

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

APLICAÇÃO DA ANÁLISE INVERSA NO PROJETO DE FORNOS COM  
AQUECEDORES DE FILAMENTO

por

Larissa Domingues Lemos

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, fevereiro de 2015.

APLICAÇÃO DA ANÁLISE INVERSA NO PROJETO DE FORNOS COM  
AQUECEDORES DE FILAMENTO

por

Larissa Domingues Lemos

Licenciada em Física

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França

Aprovado por:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Adriane Prisco Petry, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira, PROMEC/UFRGS

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Letícia Jenisch Rodrigues, DEMEC/UFRGS

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 25 de fevereiro de 2015.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a meus pais e minha irmã pelo amor e apoio incondicional.

Ao meu amor, William, por estar ao meu lado em todos os momentos, me ajudando e fazendo com que eu acredite em mim.

Aos meus colegas do grupo de pesquisa, em especial a Aline, pela tranquilidade que sempre me passa.

As minhas amigas Lauren e Nathália que mesmo longe sempre me apoiaram.

Ao meu professor orientador Francis, que sempre contribuiu com boas ideias.

A CAPES pela bolsa de estudos concedida.

## RESUMO

No projeto de um forno, normalmente busca-se uma configuração para a posição dos aquecedores que resulte em aquecimento uniforme na superfície inferior, a superfície de projeto. Neste trabalho, o fluxo de calor e a temperatura são prescritos na superfície de projeto e os elementos aquecedores devem ser projetados em um conjunto de quatro filamentos, ou um filamento em cada quarto simétrico do forno, a fim de satisfazer às condições prescritas. O forno é modelado como uma cavidade tridimensional preenchida com meio transparente; assume-se que as paredes sejam cinzas e difusas e que o único mecanismo de transferência de calor presente é a radiação térmica. Esse problema, convencionalmente, é solucionado através de um procedimento de tentativa-e-erro; neste trabalho, a solução é obtida através da análise inversa, uma técnica mais versátil e eficaz de projeto, embora exija tratamentos matemáticos especiais. O problema inverso é resolvido nesta pesquisa de forma implícita, como um problema de otimização. A solução é obtida através do método da Otimização Extrema Generalizada (GEO), um método de otimização estocástico e global, utilizado para encontrar as posições para os aquecedores respeitando a condição de formar um filamento. A metodologia é aplicada para se obter a configuração geométrica e posição do filamento aquecedor, uma abordagem inédita na literatura, conduzindo a resultados com desvio máximo inferior a 2%. Por fim, nesta pesquisa, realiza-se um estudo acerca do fator de forma dos elementos aquecedores que indica a aplicabilidade da solução obtida para filamentos com diferentes espessuras.

Palavras-chave: análise inversa; filamento aquecedor; cavidade radiante; GEO.

## ABSTRACT

In the design of a oven is desired to obtain the positions for the heaters that results in a uniform heating to the bottom surface, the design surface. The heat flux and temperature are prescribed in the design surface and the heating elements are positioned in a single filament so as to satisfy prescribed conditions. The oven is modeled as a three-dimensional cavity filled with transparent medium, it is assumed that the walls are gray and diffuse and the dominant heat transfer mechanism is thermal radiation. This problem, conventionally, is solved through a trial and error procedure, in this work, the solution is obtained by inverse analysis. The inverse problem is solved implicitly, as an optimization problem. The solution is obtained by the method of optimization extreme (GEO) a stochastic global optimization method used to find the locations for the heaters respecting the condition of build a filament. The methodology leads to satisfactory results, with maximum error less than 2%. Finally, this research, realized a study of the view factor of the elements heaters that indicates the applicability of the solution into filaments with different thicknesses.

Keywords: inverse analysis; filament heater; radiative enclosure; GEO.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos.....	2
1.2	Revisão Bibliográfica .....	2
1.3	Contribuição do Trabalho .....	4
1.4	Organização do Trabalho.....	5
<b>2</b>	<b>SISTEMAS RADIANTES .....</b>	<b>6</b>
2.1	Corpo negro .....	8
2.2	Troca de radiação entre superfícies .....	9
2.3	Superfície cinza .....	10
2.3.1	Propriedades de superfície cinza e difusa .....	10
2.4	O balanço de energia em uma superfície .....	11
2.5	Método das radiosidades.....	12
2.5.1	Fator de forma.....	13
2.5.2	Método das Radiosidades .....	15
<b>3</b>	<b>ANÁLISE INVERSA .....</b>	<b>17</b>
3.1	Métodos Determinísticos .....	19
3.2	Métodos Estocásticos.....	20
3.3	Método da otimização extrema generalizada .....	23
3.4	Definições das variáveis .....	26
3.5	Definição do problema .....	26
3.6	Detalhamento do processo de solução .....	28
3.6.1	Construção do filamento aquecedor .....	29
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>33</b>
4.1	Independência de malha .....	34
4.2	Definição do parâmetro $\tau$ .....	36
4.3	Solução com 20 elementos aquecedores.....	37
4.4	Solução com 30 elementos aquecedores.....	45
4.5	Solução com 40 aquecedores .....	48
4.6	Solução com 50 aquecedores .....	52
4.7	Estudo do fator de forma .....	56
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>70</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>72</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Espectro da radiação eletromagnética [Fonte: <a href="http://www.antonine-education.co.uk/">http://www.antonine-education.co.uk/</a> acesso em 10 de outubro de 2014].	6
Figura 3.1 – Representação esquemática do problema direto (a) e do problema inverso (b). [Fonte: adaptado de Silva Neto, 2012].	17
Figura 3.2 – Variáveis de projeto codificadas em uma sequência binária [Sousa <i>et al.</i> , 2003].	23
Figura 3.3 – Representação da cavidade retangular tridimensional com filamento aquecedor.	27
Figura 3.4 – Representação da cavidade retangular tridimensional com filamento aquecedor e superfície de projeto destacada.	27
Figura 3.5 – Discretização do domínio computacional (superfície aquecedora em vermelho e superfície de projeto azul).	28
Figura 3.6 – Representação do primeiro elemento aquecedor posicionado.	30
Figura 3.7 – Representação das opções de posição para o segundo elemento aquecedor, em verde.	31
Figura 3.8 – Filamento aquecedor composto por dois elementos aquecedores.	31
Figura 3.9 – Representação das opções de posição para o terceiro elemento aquecedor, em verde.	32
Figura 3.10 – Representação das opções de posição para o segundo elemento aquecedor, em verde.	32
Figura 4.1 – (a) Cavidade tridimensional; e (b) representação da simetria, um quarto da cavidade.	33
Figura 4.2 – Indicação dos pontos na superfície inferior para análise dos resultados.	35
Figura 4.3 – Variação no fluxo de calor adimensional em dois pontos do domínio em função do número de elementos de área.	35
Figura 4.4 – Número de avaliações da função objetivo.	38
Figura 4.5 – Avaliação do parâmetro $\tau_g$ para o caso com 20 elementos aquecedores.	39
Figura 4.6 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho). A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior.	40
Figura 4.7 – Fluxo de calor na superfície de projeto para o caso de 20 elementos aquecedores.	41
Figura 4.8 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho). A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior.	42
Figura 4.9 – Representação dos filamentos aquecedores (em preto) da cavidade completa. A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior.	43
Figura 4.10 – Fluxo de calor na superfície de projeto para o caso de 20 elementos aquecedores.	44
Figura 4.11 – Avaliação do parâmetro $\tau_g$ para o caso com 30 elementos aquecedores.	45
Figura 4.12 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho).	46
Figura 4.13 – Fluxo de calor na superfície de projeto.	47

Figura 4.14 – Avaliação do parâmetro $\tau_g$ para o caso com 40 elementos aquecedores. ....	48
Figura 4.15 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho).....	49
Figura 4.16 – Fluxo de calor na superfície de projeto. ....	50
Figura 4.17 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho).....	51
Figura 4.18 – Fluxo de calor na superfície de projeto. ....	51
Figura 4.19 – Avaliação do parâmetro $\tau_g$ para o caso com 50 elementos aquecedores. ....	53
Figura 4.20 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho).....	54
Figura 4.21 – Representação de um único filamento aquecedor (em preto) da cavidade completa. A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior. ....	55
Figura 4.22 – Fluxo de calor na superfície de projeto. ....	55
Figura 4.23 – Comparação entre a zona aquecedora (a) e o filamento aquecedor (b) .....	57
Figura 4.24 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto.....	58
Figura 4.25 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para o caso de $L=1$ . ....	58
Figura 4.26 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para o caso de $L=0,5$ . ....	59
Figura 4.27 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para o caso de $L=0,1$ . ....	60
Figura 4.28 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para a cavidade a ser resolvida.....	61
Figura 4.29 – Comparação entre a zona aquecedora (a) e o filamento aquecedor (b) inseridos na cavidade. ....	62
Figura 4.30 – Comparação entre as dimensões da zona aquecedora (a) e do filamento aquecedor (b). ....	62
Figura 4.31 – Comparação entre as dimensões do filamento aquecedor com diferentes configurações.....	65
Figura 4.32 – Fluxo de calor na superfície de projeto, filamento com vinte elementos aquecedores e modificação do fator de forma. ....	66
Figura 4.33 – Retângulos em planos paralelos. [Fonte: <a href="http://www.thermalradiation.net/sectionc/C-13.html">http://www.thermalradiation.net/sectionc/C-13.html</a> acesso em março de 2014.].....	67
Figura 4.34 – Fluxo de calor na superfície de projeto, filamento com vinte elementos aquecedores e modificação do fator de forma. ....	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Variáveis de otimização.....	37
Tabela 4.2 – Valor da função objetivo para cada semente.....	40
Tabela 4.3 – Desvios relacionados a solução.....	42
Tabela 4.4 – Desvios relacionados a solução.....	44
Tabela 4.5 – Valor da função objetivo para cada semente.....	46
Tabela 4.6 – Desvios relacionados a solução.....	47
Tabela 4.7 – Valor da função objetivo para cada semente.....	49
Tabela 4.8 – Desvios relacionados a solução.....	50
Tabela 4.9 – Desvios relacionados a solução.....	52
Tabela 4.10 – Valor da função objetivo para cada semente.....	53
Tabela 4.11 – Desvios relacionados a solução.....	56
Tabela 4.12 – Desvios relacionados a solução.....	66
Tabela 4.13 – Desvios relacionados a solução utilizando fator de forma tridimensional.....	68

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área, m <sup>2</sup>
$C$	Configuração de bits
$C_1$	Constante da distribuição espectral de energia de Planck, W $\mu$ m <sup>4</sup> /(m <sup>2</sup> sr)
$C_2$	Constante da distribuição espectral de energia de Planck, $\mu$ mK
$e$	Poder emissivo, W/m <sup>2</sup>
$e_b$	Poder emissivo de corpo negro, W/m <sup>2</sup>
$e_{\lambda b}$	Poder emissivo espectral de corpo negro, W/m <sup>2</sup> $\mu$ m
$F$	Fator de forma
$F$	Valor da função objetivo para uma determinada configuração dos bits
$H$	Altura, m
$I_i$	Número inteiro correspondente à representação binária de uma variável $i$
$i_x$	Elemento de área na direção $x$
$i_y$	Elemento de área na direção $y$
$jd$	Elemento de área na superfície de projeto
$jh$	Elemento de área na superfície dos aquecedores
$jh_f$	Fração em formato de filamento do elemento de área na superfície dos aquecedores
$Jhfw$	Fração isolada do elemento de área aquecedor
$ju$	Elemento de área nas superfícies isoladas
$k$	Nível ocupado por um bit
$L$	Comprimento, m
$L$	Comprimento da sequência binária
$m$	Número de bits
$N$	Número de variáveis do projeto de otimização
$P$	Probabilidade de inversão de um bit
$p$	Precisão para o cálculo do número de bits
$r_f$	Razão entre a dimensão do filamento e da zona aquecedora

$q$	Fluxo de calor, W/m <sup>2</sup>
$Q_i$	Taxa de energia incidente, W
$q_i$	Irradiação, W/m <sup>2</sup>
$Q_o$	Radiosidade adimensional
$q_o$	Radiosidade, W/m <sup>2</sup>
$Q_r$	Fluxo de calor radiante adimensional
$q_r$	Fluxo de calor radiante, W/m <sup>2</sup>
$T$	Temperatura, K
$t$	Temperatura adimensional
$W$	Largura, m
$w_f$	Largura do filamento aquecedor
$x_i$	Valor físico da variável $i$
$x_i^u$	Limite superior da variável $x$
$x_i^l$	Limite inferior da variável $x$
$x, y, z$	Coordenadas no sistema cartesiano
$y_i^u$	Limite superior da variável $y$
$y_i^l$	Limite inferior da variável $y$

## SÍMBOLOS GREGOS

$\alpha$	Absortividade
$\Delta$	Variação
$\varepsilon$	Emissividade
$\lambda$	Comprimento de onda, $\mu\text{m}$
$\nu$	Frequência, Hz
$\rho$	Refletividade
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5,6704 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$
$\tau$	Transmissividade
$\tau_g$	Parâmetro ajustável do GEO

## SUBÍNDICES

<i>D</i>	Superfície de projeto
<i>H</i>	Superfície dos aquecedores
<i>F</i>	Filamento aquecedor
<i>J</i>	Superfície
<i>J</i>	Bit
<i>Jd</i>	Elementos superfície de projeto
<i>Jh</i>	Elementos superfície dos aquecedores
<i>Jw</i>	Elementos isolados
<i>W</i>	Superfície isolada

## 1 INTRODUÇÃO

Há processos industriais de aquecimento que necessitam de uniformidade de fluxo de calor e temperatura nas superfícies a serem processadas, denominadas superfícies de projeto. Um exemplo disso são os fornos de tratamento térmico de recozimento, em que comumente há a necessidade de temperatura uniforme (e, portanto, de fluxo de calor) para eliminar as tensões internas do material. Há outros tipos de fornos, utilizados nas mais diversas aplicações, na produção de alimentos, processamento e secagem de materiais, que também necessitam de aquecimento uniforme.

Neste trabalho, o forno é representado por uma cavidade retangular tridimensional, com superfícies cinza-difusas. O meio contido no forno é considerado não participante, a exemplo do ar, e o único mecanismo de transferência de calor é a radiação térmica. Assim, as trocas radiantes ocorrem diretamente entre as superfícies. O filamento aquecedor, posicionado na superfície superior, deve fornecer fluxo de calor e temperatura uniformes na superfície de projeto.

As condições de contorno são impostas na superfície de projeto, ou seja, fluxo de calor e temperatura uniformes. Na superfície aquecedora, a potência total do filamento aquecedor é prescrita, enquanto as posições dos elementos aquecedores que constituem o filamento devem ser determinadas para atender às condições na superfície de projeto. Técnicas convencionais de solução envolvem normalmente métodos de tentativa-e-erro. Dessa forma, são testadas diversas configurações de posições de aquecedores e valores de fluxo de calor e temperatura até se obter o resultado que satisfaça minimamente as condições impostas. Entretanto, com frequência, pode não ser possível encontrar uma solução suficientemente satisfatória. A aplicação da análise inversa é uma tentativa de se obter soluções com maior precisão. Propõe-se, neste trabalho, um procedimento de solução inversa formulado como um problema de otimização, utilizando-se o método da Otimização Extrema Generalizada (GEO) [Souza et al., 2003]. Assim, as posições dos elementos aquecedores que formam o filamento são definidas pelo método GEO, enquanto a potência em cada elemento aquecedor é definido de acordo com a taxa de energia incidente na superfície de projeto.

## 1.1 Objetivos

O primeiro objetivo desta pesquisa é obter a solução através da análise inversa, determinar a posição e forma dos elementos aquecedores de filamento através do algoritmo GEO para atender às condições de temperatura e fluxo de calor uniformes na superfície de projeto, minimizando os desvios da solução.

Ressalta-se que, como será discutido na próxima seção, esse tipo de projeto inverso tem sido abordado com o uso de um conjunto relativamente grande de aquecedores pontuais e independentes, o que dificulta sua implementação na prática. A principal contribuição deste trabalho está no estabelecimento de uma metodologia que permite o atendimento das condições de projeto com o uso de poucos aquecedores em forma de filamento, uma solução de caráter mais prático. Especificamente, serão considerados apenas quatro aquecedores de filamento em um forno retangular tridimensional, ou um aquecedor em cada quarto simétrico que compõe a cavidade.

Um objetivo secundário, embora fundamental dentro da proposta desta pesquisa, consiste em analisar as expressões para o fator de forma entre os elementos aquecedores e as demais superfícies, de forma a validar a aplicabilidade do filamento aquecedor.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O projeto de um forno tratado como uma cavidade radiante é usualmente realizado pelo método da tentativa-e-erro. Neste caso, cabe ao projetista designar valores do fluxo de calor nos elementos aquecedores e suas posições e, com estas informações, calcular o fluxo de calor e a temperatura na superfície de projeto, verificando se a solução obtida é satisfatória. Esse processo se repete até a obtenção de uma solução adequada para o problema. Entretanto, por vezes a solução não é aceitável e raramente pode ser obtida uma solução com baixos desvios relacionados. A fim de transpor essa dificuldade, pode-se aplicar a análise inversa [Silva Neto, 2005].

Ao aplicar a análise inversa, pode-se adotar métodos de otimização ou de regularização. A metodologia de otimização resolve o problema inverso implicitamente, minimizando ou maximizando a função objetivo. Diz-se que a solução é obtida implicitamente devido ao fato de a variável a ser otimizada não aparecer explicitamente no sistema de equações, ela aparece como parâmetro da função objetivo. Os métodos de regularização são empregados quando o

problema inverso é abordado de forma explícita, neste caso a variável a ser determinada aparece explicitamente no sistema de equações [Daun e Howell, 2005].

A análise inversa aplicada no projeto de fornos industriais de tratamento térmico foi aplicada por Federov *et al.*, 1998. Foram considerados os três mecanismos de transferência de calor: condução, convecção e radiação térmica. Utilizou-se o método de otimização de Levenberg-Marquardt para determinar a temperatura dos aquecedores para obtenção de uma distribuição de temperatura uniforme na superfície de projeto.

Ertürk, *et al.*, 2002 a, realizaram o projeto de um sistema térmico construído a partir de uma determinada condição inicial para um estado estacionário especificado, seguindo um histórico prescrito de temperatura. O problema inverso definiu a potência dos aquecedores que, durante o processo de aquecimento, obtiveram resultados satisfatórios nas especificações do projeto. O trabalho apresenta um problema inverso transitório, de condição de contorno estimada por meio da utilização da informação fornecida na superfície de projeto em cada passo de tempo. A transferência de calor por radiação foi resolvida utilizando o Método de Monte Carlo e o problema inverso resolvido pelo Método do Gradiente Conjugado (CGM).

O mesmo método de regularização, GCM, foi aplicado em um estudo de meios espalhadores por Linhua *et al.*, 1999. Nele, o campo de temperaturas em um forno foi estimado através da informação fornecida pelo fluxo de calor no contorno.

Ertük *et al.*, 2002 b, resolveram o problema de uma cavidade radiante com meio participante na qual foi obtida a distribuição de temperaturas na superfície aquecedora, a fim de satisfazer temperatura e fluxo de calor uniformes na superfície de projeto. Nesta pesquisa foram comparados os resultados obtidos a partir da aplicação dos métodos TSVD, CGM e Gradientes Biconjugados (BiCGM).

Sarvari *et al.*, 2003, aplicaram um método de otimização, o Levenberg-Marquart, em uma cavidade tridimensional preenchida com meio cinza. Nele foram determinadas as condições de contorno necessárias para que o fluxo de calor e a temperatura na superfície de projeto fossem uniformes.

No trabalho de Schneider e França, 2004, foi aplicado o método da Decomposição por Valor Singular Truncado (TSVD), um método de regularização, para realizar o projeto de iluminação em uma cavidade tridimensional.

Mossi *et al.*, 2008, resolveram um problema no qual havia transferência de calor por convecção e radiação. A solução foi obtida com a aplicação do método TSVD. Diferentes casos foram apresentados, o primeiro caso apenas com transferência de calor por radiação e após foi

combinado radiação e convecção. Foram testadas configurações geométricas para aquecedores e para o ventilador gerador de convecção a fim de obter temperatura e fluxo de calor uniformes na superfície de projeto.

Em Cassol *et al.*, 2009, foi realizado o projeto de iluminação de interiores, a determinação do poder luminoso e posição das lâmpadas pode ser considerado genericamente como um problema de cavidade radiante. A solução foi obtida através da aplicação da análise inversa, do método de otimização GEO e a melhor solução foi obtida com a condição de posicionamento e potência de lâmpadas variáveis.

Brittes *et al.*, 2010, resolveram o problema da cavidade radiante combinando o mesmo método regularização TSVD com o método de otimização GEO. Dessa forma, a busca pelas posições dos aquecedores foi tratada como um problema de otimização, pelo método GEO, e a solução do sistema de equações foi feita através do método de regularização, determinando a potência de cada aquecedor.

No trabalho de Farahmand, 2012, a otimização da forma de uma cavidade radiante bidimensional com superfícies difusas cinza foi estudada pelo algoritmo de enxame de partículas PSO, um algoritmo de otimização estocástico. Nele a geometria foi otimizada para satisfazer as distribuições de temperatura e fluxo de calor desejados sobre a superfície de projeto.

No trabalho de Dama *et al.*, 2012, foi realizada uma comparação entre a formulação explícita e implícita para o problema radiante em uma cavidade cinza difusa. O método baseia-se em expansões em série para ambas as formulações, fornecendo a prova matemática da convergência da solução. A formulação explícita proporcionou, de forma geral, uma abordagem alternativa para os problemas que envolvem cavidades em diferentes aplicações.

Moghaddassian *et al.*, 2014 resolveram o problema de uma cavidade bidimensional no qual foi combinado convecção natural e radiação em um meio participante. Foi utilizado o método de otimização, o Levenberg-Marquart, para obter o fluxo de calor nos aquecedores a fim de obter aquecimento uniforme na superfície de projeto.

### **1.3 Contribuição do Trabalho**

Neste trabalho as posições dos aquecedores são determinadas a fim de se obter a melhor solução possível para atender a condição de fluxo de calor e temperatura uniforme na superfície de projeto. A principal contribuição consiste na possibilidade de utilização de um único

filamento aquecedor capaz de satisfazer as condições impostas. Além disso, ao realizar o estudo dos fatores de forma, foi possível considerar o aquecedor um filamento cuja espessura possui uma fração do elemento aquecedor. Com isso, pode-se considerar que a solução torna-se mais aplicável em um problema real.

#### **1.4 Organização do Trabalho**

Este trabalho se divide em cinco capítulos. Após a introdução do assunto no primeiro capítulo, o segundo capítulo apresenta os fundamentos para a formulação físico-matemática desta pesquisa. Fornece alguns conceitos e equações relativos aos fenômenos da radiação térmica, e as informações necessárias para o entendimento do método das radiosidades, utilizado para a solução de cavidades radiantes.

O terceiro capítulo descreve algumas características dos problemas inversos e apresenta o método da Otimização Extrema Generalizada (GEO), que regulariza o sistema de equações, possibilitando a solução do problema inverso. Além disso, traz uma breve discussão sobre outros métodos de otimização.

O quarto capítulo apresenta os resultados obtidos. São comparadas as soluções com 20, 30, 40 e 50 elementos aquecedores em filamento. São apresentados os cálculos dos fatores de forma de filamentos de diferentes espessuras, assim como a aplicação do fator de forma tridimensional.

O quinto capítulo apresenta as conclusões, com uma breve recapitulação dos resultados obtidos.

## 2 SISTEMAS RADIANTES

Um sistema radiante consiste em um sistema no qual a transferência de calor é dominada pela radiação térmica. Todo corpo com temperatura não nula emite radiação em alguma faixa do espectro eletromagnético, sendo assim, a principal forma de transferência de calor do universo. A energia de cada estrela, incluindo a do Sol, é transferida na forma de radiação. Além disso, a transferência de calor por radiação é relevante em processos industriais de aquecimento, resfriamento e secagem, assim como nos métodos de conversão de energia que envolvem a combustão de combustíveis fósseis. A Figura 2.1 apresenta o espectro eletromagnético conhecido.

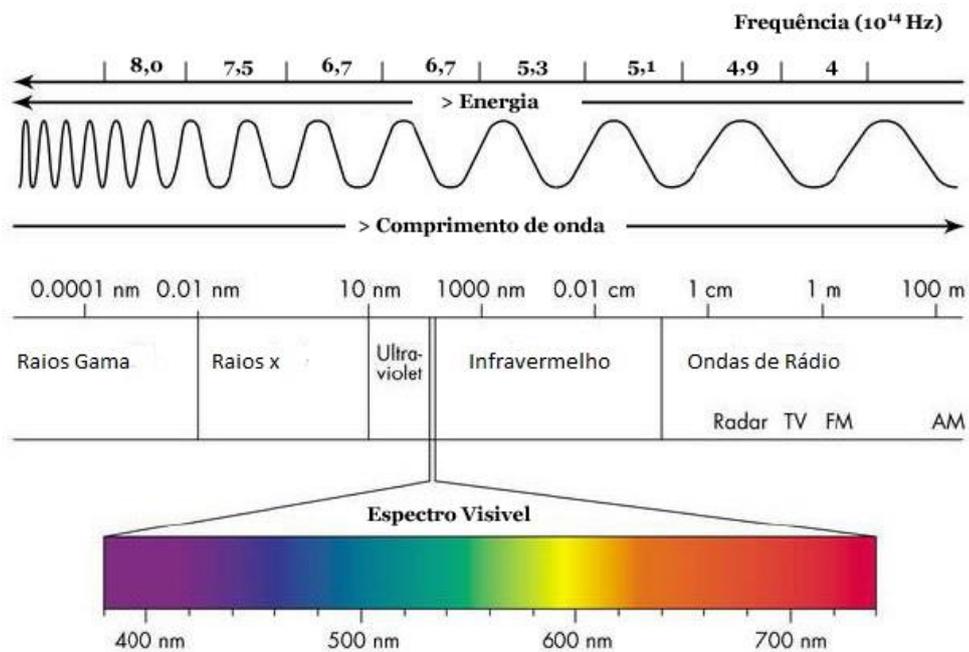


Figura 2.1 – Espectro da radiação eletromagnética [Fonte: <http://www.antonine-education.co.uk/> acesso em 10 de outubro de 2014].

A radiação eletromagnética primeiramente foi compreendida como uma onda, de acordo com a visão clássica do eletromagnetismo. Posteriormente, com a introdução da mecânica quântica, a radiação eletromagnética foi concebida como a emissão de pacotes de energia, denominados fótons. Ambas as concepções são válidas, de forma que a radiação eletromagnética possui um caráter dual; ora se comporta como partícula, ora como onda. Para descrever uma onda eletromagnética, basta conhecer seu comprimento de onda  $\lambda$  ou a frequência  $\nu$ , pois a velocidade da onda é constante, dada pela velocidade da luz  $c$ . A Eq. (2.1)

estabelece a relação entre o comprimento de onda e a frequência. Pode-se perceber que, à medida que a frequência aumenta, o comprimento de onda diminui.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (2.1)$$

na qual  $c = 2,998 \times 10^8$  m/s. A energia da radiação eletromagnética é transportada pelos fótons, sendo diretamente proporcional à frequência, assim quanto maior a frequência maior a energia.

O espectro visível é apenas uma pequena faixa do espectro eletromagnético. Todas as cores percebidas pelo olho humano estão compreendidas entre o intervalo do comprimento de onda entre 400nm e 700nm. A radiação térmica, objeto de estudo nesta pesquisa, encontra-se no intervalo de comprimento de onda que vai de 0,1 a 100  $\mu\text{m}$ , assim, inclui uma parcela da radiação ultravioleta, o espectro visível e o infravermelho. A radiação térmica emitida por uma superfície abrange uma faixa de comprimentos de onda e a intensidade da radiação varia com o comprimento de onda. Além disso, a radiação térmica possui uma característica direcional, pois uma superfície pode emitir preferencialmente em certas direções.

A transferência de calor ocorre também por condução e por convecção. Nesse caso, é necessário existir um gradiente de temperatura em um tipo de meio, diferentemente da radiação térmica que não requer meio para que ocorra transferência de calor. Diz-se que ocorre condução de calor em um meio sólido ou fluido e convecção entre uma superfície e um fluido em movimento com diferentes temperaturas.

A radiação térmica emitida é diretamente proporcional à temperatura da superfície elevada na quarta potência, dessa forma pode-se evidenciar a importância deste meio de transferência de calor, por exemplo, em fornos industriais que apresentam elevadas temperaturas. Os fornos, inicialmente, impulsionaram o estudo da radiação térmica, pois não era conhecida a relação existente entre a energia e o comprimento de onda da radiação eletromagnética. Percebendo-se as discrepâncias entre o que era previsto no Eletromagnetismo Clássico e o real comportamento do espectro de radiação emitido por um forno em alta temperatura, foi proposto um modelo em que o forno se comportaria como um corpo negro e a energia emitida pela radiação eletromagnética seria quantizada, iniciando os estudos da Mecânica Quântica. O primeiro conceito para melhor compreender a natureza complexa da radiação térmica é o conceito de corpo negro, apresentado na próxima seção.

## 2.1 Corpo negro

O corpo negro é uma idealização teórica de um corpo físico, criado para explicar a radiação emitida por fornos em altas temperaturas, nele toda a energia radiante incidente é absorvida, independente da direção e do comprimento de onda. Essa idealização é importante porque estabelece um padrão de comparação para a absorção e emissão de corpos reais. O nome corpo negro tem como origem o fato de que um corpo que absorva toda a radiação que nele incide pareceria negro aos olhos de uma pessoa.

O poder emissivo espectral hemisférico de um corpo negro, chamado de  $e_{\lambda b}(\lambda, T)$  ( $\text{W}/\text{m}^2\mu\text{m}$ ), possui dependência em relação ao comprimento de onda dada pela distribuição espectral de Planck, e é definido como a energia emitida por uma superfície negra, por unidade de tempo, por unidade de área e por unidade de intervalo de comprimento de onda  $d\lambda$ , em torno de  $\lambda$ .

Da integração da distribuição espectral de Planck, Eq. (2.2), em todos os comprimentos de onda, resulta a lei de Stefan-Boltzmann, Eq. (2.3).

$$e_{\lambda b}(\lambda, T) = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)} \quad (2.2)$$

na qual  $T$  (K) é a temperatura,  $\lambda$  ( $\mu\text{m}$ ) é o comprimento de onda e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes, respectivamente:  $0,59552137 \times 10^8 \text{ W}\mu\text{m}^4/(\text{m}^2\text{sr})$  e  $1,4387752 \times 10^4 \mu\text{mK}$ .

$$e_b = \sigma T^4 \quad (2.3)$$

na qual  $e_b$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) é o poder emissivo total do corpo negro e  $\sigma = 5,6704 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$  é a constante de Stefan-Boltzmann.

A melhor aproximação de um corpo negro é alcançada por uma cavidade cuja superfície interna encontra-se a uma temperatura uniforme. Para analisar uma cavidade é necessário avaliar sua geometria, assim como suas propriedades radiantes e temperatura. Todo o desenvolvimento do conceito de um corpo negro pode ser utilizado para analisar o comportamento de superfícies reais. Sabendo-se que um corpo negro é um emissor ideal, é conveniente escolher o corpo negro como referência ao descrever a emissão de uma superfície real.

## 2.2 Troca de radiação entre superfícies

A radiação térmica incidente sobre uma superfície pode ser refletida, absorvida e transmitida. Na Figura 2.2,  $q_i$  representa a radiação térmica incidente, também chamada de irradiação,  $q_{i,a}$  a radiação térmica absorvida,  $q_{i,r}$  refletida e  $q_{i,t}$  transmitida.

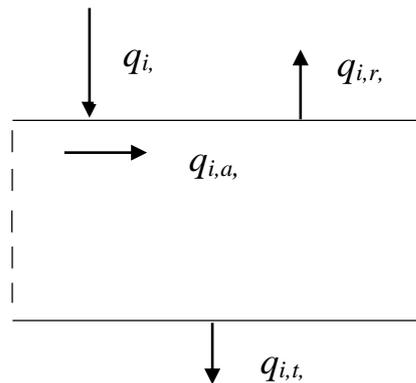


Figura 2.2 – Absorção, reflexão e transmissão da radiação t incidente em uma superfície.

A partir de um balanço de energia, Eq. (2.4), segue que

$$q_i = q_{i,r} + q_{i,a} + q_{i,t} \quad (2.4)$$

A absorvidade  $\alpha$ , emissividade  $\varepsilon$ , transmissividade  $\tau$ , e a refletividade  $\rho$  são propriedades de uma superfície e determinam a fração da energia incidente que é absorvida, emitida, transmitida e refletida, respectivamente.

A emissividade pode ser definida como a razão entre a radiação emitida pela superfície e a radiação emitida pelo corpo negro à mesma temperatura. Assim, a emissividade hemisférica total, Eq. (2.5) representa a média sobre todas as direções e comprimentos possíveis.

$$\varepsilon(T) = \frac{e(T)}{e_b(T)} \quad (2.5)$$

A absorvidade é uma propriedade que determina a fração da radiação incidente absorvida por uma superfície. Pode ser definida como a razão entre a energia absorvida por uma superfície  $q_{i,a}$  (W/m<sup>2</sup>) e a energia incidente  $q_i$  (W/m<sup>2</sup>).

$$\alpha = \frac{q_{i,a}}{q_i} \quad (2.6)$$

Uma superfície pode ser idealizada como difusa, de acordo com a maneira com que ela reflete a radiação. A reflexão difusa ocorre se, independente da direção da radiação incidente, a intensidade da radiação refletida não possui dependência do ângulo de reflexão. Embora nenhuma superfície seja perfeitamente difusa, é uma condição aproximada por superfícies rugosas. A consideração de superfície difusa é razoável para a maioria das aplicações de engenharia.

## 2.3 Superfície cinza

Uma superfície é considerada cinza se as propriedades de absorvidade e emissividade forem independentes do comprimento de onda. Uma superfície para a qual a absorvidade e a emissividade são independentes da direção da radiação incidente e do comprimento de onda é denominada cinza difusa.

### 2.3.1 Propriedades de superfície cinza e difusa

Uma superfície cinza e difusa possui emissividade igual à absorvidade ( $\varepsilon = \alpha$ ). Além disso, pode-se considerar que a superfície é opaca, nesse caso a transmissividade é nula,  $\tau = 0$ , a refletividade  $\rho$  é dada por:

$$\rho = 1 - \varepsilon \quad (2.7)$$

Sendo a emissividade, a razão entre a radiação emitida por uma superfície real e a radiação emitida por um corpo negro à mesma temperatura, pode-se evidenciar quão bem um corpo real emite energia quando comparado com um corpo negro.

A condição de superfície cinza difusa é considerada razoável para diversas aplicações práticas, e será utilizada no presente trabalho.

## 2.4 O balanço de energia em uma superfície

A solução de um problema envolvendo a troca de calor em uma superfície inicia com o balanço de energia do sistema, sendo assim, deve-se considerar que o balanço de energia de um sistema depende do volume de controle. Serão apresentadas duas abordagens: na primeira, a fronteira do volume de controle será no interior da superfície e, na segunda, a fronteira será imediatamente acima da superfície.

Assim, assumindo-se regime estacionário, pode-se posicionar a fronteira no interior da superfície, conforme a Figura 2.3.

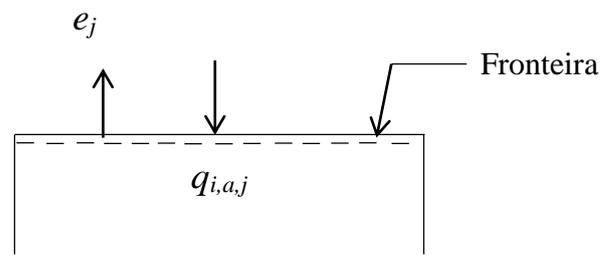


Figura 2.3 – Balanço de energia em uma superfície: fronteira no interior do volume de controle.

O fluxo de calor radiante na superfície  $j$ ,  $q_{r,j}$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ), é a diferença entre emissão  $e_j$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) e absorção  $q_{i,a,j}$  ( $\text{W}/\text{m}^2$ ).

$$q_{r,j} = e_j - q_{i,a,j} \quad (2.8)$$

A equação anterior pode ser reescrita usando-se as expressões apresentadas para emissividade e absorvidade.

$$q_{r,j} = \varepsilon_j e_{b,j} - \alpha_j q_{i,j} \quad (2.9)$$

Considerando a superfície cinza e difusa, pode-se reescrever a Eq. (2.9).

$$q_{r,j} = \varepsilon_j e_{b,j} - \varepsilon_j q_{i,j} \quad (2.10)$$

O balanço de energia pode ser calculado também com a fronteira imediatamente acima da superfície, conforme a Figura 2.4. A definição da radiosidade,  $q_{o,j}$  (W/m<sup>2</sup>), leva em conta toda a energia radiante que deixa a superfície, isso inclui tanto a emissão quanto reflexões em uma superfície.

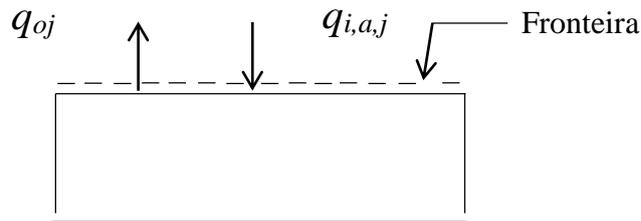


Figura 2.4 – Balanço de energia em uma superfície: fronteira imediatamente acima do volume de controle.

Neste caso, o fluxo de calor radiante,  $q_{r,j}$  (W/m<sup>2</sup>), será a diferença entre a radiosidade e a radiação incidente, definida como irradiação,  $q_{i,j}$  (W/m<sup>2</sup>).

$$q_{r,j} = q_{o,j} - q_{i,j} \quad (2.11)$$

Ao combinar, Eq.(2.10) e Eq. (2.11) para substituir  $q_{r,j}$ , obtém-se uma relação que explicita a definição de radiosidade, uma vez que uma parcela da radiação é emitida e uma parcela é refletida.

$$q_{o,j} = \underbrace{\varepsilon_j e_{b,j}}_{\text{emissão}} + \underbrace{(1 - \varepsilon_j) q_{i,j}}_{\text{reflexão}} \quad (2.12)$$

## 2.5 Método das radiosidades

Esta seção trata do método das radiosidades, utilizado para a solução de uma cavidade radiante. A transferência de radiação entre duas superfícies depende fortemente das geometrias das superfícies, assim como de suas propriedades radiantes e temperaturas. É fundamental

ressaltar que o meio entre as superfícies, neste trabalho, será considerado não-participante, ou seja, não emite, absorve ou espalha radiação térmica, a exemplo do ar. O primeiro conceito para calcular a troca de radiação entre duas superfícies quaisquer é o de fator de forma.

### 2.5.1 Fator de forma

O fator de forma  $F_{i-j}$  é definido como a fração da radiação que deixa a superfície  $i$ , que é interceptada pela superfície  $j$ , considerando que as duas superfícies têm temperaturas e propriedades uniformes.

Na Figura 2.5, os elementos de área  $dA_i$  e  $dA_j$  estão separados por uma distância  $S$ , que forma um ângulo  $\theta_i$ ,  $\theta_j$  com o vetor normal a cada um dos elementos de área.

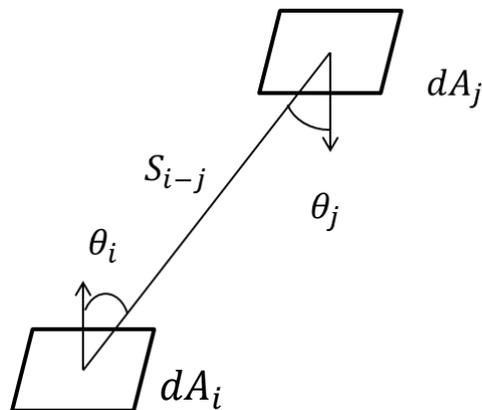


Figura 2.5 – Fator de forma entre duas superfícies.

O fator de forma entre elementos de área  $dA_i$  e  $dA_j$  da Figura 2.5, pode ser calculado através da seguinte equação:

$$F_{i-j} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi S^2} dA_j dA_i \quad (2.13)$$

A Eq. (2.13) pode ser aplicada para determinar o fator de forma entre duas superfícies quaisquer que sejam emissoras e refletoras difusas e possuam radiosidade uniforme.

Analogamente, o fator de forma  $F_{j-i}$  é definido como a fração da radiação que deixa  $dA_j$  e é interceptada por  $dA_i$ .

$$F_{j-i} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi S^2} dA_j dA_i \quad (2.14)$$

Uma relação importante do fator de forma é obtida com a combinação da Eq. (2.13) e Eq. (2.14). Ao se igualar as integrais que aparecem nessas equações, tem-se que:

$$A_i F_{i-j} = A_j F_{j-i} \quad (2.15)$$

A Eq. (2.15) é conhecida por regra da reciprocidade, e se torna útil para determinar um fator de forma a partir do conhecimento do outro.

Em uma cavidade fechada, composta por  $N$  superfícies (Figura 2.6), há outra importante relação para solução do problema. Pela definição do fator de forma, a regra da soma é dada pela Eq. (2.16):

$$\sum_{j=1}^N F_{i-j} = 1 \quad (2.16)$$

A Eq. (2.16) pode ser aplicada em cada uma das  $N$  superfícies no interior da cavidade. Essa regra é uma consequência da conservação de energia, uma vez que toda radiação que deixa a superfície  $i$  deve ser interceptada pelas demais superfícies da cavidade, o termo  $F_{i-i}$ , que aparece no somatório, representa a fração da radiação que deixa a superfície  $i$  e é interceptada por  $i$ , sendo neste problema, a superfície plana,  $F_{i-i} = 0$ .

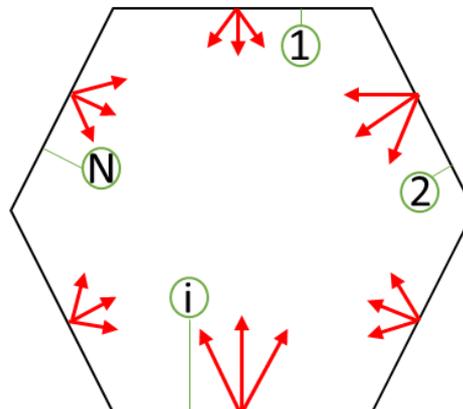


Figura 2.6 – Troca de radiação em uma cavidade fechada composta por  $N$  superfícies.

Para resolver o problema de troca radiante em uma cavidade, assume-se que a temperatura e o fluxo de calor radiante sejam uniformes na superfície, que as paredes sejam cinza e difusas, e que as propriedades radiantes sejam conhecidas e uniformes. Sendo uma cavidade composta por  $N$  superfícies, deseja-se avaliar a energia incidente em cada uma delas.

### 2.5.2 Método das Radiosidades

O método das radiosidades é baseado nas equações de balanço de energia. Cada elemento de área emite e absorve radiação térmica proveniente das demais superfícies. Para cada superfície que compõe a cavidade, deve-se escrever uma equação, pois cada uma delas possui uma condição de contorno prescrita: fluxo de calor radiante ou temperatura. Assim, a abordagem a ser utilizada irá depender da condição de contorno da superfície para se obter um sistema de equações em que apenas a radiosidade seja incógnita.

A taxa de calor radiante incidente em uma superfície  $j$ ,  $Q_{i,j}$  (W), pode ser determinada pelo somatório das taxas de calor provenientes das superfícies que formam a cavidade. Com o emprego dos conceitos de fator de forma e radiosidade, a taxa de calor incidente pode ser determinada como:

$$Q_{i,j} = \sum_{k=1}^N F_{k-j} A_k q_{o,k} \quad (2.17)$$

De acordo com a regra da reciprocidade  $F_{k-j} A_k = F_{j-k} A_j$ . Logo:

$$Q_{i,j} = \sum_{k=1}^N F_{j-k} A_j q_{o,k} \quad (2.18)$$

$$\frac{Q_{i,j}}{A_j} = \sum_{k=1}^N F_{j-k} q_{o,k} \quad (2.19)$$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^N F_{j-k} q_{o,k} \quad (2.20)$$

Com a combinação das Eqs. (2.20), (2.11) e (2.12), apresentadas na seção anterior, substituindo o termo de irradiação, pode-se obter as duas equações necessárias para resolver a

cavidade radiante. Para a condição de contorno de temperatura prescrita, usa-se a Eq. (2.21), caso fluxo de calor radiante seja prescrito, então se utiliza a Eq. (2.22):

$$q_{o,j} = \varepsilon_j e_{b,j} + (1 - \varepsilon_j) \sum_{k=1}^N F_{j-k} q_{o,k} \quad (2.21)$$

$$q_{o,j} = q_{r,j} + \sum_{k=1}^N F_{j-k} q_{o,k} \quad (2.22)$$

Ao escrever para cada superfície uma equação, é possível determinar as radiosidades de cada uma e, então, resolver o problema da troca de radiação térmica em cavidades. Informações adicionais referentes à radiação térmica e à troca de radiação térmica em cavidades podem ser obtidas em Siegel e Howell, 2002 e Modest, 1993.

### 3 ANÁLISE INVERSA

Um problema inverso consiste em encontrar a causa que produz um determinado efeito, conforme mostra a Figura 3.1. Assim, para o problema inverso ser resolvido, são necessários dados conhecidos que podem ser numéricos ou experimentais, a partir dos quais será encontrada a causa que os produz. Dessa forma, busca-se minimizar o desvio da solução, pois, em geral, um problema inverso apenas pode ser resolvido com certo grau de aproximação.

O problema direto utiliza a causa e encontra o efeito que ela produz. Neste caso, a solução direta do projeto de um forno com aquecedores em filamento, no qual a temperatura e fluxo de calor uniformes são prescritos na superfície inferior, denominada superfície de projeto, envolve um método de tentativa-e-erro. Assim, testam-se diversas configurações de posições de aquecedores e valores de fluxo de calor e temperatura até se obter um resultado que melhor satisfaça às condições impostas. Entretanto, em alguns casos, pode-se não encontrar uma solução satisfatória. A aplicação da análise inversa é uma tentativa de obter soluções mais precisas e com um método mais eficiente.

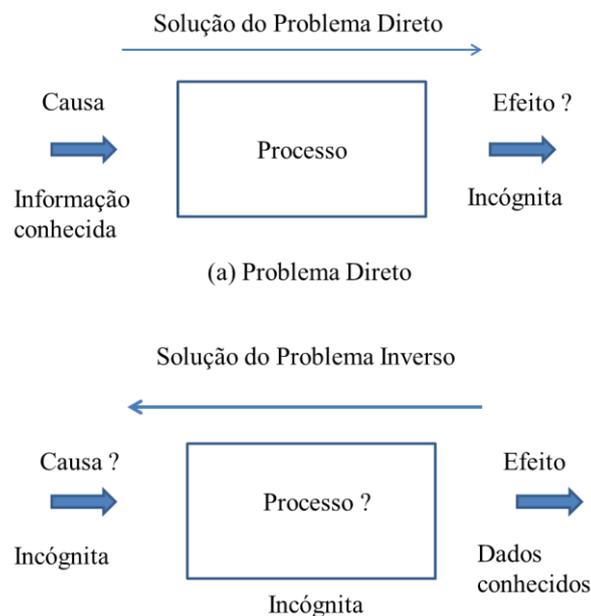


Figura 3.1 – Representação esquemática do problema direto (a) e do problema inverso (b). [Fonte: adaptado de Silva Neto, 2012].

A análise inversa é aplicada em problemas mal postos. Esse tipo de problema é caracterizado por possuir números desiguais de variáveis e equações, impedindo-se a obtenção

de uma solução única e exata do problema. Dessa forma, a solução se torna instável e pequenas alterações nos dados do problema resultam em mudanças significativas na solução. Hadarmad (1923) definiu um problema matemático como bem-posto quando sua solução:

- I Existe.
- II É única.
- III Depende continuamente, e suavemente, dos dados iniciais.

O problema inverso no qual busca-se determinar a posição dos elementos aquecedores em uma cavidade que produzam fluxo de calor e temperatura uniforme na superfície de projeto é considerado um problema mal posto, visto que a solução não existe, são aceitas soluções com um percentual de desvio, não é única pois outras configurações de posições dos elementos aquecedores apresentam desvios semelhantes e pequenas mudanças nos dados de entrada do problema geram diferentes soluções.

Uma solução direta, no caso de um forno industrial, consiste em especificar o valor do fluxo de calor radiante na superfície aquecedora. Assim, utilizando-se de um modelo matemático, encontra-se o valor do fluxo de calor radiante na superfície de projeto para uma dada especificação de temperatura nessa superfície. O problema inverso consiste em prescrever um valor para o fluxo de calor radiante na superfície de projeto, assim como a temperatura e, então, através de um modelo, obter-se a posição dos elementos aquecedores. Ao obter uma solução para o problema inverso, a posição para os elementos aquecedores que formam o filamento, a solução torna-se o dado de entrada do problema direto, juntamente com o fluxo de calor prescrito do filamento aquecedor. Dessa forma pode-se validar a solução obtida pelo problema inverso.

A solução direta do problema proposto pode ser obtida pelo método das radiosidades, como apresentado por Siegel e Howell, 2002. Para iniciar o estudo do problema, é preciso definir as propriedades da cavidade. Neste caso a cavidade é composta por superfícies cinza e difusas que, quando divididas em elementos suficientemente pequenos, garantem condições de contorno térmicas uniformes; o meio é considerado transparente, de forma que há apenas troca de calor direta entre as superfícies.

Neste método deve-se conhecer, para cada superfície que compõe a cavidade, uma condição de contorno de acordo com a qual se escreve a equação para a radiosidade. Para temperatura prescrita adota-se a Eq. (2.21); para fluxo de calor radiante prescrito usa-se a Eq. (2.22).

Como resultado da aplicação do método, tem-se um sistema cujo número de equações dependerá da quantidade de elementos em cada superfície da cavidade. Resolvido o sistema de equações das radiosidades, determinam-se as condições de contorno desconhecidas.

As equações empregadas no método já foram apresentadas, Eq.(2.21) e Eq.(2.22), mas é conveniente reescrevê-las em função das radiosidades adimensionais,  $Q_{o,j}$ .

$$Q_{o,j} = \varepsilon_j t_j^4 + (1 - \varepsilon_j) \sum_{k=1}^N F_{j-k} Q_{o,k} \quad (3.1)$$

$$Q_{o,j} = Q_{r,j} + \sum_{k=1}^N F_{j-k} Q_{o,k} \quad (3.2)$$

na qual o fluxo de calor ou a radiosidade e a temperatura adimensionais são dados por:

$Q = q / \sigma T_{\text{prescrita}}^4$  e  $t = T / T_{\text{prescrita}}$ , respectivamente. O termo  $T_{\text{prescrita}}$  refere-se à temperatura prescrita na superfície de projeto. Desta forma, a temperatura adimensional nos elementos da superfície de projeto será unitária.

A solução de um problema inverso pode ser obtida por diversos métodos de otimização, os quais podem ser determinísticos, estocásticos e híbridos. As próximas seções descrevem métodos determinísticos e estocásticos.

### 3.1 Métodos Determinísticos

Alguns métodos de otimização, classificados como determinísticos, buscam aproximar a solução do problema mal posto utilizando soluções de uma família de problemas bem-postos através de iterações sucessivas. Entre os métodos determinísticos, podem-se citar o Levenberg-Marquardt, Newton-Raphson e Quase-Newton.

O algoritmo de Levenberg-Marquardt é uma técnica iterativa que representa uma evolução do método de Gauss-Newton [Sun e Yuan, 2006], sendo uma proposta de solução para problemas de mínimos quadrados. Problemas de mínimos quadrados têm como objetivo encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados, de tal modo que a soma dos quadrados das distâncias entre o modelo (curva ajustada) e os dados seja a menor possível. As diferenças entre a curva ajustada e os dados são comumente denominadas resíduos. O problema de mínimos quadrados está intimamente ligado a problemas de otimização. No algoritmo de

Levenberg-Marquardt a minimização de uma função de muitas variáveis é expressa em termos da soma dos mínimos quadrados, utilizando as derivadas para resolver os problemas de mínimos quadrados não-lineares. [Gattass e Maffra, 2008].

O método de Newton- Raphson é iterativo e usa aproximação de segunda ordem em série de Taylor da função que se deseja minimizar. Portanto, é necessário o conhecimento da primeira e segunda derivadas da referida função em qualquer ponto. Sua principal vantagem é a rápida convergência, e a facilidade em encontrar as raízes da função, entretanto, dependendo da função, a operação de diferenciação pode ser difícil e requerer alto custo computacional. Visando a reduzir esse custo e manter as vantagens do método, foram desenvolvidos métodos que se assemelham ao método de Newton, denominados de métodos Quase-Newton.

Há uma série de métodos baseados no método Quase-Newton. Estes métodos são modificações do método de Newton- Raphson e aumentam sua aplicabilidade [Fletcher, 2000]. O procedimento iterativo utilizado pelos métodos Quase-Newton para minimizar uma função necessita que o gradiente da função objetivo esteja disponível em cada interação e, ao medir as mudanças no gradiente de uma interação para outra, é construído um modelo para a função objetivo que o leva à convergência. A principal vantagem do Quase-Newton é não necessitar da segunda derivada. Contudo, se o grau de dificuldade de obtenção da primeira derivada persistir, carrega-se essa desvantagem.

Assim, de forma objetiva, segundo Silva Neto, 2012, os métodos determinísticos usualmente são baseados na derivação da função objetivo. Genericamente, pode-se dizer que são métodos de programação matemática e, quando convergem, rapidamente obtêm a solução do problema inverso, mas frequentemente esta solução corresponde ao mínimo local mais próximo.

### **3.2 Métodos Estocásticos**

Os métodos estocásticos envolvem passos com a inserção de sequências aleatórias em seus algoritmos de solução, ou seja, são métodos probabilísticos, apresentam boas aproximações para o mínimo global quando adequadamente implementados, entretanto a demanda computacional é elevada [Silva Neto e Becceneri, 2009]. Entre os diversos métodos estocásticos existentes, podem-se citar os Algoritmos Genéticos, o método do Recozimento Simulado e o método GEO, sendo este o utilizado neste trabalho.

Os Algoritmos Genéticos incorporam princípios da genética e da evolução das espécies na busca de soluções para problemas de otimização. Apresentam-se como ferramentas muito úteis e adaptam-se bem a várias classes de problemas [Sivanandam e Deepa, 2008]. Neles, há uma função objetivo a ser otimizada; cada indivíduo de uma população é codificado por uma sequência de bits, que inicialmente é aleatoriamente ordenada e posteriormente ranqueada de acordo com a função objetivo e as probabilidades atribuídas a cada indivíduo, sendo as probabilidades proporcionais à adaptabilidade do indivíduo. Por fim, a sequência é completamente organizada e a melhor solução para o problema é selecionada pelo algoritmo.

O método do Recozimento Simulado tem esse nome devido à analogia do processo físico de recozimento de metais. O recozimento de metais é um processo de alteração de propriedades de um material metálico por aquecimento e resfriamento lento. Quando um material é submetido a um processamento a frio, sua estrutura cristalina é deformada. Os cristais deformados têm mais energia que os não deformados, por causa da desorganização da estrutura cristalina nas interfaces entre os grãos. Havendo oportunidade, os átomos se deslocam visando um arranjo mais perfeito e regular, de menor energia. A sequência de procedimentos da busca do cristal perfeito, o aumento da temperatura seguido do decréscimo lento, configura uma programação de recozimento. Quanto mais organizada a estrutura cristalina de um material, menor a sua energia. Para qualquer material, existe pelo menos uma estrutura atômica que minimiza sua energia na temperatura de zero absoluto, essa energia mínima global corresponde ao arranjo perfeitamente regular do material.

O método de Recozimento Simulado, baseado em ideias da mecânica estatística, foi inicialmente proposto por Metropolis et al.,1953, e baseia-se na minimização da energia da estrutura cristalina quando o material é recozido para remover defeitos de sua estrutura atômica. Kirkpatrick et al.,1983, estendeu o método de otimização termodinâmica de Metropolis para o problema de otimização combinatória. A função objetivo deste problema corresponde ao nível de energia do sistema que se deseja minimizar. A temperatura do sistema físico não tem equivalente no problema de otimização, ela é introduzida como um parâmetro de controle. No procedimento de Metropolis, foi incorporada uma sequência de passos que resultam em um aumento da função objetivo, evitando mínimos locais para se alcançar o ótimo global. O algoritmo foi proposto para simular o sistema de átomos em equilíbrio numa determinada temperatura. Em cada passo do algoritmo, são dados deslocamentos aleatórios em cada átomo e a função objetivo é calculada. Se o valor da função objetivo é menor neste novo ponto, o deslocamento é aceito e a nova configuração passa a ser o ponto de partida para o próximo

passo. No caso de a função objetivo ser maior, há uma certa probabilidade de a nova configuração ser aceita, e esta probabilidade cresce à medida que o parâmetro de temperatura cresce, ou diminui de acordo com a diferença de energia entre os dois pontos. Por fim, para que se deslocar de um mínimo local a um mínimo global da estrutura acessando apenas pontos vizinhos, é necessário que, pelo menos em alguns pontos ao longo dessa trajetória, a energia do sistema aumente. Em outras palavras, a única maneira de ir de um mínimo local para o mínimo global, ou para outro mínimo local, é aumentando a energia do sistema.

O método do Recozimento Simulado já foi aplicado em problemas inversos de transferência radiativa, apresentando soluções com baixo percentual de desvio [Silva Neto e Soeiro, 2006], mostrando ser uma ferramenta robusta na solução desse tipo de problema. Entretanto, a demanda computacional para obtenção desta solução foi elevada. Uma opção apresentada neste caso é a combinação do método do Recozimento Simulado com o método de Levenberg-Marquardt, para redução do tempo computacional; essa combinação é classificada como um método de híbrido de solução, pois combina um método estocástico e um determinístico de forma a utilizar os pontos positivos de cada um dos métodos.

Pode-se concluir, de acordo com o que foi apresentado até este momento, que os métodos estocásticos podem levar vantagem em relação aos determinísticos. Em compensação, o uso de um método estocástico pode tornar o processo de busca pelo mínimo (ou máximo) global muito mais lento.

Foram citados aqui apenas alguns métodos de otimização. Informações adicionais podem ser encontradas em Howell *et al.*, 2003, que discute métodos de otimização em uma ampla lista de problemas. Outra fonte de consulta é Silva Neto e Moura Neto, 2012.

A escolha do método de otimização sempre dependerá do tipo de problema, pois algumas técnicas adaptam-se melhor do que outras, dependendo da situação na qual são aplicadas. Um problema semelhante ao proposto nesse trabalho foi resolvido por Brittes e França, 2010, e resolvido através da abordagem híbrida. A metodologia híbrida se baseou na combinação do método da Otimização Extrema Generalizada (GEO) com um método de regularização, a Decomposição por Valor Singular Truncado (TSVD). Dessa forma, a busca pelas posições dos aquecedores foi tratada como um problema de otimização, pelo método GEO; a solução do sistema de equações foi feita através do método de regularização, determinando assim a potência de cada aquecedor. O método híbrido apresentou bons resultados, entretanto não será aplicada neste trabalho, pois não se deseja obter a potência de operação dos aquecedores, visto que a solução envolve filamentos operando com a mesma



$$P(k) \propto k^{-\tau_g}, \quad 1 \leq k \leq L \quad (3.3)$$

Para cada espécie (bit) é associado um número de adaptabilidade, que é proporcional ao ganho (ou perda) em uma função objetivo ao se inverter um bit. Pode-se definir a função objetivo de várias formas, mas neste trabalho optou-se por uma baseada na soma de mínimos quadrados. Todos os bits são distribuídos em níveis de acordo com a adaptabilidade. O bit menos adaptado é colocado no nível um e o mais adaptado no nível  $L$ . A inversão (mutação) dos bits é controlada pela distribuição de probabilidades dada pela Eq. (3.3), onde  $k$  é o nível em que o bit foi posicionado e  $\tau_g$  é um parâmetro ajustável positivo. Quando o parâmetro  $\tau_g \rightarrow 0$ , o algoritmo realiza uma busca aleatória, enquanto que para  $\tau_g \rightarrow \infty$ , tem-se uma busca determinística. A introdução do parâmetro  $\tau$  permite que o algoritmo selecione qualquer variável para sofrer mutação, mas privilegia aquelas com menor adaptabilidade.

O processo descrito anteriormente é repetido até que seja atingido um determinado critério de parada. A melhor configuração de bits será aquela que fornecer o melhor valor para a função objetivo. Neste trabalho, a função objetivo é definida pela diferença entre o fluxo de calor prescrito nos elementos da superfície de projeto,  $Q_{r,\text{prescrito}}$ , e o fluxo de calor calculado a partir do problema inverso,  $Q_{r,jd}$ .

$$F_{lsq} = \sqrt{\sum_{jd} (Q_{r,\text{prescrito}} - Q_{r,jd})^2} \quad (3.4)$$

Para cada variável de projeto calcula-se o número mínimo de bits,  $m$ , necessários a fim de garantir certa precisão,  $p$ , conforme a Eq. (3.5). As variáveis serão codificadas pelo maior valor de  $m$ . O comprimento da sequência binária é dado pelo produto do número de variáveis,  $N$ , pelo número de bits ( $L = N \cdot m$ ).

$$2^m \geq \frac{x_{i\_sup} - x_{i\_inf}}{p} + 1 \quad (3.5)$$

Na Eq. (3.5),  $x_{i\_sup}$  e  $x_{i\_inf}$  são os limites superior e inferior, respectivamente, da variável  $i$ , com  $i = 1, N$ , definidos de acordo com o problema a ser resolvido. O valor físico de

cada variável de projeto é definido pela Eq. (3.6), onde  $I_i$  é um número inteiro obtido na transformação da variável  $i$  da representação binária para decimal.

$$x_i = x_{i\_inf} + (x_{i\_sup} - x_{i\_inf}) \frac{I_i}{2^m - 1} \quad (3.6)$$

Ao se aplicar o método com o objetivo de obter um filamento aquecedor é necessário impor restrições extras. Dessa forma, a posição do primeiro aquecedor do filamento será obtida de acordo com a Eq. (3.6), com as restrições de  $x_{i\_sup}$  e  $x_{i\_inf}$  definidas pela malha utilizada. A restrição do próximo aquecedor será atualizada de acordo com a posição do aquecedor anterior, de forma que  $x_{i+1}^l = x_i - 1$  e  $x_{i+1}^u = x_i + 1$ .

Para aplicação do algoritmo GEO seguem-se as seguintes etapas:

- 1) Inicializa-se aleatoriamente uma sequência binária de comprimento  $L$  que codifique todas as  $N$  variáveis de projeto ( $L = Nm$ ). Calcular-se o valor da função objetivo,  $F$ , para a configuração inicial dos bits,  $C$ . Fazer  $C_{melhor} = C$  e  $F_{melhor} = F$ .
- 2) Para cada bit  $j$  ( $1 \leq j \leq L$ ) da sequência binária, em uma dada iteração: a) Inverte-se o bit (de 0 para 1 ou 1 para 0) e calcula-se o valor da função objetivo  $F_j$  para a configuração  $C_j$ ; b) Associa-se um valor correspondente a adaptabilidade (variação no valor da função objetivo)  $\Delta F_j = F_j - F_{melhor}$ , que indica o ganho relativo (ou perda) quando o bit é invertido em compara-se com o melhor valor da função objetivo encontrado até aqui; c) Retorna-se o bit para seu valor inicial.
- 3) Ordenam-se os bits de acordo com seus valores de adaptabilidade, ou seja,  $k = 1$  para o menos adaptado e  $k = L$  para o mais adaptado. Em problemas de minimização, os bits com maiores valores de  $\Delta F_j$  ocuparão níveis mais altos, e vice-versa para problemas de maximização. Se dois ou mais bits possuírem o mesmo valor para adaptabilidade, deve-se distribuí-los aleatoriamente com distribuição uniforme.
- 4) Escolhe-se um bit para sofrer mutação (ou seja, inverte-se de 0 para 1 ou de 1 para 0). Gera-se um número aleatório RAN, com distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ . Se  $k^{-\tau}$  for maior ou igual à RAN, confirma-se a inversão do bit. Caso contrário, escolhe-se outro bit e repete-se o processo até se obter a mutação.

- 5) Quando for confirmada a alteração do bit  $j$  na etapa anterior, faz-se  $C = C_j$  e  $F = F_j$ .
- 6) Se  $F < F_{\text{melhor}}$ , para problemas de minimização, ou  $F > F_{\text{melhor}}$ , para problemas de maximização, faz-se:  $F_{\text{melhor}} = F$  e  $C = C_{\text{melhor}}$ .
- 7) Repetem-se as etapas de (2) a (6) até que o critério de parada adotado seja atingido.
- 8) Retornam-se os valores de  $C_{\text{melhor}}$  e  $F_{\text{melhor}}$ .

### 3.4 Definições das variáveis

As variáveis contínuas são representadas no GEO de forma binária, com uma precisão  $p$ . Variáveis inteiras possuem precisão unitária, ou seja,  $p = 1$  e podem ser tratadas de três formas:

- I. Se a relação  $(x_{i\_sup} - x_{i\_inf}) = 2^N - 1$  for satisfeita haverá uma sequência de bits que representará todas as  $N$  variáveis.  
Caso não exista uma correspondência direta entre a sequência de bits e as variáveis:
- II. O menor número  $m$  que satisfaz  $2^m \geq x_{i\_sup} - x_{i\_inf} + 1$  é calculado e, a cada uma das  $N$  variáveis, associa-se uma sequência de bits. Para as  $2^N - N$  variáveis restantes, são atribuídos valores inteiros fora do intervalo das variáveis, os quais são tratados como soluções inviáveis.
- III. As  $(2^N - N)$ s variáveis restantes são associadas a inteiros dentro do intervalo viável. Neste caso, uma ou mais variáveis serão associadas com mais de uma sequência de bits. Entretanto, nesse caso, há uma probabilidade não uniforme no processo de seleção de um bit sofrer mutação na etapa 4 do algoritmo.

### 3.5 Definição do problema

O problema a ser resolvido consiste em uma cavidade retangular, representada pela Figura 3.3, formada por superfícies cinza e difusas. As dimensões, comprimento, largura e altura, são designadas por  $L$ ,  $W$  e  $H$ , respectivamente. A superfície de projeto, onde o fluxo de

calor e a temperatura são prescritos, está localizada na superfície inferior da cavidade. Os aquecedores são posicionados no topo, formando um filamento, e as superfícies laterais são consideradas isoladas.

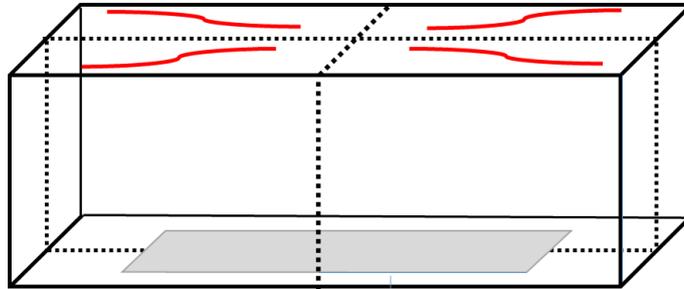


Figura 3.3 – Representação da cavidade retangular tridimensional com filamento aquecedor.

A Figura 3.3 apresenta a cavidade dividida em quatro partes iguais. Devido à simetria o problema será resolvido em apenas uma parte. A Figura 3.4 apresenta um quarto da cavidade com a superfície de projeto.

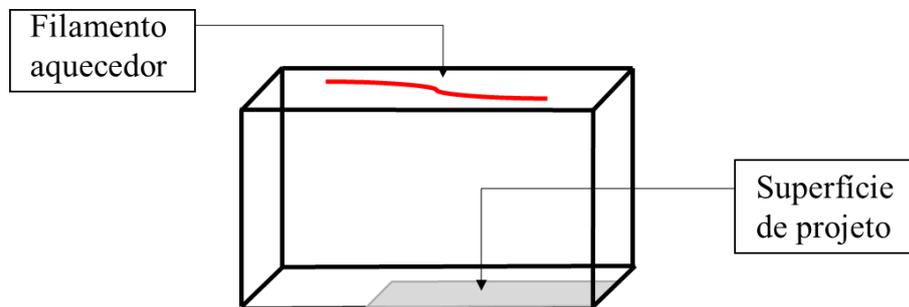


Figura 3.4 – Representação da cavidade retangular tridimensional com filamento aquecedor e superfície de projeto destacada.

A cavidade, representada pela Figura 3.4, mostra que a superfície de projeto não ocupa toda a superfície inferior, essa definição se deve ao fato de as regiões próximas aos cantos serem afetadas principalmente por reflexões das paredes laterais e não pela radiação térmica proveniente dos elementos dos aquecedores na superfície superior. Essa situação dificulta, ou mesmo impossibilita, que se alcance uma configuração de aquecedores que atenda adequadamente o problema, conforme foi discutido em Brittes e França, 2010. Assim, a cavidade é dividida em elementos de mesmo tamanho  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , como mostra a Figura 3.5.

A simetria do problema possibilita resolver apenas um quarto da cavidade, reduzindo o tempo para a obtenção da solução.

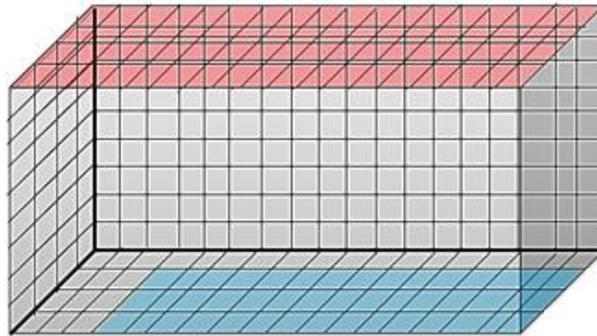


Figura 3.5 – Discretização do domínio computacional (superfície aquecedora em vermelho e superfície de projeto azul).

Para definir as condições de contorno, será escrita uma equação para a radiosidade em cada elemento da cavidade. Nos elementos da superfície de projeto,  $jd$ , duas condições de contorno são prescritas: temperatura e fluxo de calor. Assim devem ser aplicadas as Equações (3.1) e (3.2). Os elementos das paredes,  $iw$ , são considerados perfeitamente isolados. Qualquer elemento na superfície dos aquecedores,  $jh$ , pode ser definido como elemento aquecedor, e a potência total do filamento é prescrita, mas as posições dos elementos que constituem o filamento deve ser determinada através da análise inversa.

### 3.6 Detalhamento do processo de solução

O processo de solução inicia com uma configuração aleatória para o posicionamento dos aquecedores, respeitando a condição de formação do filamento aquecedor, ou seja todos os aquecedores são posicionados de acordo com a posição do anterior; definidas as posições, todos os fatores de forma são calculados.

As radiosidades nos elementos da superfície de projeto,  $Q_{o,jd}$ , são calculadas pela Eq.(3.2). A partir dos valores do fluxo de calor nos elementos dos aquecedores, é efetuado o cálculo direto. Avalia-se a função objetivo, que neste trabalho leva em conta a diferença entre o fluxo de calor prescrito nos elementos da superfície de projeto,  $Q_{r,prescrito}$ , e o fluxo de calor calculado a partir do problema inverso,  $Q_{r,jd}$ .

$$F_{lsq} = \sqrt{\sum_{jd} (Q_{r,\text{prescrito}} - Q_{r,jd})^2} \quad (3.7)$$

A função objetivo está sujeita às restrições impostas para as posições dos aquecedores  $i_{x\_inf} \leq i_x \leq i_{x\_sup}$  (direção  $x$ ) e  $i_{y\_inf} \leq i_y \leq i_{y\_sup}$  (direção  $y$ ).

O código elaborado em Fortran segue as seguintes etapas:

- 1) Gerar uma configuração aleatória para as posições dos aquecedores, seguindo a restrição  $x_{i+1}^l = x_i - 1$  e  $x_{i+1}^u = x_i + 1$ ;
- 2) Resolver o sistema de equações;
- 3) Resolver o problema direto e usar o valor da função objetivo como entrada para o algoritmo GEO;
- 4) Gerar, no GEO, nova distribuição espacial para os aquecedores, novamente seguindo a restrição de formação do filamento.
- 5) Repetir as etapas (2) à (9) até atingir o critério de parada adotado no GEO.

### 3.6.1 Construção do filamento aquecedor

Para obter a solução otimizada do problema, o algoritmo GEO inicia gerando uma sequência binária aleatória que define as posições dos elementos aquecedores na superfície superior. Para cada posição do filamento aquecedor resolve-se o problema direto. Ao variar um bit da sequência binária modifica-se a posição de um elemento aquecedor e o problema direto é novamente resolvido. Esse procedimento se repete até a obtenção da solução que apresente o menor valor da função objetivo. A sequência binária consiste em um vetor; nele, a primeira posição corresponde a variável  $x$  e a segunda a variável  $y$ .

O filamento aquecedor gerado pela sequência binária é construído a partir de restrições para as posições impostas ao algoritmo GEO. O primeiro elemento aquecedor pode ser posicionado em qualquer ponto da superfície aquecedora, desde que siga a restrição definida pela dimensão da malha. Assim, a primeira restrição para posição deve ser,  $x_{inf} \leq x \leq x_{sup}$  e  $y_{inf} \leq y \leq y_{sup}$ . Em uma malha de  $15 \times 12$ , as restrições são  $1 \leq x \leq 15$  e  $1 \leq y \leq 12$ . A Figura 3.6 apresenta o primeiro elemento aquecedor posicionado na superfície.

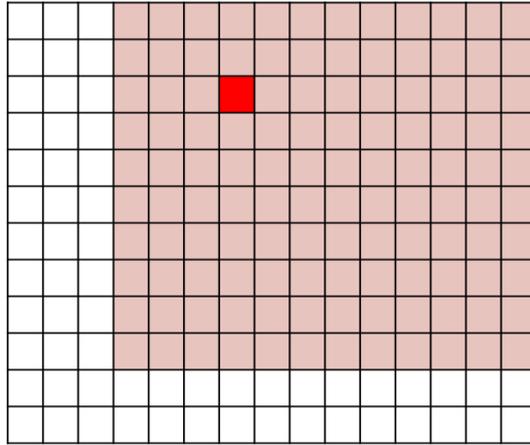


Figura 3.6 – Representação do primeiro elemento aquecedor posicionado.

Com o primeiro elemento aquecedor posicionado todos os demais elementos deverão obedecer as seguintes restrições:

$$x_{i+1}^u = x_i + 1 \quad (3.8)$$

$$x_{i+1}^l = x_i - 1 \quad (3.9)$$

As equações acima impõem os limites superior e inferior da variável de posição  $x$  de acordo com a posição do primeiro elemento aquecedor  $x_i$ .

Para definir a posição em  $y$  as mesmas equações devem ser aplicadas:

$$y_{i+1}^u = y_i + 1 \quad (3.10)$$

$$y_{i+1}^l = y_i - 1 \quad (3.11)$$

Deve-se observar que a restrição de posição dada de acordo com a malha também deve ser aplicada aos demais elementos aquecedores. Dessa forma, as posições são limitadas em uma unidade com relação à posição do elemento aquecedor já posicionado e não podem assumir valores acima das dimensões da malha.

Com isso as opções de posição para o segundo elemento aquecedor são descritas na Figura 3.7.

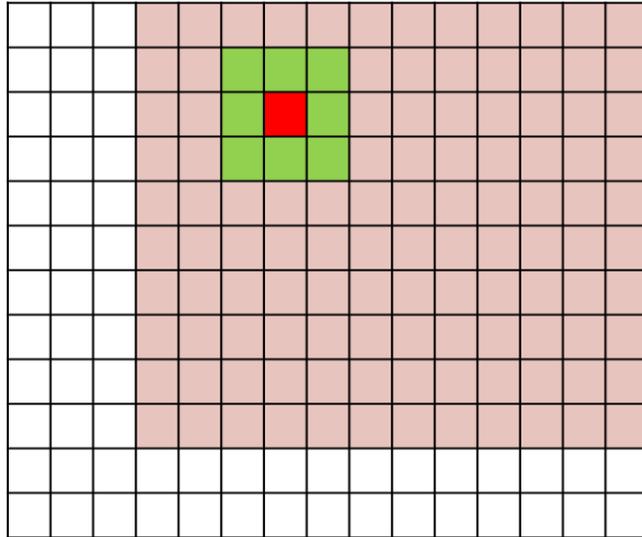


Figura 3.7 – Representação das opções de posição para o segundo elemento aquecedor, em verde.

O segundo elemento aquecedor deverá ser posicionado em um dos elementos marcados pela cor verde. A Figura 3.8 apresenta um filamento com dois elementos aquecedores posicionados.

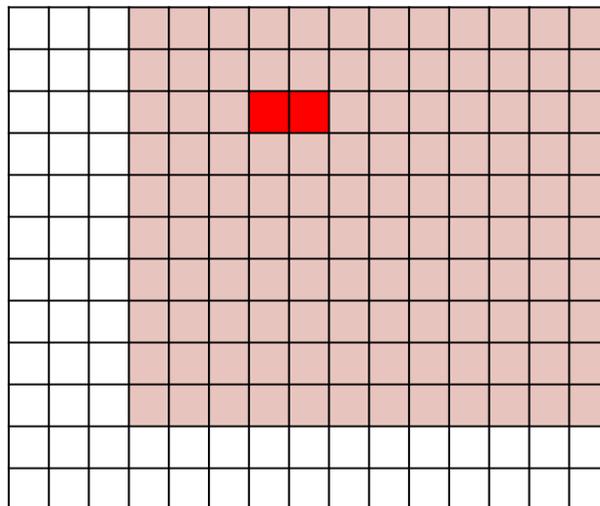


Figura 3.8 – Filamento aquecedor composto por dois elementos aquecedores.

Para o terceiro elemento aquecedor, as possibilidades de posição serão:

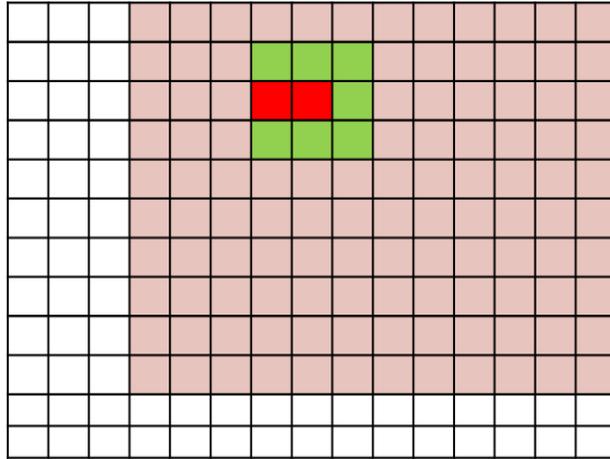


Figura 3.9 – Representação das opções de posição para o terceiro elemento aquecedor, em verde.

Dessa forma, um a um, os elementos do filamento aquecedor são posicionados. Caso o primeiro elemento aquecedor estivesse fixado em uma posição no contorno do domínio, as posições para o segundo elemento aquecedor são apresentadas em verde na Figura 3.10.

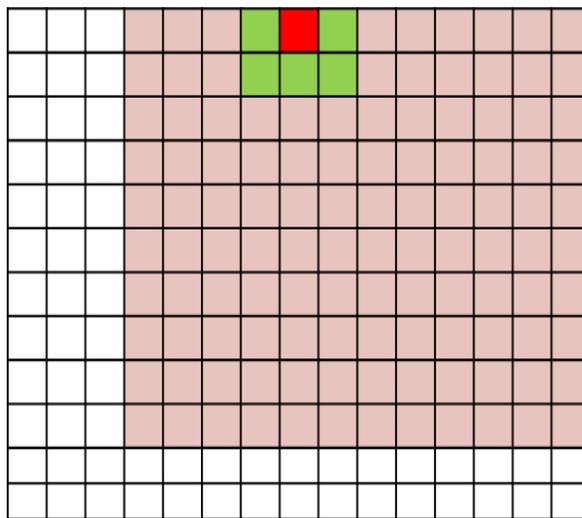


Figura 3.10 – Representação das opções de posição para o segundo elemento aquecedor, em verde.

A Figura 3.10 evidencia a restrição definida pela malha. Para determinar a posição de um dos elementos aquecedores o algoritmo GEO verifica cada uma das equações de restrição para então formar o filamento aquecedor e resolver o problema direto. As equações devem ser aplicadas desde o segundo elemento aquecedor até último elemento aquecedor. Para transformar a variável binária em decimal usa-se por fim, a Eq. (3.6).

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As soluções obtidas neste trabalho consideram que a cavidade possui razão de aspecto de  $W/L = 0,8$ ; e altura adimensional  $H/L = 0,2$ . Como já foi citado anteriormente, a superfície de projeto não cobre toda a extensão da base da cavidade, pois próximo aos cantos a superfície é afetada principalmente por reflexões das paredes laterais e não pela radiação proveniente dos elementos dos aquecedores. Assim, as dimensões da superfície de projeto são:  $L_d/L = 0,8$  e  $W_d/L = 0,6$ . As superfícies que compõem a cavidade são cinza e difusas. Como exemplo de aplicação, as emissividades para a superfície de projeto, paredes e aquecedores são  $\varepsilon_d = 0,9$ ,  $\varepsilon_w = 0,9$ ,  $\varepsilon_h = 0,5$ , respectivamente. Em função da simetria do problema, foi resolvido somente um quarto da cavidade.

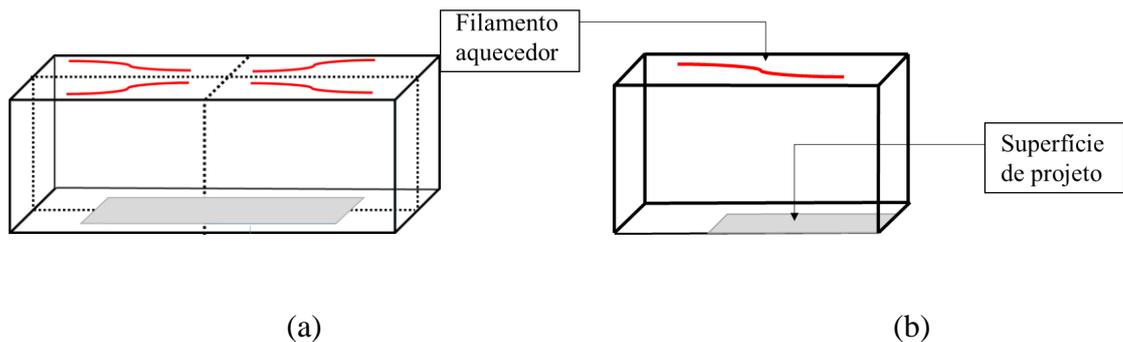


Figura 4.1 – (a) Cavidade tridimensional; e (b) representação da simetria, um quarto da cavidade.

Quanto às condições de contorno da superfície de projeto, são especificados fluxo de calor e temperatura uniformes nos elementos da superfície de projeto:  $q_{\text{prescrito}} = -3,22 \times 10^3 \text{ W/m}^2$  e  $T_{\text{prescrito}} = 673 \text{ K}$ , respectivamente, os valores são típicos de processos de aquecimento e também foram adotados por Mossi et al., 2008. Adimensionalizando-se em relação à temperatura prescrita na superfície de projeto ( $Q = q / \sigma T_{\text{prescrito}}^4$  e  $t = T / T_{\text{prescrito}}$ ), as condições de contorno ficam:  $t_{\text{prescrito}} = 1$  e  $Q_{\text{prescrito}} = -0,277$ . O sinal negativo no fluxo de calor surge da convenção de que calor adicionado ao sistema é positivo. Os elementos que não fazem parte da superfície de projeto ou não representam aquecedores são considerados perfeitamente isolados termicamente, ou seja,

$q_r = 0$ . Nos elementos que contêm aquecedores, a potência total prescrita é dividida pelo número de elementos que compõe o filamento.

A avaliação da solução é realizada em termos do desvio no cálculo do fluxo de calor em um elemento da superfície de projeto ( $Q_{r,jd}$ ),  $\gamma_{jd}$ , que pode ser avaliado pela equação:

$$\gamma_{jd} = \left| \frac{Q_{r,\text{prescrito}} - Q_{r,jd}}{Q_{r,\text{prescrito}}} \right| \quad (4.1)$$

A Eq.(4.1) é utilizada na solução direta para definir os desvios. Todos os resultados obtidos seguem a descrição acima. Logicamente outras configurações podem ser adotadas. Por fim, para validade da solução, é necessário avaliar a independência de malha, apresentada na próxima seção.

#### 4.1 Análise da qualidade de malha

A análise da qualidade de malha é um pré-requisito na validação de uma solução numérica. Em alguns casos a malha pode ser grosseira, em outros excessivamente refinada, portanto é importante realizar um estudo da independência de malha e verificar a quantidade de elementos necessários a serem utilizados na cavidade. Neste problema, basta analisar a independência de malha no problema direto, que realiza o cálculo utilizando o método das radiosidades (Seção 2.5.2), visto que o algoritmo de otimização busca a melhor solução através da repetição do cálculo do problema direto.

O problema direto utiliza a mesma cavidade apresentada anteriormente neste capítulo. O fluxo de calor na superfície de projeto foi analisado em dois pontos: o primeiro em uma extremidade da superfície inferior; e o segundo próximo do centro da superfície inferior, conforme a Figura 4.2. Para este cálculo foi prescrita os valores adimensionais de temperatura e fluxo de calor, assim a temperatura  $t_{\text{prescrita}} = 1$  e o fluxo de calor  $Q_{\text{prescrito}} = -0,277$ . Neste caso, todos os elementos da superfície superior foram considerados aquecedores. A Figura 4.3 apresenta os resultados obtidos.

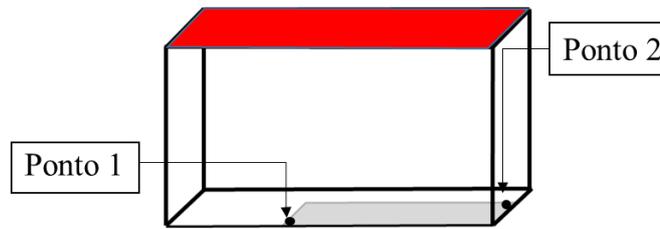


Figura 4.2 – Indicação dos pontos na superfície inferior para análise dos resultados.

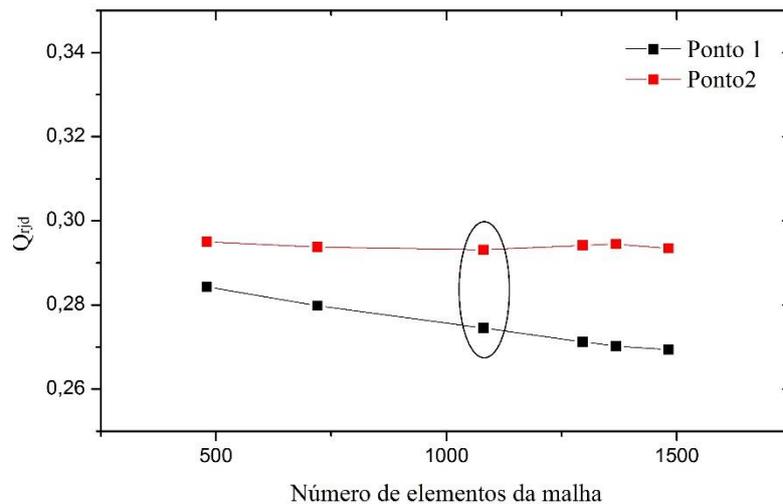


Figura 4.3 – Variação no fluxo de calor adimensional em dois pontos do domínio em função do número de elementos de área.

Conforme se observa na Figura 4.3, pode-se verificar que a variação no fluxo de calor adimensional em ambos os casos é pequena. Dessa forma, foi considerado que a malha com 1080 elementos era adequada, visto que uma malha ainda mais refinada, por exemplo 1596 elementos, dobra o tempo para a obtenção da solução. Utilizando um processador i5, 1.8GHz, 4 GB RAM, a solução com a malha de 1080 elementos é obtida em aproximadamente 0,35s, enquanto que para a malha com 1596 elementos a solução é obtida em 0,62s. Com isso a malha de 1080 elementos foi escolhida e as dimensões da cavidade são 15x12x6.

A malha influencia diretamente no cálculo do número de bits, Eq. (3.5), empregado no algoritmo GEO, pois restringe as posições dos aquecedores. Em função da malha empregada, o intervalo de variação da posição dos aquecedores em  $x$  e  $y$  é [1,15], [1,12], respectivamente. Somente o maior número de bits é utilizado para representar o problema, dessa forma serão quatro bits por variável em todos os casos e a precisão adotada  $p$  foi considerada igual a 1.

Por fim, com a definição das dimensões da cavidade, a superfície de projeto foi definida com dimensões  $12 \times 9$ , sendo assim com 108 elementos. O fluxo de calor do filamento aquecedor é determinado em função do número de elementos na superfície de projeto, ou seja a taxa de calor adimensional prescrita na superfície de projeto é de  $Q_{\text{prescrito}} = -0,277$ , sendo 108 elementos, a taxa de calor total, incidente na superfície deve ser de  $Q_{\text{prescrito}} = -0,277 \times 108$ , dessa forma:  $Q_{\text{prescrito,total}} = -29,916$ . Para cada caso analisado, o valor total da taxa de calor foi dividido pelo número de elementos aquecedores que formam o filamento e assim foi definido o valor do fluxo de calor em cada elemento aquecedor. Por exemplo, para um filamento composto por 10 elementos aquecedores, o fluxo de calor em cada elemento aquecedor é de  $Q_{\text{jh}} = 2,9916$ . Isso se deve à consideração de que os demais elementos de área da cavidade, ou seja, que não se encontram na superfície de projeto ou no filamento aquecedor, são perfeitamente adiabáticos. Este cálculo só pôde ser realizado desta forma porque a malha da cavidade não possui maior refinamento em determinados pontos, ela possui dimensões iguais para todos os elementos da cavidade. É necessário definir o fluxo de calor nos elementos aquecedores para resolver o problema direto. Após a obtenção da posição do filamento através do algoritmo GEO, resolve-se a transferência radiativa na cavidade para se calcular o fluxo de calor prescrito na superfície de projeto, determinando-se finalmente o desvio em relação ao fluxo prescrito.

#### 4.2 Definição do parâmetro $\tau_g$

O parâmetro  $\tau_g$  controla a inversão de bits no algoritmo GEO. Existe um valor de  $\tau_g$  que, de forma mais eficiente, minimiza a função objetivo. Este parâmetro é fundamental na obtenção da melhor solução para o problema, e deve ser encontrado para aplicação do algoritmo GEO. Para determinar o melhor valor de  $\tau_g$  foi realizado um estudo para cada caso e o parâmetro foi mapeado no intervalo  $[0,50; 2,50]$  com passos de 0,25. Este intervalo foi definido nos trabalhos de Cassol et al., 2008, e Cassol et al., 2009, no qual foram apresentados problemas semelhantes de cavidade radiativa, sendo verificado que o parâmetro  $\tau_g$  do algoritmo GEO está normalmente contido neste intervalo. Além do parâmetro  $\tau_g$  deve ser analisado o número de repetições do código a fim de garantir o melhor resultado que o algoritmo pode fornecer.

O número de avaliações da função objetivo também deve ser avaliado na obtenção da solução, estando relacionado ao número de vezes que os bits de uma sequência binária são invertidos. Por exemplo, se uma sequência de dez bits representa um problema de otimização e são realizadas 1000 avaliações da função objetivo, isso significa que cada um dos bits foi invertido cem vezes para a obtenção da solução.

O número de repetições consiste no número de execuções independentes do código. Em cada execução os bits são inicializados aleatoriamente, assim, cada execução resultará em uma solução diferente, tanto para a posição do filamento aquecedor quanto para o valor mínimo da função objetivo.

As próximas seções apresentarão as soluções obtidas para um filamento aquecedor com 20, 30, 40 e 50 elementos aquecedores. Para cada caso, as variáveis de otimização serão apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Variáveis de otimização.

Número de aquecedores	Número de variáveis	Número de bits por variável	Comprimento da sequência binária
20	40	4	160
30	60	4	240
40	80	4	320
50	100	4	400

O número de variáveis,  $N$ , é dado por duas vezes o número de aquecedores; o número de bits por variável  $m$ , foi calculado utilizando a Equação (3.5), onde a precisão foi considerada  $p=1$ , visto que a busca pelas posições dos elementos aquecedores são números inteiros. O comprimento da sequência binária,  $L$ , é calculado pelo produto do número de variáveis,  $N$ , e pelo número de bits ( $L = N \cdot m$ ).

Todas as soluções apresentadas a seguir foram obtidas com um processador Quad-Core AMD Opteron 2.3 GHz e 128GB RAM.

### 4.3 Solução com 20 elementos aquecedores

A solução obtida para vinte elementos aquecedores possui quarenta variáveis, ou seja as posições  $i$  e  $j$  para cada um dos aquecedores. As posições estão limitadas nos intervalos  $[1,15]$  e  $[1,12]$ . Portanto, serão necessários quatro bits por variável para assegurar a precisão de  $p = 1$ .

Como todas as variáveis são codificadas em uma única sequência binária, esta terá cento e sessenta bits.

Primeiramente é necessário definir o número de avaliações da função objetivo. Ao se estabelecer o critério de parada em 1.000.000 de avaliações da função objetivo, pode-se verificar pela Figura 4.4 que o valor da função objetivo converge em aproximadamente 300.000 avaliações. Neste caso específico, da Figura 4.3, o parâmetro  $\tau$  utilizado foi  $\tau_g = 1$ .

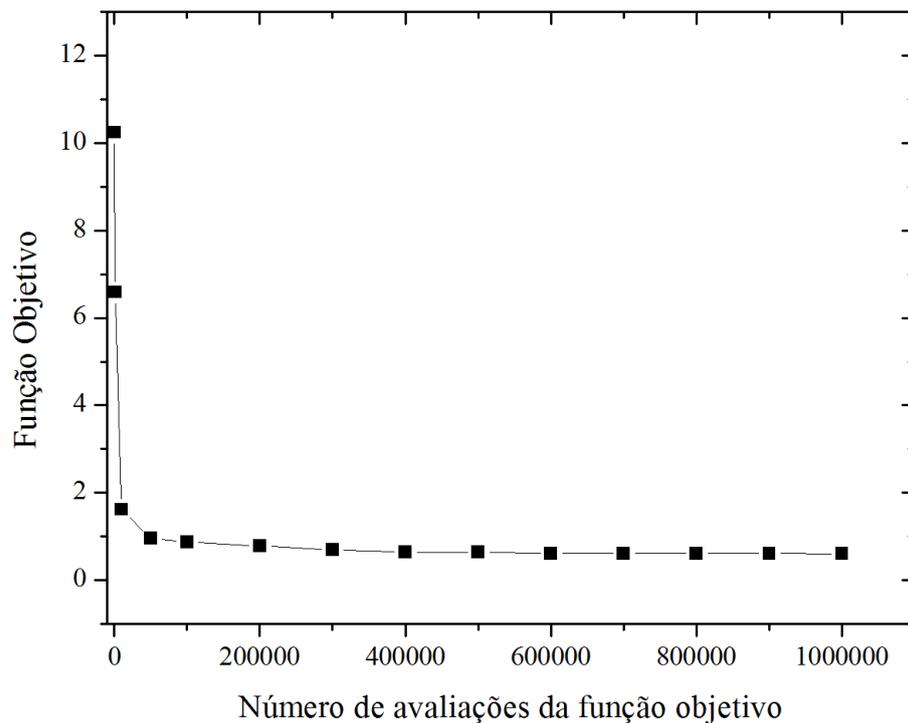


Figura 4.4 – Número de avaliações da função objetivo.

Com isso, pode-se assumir que 500.000 avaliações da função objetivo são suficientes para a convergência da solução. A varredura do parâmetro  $\tau_g$  foi feita no intervalo  $[0,50; 2,50]$  com passos de 0,25, e dez repetições para cada valor de  $\tau_g$ . Esse último procedimento foi realizado para tornar o resultado independente da semente inicial. Com os resultados obtidos para função objetivo de cada repetição, foi calculada a média da função objetivo para cada valor de  $\tau_g$ , conforme mostra a Figura 4.5.

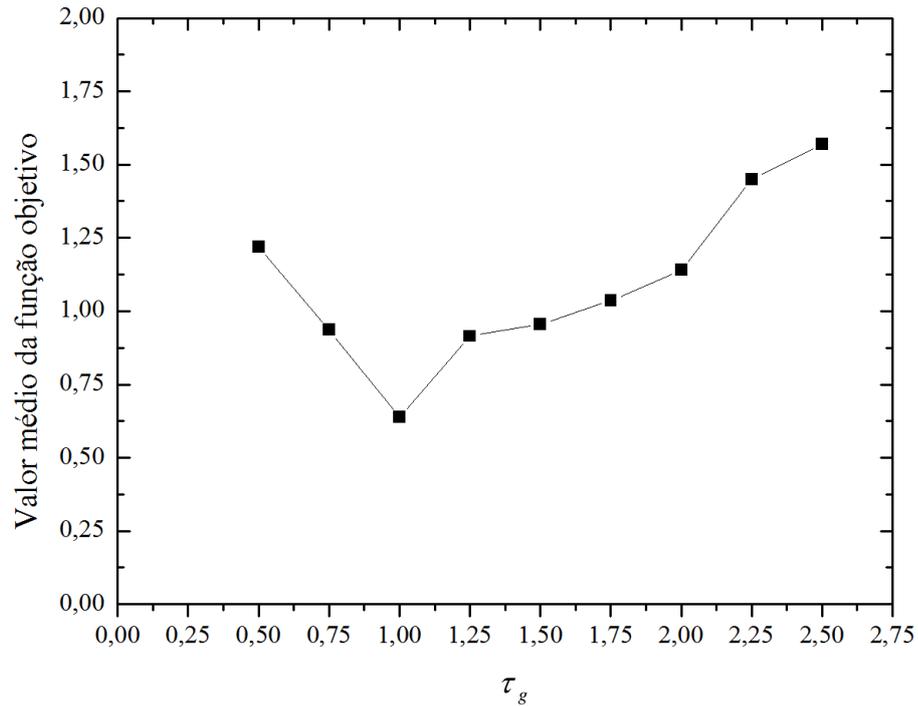


Figura 4.5 – Avaliação do parâmetro  $\tau_g$  para o caso com 20 elementos aquecedores.

Através da Figura 4.5, pode-se perceber que o caso em que  $\tau_g$  é igual a 1,0 apresenta o menor valor da função objetivo, que relaciona a diferença entre o fluxo de calor calculado e o fluxo de calor prescrito, conforme definido pela Eq. (3.4). Quanto menor o valor da função objetivo, menor o desvio relacionado à solução. Uma vez determinado o valor do parâmetro  $\tau_g$ , deve-se analisar cada repetição para encontrar a melhor configuração, com o menor valor da função objetivo. Cada repetição inicia com uma semente diferente, portanto há diferenças entre os valores obtidos para a função objetivo mesmo quando se adota um determinado valor de  $\tau_g$ , como mostra a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Valor da função objetivo para cada semente.

Semente	Valor da função objetivo
1	0,5783
2	0,5975
3	0,5683
4	0,5975
5	0,7002
6	0,7672
7	0,5802
8	0,5700
9	0,5374
10	0,6065

Com a Tabela 4.2, pode-se identificar que a nona semente apresenta o menor valor da função objetivo. Esta solução será escolhida para obter o resultado final das posições dos aquecedores e fluxo de calor na superfície inferior. Para cada caso da Tabela 4.2 a função objetivo foi avaliada 1.000.000 de vezes, esse acréscimo foi feito para obtenção do resultado final. A Figura 4.6 apresenta as posições dos elementos aquecedores que formam o filamento na superfície superior.

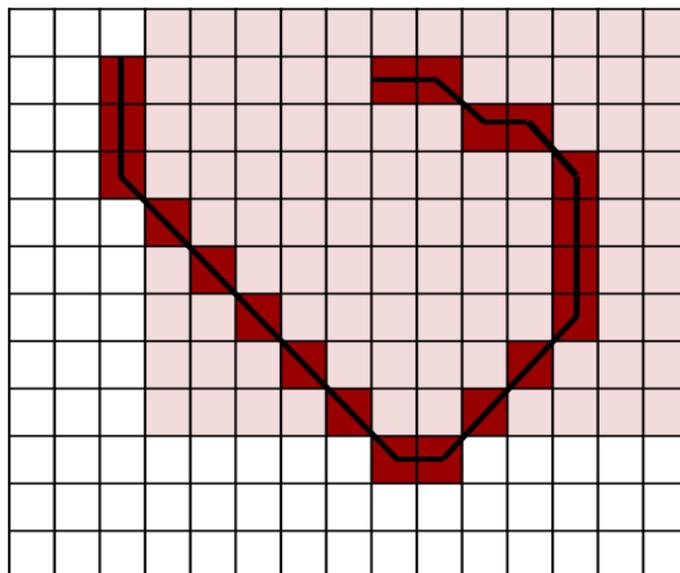


Figura 4.6 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho). A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior.

Com a Figura 4.6, pode-se perceber que os elementos aquecedores se espalham pela superfície superior. O fluxo de calor na superfície de projeto é obtido ao resolver novamente o problema direto, com as posições do filamento acima descritas e o fluxo de calor de cada elemento aquecedor dada por  $Q_{jh} = 1,4958$ . O fluxo de calor obtido na superfície de projeto está representado na Figura 4.7, abaixo. Deve-se salientar que esta solução foi obtida para um quarto da cavidade, devido à simetria do problema.

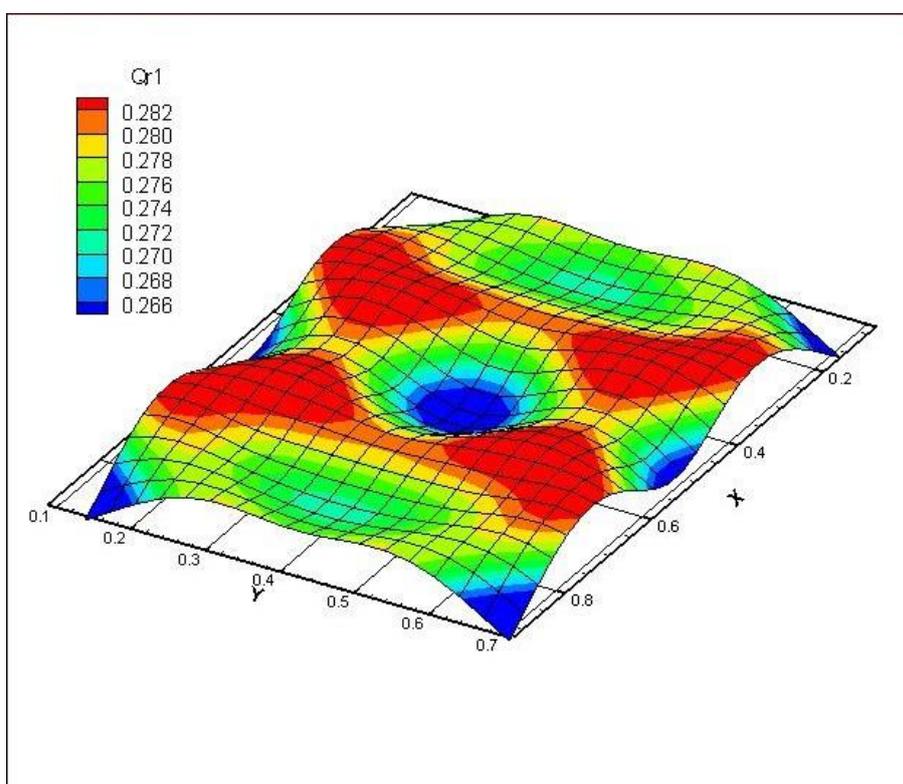


Figura 4.7 – Fluxo de calor na superfície de projeto para o caso de 20 elementos aquecedores.

De acordo com a Figura 4.7, pode-se perceber que o fluxo de calor na superfície de projeto não é uniforme, para comprovar essa observação, os desvios relacionados a esta solução são apresentados na Tabela 4.3.

Na Figura 4.6, representa-se a montagem de um filamento nas posições correspondentes às zonas em formato quadrado que formam a configuração obtida pela solução inversa. O problema que surge é que, como o filamento representado possui uma espessura inferior à espessura da zona, o fluxo de calor efetivo na superfície de projeto, calculado para o filamento assim disposto, pode se desviar da solução apresentada na Figura 4.7. Na parte final deste

capítulo, será apresentada uma análise que, para uma cavidade com as dimensões estudadas, mostra que a configuração formada por zonas quadradas e o filamento de menor espessura resultariam em fluxos muito próximos.

Tabela 4.3 – Desvios relacionados a solução.

Desvio médio (%)	1,81
Desvio máximo (%)	9,81

A Tabela 4.3 apresenta os valores dos desvios, o desvio máximo pode ser considerado alto, próximo dos 10%. O tempo para obtenção desta solução foi de 6,90 horas. Sendo essa a melhor solução para o caso de 20 aquecedores, a opção para diminuir o desvio consiste em aumentar o número de aquecedores, portanto a próxima seção apresenta a solução obtida com 30 elementos aquecedores.

Ao utilizar a terceira semente, que apresenta o segundo menor valor para função objetivo pode-se perceber que há outra distribuição para o filamento aquecedor.

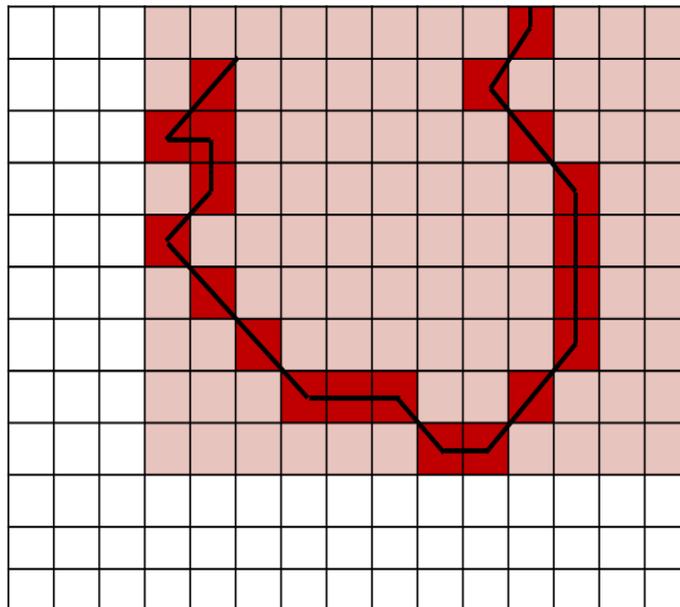


Figura 4.8 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho). A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior.

A segunda melhor solução acaba por se tornar mais interessante, visto que uma das extremidades do filamento aquecedor está ligado ao eixo de simetria. Dessa forma, pode-se construir uma cavidade com apenas dois filamentos aquecedores, como mostra a Figura 4.9.

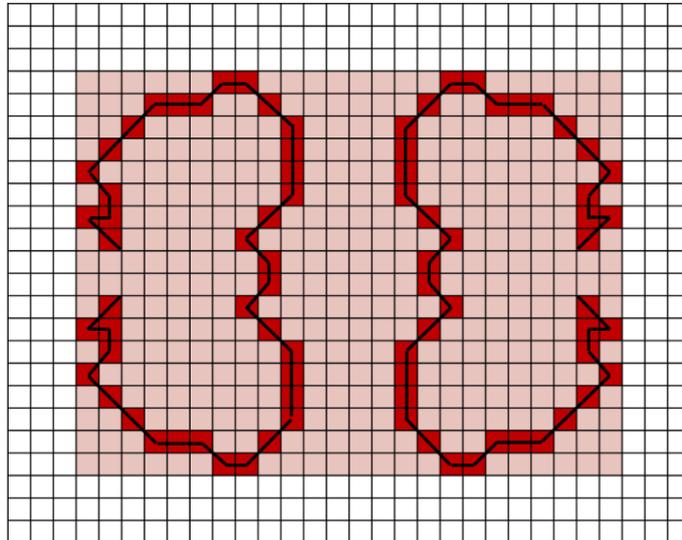


Figura 4.9 – Representação dos filamentos aquecedores (em preto) da cavidade completa. A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior.

A Figura 4.9 exemplifica como seriam construídos os dois filamentos aquecedores para uma cavidade completa. Com isso é possível identificar a aplicabilidade da solução obtida.

O fluxo de calor na superfície de projeto, em um quarto da cavidade, é apresentado na Figura 4.10.

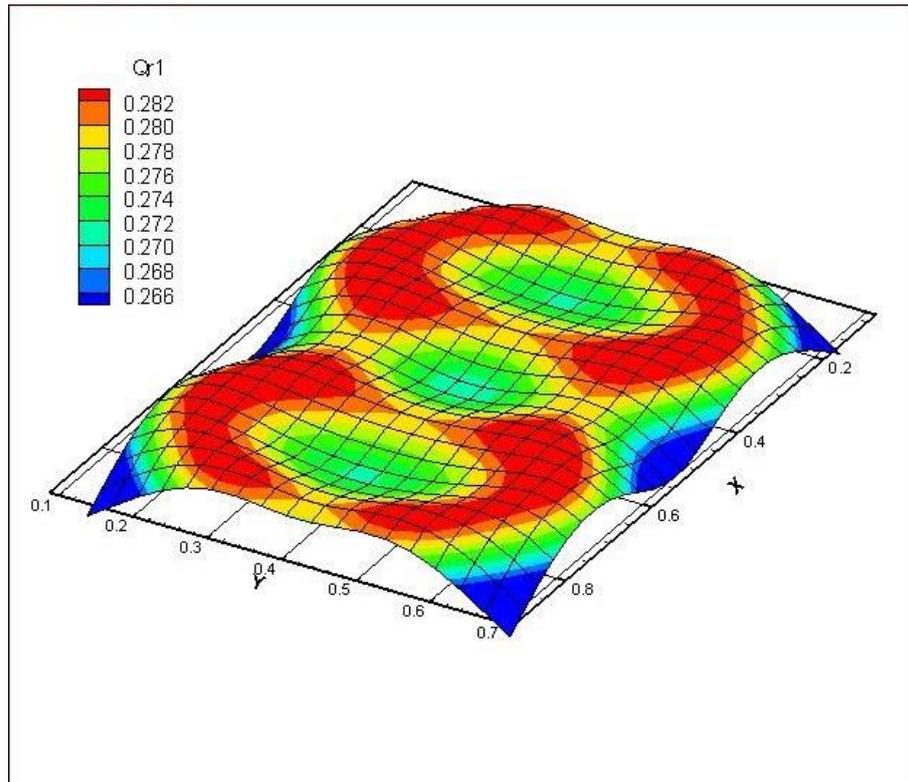


Figura 4.10 – Fluxo de calor na superfície de projeto para o caso de 20 elementos aquecedores.

A Figura 4.10 apresenta o fluxo de calor na superfície de projeto para a segunda melhor solução. Ao comparar com a Figura 4.6 nota-se algumas diferenças na distribuição do fluxo de calor. Para poder comparar as soluções a Tabela 4.4 apresenta os desvios relacionados a esta solução.

Tabela 4.4 – Desvios relacionados a solução.

Desvio médio (%)	1,93
Desvio máximo (%)	12,35

O desvio máximo da segunda melhor semente apresentou um acréscimo de 3% com relação ao caso anterior. Assim, a primeira solução apresentou um resultado no qual a distribuição do fluxo de calor na superfície de projeto possui maior uniformidade, enquanto o segundo caso apresentou uma solução para cavidade com dois filamentos aquecedores ao invés de quatro, mas com a desvantagem de apresentar um desvio máximo maior. O segundo caso foi apresentado para exemplificar como seria o projeto de uma cavidade completa com apenas dois filamentos.

#### 4.4 Solução com 30 elementos aquecedores

Para obter a solução com 30 aquecedores deve ser realizada a varredura do parâmetro  $\tau$ , no intervalo  $[0,50; 2,50]$  com passos de 0,25, e dez repetições para cada valor de  $\tau_g$ . O número de avaliações da função objetivo foi de 500.000. Assim, o tempo computacional se manteve em 6,92 horas para cada valor de  $\tau_g$ . Com os resultados obtidos para função objetivo de cada repetição foi calculada a média da função objetivo para cada valor de  $\tau_g$ , conforme mostra a Figura 4.11.

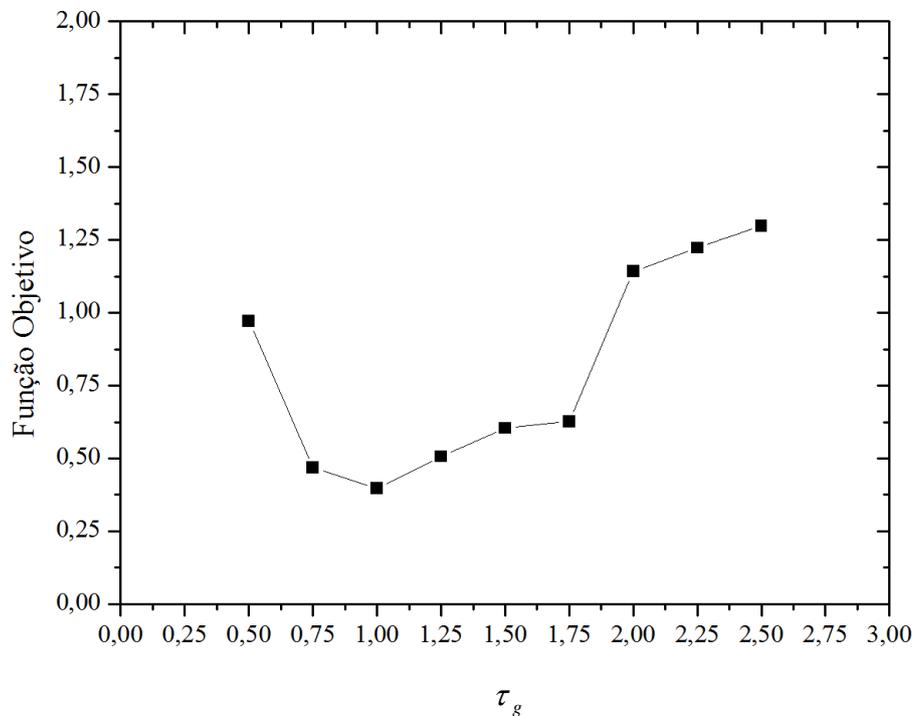


Figura 4.11 – Avaliação do parâmetro  $\tau_g$  para o caso com 30 elementos aquecedores.

A avaliação do parâmetro  $\tau_g$  nesse caso não resultou em um valor mínimo da função objetivo tão expressivo quanto no caso anterior, embora o valor tenha se mantido igual a 1,0. Analisando as dez repetições para este caso, pode-se identificar a melhor solução na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Valor da função objetivo para cada semente.

Semente	Valor da função objetivo
1	0,2489
2	0,3311
3	0,2902
4	0,6332
5	0,645
6	0,3373
7	0,3286
8	0,6302
9	0,3592
10	0,2176

O menor valor da função objetivo indica a melhor solução. Dessa forma a décima semente apresenta a melhor solução. Pode-se observar que o valor da função objetivo sofreu um decréscimo, sendo aproximadamente metade do valor obtido no melhor caso com 20 elementos aquecedores. As posições dos aquecedores são apresentadas na Figura 4.12.

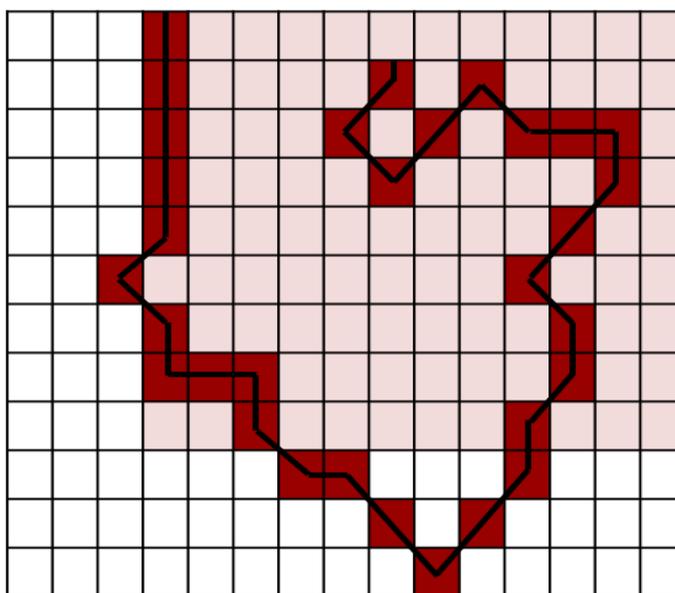


Figura 4.12 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho).

Neste caso a melhor solução já possibilita que a cavidade completa seja construída com apenas dois filamentos aquecedores. Da mesma forma que o segundo caso de vinte elementos

aquecedores, nesta configuração uma extremidade do filamento está ligada ao eixo de simetria. O fluxo de calor em cada elemento aquecedor, neste caso é de  $Q_{jh} = 0,9972$  e o fluxo de calor na superfície de projeto é dado pela Figura 4.13.

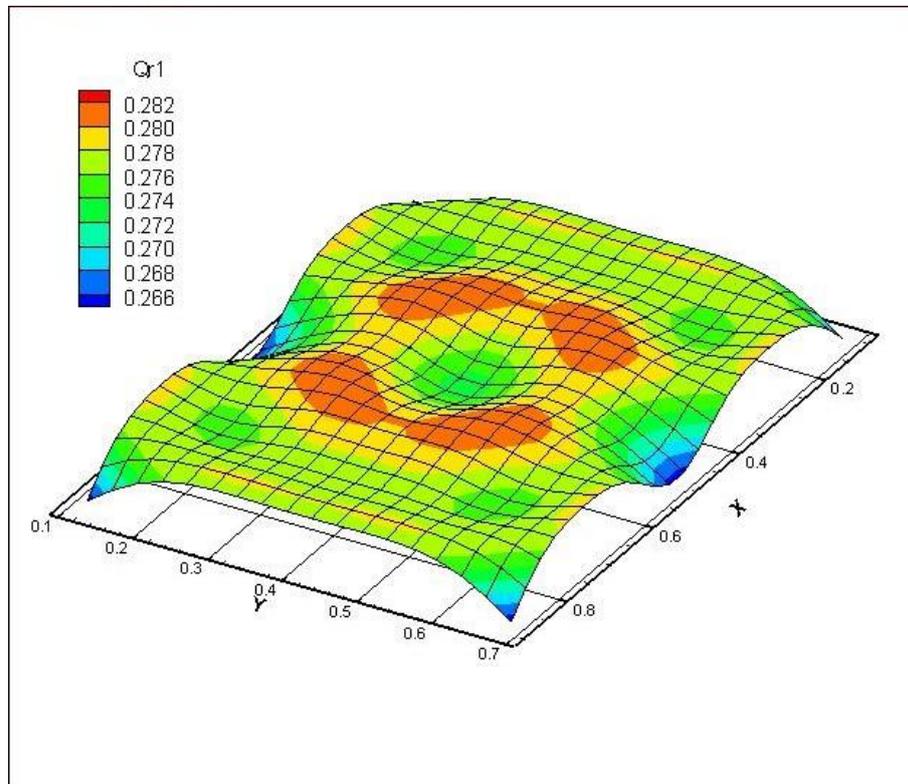


Figura 4.13 – Fluxo de calor na superfície de projeto.

Há uma melhora considerável do caso de 20 elementos aquecedores para o caso com 30 elementos aquecedores, pois o fluxo de calor na superfície de projeto apresenta maior uniformidade no segundo caso. Os desvios relacionados a esta solução são apresentados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Desvios relacionados a solução.

Desvio médio (%)	0,73
Desvio máximo (%)	4,62

Como era esperado, devido à redução da função objetivo, o desvio da solução foi reduzido à metade. Esse é um resultado interessante, pois uma solução com desvios máximos locais inferiores a 5% em problemas de projetos envolvendo cavidades radiantes é considerada satisfatória. Com este resultado, pode-se supor que, acrescentando elementos aquecedores, a

solução pode se tornar ainda melhor. Dessa forma, a próxima seção apresenta a solução com 40 elementos aquecedores.

#### 4.5 Solução com 40 aquecedores

Ao acrescentar o número de elementos aquecedores, a demanda computacional sofreu um pequeno acréscimo, aproximadamente 0,86% e o tempo para a obtenção da solução passou a 6,96 horas, mantendo o número de avaliações da função objetivo em 500.000.

Para obter a solução com 40 aquecedores, primeiramente, deve ser realizada a varredura do parâmetro  $\tau_g$ , seguindo os mesmos procedimentos dos outros casos, no intervalo [0,50; 2,50] com passos de 0,25, e dez repetições para cada valor de  $\tau_g$ . Com os resultados obtidos para função objetivo de cada repetição, foi calculada a média da função objetivo para cada valor de  $\tau_g$ , conforme mostra a Figura 4.14.

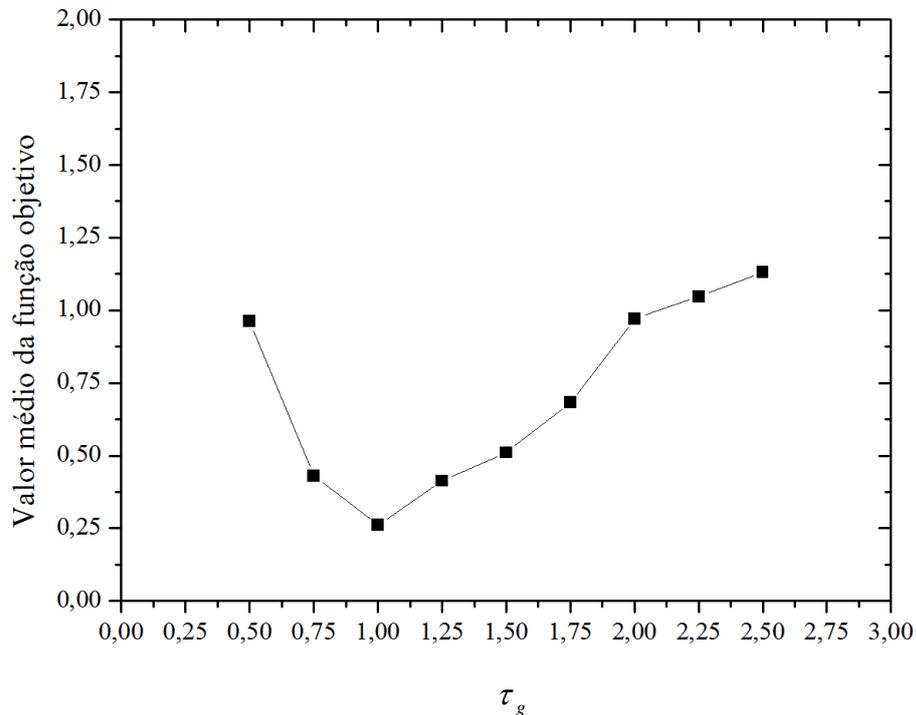


Figura 4.14 – Avaliação do parâmetro  $\tau_g$  para o caso com 40 elementos aquecedores.

A avaliação do parâmetro  $\tau_g$ , neste caso, possui um valor mínimo da função objetivo expressivo novamente em  $\tau_g$  igual a 1,0. Analisando-se as dez repetições para este caso, avaliando 1.000.000 a função objetivo, pode-se identificar a melhor solução na Tabela 4.7.



O resultado obtido contém os elementos aquecedores espalhados na superfície superior, o fluxo de calor em cada elemento aquecedor foi de  $Q_{jh} = 0,7479$  e o fluxo de calor obtido na superfície de projeto é apresentado pela Figura 4.16.

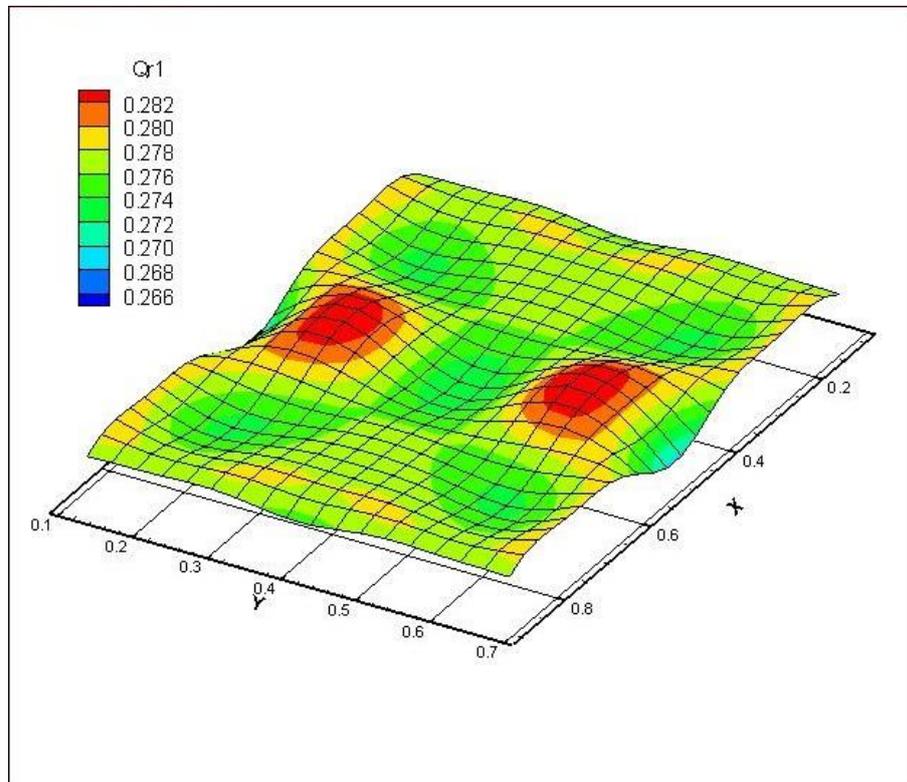


Figura 4.16 – Fluxo de calor na superfície de projeto.

Com 40 elementos aquecedores pode-se perceber que o fluxo de calor na superfície de projeto possui maior uniformidade do que o caso com 30 elementos aquecedores. Os desvios relacionados a esta solução são apresentados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Desvios relacionados a solução.

Desvio médio (%)	0.63
Desvio máximo (%)	2.86

O desvio médio diminuiu pouco em relação ao caso anterior, já o desvio máximo sofreu um decréscimo considerável, mantendo-se abaixo de 3%. Esta solução implica em quatro filamentos na cavidade completa. Porém, a solução obtida pela quarta semente apresenta um filamento com uma extremidade no eixo de simetria, portanto exigindo apenas dois aquecedores. A configuração da posição do filamento é apresentada na Figura 4.17.

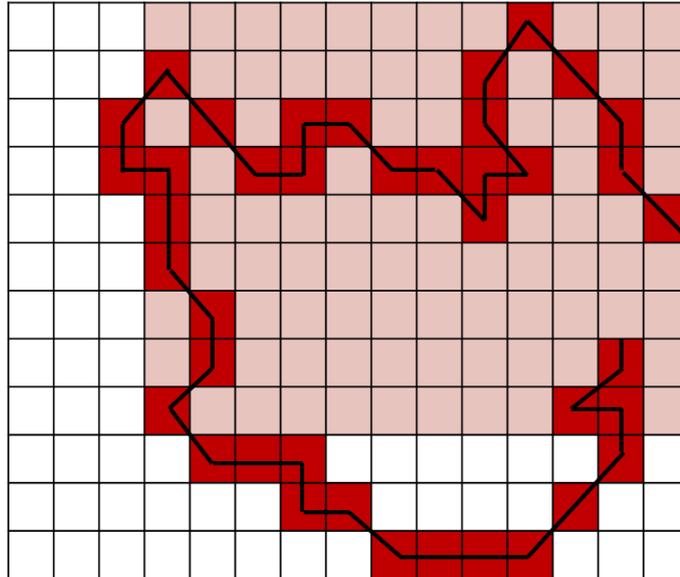


Figura 4.17 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho).

Apresenta-se esta configuração para indicar a possibilidade de utilização de apenas dois filamentos na cavidade completa. O fluxo de calor na superfície de projeto é apresentado na Figura 4.18.

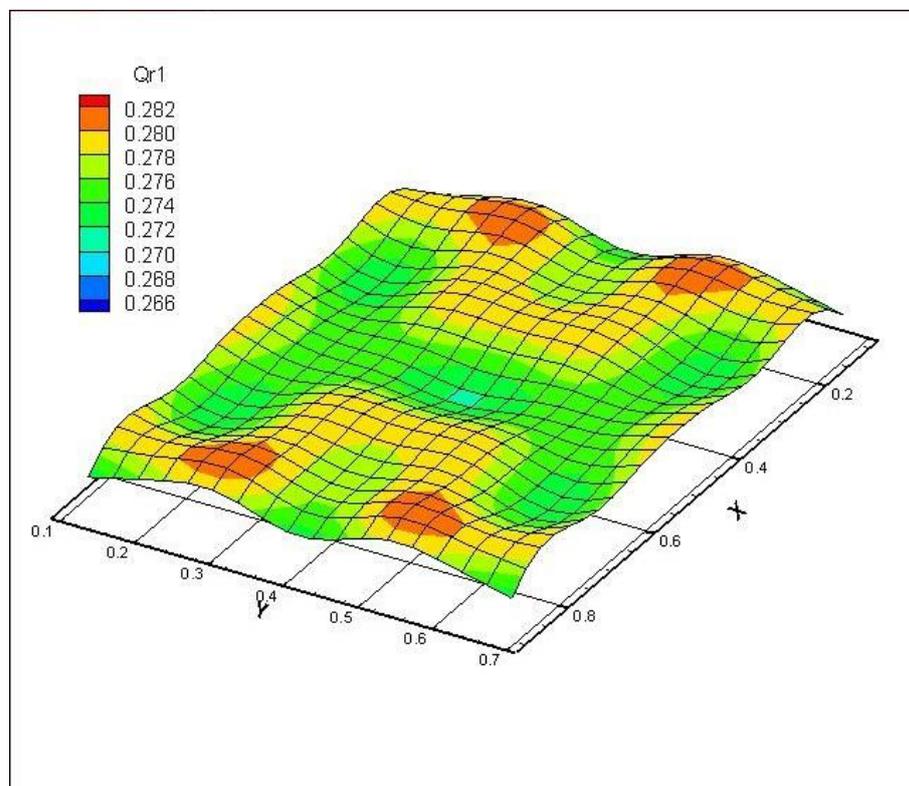


Figura 4.18 – Fluxo de calor na superfície de projeto.

A Figura 4.18 indica que o fluxo de calor apresenta maior uniformidade na superfície de projeto. Os desvios relacionados a solução são apresentados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Desvios relacionados a solução.

Desvio médio (%)	0,72
Desvio máximo (%)	1,87

Com a Tabela 4.9 pode-se perceber que o desvio máximo relacionado a solução sofreu um decréscimo de cerca de 1% com relação a segunda semente, entretanto o desvio médio sofreu um acréscimo. Isso ocorre porque a função objetivo das duas soluções foi otimizada para um valor próximo, no primeiro caso era 0,1904 e no segundo caso 0,2161. No entanto o filamento aquecedor obtido como solução em cada um dos casos apresenta diferentes posições. O primeiro filamento aquecedor gerou pontos em que o fluxo de calor na superfície de projeto desviou do valor prescrito, aumentando o desvio máximo da solução. Por outro lado, no segundo caso, o filamento aquecedor gerou fluxo de calor na superfície de projeto com poucos desvios diminuindo o desvio máximo. Este resultado é positivo, pois apresenta baixos desvios relacionados e utiliza apenas dois filamentos aquecedores para a cavidade completa.

Assim, de forma geral, ao acrescentar elementos aquecedores, os desvios da solução diminuiriam. Com isso pode-se supor que a solução com 50 elementos aquecedores apresentaria um desvio ainda menor. Esta solução é apresentada na próxima seção.

#### 4.6 Solução com 50 aquecedores

Ao acrescentar o número de elementos aquecedores, aumentou novamente o tempo para a obtenção da solução, neste caso, para 7,18 horas. Da mesma forma que os casos anteriores, para obter a solução com 50 aquecedores, primeiramente, deve ser realizada a varredura do parâmetro  $\tau_g$ , seguindo os mesmos procedimentos dos outros casos, no intervalo [0,50; 2,0] com passos de 0,25, e dez repetições para cada valor de  $\tau_g$ . O número de avaliações da função objetivo foi de 500.000. Com os resultados obtidos para função objetivo de cada repetição foi calculada a média da função objetivo para cada valor de  $\tau_g$ , conforme mostra a Figura 4.19.

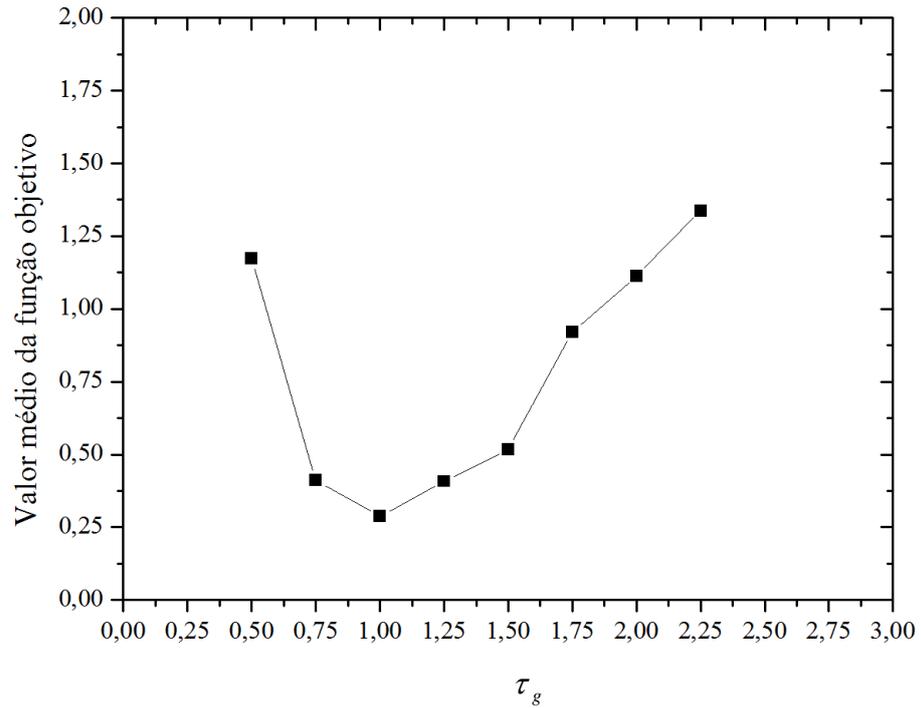


Figura 4.19 – Avaliação do parâmetro  $\tau_g$  para o caso com 50 elementos aquecedores.

A avaliação do parâmetro  $\tau_g$ , neste caso, possui um valor mínimo da função objetivo expressivo novamente em  $\tau_g$  igual a 1,0. Analisando as dez repetições para este caso, realizando 1.000.000 de avaliações na função objetivo, pode-se identificar a melhor solução na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Valor da função objetivo para cada semente.

Semente	Valor da função objetivo
1	0,1186
2	0,2752
3	0,1795
4	0,1408
5	0,1861
6	0,1504
7	0,1811
8	0,24972
9	0,3433
10	0,1820

Para alguns casos a função objetivo sofreu um decréscimo, com relação ao caso com 40 elementos aquecedores, entretanto, para algumas sementes, a função objetivo aumentou. Assim, foi utilizada a solução obtida na primeira semente. A Figura 4.20 ilustra a posição do filamento aquecedor fornecido por esta solução.

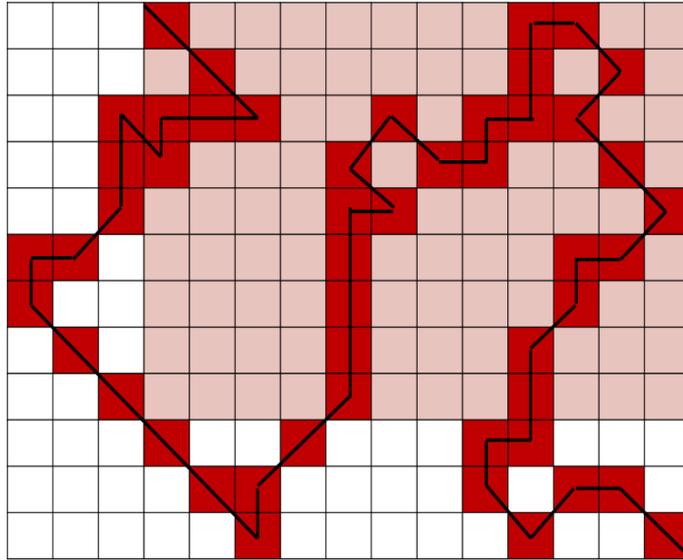


Figura 4.20 – Representação do filamento aquecedor (em preto) e posições dos elementos que formam o filamento (em vermelho).

Neste caso o número de elementos do aquecedor ocupa aproximadamente um terço da cavidade, é necessário que o filamento se dobre. Esta solução se torna interessante devido ao fato das extremidades do filamento estarem posicionadas sobre as linhas de simetria. Com esta solução toda cavidade poderia ser projetada com um único filamento aquecedor, como mostra a Figura 4.21.

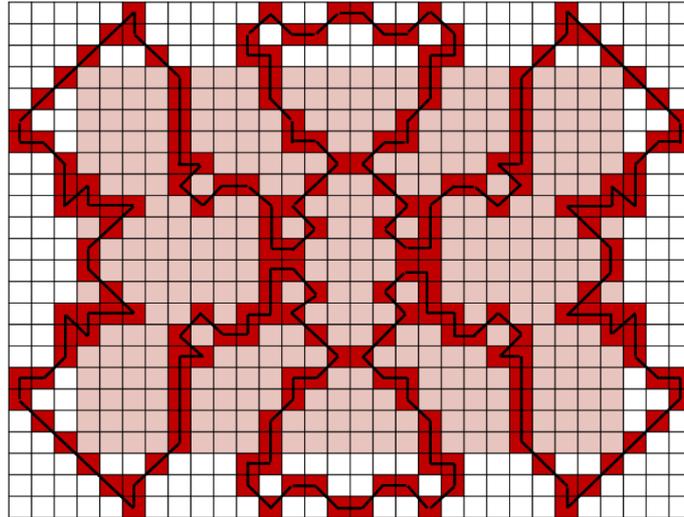


Figura 4.21 – Representação de um único filamento aquecedor (em preto) da cavidade completa. A área sombreada representa a posição da superfície de projeto, na superfície inferior.

O fluxo de calor em cada elemento aquecedor foi de  $Q_{jh} = 0,59832$  e o resultado obtido na superfície de projeto, para um quarto da cavidade, é dado pela Figura 4.22.

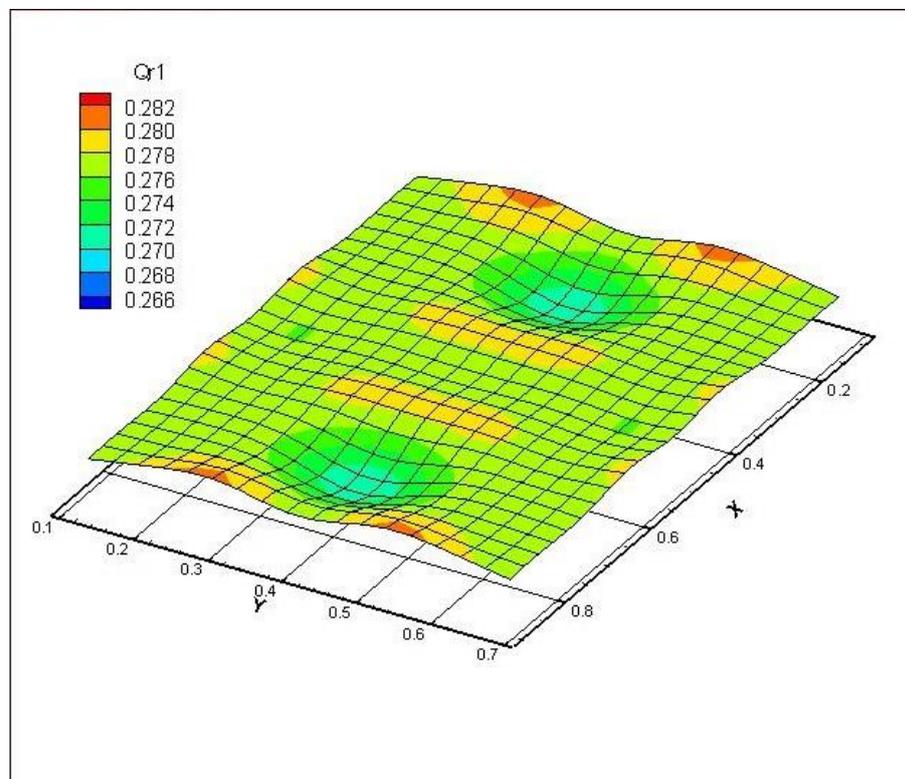


Figura 4.22 – Fluxo de calor na superfície de projeto.

Com 50 elementos aquecedores, pode-se perceber que o fluxo de calor na superfície de projeto possui maior uniformidade em boa parte da superfície de projeto, entretanto, nas bordas há uma variação do fluxo de calor, em alguns pontos maior e em outros apresenta valores menores, esta variação faz com que aumente o desvio máximo da solução e diminua o desvio médio, como mostra a Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Desvios relacionados a solução.

Desvio médio (%)	0,39
Desvio máximo (%)	2,43

Ainda que o desvio máximo seja maior neste caso, seu valor é inferior a 2,5%. Pode-se afirmar que esta é uma solução completa, com o filamento aquecedor bem posicionado e pequenos desvios relacionados.

Há uma possível explicação para o aumento do desvio máximo relacionada a quantidade de elementos aquecedores. Sabe-se que uma solução em que todos os elementos da superfície superior são aquecedores não apresenta bons resultados. Assim, a solução com 50 elementos aquecedores pode estar se aproximando do limite do número de elementos aquecedores no qual é possível obter uma solução satisfatória. Esta hipótese pode ser comprovada em trabalhos futuros ao acrescentar um número maior de elementos aquecedores e observar os resultados.

Considerando-se todos os dados apresentados, pode-se perceber que as melhores soluções, considerando todos os filamentos com potência fixa, foram obtidas para os casos com 40 e 50 elementos aquecedores. O caso com 40 elementos aquecedores apresentou um desvio máximo inferior a 2%, considerado um desvio pequeno neste tipo de problema, além disso a extremidade do filamento aquecedor posicionada sobre a linha de simetria permite que a cavidade seja projetada com dois filamentos aquecedores e não quatro. No caso em que o filamento aquecedor foi composto por 50 elementos aquecedores há um acréscimo no desvio máximo, mas que ainda se mantém inferior a 2,5%, e há a diminuição do desvio médio, para aproximadamente 0,4%. Esta solução permite que a cavidade seja projetada com um único filamento e este é o principal aspecto positivo deste caso.

#### **4.7 Estudo do fator de forma**

O fator de forma utilizado na obtenção da solução, apresentado na Seção 2.5.1, considera fatores de forma entre elementos de formato quadrado, conforme a malha

computacional adotada. Assim, as soluções apresentadas nas seções anteriores apresentam filamentos compostos por elementos aquecedores quadrados com as mesmas dimensões da malha da cavidade. O formato do aquecedor obtido, contudo, pode não ser compatível com aqueles utilizados na prática, de largura mais fina.

Esta seção visa demonstrar que a solução obtida é válida para elementos aquecedores com largura inferior às dimensões da malha, ampliando a aplicabilidade da solução. A Figura 4.23 apresenta a zona aquecedora, o caso em que o elemento aquecedor preenche toda dimensão da malha e o filamento aquecedor, com dimensões inferiores às dimensões da malha.

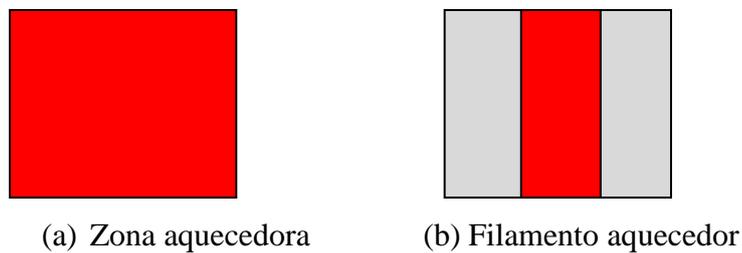


Figura 4.23 – Comparação entre a zona aquecedora (a) e o filamento aquecedor (b)

No lado (b) da Figura 4.23 o filamento aquecedor é representado em vermelho, e a área restante, em cinza, é considerada como parede isolada. Para verificar a diferença entre o fator de forma no caso (a) e (b) foram realizados dois estudos. Primeiramente, para verificar a influência da dimensão do filamento aquecedor, foi considerado um filamento com uma única dimensão, e então foram testados alguns valores para verificar se havia alterações significativas. Com o resultado foi realizada a segunda parte do estudo, em que foi deduzida uma nova expressão para o fator de forma, que foi aplicada no código direto.

Assim, considerando a configuração geométrica apresentada na Figura 4.24, foi utilizada a equação abaixo para o fator de forma:

$$F_{i-j} = \frac{\sqrt{(W_f + W_{jd})^2 + 4} - \sqrt{(W_{jd} - W_f)^2 + 4}}{2 \cdot W_{jd}} \quad (4.2)$$

A Equação 4.2 foi retirada de Siegel e Howell, 2002, na qual  $W_f = w_f / L$ ,  $W_{jd} = w_{jd} / L$  e  $L$ , conforme a Figura 4.24, representa a distância entre as superfícies.

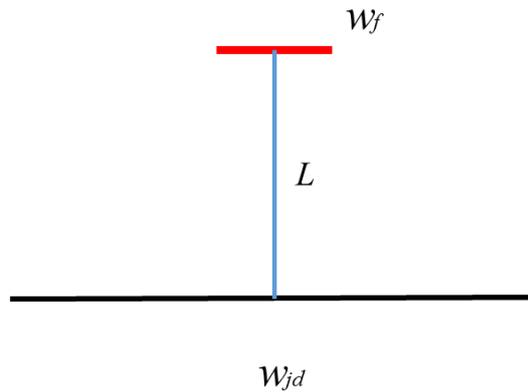


Figura 4.24 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto.

Dessa forma foram testadas diferentes dimensões para  $w_f$  e  $L$ , estes valores são diferentes das dimensões da cavidade apresentadas na definição do problema, pois o objetivo é verificar a influência da dimensão da superfície aquecedora no fator de forma.

No primeiro caso,  $L=1,0$  - uma unidade adimensional. A Figura 4.25 apresenta o resultado ao variar as dimensões de  $w_f$  :

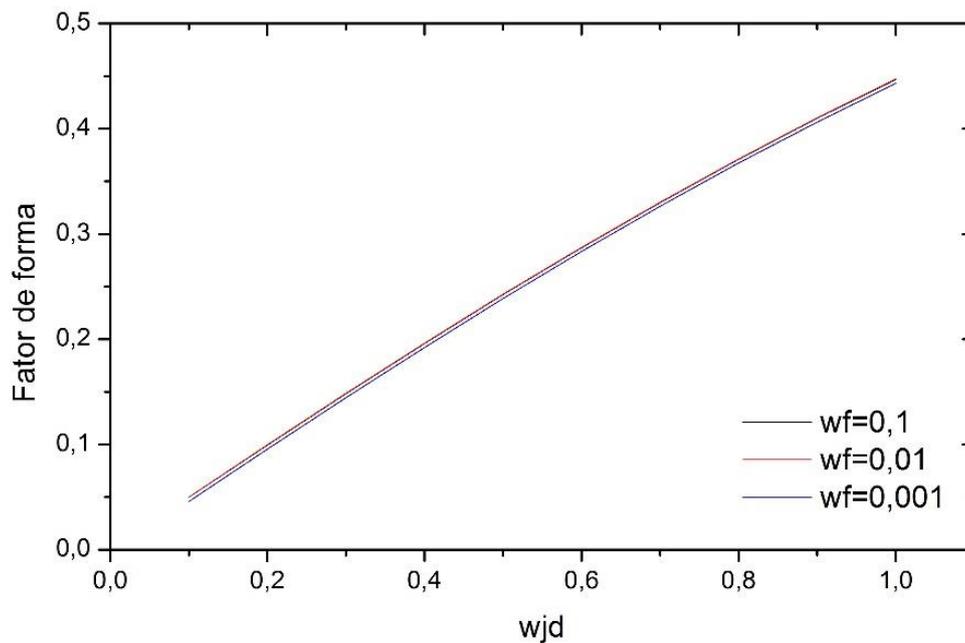


Figura 4.25 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para o caso de  $L=1$ .

De acordo com a Figura 4.25 pode-se perceber que, ao variar a dimensão da superfície aquecedora,  $w_f$ , o fator de forma calculado foi aproximadamente o mesmo.

No segundo caso,  $L=0,5$ , a Figura 4.26 apresenta o resultado ao variar as dimensões de  $w_f$ :

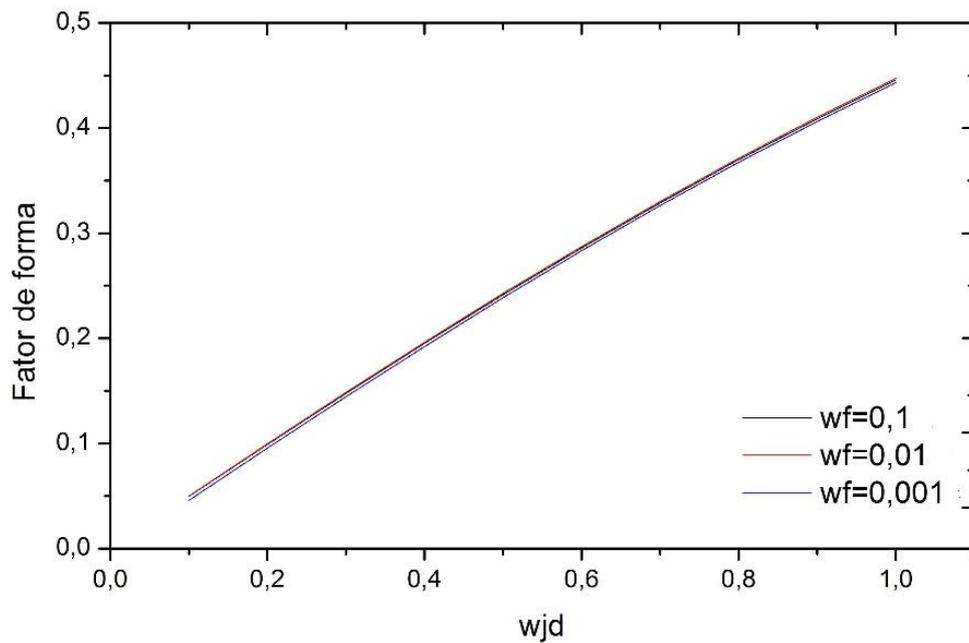


Figura 4.26 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para o caso de  $L=0,5$ .

De acordo com a Figura 4.26, pode-se perceber que, ao variar a dimensão da superfície aquecedora,  $w_f$ , o fator de forma calculado foi aproximadamente igual ao caso anterior.

No terceiro caso, onde  $L=0,1$ , as superfícies foram aproximadas em 10 vezes em relação ao primeiro caso. A Figura 4.27 apresenta o resultado ao variar as dimensões de  $w_f$ :

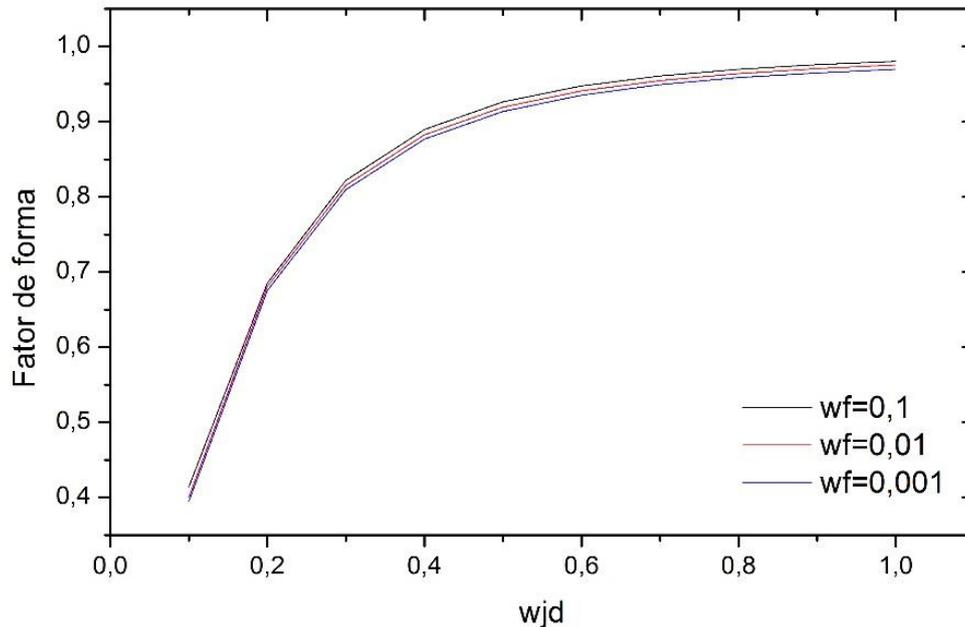


Figura 4.27 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para o caso de  $L=0,1$ .

Este é o caso em que há maior diferença entre os valores do fator de forma para diferentes dimensões da superfície aquecedora. Ainda assim, a diferença percentual do valor do fator de forma para o caso de a superfície aquecedora possuir dimensões  $w_f = 0,1$  e  $w_f = 0,001$  é de aproximadamente 7% para o ponto específico em que  $w_{jd} = 0,1$  e 0,018% para o ponto em que  $w_{jd} = 1,0$ . Pode-se perceber que os primeiros pontos do gráfico estão mais afastados, enquanto os últimos estão próximos, assim a diferença média entre os valores é de 1,28%.

Ao fixar  $L=0,1$  as superfícies estão consideravelmente mais próximas, nos casos anteriores, para  $L=1$  a diferença percentual entre os fatores de forma calculados não ultrapassa o valor máximo de 0,12%; para  $L=0,5$  há um percentual máximo de 0,48%. Em todos os casos, no primeiro ponto há maior diferença, mas apenas para  $L=0,1$  ela é significativa. Com isso, é possível assumir que o fator de forma apresenta maior dependência com a distância de separação entre as superfícies do que a dimensão da superfície aquecedora. Atribuindo exatamente as dimensões da cavidade a ser utilizada, 15, 12 e 6 nas direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente, e calculando o fator de forma de uma zona aquecedora da cavidade, ou seja

$w_f = 1,0$  e também de um possível filamento aquecedor de dimensão reduzida, igual a  $w_f / 3$  chega-se ao seguinte resultado:

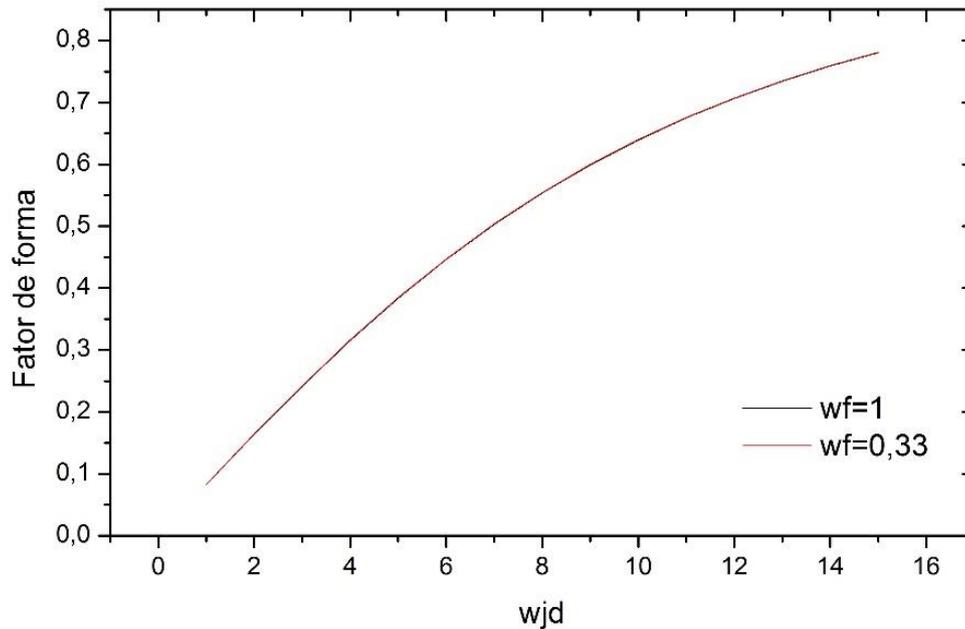
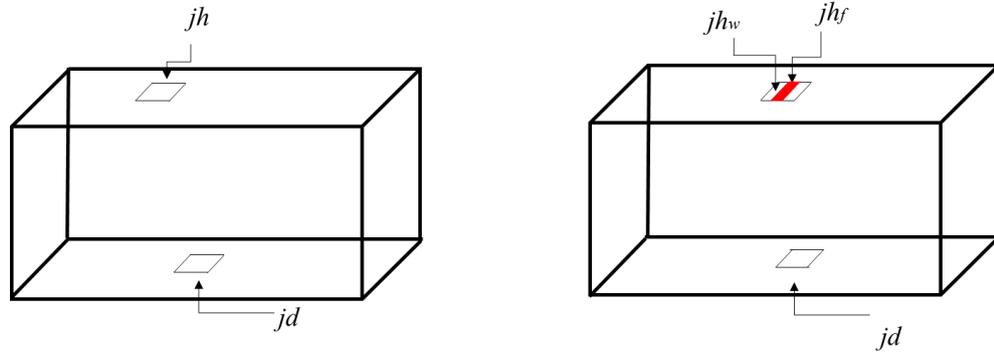


Figura 4.28 – Fator de forma entre a superfície aquecedora e a superfície de projeto para a cavidade a ser resolvida.

Novamente os valores para o fator de forma são muito próximos, a máxima diferença percentual entre eles é de 0,30% e a média é de 0,16%. Por fim, pode-se assumir que o fator de forma calculado para o elemento aquecedor original é aproximadamente o mesmo de um elemento aquecedor com dimensões inferiores às dimensões da malha. Essa conclusão é válida para o fator de forma entre o elemento aquecedor e a superfície inferior. Para calcular o fator de forma entre a superfície inferior e o elemento aquecedor deve, ser utilizada a regra da reciprocidade, para a obtenção do novo valor do fator de forma.

A regra da reciprocidade foi apresentada no Capítulo 2, dada pela Eq. 2.15. A aplicação desta regra considera os elementos da cavidade conforme a Figura 4.29. No lado (a), a área dos elementos tem o mesmo valor, portanto o fator de forma entre  $jh$  e  $jd$  é igual ao fator de forma entre  $jd$  e  $jh$ ; no lado (b), de acordo com o resultado anterior, o fator de forma entre  $jh$  e  $jd$  e o fator de forma entre  $jh$  e  $jd$  é aproximadamente igual, mas o contrário não é verdadeiro, o fator de forma entre o elemento da superfície de projeto e o filamento aquecedor será diferente, pois

as áreas não possuem mais os mesmos valores. Portanto, a regra da reciprocidade irá fornecer um novo fator de forma entre  $jd$  e  $jh_f$ . Em cada elemento da malha com um filamento, há uma parte isolada, identificada como  $jh_w$ .

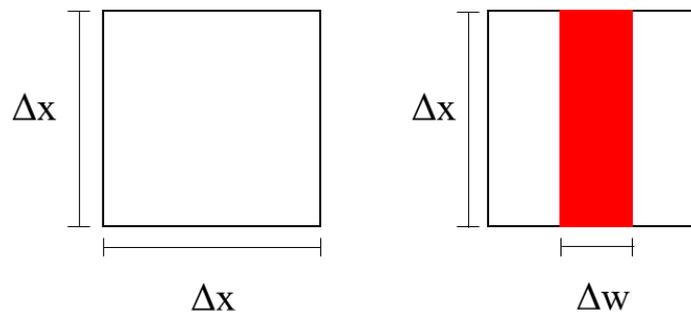


(a) Zona aquecedora

(b) Filamento aquecedor

Figura 4.29 – Comparação entre a zona aquecedora (a) e o filamento aquecedor (b) inseridos na cavidade.

A área do elemento  $jh_f$  é dada pela largura do filamento  $\Delta w$  multiplicada pelo comprimento do mesmo  $\Delta x$ , como mostra a Figura 4.30.



(a) Zona aquecedora

(b) Filamento aquecedor

Figura 4.30 – Comparação entre as dimensões da zona aquecedora (a) e do filamento aquecedor (b).

Assim,  $A_{jh} = \Delta x \cdot \Delta x = \Delta x^2$ ,  $A_{jh_f} = \Delta w \cdot \Delta x$  e  $A_{jh_w} = (\Delta x \cdot \Delta x - \Delta w \cdot \Delta x) = \Delta x^2 - \Delta w \cdot \Delta x$ . Aplicando-se a regra da reciprocidade primeiramente para calcular o fator de forma entre o elemento da superfície de projeto  $jd$  e o filamento aquecedor  $jh_f$ :

$$A_{jhf}F_{jh-f-jd} = A_{jd}F_{jd-jhf} \quad (4.3)$$

Substituindo as áreas dos elementos  $jhf$  e  $jd$ :

$$\Delta w \cdot \Delta x F_{jh-f-jd} = \Delta x^2 F_{jd-jhf} \quad (4.4)$$

Isolando o novo fator de forma  $F_{jd-jhf}$ :

$$\frac{\Delta w \cdot \Delta x}{\Delta x^2} F_{jh-f-jd} = F_{jd-jhf} \quad (4.5)$$

Eliminando os termos repetidos:

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} F_{jh-f-jd} = F_{jd-jhf} \quad (4.6)$$

O fator de forma  $F_{jh-f-jd}$ , entre o filamento e a superfície de projeto, pode ser substituído por  $F_{jh-jd}$ , ou seja, o antigo fator de forma, já calculado no código, pois concluiu-se anteriormente que o fator de forma do filamento e da zona aquecedora para a superfície de projeto é aproximadamente o mesmo. Além disso, a divisão  $\frac{\Delta w}{\Delta x}$  será definida como  $r_{fz}$ , a razão entre a dimensão do filamento e da zona aquecedora. Dessa forma, o fator de forma entre a superfície de projeto e o filamento é dado por:

$$r_{fz} \cdot F_{jh-jd} = F_{jd-jhf} \quad (4.7)$$

Assim, basta multiplicar o fator de forma já calculado pela razão  $r_{fz}$  para obter o valor do fator de forma entre o elemento da superfície de projeto e o elemento filamento aquecedor. O fator de forma entre a superfície de projeto  $jd$  e a superfície isolada que constitui o elemento aquecedor,  $jhw$  também será calculado pela regra da reciprocidade:

$$A_{jhfw}F_{jhfw-jd} = A_{jd}F_{jd-jhfw} \quad (4.8)$$

Substituindo as áreas dos elementos  $jhfw$  e  $jd$ :

$$(\Delta x \cdot \Delta x - \Delta w \cdot \Delta x) F_{jhfw-jd} = \Delta x^2 F_{jd-jhfw} \quad (4.9)$$

Isolando o novo fator de forma  $F_{jd-jhfw}$ :

$$\left[ \frac{\Delta x^2 - \Delta w \cdot \Delta x}{\Delta x^2} \right] F_{jhfw-jd} = F_{jd-jhfw} \quad (4.10)$$

Eliminando os termos repetidos:

$$\left[ 1 - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right] F_{jhfw-jd} = F_{jd-jhfw} \quad (4.11)$$

Substituindo  $\frac{\Delta w}{\Delta x}$  por  $r_{fz}$ , e o fator de forma por  $F_{jh-jd}$ :

$$\left[ 1 - r_{fz} \right] F_{jh-jd} = F_{jd-jhfw} \quad (4.12)$$

Assim, os novos fatores de forma devem ser incluídos no código de solução, pode-se testar sua validade no código que resolve o problema direto e comparar com o resultado já obtido. Se a solução for válida não deverá haver discrepâncias entre os resultados.

Há um fator de forma entre a superfície de projeto e a parte do filamento aquecedor e um fator de forma entre a superfície de projeto e a parte isolada do elemento aquecedor, portanto o método das Radiosidades, apresentado no Capítulo 2, seção 2.5.2 deve ser alterado. Assim, para o filamento aquecedor, será escrito:

$$q_{o,j} = \frac{q_{r,j}}{r_{fz}} + \sum_{k=1}^N [r_{fz}] F_{j-k} q_{o,k} \quad (4.13)$$

Reduzindo-se a área do elemento aquecedor, o fluxo de calor deverá aumentar proporcionalmente. Para a parte isolada,  $q_{r,j} = 0$ , então será escrita a equação:

$$q_{o,j} = \sum_{k=1}^N [1 - r_{fz}] F_{j-k} q_{o,k} \quad (4.14)$$

Além disso, a área de cada elemento em formato de filamento poderá variar de acordo com o seu formato, como mostra a Figura 4.31.

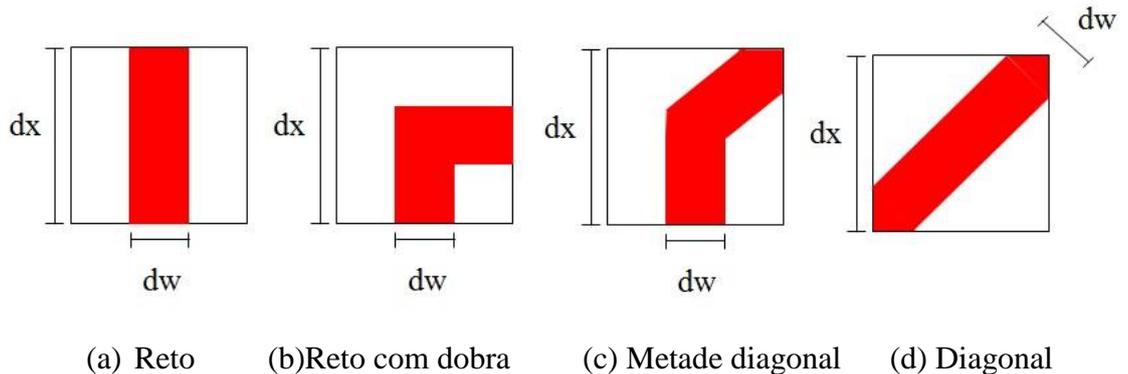


Figura 4.31 – Comparação entre as dimensões do filamento aquecedor com diferentes configurações.

Nos resultados apresentados nas seções anteriores, cada elemento aquecedor foi representado por um filamento no qual poderia apresentar uma das quatro configurações acima. Para os casos (a) e (b) o filamento possui a mesma área, entretanto para os casos (c) e (d) será diferente. No caso em que o filamento é igual ao apresentado em (c), sua área é igual a  $\frac{\Delta w \cdot \Delta x + \Delta x \sqrt{2}}{2}$ , já no caso (d) a área será dada por  $\Delta x \sqrt{2}$ , este será o caso em que o filamento contará com a maior área.

Dessa forma as mudanças no código de solução do problema direto foram:

- I. Construção do filamento aquecedor, cálculo das áreas e fator  $r_{fz}$  para cada elemento. As posições são dados de entrada no código fornecidos pelo algoritmo GEO, sendo que para o cálculo das áreas foi construída uma lógica *if* para identificar se o próximo elemento aquecedor se encontrava na diagonal ou reto ao elemento anterior.
- II. No método das Radiosidades, em cada cálculo do fator de forma entre a superfície de projeto e superfície aquecedora, e as demais paredes da cavidade e a superfície aquecedora, a equação foi substituída pela Eq. (4.13) e Eq. (4.14).

Com as modificações acima descritas, utilizando a solução obtida pelo algoritmo GEO para 20 elementos aquecedores, apresentada na Seção 4.3, o caso em que o parâmetro  $\tau$  utilizado foi  $\tau=1$  e a nona semente gerou o menor valor da função objetivo, os resultados obtidos foram:

Tabela 4.12 – Desvios relacionados a solução.

Desvio médio (%)	1,81
Desvio máximo (%)	9,81

Esse resultado é aproximadamente o mesmo obtido na seção 4.3. A diferença entre as soluções aparece apenas na função objetivo, no primeiro caso, sem a modificação o valor foi de aproximadamente 0,53 e com a modificação este valor foi de 0,54, uma diferença percentual de 0,54%. Os desvios encontrados em cada caso são os mesmos.

O fluxo de calor encontrado na superfície de projeto, é apresentado na Figura 4.32, abaixo:

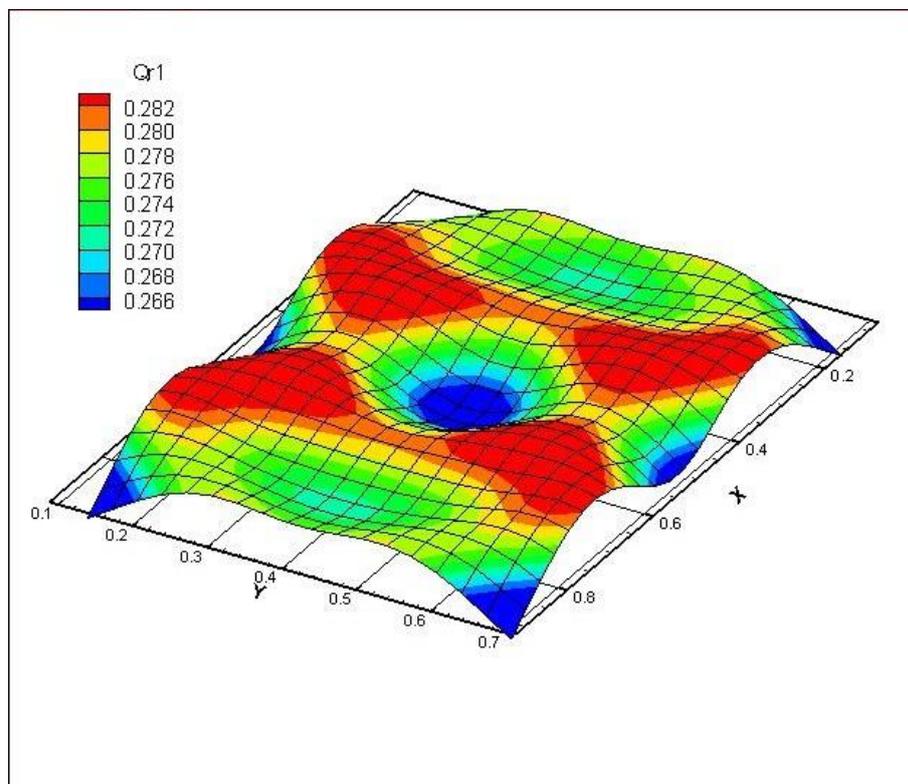


Figura 4.32 – Fluxo de calor na superfície de projeto, filamento com vinte elementos aquecedores e modificação do fator de forma.

Com isso, é possível assumir que as soluções para o fluxo de calor na superfície de projeto, calculadas a partir do aquecedor formado por zonas aquecedoras, e por filamentos aquecedores, são aproximadamente iguais. Assim, ao obter a solução com o algoritmo GEO para um filamento constituídos por zonas aquecedoras pode-se considerar que o mesmo resultado é válido para filamentos aquecedores com dimensões inferiores às zonas aquecedoras.

Para finalizar o estudo do fator de forma do filamento, pode-se aplicar a expressão para o cálculo do fator de forma tridimensional para superfícies perpendiculares, fornecida por Howell, 2014: O mesmo estudo foi realizado por Fritzen, 2013 com o objetivo de verificar se o cálculo utilizando elementos infinitesimais se aproxima dos valores obtidos considerando os elementos tridimensionais.

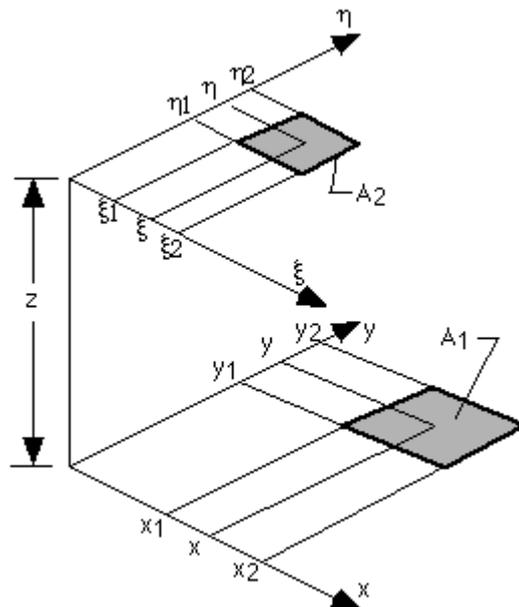


Figura 4.33 – Retângulos em planos paralelos.

[Fonte:<http://www.thermalradiation.net/sectionc/C-13.html> acesso em março de 2014.]

A expressão para o fator de forma é dada por:

$$F_{1-2} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+j+k+l} G(x_i, y_j, \eta_k, \xi_l) \quad (4.15)$$

Onde a função  $G(x_i, y_j, \eta_k, \xi_l)$  é dada por:

$$G = \frac{1}{2\pi} \left( \begin{array}{l} (y-\eta)[(x-\xi)^2 + z^2]^{1/2} \tan^{-1} \left\{ \frac{y-\eta}{[(x-\xi)^2 + z^2]^{1/2}} \right\} \\ + (x-\xi)[(y-\eta)^2 + z^2]^{1/2} \tan^{-1} \left\{ \frac{x-\xi}{[(y-\mu)^2 + z^2]^{1/2}} \right\} \\ - \frac{z^2}{2} \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2] \end{array} \right) \quad (4.16)$$

Cada variável  $x, y, \eta, \xi$  é descrita na Figura 4.33, esta expressão foi aplicada ao código direto, substituindo a antiga expressão do fator de forma, novamente com a solução obtida para um filamento com vinte elementos aquecedores, apresentada na Seção 4.3, o caso em que o parâmetro  $\tau$  utilizado foi  $\tau = 1$  e a nona semente gerou o menor valor da função objetivo.

Nesta modificação apenas os fatores de forma das superfícies aquecedora e de projeto foram alterados, as demais superfícies permaneceram com os procedimentos originais, apresentados na Seção 2.5.1.

Tabela 4.13 – Desvios relacionados a solução utilizando fator de forma tridimensional.

Desvio médio (%)	1,77
Desvio máximo (%)	9,76

Desvios relacionados a solução utilizando fator de forma infinitesimal.

Desvio médio (%)	1,81
Desvio máximo (%)	9,81

Este resultado apresenta diferenças com relação aos apresentados anteriormente: de 0,56% no desvio médio e 2,18% no desvio máximo. O fluxo de calor encontrado na superfície de projeto é apresentado na Figura 4.34, abaixo:

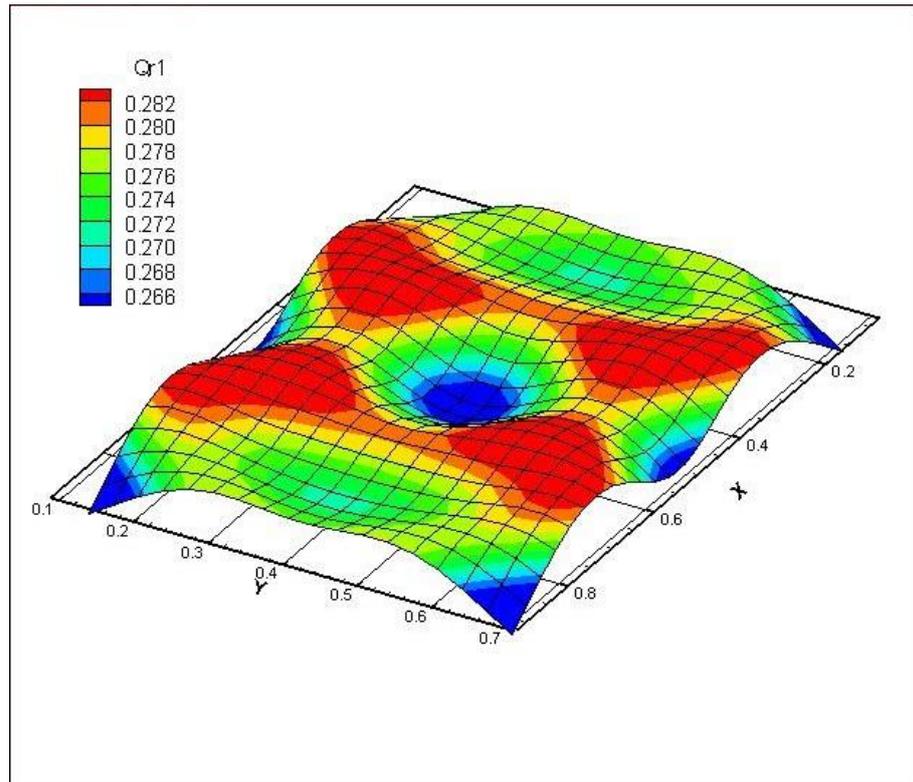


Figura 4.34 – Fluxo de calor na superfície de projeto, filamento com vinte elementos aquecedores e modificação do fator de forma.

Ao analisar o fluxo de calor na superfície de projeto, aparentemente não há discrepâncias entre os resultados obtidos anteriormente, o que é positivo no sentido de validação da aplicabilidade da solução. No estudo de Fritzen 2013, os mesmos resultados foram obtidos. Este resultado contribui para a conclusão que o cálculo do fator de forma utilizado nesta dissertação está adequado.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho abordou o projeto de uma cavidade radiante para aquecimento da superfície de projeto através de aquecedores em forma de filamento. A solução foi obtida com a aplicação dos conceitos da radiação térmica e da metodologia inversa. O algoritmo de otimização aplicado foi o GEO, utilizado para encontrar as posições dos aquecedores na superfície superior. A cavidade foi considerada adimensional, e foram simuladas as configurações com, 20, 30, 40 e 50 elementos aquecedores em formato de filamento. Em todos os casos, o fluxo de calor foi considerado igual para cada elemento aquecedor, variando apenas de um caso para o outro, visto que o fluxo total permaneceu constante. Buscaram-se soluções nas quais a posição das extremidades do filamento aquecedor estivesse sobre a linha de simetria da cavidade resolvida, a fim de utilizar apenas um ou dois filamentos na cavidade completa.

Entre os resultados encontrados, pode-se perceber que o caso com 40 elementos aquecedores apresentou fluxo de calor com maior uniformidade na superfície de projeto, um caso em que houve o menor desvio máximo e que torna possível a construção de um forno com apenas dois filamentos aquecedores. O caso com 50 elementos aquecedores apresentou a vantagem de gerar uma solução particular com apenas um único filamento aquecedor para toda a cavidade. Este caso apresentou um desvio médio inferior ao caso com 40 elementos, entretanto o desvio máximo aumentou. Ao analisar o fluxo de calor na superfície de projeto para o caso com 50 elementos aquecedores pode-se perceber que há maior variação nas bordas, fazendo com que o desvio máximo sofra um acréscimo nestes pontos. Além disso, há a hipótese de 50 elementos aquecedores ser um número excessivo de elementos, próximo do limite do número de elementos aquecedores no qual é possível obter uma solução satisfatória, considerando que a potência do filamento aquecedor foi mantida fixa.

O tempo computacional se manteve em torno de sete horas, um tempo que pode ser considerado alto, sendo a solução obtida com um processador Quad-Core AMD Opteron 2.3 GHz com 128GB RAM. Entretanto, a restrição de produzir filamentos aquecedores apresenta uma dificuldade maior na obtenção da solução com relação ao caso em que a solução é obtida para fontes pontuais.

A solução do problema da cavidade radiante utilizando a metodologia inversa e o algoritmo GEO produziu resultados satisfatórios, com desvios máximos inferiores a 2%. O estudo dos fatores de forma, a verificação que o fator de forma de um filamento com dimensão inferior a zona aquecedora torna válida a solução obtida pelo código GEO para zonas

aquecedoras. Este resultado permite que se utilizem filamentos com diferentes espessuras no projeto do forno. Além desta análise, foi aplicada a expressão para o fator de forma tridimensional, os resultados obtidos foram semelhantes aos resultados das zonas aquecedoras, mostrando que o cálculo do fator de forma produz resultados satisfatórios.

Por fim, em trabalhos futuros poderiam ser testados casos com maior número de elementos aquecedores para encontrar o número máximo de elementos de um filamento aquecedor em que ainda há diminuição dos desvios relacionados à solução. Outro aspecto de interesse seria encontrar uma forma de impor que as duas extremidades do filamento sempre se posicionassem nas linhas de simetria, gerando soluções com apenas um único aquecedor. Além disso, poderiam ser aplicados outros métodos de regularização para resolver o sistema de equações e montar um experimento para testar os resultados produzidos pelas simulações para que seja realizada a validação experimental.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bak, P.; Sneppen K. Punctuated Equilibrium and Criticality in a Simple Model of Evolution: **Physical Review Letters**, v. 71, No. 24, p 4083-4086, 1993.

Brittes, R.; França, F.H.R. Solution of the Radiative Enclosure with a Hybrid Inverse Method. In: 13th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Uberlândia. Proceedings of 13th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, 2010

Cassol, F. Aplicação da análise inversa via otimização extrema generalizada em projetos de iluminação. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2009.

Cassol, F.; Schneider, P.S.; França, F.H.R.; Sousa, F.L.; Neto, A.J.S. Multi-objective optimization as a new approach to illumination design of interior spaces, **Building and Environment**, v.46, p. 331-338, 2011.

Dama A.; Lastariab F. Explicit versus implicit method for radiative heat transfer in gray and diffuse enclosures, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 55, p. 3829-3833, 2012.

Daun, K.J.; Howell, J.R. Inverse design methods for radiative transfer systems, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, v. 93, p. 43-60, 2005.

Ertürk, H.; Ezekoye, O.A.; Howell, J.R. Comparison of three regularized solution techniques in three-dimensional inverse radiation problem, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, v. 73, p. 307-316, 2000b.

Ertürk, H.; Ezekoye, O.A.; Howell, J.R. The Application of an Inverse Formulation in the Design of Boundary Conditions for Transient Radiating Enclosures, **Journal of Heat Transfer**, v. 124, p. 1095- 1102, 2002a.

Farahmand, A.; Payana, S.; Hosseini Sarvarib S.M. PSO Geometric optimization of radiative enclosures using PSO algorithm, **International Journal of Thermal Sciences**, v.60, p. 61-69, 2012.

Fedorov, A.G.; Lee, K.H.; Viskanta, R. Inverse Optimal Design of the Radiant Heating in Materials Processing and Manufacturing, **Journal of Materials Engineering and Performance**, v. 7, p. 719-726, 1998.

Fletcher, R. **Practical Methods of Optimization**, Jon Wiley & Sons, Great Britain, 2000.

França, F.H.R.; Howell, J.R.; Ezekoye, O.A.; Morales, J.C. Inverse Design of Thermal Systems with Dominant Radiative Transfer, **Advances in Heat Transfer**, v. 36, p. 1-30, 2002.

Fritzen, D. W. Análise de erro relacionado ao refinamento de malha no projeto inverso de um forno elétrico. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRGS, Porto Alegre, 2013.

Hadamard. **Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equation**. Yale University Press. New Haven, 1923.

Hansen, P.C. **Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion**. SIAM Monographs on Mathematical and Computation, Philadelphia, 1998.

Howell, J.R.; Daun, K.; Ertürk, H.; Gamba, M.; Sarvari, M.H. The Use of Inverse Methods for the Design and Control of Radiant Sources, **JSME International Journal**, v. 46, p. 470-478, 2003.

Incropera, F. P.; Dewitt D.P., **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**, LTC, 2008.

Kirkpatrick, S.; Gelett, C. Vecchi, M.P. Optimization by simulated annealing. **Science** v.220, p.621-630, 1983.

Linhua, L.; Heping, T.; Qizheng, Y. Inverse Radiation Problem of Temperature Field in Three-Dimensional Rectangular Furnaces, **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 26, p. 239-248, 1999.

Maffra, F.A.R.S.; Gattass, M.; Detecção de Características Faciais utilizando FERNS. Dissertação (Mestrado em Informática). PUCRJ. 2009.

Metropolis N.; Rosenbluth, A.W.; Rosenbluth, M.N.; Teller A. H; Teller E. Equation of state calculations by fast computing machines. **J. Chem. Phys.** v.21, p.1087-1092, 1953.

Modest, M.F. **Radiative Heat Transfer**, MC Graw-Hill, Nova York, 1993.

Moghadassian, B.; Kowsary, F. Inverse boundary design problem of natural convection-radiation in a square enclosure. **International Journal of Thermal Sciences**, v.75, p. 116-126, 2014.

Mossi, A.C.; Vielmo, H.A.; França, F.H.R.; Howell, J.R. Inverse design involving combined radiative and turbulent convective heat transfer, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 51, p. 3217-3226, 2008.

Özisik, M.N.; Orlande, H.R.B. **Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications**, Taylor & Francis, Nova York, 2000.

Safavinejad, A.; Maruyama, S.; Mansouri, S.H.; Sakurai, A. Optimal number and location of heaters in 2-D radiant enclosures composed of specular and diffuse surfaces using micro-genetic algorithm, **Applied Thermal Engineering**, v. 29, p. 1075-1085, 2009.

Sarvari, S.M.H.; Mansouri, S.H.; Howell, J.R. Inverse design of three-dimensional enclosures with transparent and absorbing-emitting media using an optimization technique, **Int. Comm. Heat Mass Transfer**, v. 30, p. 149-162, 2003.

Schneider, P.S.; França, F.H.R. Inverse Analysis applied to an illumination design, Proceedings of the 10th ENCIT, Rio de Janeiro, 2004.

Siegel, R.; Howell, J.R. **Thermal Radiation Heat Transfer**. Taylor & Francis, New York, 2002.

Silva Neto, A. J.; Becceneri, J. C. Técnicas de Inteligência Computacional Inspiradas na Natureza - Aplicação em Problemas Inversos em Transferência Radiativa.: SBMAC. v. 41. p.122, 2009.

Silva Neto, A. J. Soeiro, F. J. C. P. The Solution of an Inverse Radiative Transfer Problem with the Simulated Annealing and Levenberg-Marquardt Methods. Boletim SBMAC, Rio de Janeiro, v. VII, n.1, p. 17-30, 2006.

Silva Neto, A.J. **Problemas Diretos e Inversos em Transferência Radiativa e Processos Difusos**.UERJ, Rio de Janeiro, 2012.

Silva Neto, A.J.; Moura Neto, F.D. **Problemas Inversos: conceitos fundamentais e aplicações**. UERJ, Rio de Janeiro, 2005.

Sivanandam, S.N.; Deepa, S.N. **Introduction to Genetic Algorithms**, Springer, New York, 2008.

Sousa, F.L.; Ramos, F.M.; Paglione, P.; Girardi, R.M. New Stochastic Algorithm for Design Optimization, **AIAA Journal**, v. 41, p. 1808-1818, 2003.

Sun, W.; Yuan, Y. **Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming**, Springer, New York, 2006.