Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

RAÍZES DE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES INTEIROS LIMITADOS

JAIRO DA SILVA BOCHI

Dissertação submetida ao curso de pós-graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre

Banca examinadora:
Prof. Dr. Albert Meads Fisher (Seattle - Washington)
Prof. Dr. Artur Oscar Lopes (UFRGS - IM)
Prof. Dr. Luiz Fernando Carvalho da Rocha (UFRGS - IM)

Abril 1997

Porto Alegre

Agradeço ao professor Artur Lopes
pela orientação e apoio.

RESUMO

Um problema matemático interessante consiste no estudo do conjunto das raízes de uma família de polinômios cujos coeficientes são restritos por certas condições. O trabalho [2] analisa polinômios cujos coeficientes são zeros ou uns, provando que o fecho do conjunto das raízes complexas destes polinômios é conexo por caminhos. Neste trabalho vamos considerar a família de polinômios cujos coeficientes são inteiros entre $-M$ e M, para M dado. Vamos mostrar que o fecho do conjunto das raízes reais não-nulas destes polinômios é a união de dois intervalos. Para isso, será necessário analisar também séries de potências com coeficientes restritos pelas mesmas condições.

ABSTRACT

An interesting mathematical problem is the study of the set of zeros of a family of polynomials whose coefficients are restricted by certain conditions. The paper [2], for example, analyses polynomials which coefficients are 0 or 1, proving that the closure of the set of complex zeros of these polynomials is path connected. We will consider here the family of polynomials with integers coefficients between $-M$ and M, for M given. We will show that the closure of the set of non-zero real zeros of these polynomials is the union of two intervals. For this purpose, it will be necessary to analyze also power series with coefficients restricted by the same conditions.

Seja $M \in \mathbf{Z}_+$ fixo. Definimos os seguintes conjuntos limitados de números inteiros

$$\Gamma = \{n \in \mathbf{Z}; \quad |n| \leq M\}, \quad \Gamma^* = \Gamma - \{0\}.$$

Definimos a família de polinômios com coeficientes em Γ

$$\mathsf{Pci} = \left\{p; \quad p(v) = \sum_{k=0}^{G} a_k v^k, \quad G \in \mathbf{Z}_+, \quad a_k \in \Gamma, \ \forall k, \quad a_0 \neq 0\right\}.$$

(Excluímos os polinômios com termo constante zero porque suas raízes não-nulas são também raízes de polinômios de menor grau.) Estamos interessados nos seguintes conjuntos de raízes:

$$P_{\mathbf{C}} = \{z \in \mathbf{C}; \ \exists \, p \in \mathsf{Pci} \text{ tal que } p(z) = 0\}, \quad P_{\mathbf{R}} = P_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{R}, \quad P_{\mathbf{Q}} = P_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{Q}.$$

Observe que Pci é enumerável: para cada G existem $2M(2M+1)^G$ polinômios $p \in \mathsf{Pci}$ de grau G. Assim, $P_{\mathbf{C}}$ também é enumerável.

O conjunto $P_{\mathbf{Q}}$ é descrito pela proposição abaixo.

Proposição 1. $P_{\mathbf{Q}} = \left\{\dfrac{m}{n}; \quad m, n \in \Gamma^*\right\}.$

Demonstração: Se $m, n \in \Gamma^*$, então $x = \dfrac{m}{n} \in P_{\mathbf{Q}}$, pois é raiz da equação $nx - m = 0$. Reciprocamente, suponha que $\dfrac{m}{n} \in P_{\mathbf{Q}}$ seja uma fração irredutível. Temos, para algum $p \in \mathsf{Pci}$,

$$p(\frac{m}{n}) = \sum_{k=0}^{G} a_k m^k n^{-k} = 0.$$

Multiplicando por n^G,

$$a_0 n^G + a_1 m n^{G-1} + \cdots + a_{G-1} m^{G-1} n + a_G m^G = 0.$$

Sendo $a_0 \neq 0$, temos $m \neq 0$ e assim

$$\frac{a_0 n^G}{m} = -\left(a_1 n^{G-1} + a_2 m n^{G-2} + \cdots + a_{G-1} m^{G-2} n + a_G m^{G-1}\right).$$

Logo m divide $a_0 n^G$, logo divide a_0. Assim, $|m| \leq |a_0| \leq M$. De maneira análoga, $0 \neq |n| \leq |a_G| \leq M.\square$

A próxima proposição mostra a simetria de $P_{\mathbf{C}}$.

Proposição 2. (i) $z \in P_{\mathbf{C}} \Rightarrow -z \in P_{\mathbf{C}}$,
(ii) $z \in P_{\mathbf{C}} \Rightarrow z^{-1} \in P_{\mathbf{C}}$,
(iii) $z \in P_{\mathbf{C}} \Rightarrow \bar{z} \in P_{\mathbf{C}}$,
(iv) $z^n \in P_{\mathbf{C}}, \quad n \in \mathbf{Z}-\{0\} \Rightarrow z \in P_{\mathbf{C}}$.

Demonstração:

(i) Dado $z \in P_{\mathbf{C}}$, seja $p(v) = \sum_0^G a_k v^k \in \mathsf{Pci}$ tal que $p(z) = 0$. Então $-z$ é raiz de $p_1(v) = \sum_0^G (-1)^k a_k v^k = p(-v) \in \mathsf{Pci}$.

(ii) Dado $z \in P_{\mathbf{C}}$, seja $p(v) = \sum_0^G a_k v^k \in \mathsf{Pci}$ tal que $a_G \neq 0$ e $p(z) = 0$. Então z^{-1} (observe que $0 \notin P_{\mathbf{C}}$) é raiz de $p_1(v) = v^G p(v^{-1}) = \sum_0^G a_k v^{G-k} \in \mathsf{Pci}$.

(iii) Todo $p \in \mathsf{Pci}$ tem coeficientes reais.

(iv) Só precisamos demonstrar para n positivo, devido ao item (ii). Se z^n é raiz de $p(v) = \sum_0^G a_k v^k \in \mathsf{Pci}$, então z é raiz de $p_1(v) = p(v^n) = \sum_0^G a_k v^{nk} \in \mathsf{Pci}$.□

Na proposição seguinte obtemos limites para $P_{\mathbf{R}}$. Denotamos, para $X \subset \mathbf{R}$, $\pm X = X \cup (-X)$.

Proposição 3. $P_{\mathbf{R}} \subset \pm\left((M+1)^{-1}, M+1\right)$.

Demonstração: Basta provar a afirmação

$$x \geq M+1 \Rightarrow x \notin P_{\mathbf{R}}$$

A Proposição segue desta afirmação, pois se $x \in P_{\mathbf{R}}$, então $|x|, |x|^{-1} \in P_{\mathbf{R}}$ e pela afirmação, $|x|, |x|^{-1} < M+1$, donde $(M+1)^{-1} < |x| < M+1$.

Sejam então $x \geq M+1$ e $p(v) = \sum_{k=0}^{G} a_k v^k \in \mathsf{Pci}$. Ora, x é positivo e $a_k \geq -M$, logo $p(x) \geq a_G x^G - M \sum_{k=0}^{G-1} x^k$. Sendo $x \neq 1$, podemos escrever

$$p(x) \geq a_G x^G - M\frac{x^G - 1}{x-1} = \frac{M}{x-1} + \left(a_G - \frac{M}{x-1}\right) x^G.$$

Suponha que seja $a_G > 0$. Neste caso, $0 < \dfrac{M}{x-1} \leq 1 \leq a_G$ e então $a_G - \dfrac{M}{x-1} \geq 0$. Além disso $x^G > 0$, donde $p(x) > 0$. Se for $a_G < 0$, o caso acima implica $(-p)(x) > 0$, i.e., $p(x) < 0$. De qualquer modo, $p(x) \neq 0$. (Evidentemente excluímos o caso $a_G = 0$).□

Vamos agora voltar nossa atenção às séries de potências com coeficientes em Γ. Definimos a família

$$\mathsf{Sci} = \left\{ f; \quad f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k, \quad a_k \in \Gamma,\ \forall k, \quad a_0 \neq 0 \right\}.$$

Observamos que Sci é uma família não-enumerável de funções. Além disso, Sci $\supset$ Pci.

Proposição 4. *Toda $f \in$ Sci tem raio de convergência 1 ou ∞. Além disso, f tem raio de convergência ∞ se e somente se f é um polinômio.*

Demonstração: Se $f(v) = \sum_0^\infty a_k v^k$ não é um polinômio, então $A = \{k \geq 1; a_k \neq 0\}$ é infinito. Logo $1 \leq |a_k|^{1/k} \leq M^{1/k}$, $\forall k \in A$. Fazendo $k \to \infty$, temos $\lim_{k \in A} |a_k|^{1/k} = 1$. Mas $1/R = \limsup |a_k|^{1/k} = \lim_{k \in A} |a_k|^{1/k}$ e assim $R = 1$.□

Doravante consideraremos todas as funções em Sci como definidas apenas no disco unitário aberto $\mathbf{D}$. São, evidentemente, funções analíticas.

Definimos os conjuntos de zeros

$$S_{\mathbf{C}} = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1, \quad \exists f \in \mathsf{Sci} \text{ tal que } f(z) = 0\}, \quad S_{\mathbf{R}} = S_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{R}.$$

Valem as inclusões $P_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{D} \subset S_{\mathbf{C}}$ e $P_{\mathbf{R}} \cap (-1,1) \subset S_{\mathbf{R}}$.

A próxima proposição exibe algumas propriedades básicas de $S_{\mathbf{C}}$.

Proposição 5. (i) $z \in S_{\mathbf{C}} \Rightarrow -z \in S_{\mathbf{C}}$,
(ii) $z \in S_{\mathbf{C}} \Rightarrow \bar{z} \in S_{\mathbf{C}}$,
(iii) $z^n \in S_{\mathbf{C}}, \quad n \in \mathbf{Z}_+ \Rightarrow z \in S_{\mathbf{C}}$.

Demonstração: Análoga à da prop. 2.□

Proposição 6. $S_{\mathbf{R}} \subset \pm [(M+1)^{-1}, 1)$.

Demonstração: Basta provar a afirmação

$$0 < x < \frac{1}{M+1} \Rightarrow x \notin S_{\mathbf{R}}.$$

A Proposição segue desta afirmação, pois se $x \in S_{\mathbf{R}}$, então pela prop. 5, $|x| \in S_{\mathbf{R}}$ e pela afirmação, ou $|x| \leq 0$, ou $|x| \geq (M+1)^{-1}$. Sendo $x \neq 0 \notin S_{\mathbf{R}}$, temos $(M+1)^{-1} \leq |x| < 1$.

Sejam então $0 < x < (M+1)^{-1}$ e $f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k \in \mathsf{Sci}$. Então

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \geq a_0 - M \sum_{k=1}^{\infty} x^k = a_0 - \frac{Mx}{1-x}.$$

Sendo $\dfrac{M}{x^{-1}-1} < 1$, temos $f(x) > a_0 - 1$. Suponha que seja $a_0 > 0$. Neste caso, $a_0 \geq 1$, donde $f(x) > 0$. Se for $a_0 < 0$, o caso acima implica $(-f)(x) > 0$, i.e., $f(x) < 0$. De qualquer modo, $f(x) \neq 0$.□

Para demonstrar a próxima proposição (prop. 8) precisaremos do seguinte lema, que é uma adaptação do Lema 3.1 de [2].

Lema 7. *Sejam $|z| < 1$ um número complexo fixo e $W \subset \mathbf{C}$ um conjunto limitado tal que*

$$W \subset z(\Gamma + W).$$

Nessas condições, todo $w_0 \in W$ é da forma $w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, com $a_k \in \Gamma$, $\forall k$. Em particular, se $W \cap \Gamma^* \neq \emptyset$, então $z \in S_{\mathbf{C}}$.

Demonstração: Dado $w_0 \in W$ existem $a_1 \in \Gamma$ e $w_1 \in W$ tais que $w_0 = a_1 z + z w_1$. Indutivamente, para $w_{m-1} \in W$ existem $a_m \in \Gamma$ e $w_m \in W$ tais que $w_{m-1} = a_m z + z w_m$. Substituindo, temos $w_0 = a_1 z + a_2 z^2 + z^2 w_2 = \cdots = \sum_{k=1}^{m} a_k z^k + z^m w_m$. Fazendo $m \to \infty$, obtemos $z^m w_m \to 0$, pois w_m é limitado. Assim, $w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Se $w_0 \in \Gamma^*$, z é uma raiz de $f(v) = -w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k v^k \in \mathsf{Sci}$.□

Proposição 8. $\pm [(M+1)^{-1}, 1) \subset S_{\mathbf{R}}$.

Demonstração: Dado um número $x \in \pm[(M+1)^{-1}, 1)$, seja $W = [-1, 1]$. Então

$$x(\Gamma + W) = x \bigcup_{a \in \Gamma} [a-1, a+1] =$$

$$= x[-(M+1), M+1] = [-(M+1)|x|, (M+1)|x|] \supset [-1, 1] = W.$$

Além disso, $W \cap \Gamma^* = \{-1, 1\} \neq \emptyset$. O lema 7 fornece $x \in S_{\mathbf{R}}$.□

Os resultados das proposições 6 e 8 podem ser reunidos no seguinte

Teorema 9. $S_{\mathbf{R}} = \pm[(M+1)^{-1}, 1)$.

Observamos que $S_{\mathbf{R}}$ é fechado em $(-1, 1)$. A proposição seguinte (prop. 11) mostra que algo semelhante vale para $S_{\mathbf{C}}$. Antes porém precisaremos do lema abaixo:

Lema 10. Sci *é uma família normal, isto é, toda seqüência de funções em* Sci *possui uma subseqüência que converge para uma função em* Sci, *sendo a convergência uniforme nos subconjuntos compactos de* $\mathbf{D}$.

Demonstração: Seja $F \subset$ Sci o conjunto das funções da seqüência. Se F é finito, basta escolher uma subseqüência constante. Suponha F infinito. A demonstração basear-se-á no fato de que os coeficientes das funções em Sci estão num conjunto finito Γ. (Usaremos a notação $\mathsf{coef}_k(f) = a_k$, onde $f(v) = \sum_0^\infty a_k v^k$.) Podemos achar um número $a_0 \in \Gamma^*$ e um conjunto infinito $F_0 \subset F$ tais que $\mathsf{coef}_0(f) = a_0, \forall f \in F_0$. Indutivamente, dado F_{n-1} infinito, achamos $a_n \in \Gamma$ e $F_n \subset F_{n-1}$ infinito de modo que $\mathsf{coef}_n(f) = a_n, \forall f \in F_n$. Formamos assim uma seqüência de conjuntos infinitos $F \supset F_0 \supset F_1 \supset \cdots$. Escolhemos $f_0 \in F_0$, e por indução, $f_n \in F_n - \{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$. Temos $0 \leq k \leq n \Rightarrow \mathsf{coef}_k(f_n) = a_k$. Finalmente definimos $g(v) = \sum_0^\infty a_k v^k \in$ Sci. Então

$$f_n(v) - g(v) = R_n(v) = v^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} v^k, \text{ com } |b_{nk}| \leq 2M.$$

Seja $K \subset \mathbf{D}$ compacto. Podemos achar $r < 1$ tal que $K \subset \overline{B}_0(r)$. Então, para todo $v \in K$,

$$|R_n(v)| = \left| v^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} v^k \right| \leq \frac{2M |v|^{n+1}}{1 - |v|} \leq \frac{2M r^{n+1}}{1 - r}.$$

Assim, no domínio K, $R_n \xrightarrow{\mathsf{unif}} 0$, isto é, $f_n \xrightarrow{\mathsf{unif}} g$.□

Obs.: Uma alternativa para demonstrar este lema é usar o teorema de Montel (veja [1], por exemplo).

Proposição 11. $S_{\mathbf{C}}$ *é fechado em* $\mathbf{D}$. *(Isto é,* $S_{\mathbf{C}} = \overline{S_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{D}$.*)*

Demonstração: Basta provar a inclusão $\overline{S_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{D} \subset S_{\mathbf{C}}$. Seja então $c \in \overline{S_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{D}$. Existe uma seqüência (f_n) em Sci com raízes $z_n \in S_{\mathbf{C}}$ que tendem para c. Seja $K \subset \mathbf{D}$ o compacto $K = \{c, z_0, z_1, \ldots\}$. Usando o lema 10, podemos, por simplicidade, supor que a seqüência (f_n) converge uniformemente para $f \in$ Sci no domínio K. Então, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $m > n_0 \Rightarrow |f_m(z_n) - f(z_n)| < \epsilon, \forall n$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow |f(z_n)| = |f_n(z_n) - f(z_n)| < \epsilon$. Isto mostra que $f(z_n) \to 0$ donde $f(c) = 0$. Segue que $c \in S_{\mathbf{C}}$.□

Exploraremos agora algumas relações entre os zeros das séries e os zeros dos polinômios. Isso vai nos permitir caracterizar o conjunto $\overline{P_{\mathbf{R}}}$.

O teorema abaixo mostra que, no espaço $\mathbf{D}$, o conjunto $P_{\mathbf{C}} \cap \mathbf{D}$ é denso em $S_{\mathbf{C}}$.

Teorema 12. $S_{\mathbf{C}} = \overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{D}$.

Demonstração: Temos $\overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{D} \subset \overline{S_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{D} = S_{\mathbf{C}}$, pela prop. 11. Reciprocamente, dado $z \in S_{\mathbf{C}}$, existe $f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k \in \mathsf{Sci}$, com domínio $\mathbf{D}$, tal que $f(z) = 0$. A função analítica f tem suas raízes isoladas e assim podemos achar $2r > 0$ tal que f não se anula em $\overline{B}_z(2r) - \{z\} \subset \mathbf{D}$. Definamos agora a seqüência de polinômios $p_n(v) = \sum_{k=0}^{n} a_k v^k \in \mathsf{Pci}$, com $n \in \mathbf{Z}_+$. Pelo Teorema de Hurwitz (Teor. VII.2.5 de [1], p.152), existe n^* tal que, para $n > n^*$, p_n e f têm o mesmo número de raízes em $\overline{B}_z(r)$, se as raízes forem contadas de acordo com as suas multiplicidades. Logo podemos achar, para cada $n > n^*$, um $z_n \in \overline{B}_z(r)$ tal que $p_n(z_n) = 0$. Então $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$, porque $|f(z_n)| = |f(z_n) - p_n(z_n)| \leq \sup_{u\in\overline{B}_z(r)} |f(u) - p_n(u)| \to 0$. Afirmamos que $z_n \to z$. De fato, se a afirmação fosse falsa, para algum $\epsilon > 0$ o conjunto $A = \{n > n^*;\ \ \epsilon \leq |z_n - z| \leq r\}$ seria infinito. Assim, por compacidade, poderimos obter uma subseqüência (z_{n_j}), com $n_j \in A$, convergindo para um $z' \neq z$. Então $0 = \lim_{j\to\infty} f(z_{n_j}) = f(z')$, e f teria outra raiz z' em $\overline{B}_z(r)$, absurdo. Logo, vale a afirmação e $z \in \overline{P_{\mathbf{C}}}$.□

Mostraremos a seguir que vale o resultado análogo ao teorema 12 para o caso de raízes reais, isto é, que os zeros reais das séries podem ser arbitrariamente aproximados por zeros reais dos polinômios. Dado um zero x de uma função $f \in \mathsf{Sci}$, queremos achar uma seqüência p_n em Pci, com respectivos zeros x_n, de modo que x_n tende a x. A maneira mais natural de escolher os p_n é truncar a série de f. Isso funciona no caso complexo, porém, no caso real, f pode ter um zero que não é aproximado pelas raízes reais dos polinômios em Pci que aproximam f. Porém, o lema a seguir mostra que a "maioria " das séries não se comporta desta forma, e isto será suficiente para a demonstração do teorema.

Lema 13. *Seja* $f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k \in \mathsf{Sci}$ *tal que os conjuntos* $\{k \geq 0;\ a_k \neq M\}$ *e* $\{k \geq 0;\ a_k \neq -M\}$ *sejam ambos infinitos. Nessas condições, se* $x_0 \in (0,1)$ *é zero da função* f *então* $x_0 \in \overline{P_{\mathbf{R}}}$.

Demonstração: Seja $V \subset (0,1)$ uma vizinhança compacta de x_0. Mostraremos que existem $x \in V$ e $p \in \mathsf{Pci}$ tais que $p(x) = 0$. Como f não é identicamente nula, existe $x_1 \in V$ tal que $[x_0, x_1] \subset V$ e $f(x_1) \neq 0$. Podemos supor $f(x_1) > 0$ (se necessário, troque f por $-f$).

Construiremos agora uma seqüência de polinômios p_n em Pci, tendendo a f uniformemente em V, tal que $p_n(x) < f(x), \forall x \in V$. Seja então $s = \sup\ V$. Temos $0 < s < 1$. Logo existe $m \geq 0$ inteiro tal que $Ms^{m+1} < 1 - s$. Escreva o conjunto $\{k \geq 0;\ a_k \neq -M\}$ na forma $\{k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots\}$. Sejam os polinômios

$$p_n(v) = -v^{k_n} + \sum_{k=0}^{k_n+m} a_k v^k.$$

É fácil ver que esta seqüência está em Pci e converge para f uniformemente nos compactos (de $(-1,1)$, é claro). Além disso, dado $x \in V$, temos

$$f(x) - p_n(x) = x^{k_n} + \sum_{k=k_n+m+1}^{\infty} a_k x^k \geq x^{k_n} + \sum_{k=k_n+m+1}^{\infty} (-M)x^k = x^{k_n}\left(1 - \frac{Mx^{m+1}}{1-x}\right).$$

O último termo é positivo, pois $1-x-Mx^{m+1} \geq 1-s-Ms^{m+1} > 0$. Assim, $p_n(x) < f(x)$.

Deste modo, temos:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{Z}_+ \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow f(x) - \epsilon < p_n(x) < f(x)\ \forall x \in V.$$

Seja $\epsilon = \frac{1}{2}f(x_1) > 0$. Definindo $p = p_{n_0}$, temos, pelas desigualdades acima, $p(x_0) < 0$ e $p(x_1) > 0$. Por continuidade, existe um número $x \in [x_0, x_1]$ tal que $p(x) = 0$. □

Teorema 14. $S_{\mathbf{R}} = \overline{P_{\mathbf{R}}} \cap (-1, 1)$.

Demonstração: Temos $\overline{P_{\mathbf{R}}} \cap (-1,1) \subset \overline{S_{\mathbf{R}}} \cap (-1,1) = S_{\mathbf{R}}$, pela prop. 9. Resta mostrar que $S_{\mathbf{R}} \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$, isto é, que o conjunto $L = S_{\mathbf{R}} - \overline{P_{\mathbf{R}}}$ é vazio. É fácil ver que $x \in L \Rightarrow -x \in L$.

Assim sendo, é suficiente provarmos que $L_+ = \{x \in L;\ x > 0\}$ é vazio. Suponhamos que existe $x \in L_+$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $[x-\epsilon, x+\epsilon] \cap P_{\mathbf{R}} = \emptyset$. Devido ao teorema 9, existe um intervalo fechado $J \neq \{x\}$ tal que $x \in J \subset S_{\mathbf{R}} \cap (0,1)$. Defina $I = J \cap [x-\epsilon, x+\epsilon]$. Assim, $I \subset S_{\mathbf{R}}$ é um intervalo fechado não-puntual de números positivos tal que $I \cap P_{\mathbf{R}} = \emptyset$. Dado $x_0 \in I$, existe $f \in \mathsf{Sci}$ tal que $f(x_0) = 0$. Devido ao lema 13, devemos ter $f \in F$, onde F é a família de funções

$$F = \left\{ f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k \in \mathsf{Sci};\ \text{existem } c \in \{-M, M\} \text{ e } K \geq 0 \text{ tais que } k \geq K \Rightarrow a_k = c \right\}.$$

É fácil ver que F é enumerável. Mas cada função $f \in \mathsf{Sci}$ tem um número finito (≥ 0) de raízes no compacto $I \subset (-1,1)$. Logo o conjunto de todas as raízes em I de funções em F é enumerável. Chegamos a uma contradição, pois esse conjunto é o próprio I, que é não-enumerável.□

Apresentaremos dois corolários importantes do teorema 14, mas antes demonstraremos um fato simples sobre fechos:

Lema 15. $z \in \overline{P_{\mathbf{C}}} \Leftrightarrow z^{-1} \in \overline{P_{\mathbf{C}}}$; $\quad x \in \overline{P_{\mathbf{R}}} \Leftrightarrow x^{-1} \in \overline{P_{\mathbf{R}}}$.

Demonstração: $z \in \overline{P_{\mathbf{C}}} \Rightarrow$existe seqüência (z_n) em $P_{\mathbf{C}}$ convergindo para $z \Rightarrow$a seqüência (z_n^{-1}) está em $P_{\mathbf{C}}$ e converge para $z^{-1} \Rightarrow z^{-1} \in \overline{P_{\mathbf{C}}}$. A prova é análoga para o caso real.□

Corolário 16. $\overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{R} = \overline{P_{\mathbf{R}}}$.

Demonstração: É suficiente mostrar que $\overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{R} \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Seja $x \in \overline{P_{\mathbf{C}}} \cap \mathbf{R}$. Se $|x| < 1$ então, pelo teorema 12, $x \in S_{\mathbf{C}} \cap (-1,1) = S_{\mathbf{R}}$ e pelo teorema 14, $x \in \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Se $|x| = 1$ então $x \in P_{\mathbf{R}}$ e se $|x| > 1$ basta usar a prop. 15.□

Como conseqüência direta do teorema 14, obtemos o

Teorema 17. $\overline{P_{\mathbf{R}}} = \pm\left[(M+1)^{-1}, M+1\right]$

Demonstração: Temos, pela prop. 3, $\overline{P_{\mathbf{R}}} \subset \pm\left[(M+1)^{-1}, M+1\right]$. Segue dos teoremas 9 e 14 que $\pm\left[(M+1)^{-1}, 1\right) \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Pela prop. 15, $\pm(1, M+1] \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$. Temos ainda $\{-1, 1\} \subset \overline{P_{\mathbf{R}}}$, o que completa a demonstração.□

Referências

[1] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag (1978).

[2] A.M. Odlyzko e B. Poonen, *Zeros of Polynomials with 0,1 Coefficients*, L'Enseignement Mathématique, t. 39 (1993), p. 317-348.