laterais, respectivamente. Como $\beta_N = \beta_D = 1/2$, o fator geométrico generalizado (relação 2) do carretel será

$$B = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{M_N}{2M_D} \frac{r^2}{R^2} + 1 \right)}{\left(\frac{M_N}{2M_D} + 1 \right)},$$

onde os raios do núcleo cilíndrico e dos discos laterais foram redefinidos como $R_N = r$ e $R_D = R$.

Usando o conceito de massa específica e as variáveis definidas pelas Eqs. (4) e (5), demonstra-se que $M_N/2M_D = KX$ e o fator geométrico generalizado do carretel resulta ser

$$B = \frac{KX^2 + 1}{2(KX + 1)}. \quad (6)$$

A Fig. 3a mostra a representação gráfica tridimensional desta expressão, sendo utilizada a variável r/R ao invés de X (Eq. (4)) para uma melhor visualização da superfície sobre a qual cada ponto especifica uma possibilidade de construção de um carretel. Nessa figura, de acordo com a discussão feita acima, as variáveis estão delimitadas pelos intervalos

$$0 < r/R < 1, 0$$

$$K > 0$$

$$B < 0,50$$

tendo em vista que, para um carretel, r/R (ou \sqrt{X}) deve ser maior do que zero e menor do que a unidade (relação 4 e Fig. 2b), e K é positivo por definição (relação 5). (O caso $B \leq 0,5$ já foi analisado anteriormente, para cilindros ócos.)

A Fig. 3b é uma representação bidimensional da Fig. 3a. Nessa figura são mostrados cortes da Fig. 3a para vários valores de K , isto é, gráficos relacionando o fator geométrico B com r/R para diferentes valores fixos de K , nos quais se observa que, quanto menor for o fator geométrico B desejado para um dado carretel, maior deverá ser o valor de K .

Um valor alto para K (Eq. (5)) pode ser obtido (a) escolhendo-se, para o núcleo cilíndrico, um material cuja massa específica seja grande em relação à dos discos laterais e/ou (b) maximizando-se a razão entre o comprimento do núcleo e a espessura dos discos. Entretanto, razões operacionais de construção do carretel, tais como o valor mínimo desejado para B , a disponibilidade de materiais ou até mesmo de um cilindro ou discos convenientes, podem levar à necessidade de pré-fixação de um ou dois dos parâmetros (B , X e K) que o definem.

Se for feita a pré-fixação de apenas uma das variáveis, ou seja, se na Fig. 3b for selecionada uma linha horizontal (tomando B fixo), uma linha vertical (tomando r/R fixo) ou uma das curvas (tomando K fixo), infinitas possibilidades de combinação das outras duas variáveis conduzem a infinitas soluções equivalentes para o problema.

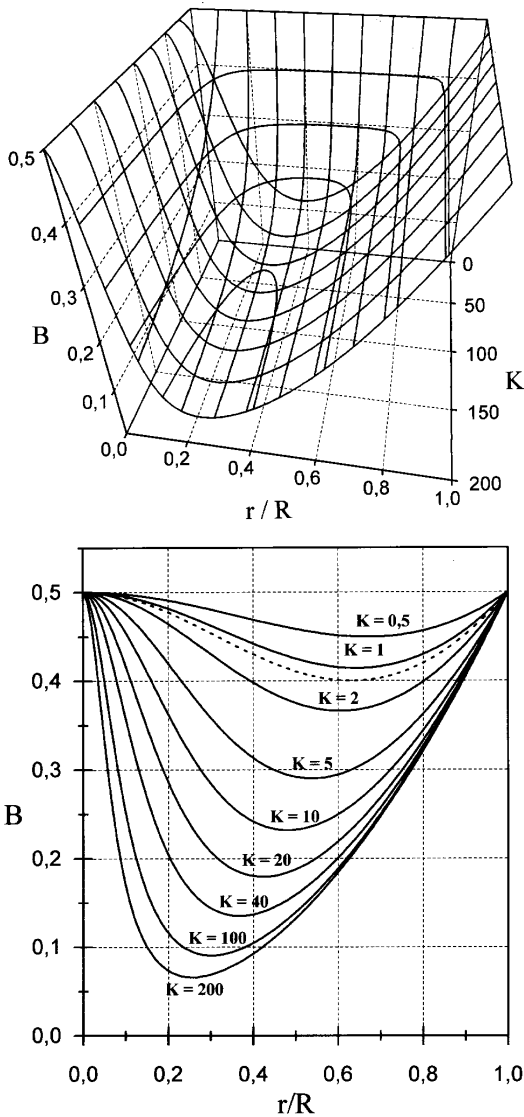


Figura 3. (a) Representação gráfica da expressão 6. (b) Fator geométrico B de um carretel em função da razão entre os raios do núcleo cilíndrico e dos discos laterais, para vários valores de K . (A linha pontilhada representa a curva para $K = 1,25$.)

Se duas variáveis forem arbitradas, o problema poderá ter solução ou não. Por exemplo, tomando-se a curva $K = 10$ da Fig. 3b, não é possível construir um carretel caracterizado simultaneamente por $K = 10$ e, por exemplo, $B = 0,20$, já que a linha horizontal correspondente a $B = 0,20$ não corta a curva $K = 10$. Por outro lado, quando a intersecção ocorre, o problema tem duas soluções (por exemplo, $K = 10$ e $B = 0,30$) mas, se uma linha horizontal B tangenciar o mínimo da curva K escolhida, como no caso da curva pontilhada mostrada na Fig. 3b ($K = 1,25$ e $B = 0,40$), a solução é apenas uma.

Sendo o objetivo deste trabalho projetar carretéis com fatores geométricos mínimos possíveis, o caso de interesse é aquele em que a linha horizontal B tangencia a curva K , definindo uma única solução para o problema, de onde se obtém o valor de r/R tal que

o fator geométrico B seja mínimo (para o valor de K pré-fixado). Se um carretel de fator geométrico menor do que o de uma esfera sólida ($B = \beta = 0,40$) é desejado, o valor de K deverá ser maior do que 1,25 já que, como mostra a linha pontilhada na Fig. 3b, a curva correspondente a $K = 1,25$ é tangenciada em seu mínimo ($r/R = 0,63$) pela linha horizontal $B = 0,40$.

Dois aspectos ainda devem ser salientados com relação às curvas mostradas na Fig. 3b. Em primeiro lugar observe-se que, como esperado, todas elas fornecem $B = 1/2$ nos limites correspondentes a objetos de forma cilíndrica ($r = 0$ ou $r = R$, isto é, $X = 0$ ou $X = 1$ nas Figs. 2a ou 2c). Além disso, se $r/R > 1$ ($X > 1$ na Fig. 2d), o fator geométrico do carretel será maior do que o de um cilindro ($B = \beta = 1/2$), como já foi comentado na análise da Fig. 2d.

IV Minimização do fator geométrico de um carretel

Da discussão precedente conclui-se que minimizar o fator geométrico B em função de seus parâmetros X e K é equivalente a pesquisar as condições em que a solução do problema é única, isto é, a especificar os vínculos necessários entre B e K para se ter um valor único de $\sqrt{X} = r/R$ (pontos de mínimo das curvas mostradas na Fig. 3b).

Rearranjando-se os termos da Eq. (6), obtém-se a equação

$$KX^2 - (2KB)X - (2B - 1) = 0,$$

da qual resulta

$$X = B \pm \sqrt{B^2 - \left(\frac{1 - 2B}{K}\right)}. \tag{7}$$

Assim, a solução do problema será única ($X = B$) se o radicando da Eq. (7) for nulo. Portanto, o fator geométrico B de um carretel será mínimo se

$$X = B \tag{8}$$

e se

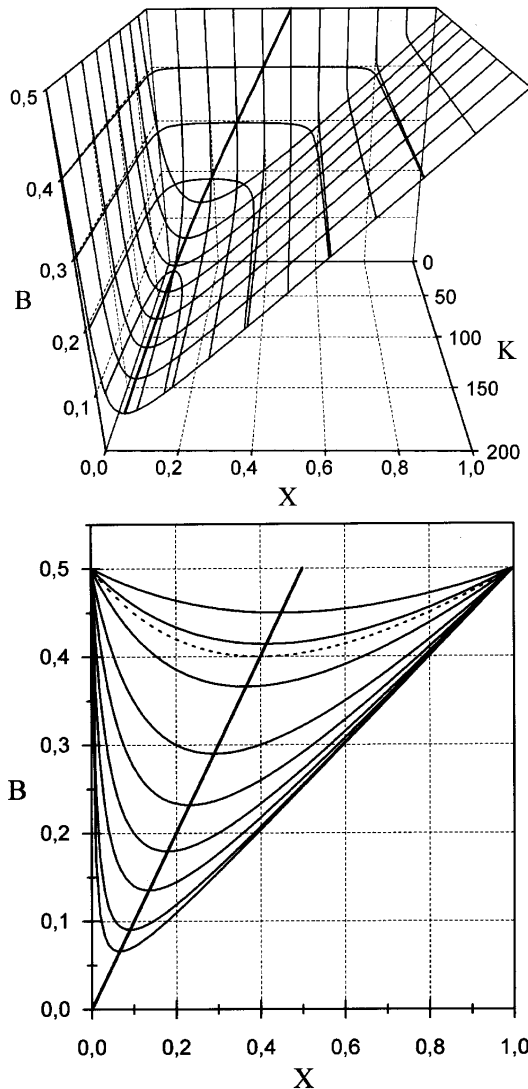
$$K = \frac{1 - 2B}{B^2}. \tag{9}$$

Observe-se que a condição (8) estabelece, em última análise, a relação de raios do núcleo cilíndrico e dos discos laterais do carretel para um dado valor mínimo de B (ver a definição 4).

Se o valor de K for maior do que o mínimo estabelecido pela condição (9), isto é, se o radicando da expressão (7) for diferente de zero, existirão duas possibilidades de solução e, conseqüentemente, sempre dois carretéis de mesmo fator geométrico B que, possuindo o mesmo K , diferem em seus valores de X (expressão (7)). Por outro lado, se o valor de K for menor do

que o especificado pela condição 9, o problema não terá solução (X não será real), ou seja, o carretel inexistente.

As Figs. 4a e 4b ilustram a condição 8 e são análogas às Figs. 3a e 3b, respectivamente. Nelas utilizou-se a variável X ao invés de r/R e acrescentou-se a representação do corte feito pelo plano $X = B$ (condição (8)) na superfície $B(X, K)$.



Figuras 4 (a) e 4 (b): Representação do plano $B = X$.

Por último, tendo em vista que a solução do problema é única quando as condições (8) e (9) estão satisfeitas, constrói-se um gráfico (Fig. 5) da linha dos mínimos de B utilizando a variável X (ou B) como eixo horizontal (condição (8)) e representando, no eixo vertical, os valores de K tais que B seja mínimo (condição (9)). Este gráfico nada mais é do que o gráfico da condição (9) (eixo vertical) versus a condição 8 (eixo horizontal) e a sua utilização como regra prática simplifica enormemente o problema da construção de carretéis com B mínimo pois fornece, aproximadamente, por leitura direta, os valores de X (definição (4)) e de K (definição (5)) tais que B seja mínimo.

Note-se que, na linha de mínimos, K cresce rapidamente quando X tende a zero e que, sendo todas as variáveis positivas por definição, a função $K(X)$ só existe no intervalo $0 < X \leq 0,5$ (condição (9)).

Uma solução mais elegante para o problema consiste em determinar a condição de mínimo da função $B(X, K)$ dada pela Eq. (6). Se

$$\frac{\partial B}{\partial X} = 0, \text{ então } KX^2 + 2X - 1 = 0,$$

ou

$$K = \frac{1 - 2X}{X^2}. \quad (10)$$

Substituindo-se este valor de K na relação 6, obtém-se:

$$B = X. \quad (11)$$

Observe-se que as condições (10) e (11) são idênticas às condições (8) e (9) obtidas anteriormente. A utilização direta da Fig. 5 permite determinar as dimensões aproximadas de um carretel com um dado fator geométrico. Para se obter as dimensões exatas desse carretel é sugerido o seguinte procedimento: Primeira etapa: Escolher o valor do fator geométrico B desejado para o carretel.

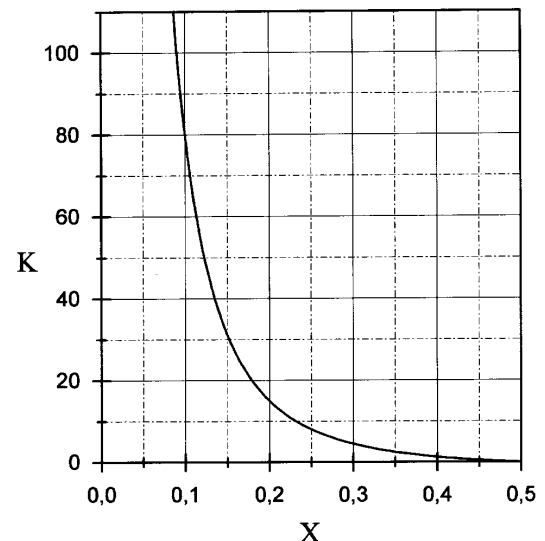


Figura 5. Linha dos mínimos (ver texto).

Segunda etapa: Determinar a razão de raios para este caso utilizando a condição (8) e a definição (4)

$$\frac{r}{R} = \sqrt{X} = \sqrt{B}.$$

Terceira etapa: Usar a condição (9) para calcular o menor valor de K para este fator geométrico.

Quarta etapa: Obter a razão entre o comprimento L do núcleo e a espessura D dos discos (para os materiais utilizados).

Finalmente, é interessante notar que a relação entre os raios do núcleo cilíndrico e dos discos independe dos

tipos de material utilizados (ρ_N e ρ_D). Tanto a razão de raios quanto o comprimento do núcleo e a espessura dos discos (para os materiais utilizados) só dependem do valor escolhido para B mínimo (ver as condições (8) e (9) e as definições (4) e (5).

V Considerações finais

As definições (4) e (5) dão extrema liberdade quanto à escolha das dimensões e dos materiais de um carretel que apresente um dado fator geométrico. A rigor, infinitos carretéis podem ser projetados em cada caso. Na prática, contudo, ou já existem ou se estabelecem arbitrariamente restrições que ajudam a convergir para uma determinada solução. Isto, de uma ou outra forma, transparece nos exemplos que seguem, nos quais definimos, a priori, as dimensões dos discos laterais ($D = 0,5$ cm e $R = 1,5$ cm) e o material desses discos (“nylon-technil”: $\rho_D = 1,15$ g/cm³).

Exemplo 1

Deseja-se construir um carretel cujo fator geométrico seja igual ao de uma esfera sólida. Então, o fator geométrico é $B = 0,40$ (primeira etapa). A linha pontilhada na Fig. 3b mostra que existe um mínimo para a curva B versus r/R que tangencia a linha horizontal $B = 0,40$. Neste caso, a expressão (8) fornece $X = B = 0,40$, ou seja, $r/R = \sqrt{X} = 0,63$ (segunda etapa). Sendo $R = 1,5$ cm, resulta $r = 0,95$ cm para o núcleo. É conveniente calcular o valor de K antes de escolher o material do núcleo: $K = 1,25$ (condição (9), terceira etapa). Como este valor é pequeno, opta-se por um núcleo também de “nylon-technil” ($\rho_N = \rho_D$). Por último, usando a definição (5) (quarta etapa), obtém-se $L = 1,25$ cm. Sobre um plano inclinado, um carretel como este (Fig. 6a) rola com aceleração igual à de uma esfera sólida.

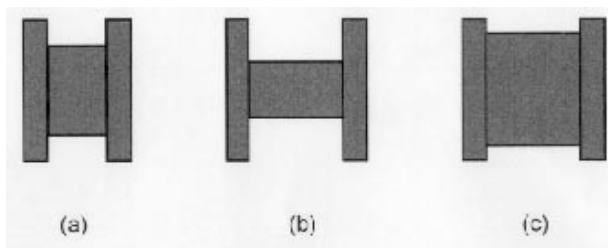


Figura 6. Aparência de carretéis de fator geométrico $B = 0,40$ (a) na condição de fator geométrico mínimo e (b e c) fora da condição de mínimo.

Exemplo 2

Uma segunda possibilidade é a construção de dois carretéis diferentes mas de mesmo fator geométrico. O valor de K (expressão (5)) deve ser maior do que aquele especificado pela condição (9), de forma que o problema tenha duas soluções. Tome-se, por exemplo, K igual a 2 (ao invés de 1,25) ainda para um fator geométrico igual ao de uma esfera sólida ($B = 0,40$). Para um núcleo de material igual ao dos discos resulta, da definição 5, $L = 2,0$ cm (para ambos carretéis). Resta determinar os raios dos núcleos. A relação (7) fornece as seguintes soluções: $X_- = 0,155$ e $X_+ = 0,645$, correspondendo a $(r/R)_- = 0,39$ e $(r/R)_+ = 0,80$ (definição (4)). Daí resultam $r_- = 0,59$ cm e $r_+ = 1,20$ cm. Estes dois carretéis (Figs. 6b e 6c) também devem rolar com a mesma aceleração de uma esfera sólida.

Exemplo 3

Finalmente, deseja-se construir um carretel que tenha um fator geométrico significativamente menor do que o de uma esfera sólida, por exemplo, $B = 0,10$ (primeira etapa). Usando-se as condições de mínimo (8) e (9) resulta, respectivamente, $r/R = 0,32$ (segunda etapa) e $K = 80$ (terceira etapa). Sendo $R = 1,50$ cm para os discos, resulta $r = 0,475$ cm para o núcleo. Como K é grande e diretamente proporcional à razão entre as massas específicas do núcleo cilíndrico e dos discos laterais (ver a expressão (5)), pode-se utilizar um núcleo cilíndrico de latão ($\rho_N = 8,45$ g/cm³), de forma que a razão entre as massas específicas seja grande. Assim segue, da definição (5) (quarta etapa), com D , ρ_N/ρ_D e K já definidos, que o valor de L será 10,9 cm (Fig. 7). Um carretel com essas características tem um fator de aceleração $f = 0,91$ (relação (3)), de forma que $a = 0,91g\sin\theta$ seria a sua aceleração ao longo de um plano inclinado sobre o qual ele não sofresse deslizamento.

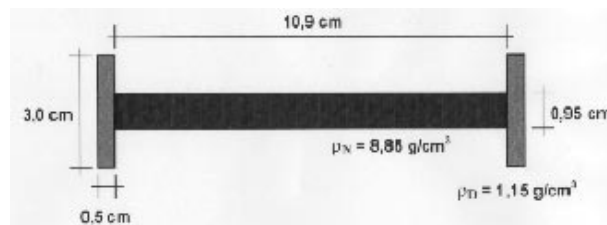


Figura 7: Dados sobre um carretel com fator geométrico $B \simeq 0,10$.

Os autores construíram um carretel semelhante ao da Fig. 7 e observaram, sobre uma mesa inclinada, tempos de deslocamento coerentes com a aceleração prevista. A diferença entre a aceleração do carretel ($B = 0,10$) e a de uma esfera sólida ($B = \beta = 0,40$) pode ser facilmente demonstrada quando ambos são soltos simultaneamente do alto do plano inclinado. Também foram

construídos e igualmente testados os carretéis descritos nos exemplos 1 e 2 (Fig. 6).

Projetar carretéis, com o objetivo de obter acelerações sempre maiores, é uma atividade que pode ser proposta a alunos de diversos níveis de escolaridade. Em uma escola, o professor dispensa o formalismo, e convida as crianças a construir carretéis cada vez mais rápidos a partir de carretéis de plástico obtidos, por exemplo, em lojas de armarinho. (Sendo todos iguais, a única variável livre é $K \propto \rho_N L$ ou seja, as crianças testarão possibilidades fazendo ajustes apenas nos parâmetros do eixo.) Na universidade a discussão deste problema poderá contribuir para desmistificar crenças sobre as acelerações possíveis de corpos regulares que rolam sobre um plano inclinado e ainda tornar-se um estimulante exercício sobre o controle de

variáveis em um problema real e bastante complexo.

References

- [1] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: 1 - Mecânica*. 3. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1996. p. 270.
- [2] G. D. Freier e F. J. Anderson, *A Demonstration Handbook for Physics*. EEUU: AAPT, 1981.
- [3] J. P. McKelvey e H. Grotch, *Física V 1*. São Paulo: Harbra, 1979. p. 367.
- [4] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamentals of Physics - Extended*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 1993. p. 322-325.