

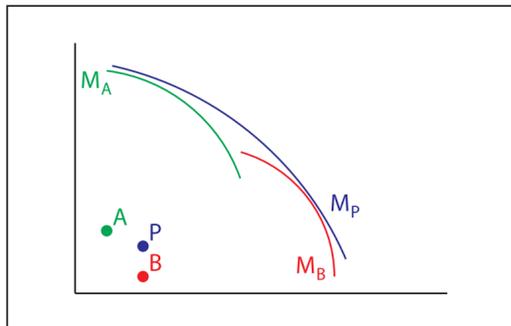
Durante o período do programa Jovens Talentos para a Ciência pesquisei aspectos não-lineares de modelos lineares. Esta teoria foi proposta por Dorfman, Samuelson e Solow (1972) a partir do Modelo Estatístico de Leontief e das idéias de Von Neumann.

Nos casos em que estes modelos são aplicáveis, queremos otimizar a produção de dois ou mais bens ao longo de um período de tempo, sendo os próprios bens utilizados para a sua produção. Esse tipo de restrição não pode ser modelado facilmente pelos métodos tradicionais.

Dados dois ou mais bens com uma relação de interdependência para sua produção, como otimizar a produção em cada período para que ao, final de n períodos, tenhamos um estoque ótimo de cada bem?

Representação gráfica do locus de produção formado a partir dos estoques A , B e P no tempo t . Nos eixos temos os estoques dos produtos 1 e 2, tomando um ponto qualquer (S_1, S_2) podemos traçar o locus de produção M .

Neste caso A e B são pontos sub-ótimos, pois seus locus de produção estão abaixo do locus de P , o ponto ótimo.

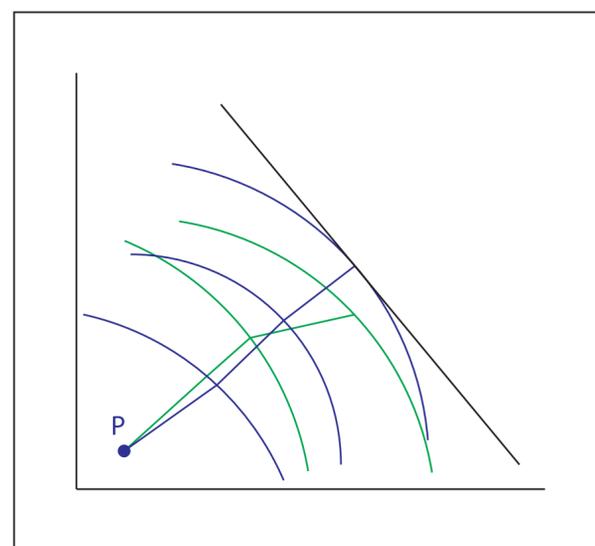


A cada tempo t , temos um dado estoque de cada bem $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$. Sempre haverá um máximo de consumo e máximo de estoques a serem utilizados no próximo período. Estes máximos formam um locus de eficiência para o tempo $t+1$. Um ponto neste locus é passível de ser produzido pelos estoques no tempo t e qualquer modificação nas configurações nos leva a sacrificar a produção de um ou mais bens. O encadeamento destes locus nos permitem utilizar o método Simplex para calcular as condições ótimas dos estoques em cada tempo t .

O Problema da Mina e da Fazenda

Como exemplo de problema resolvido por essa abordagem temos o caso clássico de uma fazenda e uma mina de carvão. Para produzirmos carvão precisamos da comida gerada na fazenda e de uma quantidade prévia de carvão enquanto que, para a produção de comida na fazenda precisamos de carvão e de uma quantidade prévia de comida. O que define o máximo a ser produzido são as unidades de mão-de-obra que serão divididas entre as duas produções – fazenda e mineração – de modo a atingir, em um determinado tempo T , as quantidades Q_1 e Q_2 requeridas pela população.

A cada período de tempo t teremos um estoque dos produtos e, a partir deste estoque, é que iremos produzir os produtos do próximo período. Desta maneira vemos que a distribuição de mão-de-obra em cada período afeta a produção de carvão e comida dos próximos períodos e, conseqüentemente, do período T . Por isso precisamos definir qual a maneira ótima de distribuímos a mão de obra a cada período para atingirmos os valores desejado no período T . Podemos calcular estes valores através do método Simplex considerando como dadas as quantidades iniciais de estoque de cada produto $S_1(0)$ e $S_2(0)$, os consumos desejados $C_i(t)$ de $t = 1$ a $t=T$ e encontrando o programa que maximiza $K_1 S_1(t) + K_2 S_2(t)$, K_1 e K_2 são constantes arbitrárias e não-negativas. Colocando o problema desta maneira buscamos no locus de eficiência do período T um ponto de tangência com a nossa “linha de orçamento”. Conforme variamos os valores de K_1 e K_2 (a inclinação da linha de orçamento), podemos percorrer o envelope de eficiência. Então para quaisquer K_1 e K_2 definimos o caminho de acumulo de $S_1(1), S_1(2), \dots$, levando aos níveis ótimos de $S_1(T)$ e $S_2(T)$, podendo ver não só estes valores como também todos os valores viáveis a partir de ponto inicial $P[S_1(0), S_2(0)]$.



Representação gráfica dos sucessivos locus de produção criados a partir do ponto inicial P . Observe que escolhendo um caminho diferente do indicado pelo modelo chegamos a uma situação não-otimizada no tempo T .

As linhas azuis mostram o caminho ótimo e as verdes um caminho sub-ótimo. Linha preta é a linha de orçamento, que marca o limite de recursos que temos para investir. Os eixos representam os estoques somados ao consumo.

Bibliografia

DORFMAN, R.; SAMUELSON P.; SOLOW R. **Linear Programming & Economic Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1958. 527 p.

HILLIER, F.; LIEBERMAN, G. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Campus/USP, 1988. 805 p.

WAGNER, H. M. **Principles of Operations Research: With Applications to Managerial Decisions**. 2 ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975. 1093 p.