

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

LÚCIO DANIEL SARTORI

APLICAÇÕES PARA O MODELO DIEBOLD – LI NO AJUSTE E PREVISÃO DA
ETTJ BRASILEIRA

PORTO ALEGRE

2014

LÚCIO DANIEL SARTORI

APLICAÇÕES PARA O MODELO DIEBOLD – LI NO AJUSTE E PREVISÃO DA
ETTJ BRASILEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Economia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo

PORTO ALEGRE

2014

CIP - Catalogação na Publicação

Sartori, Lúcio Daniel

Aplicações para o modelo Diebold - Li no ajuste e
previsão da ETIV brasileira / Lúcio Daniel Sartori. -
- 2015.

47 f.

Orientador: Fabrício Tourrucão.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-ES, 2015.

1. ETIV. 2. Diebold - Li. 3. Lambda variável. 4.
Curva de juros. 5. Previsão. I. Tourrucão, Fabrício,
orient. II. Título.

LÚCIO DANIEL SARTORI

APLICAÇÕES PARA MODELO DIEBOLD – LI NO O AJUSTE E PREVISÃO DA
ETTJ BRASILEIRA

Dissertação apresentada ao Programa e Pós Graduação em Economia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Economia.

Aprovado em: Porto Alegre 09 de janeiro de 2015.

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo – Orientador

UFRGS

Prof. Dr. Diego Eckhard

UFRGS

Prof. Dr. Flávio Tosi Feijó

UFRGS

Prof. Dr. João Frois Caldeira

UFRGS

AGRADECIMENTOS

O trabalho aqui desempenhado não foi e nem nunca poderia ter sido efetuado somente com estas duas mãos. Desde a iniciativa de empreender com o almejado desenvolvimento do curso várias pessoas tomaram decisões e atitudes que findaram senão em uma peça chave para a conclusão do trabalho, um facilitador ou um incentivador. Por primeiro, agradeço enormemente a todos os professores e funcionários da UFRGS, universidade pública, gratuita e de qualidade, onde passei praticamente a totalidade da minha vida acadêmica, lugar em que aprendi a me desenvolver profissionalmente e pessoalmente moldando muito do meu caráter. Obrigado ao meu professor e orientador Fabrício Tourrucôo, que desde o período anterior à orientação, sempre procurou dedicar o seu tempo durante e posteriormente às aulas a resolver toda e qualquer dúvida, o mesmo ocorrendo durante a orientação, quando sempre esteve pronto a sanar todos os questionamentos rapidamente seja por e-mail ou presencialmente, obrigado professor. Não posso deixar de agradecer também à empresa a qual trabalho, LUTERPREV, que me disponibilizou tempo e recursos durante todo este curso, principalmente na figura do seu diretor geral à época, Everson Oppermann, entusiasta da cultura, conhecimento e educação, e que apostou no meu desenvolvimento, obrigado. Obrigado aos meus amigos que me ajudaram diretamente com o seu conhecimento e também aos que por vez ou outra abdicaram de qualquer evento em função do meu diminuto tempo. Agradeço aos meus irmãos, Giovani e Robinson que sempre foram e continuam sendo o meu norte e o meu parâmetro de crescimento e desenvolvimento, além de um apoio incondicional. Obrigado minha linda e compreensiva Bárbara, que comemorou comigo os sucessos e alentou os insucessos, abrindo mão do nosso tempo e sempre motivando para o melhor, agradeço muito a ti e também tua família. E como sempre digo, por último e muito mais importante, agradeço aos meus pais, Waldecy e Nelí, que são a causa original de qualquer movimento meu. Abnegadamente responsáveis por toda a minha educação e dos meus irmãos, nunca pouparam esforços para que possuíssemos o melhor, confesso que me faltam palavras para este agradecimento mas me sobra felicidade em tê-los sempre ao meu lado, muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho testa uma alternativa de ajuste da estrutura a termo da taxa de juros brasileira bem como a sua previsão através de uma variação do modelo Diebold e Li (2006) focando principalmente em seu fator de decaimento exponencial. Esta variação do fator de decaimento ocorre distintamente em dois momentos do trabalho, primeiramente no ajuste da curva e após quando da previsão desta. No ajuste, o encontro deste parâmetro é feito através de ferramenta computacional, buscando o fator de decaimento que reduz a diferença de mínimos quadrados em relação aos pontos originais capturados no mercado de juros futuro brasileiro em conjunto dos três outros fatores do modelo. A previsão da estrutura a termo utiliza modelos auto regressivos para estimar as próximas curvas no horizonte de um período. A importância deste estudo reside em conhecer a aderência do modelo proposto à curva de juros brasileira testando sua eficiência quando utilizados os pressupostos enunciados.

Palavras-chave: ETTJ. Diebold e Li. Lambda variável. Curva de juros. Previsão.

ABSTRACT

This study tests an alternative adjustment of the term structure of Brazilian interest rate and its prediction through a variation of the Diebold and Li (2006) model focusing mainly on his exponential decay factor. The variation of the decay factor occurs in two distinct moments of this work, in the curve fitting and after this in the forecasting. During the setting, this parameter is measured through computational tool, seeking the decay factor that reduces the difference in least squares relative to the original points captured in the Brazilian market future interest together the other three factors of the model. To Forecast the term structure is used auto regressive models to estimate the upcoming curves. The importance of this study lies in knowing the adherence of the proposed to the Brazilian yield curve testing its efficiency when utilized the assumptions listed in the model.

Keywords: ETTJ. Diebold and Li. Variable Lambda. Yield curve. Forecasting.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	7
2 OBJETIVOS GERAIS	10
3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	11
4 DADOS.....	12
5 MODELO DIEBOLT – LI	15
5.1 Ajustando a Curva de Juros.....	16
5.2 λ no ajuste da curva	18
5.3 Resultado do Ajuste da ETTJ	23
6 PREVISÃO DA CURVA DE JUROS	30
6.1 Modelo AR(1) para β_0, β_1 e β_2	31
6.2 Tratamento do λ na previsão da ETTJ	33
6.2.1 λ Fixo.....	34
6.2.2 λ Variável.....	34
6.2.3 <i>Random Walk</i>	35
6.3 Resultado da previsão	35
7 CONCLUSÃO.....	43
REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

A Estrutura a Termo da Taxa de Juros, doravante denominada simplesmente ETTJ, é a representação gráfica de uma função que tem por finalidade encontrar valores da taxa a prazo em função das suas taxas *spot* para quaisquer pontos de um intervalo de tempo, onde cada um destes pontos $i(t)$ diz respeito a uma determinada taxa de juro no tempo t e segundo Caldeira (2011) são objetos de alta dimensionalidade, os quais frequentemente não são diretamente observáveis. Na prática ela estabelece elos de ligação entre taxas já conhecidas ou, em uma visão mais ampla, faz a ligação entre as taxas de curto e de longo prazo. Seu entendimento é de grande valia tanto para os tomadores de decisão da política monetária quanto para os agentes que trabalham mercado de renda fixa. Importância esta que reside no fato de o conjunto de pontos que dão origem à curva ser incompleto, ou seja, no mercado financeiro não são negociados títulos para todos os prazos compreendidos no espaço t conforme aponta Varga (2009), e por esta razão torna-se mister avaliar a expectativa de comportamento do mercado de juros nestas lacunas para, por exemplo, encontrar o valor justo¹ de um ativo, efetuar hedge de uma operação ou precificar um derivativo.

A ETTJ também tem se mostrado de grande importância para o acompanhamento do mercado e da sua tendência em face da gestão dos riscos das companhias, sua capacidade de solvência ou mais comumente o acompanhamento do preço dos ativos a fim de buscar uma gestão mais eficiente dos investimentos. Experiência esta constatada no mercado segurador brasileiro e de previdência privada, o qual é portador de um grande volume financeiro em reservas matemáticas de benefícios, e recentemente teve de se adequar às normas internacionais de contabilidade e mensurar todos os seus fluxos de ativos e obrigações futuros através da ETTJ, fazendo com que empresas que até então utilizavam esta ferramenta como forma de gestão financeira, passam a utilizá-la inclusive por força de norma².

A crescente importância acompanha o desenvolvimento de modelos, que

¹ Valor justo conforme Comitê de Pronunciamentos Contábeis número 38 (CPC 38).

² Circular SUSEP Nº 410/2011, que instituiu o TAP (Teste de Adequação de Passivos) para todo o mercado segurador brasileiro, comparando a evolução dos fluxos de seus passivos em cada vencimento através da ETTJ.

desde seu início através dos estudos estatísticos de McCulloch (1971) convergiram para as mais variadas áreas, mas que basicamente podem ser definidos em três grupos: os modelos de não arbitragem, estatísticos e de equilíbrio. No primeiro, descrito especialmente por Hull e White (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992) a ETTJ é construída de modo a não condicionarem a não arbitragem entre as taxas estimadas na curva. Modelos estatísticos são constituídos via um procedimento de interpolação, e previsões são feitas usando modelos de séries temporais, podendo ser encontrados em Litterman e Scheinkman (1991), McCulloch (1971), Nelson e Siegel (1987), Svensson (1994) entre outros.

Já os modelos de equilíbrio buscam a explicação das taxas através de princípios de não arbitragem e equilíbrio ajustando toda a ETTJ sendo identificados nos trabalhos de Vasicek (1977) e Duffie e Kan (1996). Segundo Leite, Filho e Vicente (2009), embora não fundamentado economicamente, os modelos estatísticos são preferidos em problemas práticos haja vista sua menor complexidade de estimação³. Aliada a maior facilidade computacional e de estimação considerada, que deveras é um dos pontos chave do presente trabalho, aliado ao ensejo de abordar a previsão da taxa de juros, faz-se de interesse que seja empregado o modelo de previsão proposto Diebold e Li (2006) doravante denominado somente DL. Este foi utilizado para a previsão da ETTJ americana com resultados significativamente melhores que diversos modelos tradicionais de séries temporais diz Almeida et al (2008). Além destas conveniências relatadas que já demonstrariam suficiência na escolha, este goza de considerável abrangência e a aceitação na literatura existente sobre o tema, inclusive sendo citado por Vicente e Tabak (2007), os quais concluem que o modelo DL possui poder de previsão ligeiramente superior para a curva de juros brasileira que o modelo gaussiano. Há também autores que desqualificam a o modelo DL para o ajuste da ETTJ brasileira, que é o caso de Varga (2006a), o qual diz que este não reproduz bons resultados utilizando a base de DI futuro brasileira.

³ Muito embora Christensen, Diebold e Rudebush (2007) e Almeida e Vicente (2008) apresentem evidências em favor da inclusão de condições de não arbitragem quando o objetivo é prever juros, a questão ainda gera controvérsias, como assinala Duffie (2011).

Define-se um ponto relevante e dissonante entre autores para a definição da ETTJ, que é o modo de utilização do fator de decaimento λ da curva de juros. Existem divergências entre alguns autores sobre o tratamento desta variável. DL, Diebold, Arouba e Rudebush (2006) simplificaram os cálculos utilizando a variável de decaimento fixa, e justificando de que a manutenção desta constante não repercute em grandes alterações na mensuração dos outros parâmetros.

Koopman, Mallee e van der Wel (2007) complementam o trabalho de DL estendendo o modelo Nelson Siegel Dinâmico tratando o parâmetro λ como um fator latente estocasticamente variável no tempo, inclusive assumindo que este modelo proposto gera não linearidades, que no caso específico são tratadas utilizando o filtro de Kalman. O autor enfatiza que manter λ fixo durante todo o período da amostra possa ser demasiado restritivo quando os dados se estendem por um longo período de tempo. A importância de λ e a sua constância no decorrer do tempo também é discutido em Christensen, Diebold e Rudebush (2007) onde um modelo Nelson-Siegel livre de arbitragem é proposto.

Uma outra maneira de tratar o parâmetro de decaimento para a previsão da curva de juros brasileira é visto em Almeida et al (2008). A montagem da ETTJ é feita fixando este parâmetro, porém nas previsões da estrutura de juros o λ é tratado de modo a diminuir o erro quadrático para os mais variados períodos de previsão, cada um com a sua calibragem. De qualquer modo, em seu trabalho o autor percebe a importância de λ , quando conclui que o seu resultado demonstra que as previsões do modelo DL são sensíveis à forma como se estima o parâmetro de controle da curvatura.

2 OBJETIVOS GERAIS

O presente trabalho objetiva a condução de uma pesquisa de modo a mensurar a semelhança existente entre as taxas reais encontrados no mercado de juros futuro brasileiro e a ETTJ ajustada e prevista (aderência do modelo), tendo como base taxas de juros negociadas no mercado brasileiro. Para tal, será utilizado o modelo estatístico proposto por DL, focando os esforços principalmente no teste do parâmetro de decaimento exponencial λ deste modelo. Portanto, espera-se encontrar um resultado final macro, sendo este dividido em duas partes, dois resultados menores. Por primeiro, considerar-se-á a variação de λ no tempo para o **ajuste** da curva e a partir daí colher os resultados desta primeira metade da pesquisa. A segunda parte busca manter o teste desta estratégia também visando **prever** a estrutura a termo também sem a manutenção de λ fixo. A expectativa não é necessariamente encontrar um modelo totalmente livre de arbitragem ou maximizar sua eficiência, mas sim tratar esta variável de modo a testar a sua relevância para a curva de juros brasileira calibrando mais ou menos eficientemente a curva e a sua previsão destoando da técnica elucidada por DL donde os autores consideram a manutenção do fator de decaimento constante para um melhor ajuste e previsão da curva de juros.

3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Ajustar a ETTJ com dados do mercado brasileiro a partir do modelo DL, utilizando o parâmetro de decaimento λ fixo;
- b) ajustar a ETTJ com dados do mercado brasileiro a partir do modelo DL, utilizando o parâmetro de decaimento λ variável;
- c) comparar o uso do parâmetro λ fixo ao variável na curva de juros brasileira;
- d) encontrar o modo de tratamento do λ que melhor se adapta ao modelo de ajuste e previsão comparativamente aos dados reais do mercado brasileiro.

O trabalho será dividido em quatro partes além da 1) Introdução e dos 2) Objetivos Gerais e 3) Objetivos Específicos, já apresentados. Será feita uma apresentação e justificativa dos 4) Dados utilizados na montagem da curva de juros futuro brasileira e logo após o 5) Modelo escolhido para a calibragem da curva sendo este explicado sumariamente e já incluindo as duas formas de mensuração da curva partindo de diferentes λ . Posteriormente, convergindo para os resultados fins deste, será demonstrado o 6) Modelo de Previsão com as diferentes metodologias de utilização do parâmetro de decaimento do modelo DL para encerrarmos esta pesquisa com a conseqüente 7) Conclusão do estudo.

4 DADOS

O mercado brasileiro possui uma gama de títulos públicos e privados e muitos deles passíveis de utilização para a formatação de uma ETTJ, alguns deles conhecidos como *zero coupon bonds* pagam um valor pré-estabelecido em seu vencimento de acordo a taxa de aquisição deste título somente. Outros, por uma característica própria do mercado local, e alguns deles com grande volume de negociação, pagam juros semestrais (*coupon bonds*) e podem possuir algum tipo de indexador inflacionário. São títulos públicos emitidos pelo Tesouro Nacional largamente negociados denominados Notas do Tesouro Nacional. NTN-B para aqueles que são corrigidos pela variação do IPCA - IBGE e NTN-C para os títulos que utilizam o IGPM-FGV como indexador. Há também as NTN-F, que pagam juros semestrais, porém não possuem qualquer indexador inflacionário atrelado à sua rentabilidade total.

O fato de alguns títulos pagarem adiantamentos periódicos de juros aumenta a complexidade da mensuração fazendo com que tenha que ser utilizado algum tipo de tratamento dos dados, largamente utilizada por exemplo a técnica de bootstrapping⁴. Portanto, por uma questão de simplificação dos cálculos, aqui deve ser utilizado um título pré-fixado livre do pagamento de cupons e com um volume considerável de negociações e alta liquidez. Para tal, a série de dados a qual aplicar-se-á o modelo de interpolação da curva bem como posteriormente a sua previsão deve refletir o mercado a qual ela se aplica com um nível de fidedignidade relevante e, portanto, os dados selecionados dizem respeito aos fechamentos diários dos contratos de DI Futuros de 1 dia registrados na Bolsa de Mercadorias e Futuro e Bolsa de Valores do Estado de São Paulo (BM&F Bovespa)⁵.

⁴ O procedimento de *bootstrapping* consiste no esforço de eliminar o risco de reinvestimento dos títulos que pagam juros periódicos tomando as taxas conhecidas para vender no mercados cupons de cada título. De acordo com Varga (2006b), tal negócio existe e é conhecido nos EUA como *strip (separate trading of registered interest and principal)*. Feito o *strip* dos cupons, fica-se apenas com cupons zero, cujas taxas não têm mais o risco de investimento, tornando-se taxas *spot*. O conjunto de taxas *spot* obtido com base em títulos com cupons é chamado de *stripped yield curve* e qualifica-se para a formação da ETTJ.

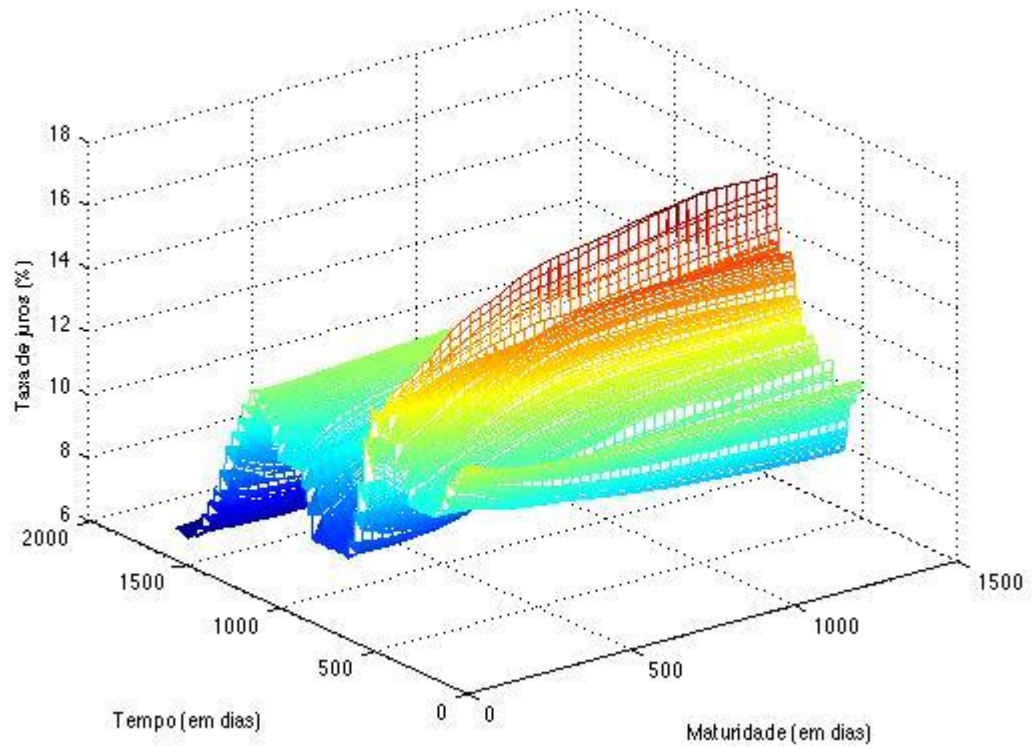
⁵ Bolsa de Mercadorias e Futuro e Bolsa de Valores do Estado de São Paulo que firmaram um acordo de fusão em 2008

Este está entre os contratos de futuros mais negociados no mundo e é uma das bases para a avaliação da taxa de juros do mercado brasileiro (VARGA, 2004) sendo portanto de grande relevância na literatura e construção das curvas de juros, pois possuem uma representativa quantidade de vencimentos com um volume significativo de negociações diárias e com alta liquidez.

Para fins de ajuste e previsão da curva de juros foram coletados dados compreendidos entre as datas de 01/02/2007 e 28/03/2013 contabilizando um total de 1541 observações diárias com os mais variados vencimentos cada. As maturidades (τ) estão distribuídas em 41 vértices espaçados homoganeamente com uma diferença de 30 dias, formando assim vencimentos desde 1 dia até 1200 dias corridos úteis (ano base de 252 dias). Estas amostras estão enumeradas em ordem crescente e unitária de data, sendo que a $t = 1$ diz respeito às cotações de fechamento do mercado no dia 01/02/2007 e $t = 1541$ representa as mesmas cotações ocorridas no dia 28/03/2013. Para fixar a curva de juros através da estrutura a termo, são utilizados todos os dados amostrais disponíveis, sendo que desejamos analisar a aderência do modelo em diferentes períodos e vértices com uma relativa grande abrangência de tempo a fim de que esta pesquisa seja representativa às diferentes formações da ETTJ.

A frequência da coleta de dados pode depender diretamente do resultado a que se propõe o experimento, analisando a literatura é visto que autores utilizam dados coletados mensalmente e outros semanalmente para a construção da ETTJ e previsão desta, encontrando por conseguinte, a curva de previsão no horizonte mais próximo igual a um mês e uma semana respectivamente, não sendo este uma regra para obter tais resultados.

Figura 1 – Representação gráfica da base de dados total, considerando suas três dimensões, Maturidade (em dias), Tempo (em dias) e a Taxa de Juros (%). As Taxas de Juros estão representadas em seu valor equivalente anual.



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

5 MODELO DIEBOLT – LI

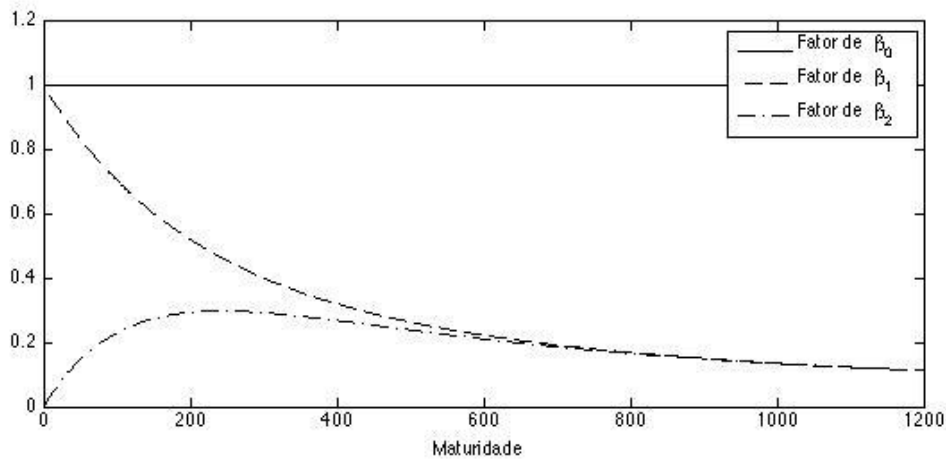
O proeminente estudo desenvolvido por DL incorpora o modelo proposto por Nelson e Siegel (1987) utilizando seus componentes exponenciais para refinar a totalidade da curva de juros, período por período, parcimoniosamente. Estes três componentes inseridos no modelo passam a ser apresentados pelos autores como fatores de nível, inclinação e a curvatura da curva de juros no tempo. A proposição dos mesmos é mensurar estes fatores e, em seguida, aplicar modelos auto regressivos em cada um dos três e assim, encontrar as próximas curvas em um modelo de previsão.

A formulação proposta por DL é dada por:

$$y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (1)$$

DL interpretam os parâmetros do modelo da seguinte forma: o parâmetro λ_t diz respeito à taxa exponencial de decaimento, é dizer que via de regra valores pequenos de λ_t refletem um decaimento suave e lento, causando uma boa aderência à curva para prazos mais longos, ao passo que valores altos de λ_t provocam um decaimento mais acelerado, ajustando-se melhor às taxas de curto prazo.

Figura 2 – Representação gráfica de cada um dos *loadings* do modelo.



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Os fatores β_{0t} , β_{1t} e β_{2t} são interpretados como três fatores latentes dinâmicos. A carga de β_{0t} é igual a 1, uma constante que não tende à zero no limite, portanto pode ser vista como um fator de longo prazo. A carga de β_{1t} é igual a $\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right)$, uma função que inicia em 1, mas decai de modo direto e rápido para zero, podendo ser analisado como o fator de curto prazo. E por fim, o fator β_{2t} possui carga igual a $\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right)$ que inicia em zero, cresce, e após decai novamente a zero, pode ser visto como um fator de médio prazo.

5.1 Ajustando a Curva de Juros

A definição da curva de juros a partir da dispersão dos pontos das taxas depende do encontro dos parâmetros $\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ da Equação (1) anteriormente descrita em função de cada conhecido vencimento τ . A fim de mensurar estes, é feita uma minimização do erro utilizando a diferença de mínimos quadrados buscando a melhor representação da curva em relação aos dados encontrados no mercado, Definiremos para o cálculo estes dados reais do mercado como sendo $T_xRef(\tau)$.

Portanto.

$$\min_{\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2} J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) \quad (2)$$

Onde $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ é a função objetivo:

$$J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{\tau=1}^{M_\tau} \{T_x Ref(\tau) - y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)\}^2 \quad (3)$$

Este procedimento responde pelo encontro dos parâmetros que melhor representam as taxas futuras do mercado em t. Porém, vemos que existe um problema de otimização a ser solucionado e para tal deve ser resolvido encontrando o mínimo global da função objetivo $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$. Portanto, será igualado a zero o gradiente da função.

$$\nabla J = 0 \quad (4)$$

Substituindo a função (3) temos que o gradiente pode ser expresso por:

$$\nabla J = \sum_{\tau=1}^{M_\tau} -2\{T_x Ref(\tau) - y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)\} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

Onde as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_0} = 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_1} = \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta_2} = \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)(\lambda e^{-\lambda\tau})}{\lambda\tau} - \frac{(\beta_1 + \beta_2)(1 - e^{-\lambda\tau})}{(\lambda\tau)^2} + \beta_2\tau e^{-\lambda\tau}$$

Observa-se que a função objetivo $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ não é convexa, portanto o sistema de equações ∇J é um sistema de equações não lineares, o que traz implicações não triviais aos cálculos. Entretanto, a partir do momento em que é definido um valor para o fator de decaimento λ , $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ passa a torna-se uma função convexa, e portanto, o sistema de equações ∇J retorna um sistema de equações lineares com solução única. Neste momento então define-se o encontro de λ para que seja efetuada a resolução desta equação.

5.2 λ no ajuste da curva

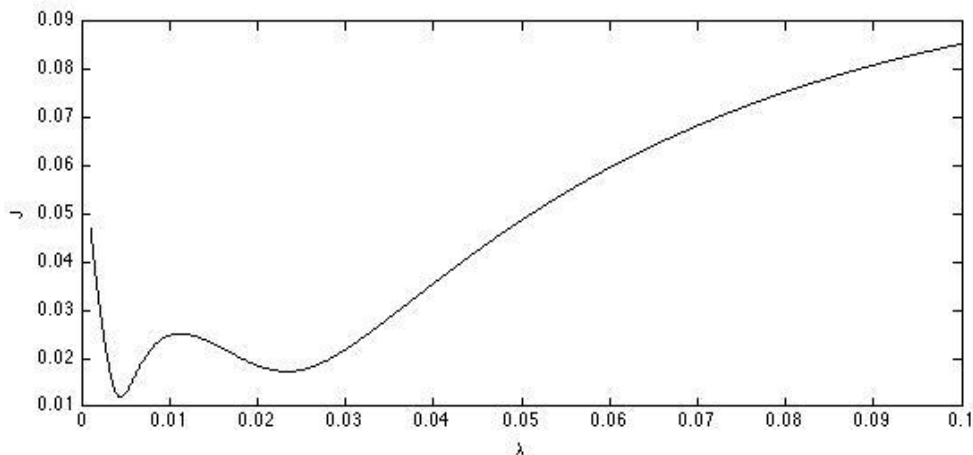
Como já citado na introdução, alguns autores preferem optar pela utilização de valores fixos para o fator de decaimento, que é definido de forma que o valor máximo da curvatura coincida com o máximo da carga do prazo médio. Podemos citar alguns valores destes, iniciando por DL os quais definem o valor fixo ótimo para a série de dados da curva de juros americana o lambda igual a 0,069. No caso de Diebold, Arouba e Rudebush (2007) este é fixado em 0,077 para os dados da mesma curva de juros. E, por fim, Almeida et al (2008) define 1,8610, que nos gráficos é apresentado em 0,00738⁶, como o fator de decaimento ótimo para o

⁶ Almeida et al (2008) define em seu trabalho o λ fixo de ajuste da curva igual a 1,8610. Como se trata conceitualmente deste valor para uma capitalização contínua e diária, efetuou-se a divisão por 252 dias úteis, resultando em $\lambda=0,00738$ por mera facilitação do cálculo computacionalmente.

ajuste curva de juros brasileira, que em sua análise, retrata grupo de observações da mesma base de dados deste trabalho.

Intentando testar o λ como um parâmetro que varia para cada instante t já no ajuste da curva, deve-se resolver o problema de otimização causado por esta estratégia. O propósito aqui é que seja feito um processo de busca linear encontrando o melhor λ possível para cada período. Na prática é escolhido um λ dentro de um intervalo pré-definido donde encaixam-se a grande maioria dos λ ótimos - definidos assim pelo seu melhor ajuste à curva - a fim de que seja possível calcular os outros três fatores da equação de uma forma mais simples, sendo o menor valor λ da função objetivo (2) o que traz o melhor ajuste da curva de juros em t . O intervalo de experimento do λ em questão é abalizado entre 0,00105 e 0,101 de modo a cobrir com representatividade valores possíveis de λ dada a experiência encontrada na literatura. Então, intervalo em questão compreende 2.000 pontos equidistantes na razão de 1/20.000 e foi escolhido por entender que agasalha uma fatia representativa de λ ótimos sem que haja um sacrifício muito grande em função da demanda computacional na busca por estes dados.

Figura 2 - Busca linear de λ que minimiza o erro do ajuste.



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Note-se que poderia ser feito um processo de busca linear sem a definição de parâmetros em um intervalo fixo, buscando o mínimo da função a partir de um determinado ponto em diante. Ocorre que para este trabalho tornou-se preferível o teste de todos os valores do intervalo em detrimento de algum algoritmo de caimento

em razão de poderem ocorrer falhas como a possibilidade constatada na hipótese da Figura 2, onde em função de haver dois mínimos locais neste intervalo, existe o risco de incorrer na escolha do λ não ótimo, não sendo este o mínimo global.

Tendo um parâmetro para o λ , o problema de otimização pode ser resolvido então em duas etapas, sendo que a resolução de cada uma ocorre de forma separada.

$$\min_{\lambda}(\min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2} J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)) \quad (6)$$

Observa-se que o problema de otimização interno é convexo podendo ser resolvido utilizando uma expressão analítica, como será visto na sequência. Já o problema de otimização externo, não é convexo, mas torna-se de mais fácil resolução por envolver apenas uma variável, o parâmetro λ .

Para resolver o problema de otimização interno calcula-se o gradiente da função objetivo

$$J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \{T_x Ref(\tau) - y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)\}^2 \quad (7)$$

Nota-se que tendo definido λ , o gradiente da função J torna-se:

$$\nabla J = \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} -2\{T_x Ref(\tau) - y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)\} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Resolvendo novamente o problema de otimização.

$$\nabla J = 0 \quad (9)$$

Assim, o gradiente da função objetivo é dado por:

$$\nabla J = \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} 2y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} - 2T_x Ref(\tau) \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Igualando o gradiente da função objetivo $J(\lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ a zero temos que:

$$\sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2) \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} = \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} T_x Ref(\tau) \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Utilizando a expressão $y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$, podemos escrever a equação acima como:

$$\sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \beta_0 \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} + \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} + \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} = \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} T_x Ref(\tau) \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta_2} \end{bmatrix}$$

E utilizando as derivadas parciais de $y(\tau, \lambda, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ a expressão pode ser descrita como:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \end{bmatrix} \\
& + \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \beta_1 \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \end{bmatrix} \\
& + \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \beta_2 \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \end{bmatrix} \\
& = \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} T_x Ref(\tau) \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \\ \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Escrevendo o sistema acima de forma matricial, temos:

$$A \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = b \quad (12)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} 1 & \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) & \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \\ \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) & \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) & \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \\ \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) & \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right) \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) & \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right) \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} 1 \\ \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) \\ \sum_{\tau=1}^{M_{\tau}} \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \end{bmatrix}$$

Por conseguinte, a solução do problema interno de otimização é dada por:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot b \quad (13)$$

Portanto, encontrando um valor para λ , pode-se definir os valores de β_0 , β_1 e β_2 pela expressão (13).

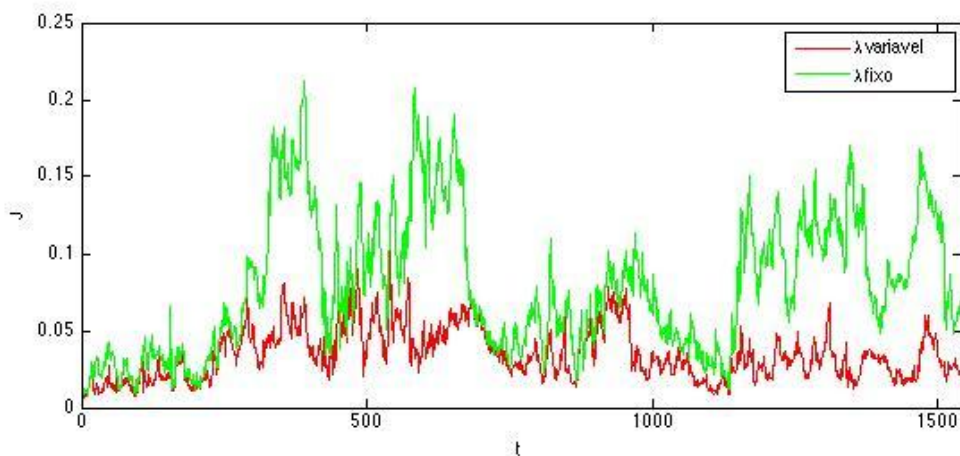
5.3 Resultado do Ajuste da ETTJ

Para medir os resultados encontrados, dada a implementação do λ ao modelo proposto, foi utilizado como parâmetro de comparação, além dos dados reais de mercado o fator de decaimento exponencial fixo, tal qual DL propuseram em seu modelo base. Porém, como tratamos aqui da curva de juros brasileira e todas as características próprias que permeiam esta, ao invés de adotar o fator enunciado por DL para a curva americana, é utilizado o valor de λ fixo proposto por Almeida et al (2008) que foi medido para a ETTJ brasileira partindo também das amostragens de DI Futuro.

Os resultados encontrados no ajuste da curva utilizando o fator de decaimento variável nos moldes apresentados são encorajadores. De fato, o que se percebe é que a variabilidade de λ provoca uma maximização nos resultados do ajuste da curva em relação à utilização desta variável estática, e é constatado que ele possui importância a ponto de permitir este relativo aumento na complexidade dos cálculos. Como resultado foi obtida uma redução generalizada do distanciamento da curva para a totalidade dos pontos de vencimento das taxas de juros no mercado Futuro de DI brasileiro em relação à utilização do λ fixo no decorrer de t . A fim de elucidar graficamente, vemos que na Figura (3) é feito um

comparativo entre a utilização do fator de decaimento variável conforme o demonstrado até aqui e a aplicação do λ fixo, empregado por Almeida et al (2008) na modelagem de ajuste da sua estrutura a termo. Este gráfico representa a diferença de mínimos quadrados em cada ponto t entre os pontos reais do mercado e os valores encontrados na modelagem da ETTJ calculada utilizando λ fixo e λ variável segundo os critérios propostos.

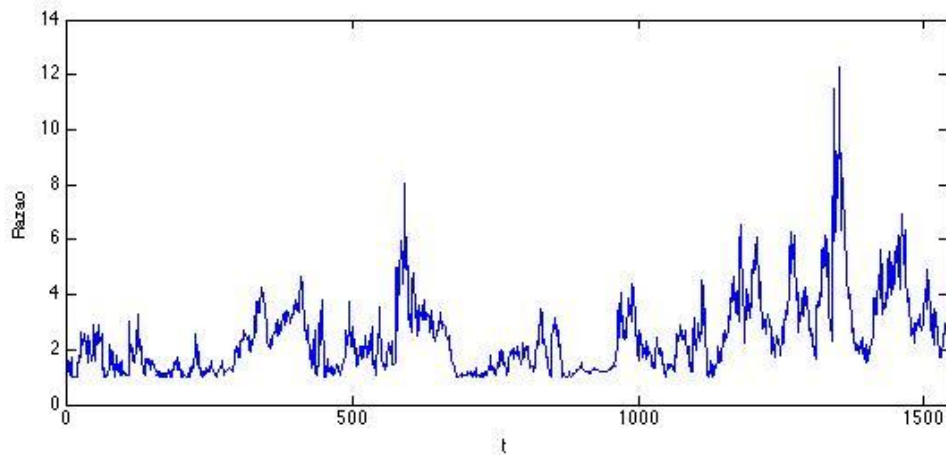
Figura 3 – Análise gráfica do valor da diferença de mínimos quadrados (J) em cada momento t para a aplicação do fator de decaimento λ fixo e variável.



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Através da demonstração acima, percebe-se que na grande maioria das análises da diferença de mínimos quadrados entre os pontos ajustados pela curva e os pontos reais do mercado futuro de DI tiveram um valor de diferença menor para o ajuste quando se utilizando da variabilidade de λ . Vê-se esta diferença na demonstração gráfica da razão das curvas acima na Figura (4) e também pode-se constatar que $Razão \geq 1, \forall t$ dentro do intervalo. Portanto, excluídos os intervalos onde se obtém resultados semelhantes para ambas as modelagens, no trade off entre λ fixo ou variável, é preferível variar o fator sendo que a razão de mínimos quadrados encontrada entre estes pode chegar a aproximadamente 12 vezes (Figura (4)).

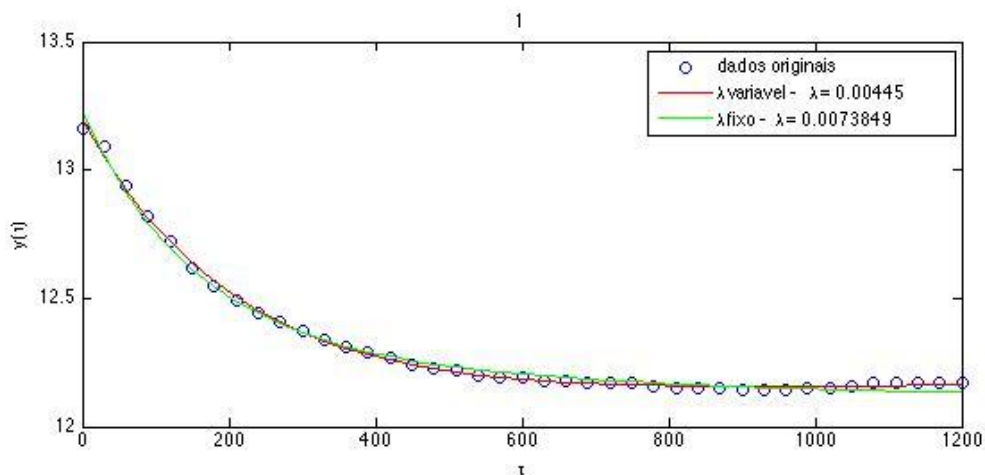
Figura 4 – Razão = $\frac{J_t^{Fixo}}{J_t^{Variável}}$



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Para uma análise mais criteriosa deste comparativo, seleciona-se a seguir curvas em quatro pontos t dispersos dentro da amostra, iniciando-se em 1 e com espaçamento de 500 dias úteis entre cada um destes, sendo este um valor arbitrariamente escolhido a fim de considerar uma distância considerável de diferente momento e situação econômica. Nas curvas a seguir os círculos correspondem aos dados reais de mercado das taxas de juros de fechamento diário do DI futuro negociados na BMeF Bovespa, a curva em vermelho responde pelo ajuste da curva com λ variável e a linha verde representa a curva com o λ fixo para todo o intervalo de t .

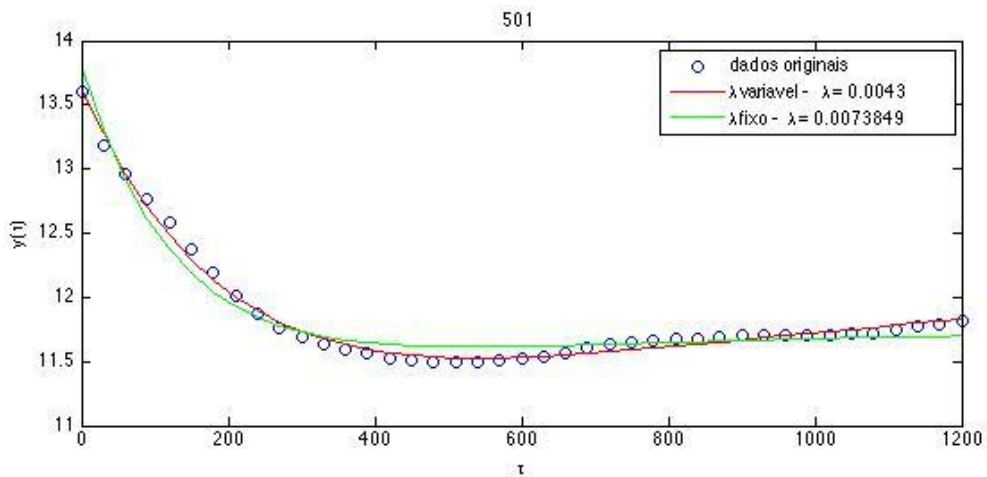
Figura 5 - ajuste da curva de juros em $t=1$



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

A curva em $t = 1$, representada na Figura (5) não carece de um ajuste mais complexo, visto não haver nenhuma inclinação abrupta no decorrer das maturidades, e há uma diferença pequena entre os pontos reais negociados no fechamento deste dia e as curvas elaboradas a partir destes.

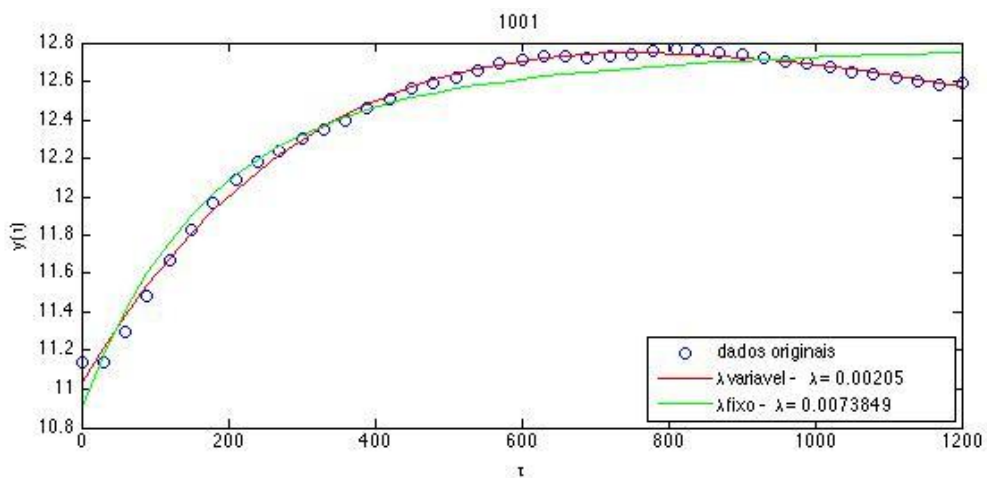
Figura 6 – ajuste da curva de juros em $t=501$



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Em $t = 501$, constante na Figura (6) é possível ver uma aproximação menor entre as curvas e os pontos das taxas de juros tanto nas inclinações de curto quanto longo prazo, especialmente em se tratando da curva de cor verde (λ fixo).

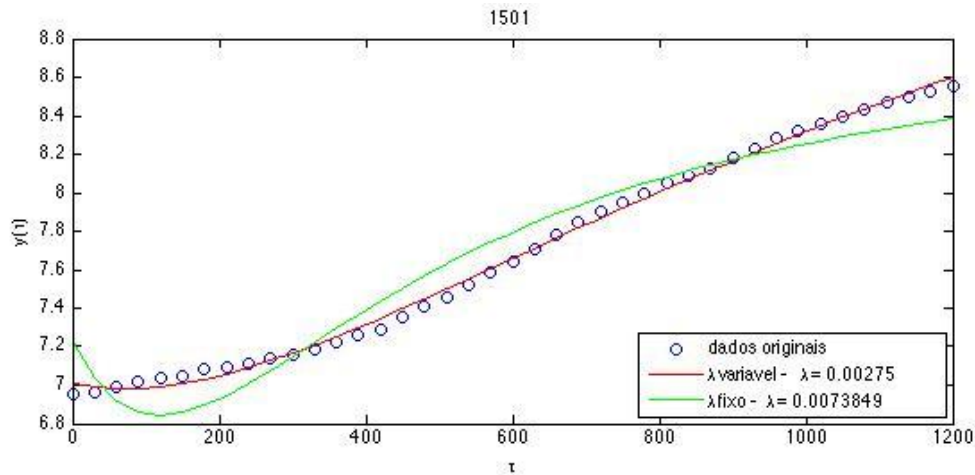
Figura 7 - ajuste da curva de juros em $t=1001$



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Pode-se notar um distanciamento na Figura (7) entre a curva de juros modelada com o λ fixo especialmente no que tange a inclinação de longo prazo.

Figura 8 – ajuste da curva de juros em t=1501



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

A Figura (8) é a que demonstra a maior discrepância entre os pontos de juros futuros e as curvas, também sendo a que traz uma maior diferença entre o valor do fator de decaimento.

Novamente observa-se que a ETTJ se ajusta melhor ao longo do tempo no modelo proposto quando se utilizando de uma variação do fator de caimento. Ocorre que a proposição do λ variável facilita o cálculo das cargas de β_0, β_1 e β_2 em cada ponto t ao passo que a manutenção do λ fixo não possui esta mesma capacidade. Agora, a fim de termos uma comparação numérica, mensuramos novamente estas quatro curvas já demonstradas em gráfico em forma de tabela. A verificação é semelhante, demonstrando qual dos dois modos de tratamento (fixo ou variável) reduz a diferença média em mínimos quadrados entre a curva estimada e os juros pertinentes à base de dados em seus respectivos vencimentos.

Vejamos o seguinte quadro:

Quadro 1 – diferença em mínimos quadrados entre as curvas de ajuste e os dados reais do mercado

T	Q (λ fixo)	Q (λ variável)
1	0,012038211	0,020612226
501	0,043236543	0,091480637
1001	0,031889084	0,086283875
1501	0,030346117	0,124926250

Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

O quadro (1) representa a diferença média em mínimos quadrados relativa às quatro curvas graficamente apresentadas acima. Pôde ser percebido visualmente e podemos agora constatar numericamente, a diferença em mínimos quadrados das curvas da Figura (5) em $t = 1$ possuem uma relativa pequena diferença em mínimos quadrados, ou seja, ambos os fatores de decaimento são semelhantes se mostraram eficientes em fixar a ETTJ. Por outro lado, se for considerado $t=1501$ representado graficamente pela Figura (8), pode-se constatar um aumento nessa diferença. Ou seja, o fator de decaimento fixo que possuía um ajuste relativamente bom para a curva em $t = 1$, teve uma performance menos satisfatória em $t = 1501$. Resumidamente conclui-se de que não chega a haver erro na utilização deste λ fixo pois o mesmo foi efetivo em parte das amostras, ou em determinado comportamento das taxas de juros futuros, demonstrando-se eficiente em algumas curvas pontuais. O que mais pode ser notado é que então a utilização do λ fixo pode não ser ideal para intervalos de dados muito extensos ou que estejam expostos a oscilações econômicas consideráveis entre as expectativas de juros de curto e longo prazo em seu intervalo amostral. Em suma constata-se que para o objetivo almejado, a livre variação do fator de decaimento traz resultados favoráveis ao trabalho até aqui desenvolvido.

Estendendo ainda mais as análises estatísticas em termos de avaliação das mesmas, elencamos a seguir alguns quadros que corroboram com os resultados até aqui encontrados. Nestas amostras serão apresentados o Erro Quadrático da Média (MSE), a Raiz do Erro Quadrático da Média (RMSE), o Erro Absoluto da Média (MAD) e o Erro Absoluto do Percentual da Média (MAPE), todos são feitos

considerando os dados mensurados através da ETTJ em comparação com os dados reais de mercado.

Quadro 2 – Avaliação estatística dos dados de ajuste da curva utilizando o lambda variável

	MSE	RMSE	MAD	MAPE
1	4,25E-04	2,06E-02	1,60E-02	1,29E-03
501	8,37E-03	9,15E-02	7,43E-02	6,19E-03
1001	7,44E-03	8,63E-02	7,12E-02	5,78E-03
1501	1,56E-02	1,25E-01	1,09E-01	1,44E-02

Fonte: Elaboração própria

Quadro 3 – Avaliação estatística dos dados de ajuste da curva utilizando o lambda fixo

	MSE	RMSE	MAD	MAPE
1	1,45E-04	1,20E-02	9,15E-03	7,35E-04
501	1,87E-03	4,32E-02	3,67E-02	3,08E-03
1001	1,02E-03	3,19E-02	2,18E-02	1,82E-03
1501	9,21E-04	3,03E-02	2,65E-02	3,52E-03

Fonte: Elaboração própria

6 PREVISÃO DA CURVA DE JUROS

A previsão da curva de juros, apesar de incipiente, vem se tornando tema recorrente em na literatura acadêmica nacional. Fato este que se deve, além da utilidade prática visto o alongamento das maturidades dos títulos, em parte à vasta gama de possibilidades de mutabilidade desta previsão, seja através de seleção de períodos, tratamento das variáveis do modelo e o mais comum que são os diferentes modelos de previsão.

Em seu trabalho, DL concebem o emprego de modelos auto regressivos aplicados aos parâmetros de nível, inclinação e curvatura, mantendo constante o fator de decaimento da equação. Em especial, no modelo original é defendida a aplicação de um modelo auto regressivo de ordem um, o modelo AR(1), que é um modelo estatístico para a previsão de séries temporais em detrimento de um modelo VAR (1). Esta escolha é justificada pelos autores por dois motivos: Primeiro, por conhecimento da literatura macroeconômica, pois VAR's irrestritamente tendem a produzir previsões pobres para variáveis econômicas, inclusive quando existe uma importante interação de variáveis cruzadas devido ao grande número de parâmetros incluídos e o resultado potencial de sobre ajuste da amostra. Segundo, os fatores demonstram pouca interação em termos de serem cruzados também sendo pouco correlacionados.

Como o objetivo do trabalho não é a previsão específica em relação ao tempo, comparando a mesma estimação de previsão da ETTJ em diferentes horizontes de previsão, mas sim uma questão de testar o fator de decaimento em diferentes formas de estimação em um só espaço de tempo, serão utilizadas todas as 1541 amostras e efetuar-se-á sempre a previsão para o primeiro momento após o agrupamento dos dados utilizados para a estimação dos fatores da previsão da ETTJ, entendendo-se assim que a aplicabilidade possa ser para um mês, uma semana ou um dia, dependendo da frequência de coleta dos dados e assim o resultado do teste quanto ao período de previsão surtirá efeito diferenciando-se em uma questão de frequência da coleta. Utilizando toda a base de dados, o processo de seleção desta consiste em agrupar um intervalo de dados $N = \{t, t + 1, t + 2, \dots, t + 199\}$ amostras da ETTJ ajustada, e a partir desta estimar utilizando seus fatores para realizar a previsão das taxa de juros formadoras da curva em em $N + 1$,

sendo t uma sequência temporal de $t = 1, 2, 3, 4, \dots, 1339, 1340$. Exemplificando, são utilizados os dados dos 200 dias compreendidos entre 01/02/2007 e 19/10/2007 para prever a curva do dia 22/10/2007, primeiro dia útil posterior à amostra. Os 200 dados compreendidos entre os dias 02/02/2007 e 22/10/2007 serão utilizados para prever a curva de juros do dia 23/10/2007, e assim sucessivamente até 28/03/2013.

Existe a necessidade de que se faça a comparação desta para testar a validade do experimento, e portanto, são utilizadas as taxas reais de fechamento do mercado futuro de DI da BM&F Bovespa fora da amostra, comercializados no momento t coincidente com $N + 1$, comparando-as com o valor estimado na previsão da curva para este mesmo dia $N + 1$.

6.1 Modelo AR(1) para β_0, β_1 e β_2

Neste trabalho o modelo auto regressivo AR(1) é calculado utilizando como base as séries temporais dos últimos 200 fatores β_0, β_1 e β_2 anteriores à data de cálculo da previsão a fim de estimar os próximos $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$. Ao invés de separar a amostra entre período de estimação da curva e período de previsão, a proposta é correr a totalidade da amostra, utilizando em cada período de previsão os últimos duzentos dados amostrais de ajuste para prever a curva um período imediatamente a frente. Este modelo é preferível em função de a série de dados ser um tanto extensa com amostras diárias, e assim poder aproveitar toda a heterogeneidade da ETTJ.

Resolvendo então, tem-se que:

$$\hat{\beta}_{it} = c + \gamma\beta_{i,t-1} \quad i = 0, 1, 2 \quad (14)$$

Aplica-se novamente a técnica de mínimos quadrados (Q) para ser resolvido o coeficiente de regressão γ em (14)

$$\min_{c,\gamma}(Q) \quad (15)$$

$$Q = \sum_{t=1}^{200} (\beta_{it} - \hat{\beta}_{it})^2$$

$$Q = \sum_{t=1}^{200} (\beta_{it} - c_i - \gamma\beta_{i,t-1})^2$$

Buscando a minimização da função, iguala-se o gradiente da função a zero.

$$\nabla Q = 0 \quad (16)$$

$$\nabla Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial c} \\ \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial c} = \sum_{t=1}^{200} 2(\beta_{it} - c_i - \gamma\beta_{i,t-1}) \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = \sum_{t=1}^{200} 2(\beta_{it} - c_i - \gamma\beta_{i,t-1}) \cdot (-\beta_{i,t-1})$$

Igualando as duas derivadas parciais a zero:

$$\sum_{t=1}^{200} -2\beta_{it} + 2c + 2\gamma\beta_{i,t-1} = 0 \quad (17)$$

$$\sum_{t=1}^{200} -2\beta_{it} \cdot \beta_{i,t-1} + 2c \cdot \beta_{i,t-1} + \gamma(\beta_{i,t-1})^2 = 0$$

Reescrevendo a função em formato matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{200} 2 & \sum_{t=1}^{200} 2\beta_{i,t-1} \\ \sum_{t=1}^{200} 2\beta_{i,t-1} & \sum_{t=1}^{200} (\beta_{i,t-1})^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{200} 2\beta_{it} \\ \sum_{t=1}^{200} 2\beta_{it} \cdot \beta_{i,t-1} \end{bmatrix}$$

Onde pode-se definir as matrizes acima como sendo uma da seguinte maneira:

$$A \cdot x = B \quad (18)$$

$$\text{Sendo } x = \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Portanto, resolvendo a equação para x:

$$x = A^{-1} \cdot B \quad (19)$$

6.2 Tratamento do λ na previsão da ETTJ

A utilização do parâmetro de decaimento variável trouxe resultados favoráveis ao ajuste da curva de juros, e dando andamento ao propósito, estende-se aqui esta premissa para a previsão da curva de juros. DL mantiveram, assim como no ajuste, este mesmo parâmetro para a previsão e a regra é mesma em Diebold, Arouba e Rudebush (2006) sendo mantida para Diebold e Rudebush (2013). Na curva

brasileira, Almeida et al (2008) aumenta o leque de opções de ajuste deste parâmetro, buscando o λ que diminui o erro quadrático para a busca de cada prazos de previsão (curto, médio e longo). Como o interesse deste é a simples comparação de eficiência em um curto prazo, não é feita a segmentação por prazos de previsão, mas sim sempre um período a frente, durante toda a análise da amostra.

O comparativo na previsão será efetuado novamente entre a manutenção do mesmo fator de decaimento do ajuste e a oscilação deste, porém, para dar maior fidedignidade aos resultados encontrados neste trabalho, incluir-se-á um terceiro comparativo recorrente na literatura chamado de *Random Walk*.

6.2.1 λ Fixo

A manutenção do mesmo λ além da fixação da curva para o modelo de previsão é considerada neste trabalho primeiro por ser uma forma já consagrada de efetuar as previsões, mas também assume o papel de parâmetro de comparação entre os outros dois métodos que serão desenvolvidos e demonstrados em seguida.

O λ constante considerado para a previsão permanece sendo mantido o do ajuste da curvatura segundo metodologia do modelo DL, que no caso, o utilizado para este trabalho diz respeito ao da curva de juros brasileira calculada por Almeida et al (2008) ($\lambda = 1,8610$). Portanto, aqui teremos os três parâmetros de nível, inclinação e curvatura calculados através de um modelo auto regressivo AR(1) e o padrão de curvatura imutável ao longo do período de previsão. A mensuração dos outros três fatores de nível, inclinação e curvatura será efetuada com base nos valores encontrados no ajuste da curva considerando o λ fixo.

6.2.2 λ Variável

Este trabalho torna persistente a questão quanto ao teste dos resultados embasados no modelo proposto utilizando para tal o fator de decaimento dinâmico ao longo do tempo. Seguindo o conceito de previsão testado à exaustão por DL, mantém-se o modelo estatístico AR(1) como estimador de λ para a previsão da curva de juros e para tal, são utilizadas as últimas duzentas amostras extraídas

da série de dados do λ variável para prever o termo seguinte. A mensuração dos outros três fatores de nível, inclinação e curvatura é feita com base nos valores encontrados no ajuste da curva ajustada também com o λ variável. Matematicamente, o modo de estimação de $\hat{\lambda}$ para a previsão segue a metodologia da equação (14) sendo que para este teremos as seguintes substituições necessárias:

$$\hat{\lambda}_t = \hat{c} + \gamma\lambda_{t-1} \quad (20)$$

6.2.3 *Random Walk*

Os resultados auferidos com os dois métodos anteriores trazem resultados distintos, os quais são passíveis de comparação aos dados fora da amostra, que são de conhecimento e de fácil mensuração. Então, ambos os resultados podem ser um preferível ao outro, porém não há a certeza de que sejam absolutamente resultados interessantes. Portanto, estabelece-se aqui uma terceira via de comparação a qual traz à luz a real utilidade de aplicação dos outros dois anteriores em função deste. O procedimento de *Random Walk* parte da premissa de que qualquer valor aleatório possa ser sucedido de outro, e aqui adota-se simplesmente a replicação os resultados do último dia de estimação dentro da amostra para o primeiro dia de previsão, fora da amostra. Como resultado, conhece-se a utilidade ou não da aplicação dos testes de previsão em detrimento de simplesmente manter os valores como estão.

$$\hat{y}(\tau)_{t+1} = y(\tau)_t \quad (21)$$

6.3 Resultado da previsão

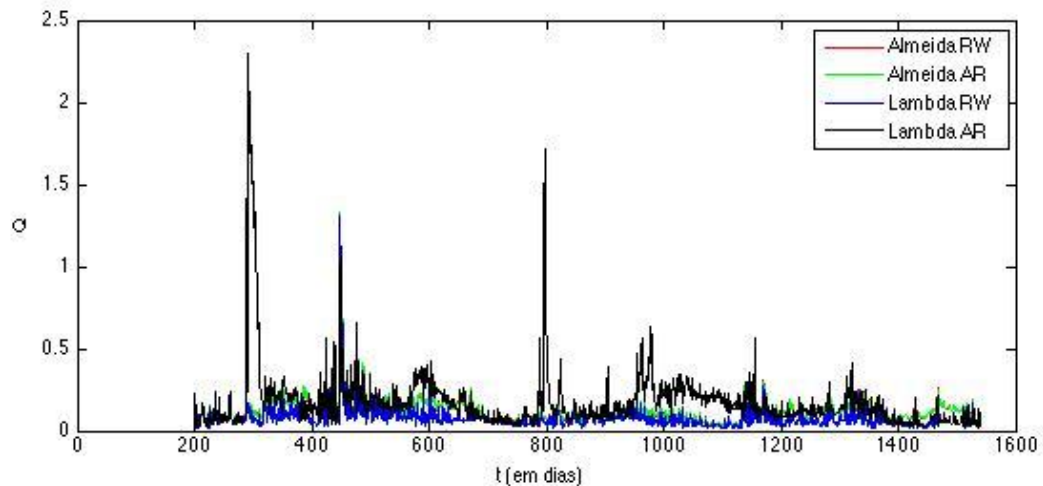
A previsão da curva de juros ocasionou resultados diferentes nas técnicas apresentadas, cada qual com suas especificidades. Como medida padrão para se descobrir o grau de erro entre as curvas formadas através dos parâmetros

estimados e os pontos das taxas de juros futuros nas respectivas datas utiliza-se a diferença de mínimos quadrados (Q) em relação aos juros reais praticados no mercado para a data de previsão.

Os resultados conjuntos para todas as previsões podem ser contemplados na Figura (9), onde graficamente são ponderadas as diferenças entre as curvas em um determinado tempo t a partir de 200 dias corridos desde o início da amostragem de previsão, isto posto dado que as primeiras 200 amostras foram utilizadas somente para a previsão de $t=201$. Neste gráfico estão contidos os comparativos de todas as diferenças de mínimos quadrados, onde constam as duas diferentes formas de obtenção dos modelos de previsão. Na primeira forma é considerado o λ fixo mensurado por Almeida et al (2008) para a curva brasileira, e, portanto a legenda desta é nominada de Almeida, que pode ser dividida em duas formas, uma denominada de **Almeida AR**, quando é feita a estimação dos três fatores $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$ e mantém-se o λ do modelo fixo. A outra legenda, nominada como **Almeida RW**, obedece a estratégia de *Random Walk* replicando os dados de ajuste da curva mantendo o fator de decaimento constante. Na segunda forma de previsão, é utilizado o fator de decaimento variável, ou seja, a estimação dos fatores da próxima curva são concebidos partindo dos dados originais coletados dos ajustes das curvas concebidos com o λ dinâmico ao longo do tempo. Aí abrem mais duas possibilidades de estimação, uma utilizando modelos auto regressivos para a estimação de todos os fatores do modelo, inclusive λ , chamado de **Lambda AR** e a outra considerando o processo de *Random Walk* para os dados concebidos pelo ajuste da curva com o fator de decaimento variável denominada **Lambda RW**.

O que a primeira vista pode ser constatado que o retorno gráfico exposto demonstra amplas magnitudes de afastamento da estimação às taxas fora da amostra quando da utilização do λ variável (Lambda AR) em relação aos demais métodos. Já a utilização do λ variável através do processo de *Random Walk* findou em certa paridade de retorno das diferenças com uma vantagem nos resultados de menores de erro.

Figura 9 – Diferença de mínimos quadrados na comparação entre as quatro formas de utilização do λ na previsão das curvas de juros.



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Para se ter um juízo mais apurado em relação aos resultados acima apresentados, pode-se também criar uma construção numérica e portanto mais rigorosa das observações considerando resultados mais analíticos. O Quadro (2) retorna o valor médio, o valor máximo, mínimo e a variância de cada uma das três técnicas aplicadas:

Quadro 4 – Diferença média, máxima, mínima e desvio padrão em mínimos quadrados entre as curvas de previsão e os dados reais do mercado.

	\bar{Q}	Q Máx	Q Mín	$\bar{\sigma}(1)$
Almeida RW	1,19E-01	1,31E+00	1,59E-02	7,56E-02
Almeida AR	1,22E-01	1,33E+00	2,17E-02	7,75E-02
Lambda RW	8,19E-02	1,31E+00	1,29E-02	7,39E-02
Lambda AR	1,77E-01	2,29E+00	2,11E-02	1,94E-01

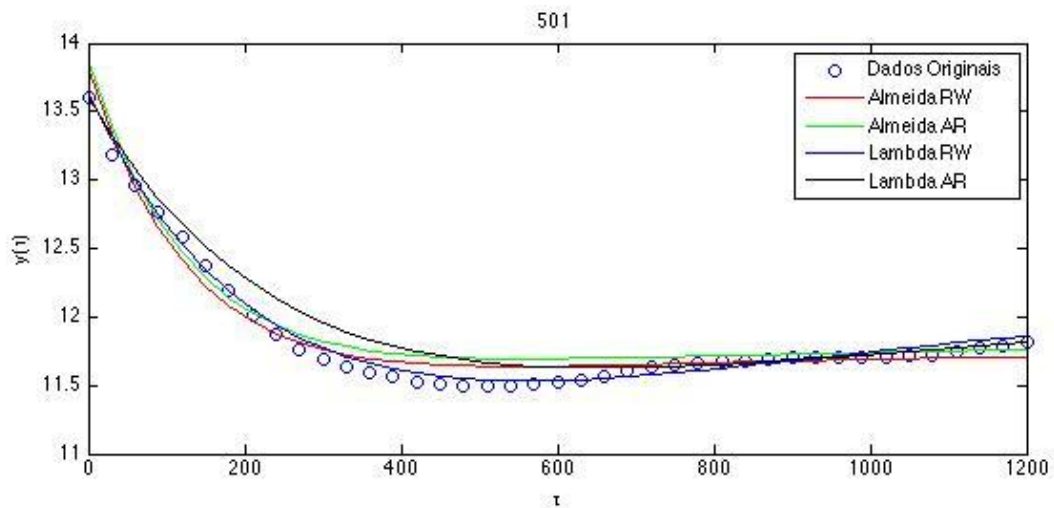
Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

A análise deste quadro traz clareza quanto ao desempenho de cada técnica de previsão em toda a extensão dos resultados propostos. Ao mesmo tempo em que a utilização de Lambda RW traz os melhores retornos esperado em razão da

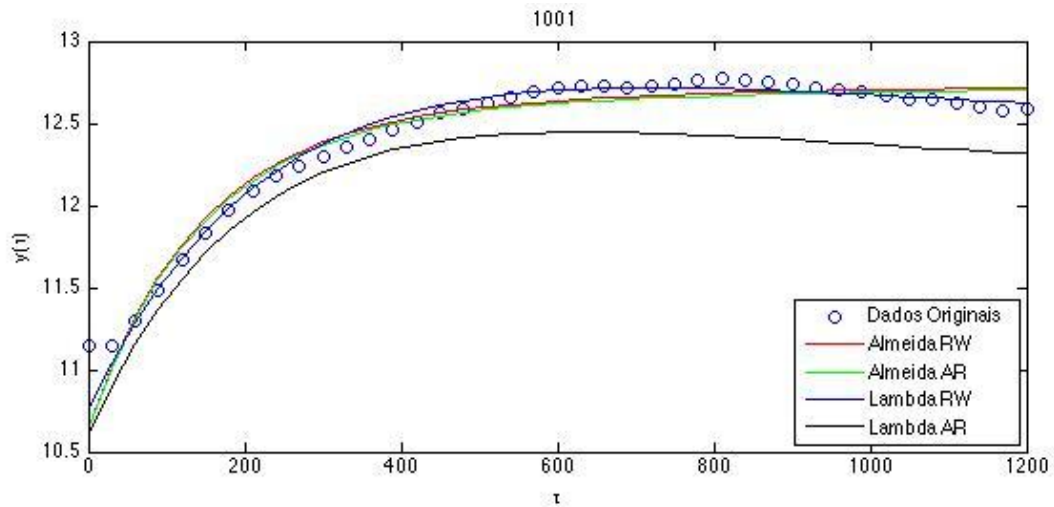
diferença de mínimos quadrados em relação aos dados reais, o emprego de Lambda AR retorna os valores menos interessantes das simulações propostas. As previsões feitas com as nominadas Almeida RW e Almeida AR obtiveram resultados semelhantes entre elas, o que é próximo do encontrado em DL, porém os autores, diferentemente deste resultado, encontraram melhoras na escolha de um modelo AR(1) ao uso de *Random Walk*.

Assim como no ajuste da curva, separamos e analisamos as previsões mais proximamente, em determinados momentos t diferentes, sendo estes os dias 501, 1001 e 1501:

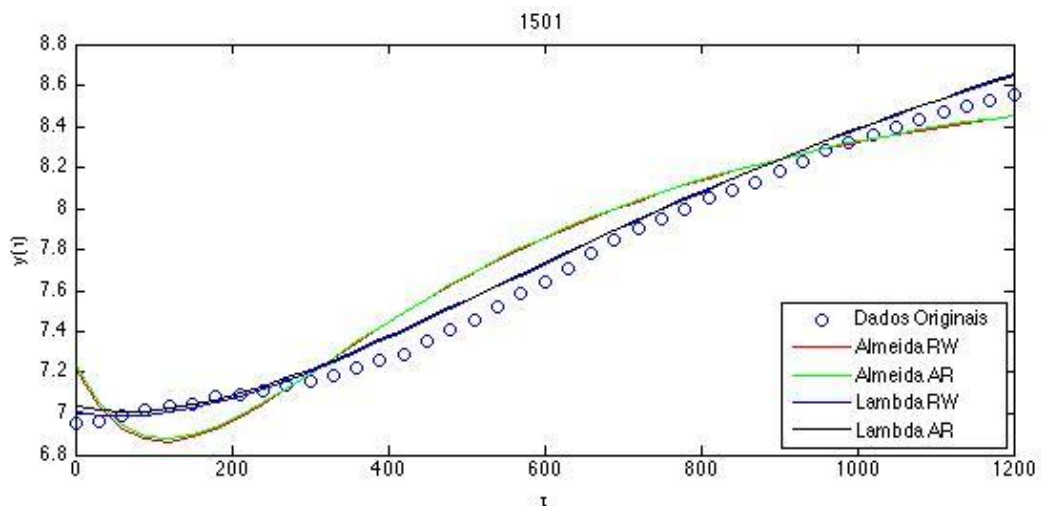
Figura 10 - previsão da curva de juros em $t=501$



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Figura 11 - previsão da curva de juros em $t=1001$ 

Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Figura 12 - previsão da curva de juros em $t=1501$ 

Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Percebe-se nos gráficos apresentados que há uma correlação entre as linhas Almeida RW e Almeida AR sendo que entre estes, de forma prática, há uma constância dos fatores de decaimento e uma oscilação nos fatores de nível, inclinação e curvatura quando da estimação destes para a previsão da ETTJ. Ao passo que as curvas das proposições de Lambda RW e Lambda AR possuem uma maior diferença generalizada ao longo de t , sendo que estas se diferenciam em todos os seus fatores no momento da previsão, mantendo-se a melhor performance relativa em Lambda RW.

Pode-se alterar o ângulo de visão, focando não mais em t , mas sim na maturidade de cada uma das curvas efetuando as mesmas análises dos Quadro 2 e Quadro 3, o que incorre em fato de obter-se o mesmo resultado de preferência pela maximização dos resultados encontrada em Lambda RW. Vejamos nos quadros abaixo:

Quadro 5 – Avaliação estatística dos dados de ajuste da curva utilizando em Almeida RW

	MEDIA	MSE	RMSE	MAD
30	6,60E-03	9,91E-03	9,96E-02	7,11E-02
90	4,01E-02	1,53E-02	1,24E-01	9,91E-02
360	2,35E-02	1,64E-02	1,28E-01	9,16E-02
720	1,61E-03	1,87E-02	1,37E-01	9,59E-02
1080	8,03E-03	2,35E-02	1,53E-01	1,09E-01

Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Quadro 6 – Avaliação estatística dos dados de ajuste da curva utilizando em Almeida AR

	MEDIA	MSE	RMSE	MAD
30	9,27E-03	1,15E-02	1,07E-01	7,84E-02
90	3,79E-02	1,51E-02	1,23E-01	9,78E-02
360	2,24E-02	1,81E-02	1,35E-01	9,70E-02
720	2,19E-03	2,00E-02	1,42E-01	9,92E-02
1080	7,69E-03	2,41E-02	1,55E-01	1,11E-01

Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Quadro 7 – Avaliação estatística dos dados de ajuste da curva utilizando em Lambda RW

	MEDIA	MSE	RMSE	MAD
30	5,65E-03	6,75E-03	8,22E-02	5,50E-02
90	8,37E-03	4,11E-03	6,41E-02	4,83E-02
360	3,76E-03	1,44E-02	1,20E-01	8,23E-02
720	1,47E-03	1,43E-02	1,20E-01	7,81E-02
1080	1,46E-03	1,68E-02	1,30E-01	8,47E-02

Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

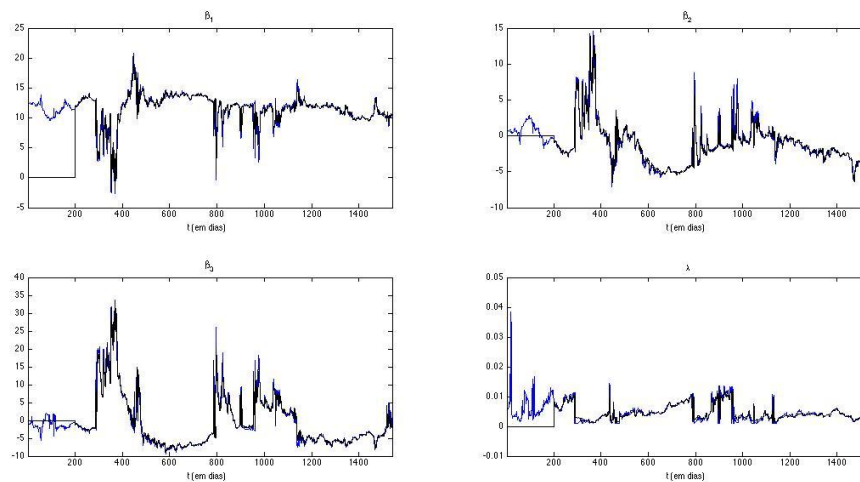
Quadro 8 – Avaliação estatística dos dados de ajuste da curva utilizando em Lambda RW

	MEDIA	MSE	RMSE	MAD
30	2,33E-02	3,22E-02	1,80E-01	1,31E-01
90	5,27E-02	3,22E-02	1,80E-01	1,34E-01
360	1,54E-02	3,30E-02	1,82E-01	1,40E-01
720	5,61E-02	5,47E-02	2,34E-01	1,45E-01
1080	1,05E-01	1,46E-01	3,81E-01	1,93E-01

Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

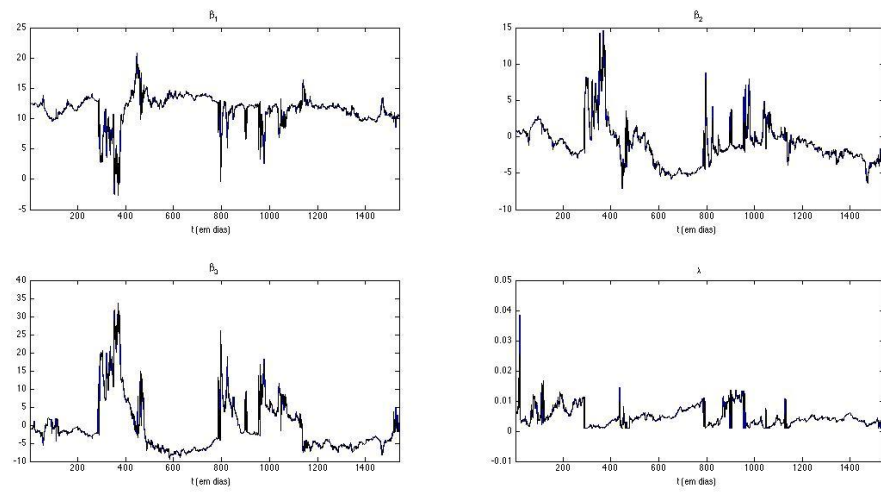
Comparando os extremos, que são o comportamento dos fatores de Lambda AR aos de Lambda RW no momento do ajuste (preto) em relação aos valores estimados para os mesmos t (azul), podemos acompanhar a maior ineficácia do modelo auto regressivo em gerar estimativas ótimas para a previsão, especialmente em termos do fator de decaimento exponencial:

Figura (13) Comparação entre os fatores de ajuste e de previsão para Lambda AR



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

Figura (14) Comparação entre os fatores de ajuste e de previsão para Lambda RW



Fonte: elaboração própria (agosto de 2014).

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve uma bem sucedida realização dos objetivos em razão do resultado, permeado nas expectativas geradas. Para fins de considerações finais é plausível inferir de que este pode ser segmentado em duas diferentes propostas com dois resultados distintos, conforme o proposto nos objetivos gerais do trabalho. Por primeiro em ordem processual, resolveu que em se tratando de um modelo de ajuste da ETTJ e alcance da melhor aproximação da curva às taxas de juros futuras praticadas no mercado, a escolha do fator de decaimento variável foi benéfica em comparação ao modelo proposto por DL, conforme o enunciado por Koopman, Mallee e van der Wel (2007). Nota-se que independentemente do λ fixo escolhido para todo o ajuste da ETTJ, este não possui a capacidade de a partir dele próprio, colaborar na mensuração todos os outros três fatores pelo fato da difícil adequação a diferentes comportamentos de curva. É dizer que ele não consegue acompanhar todos os desembaraços econômicos gerados pelas oscilações das expectativas das taxas de curto, médio e longo prazo quando é utilizada uma base de dados muito extensa e com uma grande heterogeneidade nas expectativas econômicas. Acrescenta-se que não há dúvidas de que existe sim uma consequência no agravamento da complexidade de mensuração destas curvas calculadas com um λ variável, visto serem geradas não linearidades nas resoluções dos seus sistemas, porém esta pode ser facilmente amenizadas ou então até suprimida por ferramentas computacionais.

A análise subsequente, de previsão da ETTJ, considerada no desenvolvimento deste trabalho implica em divergir do método que otimizou o resultado no ajuste da curva. Ocorre que a variação do fator de decaimento, que teve um excelente retorno quando do ajuste da curva, além de aumentar a complexidade do cálculo em relação à manutenção λ fixo, também trouxe resultados relativamente desfavoráveis em termos de eficiência. Constata-se uma maior diferença média dos mínimos quadrados da curva em relação às taxas futuras reais do mercado. Também ocorrem maiores variações em relação a esta média com picos expressivos de erros em determinados momentos, não traduzindo em uma fidedignidade desta estratégia para a prática.

Analisando os extremos dos resultados das previsões, encontramos conjuntamente o melhor e o pior resultado quando utilizados os dados das curvas ajustadas partindo de um fator de decaimento variável. A explicação soa relativamente trivial, pois o que se conclui do trabalho é que para uma boa previsão de curva, tornam-se mais importantes bons dados para mensuração do que bons modelos. Portanto, como o *Random Walk* simplesmente replica os resultados do último ajuste para a previsão, constatamos que a utilização do fator de decaimento é favorável ao ajuste da curva, mas fortemente inadequado para a previsão da curva através de modelo auto regressivo de ordem um. Este se tratando de um fator exponencial, traz uma distorção maior aos resultados em relação aos outros três fatores, piorando as previsões.

Sumariamente, este trabalho trouxe à luz os interessantes desdobramentos da aplicação de λ ao modelo proposto por DL em dois diferentes momentos segundo os parâmetros pré-definidos. É visto quando da vantajosa manutenção deste fator dinâmico em se tratando de fixar a ETTJ, pois ele possui de um melhor custo de oportunidade mesmo considerando a elevação de sua complexidade já que goza de uma considerável aplicabilidade prática no mercado em razão da fácil manipulação computacional. O mesmo não pode se dizer em relação à sua previsão, que se demonstrou pouco confiável quando do λ variável. Por conseguinte, os resultados positivos constatados para dados do ajuste da curva com o fator de decaimento exponencial variável trazem a possibilidade para um novo e futuro trabalho, complementação deste, focando justamente nos modelos de previsão, partindo de uma base fidedigna e maximizando estes com diferentes aplicações para que se façam mais coerentes os seus resultados. Considerando sua importância acadêmica e a sua utilização no mercado financeiro de administração de carteiras de renda fixa, este se torna um trabalho de grande valia.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C.; VICENTE, J. The Role of No-Arbitrage on Forecasting: Lessons from a Parametric Term Structure Model. **Journal of Banking and Finance**, [S.l.], 2008. Disponível em: <<http://www.fgv.br/professor/calmeida/Noarb.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.
- ALMEIDA, C. et al. Movimentos da Estrutura a Termo e Critérios de Minimização do Erro de Previsão em um Modelo Paramétrico Exponencial. **Revista Brasileira de Economia FGV**, [S.l.], v. 62 n. 4, p. 497 - 510, 2008. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbe/v62n4/a06v62n4.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.
- CALDEIRA, J.F. Estrutura a Termo da Taxa de Juros no Brasil: Observada e Ajustada. **Revista Análise Econômica**, Porto Alegre, n. 55, p. 95 - 122, 2011.
- CHRISTENSEN, J.; DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSH, S. **The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models**. NBER, Cambridge, n. 13611, 2007. Working Paper. Disponível em: <<http://www.nber.org/papers/w13611.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.
- DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. **J. Econometrics**, [S.l.], n. 130, p. 337–364, 2006 Disponível em: <<http://www.ssc.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.
- DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSH, S.; AROUBA, S. The Macroeconomy and the Yield Curve: a dynamic latent factor approach. **J. Econometrics**, [S.l.], n. 131, p. 309–338, 2006. Disponível em: <<http://www.ssc.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper55/DRAfinal.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.
- DUFFEE, G. **Forecasting with the Term Structure: The Role of No-arbitrage**. Johns Hopkins University, 2011. Working Paper. Disponível em: <<http://www.econ2.jhu.edu/people/duffee/duffeenoarbjan2011.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.
- DUFFIE, D.; KAN, R. A Yield-Factor Modelo of Interest Rates. **Mathematical Finance** [S.l.], n. 6, v. 4, p. 379–406, 1996. Disponível em: <<http://web.stanford.edu/~duffie/YieldFactorModel.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.
- HEAT, D.; JARROW, R. E.; MORTON, A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest-Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuating. **Econometrica**, [S.l.], v. 60, n. 1, p. 77–105, 1992 Disponível em: <<http://efinance.org.cn/cn/Feshuo/Bond%20Pricing%20and%20the%20Term%20Structure%20of%20Interest%20Rates%20A%20New%20Methodology%20for%20Contingent%20Claims%20Valuation1992.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

HULL, J.; WHITE, A. Pricing Interest Rates Derivates Securities. **The Review of Financial Studies**, [S.l.], v. 3, n. 4, p. 573–592, 1990 Disponível em:

<<http://efinance.org.cn/cn/FEshuo/Pricing%20interest-rate-derivative%20securities.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

KOOPMAN, S. J.; MALLEE, M. I. P.; VAN DER WEL, M. **Analyzing the Term Structure of Interest Rates Using the Dinamic Nelson-Siegel Model with Time-Varying Parameters**. Tinbergen Institute, Amsterdam, 2007, Disscussion Paper.

Disponível em: <<http://papers.tinbergen.nl/07095.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

LEITE, A.; FILHO, R.B.G.; VICENTE, J. V. M. **Previsão da Curva de Juros: um modelo estatístico com variáveis macroeconômicas**. Banco Central do Brasil, [S.l.], n. 186. 2009, Working Paper. Disponível em:

<<http://www.bcb.gov.br/pec/wps/port/wps186.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J. Common Factors Affecting Bond Returns. **Journal of Fixed Income**, [S.l.], v. 1, p. 54–61, 1991. Disponível em:

<<http://www.math.nyu.edu/faculty/avellane/Litterman1991.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

MCCULLOCH, J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates. **Journal of Business**, [S.l.], v. 44, p. 19-31, 1971. Disponível em: <<http://www.econ.ohio-state.edu/jhm/papers/MTTSOIR.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

NELSON, C.; SIEGEL, A. Parsimonious Modelling of Yeld Curves. **Journal of Business**, [S.l.], n. 60, v. 4, p. 473–489, 1987. Disponível em:

<<http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/NelsonSiegel.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

SVENSSON, L. E. O. **Estimating and Interpreting Forward Interest Rates:**

Sweden. NBER, [S.l.], n. 4871, 1994, Working Paper. Disponível em:

<<http://www.nber.org/papers/w4871.pdf>>. Acesso em: 21 ago. 2014.

VARGA, G. **Preço e estratégias com futuro de DI e FRA**. Publicado na resenha mensal da BM&F, [S.l.], n. 158, fev. 2004.

VARGA, G **Brazilian (local) term structure forecast in a fator model**. VII Encontro Brasileiro de Finanças, São Paulo, 2006a. Disponível em:

<http://www.fce.com.br/gv/artigos/2006_Modelagem_GyorgyVarga_IMPA.pdf>. .

Acesso em: 21 ago. 2014.

VARGA, G. Estrutura a termo baseada em títulos com pagamentos intermediários.

Revista Resenha BM&F, [S.l.], n. 168, p. 65–77, 2006b. Disponível em:

<http://www.fce.com.br/gv/artigos/2007_EstruturaTermoPgtsIntermediarios_GyorgyVarga_BMF.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2014.

VARGA, G. Teste de Modelos Estatísticos para a Estrutura a Tremo no Brasil.

Revista Brasileira de Economia, [S.l.], v. 63, n. 4, p. 361–394, 2009. Disponível

em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbe/v63n4/v63n4a04.pdf>> . Acesso em: 21 ago. 2014.

VASICEK, O. A. An Equilibrium Characterization of the term structure. **Journal of Financial Economics**, [S.l.], v. 5, p. 177–188, 1977. Disponível em: <[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/e11e4bc52747d1ddc125772400459afe/\\$FILE/Vasicek77.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/0/e11e4bc52747d1ddc125772400459afe/$FILE/Vasicek77.pdf)> . Acesso em: 21 ago. 2014.

VICENTE, J.; TABAK, B. **Forecasting Bond Yields in the Brazilian fixed Income Market**. Working Paper Series, Brasília, n. 141, p. 1–29, 2007. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/pec/wps/ingl/wps141.pdf>> . Acesso em: 21 ago. 2014.