

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**ANÁLISE DE PEÇAS FLETIDAS COM PROTENSÃO NÃO  
ADERENTE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Daniel Trevisan Jost**

Porto Alegre

Junho 2006

**DANIEL TREVISAN JOST**

**ANÁLISE DE PEÇAS FLETIDAS COM PROTENSÃO NÃO  
ADERENTE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de *Mestre em Engenharia*, na modalidade Acadêmico.

Porto Alegre

Junho 2006



JOST, Daniel Trevisan.

Análise de Peças Fletidas com Protensão Não Aderente pelo Método dos Elementos Finitos / Daniel Trevisan Jost – 2006.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2006.

Orientação do Prof. Dr. Américo Campos Filho e Prof. Ph.D Alexandre Rodrigues Pacheco

1. Concreto protendido. 2. Protensão não-aderente.  
3. Método dos Elementos Finitos. 4. Peças fletidas

CCAA2

**DANIEL TREVISAN JOST**

**ANÁLISE DE PEÇAS FLETIDAS COM PROTENSÃO NÃO  
ADERENTE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 02 de Junho de 2006

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Orientador

Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco  
Ph.D. pela Pennsylvania State University  
Orientador

Prof. Fernando Schnaid  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Daniel Domingues Loriggio (UFSC)**  
Dr. pela Universidade de São Paulo

**Prof. Mauro de Vasconcelos Real (FURG)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal (UFRGS)**  
Ph.D. pela North Carolina State University

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Carmen e Ereneu, pelo apoio, carinho, amor e compreensão, o que me fez chegar até este momento.

## AGRADECIMENTOS

A vida é feita de caminhos a percorrer, fatos e acontecimentos que geram alegrias, tristezas, sonhos, felicidades, e muitos outros sentimentos. Os acontecimentos e sentimentos vem e vão, mas o que fica de bom são as pessoas que fizeram, fazem ou continuarão fazendo parte da nossa vida. Isto, para mim, é o mais importante.

Gostaria de agradecer, primeiramente, aos professores Américo Campos Filho e Alexandre Rodrigues Pacheco pela excelente orientação, compreensão e paciência em certos momentos, pela confiança depositada, mas, principalmente, pela amizade que tivemos durante todo o período de trabalho. Foi um período longo e difícil mas que, com o apoio e tranqüilidade que me foi transmitido, tornou-se muito mais fácil de superá-lo.

Agradeço, também, aos meus amigos e aos colegas de mestrado pela amizade, apoio e troca de experiências que contribuiu para o meu desenvolvimento pessoal e profissional. Ao colega e parceiro de trabalho, Diogo Soliman Medeiros, pela amizade e pelo tempo em que trocamos idéias e experiências. Um agradecimento especial faço à grande amiga Ariela Torres pela força e energia que sempre me transmitiu e, como ela mesma disse, pela amizade que ficará para toda a vida.

Apesar de todas as pessoas serem importantes, sem minha família nada seria possível. Aos meus pais, Ereneu e Maria Carmen, aos meus irmãos, Marielli, Tiago e Renan pelo imenso amor, carinho, paz, fé e compreensão que me foi passado desde o início de minha vida. Pelas lições honestidade, integridade, amor ao próximo e outras lições de vida, que me fazem uma pessoa cada vez melhor. Às minhas avós, Anita e Amélia, e padrinhos, Celso e Zanita, pelo carinho, fé e convivência, que me fizeram superar obstáculos. A todos, só tenho mais uma coisa a dizer: vocês são tudo pra mim, amo vocês.

Por fim, agradeço a Deus por ter chegado até aqui.

A vida só pode ser compreendida olhando-se para trás;  
mas só pode ser vivida olhando-se para a frente.

*Soren Kierkegaard*



## RESUMO

JOST, D.T. **Análise de Peças Fletidas com Protensão Não Aderente pelo Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC 2006. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

Estruturas com protensão não aderente estão sendo utilizadas como uma alternativa na tecnologia de projeto e execução de edifícios.

Este trabalho apresenta a análise numérica de estruturas com protensão não aderente. Para este fim, foi desenvolvido um programa computacional onde implementou-se um modelo não linear físico e geométrico através do método dos elementos finitos.

O comportamento dos materiais é descrito por um modelo elasto-viscoplástico. No concreto, são utilizados elementos finitos isoparamétricos tridimensionais. Para representar o seu comportamento após a fissuração é utilizado o modelo de fissuras distribuídas. As armaduras são incluídas através do modelo incorporado, utilizando-se de elementos unidimensionais isoparamétricos. As armaduras passivas são consideradas como uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto, existindo uma aderência perfeita entre o concreto e o aço. Nas armaduras não aderentes, é considerada a compatibilidade de deslocamentos entre os materiais apenas nas ancoragens, sendo que a armadura pode movimentar-se livremente no interior do concreto.

O modelo não linear geométrico, utilizado para o concreto e para a armadura, foi desenvolvido com base na formulação Lagrangeana Total, considerando grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Para verificar a precisão do modelo computacional, compararam-se resultados numéricos com valores experimentais disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Concreto protendido; Protensão não aderente; Método dos elementos finitos.

## ABSTRACT

JOST, D.T. **Análise de Peças Fletidas com Protensão Não-Aderente pelo Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGEC 2006. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

### **Analysis of bending members with unbonded tendons through the Finite Element Method**

Unbonded prestressed concrete structures have been increasingly used as an alternative in the technology of design and construction of buildings.

This work presents a numerical analysis of unbonded prestressed concrete structures. To accomplish this, a computational program has been developed in which a physical and geometrical nonlinear model was implemented through the finite element method. Materials behavior has been described through an elasto-viscoplastic model. In the concrete, a three-dimensional isoparametric finite element has been used. To represent its behavior after cracking, the smeared cracking model has been used to. The prestressing tendons and reinforcement have been included according with the embedded model approach by the use of one-dimensional isoparametric elements. The reinforcement has been considered in the model as a line of a stiffer material inside the concrete element, with a perfect bonding between concrete and steel. As for the unbonded tendons, displacement compatibility between materials has been considered only at the anchorages, but they are allowed to move freely along their length inside the concrete.

The geometric nonlinear model that has been used for the concrete, reinforcement and tendons has been developed according to the Total Lagrangean formulation, considering large displacements and small strains.

In order to evaluate the accuracy of the computational model, numerical results have been compared with experimental values available in the literature.

Key-words: Prestressed concrete; Unbonded tendons; Finite element method.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	xii
LISTA DE TABELAS .....	xvi
LISTA DE SIGLAS .....	xvii
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xviii
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 GENERALIDADES.....	1
1.2 MOTIVAÇÃO .....	4
1.3 OBJETIVOS.....	4
1.5 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO .....	5
2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.....	6
2.1 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO .....	6
2.2 NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA.....	8
2.3 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA O CONCRETO.....	9
2.3.2 Funções de Forma dos Elementos .....	10
2.3.1 Expressões básicas e o modelo linear .....	12
2.3.3 Modelo não linear geométrico .....	14
2.4 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA.....	19
2.4.1 Formulação geométrica.....	19
2.4.2 Funções de Forma .....	21
2.4.3 Determinação dos segmentos de armadura no interior dos elementos de concreto..	22
2.4.4 Modelo não linear geométrico e a matriz de rigidez.....	27
2.5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	29
3 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS .....	33
3.1 INTRODUÇÃO .....	33
3.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO.....	33
3.2.1 Modelo para o concreto comprimido.....	34
3.2.1.1 Critério de Ruptura .....	34
3.2.1.2 Critério de Plastificação .....	36
3.2.1.3 Regra de endurecimento .....	37
3.2.2 Modelo para o concreto à tração.....	39
3.2.2.1 O modelo de fissuras distribuídas.....	39
3.2.2.2 Critério de Fissuração .....	40

3.2.2.3 Colaboração do concreto entre fissuras .....	40
3.2.2.4 Modelo para transferência das tensões de corte .....	42
3.3 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO .....	43
3.4 MODELO VISCOELÁSTICO PARA OS MATERIAIS .....	45
3.4.1 Introdução .....	45
3.4.2 O modelo das camadas superpostas .....	46
3.4.2.1 Formulação matemática .....	47
3.4.3 Fluência do concreto .....	49
3.4.3.1 Lei do tipo integral para fluência .....	49
3.4.3.2 Lei do tipo integral para relaxação .....	50
3.4.3.3 Relação entre as funções de fluência e relaxação .....	51
3.4.3.4 Função de fluência .....	53
3.4.3.5 Determinação dos módulos de elasticidade $E_{\mu}(t)$ da cadeia de Maxwell .....	57
3.4.4 Retração do Concreto .....	59
3.4.5 Relaxação das armaduras protendidas .....	61
4 MODELOS PARA A PROTENSÃO NÃO ADERENTE .....	66
4.1 INTRODUÇÃO .....	66
4.2 COMPORTAMENTO DE PEÇAS COM PROTENSÃO NÃO ADERENTE .....	66
4.3 DEFINIÇÃO DOS MODELOS .....	67
4.3.1 Introdução .....	67
4.3.2 Armadura CEINTERNA1 (Modelo 1) .....	68
4.3.3 Armadura CEEXTERNA (Modelo para armadura externa) .....	68
4.3.4 Armadura CEINTERNA2 (Modelo 2) .....	69
4.4 FORÇA DE PROTENSÃO .....	71
4.5 PERDAS DE PROTENSÃO .....	73
5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS MODELOS .....	76
5.1 INTRODUÇÃO .....	76
5.2 MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PARA O CONCRETO .....	76
5.2.1 Expressões básicas .....	77
5.2.2 Vetor de fluxo plástico .....	78
5.2.3 Tensão total .....	80
5.3 MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PARA O AÇO .....	81
5.3.1 Taxa de deformação específica viscoplástica .....	81

5.3.2 Tensão para a armadura .....	81
5.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO .....	82
5.5 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	84
5.6 ENTRADA DE DADOS EM LINGUAGEM ORIENTADA .....	89
5.6.1 Considerações Iniciais .....	89
5.6.2 Comando principal <i>DADOS DE ANALISE</i> .....	90
5.6.3 Comando principal <i>DADOS DA MALHA</i> .....	90
5.6.4 Comando principal <i>DADOS ESTRUTURAIIS</i> .....	91
5.6.5 Comando principal <i>DADOS DE CARGA</i> .....	92
5.6.6 Sintaxe dos comandos.....	94
5.7 SAÍDA GRÁFICA DOS RESULTADOS .....	96
5.7.1 Arquivo com extensão “.msh” .....	96
5.7.3 Arquivo .RES.....	98
5.7.3.1 Definição dos pontos de Gauss.....	98
5.7.3.2 Blocos de resultados .....	100
6 ANÁLISES E RESULTADOS .....	102
6.1 ANÁLISE ELÁSTICA DE UMA VIGA ENGASTADA-LIVRE .....	102
6.2 ANÁLISE DE VIGAS COM CABOS NÃO ADERENTES INTERNOS .....	105
6.3 ANÁLISE DE VIGAS COM CABOS NÃO ADERENTES EXTERNOS.....	117
6.3 ANÁLISE DE LAJES PROTENDIDAS EM UMA DIREÇÃO.....	123
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	131
REFERÊNCIAS .....	133
APÊNDICE A – SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES.....	139
A.1 Introdução .....	139
A.1 Formulação em elementos finitos .....	140
APÊNDICE B – EXEMPLO DE ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS .....	143
APÊNDICE C – EXEMPLO DE ARQUIVOS DO GID® .....	146
C.1 Arquivo com extensão “.msh” .....	146
C.2 Arquivo com extensão “.res” .....	147

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: Detalhe de uma monocordoalha engraxada.....	2
FIGURA 1.2: Detalhe de ancoragens .....	2
FIGURA 1.3: (a) Laje lisa; (b) Laje lisa com engrossamento dos pilares; (c) Laje com vigas faixa. (adaptado de Emerick, 2005).....	3
FIGURA 1.4: (a) Laje nervurada com vigas faixa; (b) Laje nervurada com engrossamento dos pilares. (adaptado de Emerick 2005) .....	4
FIGURA 2.1: Hexaedro linear de 8 nós .....	10
FIGURA 2.2: Hexaedro quadrático de 20 nós .....	11
FIGURA 2.3: Coordenada ao longo do eixo da armadura .....	21
FIGURA 2.4: Segmento com $P_1$ e $P_{np}$ fora do elemento de concreto .....	25
FIGURA 2.5: Segmento com $P_1$ e $P_{np}$ dentro do elemento de concreto.....	25
FIGURA 2.6: Segmento com $P_1$ dentro do elemento de concreto .....	26
FIGURA 2.7: Segmento com $P_{np}$ dentro do elemento de concreto.....	26
FIGURA 2.8: Segmento não intercepta o elemento de concreto .....	26
FIGURA 2.9: Integração completa com 8 pontos .....	30
FIGURA 2.10: Integração completa com 27 pontos .....	31
FIGURA 2.11: 15 pontos de integração .....	32
FIGURA 3.1: Superfície de carregamento e ruptura.....	37
FIGURA 3.2: Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.....	38
FIGURA 3.3: Curva tensão-deformação para o concreto tracionado .....	41
FIGURA 3.4: Modelo elastoplástico perfeito para armaduras passivas.....	44
FIGURA 3.5: Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras passivas .....	44
FIGURA 3.6: Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras ativas .....	45
FIGURA 3.7: Modelo de Maxwell.....	46
FIGURA 3.8: Modelo das camadas superpostas.....	46
FIGURA 3.9: Modelo de cadeias de Maxwell .....	47
FIGURA 3.10: Curva da relaxação do aço no ensaio de 1000 horas .....	63
FIGURA 4.1: Decomposição da força de protensão nas direções x, y e z.....	73
FIGURA 5.1: Fluxograma do programa principal .....	86
FIGURA 5.2: Fluxograma do programa principal .....	87

FIGURA 5.3: Fluxograma para a determinação das deformações específicas, tensões e forças não-equilibradas.....	88
FIGURA 5.4: Faces com suas correspondentes conectividades .....	93
FIGURA 5.5: (a) Elementos lineares; (b) Elementos hexaédricos.....	97
FIGURA 5.6: Coordenadas dos pontos de integração do GID para hexaedros .....	99
FIGURA 6.1: Viga engastada-livre com carga distribuida .....	103
FIGURA 6.2: Malha utilizada na análise .....	103
FIGURA 6.3: Variação da flecha pelo vão sobre a carga P .....	104
FIGURA 6.4: Variação do comprimento pelo vão sobre a carga P .....	104
FIGURA 6.5: Detalhamento das vigas de Du e Tao (1988).....	105
FIGURA 6.6: Seção transversal das vigas de Du e Tao (1988) .....	105
FIGURA 6.7: Malha de 12 elementos de concreto para as vigas de Du e Tao (1988) .....	106
FIGURA 6.8: Malha de 48 elementos de concreto para as vigas de Du e Tao (1988) .....	107
FIGURA 6.9: Elementos de aço para as viga A1, A2, A4, A5 e A7.....	107
FIGURA 6.10: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A1, A2 – Comparativo entre malhas.....	108
FIGURA 6.11: Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A1, A2– Comparativo entre malhas .....	108
FIGURA 6.12: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A1, A2 e A3 – Comparativo entre modelos.....	109
FIGURA 6.13: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A4, A5 e A6 – Comparativo entre modelos.....	110
FIGURA 6.14: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A7, A8 e A9 – Comparativo entre modelos.....	110
FIGURA 6.15: Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A1, A2 e A3 – Comparativo entre modelos.....	111
FIGURA 6.16 Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A4, A5 e A6 – Comparativo entre modelos.....	111
FIGURA 6.17 Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A7, A8 e A9 – Comparativo entre modelos.....	112
FIGURA 6.18: Evolução da tensão $\sigma_{xx}$ do concreto para a viga A8 com atuação da protensão e do peso próprio.(a)Modelo 1; (b)Modelo 2 .....	113
FIGURA 6.19: Evolução da tensão $\sigma_{xx}$ do concreto para a viga A8 com a atuação de 17 kN.(a) Modelo 1; (b) Modelo 2 .....	114

FIGURA 6.20: Evolução da tensão $\sigma_{xx}$ do concreto para a viga A8 com a atuação de 18 kN.(a) Modelo 1; (b) Modelo 2 .....	114
FIGURA 6.21: Evolução da tensão $\sigma_{xx}$ do concreto para a viga A8 com a atuação de 60 kN.(a) Modelo 1; (b) Modelo 2 .....	115
FIGURA 6.22: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com atuação da protensão e do peso próprio (a) Modelo 1; (b) Modelo 2.....	115
FIGURA 6.23: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com a atuação de 17 kN (a) Modelo 1; (b) Modelo 2. ....	116
FIGURA 6.24: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com a atuação de 18 kN (a) Modelo 1; (b) Modelo 2. ....	116
FIGURA 6.25: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com a atuação de 60 kN (a) Modelo 1; (b) Modelo 2. ....	117
FIGURA 6.27: Cortes AA e BB das seções da viga de Tan e Ng (1997).....	118
FIGURA 6.28: Malha de elementos de concreto para a viga de Tan e Ng (1997).....	119
FIGURA 6.29: Malha dos elementos de aço para a viga de Tan e Ng (1997).....	119
FIGURA 6.30: Carga x deslocamentos no centro do vão para a viga de Tan e Ng (1997) ...	120
FIGURA 6.31: Carga x aumento da tensão na cordoalha para a viga de Tan e Ng (1997) ...	121
FIGURA 6.32: Carga x aumento da tensão na armadura passiva no meio do vão para a viga de Tan e Ng (1997).....	121
FIGURA 6.33: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando o peso próprio e a força de protensão .....	122
FIGURA 6.34: : Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando uma carga de 38 kN.....	122
FIGURA 6.35: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando uma carga de 40 kN.....	122
FIGURA 6.36: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando uma carga de 140 kN.....	123
FIGURA 6.37: Detalhamento das lajes de Cooke <i>et al.</i> (1981) .....	124
FIGURA 6.38: Malha de elementos de concreto para a laje 4 de Cooke <i>et al.</i> (1981).....	124
FIGURA 6.39: Malha de elementos de aço para a laje 4 de Cooke <i>et al.</i> (1981) .....	125
FIGURA 6.40: Malha de elementos de concreto para a laje 7 de Cooke <i>et al.</i> (1981).....	125
FIGURA 6.41: Malha de elementos de aço para a laje 7 de Cooke <i>et al.</i> (1981) .....	125
FIGURA 6.42: Carga x deslocamentos no centro do vão das lajes 4 e 5.....	126
FIGURA 6.43: Carga x deslocamentos no centro do vão das lajes 7 e 8.....	126
FIGURA 6.44: Carga x aumento da tensão na armadura protendida das lajes 4 e 5 .....	127
FIGURA 6.45: Carga x aumento da tensão na armadura protendida das lajes 7 e 8 .....	127



FIGURA 6.46: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando o peso próprio e a força de protensão para a laje 8 .....	128
FIGURA 6.47: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando 88 kN para a laje 8.....	128
FIGURA 6.48: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando 90 kN para a laje 8.....	128
FIGURA 6.49: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando 102 kN para a laje 8.....	129
FIGURA 6.50: Evolução das tensões $\sigma_{xx}$ atuando 110 kN para a laje 8.....	129
FIGURA 6.51: Evolução das tensões nas armaduras atuando o peso próprio e a força de protensão para a laje 8 .....	129
FIGURA 6.52: Evolução das tensões nas armaduras atuando 88 kN na laje 8.....	130
FIGURA 6.53: Evolução das tensões nas armaduras atuando 90 kN na laje 8.....	130
FIGURA 6.54: Evolução das tensões nas armaduras atuando 102 kN na laje 8.....	130
FIGURA 6.55: Evolução das tensões nas armaduras atuando 110 kN na laje 8.....	130

## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1: Coordenadas e pesos dos pontos de integração na integração completa.....	30
TABELA 2.2: Coeficientes para a integração reduzida .....	31
TABELA 3.1: Valores de $\alpha$ .....	56
TABELA 3.2: Valores de $\beta_{sc}$ .....	60
TABELA 3.3: Valores de $\psi_{1000}$ para cordoalhas, segundo NBR6118/2003 .....	63
TABELA 5.1: Resultados utilizados no arquivo .RES.....	101
TABELA 6.1: Características dos materiais das vigas de Du e Tao (1988) .....	106
TABELA 6.2: Características das lajes de Cooke <i>et al.</i> (1981) .....	123

## **LISTA DE SIGLAS**

ABNT: Associação Brasileira de Normas Técnicas.

ACI: American Concrete Institute

EUA: Estados Unidos da América

MEF: Método dos elementos finitos

PPGEC: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

PTI: Post-tensioning Institute

UFRGS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

### LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

**A**: área; coeficiente

$A_c$ : área da seção transversal de concreto

$A_s$ : área da seção transversal do aço; área da seção transversal da armadura passiva

$A_p$ : área da seção transversal da armadura protendida

**B**: matriz que relaciona deformações; coeficiente

$B_i$ : matriz deformação-deslocamento associada ao nó  $i$

$B_{Li}$ : matriz deformação-deslocamento linear associada ao nó  $i$

$B_{NLi}$ : matriz deformação-deslocamento não-linear associada ao nó  $i$

$B_s$ : vetor linha que relaciona deformações da armadura e deslocamentos nodais do elemento de concreto

$B_{si}$ : vetor linha que relaciona deformações da armadura e deslocamentos do elemento de concreto associado ao nó  $i$

**C**: função de posição ao longo da barra de armadura

$C_1, C_2, C_3$ : coeficientes

**D**: matriz constitutiva

**E**: módulo de elasticidade longitudinal

$E_c$ : módulo de elasticidade longitudinal do concreto

$E_n$ : tensor de deformações de Green-Lagrange

$E_p$ : módulo de elasticidade longitudinal da armadura protendida

$E_s$ : módulo de elasticidade longitudinal do aço; módulo elasticidade longitudinal da armadura passiva

$E_\mu$ : módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto

**F**: superfície de plastificação; vetor de cargas nodais externa à estrutura

$F_0$ : tensão corrente de plastificação

- $F^e$ : vetor de forças nodais equivalentes do elemento
- $F_n$ : tensor gradiente de deformações; vetor de forças externas aplicada no tempo  $t_n$
- $F_p$ : força de protensão
- $F_{px}, F_{py}$ : força de protensão nas direções X e Y
- $G_0$ : módulo de elasticidade transversal do concreto não-fissurado
- $H_j$ : função de interpolação para o elemento de armadura, associado ao nó j
- $H_n$ : tensor gradiente de deslocamentos
- $H_s$ : taxa de endurecimento
- $I$ : matriz de identidade
- $I_1$ : primeiro invariante de tensão
- $I_F$ : intersecção falsa
- $I_V$ : intersecção verdadeira
- $J$ : matriz Jacobiana
- $J$ : função de fluência
- $J_i$ : elemento da matriz Jacobiana
- $J_2$ : segundo invariante do tensor desviador de tensão
- $J_3$ : terceiro invariante do tensor desviador de tensão
- $K^e$ : matriz de rigidez do elemento
- $K_n$ : matriz de rigidez do elemento de concreto
- $K_s$ : matriz de rigidez das barras de armadura
- $L$ : matriz de operadores diferenciais
- $L$ : comprimento total da viga
- $N$ : matriz que contém as funções de forma para o elemento
- $N_k$ : função de interpolação do elemento de concreto associada ao nó k
- $P$ : força de “pseudo-carga”; carga concentrada; carga por unidade de comprimento
- $P_j$ : coordenada globas dos pontos que definem as barras de armadura
- $Q$ : função do potencial plástico

$R$ : função de relaxação; matriz de rotação

$\tilde{R}$ : pontos discretos de  $R$

$RH$ : umidade relativa do ar

$S_0$ : superfície do corpo na configuração indeformada

$S$ : superfície do corpo na configuração deformada

$T$ : segundo tensor de Piola-Kirchhoff; temperatura

$U^e$ : vetor de deslocamentos nodais do elemento

$U_k$ : vetor que contém os deslocamentos do nó  $k$  do elemento

$V_0$ : volume do corpo na configuração indeformada

$V$ : volume do corpo na configuração deformada

$V_s$ : volume da barra de aço

$W_s$ : contribuição da armadura para o trabalho virtual interno

$X$ : coordenadas de um corpo indeformado

$X$ : eixo de coordenadas cartesianas

$Y$ : eixo de coordenadas cartesianas

$Z$ : eixo de coordenadas cartesianas

## **LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS**

$a$ : vetor de fluxo plástico; coeficiente

$a_1, a_2, a_3$ : coeficientes

$b$ : vetor de forças de volume; largura da viga; coeficiente

$c$ : parâmetro; coeficiente

$c_1, c_2$ : parâmetros do critério de Ottosen

$e_i$ : espessura da camada de concreto

$f_i$ : função

$f_{ck}$ : resistência característica à compressão do concreto

$f_{cm}$ : resistência média à compressão do concreto

$f_{int}$ : vetor de forças internas da estrutura

$f_{ptk}$ : tensão de ruptura do concreto protendido

$f_{s_{int}}$ : vetor de forças internas das armaduras

$f_{tm}$ : resistência média à tração do concreto

$f_y$ : tensão de escoamento da armadura

$g_i$ : função

$h$ : espessura fictícia da seção de concreto

$h_i$ : função

$k$ : relação entre a resistência média à compressão e a resistência média à tração uniaxial do concreto

$l_e$ : vão da efetivo da viga

$m$ : número de nós do elemento de concreto

$n$ : subíndice que relaciona vetores, matrizes ou variáveis ao instante de tempo  $t_n$

$np$ : número total de pontos de integração da armadura protendida

$s$ : tensão desviadora; coordenada ao longo do eixo da armadura; distância; constante que depende do tipo de cimento

$t$ : vetor de forças de superfície; tempo

$t'$ : idade do carregamento

$t'_T$ : tempo ajustado devido ao efeito ocorridos para temperaturas diferentes de 20°C, compreendida entre 0 e 80°C

$t_1$ : tempo um qualquer

$t_n$ : instante de tempo

$t_s$ : idade do começo da retração do concreto

$u$ : vetor de deslocamentos; deslocamento da direção do eixo X

$u_i^R$ : deslocamentos na direção longitudinal da armadura protendida, para o nó  $i$

$v$ : deslocamento na direção do eixo Y

$v_i^R$ : deslocamento nas direções perpendiculares à direção da armadura protendida para o nó  $i$

$w$ : deslocamento na direção do eixo Z

$w_i$ : fator de peso associado ao ponto de integração  $i$

$w_i^R$ : deslocamento nas direções perpendiculares à direção da armadura protendida para o nó  $i$

$\mathbf{x}$ : coordenada de um corpo deformado

$x$ : coordenada cartesiana na posição indeformada

$x_n$ : coordenada cartesiana na posição deformada

$y$ : coordenada cartesiana na posição indeformada

$y_n$ : coordenada cartesiana na posição deformada

$z$ : coordenada cartesiana na posição indeformada

$z_n$ : coordenada cartesiana na posição deformada

### **LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS**

$\Delta$ : incremento

$\Pi$ : produtório

$\Sigma$ : somatório

$\Phi$ : função de escoamento; função de fluxo

### **LETRAS GREGAS MINÚSCULAS**

$\alpha$ : parâmetro do critério de ruptura de Ottosen; parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente do diagrama de tração do concreto; ângulo

$\alpha_n$ : ângulo entre a direção da barra e o eixo cartesiano  $X$

$\alpha_{st}$ : coeficiente

$\beta$ : parâmetro do critério de Ottosen

$\beta_c$ : coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência no tempo

$\beta_{cc}$ : coeficiente

$\beta_H$ : coeficiente relativo ao ambiente

$\beta_{RH}$ : coeficiente relativo à umidade do arm



$\beta_s$ : coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração no tempo

$\beta_{sc}$ : coeficiente que depende do tipo de concreto

$\beta_{st}$ : coeficiente que depende das condições ambientais

$\beta_n$ : ângulo entre a direção da barra e o eixo cartesiano Y

$\gamma$ : coeficiente de fluidez; deformação específica de distorção

$\gamma_n$ : ângulo entre a direção da barra e o eixo cartesiano Z

$\gamma_s$ : coeficiente de fluidez do aço

$\delta$ : variação

$\varepsilon$ : vetor de deformações específicas; deformação específica axial

$\dot{\varepsilon}$ : velocidade de deformação

$\varepsilon_{cs}$ : deformação específica por retração do concreto

$\varepsilon_{ctu}$ : deformação específica última para o concreto tracionado

$\varepsilon_e$ : deformação específica elástica

$\varepsilon_n$ : deformação específica dependente da tensão

$\varepsilon_p$ : deformação específica plástica

$\varepsilon_{ref}$ : deformação específica de tração máxima alcançada transversalmente à fissura

$\varepsilon_s$ : deformação específica axial ao longo do eixo da armadura; deformação esp. total do aço

$\varepsilon_{CS_0}$ : coeficiente de retração nominal

$\varepsilon_{sen}$ : deformação específica elástica no aço

$\varepsilon_{svpn}$ : deformação específica viscoplástica do aço

$\varepsilon_{TOT}$ : deformação específica total

$\varepsilon_{ve}$ : deformação específica viscoelástica

$\varepsilon_{vp}$ : deformação específica viscoplástica

$\varepsilon_t$ : deformação específica normal de tração do concreto

$\varepsilon_y$ : deformação específica de escoamento da armadura

$\zeta$ : coordenada normalizada

$\eta$ : coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada

$\theta$ : ângulo de similaridade

$\kappa$ : parâmetro de endurecimento

$\lambda$ : parâmetro do critério de Ottosen

$\nu$ : coeficiente de Poisson

$\xi$ : coordenada normalizada

$\pi$ : função residual

$\rho_T$ : relaxação do aço em t dias

$\sigma$ : vetor de tensões de Cauchy; tensão axial

$\dot{\sigma}$ : velocidade de tensão

$\sigma_1$ : tensão principal de tração

$\sigma_{ef}$ : tensão efetiva do concreto

$\sigma_p$ : tensão de protensão aplicada na extremidade do cabo

$\sigma_{p_0}$ : tensão de protensão inicial

$\sigma_{p_{TOT}}$ : tensão inicial de protensão após as perdas iniciais

$\sigma_{s_{p_0}}$ : tensão de protensão após a perda por atrito

$\sigma_s$ : tensão normal da armadura; tensão total do aço

$\sigma_{s_p}$ : tensão do ponto de integração da armadura protendida

$\sigma_y$ : tensão de plastificação

$\tau$ : tensão de corte

$\tau_\mu$ : tempo de relaxação da camada de concreto

$\phi$ : diâmetro das barras de armadura; coeficiente de fluência; função de minimização

$\phi_0$ : coeficiente de fluência nominal

$\phi_{RH}$ : coeficiente da umidade relativa do ar

$\chi$ : coordenada normalizada do eixo da armadura

$\mu$ : coeficiente de atrito da armadura protendida; camada

$\psi$ : vetor de forças não-equilibradas

$\Psi_{60}, \Psi_{70}, \Psi_{80}, \Psi_{1000}$ : coeficiente de relação do aço após 60 horas, 70 horas, 80 horas e 1000 horas

$\omega$ : matriz das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas naturais

### **SÍMBOLOS ESPECIAIS**

$\{ \}$  : vetor coluna

$\langle \rangle$  : vetor linha

$[ ]$  : matriz

$[ ]^T$  : matriz transposta

$[ ]^{-1}$  : matriz inversa

$\| \|$  : norma

®: marca registrada



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

A utilização da protensão não aderente no projeto e execução de edifícios residenciais e comerciais tem se expandido nas últimas décadas. O avanço tecnológico possibilitou que novos materiais fossem desenvolvidos, aprimorando o sistema construtivo com cordoalhas mais resistentes e duradouras, ancoragens mais eficientes e técnicas mais produtivas.

O início do uso da protensão não aderente se deu nos Estados Unidos da América na década de 50. A técnica utilizava fios paralelos pintados com graxa betuminosa e envoltos por um revestimento de papelão resistente, que servia apenas para eliminar a aderência entre concreto e armadura. Este sistema foi abandonado, pois o aço, após alguns anos, passava a apresentar problemas de corrosão.

O sistema que utiliza cordoalhas engraxadas com bainha plástica surgiu na década de 70, também nos EUA, como uma alternativa para superar os problemas de durabilidade. Mas foi a partir das especificações publicadas pelo PTI (1985) é que houve um aperfeiçoamento deste sistema e a expansão mundo afora. No Brasil, esta técnica começou a ser usada apenas a partir de 1997.

Atualmente, o sistema de protensão não aderente é constituído de monocordoalhas compostas por fios de aço de alta resistência e baixa relaxação. Esta cordoalha é engraxada e fica revestida por uma bainha plástica, como se pode ver na Figura. 1.1. Esta capa plástica, além de eliminar a aderência entre o concreto e o aço, proporciona uma proteção mecânica e constitui uma barreira ao ingresso de agentes químicos. A graxa que, além de permitir um baixo atrito entre a cordoalha e a capa plástica, ainda tem o papel de proteger o aço da corrosão.

As cordoalhas são leves e flexíveis, facilitando o transporte, montagem e fixação. Por possuírem bainhas plásticas individuais, elas podem se espalhar nas estruturas também em

movimentos horizontais, o que dá grande versatilidade ao sistema. Durante a montagem e concretagem, não são necessário maiores cuidados, pois a capa plástica possui grande resistência.

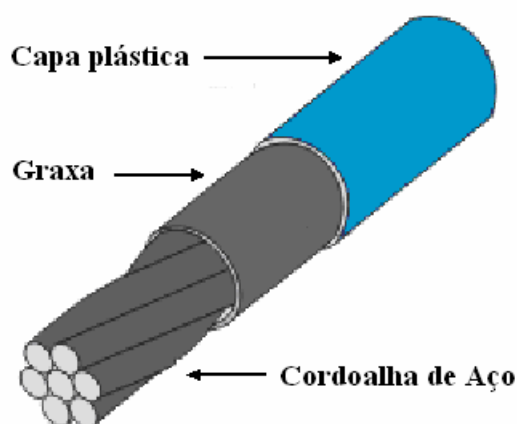


FIGURA 1.1: Detalhe de uma monocordoalha engraxada

A monocordoalha produzida no Brasil possui bainha de PEAD (polietileno extrudado de alta densidade), é comercializada em diâmetros de 12,7 mm e 15,2 mm, com 7 fios de acordo com a NBR7483 (ABNT, 1991) e o coeficiente de atrito varia entre 0,06 e 0,07. O revestimento de graxa e bainha atende os critérios do PTI (1985).

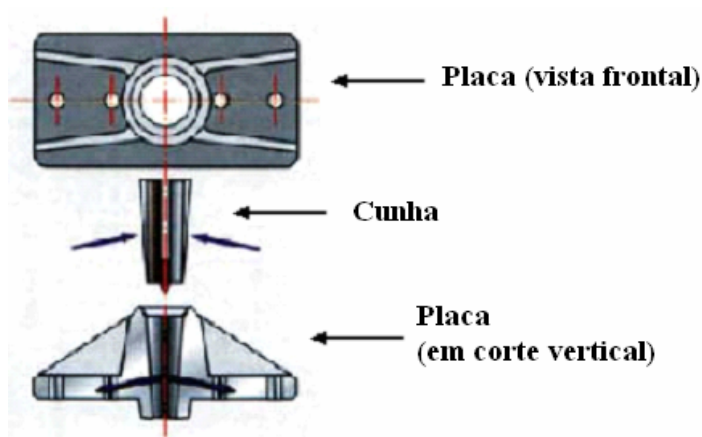


FIGURA 1.2: Detalhe de ancoragens

As ancoragens são constituídas de placas e cunhas, como pode ser visto na Figura 1.2. Segundo Kiss (1999), as ancoragens eram um dos principais impedimentos para a difusão do

sistema, pois precisavam ser fundidas sobre encomenda de forma a seguir características específicas dos projetos. Este problema já está superado devido ao aumento do número de empresas especializadas em acessórios de protensão.

A operação de aplicação da protensão é rápida e utiliza macacos hidráulicos portáteis e de fácil manuseio. Uma das extremidades do cabo possui a ancoragem pré-encunhada sendo que a força de protensão é aplicada apenas em um dos lados.

Com relação à utilização do sistema não aderente no projeto de edifícios, Emerick (2005) relaciona os principais esquemas estruturais adotados atualmente. As lajes lisas podem ser estruturadas em 3 maneiras: lajes lisas com ligação direta entre pilares e lajes (Fig. 1.3a), onde sua resistência é em geral ditada pelo cisalhamento; lajes lisas com engrossamento dos pilares (Fig.1.3b), melhorando a resistência ao puncionamento; e lajes lisas com faixas protendidas (Fig. 1.3c). Outra solução que vem sendo muito utilizada é o de lajes nervuradas com faixas protendidas (Fig. 1.4a) ou com engrossamento na região dos pilares (Fig. 1.4b) sendo que as nervuras podem ou não serem protendidas.

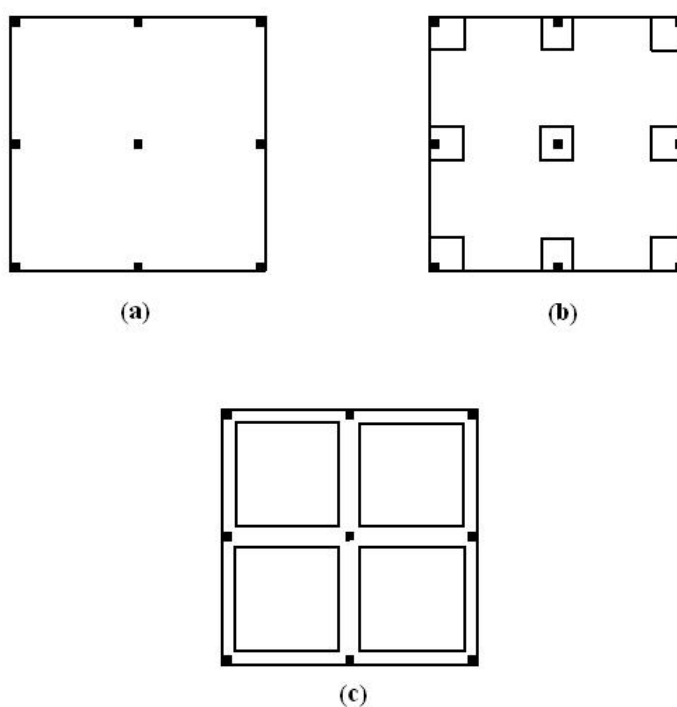


FIGURA 1.3: (a) Laje lisa; (b) Laje lisa com engrossamento dos pilares; (c) Laje com vigas faixa. (adaptado de Emerick, 2005)

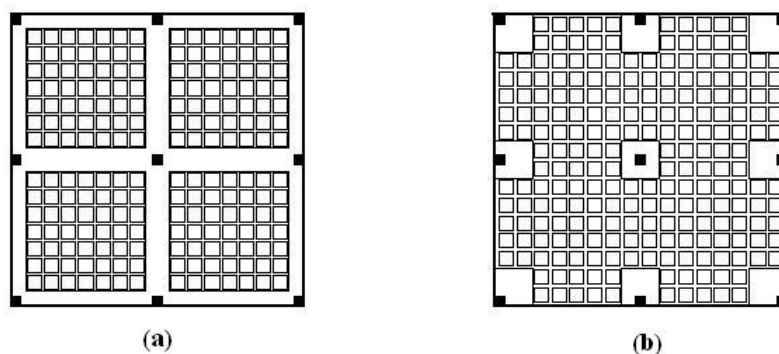


FIGURA 1.4: (a) Laje nervurada com vigas faixa; (b) Laje nervurada com engrossamento dos pilares. (adaptado de Emerick 2005)

## 1.2 MOTIVAÇÃO

Devido ao recente uso da protensão não aderente nas estruturas de edificações brasileiras, poucos são os estudos relativos ao comportamento destas estruturas. Não existe também, no Brasil, uma norma específica para este tipo de tecnologia, sendo que os critérios necessários para o projeto destas estruturas são obtidos de normas estrangeiras. Isto, em certos momentos, pode dificultar o dimensionamento destas estruturas devido às diferenças dos materiais e técnicas construtivas entre os países.

O crescente uso de estruturas com protensão não aderente, aliado ao pouco conhecimento do seu comportamento, levaram ao desenvolvimento deste trabalho. Pretende-se, assim, definir um modelo que permita a avaliação da deformabilidade de peças fletidas com protensão não-aderente e seu comportamento no estado limite último.

## 1.3 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional que analise estruturas de concreto armado e protendido, com e sem aderência, que leva em conta aspectos de não-linearidade física e geométrica dos materiais. O processo numérico utilizado



é o Método dos Elementos Finitos por ser já bastante conhecido e consagrado no meio acadêmico e que produz excelentes resultados. A linguagem computacional adotada foi o FORTRAN 90/95 devido ao grande número de ferramentas disponíveis que facilitam a implementação das rotinas necessária para as análises.

## 1.5 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em 7 capítulos. No capítulo 2, apresenta-se a formulação de elementos finitos empregados para o concreto e armadura juntamente com o modelo não linear geométrico utilizado para estes materiais. O capítulo 3 descreve os modelos constitutivos dos materiais, destacando-se os modelos do concreto comprimido e tracionado, as propriedades da armadura e os modelos dependentes do tempo.

Os modelos implementados para representar as cordoalhas não aderentes estão expostos no capítulo 4. O 5º capítulo aborda os procedimentos computacionais para a análise de um material elasto-viscoplástico. Explana-se também o pré-processamento feito no programa computacional em linguagem orientada e os arquivos para o pós-processamento no programa GID<sup>®</sup> 7.2.

No capítulo 6, são apresentados os resultados obtidos com o programa computacional, comparando-os com resultados experimentais. Finalmente, no capítulo 7, encerra-se este trabalho destacando-se as principais conclusões obtidas com este estudo, apresentando-se sugestões para sua continuidade.

## 2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo, apresenta-se a formulação do MEF empregado com os respectivos modelos utilizados para o concreto e para a armadura.

### 2.1 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

A idéia básica utilizada no MEF é dividir o contínuo em elementos finitos conectados por pontos nodais, onde os deslocamentos em qualquer parte do elemento são expressos em função dos deslocamentos dos nós mediante funções de interpolação. De acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000), o vetor de deslocamentos,  $u$ , em qualquer ponto dentro dos limites do elemento finito pode ser encontrado por:

$$u = N \cdot U^e \quad (2.1)$$

onde  $N = [N_1, N_2, \dots, N_k]$  são as funções de forma,  $U^e = [U_1, U_2, \dots, U_k]$  são os deslocamentos nodais e  $k$  é o número de nós do elemento.

Representando as deformações específicas em relação aos deslocamentos, tem-se que:

$$\varepsilon = \mathbf{L} \cdot U^e \quad (2.2)$$

sendo que  $\mathbf{L}$  é uma matriz de operadores diferenciais.

Substituindo (2.1) em (2.2) obtém-se:

$$\varepsilon = \mathbf{L} \cdot N \cdot U^e = \mathbf{B} \cdot U^e \quad (2.3)$$

com  $\mathbf{B}$  sendo a matriz que relaciona deformações específicas com deslocamentos.

Para um material elástico linear no regime de pequenas deformações, a relação entre tensão e deformação específica é dada pela equação:

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \varepsilon \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz que contém os parâmetros elásticos que caracterizam o material e, substituindo-se a equação (2.3) em (2.4), obtém-se:

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot U^e \quad (2.5)$$

O Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicado a um corpo sólido em equilíbrio submetido a forças de superfície e volume e cujo estado de deformação sofre uma variação arbitrária  $\delta u$  que respeita as condições de contorno em deslocamentos, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), é definido pela seguinte equação:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot dV = \int_V \delta u^T \cdot b \cdot dV + \int_S \delta u^T \cdot t \cdot dS \quad (2.6)$$

sendo  $\delta \varepsilon$  é o vetor de deformações específicas virtuais associado ao vetor de deslocamentos virtuais  $\delta u$ ,  $\sigma$  é o vetor que contém as componentes de tensão,  $b$  e  $t$  são os vetores de forças de volume e superfície respectivamente, e  $V$  e  $S$  são o volume e a superfície do sólido referidas à configuração indeformada, respectivamente.

Os deslocamentos e deformações virtuais podem ser obtidos a partir de (2.1) e (2.3), respectivamente:

$$\delta u = N \cdot \delta U^e \quad (2.7)$$

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B} \cdot \delta U^e \quad (2.8)$$

Substituindo (2.5), (2.7) e (2.8) em (2.6) obtém-se:

$$\left( \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot dV \right) \cdot U^e = \left( \int_V N^T \cdot b \cdot dV + \int_S N^T \cdot t \cdot dS \right) \quad (2.9)$$

Ou, na forma mais simplificada:

$$\mathbf{K}^e \cdot U^e = F^e \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{K}^e$  é a matriz de rigidez do elemento e  $F^e$  o vetor de forças nodais equivalentes do elemento.

A equação de equilíbrio global da estrutura, que possui a mesma relação dada pela equação (2.10), é obtida somando-se, para cada grau de liberdade de cada nó de elemento em que foi discretizada a estrutura, as contribuições dos elementos que para eles concorrem.

## 2.2 NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Ao se analisar uma estrutura que sofre poucas alterações na sua geometria durante um processo de carregamento, pode-se dizer que os deslocamentos e as deformações desta estrutura podem ser considerados pequenos. Este fato faz com que exista uma relação linear entre carga e deslocamento e que as equações de equilíbrio podem ser estabelecidas com relação à geometria indeformada do corpo, sem que se cometa grande erro com esta aproximação. No entanto, quando a geometria da estrutura se altera significativamente durante o processo de carregamento, pode-se ter grandes deslocamentos mesmo sem grandes deformações. Isto implica numa relação não-linear carga-deslocamento e as equações de equilíbrio devem ser formuladas sobre a geometria deformada do corpo. Trata-se de um problema de não-linearidade geométrica, isto é, a geometria deformada da estrutura influencia no seu comportamento.

Neste trabalho, utiliza-se uma análise não linear geométrica que considera grandes deslocamentos e pequenas deformações. Para este caso, Bathe (1996) recomenda a utilização da formulação Lagrangeana Total. Esta formulação permite que as tensões e deformações específicas, num determinado instante, sejam referidas a qualquer configuração de equilíbrio previamente calculada e que o sistema de referência da análise seja fixado na configuração indeformada do corpo, de modo que todas as variáveis sejam referenciadas a esta configuração.

Segundo Real (2000), a equação de equilíbrio para a formulação Lagrangeana Total, no caso de grandes deslocamentos, é dada por:

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{T} \cdot dV = \int_{V_0} N^T \cdot b \cdot dV + \int_{S_0} N^T \cdot t \cdot dS \quad (2.11)$$

sendo  $\mathbf{T}$  o vetor de tensão de Piola-Kirchhoff II e  $S_0$  e  $V_0$  são, respectivamente, a superfície e o volume de referência da configuração indeformada. No caso de pequenos deslocamentos, o tensor  $\mathbf{T}$  coincide com o vetor de tensão,  $\sigma$ , e as equações (2.11) e (2.6) se equivalem.

Para que a igualdade expressa na equação (2.6) seja satisfeita é necessário que as forças internas devido às ações não-lineares na estrutura seja igual às forças externas aplicadas. Desta forma, define-se a equação de equilíbrio global da estrutura por:

$$\psi(U_n) = F_n - f_{intn} = 0 \quad (2.12)$$

onde  $\psi(U_n)$  é o vetor de forças nodais desequilibradas da estrutura,  $F_n$  é o vetor que contém as forças externas aplicadas no tempo  $t_n$  (lado direito da equação 2.11) e  $f_{intn}$  é o vetor de forças internas da estrutura no tempo  $t_n$  (lado esquerdo da equação 2.11) que depende dos deslocamentos.

Portanto, o problema não-linear se resume a encontrar os deslocamentos que tornam nulo o vetor de forças desequilibradas da estrutura. Para o processo de solução desta equação não linear utilizou-se o Método de Newton-Raphson, sendo que os procedimentos estão detalhados no item (5.4).

## 2.3 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA O CONCRETO

Para representar o concreto foram utilizados elementos finitos isoparamétricos tridimensionais da família Serendipity. Elementos isoparamétricos são aqueles que utilizam as funções de interpolação para definir tanto as incógnitas do problema quanto a geometria a partir dos respectivos valores nodais. Elementos da família Serendipity são os que possuem nós apenas no seu contorno.

Neste estudo optou-se pelo uso dos elementos hexaédricos de 8 nós e de 20 nós. Estes elementos possuem três graus de liberdade por nó, que correspondem às três translações em relação aos eixos xyz do sistema global de coordenadas. A seguir, são descritas as expressões básicas para o modelo linear e não-linear geométrico, bem como as funções de forma de cada elemento.

### 2.3.2 Funções de Forma dos Elementos

Para o elemento hexaédrico de 8 nós, ilustrado na Figura 2.1, são utilizadas funções de interpolação lineares. Assim, o campo de deslocamentos possui variação linear e os de tensões e deformações específicas são constantes ao longo das bordas do elemento.

As funções de forma (de interpolação), que tem como variáveis independentes as coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , são (Zienkiewicz e Taylor, 2000):

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad i=1,2,3,\dots,8 \quad (2.13)$$

onde:  $\xi_0 = \xi\xi_i$ ;  $\eta_0 = \eta\eta_i$ ;  $\zeta_0 = \zeta\zeta_i$  e  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  são as coordenadas naturais do nós em questão.

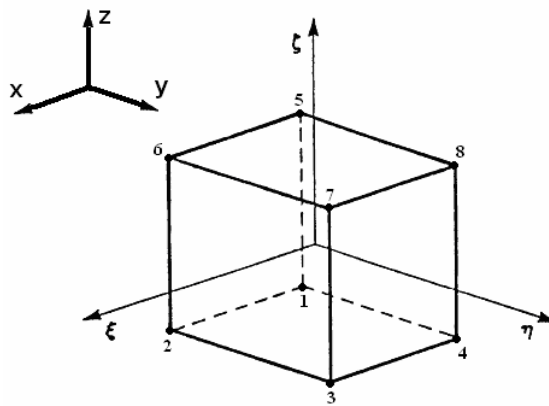


FIGURA 2.1: Hexaedro linear de 8 nós

Para o elemento hexaédrico de 20 nós, como mostra a Figura 2.2, as funções de forma são do tipo quadrática. Assim, o campo de deslocamentos possui variação quadrática e o

campo de tensões e deformações específicas tem variação linear ao longo das bordas do elemento.

Sendo  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , as coordenadas naturais do elemento, e a numeração do nós de acordo com a Figura 2.2, as funções de interpolação são (Zienkiewicz e Taylor, 2000):

a) Nós do canto

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \quad i=1,2,3,4,5,6,7,8 \quad (2.14)$$

b) Nós intermediários

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 9,11,13,15 \quad (2.15)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \zeta_0) \quad i = 10,12,14,16 \quad (2.16)$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad i = 17,18,19,20 \quad (2.17)$$

onde:  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ;  $\eta_0 = \eta \eta_i$ ;  $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$  e  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  são as coordenadas naturais do nós em questão.

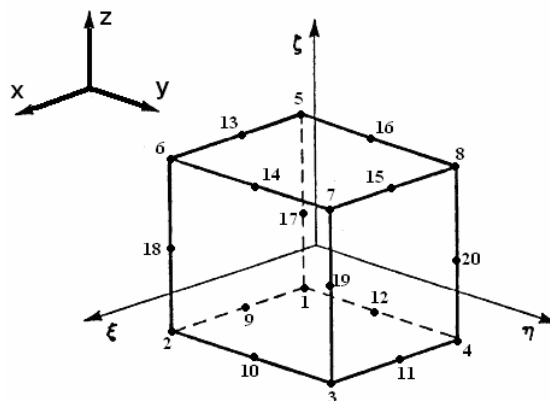


FIGURA 2.2: Hexaedro quadrático de 20 nós

### 2.3.1 Expressões básicas e o modelo linear

Para elementos isoparamétricos tridimensionais, as coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um ponto qualquer do elemento pode ser determinada através das coordenadas de seus nós:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

onde  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  são as funções de forma do nó  $i$ , de coordenadas cartesianas  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $Z_i$ , e  $m$  é o número de nós do elemento.

Para o modelo linear, a matriz  $\mathbf{B}$ , definida na equação (2.3), fica com a seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$  e  $\frac{\partial N_i}{\partial z}$  são as derivadas das funções de forma em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente, correspondentes ao nó  $i$ .

Como a formulação do elemento se dá através do sistema de coordenadas naturais  $\xi, \eta, \zeta$ , ao se fazer a montagem do problema, deve-se utilizar os valores em coordenadas globais. Para isto, utiliza-se a matriz Jacobiana,  $\mathbf{J}$ :



$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} Z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} X_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} Y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} Z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} X_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} Y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} Z_i \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$  e  $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$  são as derivadas das funções de forma em relação aos eixos de coordenadas naturais  $\xi, \eta, \zeta$  respectivamente, correspondentes ao nó  $i$ .

Assim, as derivadas em relação aos eixos globais são dados por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Portanto, a matriz  $\mathbf{B}$  que relaciona as deformações específicas e os deslocamentos pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^{-1} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2^{-1} \omega & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_3^{-1} \omega \\ \mathbf{J}_2^{-1} \omega & \mathbf{J}_1^{-1} \omega & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_3^{-1} \omega & \mathbf{J}_2^{-1} \omega \\ \mathbf{J}_3^{-1} \omega & 0 & \mathbf{J}_1^{-1} \omega \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{J}_1^{-1}$ ,  $\mathbf{J}_2^{-1}$  e  $\mathbf{J}_3^{-1}$  são respectivamente a primeira, segunda e terceira linhas da inversa da matriz Jacobiana e  $\omega$  é a matriz das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas naturais:

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

### 2.3.3 Modelo não linear geométrico

Neste trabalho utilizou-se o modelo descrito por Real (2000) e estendido por Seixas (2003) para elementos isoparamétricos tridimensionais.

Considere, então, um corpo indeformado que sofre um processo de carregamento. As coordenadas de um ponto no corpo indeformado,  $X$ , e as coordenadas deste ponto em um dado instante  $t_n$ ,  $x$ , aplicação do carregamento são dadas, respectivamente, por:

$$X = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$x = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas cartesianas da posição inicial da partícula,  $x_n$ ,  $y_n$  e  $z_n$  são as coordenadas da partícula no tempo  $t_n$ . Pode-se, então, relacionar os deslocamentos sofridos por este ponto em relação às suas coordenadas utilizando o vetor de deslocamentos,  $u$ , formado pelas componentes  $u_n$ ,  $v_n$  e  $w_n$ , que são os deslocamentos em relação aos eixos cartesianos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

$$x = X + u = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Partindo do ponto em que se pode encontrar a configuração indeformada através de uma relação entre a configuração deformada e do instante  $t_n$  e, estendendo o estudo para o método dos elementos finitos, define-se a matriz de deformações Jacobiana de transformação de coordenadas entre a configuração indeformada e a configuração deformada. A equação é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} & \frac{\partial x_n}{\partial y} & \frac{\partial x_n}{\partial z} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial z} \\ \frac{\partial z_n}{\partial x} & \frac{\partial z_n}{\partial y} & \frac{\partial z_n}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} x_{n_i} & \frac{\partial N_i}{\partial y} x_{n_i} & \frac{\partial N_i}{\partial z} x_{n_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} y_{n_i} & \frac{\partial N_i}{\partial y} y_{n_i} & \frac{\partial N_i}{\partial z} y_{n_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} z_{n_i} & \frac{\partial N_i}{\partial y} z_{n_i} & \frac{\partial N_i}{\partial z} z_{n_i} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

onde  $x_{n_i}$ ,  $y_{n_i}$  e  $z_{n_i}$  são as coordenadas no instante  $t_n$  dos  $m$  nós do elemento e as derivadas cartesianas das funções de forma são dadas por (2.16). Desta forma, as deformações específicas podem ser calculadas pelo tensor de deformações específicas de Green-Lagrange que contempla a formulação Lagrangeana-Total. O tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_n$  é dado por:

$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_n^T \cdot \mathbf{F}_n - \mathbf{I}] \quad (2.28)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade.

O tensor de Green-Lagrange pode ser expressado em relação aos deslocamentos com a utilização da equação (2.26), ficando na forma:

$$\mathbf{E}_n = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_n^T + \mathbf{H}_n + \mathbf{H}_n^T \cdot \mathbf{H}_n] \quad (2.29)$$

sendo

$$\mathbf{H}_n = \frac{\partial u}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial x} & \frac{\partial u_n}{\partial y} & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x} & \frac{\partial v_n}{\partial y} & \frac{\partial v_n}{\partial z} \\ \frac{\partial w_n}{\partial x} & \frac{\partial w_n}{\partial y} & \frac{\partial w_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

As deformações específicas no interior do elemento, dadas pela equação (2.29), na sua forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n_{xx}} \\ \varepsilon_{n_{yy}} \\ \varepsilon_{n_{zz}} \\ \gamma_{n_{xy}} \\ \gamma_{n_{yz}} \\ \gamma_{n_{xz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial x} \\ \frac{\partial v_n}{\partial y} \\ \frac{\partial w_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \\ \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial w_n}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_n}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_n}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u_n}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_n}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_n}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial y} \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial u_n}{\partial z} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \frac{\partial v_n}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial z} \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial z} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial z} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

sendo que a primeira parcela do lado esquerdo da equação é referente à parte linear e a segunda referente à parcela não linear geométrica.

Pelo método dos elementos finitos, pode-se escrever (2.31) através da relação:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^m \left( \mathbf{B}_{Li} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NLi} \right) \cdot U_{n_i} \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{B}_{Li}$  é a matriz deformações-deslocamentos linear, dada pela equação (2.19) e  $\mathbf{B}_{NLi}$  é a matriz deformações-deslocamentos não linear, expressa por:

$$\mathbf{B}_{NLi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial w_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial v_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial w_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial v_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial w_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial v_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial w_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial v_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial w_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial u_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial v_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial w_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Real (2000) mostra que as deformações virtuais podem ser encontradas por:

$$\delta \varepsilon_n = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_{ni} \cdot \delta U_{ni} \quad (2.34)$$

sendo

$$\mathbf{B}_{ni} = \mathbf{B}_{Li} + \mathbf{B}_{NLi} \quad (2.35)$$

Pode-se, então, utilizando-se da expressão (2.35), escrever a matriz deformação-deslocamento:

$$\mathbf{B}_{ni} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Utilizando-se a equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, dado por (2.11), encontra-se a matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}_n = \int_{V_0} \mathbf{B}_n^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_n \cdot dV \quad (2.37)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva elástica para o estado triplo de tensão que, para materiais isotrópicos, é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & \textit{simétrico} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal,  $\nu$  o coeficiente de Poisson do concreto e  $dV$  é o volume do elemento diferencial definido como:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz = \det \mathbf{J} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (2.39)$$

onde  $\det \mathbf{J}$  é o determinante da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  da equação (2.20).

Da mesma forma, pode-se determinar as forças internas do elemento:

$$f_{\text{int}} = \int_{V_0} \mathbf{B}_n^T \cdot \sigma_n \cdot dV \quad (2.40)$$

onde  $\sigma_n$  são as componentes de tensões no instante  $t_n$ .

As integrais das equações (2.37) e (2.40) devem ser calculadas numericamente.

## 2.4 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS PARA A ARMADURA

A formulação adotada neste trabalho para representar as barras de armadura é do tipo incorporado. Neste modelo, a barra de armadura é considerada um elemento mais rígido dentro do elemento de concreto. Desta forma, pode-se ter dentro de cada elemento de concreto quantos segmentos de armadura se desejar. Isto acaba favorecendo a modelagem das estruturas por não restringir tamanhos de malha e posição de armadura, por exemplo.

A seguir, é explicitada a formulação geométrica utilizada, as funções de forma para a armadura e o modelo não-linear geométrico para encontrar a matriz de rigidez de elemento de barra.

### 2.4.1 Formulação geométrica

A formulação utilizada para incorporar as barras de armadura ao elemento de concreto, descrita neste item, foi desenvolvida com base na formulação apresentada por Elwi e Hrudey (1989). Uma das vantagens deste método é o de permitir a localização e a geometria das barras sejam independentes da malha de elementos finitos.

As barras de armadura, igualmente ao elemento de concreto, são modelados por elementos isoparamétricos. Desta forma, as coordenadas de qualquer ponto ao longo de uma barra podem ser obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} x(\chi) \\ y(\chi) \\ z(\chi) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & H_j(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & H_j(\chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

onde  $x_j$ ,  $y_j$  e  $z_j$  são as coordenadas globais do nó  $j$  do elemento de armadura,  $H_j(\chi)$  é a função de forma associada a este nó em função da coordenada normalizada, e  $m$  é o número de nós do elemento de armadura.

Os vários termos da rigidez associada com a armadura requerem integrações ao longo da mesma. Para tanto, necessita-se de um elemento diferencial de comprimento  $ds_n$ , disposto

ao longo da armadura, que pode ser obtido a partir da equação (2.41), conforme ilustra a Figura 2.3. A orientação da tangente à barra é dada pelos, ângulos  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ , no instante  $t_n$  por:

$$\cos \alpha_n = \frac{dx_n}{ds_n} = \frac{dx_n}{d\chi} \frac{d\chi}{ds_n} \quad (2.42)$$

$$\cos \beta_n = \frac{dy_n}{ds_n} = \frac{dy_n}{d\chi} \frac{d\chi}{ds_n} \quad (2.43)$$

$$\cos \gamma_n = \frac{dz_n}{ds_n} = \frac{dz_n}{d\chi} \frac{d\chi}{ds_n} \quad (2.44)$$

sendo que o elemento diferencial de comprimento  $ds_n$  pode ser obtido pela equação:

$$\frac{ds_n}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx_n}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dz_n}{d\chi}\right)^2} \quad (2.45)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx_n}{d\chi} \\ \frac{dy_n}{d\chi} \\ \frac{dz_n}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Um elemento diferencial de volume  $dV_s$  da barra de aço, pode ser expresso em termos de  $ds_n$  e da área da seção transversal da barra  $A_s$ , resultando:

$$dV_s = A_s ds_n \quad (2.47)$$

Usando o fator de mapeamento descrito na equação (2.45), integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada normalizada  $\chi$  como:



$$\int_{V_s} C dV_s = \int_{\chi} C \cdot A_s \cdot \frac{ds_n}{d\chi} \cdot d\chi \quad (2.48)$$

onde  $C$  é uma função de posição ao longo da barra de armadura.

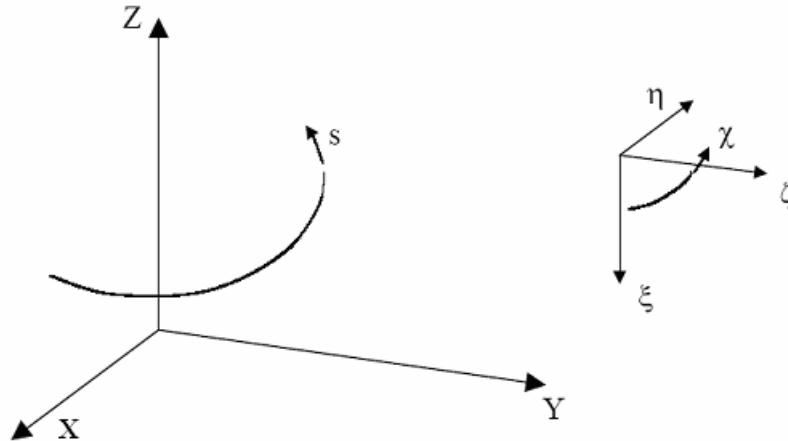


FIGURA 2.3: Coordenada ao longo do eixo da armadura

## 2.4.2 Funções de Forma

Neste trabalho, as barras de armadura são modeladas por elementos isoparamétricos unidimensionais. As funções de forma para os elementos da armadura são polinômios de Lagrange  $H(\chi)$ , expressas em função da coordenada normalizada  $\chi$  sendo dadas pela expressão (Zienkiewicz, 1977):

$$H_k^r(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \dots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_m)}{(\chi_k - \chi_1) \dots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_m)} \quad (2.49)$$

Esta função é um polinômio de grau  $r = m-1$  em  $\chi$ , e tem valor unitário em  $\chi = \chi_k$  e nulo para  $\chi = \chi_1, \dots, \chi_{k-1}, \chi_{k+1}, \dots, \chi_m$ , onde  $r$  é o número de nós do elemento.

Cada barra de armadura é dividida em segmentos de barra dentro de cada elemento de concreto. Cada um destes segmentos de armadura são definidos por dois ou três nós que pertencem ao elemento de concreto. As funções utilizadas podem ser lineares ou quadráticas.

A funções lineares são utilizadas para o elemento de hexaédrico de 8 nós, sendo que o segmento de armadura dentro do elemento de concreto é definido por 2 nós. A funções quadráticas são usadas para o hexaedro de 20 nós ou quando for utilizada integração numérica com 15 ou 27 pontos, sendo que os segmentos de armadura no elemento de concreto deve ser definido por 3 nós.

Para um elemento linear (com 2 nós), as funções utilizadas são:

$$H_1(\chi) = \frac{1-\chi}{2} \quad (2.50)$$

$$H_2(\chi) = \frac{1+\chi}{2} \quad (2.51)$$

Para um elemento quadrático (com 3 nós), as funções são:

$$H_1(\chi) = \frac{\chi^2 - \chi}{2} \quad (2.52)$$

$$H_2(\chi) = 1 - \chi^2 \quad (2.53)$$

$$H_3(\chi) = \frac{\chi^2 + \chi}{2} \quad (2.54)$$

### 2.4.3 Determinação dos segmentos de armadura no interior dos elementos de concreto

As barras de armadura são posicionadas através de pontos, em coordenadas globais (x,y,z), que definem a sua curva. Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto + aço) de um determinado elemento, necessita-se saber quais barras interceptam este elemento. Para

definir cada segmento de armadura faz-se necessário encontrar os nós de intersecção das barras com as faces ou arestas com os elementos de concreto. Para que isso seja possível deve-se determinar, através dos pontos que definem as barras e as funções interpolantes, a curva percorrida pelas barras e verificar a possível intersecção com todos os elementos de concreto.

Primeiramente, é necessário a transformação das coordenadas globais  $P_i(x,y,z)$ , dos pontos que definem a barra, em coordenadas naturais  $P_i(\xi,\eta,\zeta)$ . Para elementos isoparamétricos, as relações entre estas coordenadas são dadas na forma direta pela equação (2.41). Porém, a relação inversa é difícil de ser obtida explicitamente, necessitando-se usar um método numérico para este feito. Elwi e Hrudey (1989) sugerem a utilização do Método de Newton-Raphson. Entretanto, de maneira a otimizar o programa computacional implementado, utilizou-se um algoritmo fornecido por uma biblioteca do FORTRAN, que resolve sistemas de equações não lineares através de um algoritmo híbrido Powell modificado e aproximações através de diferenças finitas para o Jacobiano.

Determinadas as coordenadas naturais dos pontos de definição da geometria da barra, é possível definir a curva que passa por estes pontos. A curva é desenvolvida através do conjunto de nós dos segmentos de armadura que interceptam as faces dos elementos de concreto. Os lados dos elementos são definidos fixando-se uma das coordenadas naturais como -1 ou +1 e as outras podendo assumir valores entre -1 e +1.

De acordo com Zienkiewicz (1977), quando a coordenada  $\xi$  é conhecida, calculam-se  $\eta$  e  $\zeta$  pelas expressões:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n_p} f_i(\xi) \eta_i, \quad (2.55)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n_p} f_i(\xi) \zeta_i$$

onde  $n_p$  é o número de pontos que define a barra de armadura.

Da mesma forma, quando se conhece a coordenada  $\eta$ ,  $\xi$  e  $\zeta$  são determinadas por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n_p} g_i(\eta) \xi_i, \quad (2.56)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n_p} g_i(\eta) \zeta_i$$

Por fim, quando  $\zeta$  é conhecida,  $\xi$  e  $\eta$  são dadas por:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n_p} h_i(\zeta) \xi_i, \quad (2.57)$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{n_p} h_i(\zeta) \eta_i$$

As funções f, g e h são calculadas pelas seguintes expressões:

$$f_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad (2.58)$$

$$g_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)} \quad (2.59)$$

$$h_i(\zeta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{(\zeta - \zeta_j)}{(\zeta_i - \zeta_j)} \quad (2.60)$$

Pode-se, agora, verificar se existe uma possível intersecção da curva com cada uma das seis faces que definem os elementos de concreto. Para as faces com coordenadas  $\xi = \pm 1$ , fixa-se este valor e calculam-se as coordenadas  $\eta$  e  $\zeta$  das intersecções entre faces de elementos com barras. Se  $-1 \leq \eta \leq +1$  e  $-1 \leq \zeta \leq +1$  implica em dizer que existe a possibilidade da barra interceptar esta face do elemento. Para as outras quatro faces, repete-se o procedimento de

maneira análoga, fixando-se  $\eta=\pm 1$  ou  $\zeta=\pm 1$  e verificando-se os limites das coordenadas que variam na face em análise do elemento de concreto.

Este procedimento descrito acima não garante que exista um segmento de armadura pois a curva é de extensão infinita, ensejando quatro possibilidades:

(a) Nenhum dos nós de definição da barra está situado dentro do elemento de concreto e o segmento que liga  $P_1$  e  $P_{np}$  intercepta o elemento (Figura 2.4). Neste caso, as duas intersecções encontradas são verdadeiras ( $I_v$ ).

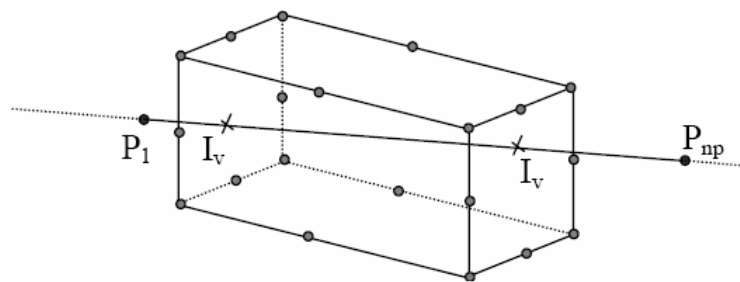


FIGURA 2.4: Segmento com  $P_1$  e  $P_{np}$  fora do elemento de concreto

(b) Os dois nós que definem a geometria da barra se encontram localizados no interior do elemento de concreto (Figura 2.5). Neste caso, as coordenadas naturais dos pontos de intersecção são as mesmas coordenadas naturais dos pontos  $P_1$  e  $P_{np}$  e as duas intersecções encontradas são falsas ( $I_f$ ).

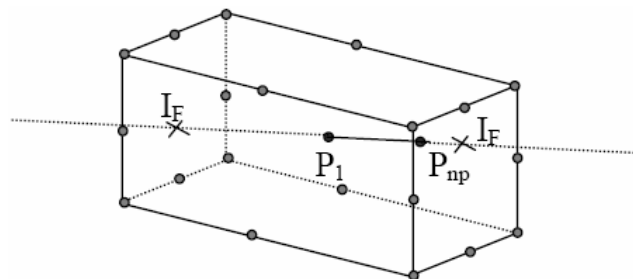


FIGURA 2.5: Segmento com  $P_1$  e  $P_{np}$  dentro do elemento de concreto

(c) Um dos nós que definem as extremidade do elemento de armadura encontra-se localizado dentro do elemento de concreto e, o outro, fora (Figuras. 2.6 e 2.7). Para essa possibilidade,

existe uma intersecção verdadeira e uma intersecção falsa, sendo que o comprimento real do segmento é do ponto que se encontra dentro do elemento até a intersecção verdadeira.

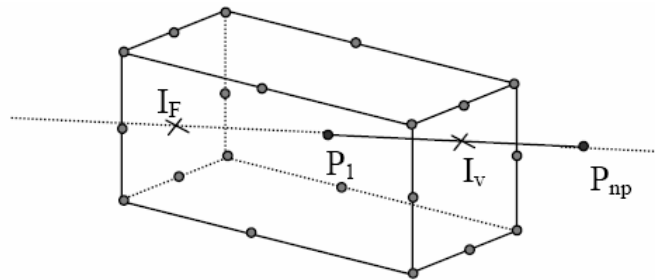


FIGURA 2.6: Segmento com  $P_1$  dentro do elemento de concreto

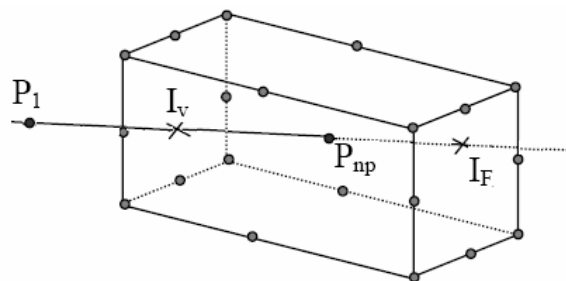


FIGURA 2.7: Segmento com  $P_{np}$  dentro do elemento de concreto

(d) Nenhum dos nós de definição da barra está situado dentro do elemento de concreto e não existe segmento de armadura (Figura 2.8). As duas intersecções encontradas são falsas.

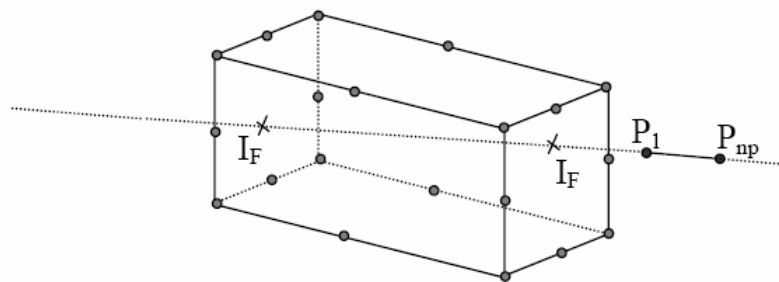


FIGURA 2.8: Segmento não intercepta o elemento de concreto

Com os limites do segmento determinados, pode ser necessária a criação de um nó intermediário, localizado exatamente na metade do segmento. Este procedimento é feito apenas quando for utilizado o elemento quadrático. Posteriormente é feita a determinação das

coordenadas naturais e globais dos nós extremos e intermediário do segmento, caso este exista.

Para finalizar, realiza-se uma verificação para saber se o segmento encontra-se disposto ao longo de uma face ou ao longo de uma aresta do elemento. Neste caso, a rigidez do segmento é distribuída entre dois ou quatro elementos de concreto, respectivamente, que concorrem aquele segmento.

#### 2.4.4 Modelo não linear geométrico e a matriz de rigidez

Pelo fato de serem utilizados elementos unidimensionais para representar as barras de armadura e, considerando aderência perfeita entre o concreto e o aço, pode-se dizer que a deformação ao longo da barra de armadura é igual á deformação normal no elemento de concreto, na direção tangente ao eixo do segmento da armadura. Desta forma, pode-se encontrar as componentes de deformação específica no concreto num ponto em que passa uma barra de aço através da equação (2.32). A deformação específica na armadura na direção tangente ao eixo, pode ser calculada com base na expressão proposta por Elwi e Hrudehy (1989),por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s_n} = & \varepsilon_x \cdot \cos^2 \alpha_n + \varepsilon_y \cdot \cos^2 \beta_n + \varepsilon_z \cdot \cos^2 \gamma_n + \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta_n + \\ & \gamma_{yz} \cdot \cos \beta_n \cdot \cos \gamma_n + \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (2.61)$$

A primeira variação da deformação da armadura, para a determinação da contribuição desta para o vetor de forças internas do elemento de concreto, é dada por:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{s_n} = & \delta \varepsilon_x \cdot \cos^2 \alpha_n + \delta \varepsilon_y \cdot \cos^2 \beta_n + \delta \varepsilon_z \cdot \cos^2 \gamma_n + \delta \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \beta_n + \\ & \delta \gamma_{yz} \cdot \cos \beta_n \cdot \cos \gamma_n + \delta \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha_n \cdot \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (2.62)$$

sendo que a primeira variação das componentes de deformação do elemento de concreto são calculadas pela equação (2.34).

Fazendo-se uso da formulação usada em elementos finitos, pode-se escrever a equação (2.62) da seguinte forma:

$$\delta \varepsilon_{s_n} = \mathbf{B}_{sn} \cdot \delta U_n \quad (2.63)$$

onde  $\mathbf{B}_{sn}$  é o vetor linha que relaciona a primeira variação da deformação na armadura com a primeira variação dos deslocamentos  $\delta U_n$  dos nós do elemento de concreto.

A matriz  $\mathbf{B}_{sn}$  é dada como:

$$\mathbf{B}_{sn}^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \cos^2 \beta_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos^2 \gamma_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \beta_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos \beta_n \cos \gamma_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial x_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \\ \cos^2 \alpha_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \cos^2 \beta_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos^2 \gamma_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \beta_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos \beta_n \cos \gamma_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial y_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \left( \frac{\partial y_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \\ \cos^2 \alpha_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \cos^2 \beta_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos^2 \gamma_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \beta_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \cos \beta_n \cos \gamma_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial z_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) + \cos \alpha_n \cos \gamma_n \left( \frac{\partial z_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial z_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais (equação 2.6), pode-se determinar que a contribuição da armadura, é dada por:

$$\delta W_{s_n} = \int_{V_s} \delta \varepsilon_{s_n}^T \cdot \sigma_{s_n} \cdot dV_{s_n} \quad (2.65)$$

onde  $V_{sn}$  é o volume da armadura e  $\sigma_{sn}$  é a tensão normal na armadura, calculada por

$$\sigma_{s_n} = E_s \cdot \varepsilon_{s_n} \quad (2.66)$$

sendo que  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço.

Substituindo-se (2.47), (2.63) e (2.66) em (2.65), pode-se determinar que a matriz de rigidez para a armadura é dada por:



$$\mathbf{K}_{sn} = \int_{\chi} \mathbf{B}_{sn}^T \cdot E_s \cdot \mathbf{B}_{sn} \cdot A_s \cdot \frac{ds_n}{d\chi} \cdot d\chi \quad (2.67)$$

onde  $A_s$  é a área de aço e  $\frac{ds_n}{d\chi}$  é calculado pela equação (2.45).

O vetor de forças equilibradas para a armadura pode ser obtido também a partir da equação (2.65), ficando definida como:

$$fs_{int_n} = \int_{\chi} \mathbf{B}_{sn}^T \cdot \sigma_{sn} \cdot A_s \cdot \frac{ds_n}{d\chi} \cdot d\chi \quad (2.68)$$

Tanto a matriz de rigidez como o vetor de forças equilibradas da armadura são somados às respectivas matrizes do concreto para formar as matrizes para o concreto armado ou protendido.

## 2.5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho, as integrais envolvidas na formulação são obtidas numericamente. Para isso foram utilizadas duas regras de integração numérica: a integração completa de Gauss-Legendre e a integração reduzida com 15 pontos de integração. A vantagem da integração reduzida em relação à completa se dá no fato de que em muitos casos é necessário um grande número de pontos de integração para a integração do volume do elemento, como é o caso do elemento hexaédrico de 20 nós. Neste caso, a integração reduzida diminui substancialmente o tempo computacional.

Na integração completa, integrais envolvendo regiões prismáticas são definidas por:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i w_j w_k w_l f(\xi_j, \eta_k, \zeta_l) \quad (2.69)$$

onde  $i$  é o número do ponto de integração,  $\xi_j, \eta_k, \zeta_l$  são as coordenadas dos pontos  $i$ ,  $w_j, w_k, w_l$  são os pesos associados ao ponto  $i$ .

Para o elemento linear, que utiliza polinômios de primeiro grau, é necessário o emprego da regra 2x2x2 pontos de Gauss para representar o volume do elemento, o que representa 8 pontos de integração. Da mesma forma, para o elemento quadrático, que utiliza polinômios de segundo grau, é necessário uma regra de 3x3x3 pontos de Gauss necessitando de 27 pontos de integração. Para os dois casos, os pontos de integração são localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo de integração, sendo que os pares simétricos tem o mesmo peso (ver Tabela 2.1 ).

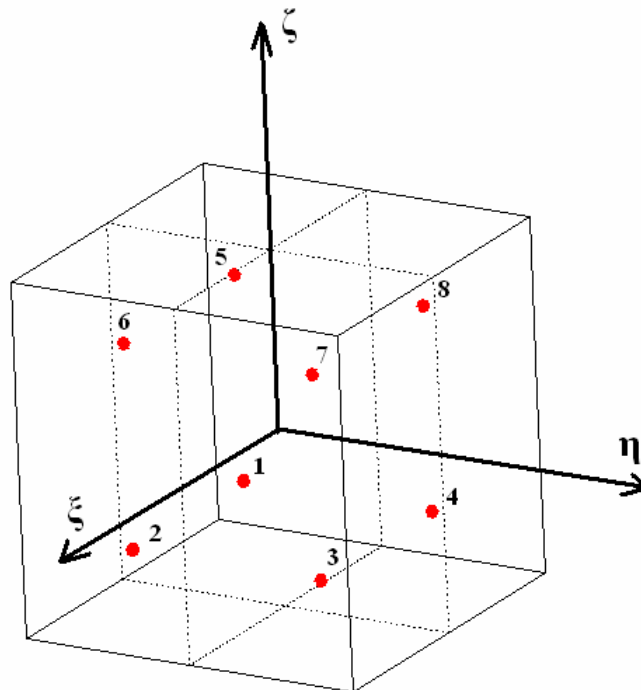


FIGURA 2.9: Integração completa com 8 pontos

TABELA 2.1: Coordenadas e pesos dos pontos de integração na integração completa

Regra	$\xi_j, \eta_k, \zeta_l$	$w_j, w_k, w_l$
2 x 2 x 2	$\pm 0,57735$	1
3 x 3 x 3	0	0,88888
	$\pm 77459$	0,55555

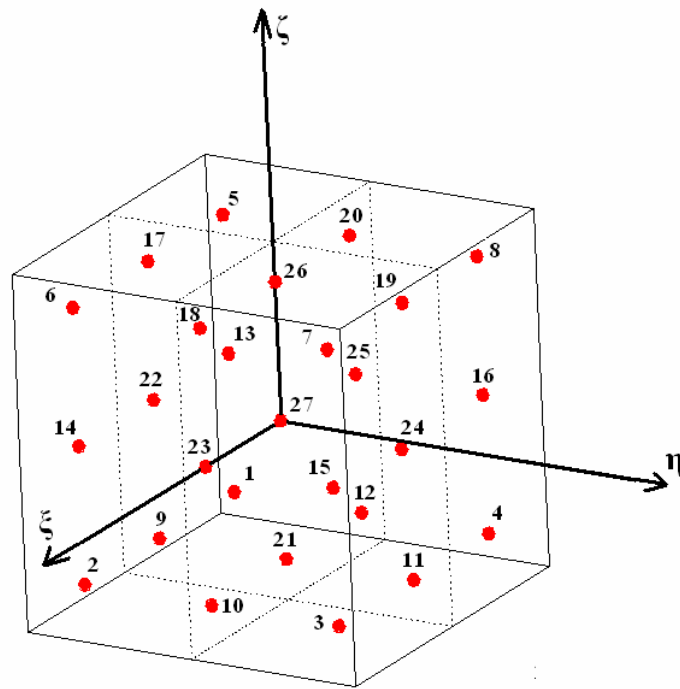


FIGURA 2.10: Integração completa com 27 pontos

A seguir, são apresentadas as posições dos pontos de integração para os dois elementos hexaédricos utilizados.

Na integração reduzida com 15 pontos de integração, a regra pode ser expressa por:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = A \cdot f(0, 0, 0) + B [f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + f(0, -b, 0) + f(0, b, 0) + f(0, 0, -c) + f(0, 0, c) + f(-c, -c, -c) + f(c, -c, -c) + \dots] \quad (2.70)$$

Os coeficientes da equação (2.70) são apresentados na Tabela 2.2.

TABELA 2.2: Coeficientes para a integração reduzida

A	B	C	b	c
1,56444	0,35556	0,53778	1	0,6741

A distribuição dos pontos de integração pode ser vista na Figura (2.6).

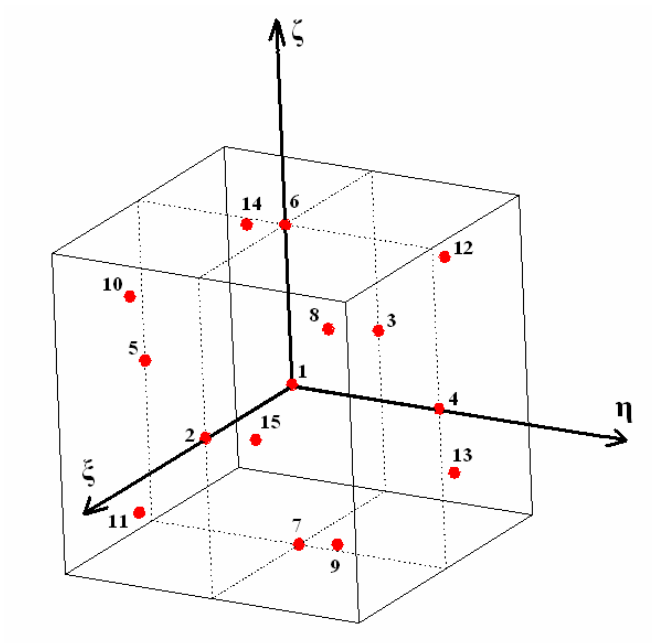


FIGURA 2.11: 15 pontos de integração

## 3 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

### 3.1 INTRODUÇÃO

O concreto estrutural é um material constituído da mistura de agregados e uma pasta de cimento associados com barras de aço e/ou cabos de protensão, convenientemente colocados em seu interior. Por ser o concreto estrutural fruto da combinação de vários materiais, estruturas de concreto armado e protendido comportam-se de uma maneira bastante complexa, apresentando uma resposta altamente não-linear. Este comportamento não-linear deve-se, principalmente, a três efeitos: a plastificação do concreto comprimido e do aço, a fissuração do concreto tracionado e os efeitos dependentes do tempo, como retração e fluência do concreto e relaxação do aço protendido. Outros fatores como o efeito de pino das barras de aço e o engrenamento dos agregados também contribuem para a resposta não-linear deste material.

Neste trabalho, o comportamento do concreto é representado por um modelo elasto-viscoplástico. O modelo computacional é dividido em uma etapa elastoplástica e outra viscoelástica, como será detalhado no capítulo 5. A seguir, são explanados cada um dos modelos constitutivos utilizados em cada uma destas etapas.

### 3.2 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

O concreto é um material que possui sua resistência à compressão muito maior que a resistência à tração. Desta forma, utilizou-se dois modelos diferentes para descrever o seu comportamento: para o concreto comprimido, um modelo elastoplástico com endurecimento e, para o concreto tracionado, um comportamento elástico linear até a ruptura a partir do qual considera-se um modelo de contribuição do concreto entre fissuras. Estes modelos são descritos nos itens que seguem.

### 3.2.1 Modelo para o concreto comprimido

O modelo para o concreto comprimido é composto por um critério de ruptura, um critério de plastificação e uma regra de endurecimento.

#### 3.2.1.1 Critério de Ruptura

Utiliza-se, neste trabalho, o critério de ruptura proposto por Ottosen (1977), o qual é recomendado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Neste critério, a superfície de ruptura é dada pela expressão:

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (3.1)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência média de compressão do concreto,  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões,  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros do critério e  $\lambda$  é uma função que depende do ângulo de similaridade  $\theta$  do concreto. A função  $\lambda$  é definida pelas seguintes expressões:

$$\lambda = c_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos(-c_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta \leq 0 \quad (3.2)$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right], \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta > 0$$

com

$$\operatorname{sen} 3\theta = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{J_3}{J_2^{2/3}} \quad (3.3)$$

sendo  $\theta$  o ângulo de similaridade e  $J_3$  o terceiro invariante do tensor desviador de tensões.

Os quatro parâmetros do modelo,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c_1$  e  $c_2$  são determinados, de acordo com o Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a partir da relação entre a resistência média à compressão uniaxial  $f_{cm}$  e a resistência média à tração uniaxial  $f_{tm}$  do concreto:

$$k = \frac{f_{cm}}{f_{tm}} \quad (3.4)$$

sendo

$$f_{tm} = 0,14(f_{cm})^{2/3}, \text{ em kN/cm}^2 \quad (3.5)$$

Desta forma, os parâmetros do critério de Ottosen são calculados por:

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}} \quad (3.6)$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}} \quad (3.7)$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}} \quad (3.8)$$

$$c_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2 \quad (3.9)$$

Expressando as componentes cartesianas de tensões como

$$\sigma = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz} \rangle \quad (3.10)$$

os invariantes de tensão são obtidos pelas seguintes equações:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (3.11)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (3.12)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} s_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & s_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $s_{xx}$ ,  $s_{yy}$  e  $s_{zz}$  são as tensões desviadoras, determinadas por:

$$s_{xx} = \frac{(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{3} \quad (3.14)$$

$$s_{yy} = \frac{(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz})}{3} \quad (3.15)$$

$$s_{zz} = \frac{(2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{3} \quad (3.16)$$

### 3.2.1.2 Critério de Plastificação

Neste trabalho, considera-se que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico e, para a plastificação, adotou-se a superfície gerada pelo critério de Von Mises. A superfície de Von Mises pode ser obtida através do critério de Ottosen fazendo-se os parâmetros  $\beta$  e  $c_2$ , na equação (3.1), iguais a zero. Considerando-se a tensão uniaxial equivalente ou tensão efetiva  $\sigma_{ef}$  igual a  $f_{cm}$  e manipulando-se a equação (3.1), obtém-se a seguinte expressão para a superfície de plastificação:

$$F = (3J_2)^{1/2} = \sigma_{ef} \quad (3.17)$$



Considerando-se a tensão de plastificação inicial nula, o domínio plástico ocorre para valores de  $\sigma_{ef}$  dentro do intervalo  $0 \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$ , conforme ilustra a Fig. 3.1.

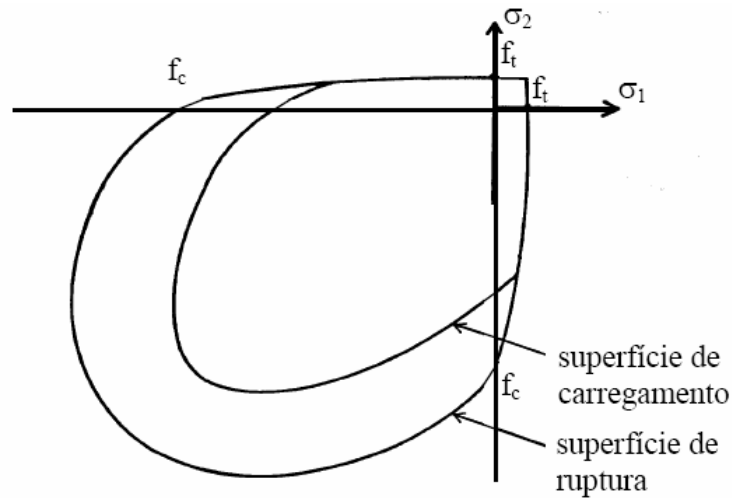


FIGURA 3.1: Superfície de carregamento e ruptura

### 3.2.1.3 Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. Ela é determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, onde é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial. Utiliza-se, neste trabalho, o diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido proposto pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), que pode ser visto na Fig. (3.2). A expressão utilizada é a que segue:

$$\sigma = -\frac{\frac{-E}{f_{cm}} \varepsilon - \left( \frac{\varepsilon}{-0,0022} \right)^2}{1 + \left( \frac{E}{f_{cm}} 0,0022 - 2 \right) \frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (3.18)$$

Para se obter uma relação  $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$ , substitui-se, na equação anterior,  $\varepsilon = \sigma/E + \varepsilon_p$ , resultando na seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (3.19)$$

onde

$$a = \frac{\left(1 - \frac{f_{cm}}{0,0022E}\right)^2}{f_{cm}}, \quad (3.20)$$

$$b = \varepsilon_p \left( \frac{E}{f_{cm}} - \frac{1 - f_{cm}}{0,0011} \right), \quad (3.21)$$

$$c = -\varepsilon_p \left( \frac{E - (\varepsilon_p f_{cm})}{0,0022^2} \right), \quad (3.22)$$

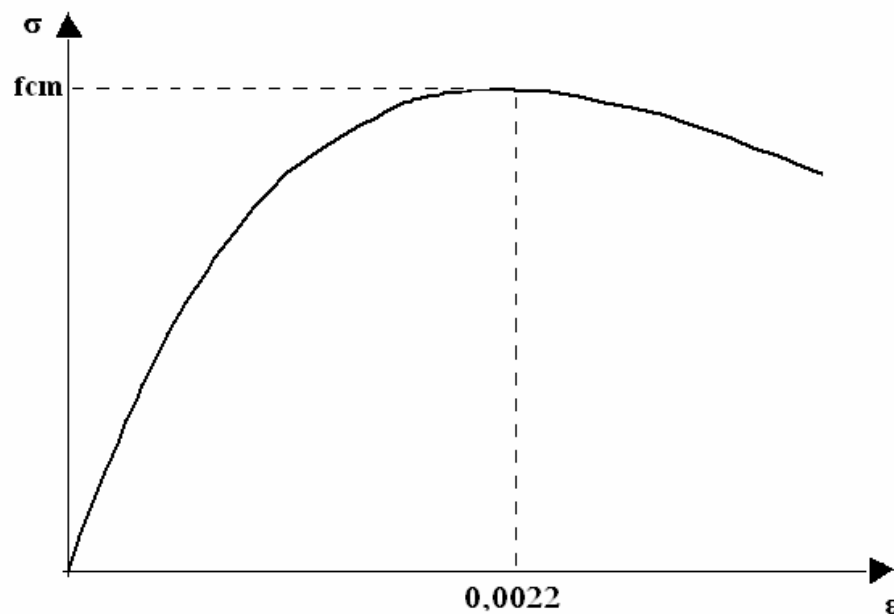


FIGURA 3.2: Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

### 3.2.2 Modelo para o concreto à tração

Uma das características do concreto é possuir a sua resistência à tração muito inferior à resistência a compressão. Isto resulta, ainda em condições de serviço, na sua fissuração. As fissuras induzem a um forte comportamento não-linear, influenciando no desempenho carga-deslocamento de estruturas de concreto armado e protendido. Desta forma, a fissuração torna-se um fator importante na análise estrutural, sendo fundamental para a precisão dos resultados.

Neste trabalho, o concreto tracionado é modelado como sendo um material elástico com amolecimento. Antes de fissurar, o concreto comporta-se como um material elástico-linear. Após a fissuração, utiliza-se o modelo de fissuras distribuídas. O modelo de fissuração utilizado é baseado na formulação apresentada por Hinton (1988) e aprimorada por Martineli (2002). A seguir, são descritos os procedimentos utilizados no modelo de fissuras distribuídas e os três itens que abrangem esse modelo: o critério de fissuração, uma regra para a colaboração do concreto entre fissuras e um modelo para a transferência das tensões de corte.

#### 3.2.2.1 O modelo de fissuras distribuídas

O modelo de fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade real da malha de elementos finitos, não precisando se modificar a topologia desta malha. Necessita-se, apenas, que se atualize a relação tensão-deformação, modificando-se apenas as propriedades do material para considerar o dano à fissuração.

Para um ponto fissurado, o concreto, inicialmente considerado isotrópico, torna-se ortotrópico depois da fissuração. Admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal à tensão principal de tração  $\sigma_1$  (que será definida no item 3.2.2.2) e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais de tração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e tensão. O módulo de elasticidade longitudinal reduz-se na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido.

No modelo implementado, é permitida a ocorrência de dois planos de fissuras em cada ponto de integração. Desta forma, para carregamentos posteriores, uma segunda fissura pode ocorrer no ponto já fissurado. Neste caso, utiliza-se o procedimento da fissura fixa, em que a direção do primeiro conjunto de fissuras permanece fixa e a tensão de tração é avaliada perpendicularmente ao plano de fissuração já existente. Se a tensão exceder a resistência do concreto à tração, então um novo plano de fissuras será formado, perpendicular ao já existente, e todas as componentes de tensão serão zeradas.

### 3.2.2.2 Critério de Fissuração

O critério utilizado para a avaliação da fissuração do concreto consiste em verificar se o nível de tensão dos pontos de integração dos elementos atingiram a superfície de ruptura, conforme apresentado em (3.2.1.1). Como o ponto pode alcançar a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983) para distinguir estas situações.

De acordo com este critério, tem-se que:

- (a)  $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$ , para a fissuração do ponto de integração;
- (b)  $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$ , para o esmagamento do ponto de integração;

onde  $\sigma_1$  é a tensão principal de tração, que pode ser determinada por

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (3.23)$$

### 3.2.2.3 Colaboração do concreto entre fissuras

Quando ocorre a fissuração, o concreto entre fissuras continua resistindo a esforços de tração, suportando um certo nível de tensão. Os efeitos da aderência entre o concreto e as

barras de aço contribuem ativamente para a rigidez total das estruturas. Este fenômeno é conhecido como “efeito de rigidez à tração”, sendo de fundamental importância na análise de peças fletidas de concreto. A aderência é responsável pela transmissão do esforço entre o aço e o concreto fissurado e depende principalmente de fatores como a resistência do concreto e características das barras de armadura, como o diâmetro, conformação superficial. A consideração da aderência no MEF depende da forma de conectar os elementos de aço aos de concreto.

Neste trabalho, utiliza-se a opção adotada por Hinton (1988), que sugere a modificação da curva tensão-deformação do concreto. A degradação da aderência, que ocasiona perdas de resistência à tração, é considerada através da introdução de um ramo descendente na curva tensão-deformação (Figura 3.3). Isto significa dizer que o concreto é um material com amolecimento em tração. A relação constitutiva adotada foi utilizada por Martineli (2002), sendo expressa pela relação:

$$\sigma = \alpha \cdot f_{cm} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ctu}} \right) \quad (3.24)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro que define a inclinação do ramo linear descendente e  $\varepsilon_{ctu}$  é um parâmetro que indica a deformação específica limite na qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser levado em conta. Adotou-se, os valores de 0,6 e 0,001 para  $\alpha$  e  $\varepsilon_{ctu}$ , respectivamente.

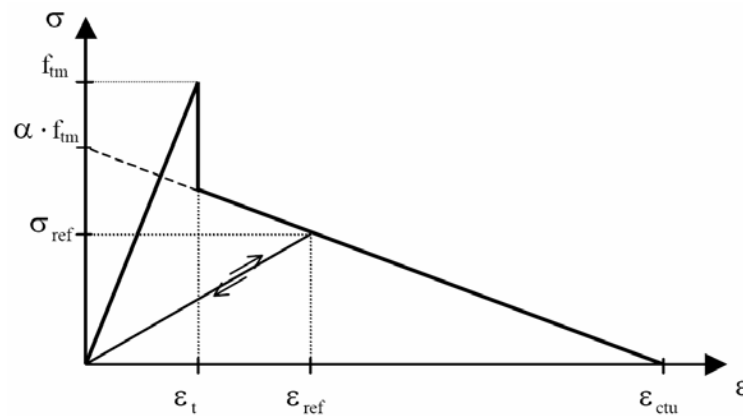


FIGURA 3.3: Curva tensão-deformação para o concreto tracionado

Eventualmente, pode ocorrer que a fissura, em algum ponto de integração, feche parcial ou totalmente, devido à redistribuição das tensões. Neste caso, se a deformação específica atual  $\varepsilon$  é pequena quando comparada com a deformação de tração máxima alcançada transversalmente à fissura em questão  $\varepsilon_{ref}$ , a tensão normal à fissura  $\sigma$ , é calculada por:

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad (3.25)$$

onde  $\sigma_{ref}$  é a tensão correspondente à deformação específica  $\varepsilon_{ref}$ .

A trajetória da “descarga” secante devido ao fechamento da fissura pode ser vista na Figura 3.3. A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até ser excedido o valor de  $\varepsilon_{ref}$ , a partir do qual segue a trajetória descendente definida pela equação (3.24).

#### 3.2.2.4 Modelo para transferência das tensões de corte

As primeiras fissuras, que aparecem no concreto quando submetido a um carregamento, formam-se perpendicularmente à direção da mais alta tensão principal de tração  $\sigma_1$ . As direções principais acabam por se modificar, seja por mudança no carregamento, seja por não-linearidades na estrutura, produzindo deslocamentos relativos das faces da fissura. Isto causa o surgimento de tensões de corte no plano da fissura, cujo valor depende das condições locais desta fissura.

São dois os principais mecanismos de transferência de esforços transversais no concreto fissurado:

- (a) O engrenamento dos agregados, cuja variáveis envolvidas são o tipo e a granulometria dos mesmos;
- (b) O efeito de pino da armadura, que tem como principais variáveis envolvidas o diâmetro das barras, a taxa de armadura e a inclinação das barras em relação ao plano da fissura.

Ambos os mecanismos são controlados pela abertura de fissura e a capacidade de transferência de corte é reduzida com o aumento desta abertura. Os mecanismos mencionados acima não podem ser incluídos diretamente no modelo de fissuras distribuídas. Por isso, utilizou-se neste trabalho, uma aproximação também utilizada por Hinton (1988), que consiste em se adotar um valor reduzido para o módulo de elasticidade transversal correspondente ao plano fissurado.

Sendo  $G_0$  o módulo elasticidade transversal do concreto não fissurado e  $\beta$  o fator de redução que varia entre 0 e 1, o novo valor do módulo de elasticidade transversal,  $G_c$ , é dado por:

$$G_c = \beta G_0 \quad (3.26)$$

O fator  $\beta$  se relaciona com a deformação específica normal de tração do concreto,  $\varepsilon_T$ , através da equação, segundo Hinton (1988):

$$\beta = 1 - \left( \frac{\varepsilon_T}{0,005} \right)^{0,3} \quad (3.27)$$

O módulo de deformação por corte do concreto não-fissurado  $G_0$ , é dado por:

$$G_0 = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.28)$$

Pode-se observar que, quanto maior a deformação específica,  $\varepsilon_T$ , menor será o módulo  $G_c$  e, conseqüentemente, menor a tensão de corte transferida através da fissura. Caso a fissura feche, o módulo inicial,  $G_0$ , é novamente adotado.

### 3.3 MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO

Neste trabalho, utiliza-se um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras. Consideram-se que as barras de aço resistam apenas a esforços uniaxiais. No modelo implementado, o aço é representado como um material elastoplástico e que apresenta

o mesmo comportamento em tração e compressão. A representação se dá por um diagrama tensão-deformação bilinear.

Para as armaduras passivas, as barras seguem dois comportamentos, dependendo do processo de fabricação do material. Para aços com patamar de escoamento bem definido e com dureza material, adotou-se o modelo elastoplástico perfeito (Figura 3.4). Para os aços encruados a frio utilizou-se um comportamento elastoplástico com endurecimento linear a partir de 0,85 da tensão de escoamento (Figura 3.5). Para as barras protendidas, o material tem um comportamento elástico linear até atingir 90% do valor da tensão de ruptura,  $f_{ptk}$ , e após um endurecimento linear (Fig. 3.6).

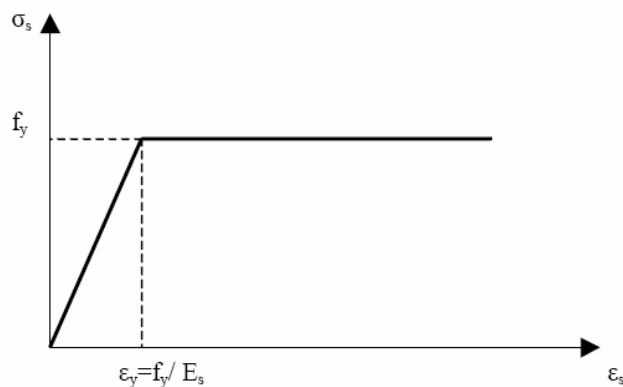


FIGURA 3.4: Modelo elastoplástico perfeito para armaduras passivas

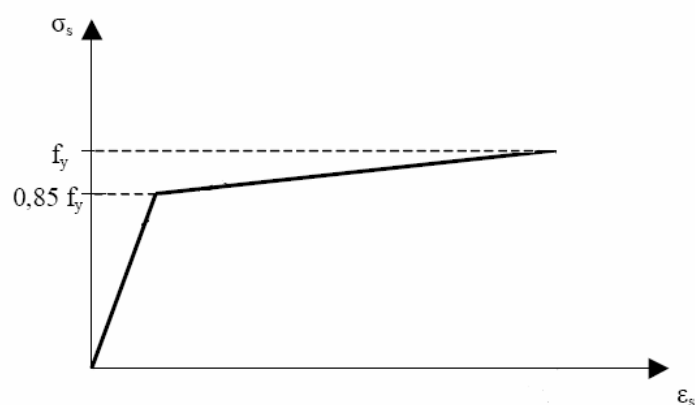


FIGURA 3.5: Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras passivas



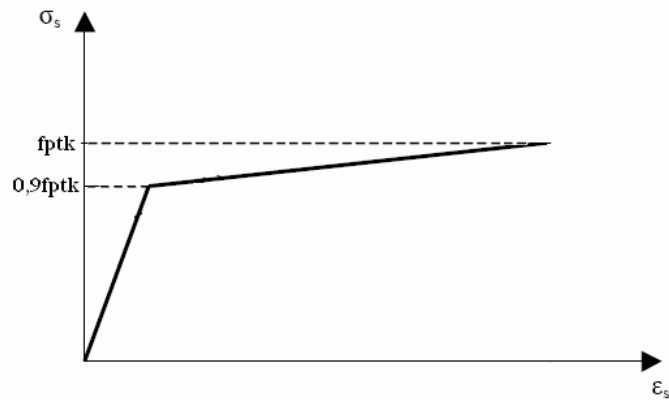


FIGURA 3.6: Modelo elastoplástico com endurecimento linear para armaduras ativas

O parâmetro de endurecimento, tanto para armaduras passivas quanto para ativas, é definido por:

$$H_s = \frac{0,15 f_y}{10^0 /_{00} - \frac{f_y}{E_s}} \quad (3.29)$$

## 3.4 MODELO VISCOELÁSTICO PARA OS MATERIAIS

### 3.4.1 Introdução

O modelo viscoelástico caracteriza-se por apresentar tanto deformações imediatas como não-imediatas. As deformações imediatas provêm do modelo elástico, aparecendo simultaneamente às tensões correspondentes, sem variar ao longo do tempo. Já as deformações não imediatas aparecem com o passar do tempo quando o material é submetido a um certo carregamento, o que corresponde ao seu comportamento viscoso.

Para representar o comportamento viscoelástico dos materiais, utilizaram-se elementos do tipo Maxwell. Cada elemento é composto por uma mola (modelo linear) em série com um amortecedor (modelo viscoso), como pode ser visto na figura 3.7.

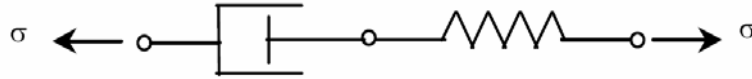


FIGURA 3.7: Modelo de Maxwell

No entanto, este modelo é muito simples para representar o comportamento de um material tão complexo como o concreto. Faz-se uso, então, do Modelo das Camadas Superpostas, através de um conjunto de elementos tipo Maxwell, como será detalhado no item a seguir.

### 3.4.2 O modelo das camadas superpostas

No modelo das camadas superpostas supõe-se que o sólido analisado é composto por várias camadas, superpostas entre si, sendo que cada camada possui propriedades mecânicas diferentes. As camadas sofrem a mesma deformação total produzindo um campo de tensão diferente, que contribui para o campo de tensão total, conforme a sua espessura  $e_i$ .

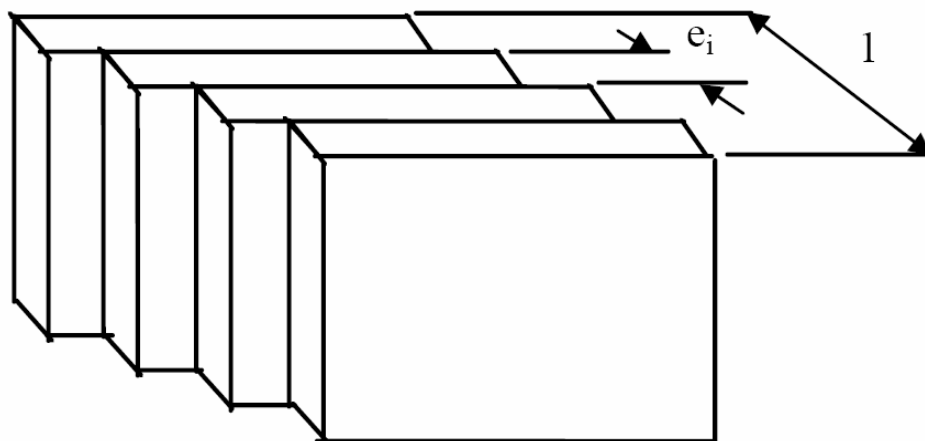


FIGURA 3.8: Modelo das camadas superpostas

Neste trabalho, utilizou-se o modelo com cinco camadas superpostas, como sugerido por Fairbairn et al. (1987). O modelo é formado por uma cadeia de elementos tipo Maxwell associados em paralelo (figura 3.9).

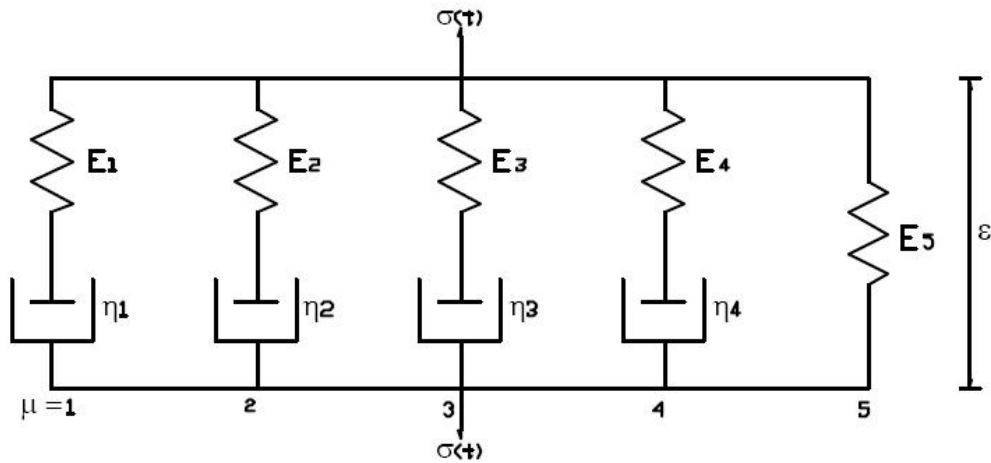


FIGURA 3.9: Modelo de cadeias de Maxwell

As unidades  $\mu$  da cadeia são compostas por molas elásticas, de módulo de elasticidade  $E_\mu(t)$ , dependente da idade  $t$  do material, e amortecedores viscosos, com coeficientes de viscosidade  $\eta_\mu(t)$ . Pode-se notar que este modelo não possui a componente plástica (ou seja, que existam elementos de atrito com tensão de plastificação nula). A formulação utilizada é baseada no trabalho de Bazant e Wu (1974).

#### 3.4.2.1 Formulação matemática

O campo de tensão,  $\sigma(t)$ , aplicado na cadeia, pode ser expresso como:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^5 \sigma_\mu(t) \quad (3.30)$$

no qual  $\sigma_\mu(t)$  representa a tensão, no tempo  $t$ , em um elemento da cadeia de Maxwell. Cada elemento da cadeia possui uma mola e um amortecedor em série. Pode-se, assim, escrever a equação diferencial que relaciona tensão e deformações por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}_\mu(t)}{E_\mu(t)} + \frac{\sigma_\mu(t)}{\eta_\mu(t)} \quad (3.31)$$

onde os coeficientes de viscosidade,  $\eta_\mu$ , são determinados por:

$$\eta_\mu(t) = E_\mu(t)\tau_\mu \quad (3.32)$$

sendo  $\tau_\mu$  os tempos de relaxação da unidade  $\mu$ , considerados constantes no tempo  $t$ . Os tempos de relaxação de cada unidade, de acordo com o período de tempo que se deseja descobrir, após a aplicação da carga, são considerados como:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 1 \text{ e } \tau_5 = 10^{30} \\ \tau_\mu &= 10^{\mu-1}, \mu = 2, \dots, 4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

A unidade  $\mu=5$ , cuja mola não está acoplada a nenhum amortecedor, é considerada com  $\tau_5=\infty$  e  $\eta_5=\infty$ , a fim de tornar a deformação assintoticamente convergente para uma certa data, conforme o comportamento real do concreto.

A solução da equação diferencial (3.31) representa a tensão resultante para o elemento de Maxwell no tempo  $t$ , devido a um carregamento no instante  $t'$ , sendo expressa por:

$$\sigma(t, t') = \sigma_\mu(t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu}} \quad (3.34)$$

Assim, pode-se encontrar a função de relaxação  $R(t, t')$  do modelo que representa a tensão resultante para uma deformação unitária, imposta em  $t$  igual a  $t'$  e mantida constante para  $t$  maior que  $t'$ :

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^5 E_\mu(t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu}} \quad (3.35)$$

A determinação dos módulos  $E_{\mu}(t')$  desta função são feitos a partir da função de relaxação  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ , cujos valores discretos no tempo  $t_i$ , são conhecidos. Bazant (1982) propôs um algoritmo que determina automaticamente os parâmetros  $E_{\mu}(t)$ . Esta solução está apresentada no item (3.4.3.5.).

### 3.4.3 Fluência do concreto

No domínio das tensões de utilização, as deformações por fluência, devidas a tensões em dois instantes diferentes, podem ser consideradas como aditivas, obedecendo o princípio da superposição de efeitos (Creus, 1986). Neste trabalho, utilizam-se níveis de tensões menores que 40% do valor da resistência média à compressão do concreto. O Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), aceita a superposição linear quando se trabalha com estes níveis de tensões.

#### 3.4.3.1 Lei do tipo integral para fluência

Para uma história prescrita de tensões, o somatório das respostas lineares de deformação, devidas a todos os pequenos incrementos de tensão uniaxiais aplicados antes do tempo  $t$ , induz a uma lei do tipo integral de fluência:

$$\varepsilon_{TOT}(t) - \varepsilon_n(t) = \int_0^t J(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (3.36)$$

onde  $\varepsilon_{TOT}(t)$  é a deformação axial total (parcelas dependente e independentes do tempo) na idade  $t$ ;  $\varepsilon_n(t)$  é a deformação axial inelástica (decorrente da fluência, retração dilatação térmica, etc),  $J(t, \tau)$  é a deformação no tempo  $t$  causada por uma tensão unitária constante agindo no intervalo entre  $\tau$  e  $t$  (também conhecida como função de fluência); e  $\sigma$  é a tensão uniaxial. Sendo  $\sigma(t)$  caracterizado por um valor inicial  $\sigma(t')$  para  $\tau=t'$ , com

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= 0, \text{ para } t < t' \\ \Delta\sigma(t') &= \sigma(t')\end{aligned}\tag{3.37}$$

podemos, então, reescrever a equação (3.36) da seguinte forma:

$$\varepsilon_{TOT}(t) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t')J(t, t') + \int_{t'}^t J(t, \tau) d\sigma(\tau)\tag{3.38}$$

onde  $\tau$  é o tempo no qual os incrementos de tensão  $d\sigma(\tau)$  são aplicados, estando contido no intervalo  $t' \leq \tau \leq t$ . Se  $\sigma(t')$  varia em passos discretos  $\Delta\sigma(t_i)$ , tem-se que:

$$\varepsilon_{TOT}(t) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t')J(t, t') + \sum_{i=1}^N J(t, t_i)\Delta\sigma(t_i)\tag{3.39}$$

#### 3.4.3.2 Lei do tipo integral para relaxação

Para uma história prescrita de deformações, o somatório das respostas lineares de tensão, devidas a todos os pequenos incrementos de deformações uniaxiais aplicados antes do tempo  $t$ , induz a uma lei do tipo integral para a relaxação:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t, \tau) d[\varepsilon_{TOT}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)]\tag{3.40}$$

onde  $R(t, \tau)$  é a tensão no tempo  $t$  causada por uma deformação unitária constante agindo no intervalo entre  $\tau$  e  $t$ , também conhecida como função de relaxação. Seja a deformação caracterizada por um valor inicial  $\varepsilon_{TOT}(t') - \varepsilon_n(t')$ , para  $\tau = t'$ , com:

$$\varepsilon_{TOT}(t) - \varepsilon_n(t) = 0, \text{ para } t < t', \text{ e} \quad (3.41)$$

$$\Delta[\varepsilon_{TOT}(t') - \varepsilon_n(t')] = \varepsilon_{TOT}(t') - \varepsilon_n(t')$$

pode-se escrever a equação (3.40) como:

$$\sigma(t, t') = [\varepsilon_{TOT}(t') - \varepsilon_n(t')]R(t, t') + \int_{t'}^t R(t, \tau) d[\varepsilon_{TOT}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] \quad (3.42)$$

onde  $\tau$  é o tempo no qual os incrementos de deformação  $d[\varepsilon_{TOT}(\tau) - \varepsilon_n(\tau)]$  são aplicados. A variação de  $\tau$  é no intervalo  $t' \leq \tau \leq t$ . Se  $[\varepsilon_{TOT}(t) - \varepsilon_n(t)]$  varia em passos discretos  $\Delta[\varepsilon_{TOT}(t_i) - \varepsilon_n(t_i)]$ , tem-se:

$$\sigma(t, t') = [\varepsilon_{TOT}(t') - \varepsilon_n(t')]R(t, t') + \sum_{i=1}^N R(t, \tau) d[\varepsilon_{TOT}(t_i) - \varepsilon_n(t_i)] \quad (3.43)$$

### 3.4.3.3 Relação entre as funções de fluência e relaxação

A relação entre as funções de fluência e relaxação pode ser obtida considerando-se a história de deformações na equação (3.38) como sendo uma função do tipo salto unitário. Desta forma temos:

$$\varepsilon_{TOT}(t) - \varepsilon_n(t) = 0, \text{ para } t < t' \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{TOT}(t, t') - \varepsilon_n(t) = 1, \text{ para } t \geq t'$$

em cujo caso, a resposta de tensão é definida por  $\sigma(t, t') = R(t, t')$ . Substituindo a resposta de tensão na equação (3.38) e considerando que  $R(t, t')$  é igual ao módulo de elasticidade longitudinal  $E_c(t')$  do concreto no tempo  $t'$ :

$$E_c(t')J(t,t') + \int_{t'}^t J(t,\tau)dR(\tau) = 1 \quad (3.45)$$

Através da equação acima se pode determinar a função de relaxação a partir da função de fluência. Esta relação é necessária para a obtenção dos módulos de elasticidade dos elementos do modelo de Maxwell, vistos no item 3.4.2.1. Estes valores podem ser obtidos a partir de uma função de relaxação  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ , cujos valores discretos, nos tempos  $t_i$ , são conhecidos. Para isso, deve-se resolver numericamente a equação (3.45) para uma história conhecida de deformações.

Para a resolução da equação (3.45) é necessário uma regra de aproximação. Utiliza-se, neste trabalho, a regra trapezoidal, definida por:

$$\varepsilon_{TOT}(t_k) - \varepsilon_n(t_k) = \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] \Delta\sigma(t_i) \quad (3.46)$$

Usando esta regra para aproximar a equação (3.45), obtemos:

$$\Delta \tilde{R}_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \Delta \tilde{R}_j [J(t_i, t_j) + J(t_i, t_{j-1}) - J(t_{i-1}, t_j) - J(t_{i-1}, t_{j-1})]}{-[J(t_i, t_j) + J(t_i, t_{j-1})]} \quad (3.47)$$

com um valor inicial de  $\Delta \tilde{R}_1 = E_c(t')$ . Então, encontra-se que:

$$\tilde{R}_i(t_i, t') = \tilde{R}_i(t_{i-1}, t') + \Delta \tilde{R}_i \quad (3.48)$$

Assim, pode-se obter  $\tilde{R}_i(t_i, t')$  conhecendo-se os valores de  $J(t_i, t')$  para qualquer idade ( $t'$ ) de aplicação da carga e a sua duração ( $t - t'$ ) dentro da faixa de tempo considerada. Neste trabalho, adotaram-se oito curvas de fluência para tal feito. Para as idades  $t'_i$  de carregamento, de cada curva de fluência, tomou-se a seguinte faixa de tempo:



$$t'_i = \sqrt{10} \cdot t'_{i-1}, \text{ com } i = 2, \dots, 8 \quad (3.49)$$

sendo  $t'_1 = 2,8$  dias.

Os valores de durações de carga  $(t_i - t')$  foram escolhidos através de uma razão constante crescente, em escala logarítmica, do tipo:

$$(t_i - t') = 10^{\frac{1}{10}}(t_{i-1} - t'), \text{ com } i = 2, \dots, 30 \quad (3.50)$$

onde  $(t_1 - t') = 3,52$  dias.

#### 3.4.3.4 Função de fluência

Como visto no item anterior, para a determinação da função de relaxação é necessário se conhecer a função de fluência. Esta função pode ser obtida de duas maneiras: através de ensaios em laboratório ou por expressões analíticas encontradas em normas. Neste trabalho, adotou-se a formulação apresentada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) que define a função de fluência válida para uma tensão menor que  $0,4f_{cm}$ . Neste caso, a equação de  $J(t, t')$ , que representa a deformação na idade  $t$ , causada por uma tensão unitária atuando a partir do tempo  $t'$ , é dada por:

$$J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\phi(t, t')}{E_c} \quad (3.51)$$

Os termos que compõem esta equação são definidos como:

(a)  $E_c$  = módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias, que pode ser determinado a partir da resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias,  $f_{cm}$ , pela equação:

$$E_c = 21500 \left( f_{cm} / 10 \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ } f_{cm} \text{ em MPa} \quad (3.52)$$

O valor de  $E_c$  deve ser acrescido de 20% se o concreto tiver agregados de basalto.

(b)  $E_c(t')$  = módulo de elasticidade na idade  $t'$ (em dias) do carregamento, definido pela expressão:

$$E_c(t') = \beta_{cc}(t')^{\frac{1}{2}} E_c \quad (3.53)$$

com

$$\beta_{cc}(t') = e^{s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t'} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (3.54)$$

onde  $t'$  deve ser ajustado de acordo com a equação (3.63) e  $s$  é um parâmetro que depende do tipo de cimento, que valendo 0,20 para cimento de endurecimento rápido e alta resistência, 0,25 para cimento de endurecimento rápido e normal e 0,38 para cimento de endurecimento lento.

(c)  $\phi(t,t')$  = coeficiente de fluência, calculado por:

$$\phi(t,t') = \phi_0 \beta_c(t-t') \quad (3.55)$$

sendo  $\phi_0$  o coeficiente de fluência nominal e  $\beta_c(t-t')$  o coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo.

O coeficiente de fluência nominal  $\phi_0$  pode ser estimado como:

$$\phi_0 = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t') \quad (3.56)$$

com

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / 100}{0,46(h/10)^{\frac{1}{3}}} \quad (3.57)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm}/10)^{0,5}}, f_{cm} \text{ em MPa} \quad (3.58)$$

$$\beta(t') = \frac{1}{0,1 + (t')^{0,2}} \quad (3.59)$$

onde RH é a umidade relativa do ar em [%], h é a espessura fictícia, em cm, dada por

$$h = \frac{2A_c}{u} \quad (3.60)$$

sendo  $A_c$  a área da seção transversal e  $u$  o perímetro de contato com a atmosfera.

O coeficiente  $\beta_c(t-t')$  é expresso por:

$$\beta_c(t-t') = \left[ \frac{(t-t')}{\beta_H + (t-t')} \right]^{0,3} \quad (3.61)$$

com

$$\beta_H = 150 \left\{ 1 + \left( \frac{1,2RH}{100} \right)^{18} \right\} \frac{h}{10} + 250 \leq 1500 \quad (3.62)$$

No modelo apresentado, os efeitos do cimento e da variação da temperatura ao longo do tempo, sobre as deformações por fluência, são considerados através de correções dos coeficientes e funções descrita anteriormente. Os efeitos de altas ou baixas temperaturas e a maturidade do concreto devem ser considerados ajustando-se o valor do tempo  $t'$ , conforme a equação:

$$t' = t'_T \left[ \frac{9}{2 + (t'_T)^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ dias} \quad (3.63)$$

onde  $\alpha$  depende do tipo de cimento e cujos valores são dados na tabela 3.1 e  $t'_T$  é o tempo ajustado devido a efeitos ocorridos para temperaturas diferentes de 20°C, compreendidas entre 0°C e 80°C, sendo igual a:

$$t'_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i e^{-\left[\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} - 13,65\right]} \quad (3.64)$$

sendo  $T(\Delta t_i)$  a temperatura média atuante por um período de  $\Delta t_i$  dias e  $n$  o número total de dias.

TABELA 3.1: Valores de  $\alpha$

TIPO DE CIMENTO	$\alpha$
Cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial	1
Cimento de endurecimento rápido e normal	0
Cimento de endurecimento lento	1

Os coeficientes  $\beta_H$  e  $\phi_{RH}$  são corrigidos, respectivamente, por:

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T \quad (3.65)$$

$$\phi_{RH,T} = \phi_T + (\phi_{RH} - 1)\phi_T \quad (3.66)$$

onde

$$\beta_T = e^{\frac{1500}{273+T(\Delta t_i)} - 5,12} \quad (3.67)$$

$$\phi_T = e^{0,015[T(\Delta t_i) - 20]} \quad (3.68)$$

### 3.4.3.5 Determinação dos módulos de elasticidade $E_\mu(t)$ da cadeia de Maxwell

A equação da curva de relaxação, para uma idade  $t'$ , pode ser determinada pelo método dos mínimos quadrados, a partir dos pontos conhecidos  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ . A aplicação deste método é feita através da minimização da soma dos quadrados do desvio  $\phi$ , ou seja:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} \left[ R(t_i, t') - \tilde{R}(t_i, t') \right]^2 + \pi \quad (3.69)$$

onde  $\pi$  é o termo residual para melhorar o ajuste da função, definido por

$$\pi = w_1 \sum_{\mu=1}^3 (E_{\mu+1} - E_\mu)^2 + w_2 \sum_{\mu=1}^2 (E_{\mu+2} - 2E_{\mu+1} + E_\mu)^2 \quad (3.70)$$

sendo  $w_1 = 0,01$  e  $w_2 = 0,08$  os pesos adotados para o termo residual. Substituindo a equação (3.35), que representa a função de relaxação para o modelo de Maxwell, na equação (3.69) sem o termo residual, tem-se:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} \left[ \sum_{\mu=1}^5 E_\mu(t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu}} - \tilde{R}(t_i, t') \right]^2 \quad (3.71)$$

As incógnitas  $E_\mu(t')$  são obtidas através das condições de minimização, ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial E_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, 5 \quad (3.72)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.71) no sistema (3.72), obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{30} \left[ \sum_{\mu=1}^5 E_\mu(t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_\mu}} - \tilde{R}(t_i, t') \right] \sum_{j=1}^{30} e^{-\frac{(t-t')}{\tau_j}} = 0 \quad (3.73)$$

Pode-se reescrever esta expressão da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{30} \left[ \sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-\left(\frac{(t-t')}{\tau_{\mu}} + \frac{(t-t')}{\tau_j}\right)} \right] = \sum_{j=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_j}} \quad (3.74)$$

A resolução deste sistema de cinco equações com cinco incógnitas conduz a valores positivos de  $E_{\mu}(t')$ , pois a inclinação da curva de relaxação é sempre positiva. Desta forma, pode-se obter os valores dos módulos de elasticidade da cadeia de Maxwell para os valores  $t'$ , resolvendo a expressão (3.74), que pode ser escrita em sua forma matricial da seguinte maneira:

$$[A]\{E\} = \{B\} \quad (3.75)$$

onde

$$A_{jk} = \sum_{l=1}^{30} e^{-\left(\frac{(t-t')}{\tau_{\mu}} + \frac{(t-t')}{\tau_j}\right)}, k = 1, \dots, 5 \quad (3.76)$$

$$B_j = \sum_{l=1}^{30} \tilde{R}(t_i, t') e^{-\frac{(t-t')}{\tau_j}} \quad (3.77)$$

$$E_j = E_j(t') \quad (3.78)$$

Introduzindo o termo residual  $\pi$  nas equação (3.72), os elementos  $A_{jk}$  devem ser corrigidos da seguinte forma:

$$\begin{cases} A_{k,k} = A_{k,k} + w_1 + w_2 (k = 1 \text{ ou } 4) \\ A_{k,l} = A_{k,l} - w_1 + 2w_2 (k = 1, l=2 \text{ ou } k=2, l=1) \\ A_{k,l} = A_{k,l} + w_2 (k = 1, l=3 \text{ ou } k=3, l=1) \\ A_{k,k} = A_{k,k} + 2w_1 + 5w_2 (k = 2 \text{ ou } 3) \\ A_{k,l} = A_{k,l} - w_1 - 4w_2 (k = 2, l=3 \text{ ou } k=3, l=2) \\ A_{k,l} = A_{k,l} + w_2 (k = 2, l=4 \text{ ou } k=4, l=2) \\ A_{k,l} = A_{k,l} - w_1 - 2w_2 (k = 3, l=4 \text{ ou } k=4, l=3) \end{cases} \quad (3.79)$$

Para uma idade  $t$ , os valores de  $E_\mu(t)$  são interpolados pela seguinte expressão:

$$E_\mu(t) = \frac{E_\mu(t'_{i-1})[\log(t'_i) - \log(t)] + E_\mu(t'_i)[\log(t) - \log(t'_{i-1})]}{\log(t'_i) - \log(t'_{i-1})} \quad (3.80)$$

### 3.4.4 Retração do Concreto

As deformações por retração do concreto são tratadas como deformações impostas à estrutura. Conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), as deformações por retração podem ser calculadas como:

$$\varepsilon_{CS}(t, t_s) = \varepsilon_{CS_0} \beta_s (t - t_s) \quad (3.81)$$

onde  $\varepsilon_{CS_0}$  é o coeficiente de retração nominal,  $\beta_s$  é o coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo,  $t$  é a idade do concreto em dias e  $t_s$  é a idade de começo da retração no concreto em dias. O coeficiente de retração nominal é obtido por:

$$\varepsilon_{CS_0}(t, t_s) = \varepsilon_S(f_{cm}) \beta_{RH} \quad (3.82)$$

com

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \left[ 1 - (RH/100)^3 \right] & \text{para } 0\% \leq RH \leq 99\% \\ 0,25 & \text{para } RH > 99\% \end{cases} \quad (3.83)$$

e

$$\varepsilon_S(f_{cm}) = 10^{-6} [160 + 10 \beta_{sc} (9 - f_{cm}/10)] \quad (3.84)$$

onde  $\beta_{sc}$ , é dado pela Tabela 3.2.

TABELA 3.2: Valores de  $\beta_{sc}$ 

TIPO DE CIMENTO	$\beta_{sc}$
Cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial	8
Cimento de endurecimento rápido e normal	5
Cimento de endurecimento lento	4

O coeficiente  $\beta_s$  que representa o de desenvolvimento da retração no tempo é calculado através da expressão:

$$\beta_s(t-t_s) = \left[ \frac{(t-t_s)}{\alpha_{st} + (t-t_s)} \right]^{0,5} \quad (3.85)$$

sendo

$$\alpha_{st} = 350 \left( \frac{h}{10} \right)^2 \quad (3.86)$$

onde h é a espessura fictícia definida em (3.60).

Para se levar em conta os efeitos da variação da temperatura no cálculo da deformação por retração, utiliza-se correções nos coeficiente  $\alpha_{st}$  e  $\beta_{RH}$ . Estas correções representam o efeito de uma temperatura constante, num intervalo  $\Delta t_i$ , diferente de 20°C, enquanto o concreto está endurecendo. As equações que multiplicam os coeficientes  $\alpha_{st}$  e  $\beta_{RH}$ , são, respectivamente:

$$\alpha_{st}(T) = e^{-0,06 \left[ T(\Delta t_i) - 20^\circ C \right]} \quad (3.87)$$

$$\beta_{st} = 1 + \left( \frac{8}{103 - RH} \right) \left[ \frac{T(\Delta t_i) - 20^\circ C}{40} \right] \quad (3.88)$$

Para a consideração da retração como deformação imposta, determina-se um vetor de forças nodais equivalentes, através da equação:



$$f_{\text{int}} = \int_V B^T \cdot D \cdot \Delta \varepsilon_{cs} \cdot dV \quad (3.89)$$

onde

$$\Delta \varepsilon_{cs} = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{cs}(t, t_s) \\ \Delta \varepsilon_{cs}(t, t_s) \\ \Delta \varepsilon_{cs}(t, t_s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Da mesma maneira que a fluência, a deformação originada pela retração não produz diretamente tensões no concreto. Por isso, desconta-se o valor da deformação de retração da deformação total para a obtenção destas tensões.

### 3.4.5 Relaxação das armaduras protendidas

O efeito de relaxação do aço protendido ocasiona uma perda de tensão das barras ao longo do tempo. Para a representação deste comportamento, utilizou-se o modelo reológico com 5 elementos tipo Maxwell, que representa cada uma das camadas do material.

O processo é o mesmo utilizado para o efeito de fluência do concreto. A determinação da função de relaxação  $R(t, t')$  é obtida a partir dos termos  $E_{\mu}(t')$  que pode ser feita a partir de uma função de relaxação  $\tilde{R}_i(t_i, t')$ , cujos valores discreto, nos tempos  $t_i$ , são conhecidos. A determinação dos pontos  $\tilde{R}_i(t_i, t')$  ocorre a partir da obtenção dos valores de relaxação das armaduras protendidas, que possuem formulações específicas para a sua determinação. Isso não ocorre com o concreto na obtenção do efeito de fluência, no qual se fez necessária a utilização das oito curvas de fluência.

De acordo com o Modelo CEB-FIP 1990 (1993), o valor da relaxação do aço, para qualquer tempo  $t$ , em dias, é dado por:

$$\rho_t = \psi_{1000} \left( \frac{3t}{125} \right)^k \quad (3.91)$$

onde  $\psi_{1000}$  é a relaxação das barras após 1000 horas a 20°C e  $k$  é igual a 0,12 para aços com relaxação normal e 0,25 para aços com baixa relaxação. A determinação de  $\psi_{1000}$  é feita através dos coeficientes  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$ , que são resultados de medidas de tensão, após 1000 horas, a 20°C, de amostras de aço, mantidas com comprimento constante e submetidas, inicialmente, a tensões de tração 60%, 70% e 80% da tensão de ruptura,  $f_{ptk}$ , respectivamente. Segundo Vasconcelos (1980), conhecidos os três valores de  $\psi$  é possível encontrar uma parábola passando pelos três pontos num gráfico de  $\psi$  em função de  $\frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}}$ , onde  $\sigma_{p0}$  representa a tensão inicial de protensão (Figura 3.10). Desta forma, encontra-se  $\psi_{1000}$  pela seguinte equação:

$$\psi_{1000} = a \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right)^2 + b \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} \right) + c \quad (3.92)$$

onde

$$a = 50\psi_{60} - 100\psi_{70} + 50\psi_{80} \quad (3.93)$$

$$b = -75\psi_{60} + 140\psi_{70} - 65\psi_{80} \quad (3.94)$$

$$c = 28\psi_{60} - 48\psi_{70} + 21\psi_{80} \quad (3.95)$$

sendo os valores de  $\psi_{60}$ ,  $\psi_{70}$  e  $\psi_{80}$ , para cordoalhas, são dados pela NBR6118/2003 e mostrados na Tabela 3.3.

TABELA 3.3: Valores de  $\psi_{1000}$  para cordoalhas, segundo NBR6118/2003

$\sigma_{p0}$	Relaxação	
	Normal	Baixa Relaxação
0,6 $f_{ptk}$	0,035	0,013
0,7 $f_{ptk}$	0,07	0,025
0,8 $f_{ptk}$	0,12	0,035

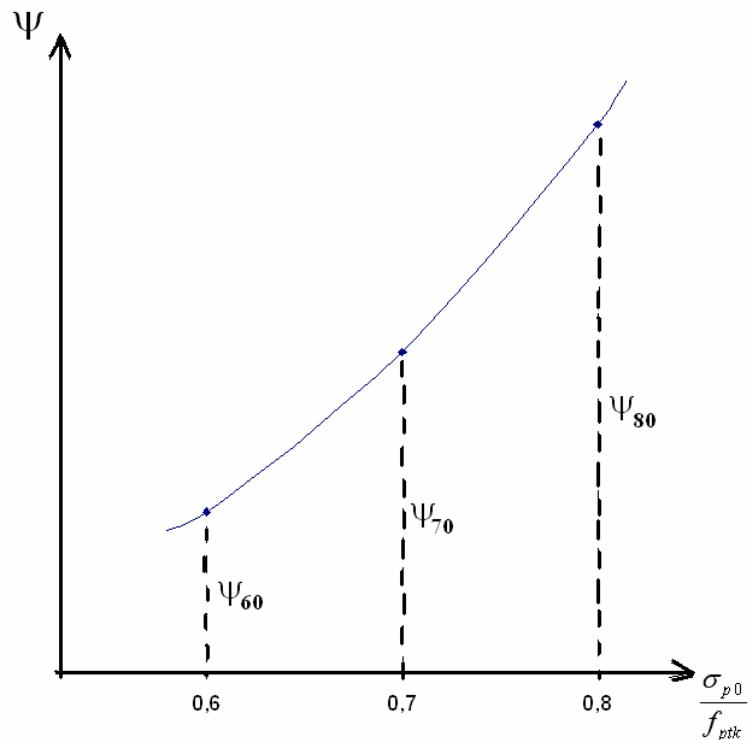


FIGURA 3.10: Curva da relaxação do aço no ensaio de 1000 horas

A função de relaxação dos pontos discretos  $\tilde{R}_i(t_i, t')$  é determinada a partir da equação (3.91):

$$\tilde{R}(t_i, t') = E_p \left[ 1 - \psi_{1000} \left( \frac{3(t_i - t')}{125} \right)^k \right] \quad (3.96)$$

onde  $E_p$  é o módulo de elasticidade longitudinal.

Os valores de duração de carga ( $t-t'$ ) foram escolhidos, da mesma forma que na obtenção do efeito fluência, em escala logarítmica, ficando:

$$(t_i - t') = 10^{\frac{1}{10}}(t_{i-1} - t'), \text{ com } i = 2, \dots, 40 \quad (3.97)$$

onde  $(t_1 - t') = 3,52$  dias e  $t' = 2,8$  dias.

Agora, pode-se calcular os valores de  $E_\mu$  através do procedimento mostrado no item 3.4.3.5, adotando-se, neste procedimento, os valores dos fatores peso  $w_1$  e  $w_2$  como 0,08 e 0,25, respectivamente. Os módulos  $E_\mu$  não variam ao longo do tempo, portanto os valores obtidos pela resolução do sistema da equação (3.75) são utilizados para qualquer idade de análise. Da mesma maneira que nos efeitos de fluência, os coeficientes de viscosidade  $\eta_\mu$  dos elementos da cadeia de Maxwell são calculados pela equação (3.32) e os tempos de relaxação são constantes e definidos pela equação (3.33).

O incremento de tensão para cada elemento do modelo de Maxwell, em cada intervalo de tempo, é dado por:

$$\Delta\sigma_\mu = E_\mu (\Delta\varepsilon_{tot} - \Delta\varepsilon_{v\mu}) \quad (3.98)$$

onde  $\Delta\varepsilon_{tot}$  é o incremento de deformação total da armadura e  $\Delta\varepsilon_{v\mu}$  é o incremento de deformação viscoelástica da unidade  $\mu$  da armadura.

O valor de  $\Delta\varepsilon_{v\mu}$  é obtido por:

$$\Delta\varepsilon_{v\mu} = \frac{\sigma_\mu}{\eta_\mu} \Delta t \quad (3.99)$$

sendo  $\sigma_\mu$  o somatório de todos os incrementos de tensão da unidade  $\mu$  em todos os incrementos de tempo, e  $\Delta t$  o valor do incremento de tempo.

A tensão total que atua na barras protendidas, até um tempo  $t$ , é escrita como:

$$\sigma_{p_{TOT}} = \sigma_{p_0} + \sum_{i=0}^I (\Delta\sigma_{p_{TOT}})_i \quad (3.100)$$

onde  $\sigma_{p_0}$  é a tensão inicial de protensão após as perdas iniciais, e  $\Delta\sigma_{p_{TOT}}$  é o incremento de tensão da armadura ativa, que representa a perda de tensão pelo efeito da relaxação.

Decorrido um certo período de tempo, a deformação viscoelástica total (soma de todos os incrementos de deformação viscoelástica) de uma unidade  $\mu$ , pode vir a ultrapassar o valor da deformação total (soma de todos os incremento de deformação total). Neste caso, a unidade  $\mu$  não contribuirá mais com a parcela de incremento de tensão  $\Delta\sigma_{\mu}$  para a obtenção do incremento de tensão total  $\Delta\sigma_{p_{TOT}}$ , a partir daquele instante do tempo. Desta forma:

$$\Delta\sigma_{p_{TOT}} = \sum_{\mu=1}^N \Delta\sigma_{\mu} \quad (3.101)$$

sendo N o número de unidades do modelo reológico de Maxwell que contribuem com uma parcela de tensão.

## 4 MODELOS PARA A PROTENSÃO NÃO ADERENTE

### 4.1 INTRODUÇÃO

A protensão não aderente é aquela na qual a armadura permanece livre para se movimentar relativamente ao concreto, ao longo do seu perfil em todas as seções transversais com exceção das ancoragens (ACI, 1989). Isso significa que existe compatibilidade de deslocamentos entre a armadura não aderente e o concreto apenas nas ancoragens. Por isso, uma análise precisa e eficiente das estruturas com protensão não aderente está diretamente relacionada com a modelagem cabo sem aderência, e da sua interação com o concreto.

Neste capítulo apresentam-se os modelos utilizados para a análise de peças fletidas com protensão não aderente. De modo a validar as considerações feitas para estes modelos, alguns aspectos relativos ao comportamento de peças com protensão não aderente são relatados previamente.

### 4.2 COMPORTAMENTO DE PEÇAS COM PROTENSÃO NÃO ADERENTE

É amplamente colocado na literatura afim (como em Barbieri, 2003), que uma das principais características dos cabos não aderentes submetidos à flexão é que a variação do comprimento na armadura não aderente é equivalente à variação total do comprimento da fibra de concreto adjacente ao perfil de protensão. Existe, então, uma compatibilidade de deslocamentos. Ainda, Naaman e Alkhairi (1991) retratam que a tensão na cordoalha não aderente não depende apenas da curvatura de cada seção independente mas sim das curvaturas de todas as seções ao longo do elemento estrutural. Isto ocorre porque o movimento relativo entre o concreto e o aço faz com que, quando acontece a rotação em qualquer seção do elemento de concreto, há também o deslizamento da armadura não aderente até que a tensão esteja em equilíbrio. Por este motivo, a tensão na armadura não depende apenas da

deformação em cada seção, mas sim do conjunto de todas as deformações do elemento estrutural. Podemos dizer então, que a tensão ao longo do cabo é praticamente uniforme.

Uma característica também importante da protensão não aderente é referente à fissuração. Nos cabos aderentes, ao se abrir uma fissura no concreto, os cabos sofrem grandes deformações localizadas, aumentando consideravelmente a tensão nestes pontos. Já para as cordoalhas não aderentes, quando uma fissura aparece em qualquer ponto da estrutura, o valor absoluto da abertura da fissura se dilui num comprimento muito grande de cabo, produzindo um alongamento unitário pequeno. Em conseqüência, o acréscimo da tensão no cabo também é pequeno (Veríssimo e César Jr., 1998). Outro aspecto importante em relação à fissuração é que, em cabos aderente, as fissuras geralmente possuem abertura pequena e aparecem em grandes quantidades. Já quando são utilizados cabos não aderentes, as fissuras se formam em pequeno número, porém com uma grande abertura. Esta situação não é favorável em dois aspectos: problemas estéticos e de proteção do aço contra a corrosão. Uma outra situação interessante, constatada por Chakrabarti (1995) é que, mesmo quando existem regiões plásticas no concreto, a cordoalha nem sempre atinge o escoamento. Foi verificado também que as armaduras não aderentes jamais atingem as tensões de ruptura.

Em relação à resistência última de vigas, Veríssimo e César Jr. (1998) colocam que, como o alongamento decorrente de fissuras localizadas se distribui ao longo do cabo, os acréscimos de tensão são moderados e, conseqüentemente, a contribuição para o momento resistente da seção é menos eficiente. Assim, para um mesmo carregamento, vigas com protensão sem aderência rompem para uma carga menor do que com protensão aderente e também apresentam flechas mais pronunciadas.

## 4.3 DEFINIÇÃO DOS MODELOS

### 4.3.1 Introdução

Para se fazer a análise de estruturas protendidas, o modelo de discretização dos cabos é de fundamental importância. Durante as últimas décadas, vários modelos foram propostos.

Kang e Scordelis (1980) utilizaram um modelo que de segmentos retos de cabos internos para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos protendidos incluindo efeitos dependentes do tempo. Neste modelo, as cordoalhas são discretizadas em segmentos com perfis poligonais ou parabólicos e incorporadas às malhas de elementos finitos das estruturas. Van Zyl e Scordelis (1979) desenvolveram este mesmo modelo para lajes e pontes curvas de seção caixão. Mais recentemente, um modelo de cabos curvos para estruturas de casca foram propostos e utilizados por Rocca e Mari (1993) e Figueira e Povoas (1994), para a análise de peças protendidas.

Nesta dissertação, utilizam-se três modelos diferentes para as armaduras protendidas: dois modelos para armaduras internas às peças estruturais, cujos elementos foram denominados CEINTERNA1 (Modelo 1) e CEINTERNA2 (Modelo 2), e um modelo para o armaduras localizadas externamente a peça, chamado de CEEXTERNA. O modelo CEINTERNA1 foi também usado por Machado (2002), em problemas bi-dimensionais, mostrando bons resultados. O segundo modelo de armadura interna e o modelo para armadura externa são extensões do modelo originalmente desenvolvido e são proposições deste trabalho. Os três modelos são descritos a seguir.

#### **4.3.2 Armadura CEINTERNA1 (Modelo 1)**

Neste modelo, a armadura protendida é discretizada com elementos incorporados aos da malha de elementos finitos da armadura de forma convencional. O efeito deslizamento da cordoalha faz com que a contribuição da armadura na rigidez da peça seja muito pequena. Portanto, esta foi negligenciada nas seções do concreto, opção também adotada por Kang e Scordelis (1980). Assim, a contribuição do cabo é somente na aplicação da força de protensão, sendo a tensão calculada da mesmo forma que nas armaduras aderentes.

#### **4.3.3 Armadura CEEXTERNA (Modelo para armadura externa)**

Este modelo representa o comportamento de armaduras localizadas externamente à peça estruturas. Para a sua modelagem, utiliza-se um artifício para simular a compatibilidade



de deslocamentos apenas nas ancoragens. Aproveitando o mesmo modelo incorporado, utilizado para as armaduras passivas, dispõe-se a armadura pretendida em elementos fictícios, sobrepostos à malha real, sendo que os nós de extremidade da peça são comuns para as duas malhas (real e fictícia). A geração da malha fictícia é feita de forma automática no programa computacional. É necessário apenas informar o tipo de elemento e os nós das seções que possuem os mesmos nós. Os elementos fictícios possuem como módulo de elasticidade um valor muito baixo, de forma a evitar a singularidade da matriz de rigidez. O valor adotado, neste trabalho, foi de 10% do módulo da malha real. Testes com valores menores, como por exemplo, 1%, revelaram que o valor de rigidez imposta pela armadura tende a ser muito grande em relação ao da malha fictícia, gerando uma instabilidade no modelo. Outra característica dos elementos fictícios é o de possuírem um coeficiente de Poisson é nulo.

Ressalta-se, também que, devido à malha fictícia ser sobreposta aos elementos reais, existe uma dificuldade intrínseca do modelo para a localização das armaduras externas, já que elas devem estar localizadas próximas às faces da peças estrutural, porém como se fosse externa. Esta dificuldade ocorre devido à utilização do modelo incorporado para as armaduras.

#### **4.3.4 Armadura CEINTERNA2 (Modelo 2)**

Este modelo utiliza as mesmas premissas da malha fictícia discutidas no modelo anterior. No entanto, pela cordoalha ser interna à estrutura, somente a deformação imposta apenas pelas ancoragens não representa fielmente os valores de todos os deslocamentos que acarretam a deformação na armadura pretendida. São necessários, ainda, os valores de deslocamentos que não estão na direção em que a armadura desliza. O artifício utilizado foi o de considerar deslocamentos adicionais gerados pela deformação do concreto, no ponto considerado, descontando-se os valores na direção do comprimento do cabo. Para isso, é necessário que se faça uma rotação dos eixos globais da estrutura, até que um dos eixos fique na direção da armadura e transformar os deslocamentos nodais em relação a estes eixos.

Assim, os seguintes passos são necessários para se implementar o procedimento:

- (a) Definir os deslocamentos  $x$ ,  $y$  e  $z$  dos nós do elemento de concreto em que o segmento de armadura está inserido;
- (b) Para um determinado ponto de integração, através da formulação geométrica do modelo incorporado das armaduras, calculam-se os cossenos diretores dos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , definidos no item (2.4.1);
- (c) Com os cossenos diretores, define-se uma matriz de rotação. Esta matriz é definida através de uma transformação de coordenadas de bases ortogonais. A matriz é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ \frac{-\cos \alpha \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} & \frac{-\cos \beta \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} & \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

- (d) Com a matriz de rotação  $\mathbf{R}$ , transforma-se o vetor de deslocamentos dos nós do elemento de concreto para os novos eixos coordenados, por:

$$\begin{cases} u_i^R \\ v_i^R \\ w_i^R \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ \frac{-\cos \alpha \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} & \frac{-\cos \beta \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} & \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde  $u_i^R$  é o deslocamento na direção longitudinal do cabo para o nó  $i$  nos eixos rotacionados;  $v_i^R$  e  $w_i^R$  são os deslocamentos nas duas direções perpendiculares a  $u_i^R$ ; e  $u_i$ ,  $v_i$  e  $w_i$  são os deslocamentos do nó  $i$  em relação aos eixos globais.

- (e) Zera-se o valor de  $u_i^R$  e rotaciona-se, novamente, retornando ao sistema de eixos original, como ilustrado na equação 4.3.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ \frac{-\cos \alpha \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} & \frac{-\cos \beta \cos \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} & \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ v_i^R \\ w_i^R \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

sendo que  $u_i$ ,  $v_i$  e  $w_i$  são os deslocamentos resultantes considerando os valores na direção longitudinal da barra igual a zero.

- (f) Com os deslocamentos resultantes, calcula-se a deformação causada no ponto de integração considerado, e somando-se este valor na deformação devido à malha fictícia.

As deformações adicionais, consideradas neste modelo, são equilibradas no sistema de equações através do cálculo das forças nodais não-equilibradas.

#### 4.4 FORÇA DE PROTENSÃO

A força de protensão no sistema de pós-tração sem aderência nada mais é que uma força externa de compressão aplicada ao concreto. Esta força é variável no tempo, pois à medida que a peça se deforma, maior a tensão na armadura e, conseqüentemente, maior é a força aplicada nas ancoragens.

Neste trabalho, a força de protensão inicial é inserida no modelo através de uma tensão inicial na armadura, que é fornecida pelo usuário. O valor da força de protensão, com o passar do tempo  $F_p$ , é calculada por:

$$F_p = A_{S_p} \frac{\sum_{i=1}^{np} (\sigma_{s_p})_i}{np} \quad (4.4)$$

onde  $A_{S_p}$  é a área da seção transversal do cabo protendido,  $np$  é o número total de pontos de integração ao longo da armadura protendida e  $(\sigma_{s_p})_i$  é a tensão no ponto de integração  $i$  armadura protendida.

Esta força deve ser decomposta nas direções cartesianas, que dependem da direção cartesiana em que o comprimento a armadura foi colocado. Caso ela esteja com seu comprimento na direção  $y$ , a força  $F_p$  é decomposta segundo a Fig. 4.1 e fica:

$$F_{p_x} = F_p \cos \alpha \quad (4.5)$$

$$F_{p_z} = -F_p \operatorname{sen} \alpha$$

sendo que  $\alpha$  é o ângulo entre a direção  $x$  e a inclinação da força  $F_p$ ; e  $F_{p_x}$  e  $F_{p_z}$  são as componentes da força  $F_p$  nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente.

Para a armadura protendida disposto na direção  $y$ , a força de protensão é decomposta, segundo a Fig. 4.1, sendo dada por:

$$F_{p_y} = F_p \cos \alpha \quad (4.6)$$

$$F_{p_z} = -F_p \operatorname{sen} \alpha$$

onde,  $F_{p_y}$  e  $F_{p_z}$  a decomposição da força  $F_p$  nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente

Para se aplicar as forças decompostas  $F_{p_x}$ ,  $F_{p_y}$ ,  $F_{p_z}$  nos elementos de concreto, é necessário a transformação das mesmas em forças nodais equivalentes, que são obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} F_{px_i} \\ F_{py_i} \\ F_{pz_i} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{npi} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \\ F_{pz} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

sendo  $F_{px_i}$ ,  $F_{py_i}$ ,  $F_{pz_i}$  e  $N_i$ , respectivamente, as forças nodais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e a função de forma para o nó  $i$  do elemento de concreto, e  $npi$  o número de pontos de integração dos elementos de concreto. Estas forças são as únicas aplicadas para a solução do modelo para as armaduras não aderentes. As parcelas de forças não-equilibradas e as “pseudo-cargas”, que serão detalhadas no Capítulo 5, são consideradas nulas.

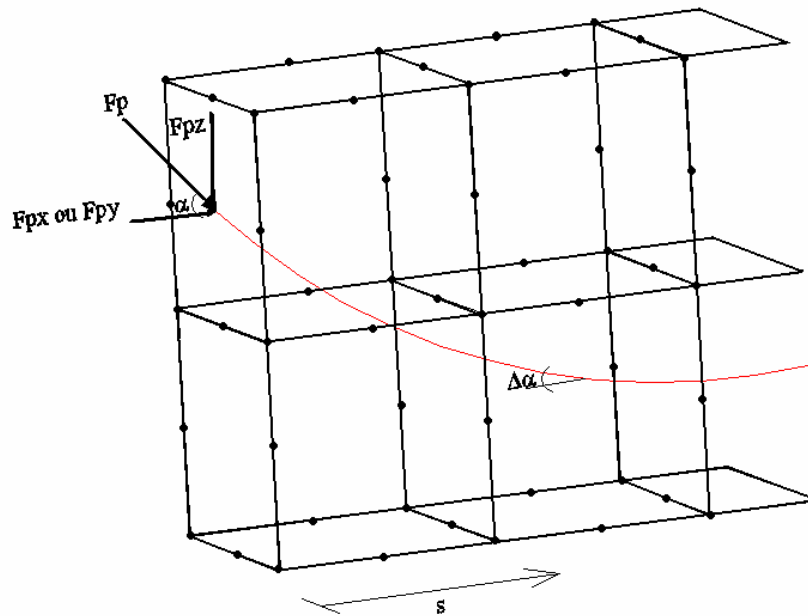


FIGURA 4.1: Decomposição da força de protensão nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$

## 4.5 PERDAS DE PROTENSÃO

As perdas de protensão são todas as reduções que ocorrem nos esforços aplicados nas armaduras protendidas. Segundo Veríssimo e César Jr. (1998), o acionamento dos macacos

hidráulicos, a liberação dos cabos e a transferência da força de protensão, entre outros fatores, originam uma série de efeitos que conduzem à diminuição da força de protensão.

As perdas podem ser classificadas como perdas imediatas e perdas progressivas. As perdas imediatas são aquelas que ocorrem durante a operação de protensão e imediatamente após a ancoragem dos cabos. As perdas progressivas são as que ocorrem ao longo do tempo, após o término da operação de protensão, com o cabo já ancorado. Sob condições normais, as perdas tendem a se estabilizar em um período de 2 a 3 anos (Veríssimo e César Jr. (1998)).

Os principais fatores responsáveis pelas perdas imediatas são:

- (a) Perdas por encurtamento do concreto: corresponde a uma perda de tensão, relativa a um encurtamento no concreto  $e$ , conseqüentemente, na armadura de protensão devido à atuação da força de protensão. Este tipo de perda é inerentemente considerado nas análises através da iteração entre concreto e armadura.
- (b) Perdas por atrito: ocorrem devido ao contato entre a armadura protendida e a bainha. Dependem principalmente dos materiais que compõem os cabos e bainhas, e do comprimento e curvatura do cabo. Neste trabalho, utilizou-se a fórmula proposta por Vasconcelos (1980):

$$\sigma_{s_{p0}} = \sigma_p \exp[-\mu(\Delta\alpha + 0,0001s)] \quad (4.8)$$

onde  $\sigma_{s_{p0}}$  é a tensão após as perdas por atrito;  $\sigma_p$  é a tensão de protensão aplicada na extremidade da armadura protendida;  $\mu$  é coeficiente de atrito entre as superfícies das armaduras e bainhas;  $s$  é a distância entre um ponto qualquer ao longo do cabo e a sua extremidade;  $\Delta\alpha$  é o ângulo de desvio ou deflexão geométrica total. A compreensão dos parâmetros  $s$  e  $\Delta\alpha$  estão evidenciados na figura 4.1.

- (c) Perda por acomodação das ancoragens: alívio de tensão no cabo devido à acomodação das peças de ancoragens durante a transferência da força de protensão para a peça estrutural no momento de liberação da armadura protendida pelo macaco hidráulico. Considerou-se, neste trabalho, que este tipo de perda já está deduzida da tensão inicial fornecida pelo usuário.

As perdas que ocorrem ao longo do tempo são referentes à retração e fluência do concreto, que produzem encurtamentos que se processam com o passar do tempo, e da relaxação do aço, que acarreta perda de tensão. No modelo computacional desenvolvido, as perdas progressivas são consideradas no modelo viscoelástico utilizado para os materiais.

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DOS MODELOS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se a formulação computacional utilizada para as análises das peças fletidas com protensão não-aderente. O programa computacional desenvolvido encontra-se dividido em três partes: a entrada de dados, feita em linguagem orientada, o processamento dos resultados e o pós-processamento, realizado através do programa GID<sup>®</sup> 7.2.

O modelo computacional utilizado teve como base o programa desenvolvido por Hinton (1988) para a análise dinâmica e transiente de estruturas tridimensionais de concreto armado com não-linearidade física e no trabalho de Machado (2002) que constituía de uma análise bi-dimensional de estruturas de concreto armado e protendido. A partir destas referências, foram feitas modificações relativas aos modelos constitutivos para o concreto armado e protendido, não-linearidade geométrica dos elementos e comportamento dos materiais ao longo do tempo, conforme descrito no Capítulo 3.

Os itens que seguem mostram a formulação matemática para um material elasto-viscoplástico, a entrada de dados em linguagem orientada e os arquivos de pós-processamento do programa GID<sup>®</sup> 7.2.

### 5.2 MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PARA O CONCRETO

Apresenta-se, neste item, a formulação matemática utilizada por Owen e Hinton (1980) para a análise do MEF de estruturas de concreto. Considera-se que o material seja homogêneo e isotrópico.



### 5.2.1 Expressões básicas

Em problemas contínuos não-lineares é admitido que a deformação específica total,  $\varepsilon$ , seja separada em duas componentes: elástica  $\varepsilon_e$  e viscoplástica  $\varepsilon_{vp}$ . Desta forma, a taxa de deformação específica total pode ser expressa por:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{vp} \quad (5.1)$$

onde o ponto sobre as grandezas representa a diferenciação com relação ao tempo. A taxa de tensão total pode, então, ser expressa a partir da taxa de deformação específica elástica por:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \dot{\varepsilon}_e \quad (5.2)$$

sendo  $\mathbf{D}$  a matriz constitutiva do material.

O comportamento viscoplástico é governado pela superfície de plastificação expressa por:

$$F(\varepsilon_{vp}, \sigma) - F_0 = 0 \quad (5.3)$$

onde  $F_0$  é um valor que define a posição da superfície de plastificação, e o comportamento viscoplástico se dá quando  $F > F_0$ .

A determinação da taxa de deformações viscoplásticas se dá a partir do estado de tensão já conhecido. Segundo Owen e Hinton (1980), uma forma de se estabelecer esta relação é através da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{vp} &= \gamma \cdot \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma}, \text{ para } F > F_0 \\ \dot{\varepsilon}_{vp} &= 0, \text{ para } F \leq F_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

sendo  $\gamma$  o coeficiente de fluidez,  $Q = Q(\sigma, \varepsilon_{vp}, \kappa)$  é a função de potencial plástico. O termo  $\langle \Phi(F) \rangle$  é uma função crescente para  $F > 0$  e a notação  $\langle \ \rangle$  implica que:

$$\begin{aligned}\langle \Phi(F) \rangle &= \Phi(F) = F - F_0, \text{ para } F > 0 \\ \langle \Phi(F) \rangle &= 0_0, \text{ para } F \leq 0\end{aligned}\quad (5.5)$$

Limitando-se ao caso de plasticidade associada, onde  $F \equiv Q$ , a equação (5.4) fica definida como:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{vp} &= \gamma \cdot \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \gamma \cdot \langle \Phi(F) \rangle \cdot a, \text{ para } F > F_0 \\ \dot{\varepsilon}_{vp} &= 0, \text{ para } F \leq F_0\end{aligned}\quad (5.6)$$

onde  $a$  é o vetor de fluxo plástico, definido no item a seguir.

### 5.2.2 Vetor de fluxo plástico

O vetor de fluxo plástico define qual a direção do escoamento viscoplástico. Devido a poucas evidências experimentais disponíveis para o concreto, considera-se este vetor perpendicular à superfície de plastificação, caso conhecido como plasticidade associada. Desta forma, pode-se obter o vetor de fluxo viscoplástico em termos da função de plastificação  $F$  (definida no capítulo 3) por:

$$a = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 \quad (5.7)$$

Destacando-se que

$$\sigma = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz} \} \quad (5.8)$$

Os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são determinados por:

$$a_1 = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \quad (5.9)$$

$$a_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} = \{s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{xz}\} \quad (5.10)$$

$$a_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left( s_{yy}s_{zz} - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left( s_{xx}s_{zz} - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right), \left( s_{xx}s_{yy} - \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ \left. 2(\tau_{yz}\tau_{xz} - s_{zz}\tau_{xy}), 2(\tau_{xz}\tau_{xy} - s_{xx}\tau_{yz}), 2(\tau_{xy}\tau_{yz} - s_{yy}\tau_{xz}) \right\} \quad (5.11)$$

sendo que os invariantes de tensão  $I_1$  e  $J_2$  são definidos nas equações (3.11) e (3.12), respectivamente e as tensões desviadoras  $s_{xx}$ ,  $s_{yy}$  e  $s_{zz}$  são dadas, respectivamente, pelas equações (3.14), (3.15) e (3.16).

Os valores de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são:

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} \quad (5.12)$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\operatorname{tg}(3\theta)}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (5.13)$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta)} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (5.14)$$

Para encontrar os valores de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  é só substituir o valor da função  $F$ , dado pela equação (3.17). Para este caso,  $C_1 = C_3 = 0$  e  $C_2$  é calculado por:

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{1}{2} \left[ \lambda + \frac{\lambda(\lambda\sqrt{J_2}) + 4\alpha\sqrt{J_2}}{\sqrt{(\lambda(\sqrt{J_2})^2) + 4\alpha J}} \right] \quad (5.15)$$

### 5.2.3 Tensão total

Problemas de não-linearidade física geralmente utilizam a forma incremental para a solução das equações de equilíbrio. Para tanto, é necessário a obtenção do incremento de tensão total, correspondente a um determinado intervalo de tempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ . O incremento de tensão total é obtido através da expressão:

$$\Delta \sigma_n = \mathbf{D} \cdot \Delta \varepsilon_{en} = \mathbf{D} \cdot [\Delta \varepsilon_{TOT_n} - \Delta \varepsilon_{vp_n}] \quad (5.16)$$

onde  $\Delta \varepsilon_{en}$  é o incremento de deformação específica elástica que, é a diferença entre o incremento de deformação específica total,  $\Delta \varepsilon_{TOT_n}$ , e o incremento de deformação específica viscoplástica,  $\Delta \varepsilon_{vp_n}$ , no instante  $t_n$ . O incremento de deformação específica total é calculado utilizando a forma incremental da equação (2.3), obtendo-se:

$$\Delta \varepsilon_{TOT_n} = \mathbf{B} \cdot \Delta u_n \quad (5.17)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona deformações específicas e deslocamentos, definida no capítulo 2, e  $\Delta u_n$  é o vetor de incrementos de deslocamentos em relação aos eixos globais x, y e z. Utilizando o esquema de integração explícito no tempo, através de passos de tempos discretos  $\Delta t_n$ , pode-se encontrar o valor do incremento de deformações específicas viscoplásticas através da expressão:

$$\Delta \varepsilon_{vp_n} = \dot{\varepsilon}_{vp_n} \Delta t_n \quad (5.18)$$

sendo  $\dot{\varepsilon}_{vp_n}$  é a taxa de deformação específica viscoplástica no instante  $t_n$  definido pela equação (5.6).

A tensão total é calculada por:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma_n \quad (5.19)$$

### 5.3 MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PARA O AÇO

Utilizando a mesma metodologia utilizada para o concreto, descrita no item anterior, pode-se descrever o comportamento elasto-viscoplástico do aço. Esta formulação serve tanto para incorporar armaduras passivas como ativas. Nos itens que seguem, encontram-se explanados os modelos para estas armaduras.

#### 5.3.1 Taxa de deformação específica viscoplástica

A taxa de deformação viscoplástica pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{s\,vp\,n} &= \gamma_s \left[ \sigma_s - \left( \sigma_y + H_s \varepsilon_{s\,vp\,n-1} \right) \right] \text{ para } \sigma_s > \sigma_y \\ \dot{\varepsilon}_{s\,vp\,n} &= 0, \text{ para } \sigma_s \leq \sigma_y \end{aligned} \quad (5.20)$$

sendo  $\sigma_s$  a tensão axial em um ponto da barra de aço;  $\sigma_y$  é a tensão de plastificação inicial;  $H_s$  é o parâmetro de endurecimento dado pela equação (3.29) sendo tomado igual a zero quando se utiliza barras com comportamento elastoplástico perfeito;  $\varepsilon_{vp}$  é a deformação viscoplástica total no instante anterior dado pela equação (5.24); e  $\gamma_s$  o coeficiente de fluidez. Na fase elastoplástica, o valor de  $\gamma_s$  é tomado como  $10^{-5}$ .

#### 5.3.2 Tensão para a armadura

O incremento de tensão total é obtido, para um passo de tempo  $t_n$ , através da expressão:

$$\Delta\sigma_{sn} = E_s \cdot \Delta\varepsilon_{s\,\varepsilon_n} = E_s \cdot \left( \Delta\varepsilon_{s_n} - \Delta\varepsilon_{s\,vpn} \right) \quad (5.21)$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;  $\Delta \varepsilon_{s_{e_n}}$  é o incremento de deformação específica elástica do aço, que é a diferença entre o incremento de deformação específica total,  $\Delta \varepsilon_{s_n}$ , e o incremento de deformação viscoplástica,  $\Delta \varepsilon_{s_{vp_n}}$ , do aço. O valor do incremento de deformação total é obtido, através dos deslocamentos nodais do elemento de concreto, como:

$$\Delta \varepsilon_{s_n} = \mathbf{B}_s \cdot \Delta u_n \quad (5.22)$$

onde  $\mathbf{B}_s$  é o vetor das relações deslocamentos-deformações da barra de armadura definido pela equação (2.64).

Da mesma forma que o concreto, o incremento de deformação viscoplástica para o aço é definido, utilizando a integração explícita no tempo, por:

$$\Delta \varepsilon_{s_{vp_n}} = \dot{\varepsilon}_{s_{vp_n}} \Delta t_n \quad (5.23)$$

Com este valor, pode-se determinar a deformação específica viscoplástica total:

$$\varepsilon_{s_{vp_n}} = \sum_{i=1}^n \Delta \varepsilon_{s_{vp_i}} \quad (5.24)$$

A tensão total que a barra de armadura é submetida encontra-se com:

$$\sigma_{s_{n+1}} = \sigma_{s_n} + \Delta \sigma_{s_n} \quad (5.25)$$

## 5.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O processo de solução da equação de equilíbrio para problemas não-lineares, utilizado neste trabalho, é o método incremental iterativo. Neste método, a carga é dividida em pequenos incrementos que, aplicados à estrutura, resultam em incrementos de deslocamentos.

Para um determinado passo de tempo  $\Delta t_n$ , o incremento de deslocamento é obtido através da solução da equação:

$$\Delta u_n = \mathbf{K}_n^{-1} \cdot \Delta F_n \quad (5.26)$$

onde  $\Delta u_n$  são os incrementos nodais da estrutura,  $\mathbf{K}_n$  é a matriz de rigidez global e  $\Delta F_n$  é a variação das cargas nodais no intervalo de tempo  $\Delta t_n$ . Os deslocamentos e tensões totais são obtidos, respectivamente, pelas expressões:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n \quad (5.27)$$

O cálculo do incremento de deslocamentos está baseado em uma forma linearizada da equação de equilíbrio. Desta forma, é necessária uma correção sobre os valores de  $\Delta u_n$  de modo a alcançar um estado estacionário para o equilíbrio. O procedimento adotado foi o de calcular o vetor de forças não-equilibradas (vetor definido pela diferença entre a carga externa aplicada e as forças internas) e reaplicá-lo na próxima iteração.

Considerando os vetores de forças internas do concreto e do aço, definidos a partir das equações (2.40) e (2.68), respectivamente, a equação de equilíbrio, com a presença da armadura, é expressa por:

$$\psi_{n+1} = F_{n+1} - \int_V \mathbf{B}^T \cdot \sigma_{n+1} \cdot dV - \int_s \mathbf{B}_s \cdot \sigma_{s_{n+1}} \cdot A_s \cdot ds \quad (5.28)$$

onde  $\psi_{n+1}$  é o vetor de forças não-equilibradas, e  $F_{n+1}$  é o vetor de cargas nodais externas aplicadas.

Este procedimento é utilizado tanto para a solução de problemas não lineares geométricos quanto físicos. Quando se utilizam os dois processos conjuntos, como é o caso neste trabalho, a obtenção da convergência unicamente através do procedimento descrito anteriormente, pode levar a um grande número de iterações. Para melhorar tal processo, é possível adicionar, ao vetor de forças não-equilibradas, um incremento de forças  $\Delta P_n$  chamado de “pseudo-cargas”. Este vetor se refere ao comportamento elasto-viscoplástico do material e é dado por:

$$\Delta P_n = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{s_{vp}_n} \Delta t_n dV + \int_S \mathbf{B}_S \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{s_{vp}_n} E_s A_s \Delta t_n dS \quad (5.29)$$

onde a primeira integral à esquerda se refere aos elementos de concreto enquanto a da direita diz respeito às barras de armadura.

A convergência, para a obtenção do estado estacionário é atingida ao se examinar os deslocamentos nodais. Quando esta quantidade se torna relativamente pequena, a convergência é obtida. O critério adotado é definido por:

$$\frac{\|\Delta u_n\|}{\|u_n\|} < 0,0001 = 0,01\% \quad (5.30)$$

onde  $\|\Delta u_n\|$  é a norma do vetor de incremento de deslocamentos e  $\|u_n\|$  é a norma do vetor de deslocamentos totais.

## 5.5 DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO COMPUTACIONAL

O algoritmo computacional utilizado para o modelo elasto-viscoplástico, descritos nos itens anteriores, foi desenvolvido utilizando-se dois procedimentos distintos. Numa primeira fase, os materiais possuem um comportamento viscoelástico, sendo permitida a análise das peças estruturais submetidas apenas a cargas de serviços (devido às premissas feitas para as considerações dos efeitos dependentes do tempo). Na segunda etapa, utiliza-se o modelo elastoplástico para os materiais, sendo que as estruturas podem ser estudadas até a sua carga de ruptura.

Na primeira etapa, faz-se a determinação da resposta da estrutura ao longo do tempo. Os efeitos de fluência, retração e relaxação do aço protendido acontecem através de um processo incremental no tempo. Após cada incremento, que foi adotado neste trabalho como sendo de 0,25 dias, é calculado o estado de deformação da estrutura. Na fase viscoelástica, utiliza-se o modelo de camadas superpostas, composto de cinco elementos tipo Maxwell, como descrito no item (3.4.2.). Nesta etapa, não se considera o efeito de endurecimento e a



tensão de plastificação inicial é tomada como zero. Nos pontos de integração submetidos a esforços de tração, admite-se que não surjam novas fissuras.

A segunda etapa corresponde à determinação da resposta da estruturas submetida a carregamentos instantâneos. O carregamento pode consistir de forças concentradas, de superfície, de volume, ou mesmo de forças de protensão. A indicação de convergência em cada incremento de carga é dada através do equilíbrio da estrutura. Neste etapa, considera-se uma única camada para os materiais e sendo o tempo (fictício) tende ao infinito.

Nas análises, é possível a utilização de vários carregamentos aplicados em datas distintas, entre as quais ocorrem os fenômenos dependentes do tempo. Assim, à medida que são aplicados os carregamentos nestas datas, as duas etapas são executadas de forma sucessiva. Quando se passa de uma fase para a outra, é feita uma conversão das tensões correspondente ao número de camadas utilizadas em cada uma das etapas.

O fluxograma dado pela Figura 5.1, mostra a esquematização do programa principal. Inicialmente são feitas a leitura e interpretação dos dados em Linguagem Orientada, onde se desenvolveu um conjunto de sub-rotinas, cada uma com função específica. Em seguida, um conjunto de laços, que envolvem uma série de sub-rotinas, faz o processamento dos resultados. Cada vez que é atingida a convergência, para um determinado incremento de carga, os resultados obtidos são registrados em um arquivo para a posterior análise. Uma atenção especial deve ser dada quando são feitas a determinação das deformações específicas, tensões e forças não-equilibradas. Devido à presença de inúmeros modelos para o concreto e para o aço, várias seqüências de sub-rotinas e comandos foram feitos para organizar tais comportamentos. A Figura 5.3 mostra um fluxograma da sub-rotina principal utilizada. Nota-se que a seqüência faz com que todos os modelos trabalhem concomitantemente. O concreto e o aço são trabalhados de maneira independente neste esquema, pois o efeito do conjunto dos materiais está sendo computado na solução do equilíbrio através da matriz de rigidez e do vetor de forças não-equilibradas.

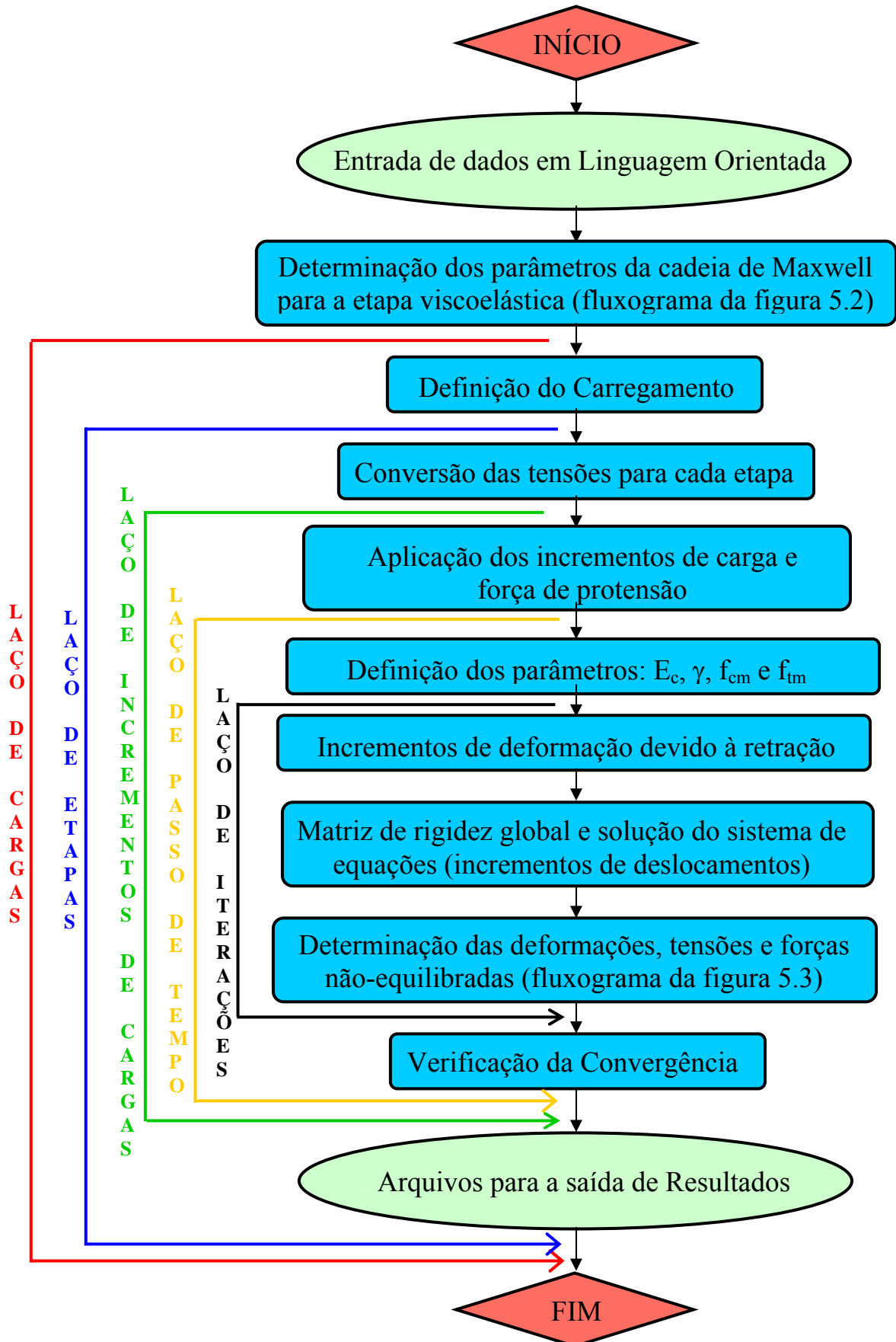


FIGURA 5.1: Fluxograma do programa principal

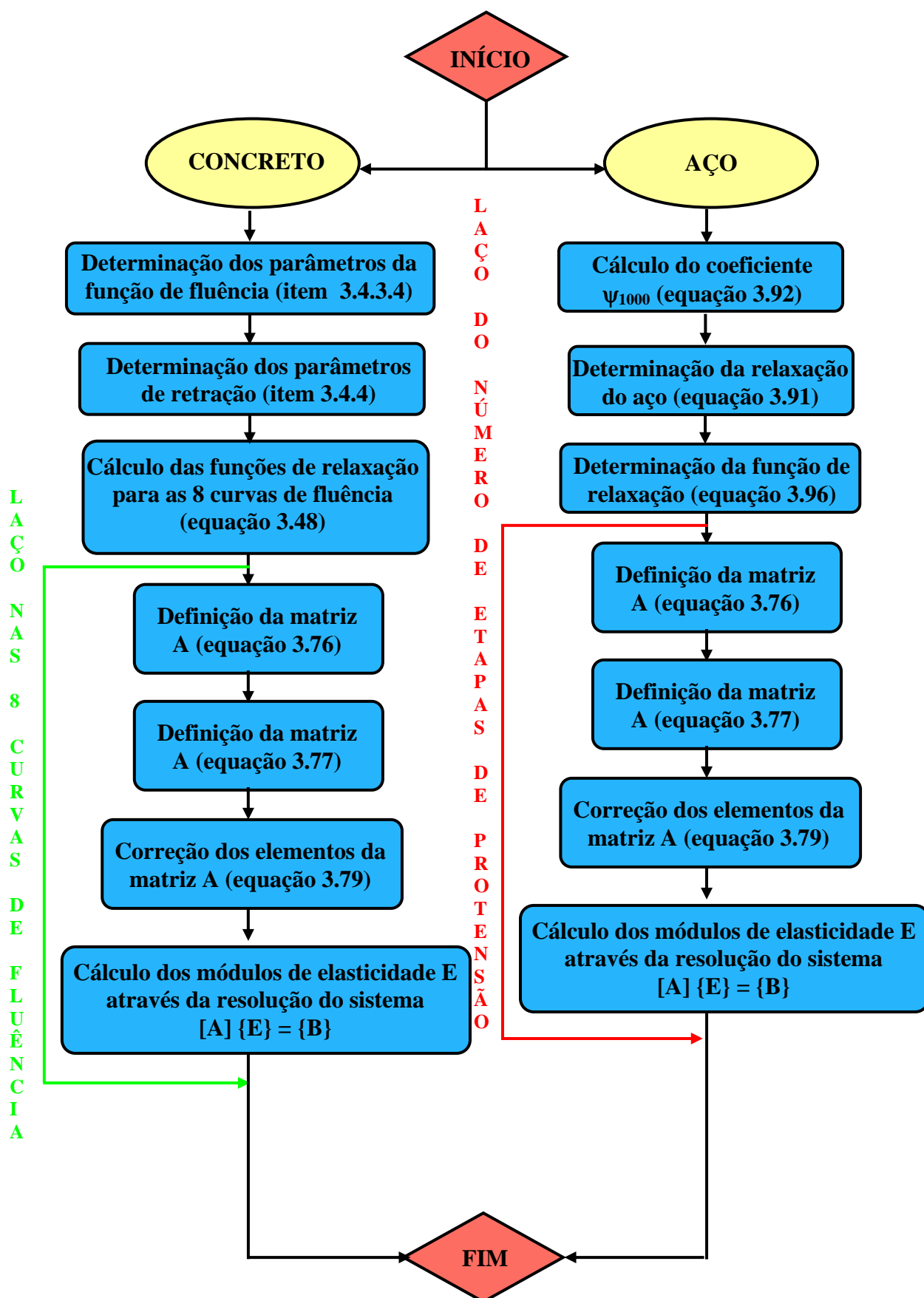


FIGURA 5.2: Fluxograma do programa principal

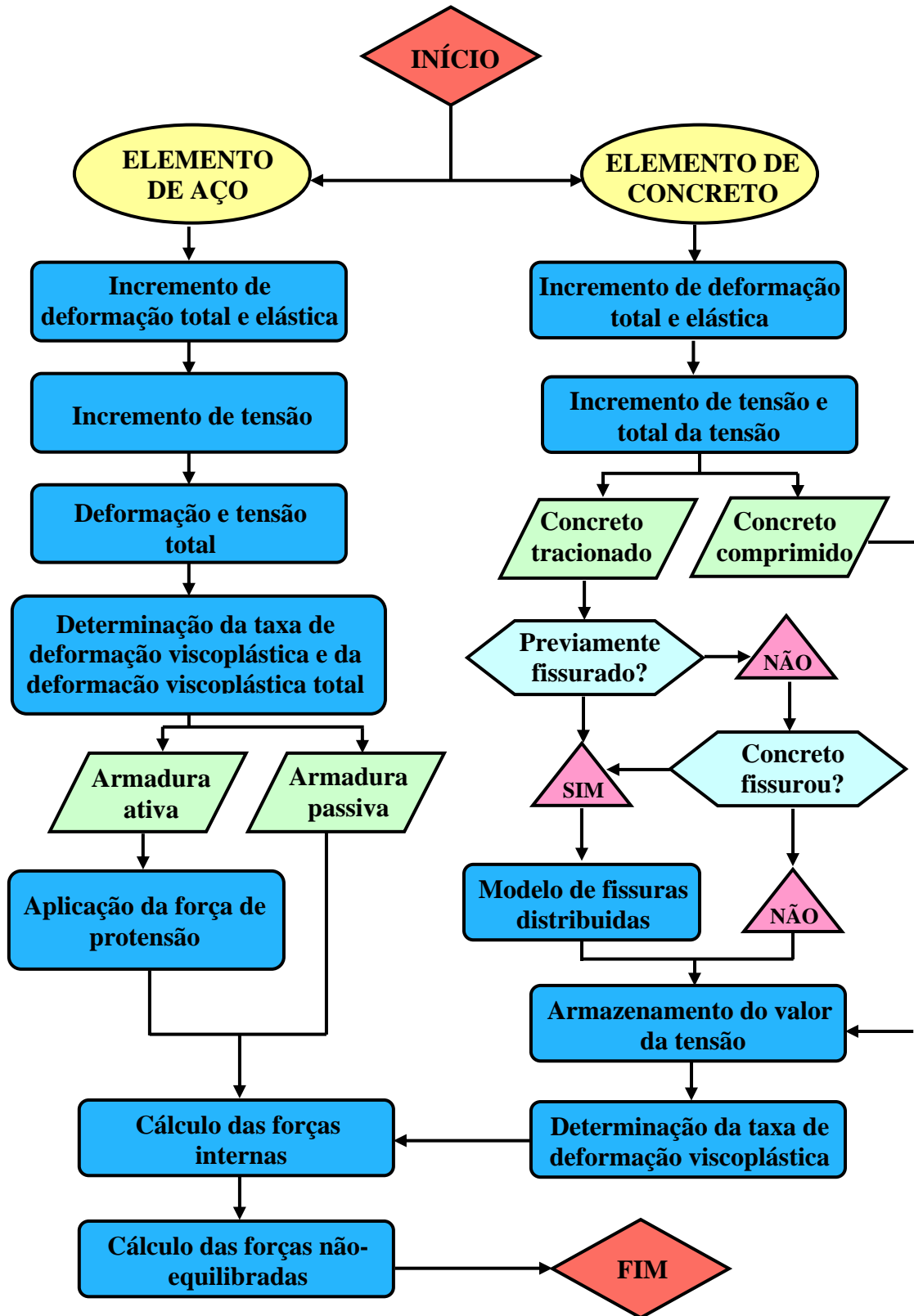


FIGURA 5.3: Fluxograma para a determinação das deformações específicas, tensões e forças não-equilibradas

## 5.6 ENTRADA DE DADOS EM LINGUAGEM ORIENTADA

A linguagem orientada é um processo em que os dados são lidos através de palavras e valores numéricos e se transformam em comandos para serem interpretados pelo programa computacional. A implementação da linguagem orientada, neste trabalho, é baseada nas considerações feitas por Martins (1989).

O arquivo utilizado na entrada de dados possui o formato texto (arquivos com extensão “.txt”). Cada uma das linhas deste arquivo possui conjuntos de comandos, sendo lidas separadamente do início ao fim. Os comandos são formados por uma série de palavras e números lidos seqüencialmente. Estas palavras são identificadas computacionalmente, definindo-se uma ação a ser executada pelo programa. Ao final da leitura de todos os comandos, os dados de análise estão prontos para irem para o processo de análise.

Dentro deste item, as palavras que são grafadas em caracteres maiúsculo e em estilo *itálico* significam que são comandos ou sub-comandos do programa computacional. Nestas palavras, não são utilizados nenhum tipo de acento gramatical, inclusive o cedilha.

### 5.6.1 Considerações Iniciais

O arquivo de entrada de dados é dividido em uma série de comandos principais. O primeiro e último são, respectivamente, os comandos *TITULO* e *FIM*. Entre estes, estão os outros quatro comandos principais: *DADOS DE ANALISE*, *DADOS DA MALHA*, *DADOS ESTRUTURAIIS* e *DADOS DE CARGA*. Dentro destes, existem uma outra série de subcomandos que serão apresentados em seguida.

Os nós e elementos da estrutura são identificados através de caracteres numéricos. Um grupo de nós ou elementos é especificado sob a forma de lista, que é um conjunto de nomes separados por um ou mais espaços em branco. Para facilitar a elaboração de um grupo de nós e elementos pode-se utilizar a palavra *ATE*. Esta palavra inclui números consecutivos do primeiro ao último, formando a lista. Por exemplo, uma lista de nós de 12 a 18, ao invés de ser especificado cada número separadamente, ou seja, *12 13 14 15 16 17 18*, pode ser feito através da seguinte maneira: *12 ATE 18*.

Nos itens que seguem, será explicado cada um dos comandos e sub-comandos utilizados. Para um melhor entendimento, recomenda-se juntamente com a leitura, o acompanhamento do organograma mostrado no item 5.6.6 e do exemplo do apêndice B.

### **5.6.2 Comando principal *DADOS DE ANALISE***

O programa possui como base uma análise linear das estruturas. Caso seja necessária a inclusão de não linearidade geométrica e/ou física, uma das linhas deve conter as palavras: *NAO LINEARIDADE GEOMETRICA* ou *NAO LINEARIDADE FISICA* ou *NAO LINEARIDADE FISICA E GEOMETRICA*. Como este tipo de análise é feita incrementalmente, a especificação do número de incrementos de carga se dá através do subcomando *INCREMENTOS DE CARGA*, seguida do seu valor.

Outro aspecto relevante na análise diz respeito às propriedades do ambiente de análise, onde se encontram a *UMIDADE RELATIVA DO AR* e a *VARIAÇÃO DA TEMPERATURA* ao longo do tempo de análise. Para especificar os valores relativos à temperatura, é necessário que se descreva o *PERIODO*, em dias, e a *TEMPERATURA* correspondente, em graus Celsius.

### **5.6.3 Comando principal *DADOS DA MALHA***

O subcomando *TIPO DE ELEMENTO* estabelece o elemento de concreto ou aço a ser definido. Os elementos implementados para o concreto são:

- (a) Hexaedro de 8 nós, com interpolação linear: *HL8*;
- (b) Hexaedro de 20 nós, com interpolação quadrática: *HQ20*.

Os elementos de aço possuem as seguintes especificações:

- (a) Armadura passiva: *APASSIVA*;
- (b) Cordoalha aderente na pós-tração: *CADERENTE*;

- (c) Cordoalha aderente na pré-tração: *CPTRACIONADA*;
- e) Cordoalha engraxada externa: *CEEXTERNA*;
- (f) Cordoalha engraxadas interna, modelo 1: *CEINTERNA1*;
- (g) Cordoalha engraxadas interna, modelo 2: *CEINTERNA2*;

O tipo de integração a ser usada na análise é outro ponto a ser especificado neste item. Através do subcomando *PONTOS DE INTEGRAÇÃO* pode-se optar por escolher 8 pontos (integração completa para o elemento linear), 27 pontos (integração completa para o elemento quadrático) ou 15 pontos (integração reduzida).

Para os comandos *COORDENADAS* e *COORDENADAS MULTIPLAS* são definidas as coordenadas dos nós dos elementos da estrutura. A diferença entre eles é que no primeiro, as coordenadas são especificadas nó-a-nó, enquanto que no segundo são fornecidas as coordenadas inicial e final de um conjunto de nós que estão ordenados em linha e separados igualmente entre si.

Nos comandos *CONETIVIDADES* e *CONETIVIDADES MULTIPLAS*, que definem os elementos da estrutura, acontece o mesmo que nos comandos anteriores. Para o primeiro, as conectividades devem ser especificadas separadamente para cada elemento. No segundo comando, são fornecidas as conectividades apenas do primeiro elemento da lista, definindo-se um valor (passo) em que cada conectividade é acrescida para os outros elementos da seqüência.

#### **5.6.4 Comando principal *DADOS ESTRUTURAI*S**

No comando *PROPRIIDADES*, especificam-se os valores das constantes que definem as propriedades dos elementos estruturais. Para o concreto são definem-se:

- (a) Módulo de elasticidades longitudinal: subcomando *E*;
- (b) Coeficiente de Poisson: subcomando *POISSON*;

- (c) Peso específico: subcomando PESO;
- (d) Resistência característica a compressão aos 28 dias: subcomando FCM28;
- (e) Tipo de cimento: subcomando CIMENTO, utilizando-se os valores da Tabela 3.1;
- (f) Espessura fictícia: subcomando ESPESSURA FICTICIA, dado pela equação.(3.60).

Para os elementos de aço:

- (a) Módulo de elasticidades longitudinal: subcomando E;
- (b) Diâmetro das barras: subcomando DIAMETRO;
- (c) Tensão de escoamento do aço: subcomando FY;
- (d) Tensão de ruptura do aço protendido: subcomando FPTK;
- (e) Coeficiente de atrito entre a armadura protendida e a bainha: subcomando ATRITO;
- (f) Tipo de relaxação da armadura protendida: subcomando RELAXACAO. O valor deve ser 1 para os aços com relaxação normal e 2 para os aços com baixa relaxação;
- (g) Parâmetro de endurecimento: subcomando ENDURECIMENTO. Neste parâmetro, especifica-se o coeficiente que deve multiplicar o valor de endurecimento, dado pela equação (3.29).

No comando RESTRICOES NODAIS são definidos quais os nós a serem impostas condições de contorno. Para a restrição de todos os graus de liberdade se utiliza a palavra TOTAL. Se for necessária apenas a restrição de algum destes, especifica-se após a palavra INCOGNITAS, quais os graus de liberdade a serem restringidos.

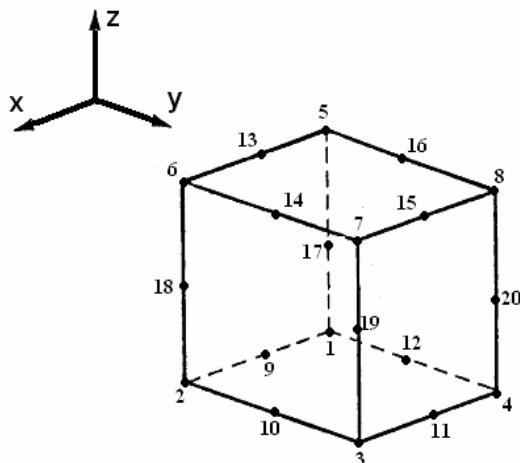
### **5.6.5 Comando principal *DADOS DE CARGA***

Nesta etapa do arquivo de entrada de dados, devem-se definir os carregamentos que fazem parte da análise. Um carregamento pode ser composto por um conjunto de diferentes tipos de forças aplicadas nos elementos de concreto ou armadura. Para o concreto pode-se ter



os seguintes tipos: CARGAS NODAIS, CARGAS DE PRESSAO UNIFORME e PESO PROPRIO. Para a armadura, tem-se a força de protensão, que é aplicada na forma de uma TENSÃO INICIAL NA ARMADURA. Caso existam mais de um carregamento a ser aplicado, necessita-se que isto seja informado, sendo feito através do subcomando NUMERO DE CARREGAMENTOS. O dia em que este carregamento será aplicado também é relevante na análise, devendo ser fornecido através do subcomando DATA.

Para a aplicação de CARGAS NODAIS, inicialmente define-se os nós que receberão estas forças. Após, coloca-se a palavra CARGA e determina-se a direção de aplicação que é relativa aos eixos globais x, y ou z. Para o comando CARGA DE PRESSAO UNIFORME é necessária a especificação dos elementos em que será aplicada a carga, a face dos elementos que recebe a carga e o valor da carga. As faces são definidas pelas conectividades dos elementos de concreto, o que é mostrado na figura 5.4. A magnitude da carga é colocada após a palavra CARGA.



FACE SUPERIOR: conectividades 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16

FACE INFERIOR: conectividades 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12

FACE LATERAL 1: conectividades 1, 2, 5, 6, 9, 13, 17, 18

FACE LATERAL 2: conectividades 3, 4, 7, 8, 11, 15, 19, 20

FACE LATERAL 3: conectividades 2, 3, 6, 7, 10, 14, 18, 19

FACE LATERAL 4: conectividades 1, 4, 5, 8, 12, 16, 17, 20

FIGURA 5.4: Faces com suas correspondentes conectividades

A definição da força de protensão é feita através da seguinte seqüência de comandos.

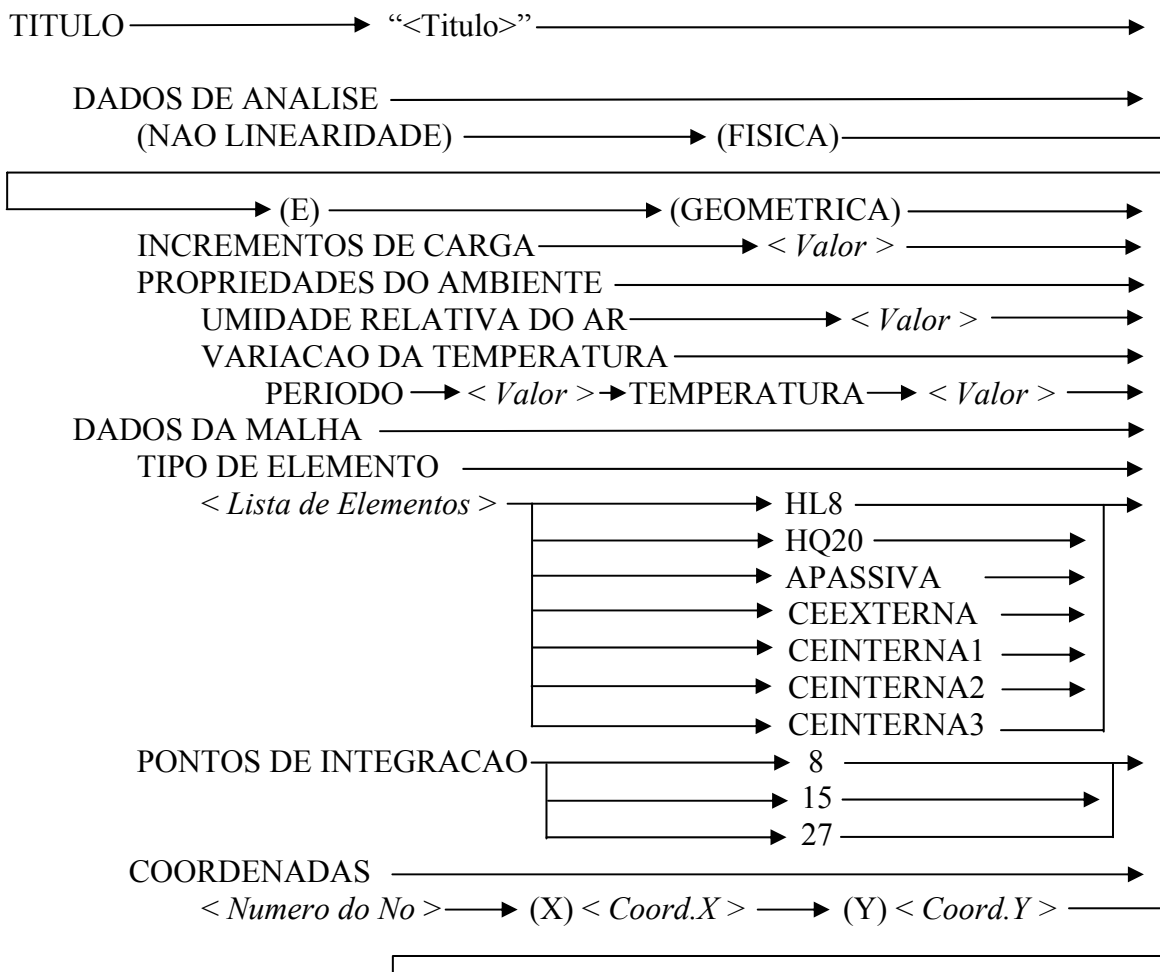
- (1) Definição do elemento de aço a ser protendido através do seu número;
- (2) Caso seja utilizado os modelos *CEEXTERNA*, *CEINTERNA2* ou *CEINTERNA3*, necessita-se definir quais as seções da malha real e fictícia que possuem a mesma compatibilidade de

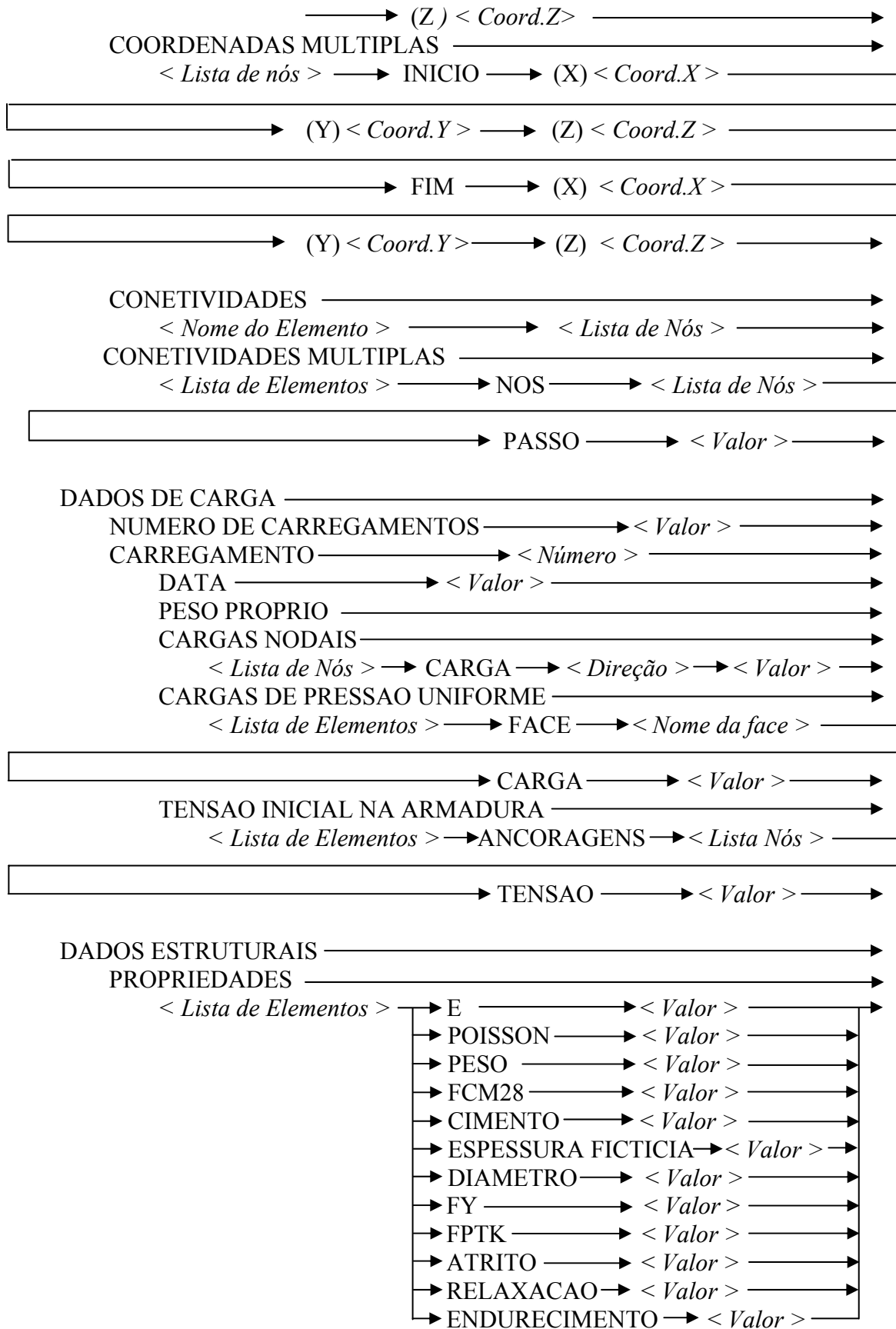
deslocamentos. Desta forma, após a palavra *ANCORAGENS* são colocados os nós que fazem parte da seção que se quer compatibilizar;

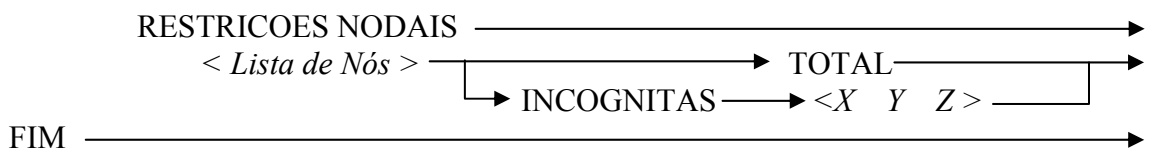
(3) O valor da tensão deve ser escrito após a palavra *TENSAO*.

### 5.6.6 Sintaxe dos comandos

No diagrama de sintaxe dos comandos, apresentado na Figura 5.4, as letras maiúsculas e palavras escritas em maiúsculas são constantes da linguagem e devem ser utilizadas sem qualquer modificação. As setas indicam a continuação da linha de comando, que termina quando aparecer um traço vertical. As letras e palavras que aparecerem entre os sinais de maior e menor ( < > ) indicam que os seus respectivos valores devem ser especificados naquele local. Letras ou palavras entre parênteses são facultativas no comando.







## 5.7 SAÍDA GRÁFICA DOS RESULTADOS

Em uma análise numérica, a visualização dos resultados se torna de fundamental importância para a compreensão e interpretação do problema. Deslocamentos, tensões e deformações específicas no concreto e nas armaduras e a deformada da estrutura são itens que definem o comportamento de uma estrutura e que, sendo visualizados numa saída gráfica tornam-se muito mais acessíveis. Sendo assim, optou-se por utilizar a ferramenta computacional de pós-processamento GID<sup>®</sup> (versão 7.2), que é disponibilizada gratuitamente pelos autores em sua versão educacional e que possui grande versatilidade. O GID<sup>®</sup> possui uma interface gráfica interativa que permite a visualização de todos os dados resultantes da simulação numérica por elementos finitos. Além disso, é possível a criação de animações dos resultados e também gráficos pertinentes às análises.

No pós-processamento do GID<sup>®</sup>, a comunicação com o programa de análise é feita através de dois tipos de arquivos: um com extensão “.msh”, que contém os dados da malha, como coordenadas dos nós, suas conectividades e tipos dos elementos; e outro arquivo com extensão “.res”, que possui os resultados nodais e nos pontos de integração para deslocamentos, deformações específicas e tensões no concreto e armadura. Os dois arquivos devem possuir o mesmo nome e devem estar localizados no mesmo diretório do computador para que seja possível a leitura dos resultados. A seguir, é feita uma descrição detalhada de cada um dos arquivos acima mencionados. Um exemplo de cada arquivo pode ser encontrado no Anexo C deste trabalho.

### 5.7.1 Arquivo com extensão “.msh”

Neste arquivo, uma ou mais malhas podem ser definidas, sendo que cada uma deve conter:

(a) um cabeçalho, seguindo o padrão:

**MESH** “*nome\_da\_malha*” **dimension** *dimensão* **Elemtype** *tipo\_elemento* **Nnode** *num\_nós*

onde **MESH**, **dimension**, **Elemtype**, **Nnode**, são palavras-chave que devem ser escritas sem qualquer alteração; *nome\_da\_malha* é um nome opcional da malha, definido pelo usuário; *dimensão*, deve ser 2 para problemas em 2D e 3 para problemas em 3D; *tipo\_elemento*, que pode ser *Point* (elemento pontual), *Linear* (elemento linear), *Triangle* (elemento triangular), *Quadrilateral* (elemento quadrilátero), *Tetrahedra* (elemento tetraédrico) e *Hexahedra* (elemento hexaédrico), sendo que neste trabalho, utilizou-se o elemento linear para representar as barras de armadura (Figura 5.5a) e o elemento hexaédrico para o concreto. (Figura 5.5b); *num\_nós* que é o número de nós correspondente definido em *tipo\_elemento*, sendo que para a opção *linear* pode-se 2 ou 3 nós e a para a opção *hexahedra* 8 ou 20 nós.

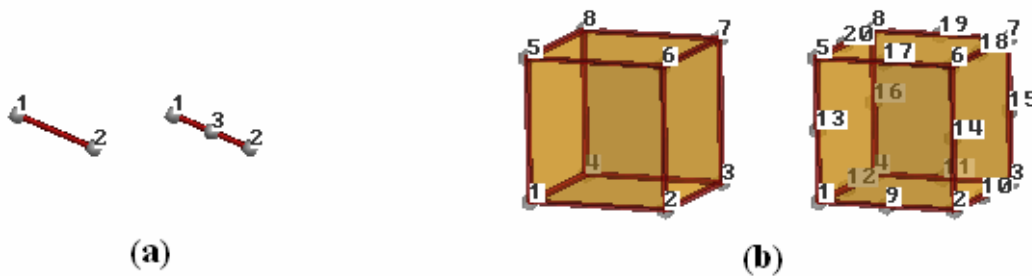


FIGURA 5.5: (a) Elementos lineares; (b) Elementos hexaédricos

(b) Coordenadas dos nós, com o seguinte padrão:

```

coordinates
1      0.0   1.0   3.0
...
1000  0.0  -3.6  -5.0
end coordinates

```

sendo que **coordinates** e **end coordinates** são palavras-chave que não devem ser alteradas; e os números que estão entre as duas palavras-chaves correspondem, em cada uma das linhas, ao nome do nó e às coordenadas X, Y e Z, respectivamente.

(c) Conetividades dos elementos, que possui a seguinte forma:

```

elements
  1      1      2      3
...
  10     19     20     21
end elements

```

onde **elements** e **end elements** são palavras-chave que não são alteradas; e cada linha entre as palavras-chave corresponde a conetividade do elemento, sendo o primeiro número de cada linha o nome do elemento e a seguir os nós correspondentes àquela conetividade.

### 5.7.3 Arquivo .RES

A primeira linha do arquivo de resultados de ter: **Gid Post Results File 1.0**, sendo que o arquivo é dividido em 2 blocos: um bloco com definição dos pontos de Gauss e outro para os resultados.

#### 5.7.3.1 Definição dos pontos de Gauss

A estrutura é a que segue:

(a) Cabeçalho, que possui o seguinte padrão:

**GaussPoints** “*nome\_dos\_pontos\_de\_Gauss*” **Elemtype** *tipo\_elemento*

onde **GaussPoints** e **Elemtype** são palavras-chave que devem ser escritas sem qualquer alteração; *nome\_dos\_pontos\_de\_Gauss* é o nome do conjunto dos pontos de integração, que deve ser usado como referência para os resultados que são alocados neste pontos; *tipo\_elemento*, que pode ser *Point*, *Linear*, *Triangle*, *Quadrilateral*, *Tetrahedra* e *Hexahedra*, descrevendo para que tipo de elemento são utilizados os pontos de Gauss.

(b) Número de pontos de Gauss, definido através de:

**Number of Gauss Points:** *número\_de\_pontos*

sendo *número\_de\_pontos* definido de acordo os valores pré-definidos pelo GID ou através de coordenadas fornecidas, como será visto no item (d). Os valores pré estabelecidos pelo GID, para os elementos usados neste trabalho, são: elemento *linear* de 2 ou 3 pontos; e elemento *hexahedra* com 8 ou 27.

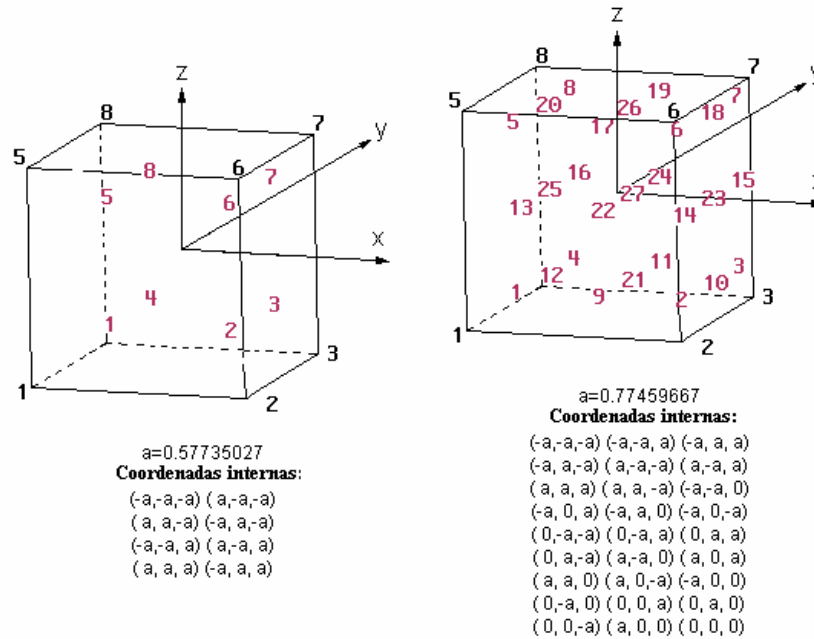


FIGURA 5.6: Coordenadas dos pontos de integração do GID para hexaedros

(c) Para os elementos lineares, uma das opções devem ser escolhidas: **Nodes included** ou **Nodes not included**. Quando se tem o elemento do tipo *Linear*, os nós podem ou não serem inclusos com o número total de pontos de integração. Caso o tipo de elemento não seja esta, estas linhas não devem ser colocadas.

(d) Coordenadas naturais dos pontos de integração: caso os valores das coordenadas dos pontos sejam os valores pré-estabelecidos pelo GID, conforme a figura 5.6, a seguinte linha deve ser incluída: **Natural coordinates: internal**. Caso queira-se definir manualmente estas coordenadas, faz-se da seguinte maneira:

**Natural coordinates: given**

0 1 0

...

1 1 0

onde os valores definidos após o cabeçalho são as coordenadas X, Y e Z, respectivamente, e o número de linhas correspondem ao número de pontos já definidos.

(e) Para terminar, deve ser colocada a seguinte frase: **End GaussPoints**

### 5.7.3.2 Blocos de resultados

Cada bloco de resultados é iniciado por um cabeçalho, definido pela palavra **Result**, na seguinte forma:

**Result** “*nome\_resultado*” “*nome\_análise*” *passo* *tipo\_resultado* *localização*

sendo que *nome\_resultado* é o nome dos resultados que será usado nos menus; *nome\_análise* é o nome das análises que será utilizado nos menus, sendo que neste trabalho será utilizada uma única análise que será denominada de “*Load Analysis*”; *passo*, onde deve ser escrito em qual incremento de carga é mostrado o resultado; *tipo\_resultado*, que indica os tipos de resultados podendo ser *Scalar* (valor escalar), *Vector* (um vetor com três componentes) ou *Matrix* (uma matriz com seis colunas), que depende do tipo de resultado a ser listado; *localização*, que define onde o resultado deve ser listado, usando-se *OnNodes* para ser nos nós, ou utilizando-se *OnGaussPoints* seguido do “*nome\_dos\_pontos\_de\_Gauss*” correspondente, para os resultados serem nos pontos de integração.

Os valores dos resultados devem ser definidos da seguinte maneira:

```

Values
Número_Resultado_1      Componente_1      Componente_2      ...
...
Número_Resultado_N      Componente_1      Componente_2      ...
End values

```

onde **Values** e **End values** são palavras-chave que devem ser escritas sem qualquer alteração; e as linhas, entre as palavras-chave, são os valores dos resultados. Estes valores são limitados por: se os resultados estão localizados nos nós, o limite é o número de nós definidos no arquivo com extensão “.msh”; e se os resultados estão nos pontos de integração, o limite é o número de pontos de integração, definido pelo seu nome no cabeçalho do resultado, multiplicado pelo número de elementos da malha.



O número de componentes para cada valor de resultado são:

- Para resultados escalares (*Scalar*), uma única componente;

*Número\_Resultado\_i*      *Valor\_Escalar*

- Para vetores, são usadas três componentes;

*Número\_Resultado\_i*      *Valor\_X*      *Valor\_Y*      *Valor\_Z*

- Para matrizes com elementos com duas dimensões, são usadas também três componentes;

*Número\_Resultado\_i*      *Valor\_Sxx*      *Valor\_Syy*      *Valor\_Szz*

- Para matrizes com elementos com três dimensões, seis componentes.

*Número\_Resultados\_i* *Valor\_Sxx* *Valor\_Syy* *Valor\_Szz* *Valor\_Sxy* *Valor\_Syz* *Valor\_Sxz*

A tabela 5.1 mostra os resultados utilizados neste trabalho, especificando o nome utilizado no arquivo com extensão “.res” e o tipo de componente utilizado.

TABELA 5.1: Resultados utilizados no arquivo .RES

<b>Nome do Resultado</b>	<b>Descrição do Resultado</b>	<b>Tipo de Resultado</b>
"DESLOCAMENTOS"	Deslocamentos nodais	<i>Vector</i>
“Tensoes PI Concr”	Tensão nos pontos de Gauss dos elementos de concreto	<i>Matrix</i>
“Deformacoes PI Concr”	Deformações nos pontos de Gauss dos elementos de concreto	<i>Matrix</i>
“Tensoes PI Arm”	Tensões nos pontos de integração das armaduras	<i>Scalar</i>
“Deformacoes PI Arm”	Deformações nos pontos de integração das armaduras	<i>Scalar</i>
“Tensoes NOS Concreto”	Tensões dos nós dos elementos de concreto	<i>Matrix</i>
“Deformacoes NOS Concreto”	Deformações dos nós dos elementos de concreto	<i>Matrix</i>
“Tensoes NOS Armadura”	Tensões dos nós das armaduras	<i>Scalar</i>
“Deformacoes NOS Armadura”	Deformações dos nós das armaduras	<i>Scalar</i>

## 6 ANÁLISES E RESULTADOS

Neste capítulo, o modelo numérico desenvolvido é testado para a comprovação da eficiência do programa computacional. De modo a ilustrar a adequação do modelo para representar o comportamento de peças fletidas com protensão não-aderente, valores experimentais encontrados na bibliografia foram utilizados. São apresentados resultados de vigas com cabos internos e externos, e lajes com cordoalhas dispostas em uma.

Nos exemplos analisados, utilizam-se elementos finitos de 20 nós com 15 pontos de integração. Cada exemplo apresenta diferentes malhas de elementos finitos, dependendo das dimensões da peças.

Em todas as análises, utilizou-se um coeficiente de Poisson fixo no valor de 0,2. Os efeitos de fluência e retração são considerados a partir do sétimo dia após a concretagem da peça, sendo que a temperatura adotada para o ambiente foi da 20°C e a umidade relativa do ar de 80%.

O programa computacional foi desenvolvido de forma a tornar os resultados independentes de ajustes de parâmetros.

### 6.1 ANÁLISE ELÁSTICA DE UMA VIGA ENGASTADA-LIVRE

Considere-se a viga engastada-livre apresentada na Figura 6.1. A solução analítica para este problema foi proposto por Holden (1972) e utilizado por Bathe e Ozdemir (1975), que determinaram a resposta linear e não linear geométrica para este problema. A resposta encontrada, neste exemplo, tem o objetivo de validar o modelo não-linear geométrico implementado.

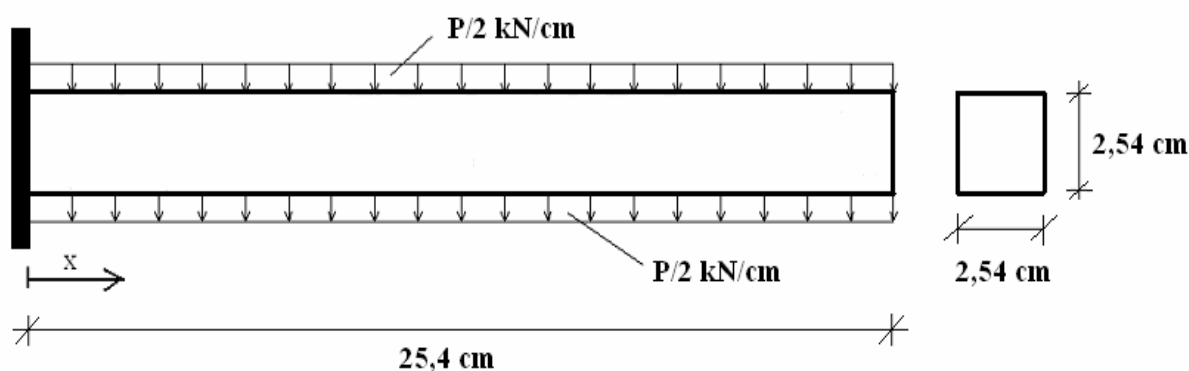


FIGURA 6.1: Viga engastada-livre com carga distribuída

A discretização da estrutura foi feita em cinco elementos finitos dispostos ao longo do vão, como mostra a figura 6.2. O valor do módulo de elasticidade utilizado foi de  $8,54 \text{ kN/cm}^2$ .

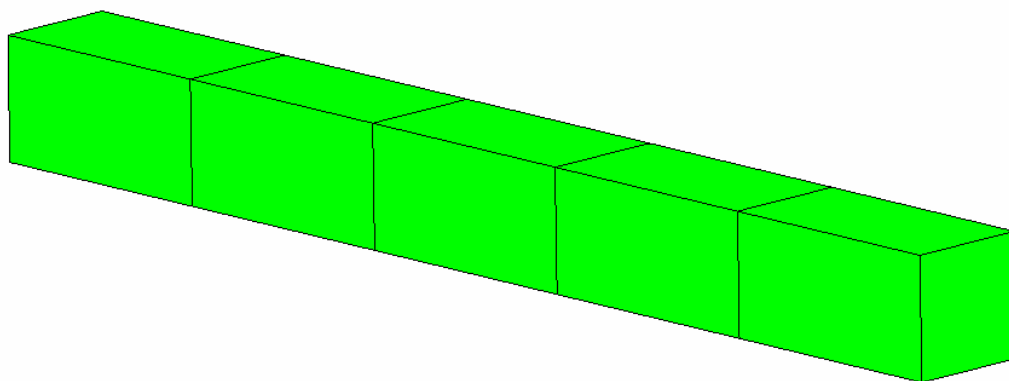


FIGURA 6.2: Malha utilizada na análise

O gráfico da figura 6.3 mostra a variação da flecha na extremidade livre  $W$  pelo vão  $L$ , em função da carga  $P$  aplicada. Na figura 6.4 encontra-se o gráfico do comprimento da viga após a aplicação da carga,  $H$ , pelo vão  $L$ . Pode-se verificar que a resposta encontrada pelo modelo não linear geométrico coincide com a solução analítica de Holden.

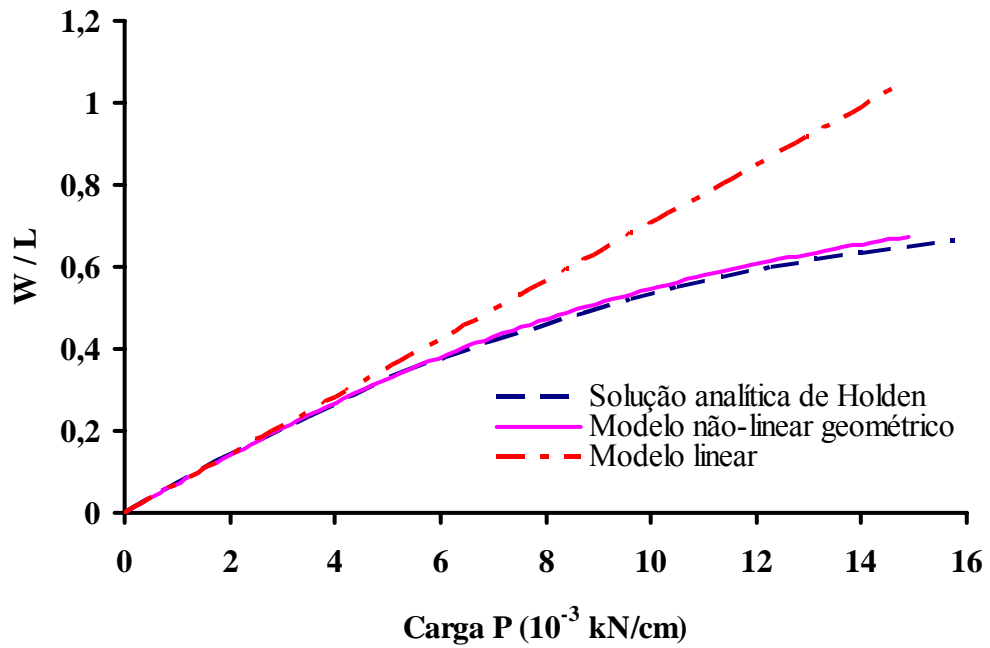


FIGURA 6.3: Variação da flecha pelo vão sobre a carga P

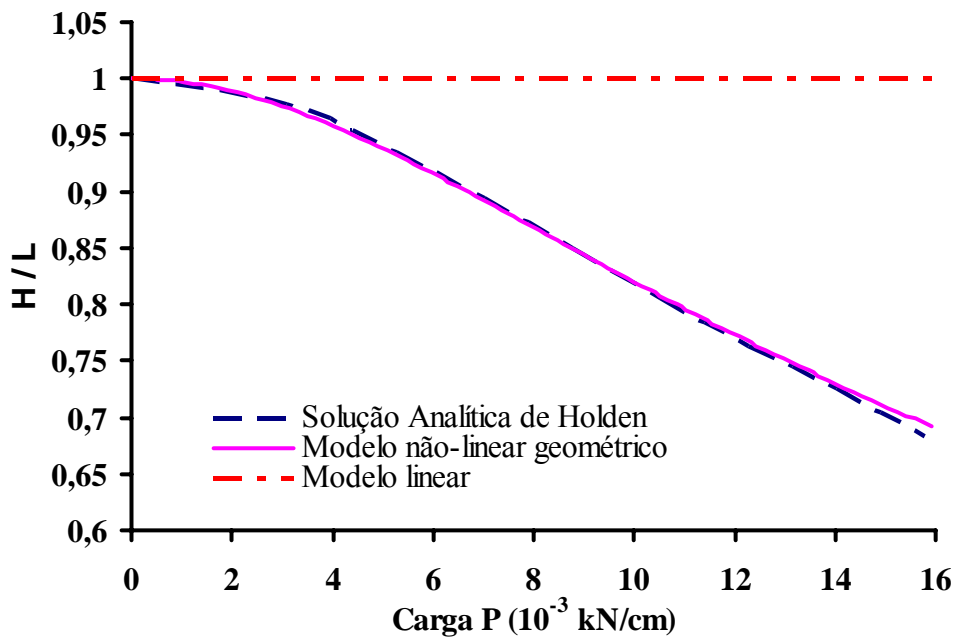


FIGURA 6.4: Variação do comprimento pelo vão sobre a carga P

## 6.2 ANÁLISE DE VIGAS COM CABOS NÃO ADERENTES INTERNOS

Neste item, utilizam-se os resultados experimentais realizados por Du e Tao (1988) na avaliação do modelo numérico. As peças são compostas de vigas bi-apoiadas com protensão não aderente parcial e submetidas a cargas em seus terços médios.

Os protótipos constituem-se de nove vigas referenciadas por A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 e A9. Suas dimensões e disposições das armaduras são mostradas nas figuras 6.5 e 6.6. A resistência média a compressão do concreto ( $f_{cm}$ ), as áreas de armaduras ativa ( $A_p$ ) e passiva ( $A_s$ ), o número de barras e o diâmetro dos cabos protendidos ( $\phi_p$ ) e barras passivas ( $\phi_s$ ), as tensões de ruptura da armadura ativa ( $f_{ptk}$ ) e de escoamento da armadura passiva ( $f_y$ ) e os módulos de elasticidade dos cabos protendidos ( $E_p$ ) e barras passiva ( $E_s$ ), são fornecidos por Du e Tao e estão apresentados na tabela 6.1. O coeficiente de atrito entre o cabo protendido e o concreto, não foi dado pelos autores, sendo adotado o valor de 0,5. A espessura fictícia foi tomada com 10,18 cm. Os ensaios foram realizados ao 28 dias após a concretagem, onde também foi aplicada a força de protensão.

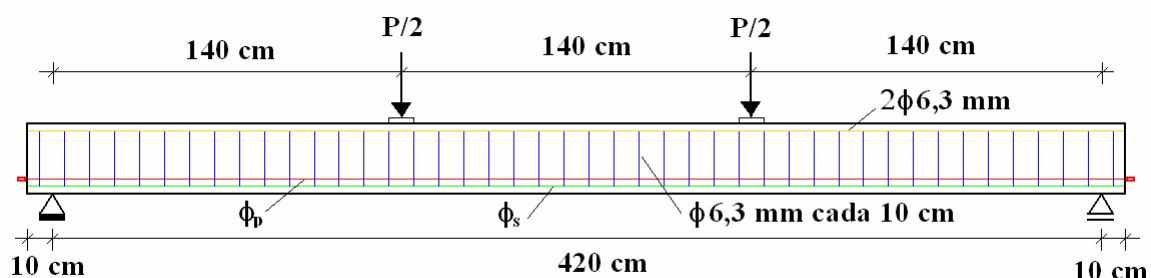


FIGURA 6.5: Detalhamento das vigas de Du e Tao (1988)

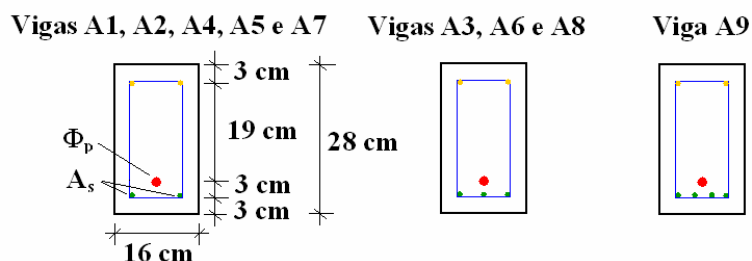


FIGURA 6.6: Seção transversal das vigas de Du e Tao (1988)

TABELA 6.1: Características dos materiais das vigas de Du e Tao (1988)

VIGA	$f_{cm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\phi_p$ (cm)	$\sigma_{p0}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\phi_s$ (cm)	$f_{ptk}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$f_y$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$E_p$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$E_s$ (kN/cm <sup>2</sup> )
A-1	3,06	0,865	96	2 $\phi$ 1,0	179	26,7	20500	21000
A-2	3,06	1,12	90,4	2 $\phi$ 1,0	179	43	20500	21000
A-3	3,06	1,41	82	3 $\phi$ 1,0	179	43	20500	21000
A-4	3,06	0,865	86,9	2 $\phi$ 1,0	179	43	20500	21000
A-5	3,06	1	81	2 $\phi$ 1,4	179	40	20500	21000
A-6	3,06	1,41	85,4	3 $\phi$ 1,4	179	40	20500	21000
A-7	3,06	0,706	88,5	2 $\phi$ 1,4	179	40	20500	21000
A-8	3,31	0,865	89,4	3 $\phi$ 1,4	179	40	20500	21000
A-9	3,31	1,41	92	4 $\phi$ 1,6	179	39,5	20500	21000

Para verificar a influência do número de elementos utilizados, fez-se uma análise comparativa entre duas malhas distintas, uma com 12 elementos (figura 6.7) e outra com 48 elementos (figura 6.8), para as vigas A1 e A2. Os elementos de armadura são mostrados na figura 6.9. Devido à simetria da viga apenas a metade foi discretizada, sendo somente o vão efetivo foi modelado. Observa-se que os resultados não possuem grandes diferenças (figuras 6.10 e 6.11).

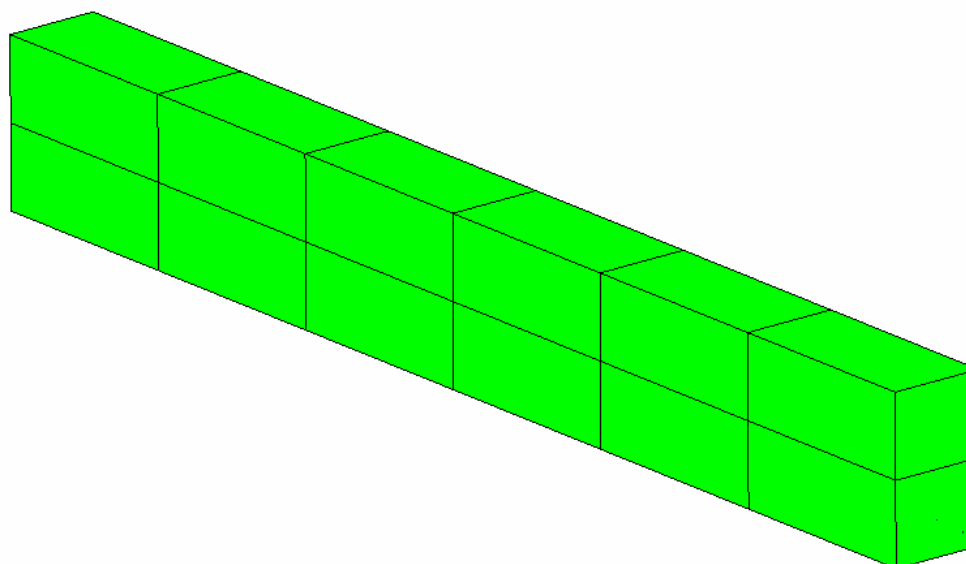


FIGURA 6.7: Malha de 12 elementos de concreto para as vigas de Du e Tao (1988)

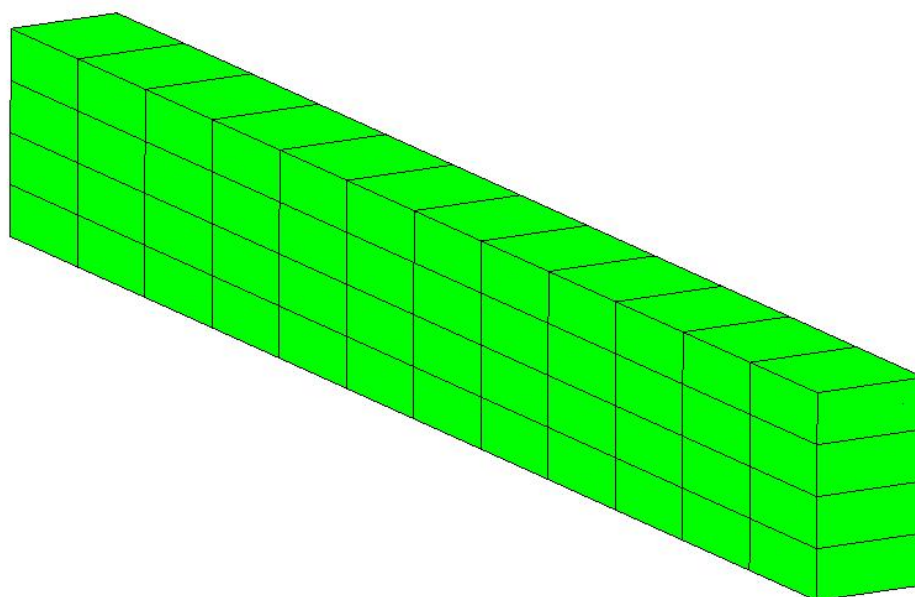


FIGURA 6.8: Malha de 48 elementos de concreto para as vigas de Du e Tao (1988)

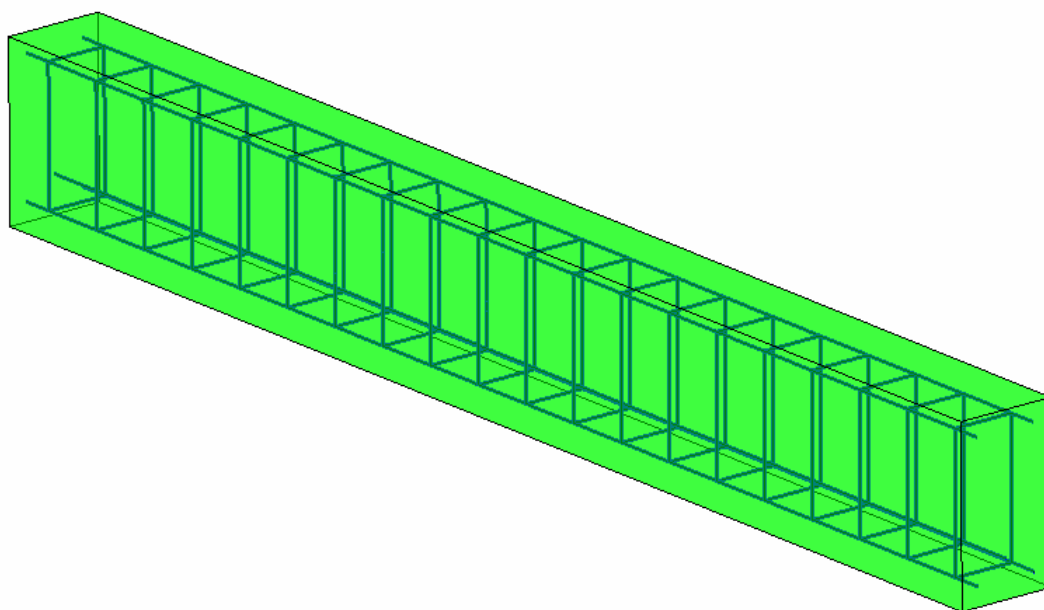


FIGURA 6.9: Elementos de aço para as viga A1, A2, A4, A5 e A7

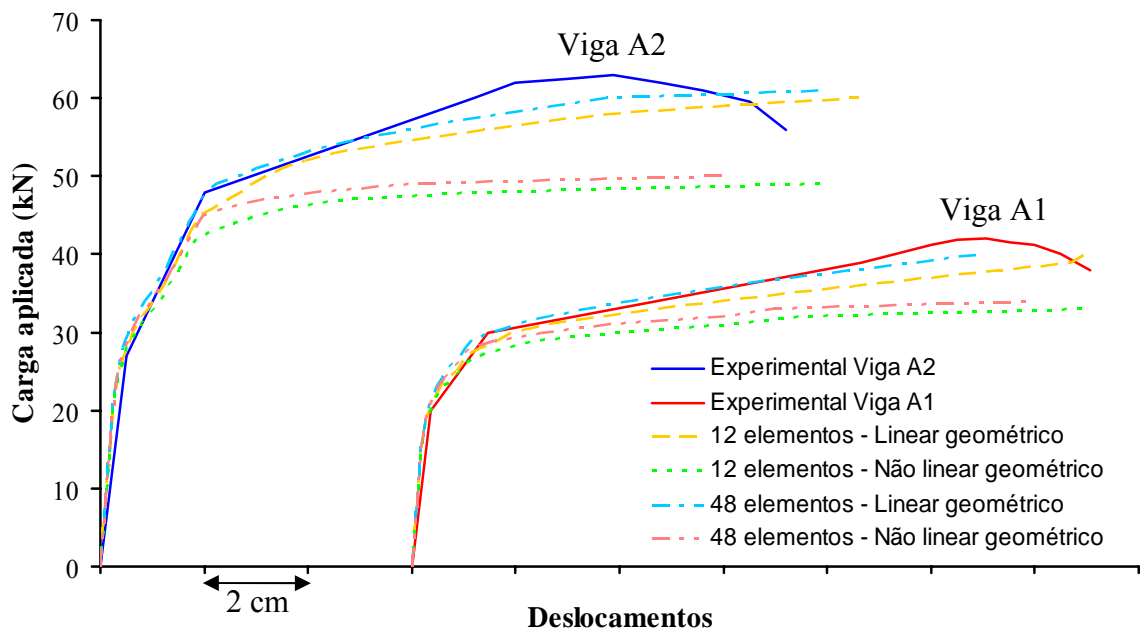


FIGURA 6.10: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A1, A2 – Comparativo entre malhas

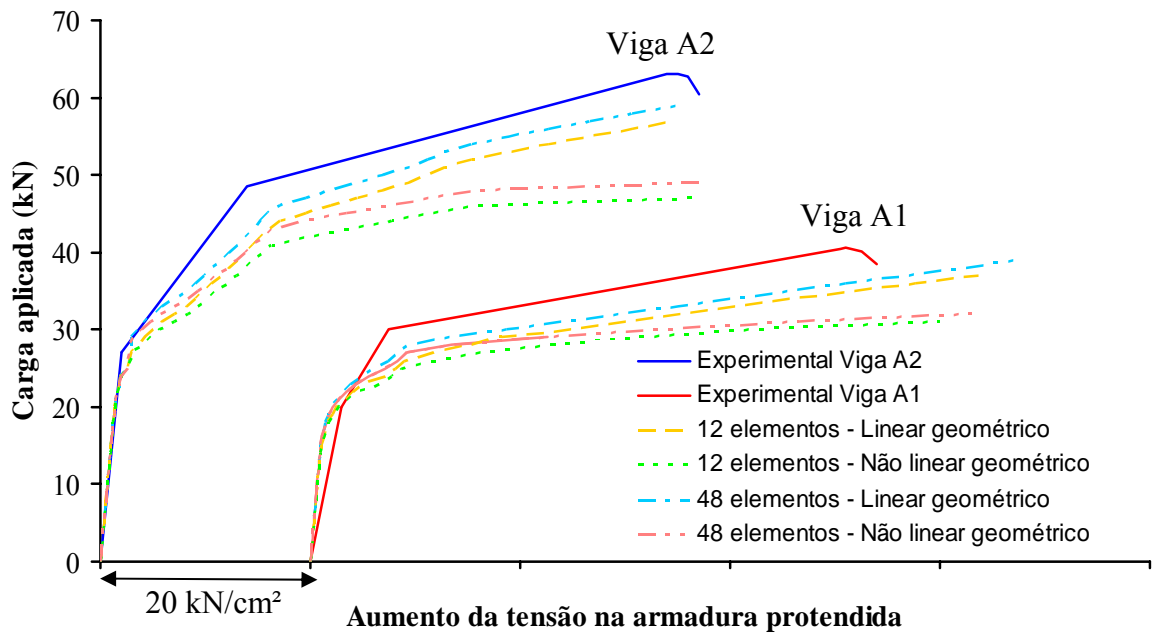


FIGURA 6.11: Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A1, A2 – Comparativo entre malhas



Devido a pequena diferença entre as malhas de 12 e 48 elementos utilizou-se a malha com 12 elementos para um estudo comparativo entre os modelos de protensão, utilizados neste trabalho e descritos no capítulo 4. Os resultados dos deslocamentos no centro do vão e a variação da tensão da armadura de protensão são mostrados nas figuras 6.12 até 6.18. Observa-se um comportamento adequado das curvas “carga x deslocamentos” e “carga x aumento da tensão na armadura protendida”, em relação aos resultados experimentais. Entre os modelos de cordoalhas utilizadas, tanto o modelo 1 quanto o modelo 2 apresentaram comportamentos parecidos. Comparando-se a utilização da não-linearidade geométrica, as diferenças em relação ao modelo linear começam a ser significativas a partir do ponto em que a armadura protendida atinge a tensão de escoamento. Esse comportamento é explicado, pois o modelo linear não contempla todos os deslocamentos que geram tensões nas barras.

Uma análise mais detalhada do comportamento das vigas protendidas pode ser feita através da visualização da deformada e das tensões no concreto e na armadura. Este estudo será feito para a viga A8 através da análise não linear geométrica, utilizando-se os dois modelos de protensão.

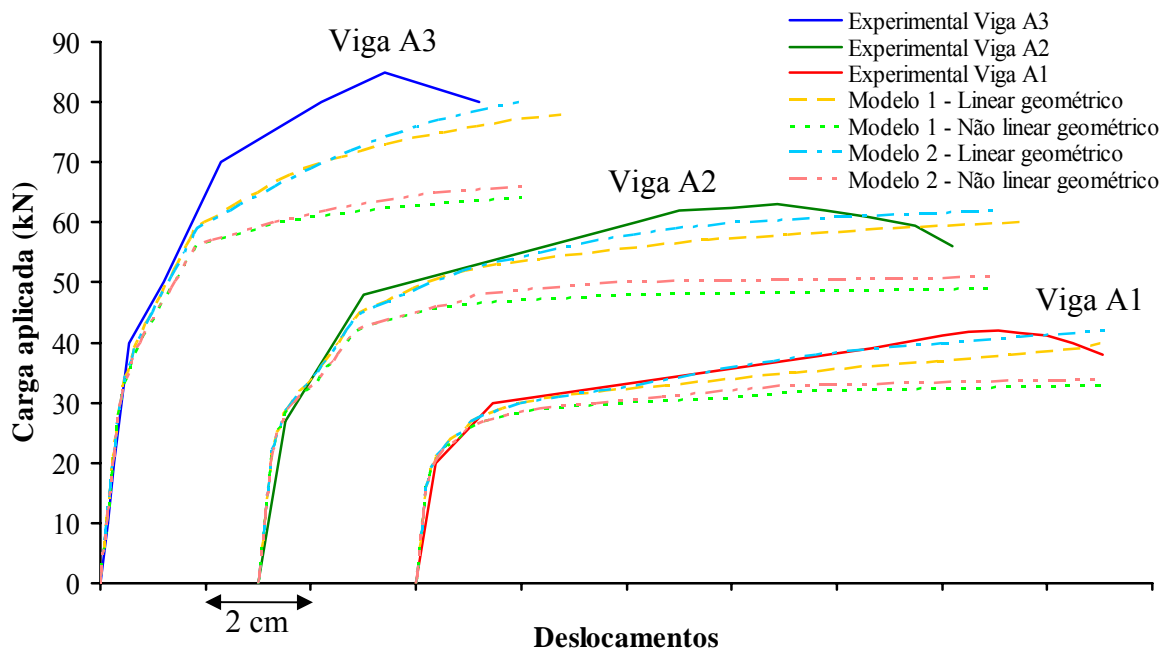


FIGURA 6.12: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A1, A2 e A3 – Comparativo entre modelos

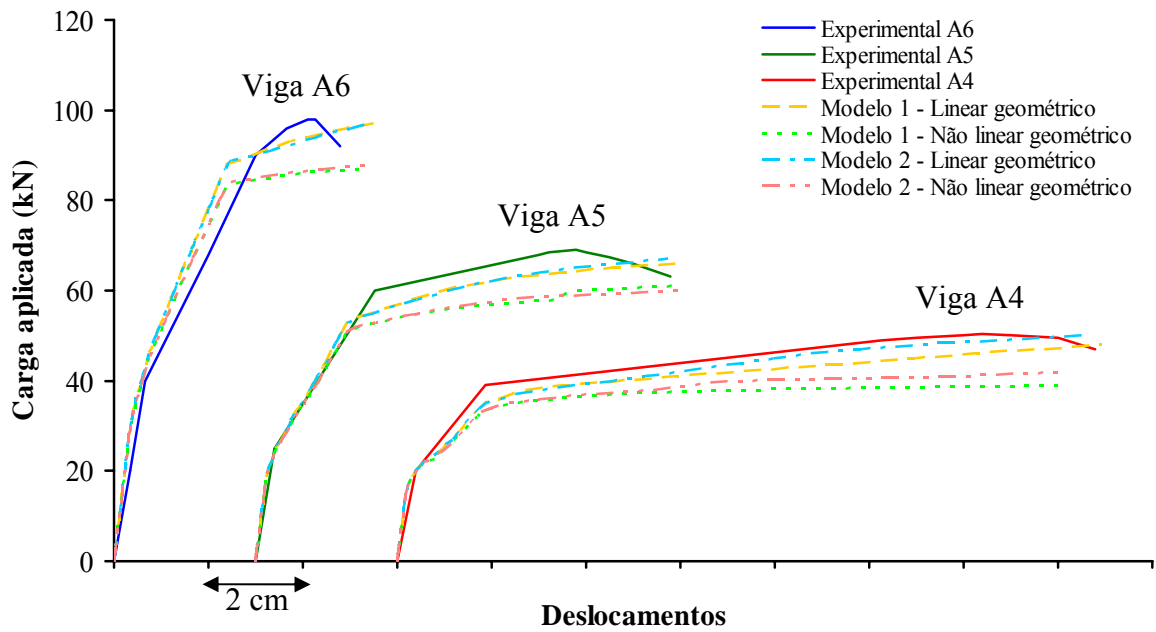


FIGURA 6.13: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A4, A5 e A6 – Comparativo entre modelos

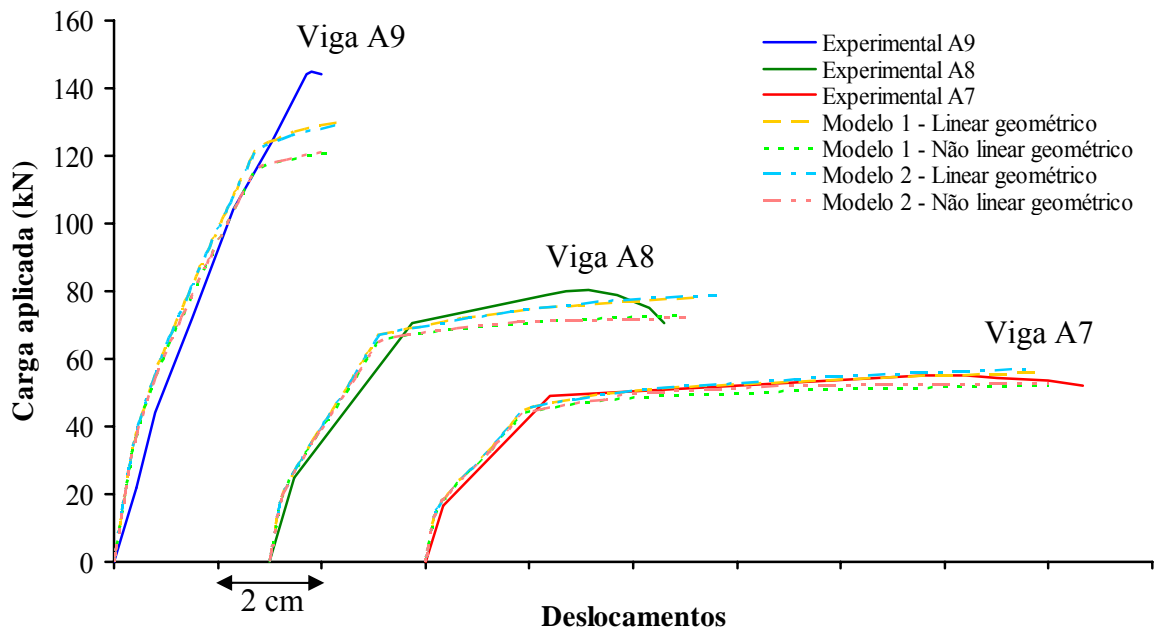


FIGURA 6.14: Carga x deslocamentos no centro do vão para as vigas A7, A8 e A9 – Comparativo entre modelos

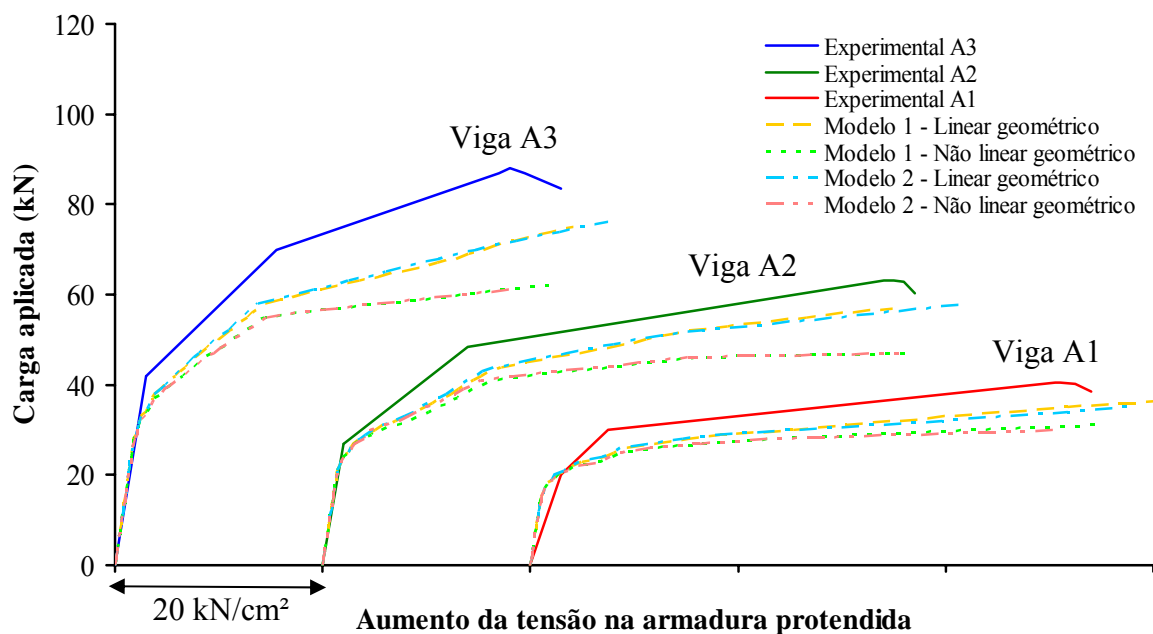


FIGURA 6.15: Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A1, A2 e A3 – Comparativo entre modelos

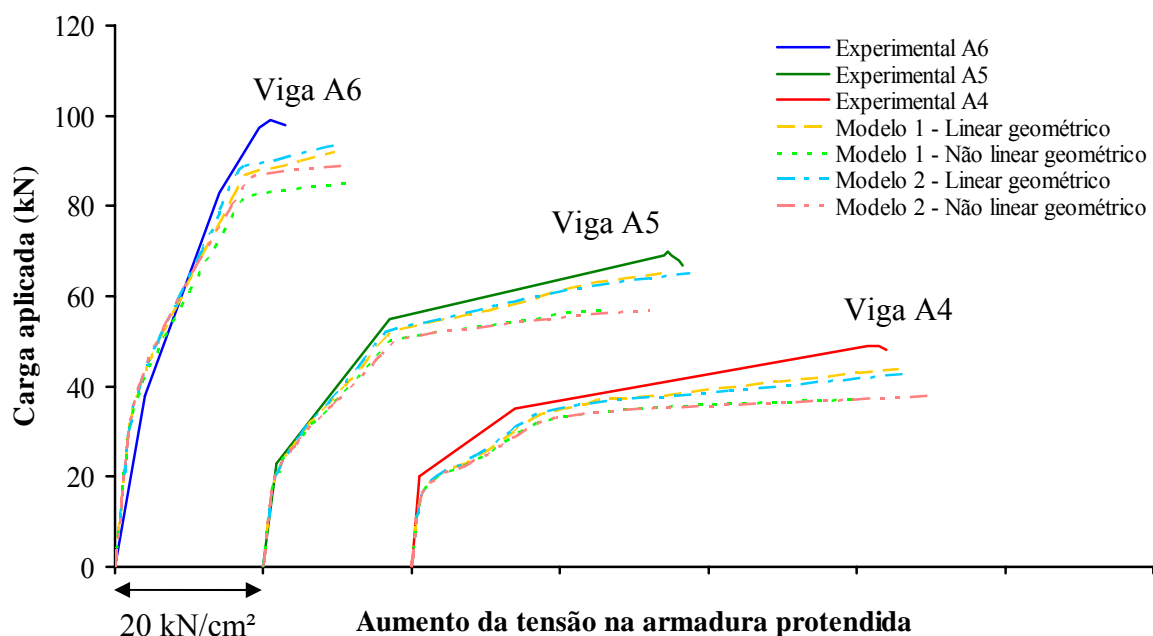


FIGURA 6.16 Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A4, A5 e A6 – Comparativo entre modelos

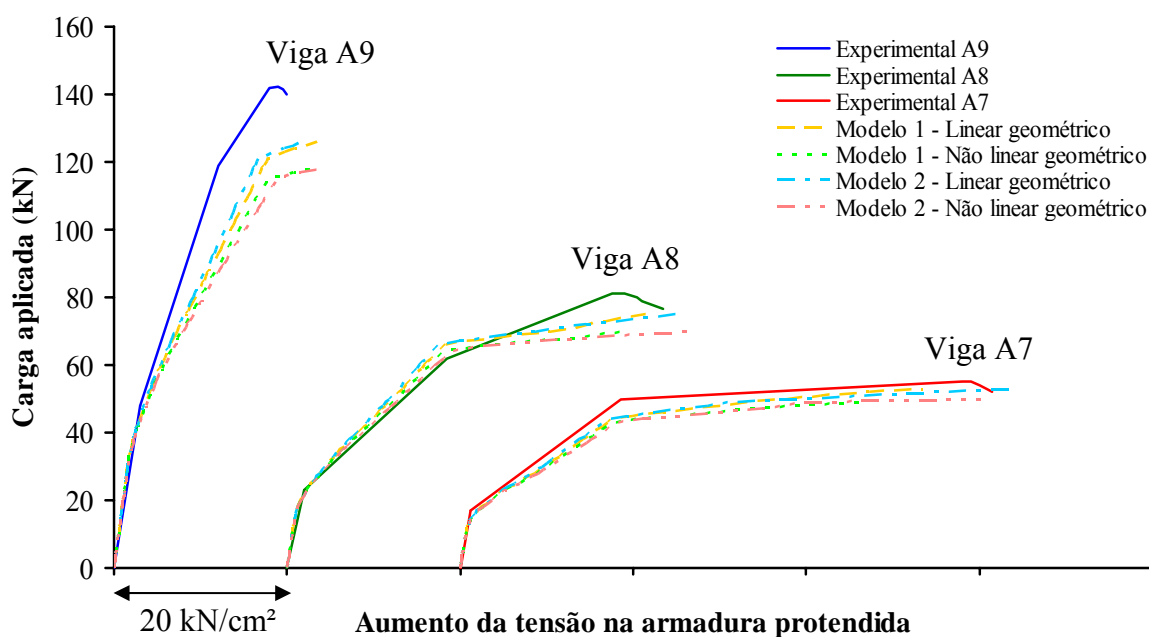


FIGURA 6.17 Carga x aumento da tensão na armadura protendida para as vigas A7, A8 e A9 – Comparativo entre modelos

As figuras 6.18 até 6.21 mostram os valores de tensões  $\sigma_{xx}$  para a viga A8, comparando-se os dois modelos de protensão. Observam-se que não houve diferenças nos valores apresentados para os dois modelos distintos utilizados.

No início da análise, quando apenas a força de protensão e o peso próprio estão atuando, verifica-se exatamente o efeito da protensão na peça. Observa-se que as fibras inferiores da peça encontram-se altamente comprimidas enquanto que as fibras superiores levemente tracionadas devido a uma pequena flexão ocorrida para cima (Figura 6.18). Com a atuação das cargas concentradas, as fibras inferiores passam a ficar tracionadas enquanto que as superiores comprimidas. Quando a carga chega a 17 kN, os valores das tensões nas fibras superiores estão chegando próximas à tensão de ruptura do concreto conforme mostra a Figura 6.19. A queda de tensão ocorrida após o início da fissuração na parte central da viga é vista claramente na Figura 6.20, quando atua 18 kN de carga. Ao longo do carregamento das vigas, observa-se também que a linha neutra vai subindo, cada vez mais, deixando as fibras superiores cada vez mais comprimidas. Na Figura 6.21, os valores de tensão nas fibras

superiores encontram-se próximas ao esmagamento, onde se contempla, notoriamente, a posição elevada da linha neutra.

A evolução das tensões nas armaduras para a viga A8 é mostrada através das figuras 6.22 até 6.25. Observa-se uma pequena perda de tensão na armadura protendida no início da aplicação da força de protensão, frente ao valor apresentado na tabela 6.1, devido ao encurtamento das fibras inferiores do concreto (figura 6.22). O comportamento ao longo do carregamento é mostrado pelas figuras 6.23 até 6.25. A visualização das tensões para as armaduras passivas e estribos é difícil de ser identificado devido ao elevado valor da tensão na armadura protendida, prejudicando a análise do comportamento destas barras.

Fazendo a análise comparativa entre os modelos de armaduras protendidas, nota-se que existe muito pouca diferenças entre os modelos 1 e 2. Desta forma, tem-se que o modelo 2, que foi proposto neste trabalho, consegue representar o comportamento esperado. A única desvantagem deste modelo é que, devido à armadura estar localizada em uma malha fictícia, a análise é feita com o dobro de elementos, sendo que o tempo computacional aumenta consideravelmente.

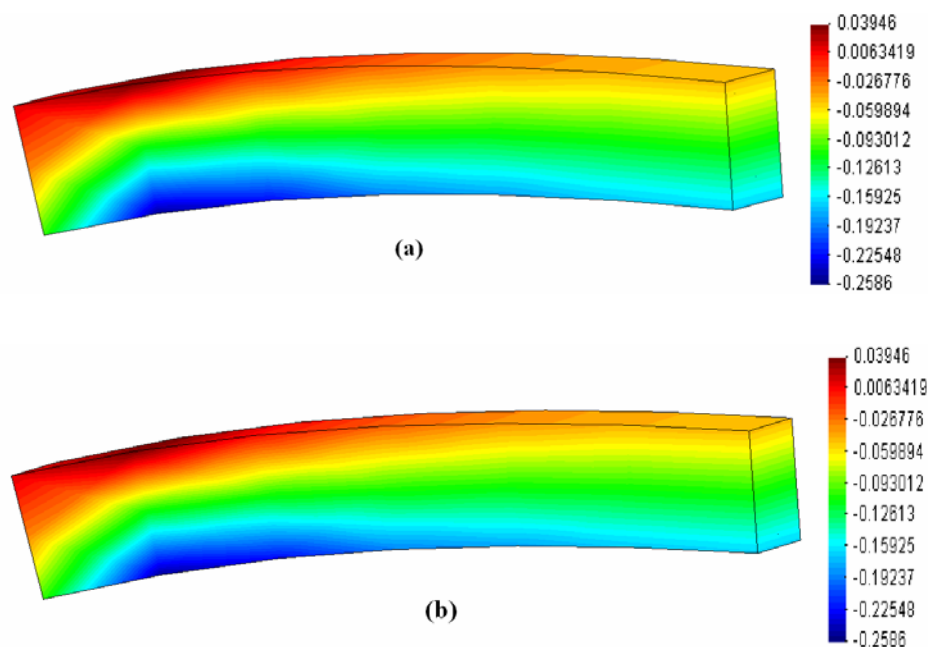


FIGURA 6.18: Evolução da tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto para a viga A8 com atuação da protensão e do peso próprio.(a)Modelo 1; (b)Modelo 2

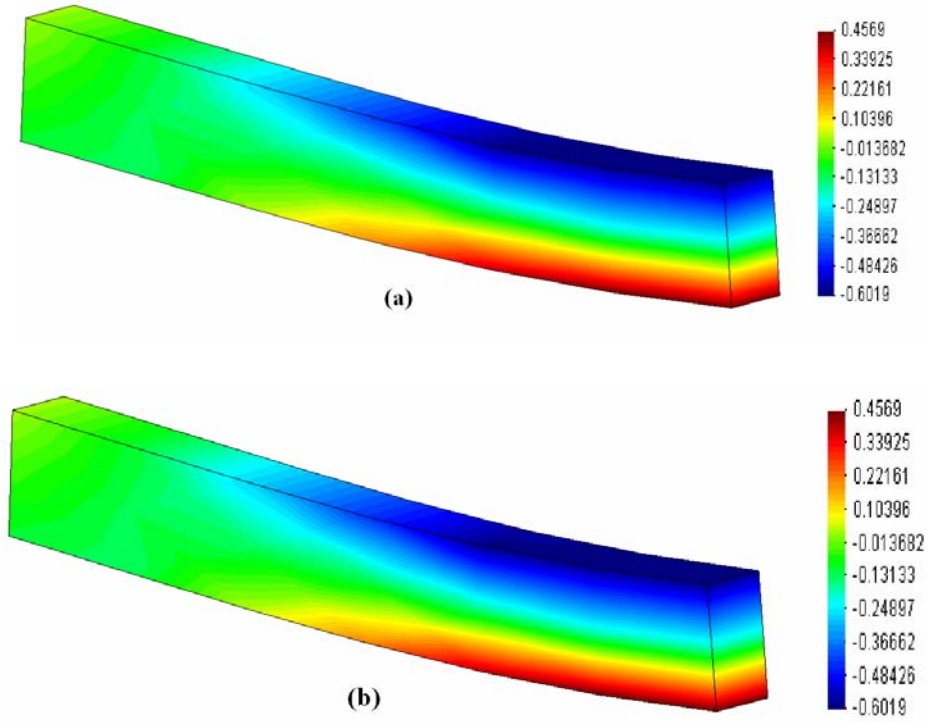


FIGURA 6.19: Evolução da tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto para a viga A8 com a atuação de 17 kN.(a) Modelo 1; (b) Modelo 2

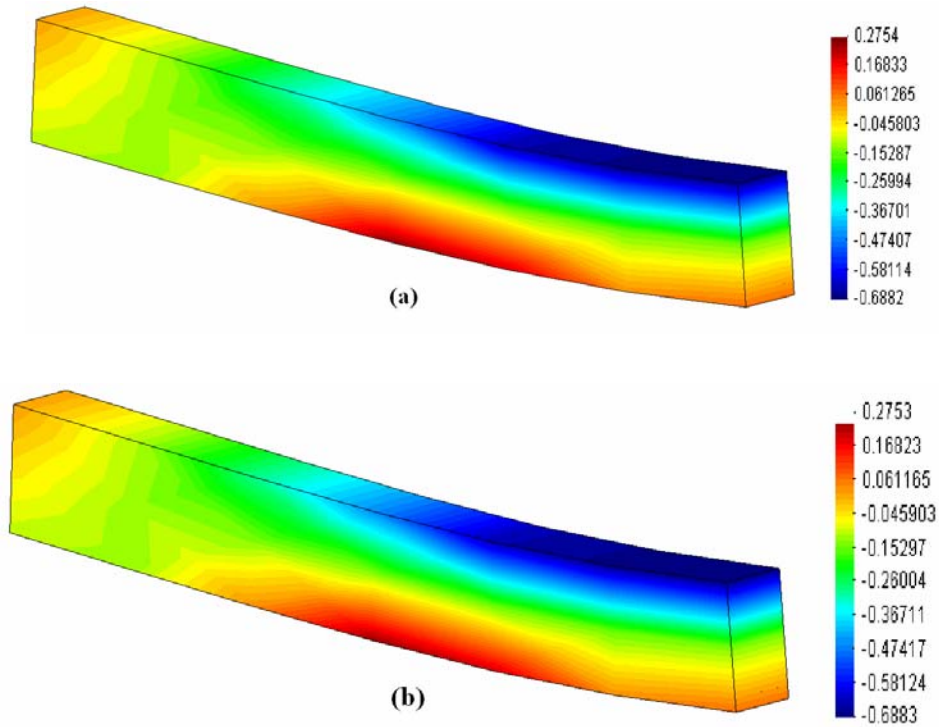


FIGURA 6.20: Evolução da tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto para a viga A8 com a atuação de 18 kN.(a) Modelo 1; (b) Modelo 2

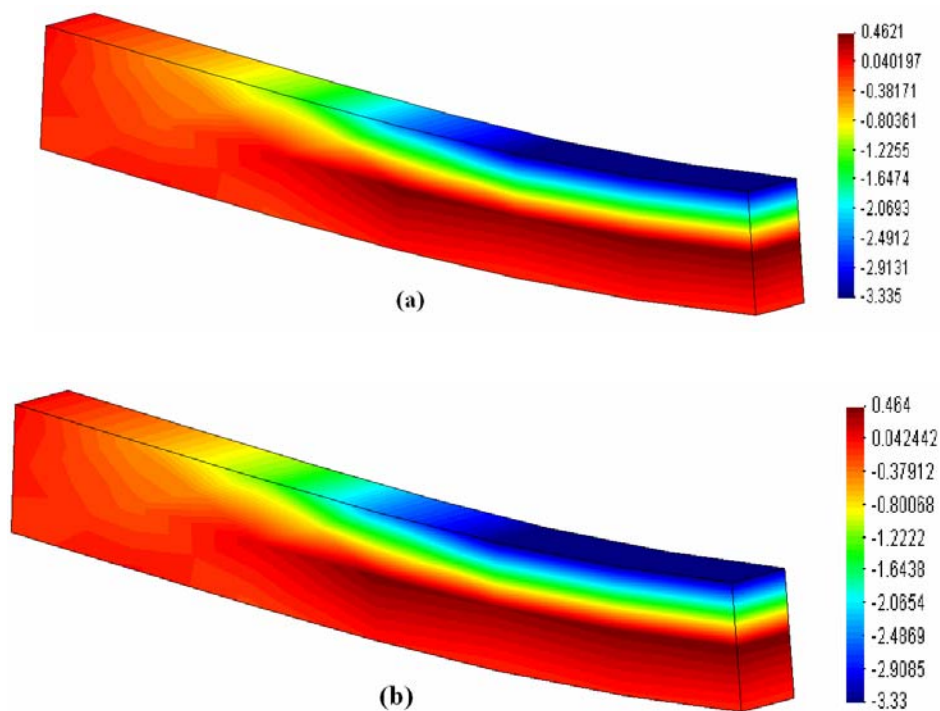


FIGURA 6.21: Evolução da tensão  $\sigma_{xx}$  do concreto para a viga A8 com a atuação de 60 kN.(a) Modelo 1; (b) Modelo 2

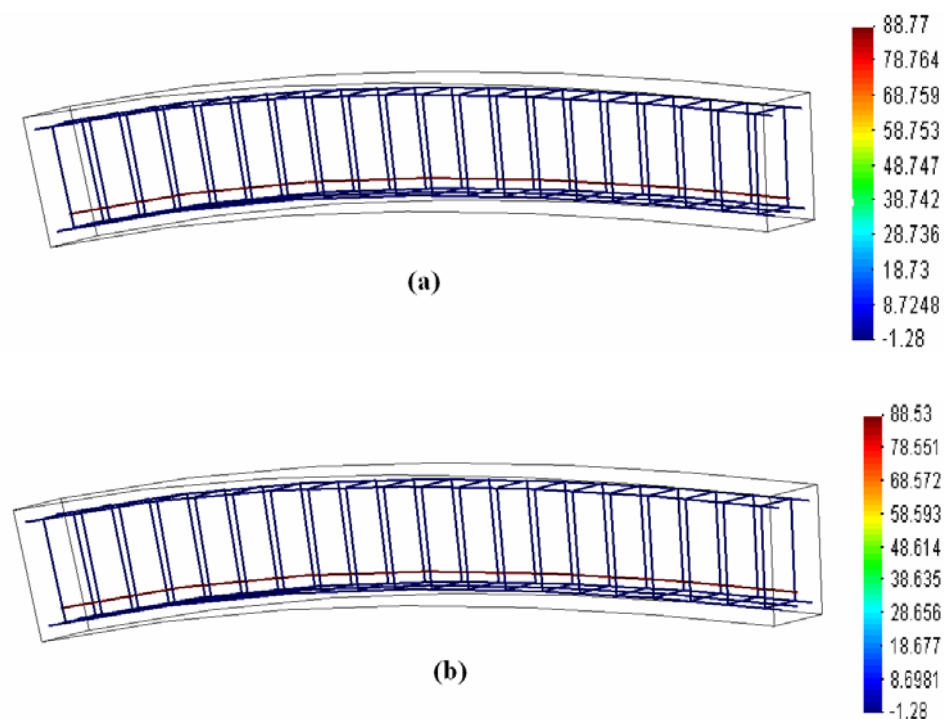


FIGURA 6.22: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com atuação da protensão e do peso próprio (a) Modelo 1; (b) Modelo 2.



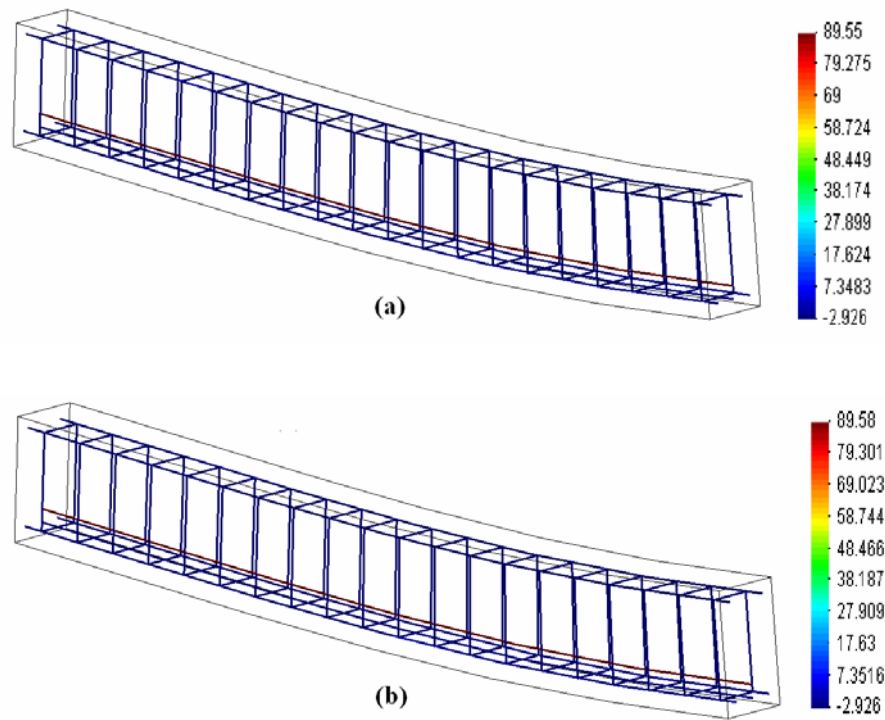


FIGURA 6.23: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com a atuação de 17 kN (a) Modelo 1; (b) Modelo 2.

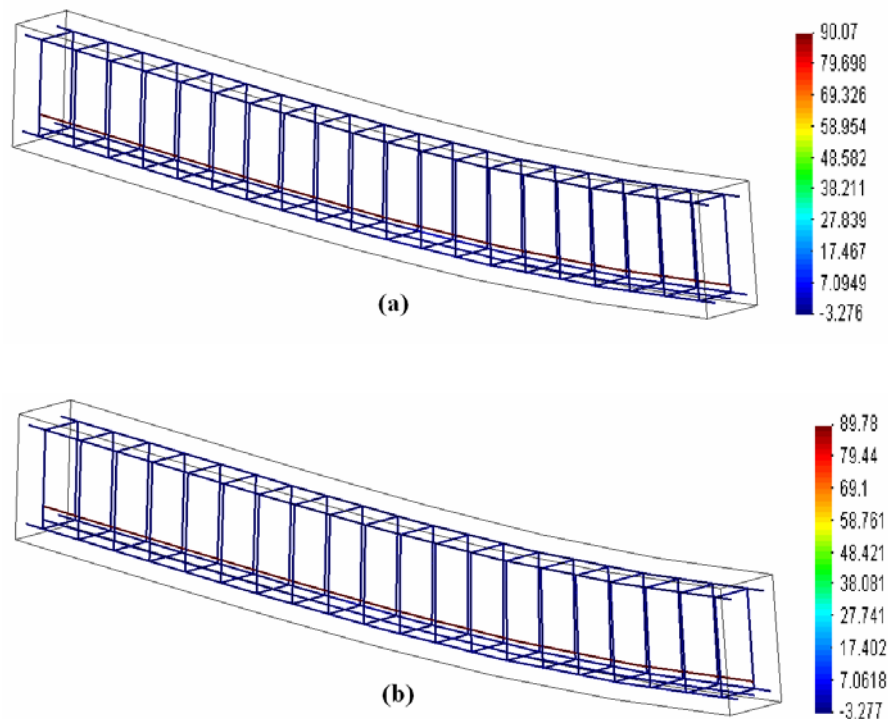


FIGURA 6.24: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com a atuação de 18 kN (a) Modelo 1; (b) Modelo 2.



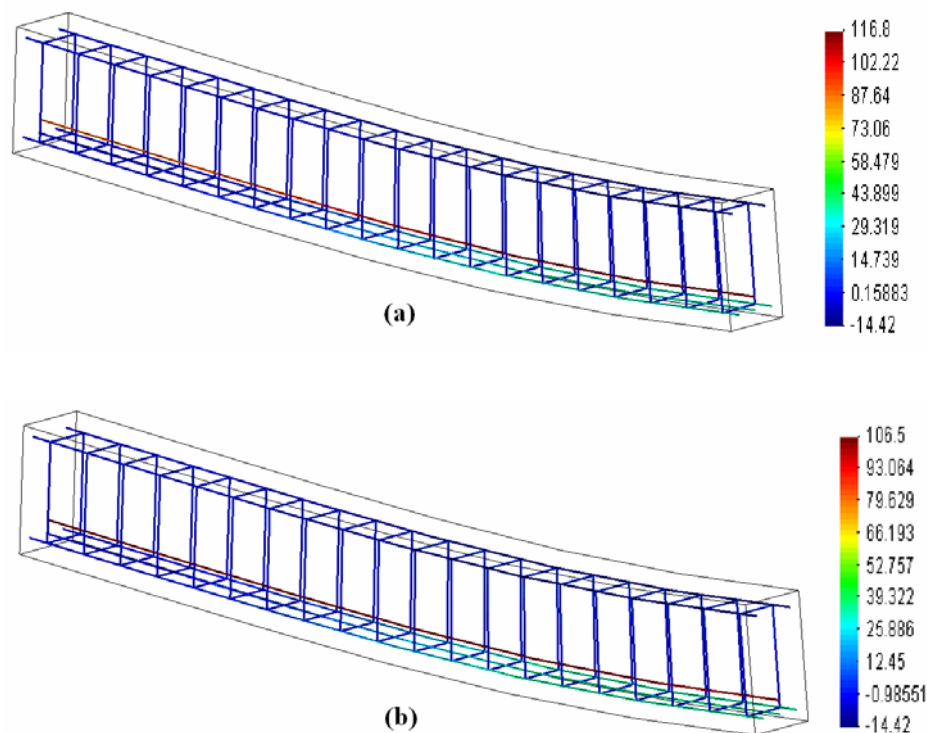


FIGURA 6.25: Evolução das tensões nas armaduras da viga A8 com a atuação de 60 kN (a) Modelo 1; (b) Modelo 2.

### 6.3 ANÁLISE DE VIGAS COM CABOS NÃO ADERENTES EXTERNOS

O presente exemplo apresenta comparações entre o modelo experimental e os resultados do modelo computacional para uma viga com seção “T” e armadura protendida externa, ensaiadas por Tan e Ng (1997).

A viga possui um comprimento total de 3,3m e vão de 3,0m e foi carregada até a ruptura. A resistência média do concreto, determinada por Tan e Ng (1997) foi de 35,6 MPa. A armadura longitudinal passiva é constituída por duas barras de diâmetro de 16 mm e tensão de escoamento  $f_y$  de 530 MPa, localizadas na parte inferior da alma, e quatro barras com 8 mm de diâmetro e tensão de escoamento  $f_y$  de 338 MPa, localizaas na mesa. A armadura transversal é composta por estribos verticais com diâmetro de 6 mm e tensão de plastificação de 300 MPa, dispostas ao longo de todo o comprimento da viga e com espaçamento de 5 cm.

O módulo de elasticidade longitudinal, para todas as barras de armadura, tem o valor de  $21000 \text{ kN/cm}^2$ .

A armadura de protensão é composta por uma cordoalha composta de 7 fios, colocada externamente à peça, ancoradas em blocos de concreto e posicionada em uma altura útil de 20 cm. As cordoalhas possuem diâmetro nominal de 9,5 mm, módulo de elasticidade de  $19300 \text{ kN/cm}^2$  e tensão de ruptura de  $f_{ptk}$  de 1900 MPa. A tensão de protensão aplicada foi de  $129,7 \text{ kN/cm}^2$ , no dia anterior à viga ser testada.

As figuras 6.26 e 6.27 mostram o detalhamento da seção de concreto e as posições das armaduras. A discretização da malha de elementos finitos e o posicionamento das armaduras são mostrados nas figuras. 6.28 e 6.29, respectivamente. Por ser simétrica, apenas metade da viga foi modelada, sendo que todo o comprimento da viga foi representado.

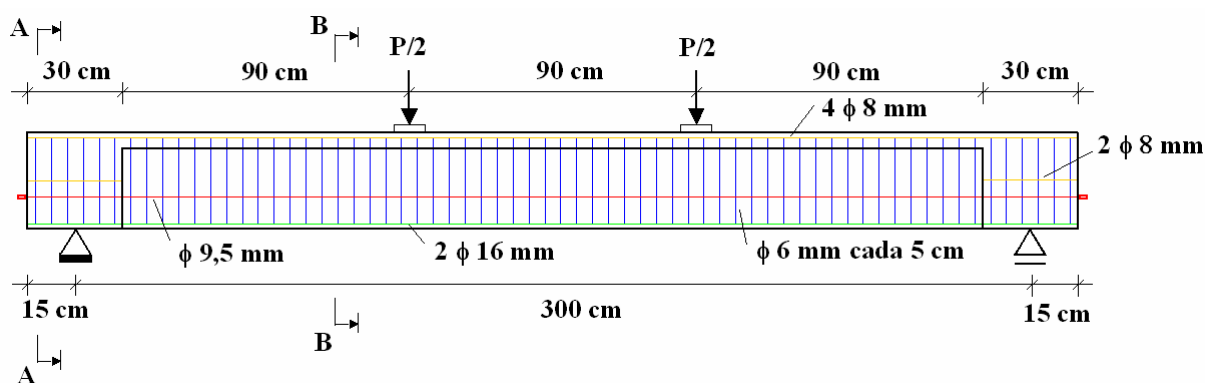


FIGURA 6.26: Detalhamento da viga de Tan e Ng (1997)

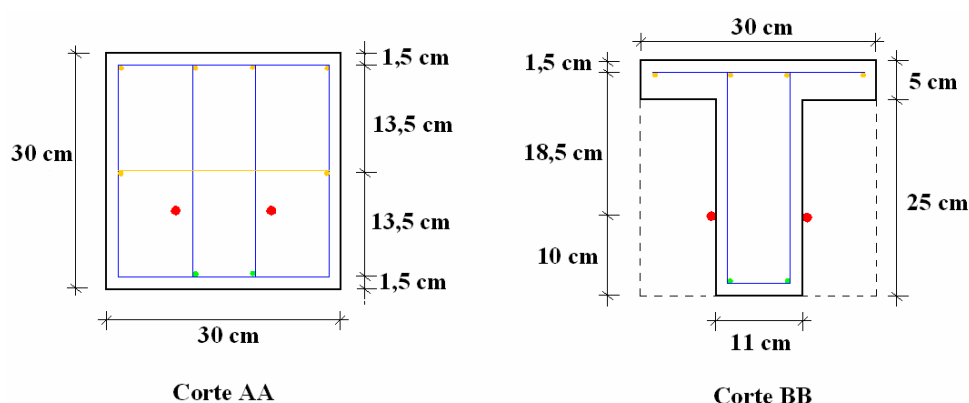


FIGURA 6.27: Cortes AA e BB das seções da viga de Tan e Ng (1997)

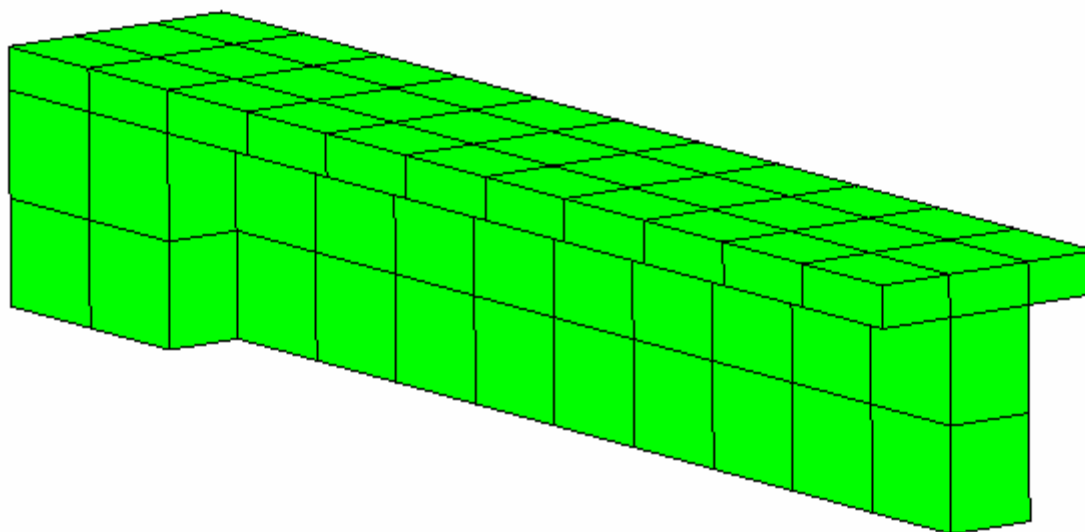


FIGURA 6.28: Malha de elementos de concreto para a viga de Tan e Ng (1997)

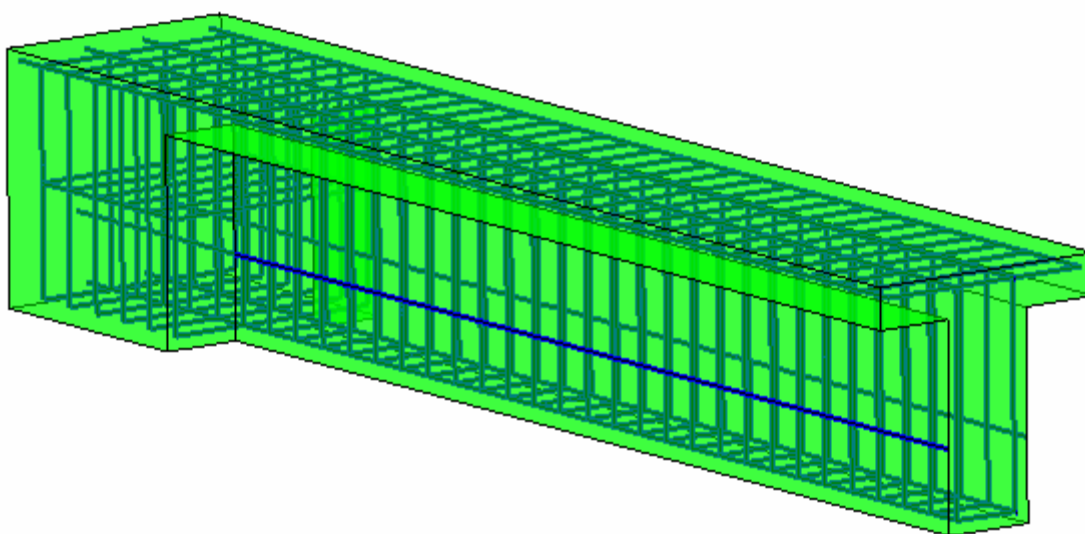


FIGURA 6.29: Malha dos elementos de aço para a viga de Tan e Ng (1997)

As figuras 6.30 e 6.31 mostram, respectivamente, a evolução da flecha e a tensão na armadura protendida ao longo do carregamento, para a viga analisada. Verifica-se uma boa

aproximação em relação ao ensaio experimental. O comportamento da armadura passiva é mostrado na Figura 6.32. Observa-se que o aumento da tensão no centro do vão para a armadura passiva possui apresenta comportamento muito próximo dos resultados experimentais.

A deformada da peça e o seu estado de tensão  $\sigma_{xx}$  é mostrado através das Figuras 6.33 até 6.36 para algumas etapas do carregamento. Quando atua apenas o peso próprio juntamente com a força de protensão, conforme mostra a figura 6.33, pode-se notar a intensidade da compressão aplicada nas fibras inferiores da estrutura. Através das Figuras 6.34 e 6.35, observa-se o instante em que as primeiras fissuras surgem na peças quando o carregamento aumenta de 38 kN para 40 kN. Na carga de 140 kN, a peça já esta bastante fissurada e o concreto quase esmagado (figura 6.36). Devido ao grande número de barras passivas na estrutura é impossível observar o comportamento das tensões nas armaduras. Desta forma, estas não serão plotadas neste item.

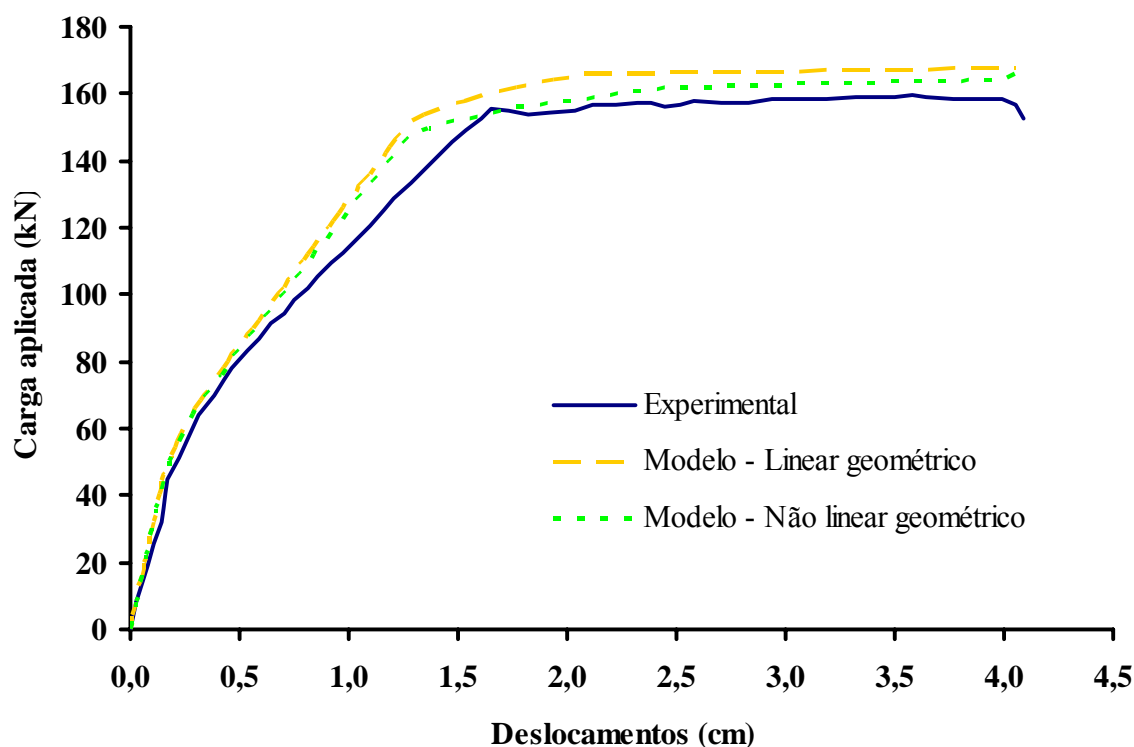


FIGURA 6.30: Carga x deslocamentos no centro do vão para a viga de Tan e Ng (1997)

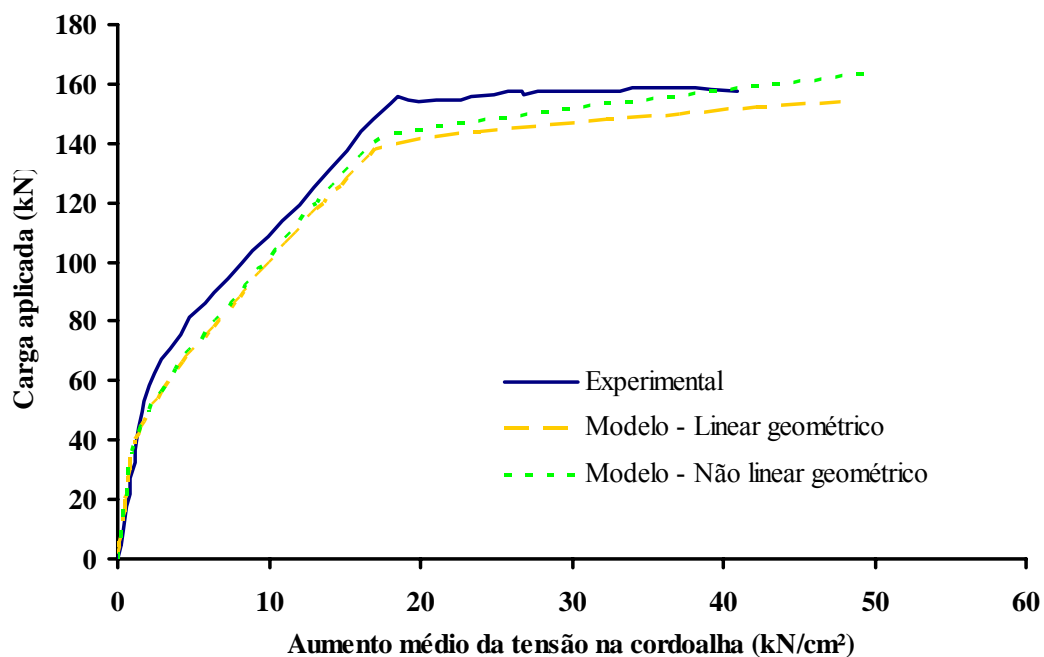


FIGURA 6.31: Carga x aumento da tensão na cordoalha para a viga de Tan e Ng (1997)

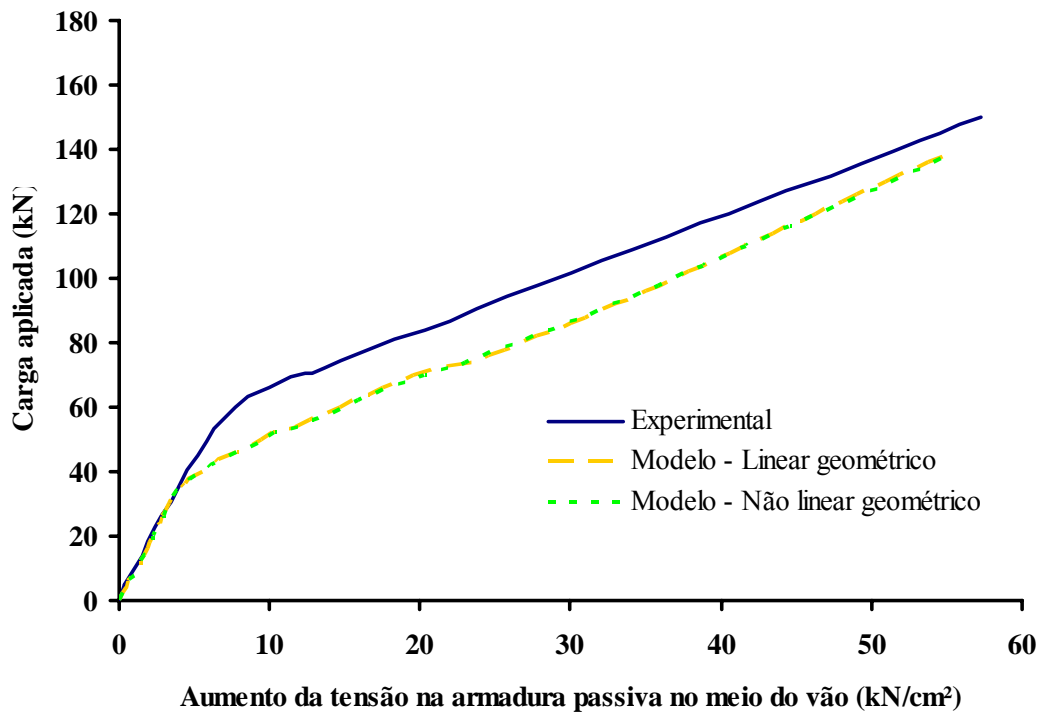


FIGURA 6.32: Carga x aumento da tensão na armadura passiva no meio do vão para a viga de Tan e Ng (1997)

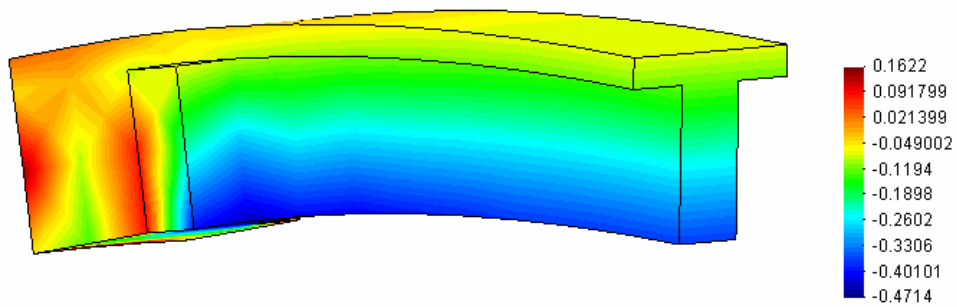


FIGURA 6.33: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando o peso próprio e a força de protensão

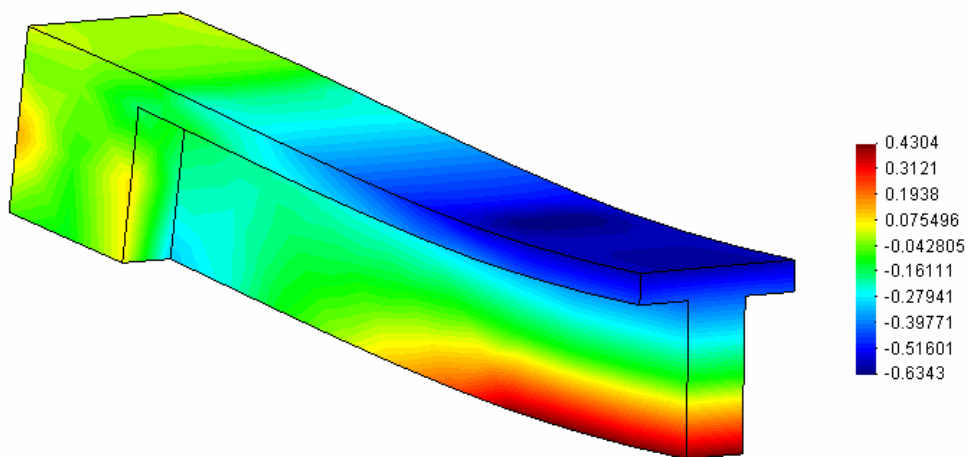


FIGURA 6.34: : Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando uma carga de 38 kN

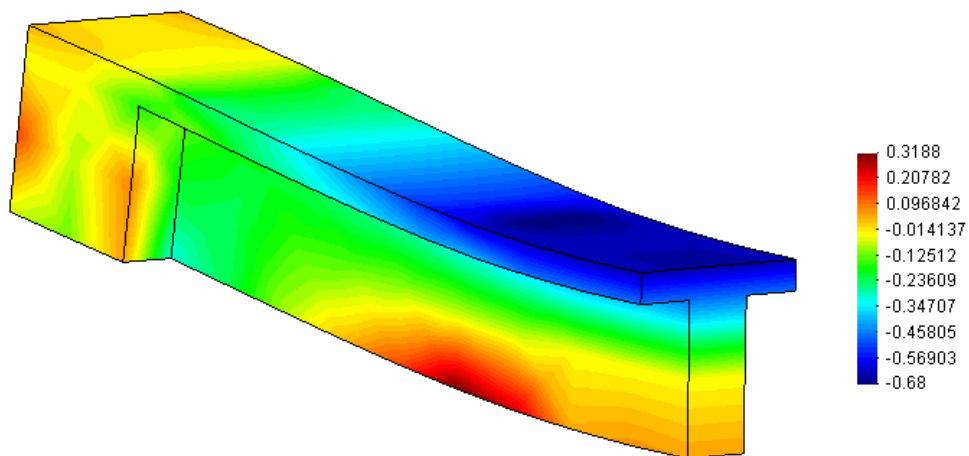


FIGURA 6.35: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando uma carga de 40 kN

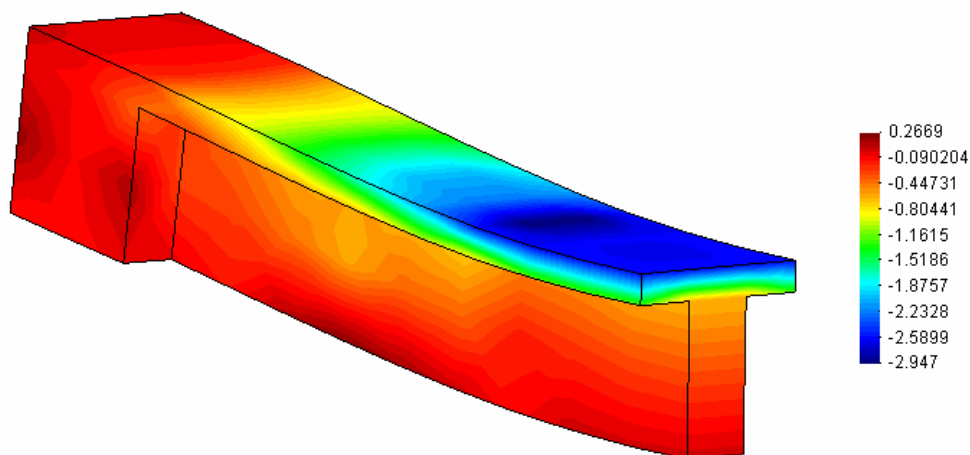


FIGURA 6.36: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando uma carga de 140 kN

### 6.3 ANÁLISE DE LAJES PROTENDIDAS EM UMA DIREÇÃO

O trabalho de Cooke *et al.* (1981) apresenta lajes bi-apoiadas com cabos dispostos em uma direção e com cargas dispostas em seus terços médios. Os detalhes das lajes testadas são mostrados na figura 6.37 e suas características são dadas na tabela 6.2. As lajes possuem uma espessura de 18 cm e altura útil de 12 cm. Cada laje foi protendida com 3 cordoalhas de 12,7 mm com módulo de elasticidade de 20210 kN/cm<sup>2</sup> e tensão de ruptura de 176,5 kN/cm<sup>2</sup>.

TABELA 6.2: Características das lajes de Cooke *et al.* (1981)

Laje	L (cm)	$l_e$ (cm)	b (cm)	$f_{cm}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_{p0}$ (kN/cm <sup>2</sup> )
4	360	340	35,3	3,44	116,3
5	360	340	70,5	3,44	115,4
7	240	220	35,3	3,08	116,4
8	240	220	70,5	3,08	116,8

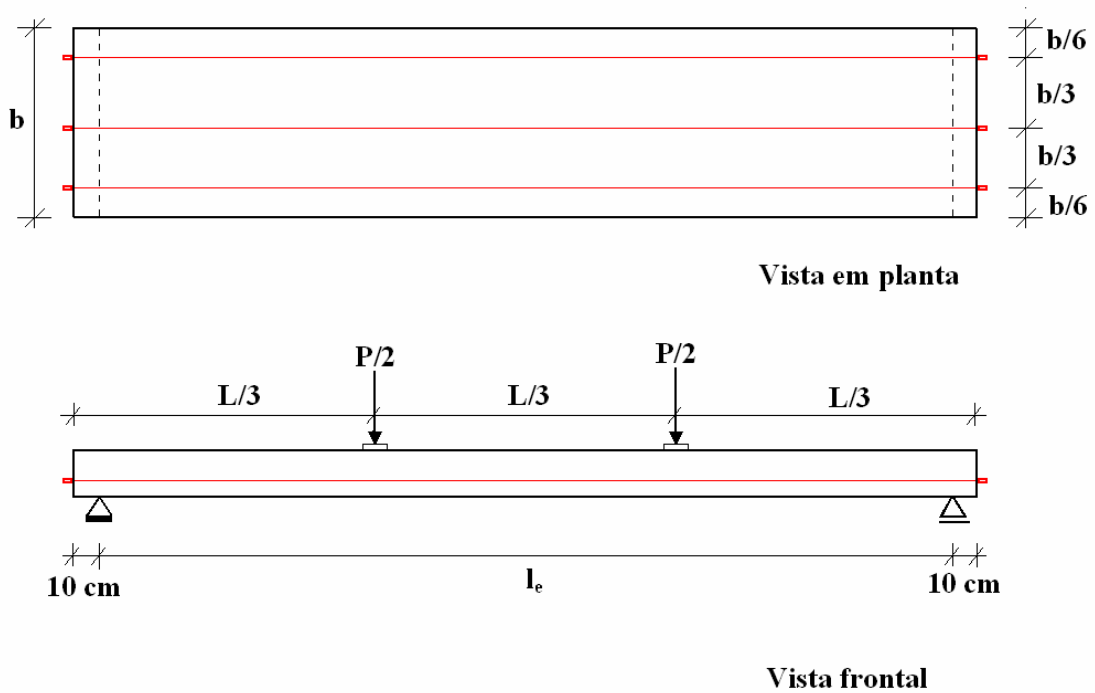


FIGURA 6.37: Detalhamento das lajes de Cooke *et al.* (1981)

Os protótipos 4 e 5 foram discretizados em 72 elementos finitos, como mostra a figuras. 6.38 e 6.39 para a laje 4. Nas lajes 7 e 8 utilizaram-se 48 elementos segundo observase nas figuras. 6.40 e 6.41 para a laje 7. Em todos os casos apenas metade das lajes foram modelados, devido à simetria.

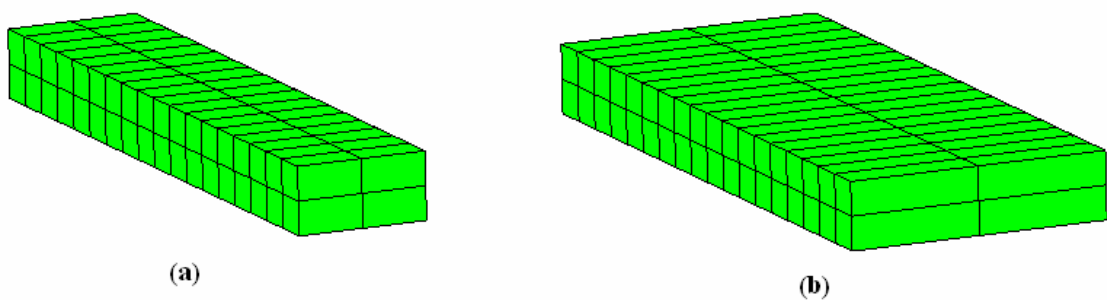


FIGURA 6.38: Malha de elementos de concreto para a laje 4 de Cooke *et al.* (1981)



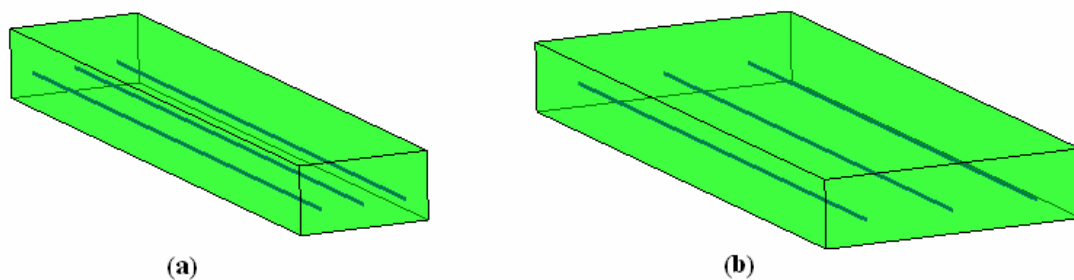


FIGURA 6.39: Malha de elementos de aço para a laje 4 de Cooke *et al.* (1981)

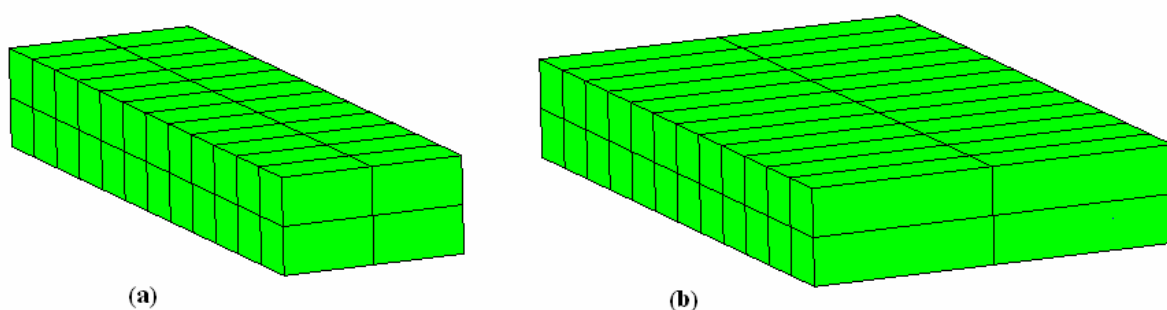


FIGURA 6.40: Malha de elementos de concreto para a laje 7 de Cooke *et al.* (1981)

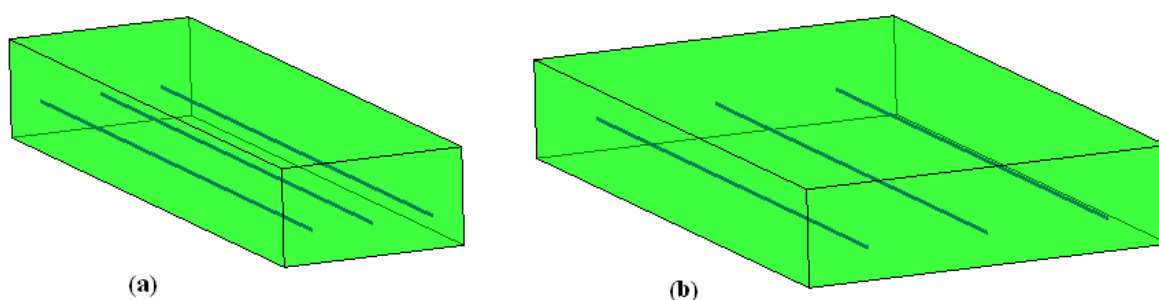


FIGURA 6.41: Malha de elementos de aço para a laje 7 de Cooke *et al.* (1981)

A evolução da flecha e a tensão na armadura protendida ao longo do carregamento são mostradas nas Figuras 6.42 até 6.45. Verifica-se uma boa aproximação em relação ao ensaio experimental, com algumas diferenças na parte final da análise.

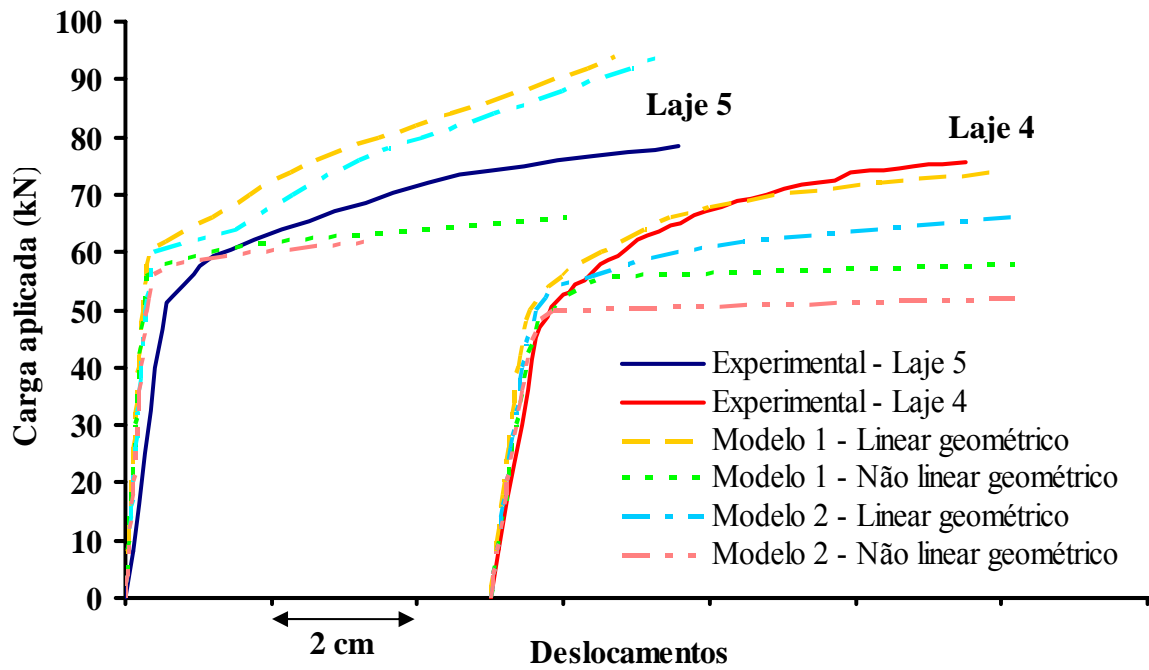


FIGURA 6.42: Carga x deslocamentos no centro do vão das lajes 4 e 5

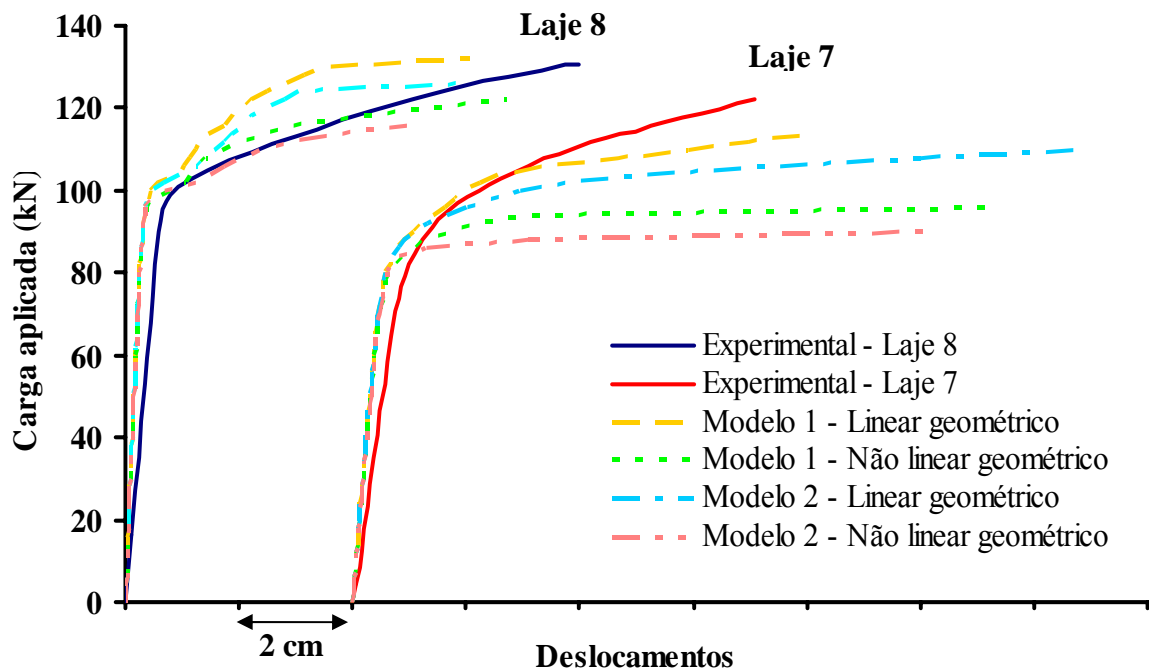


FIGURA 6.43: Carga x deslocamentos no centro do vão das lajes 7 e 8

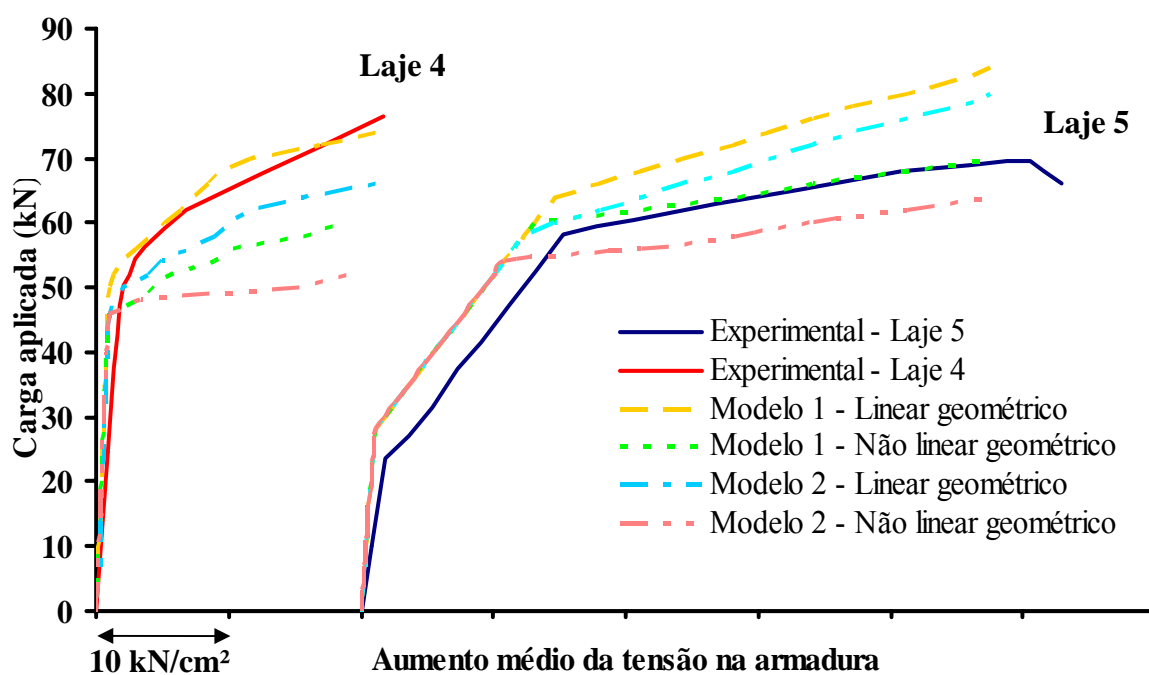


FIGURA 6.44: Carga x aumento da tensão na armadura protendida das lajes 4 e 5

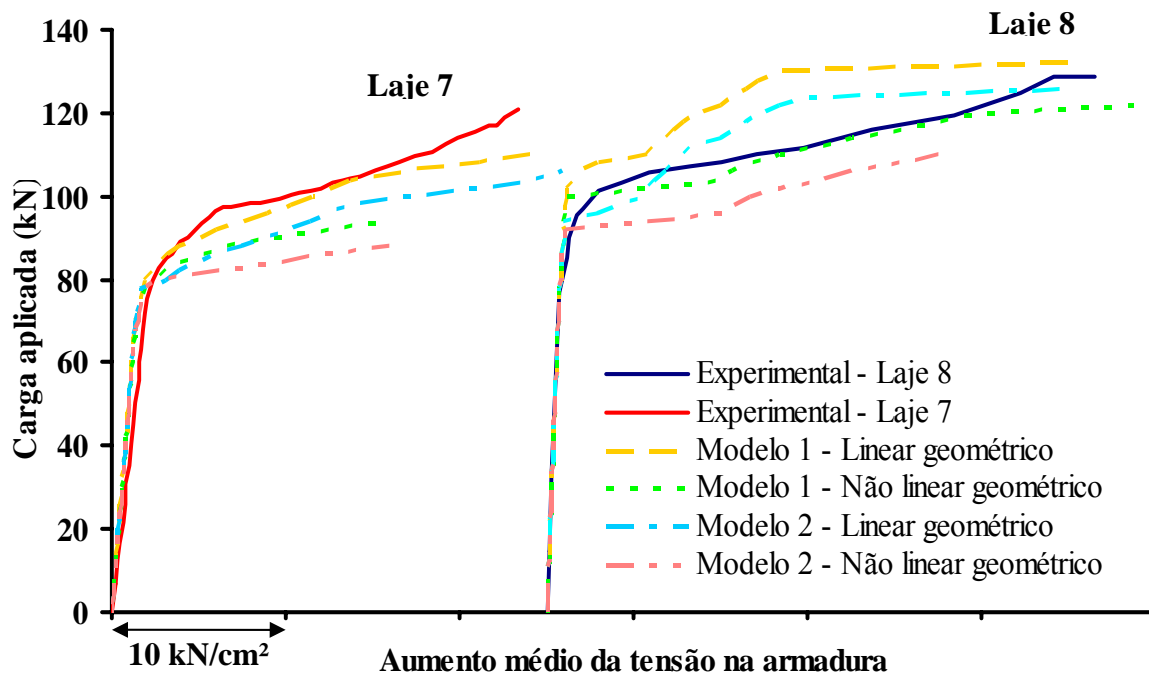


FIGURA 6.45: Carga x aumento da tensão na armadura protendida das lajes 7 e 8

Através das Figuras 6.46 até 6.50 ilustra-se a deformada da peça e o seu estado de tensão  $\sigma_{xx}$  para alguns instantes do carregamento. O comportamento das armaduras pode ser observado nas Figuras 6.51 até 6.55.

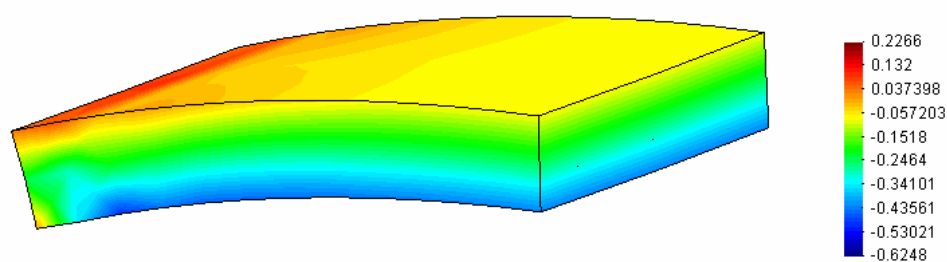


FIGURA 6.46: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando o peso próprio e a força de protensão para a laje 8

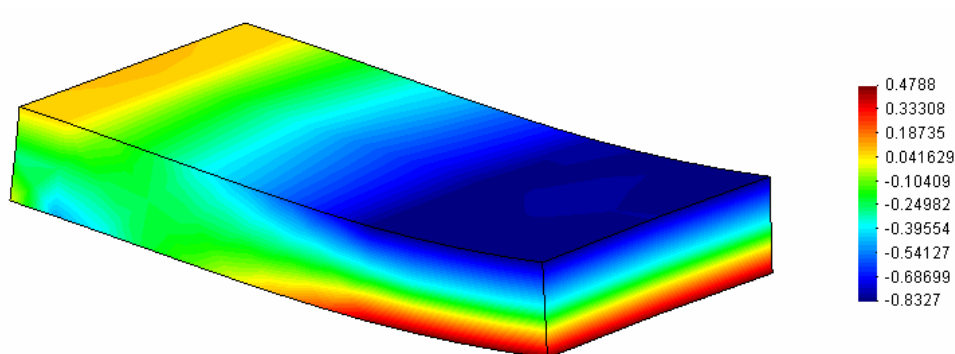


FIGURA 6.47: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando 88 kN para a laje 8

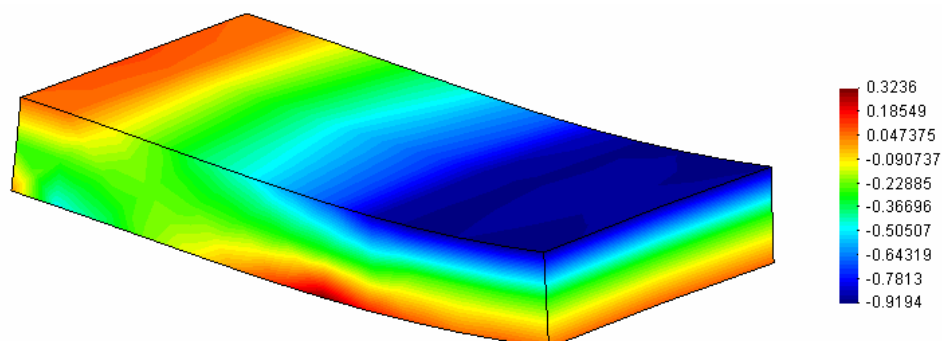


FIGURA 6.48: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando 90 kN para a laje 8

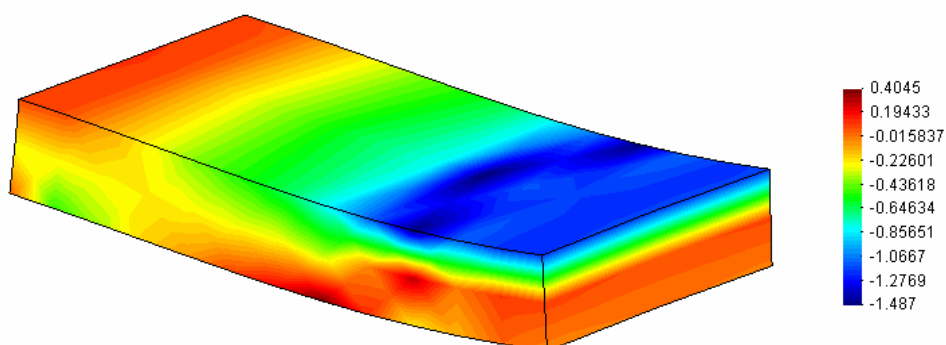


FIGURA 6.49: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando 102 kN para a laje 8

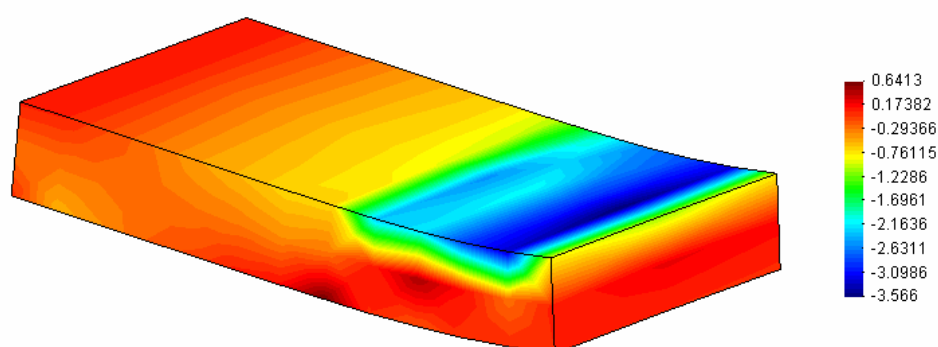


FIGURA 6.50: Evolução das tensões  $\sigma_{xx}$  atuando 110 kN para a laje 8

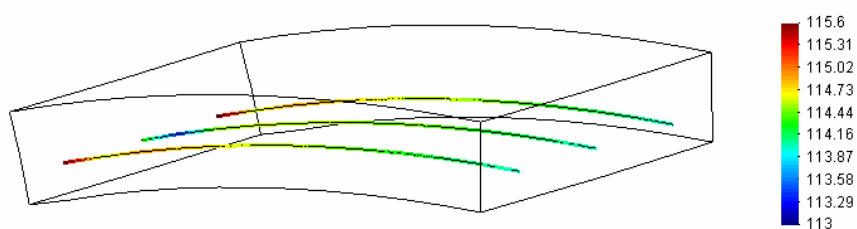


FIGURA 6.51: Evolução das tensões nas armaduras atuando o peso próprio e a força de protensão para a laje 8

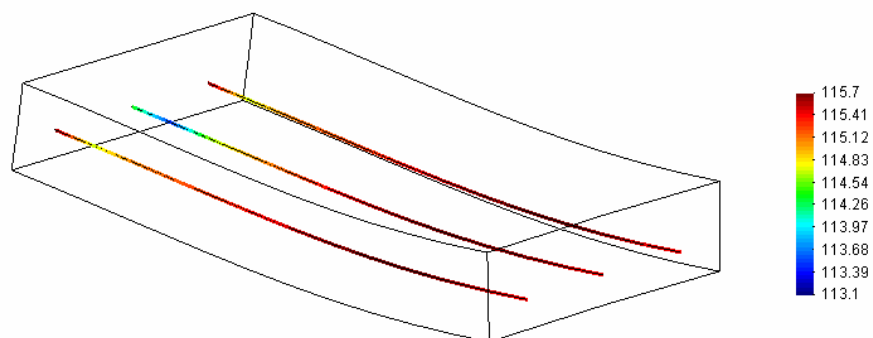


FIGURA 6.52: Evolução das tensões nas armaduras atuando 88 kN na laje 8

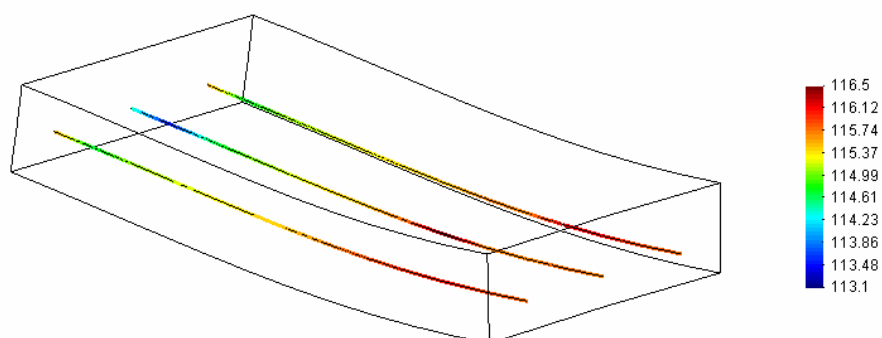


FIGURA 6.53: Evolução das tensões nas armaduras atuando 90 kN na laje 8

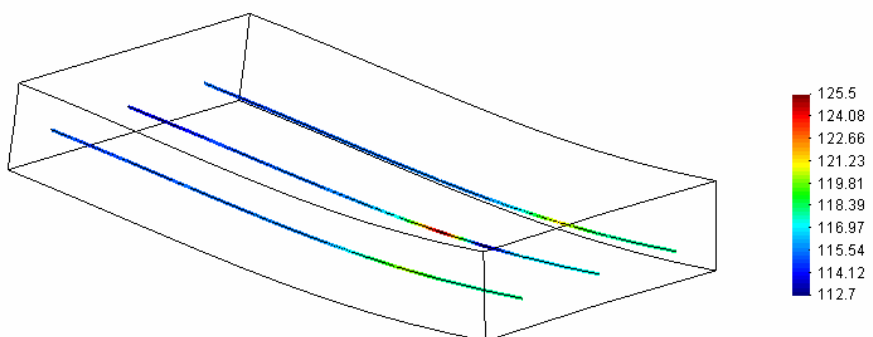


FIGURA 6.54: Evolução das tensões nas armaduras atuando 102 kN na laje 8

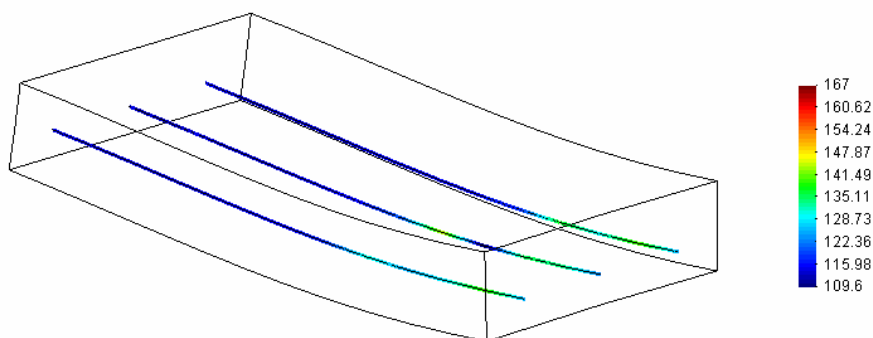


FIGURA 6.55: Evolução das tensões nas armaduras atuando 110 kN na laje 8

## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho consistiu a análise, através do método dos elementos finitos, de peças fletidas com protensão não aderente. Utilizou-se para tal um modelo elasto-viscoplástico com não-linearidades físicas e geométricas.

O desenvolvimento computacional dos modelos foi baseado no estudo explanado por Hinton (1988) na análise tridimensional de estruturas e nas considerações feitas por Machado (2002) para a análise de peças protendidas. O programa foi feito inteiramente em todas as suas subrotinas, em linguagem Fortran 90/95. Uma entrada de dados em linguagem orientada foi aplicada para facilitar o fornecimento das informações necessárias nas análises. A geração de arquivos de saída de resultados para ser feito no programa GID®7.2 foi criado para facilitar a visualização e interpretação dos resultados de uma forma mais eficiente.

As análises consistiram em utilizar os dois modelos diferentes para representar o comportamento da armadura protendida. Um dos modelos foi proposto, neste trabalho, como uma alternativa de melhor representar a incompatibilidade de deformações entre o concreto e a armadura protendida. Comparou-se também, nas análises, a presença ou não do modelo não linear geométrico.

As comparações feitas entre as análises e resultados experimentais, dispostos na literatura, apresentaram bons resultados para valores de deslocamentos e tensões. Os dois modelos de cordoalhas utilizados conseguiram representar adequadamente o cálculo das deformações nas armaduras não aderentes. A desvantagem encontrada para o modelo 2 contempla a presença da malha fictícia, que faz com que o tempo de processamento dos resultados seja superior ao do modelo 1. A utilização do modelo não linear geométrico produz certas diferenças nos resultados a partir do ponto de plastificação da armaduras passivas.

Portanto, pode-se afirmar que o programa computacional desenvolvido é capaz de analisar peças com protensão não aderente, possibilitando o estudo mais profundo destes tipos de estruturas.

Como sugestões para a continuação do trabalho, os seguintes tópicos podem ser desenvolvidos:

- aprimoramento do modelo viscoelástico dos materiais, permitindo o surgimento de fissuras nesta etapa da solução;
- fazer uma análise de estruturas com protensão não aderente ao longo do tempo, tanto na área experimental, que possui escassos resultados, com na numérica;
- inclusão na entrada de dados em linguagem orientada de um dispositivo de controle de erros, quando acontecer eventuais problemas na digitação no arquivo de entrada de dados;
- analisar lajes com cabos dispostos em duas direções;
- fazer um estudo probabilístico de peças com protensão não aderente.



## REFERÊNCIAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 423. **Recommendations for concrete members with Unbonded Tendons**, ACI Structural Journal, Farmington Hills, ACI v.86, n.3, p. 301-318, May-June, 1989.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Cordoalhas de Aço para Concreto Protendido – Especificação**: NBR 7483. Rio de Janeiro, 1991.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto**. NBR 6118. Rio de Janeiro, 2003.

BARBIERI, R. A. **Modelo Numérico para a Análise à Flexão de Elementos Estruturais com Protensão Aderente e Não-aderente**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 2003, 305p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1996. 1037p.

BATHE, K. J., OZDEMIR, H. **Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis**. Computers and Structures, v. 6, p. 81-92, 1976.

BAZANT, Z. P. **Mathematical models for creep and shrinkage of concrete**. In: International Symposium on Fundamental Research an Shrinkage of Concrete, 1980, Lausanne Paperes, Chischester: John Willey, 1983, cap. 7, p. 163-256.

BAZANT, Z. P., WU, S. T. **Rate-type creep law of agin concrete base don Maxwell chain**. Matériaux et Constructions, v. 7, n. 34, p. 45-60, 1974.

CHAKRABARTI, P. R. **Ultimate Stress for Unbonded Post-Tensioning Tendons in Partially Prestressed Beams**. ACI Structural Journal, Farmington Hills, ACI, v.92, n. 6, p. 689-697, Nov-Dec. 1995.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990 : Design Code**. London : Thomas Telford Services, 1993, 437p.

COOKE, N. ; PARK, R. ; YONG, P. **Flexural strength of prestressed concrete members with unbonded tendons**. PCI Journal, November-December, 1981.

CREUS, G. J. **Viscoelasticity : basic theory and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1986, 169 p.

DU, G.; TAO, X. **Contrainte ultime dans les câbles non-adhérents de poutres en béton a précontrainte partielle**. Annales de L'Institut Technique du Batiment et des Tavaux Publics, n. 462, p. 75-88, 1988.

ELWI, A. E., HRUDEY, T. M. **Finite element model for curved embedded reinforcement**. Journal of Engineering Mechanics Division , ASCE , v. 115 , n. 4, p. 740-754, 1989.

EMERICK, A.. **Projeto e execução de lajes protendidas**. Rio de Janeiro, editora Interciência, 2005.

FAIRBAIRN, E. M.; LONGO, H. I.; ZHENG, R. **Formulação diferencial do problema da relaxação do concreto – estudo teórico experimental**. In: Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 24, 1987, Porto Alegre, Anais. Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1987, v.2, p. 103-117.

FIGUEIRAS, J. A. & PÓVOAS, R. H. **Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures**. Computers & Structures. London, Elsevier Science, v. 53, n.1, Jan. 1994.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1988. 550p.

HINTON, E; CAMPBELL, J. S. **Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 8, p. 461-480, 1974.

HOLDEN, J. T. **On the finite deflections in thin beams.** International Journal of Solids and Structures, v.8, p. 1051-1055, 1972.

HUGHES, T. H. R. **The finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.** Prentice-Hall, Inc, 1987.

KANG, Y. J.; SCORDELIS, A. C. **Nonlinear analysis of prestressed concrete frames.** Journal of Structural Division, ASCE, v. 106, n. 4, p. 445-462, 1980.

KISS, P. Os Leves Puxam o Mercado. **Téchne**, São Paulo, PINI, n. 41, p.52-56, 1999.

MACHADO, M. A. S. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos para a Análise Elasto-Viscoplástica de Peças de Concreto Armado e Protendido, submetidas a Estados Planos de Tensão.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 2002. 150p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 168 p., 2003.

MARTINS, A. S. F. **Estudo do Comportamento de Estruturas compostas por Peças Laminares de Concreto Armado, solicitadas por cargas paralelas e normais ao seu plano médio, através do Método dos Elementos Finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, 125p., 1989.

NAAMAM, A. E. & ALKHAIRI, F. M. **Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioned**

**Tendons: Part 1 – Evaluation of the State-of-the-Art.** ACI Structural Journal, Farmington Hills, ACI, v.88, n. 5, Sep-Oct. 1991.

OTTOSEN, N. S. **A failure criterion for concrete.** Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v. 103, n.4, p.527-535, 1977.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. **Finite element in plasticity: theory and practice.** Swansea, Pineridge Press, 594 p., 1980.

POST-TENSIONING INSTITUTE. Specification for Unbonded Single Strand Tendons. **PCI-Journal.** Chicago, PCI, v.30, n.2, Mar-Apr. 1985.

REAL, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 2000, 224p. Tese de Doutorado em Engenharia Civil.

ROCCA, P.; MARI, A.R. **Numerical geometric and material analysis of prestressed concret general shell structures.** Computer and Structures, London, Elsevier Science, v. 46, n.58, p. 917-929, 1994.

SEIXAS, M. P. **Análise de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Confinados, através do Método dos Elementos Finitos.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 2003. 109p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.

TAN, K.; NG, C. **Effects of deviators and tendon configuration on behavior of externally prestressed beams.** ACI Structural Journal, v. 94, n. 1, 1997.

VASCONCELOS, A. C. **Manual prático para a correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência às normas atualizadas.** Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos, editora LTDA, 64 p., 1980.

VERÍSSIMO, G. S., CÉSAR JR., K. M. L. **Concreto Protendido. Fundamentos Básicos.** 5.ed. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Suporte bibliográfico para a disciplina de concreto protendido, 78p., 1998.

VERÍSSIMO, G. S., CÉSAR JR., K. M. L. **Concreto Protendido. Perdas de Protensão.** 5.ed. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Suporte bibliográfico para a disciplina de concreto protendido, 78 p. 1998.

VAN ZYL, S. F.; SCORDELIS, A.C. **Analysis of curved, prestressed, segmental bridges.** Journal of Structural Division, ASCE, v. 105, n.11, p. 2399-2417, 1979.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method. Volume 1: The basis.** 5. ed., Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000.

## **APÊNDICE A – SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES**

## APÊNDICE A – SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES

Na análise de elementos isoparamétricos envolvendo integração numérica, como os elementos implementados neste trabalho, sabe-se que os pontos de integração são os pontos ótimos para o cálculo de tensões e deformações.

Para uma melhor visualização dos resultados no pós-processamento é conveniente obter esses valores em cada nó da estrutura. Entretanto, os nós aparecem como sendo pontos ruins para o cálculo das tensões e deformações. Isto se deve ao fato das funções de interpolação tender a um comportamento ruim perto das extremidades da região de interpolação. Então é razoável esperar que as derivadas destas funções (e então as tensões e deformações) calculadas nos pontos de integração sejam mais precisas do que nos nós. Para contornar este problema é necessário fazer uma extrapolação dos valores calculados nos pontos de integração para os nós e uma suavização destes valores para que exista a continuidade entre elementos.

Neste trabalho, utiliza-se o processo de extrapolação e suavização proposto por Hinton e Campbell (1974). O procedimento será descrito através de valores de tensões, sendo válido também para as deformações.

### A.1 Introdução

A função de suavização usando o método dos mínimos quadrados é definida como:

$$g(x, y, z) = a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{011}xy + \dots = \sum a_{ijk} x^i y^j z^k \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 0, p \\ j = 0, q \\ k = 0, r \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

onde  $a_{ijk}$  são os coeficientes da função de suavização,  $g$  é uma função de ordem  $p$  em  $x$ , uma função de ordem  $q$  em  $y$  e uma função de ordem  $r$  em  $z$ .

Se a função não suavizada é dada por  $\sigma(x, y, z)$  então o problema resume-se em encontrar os coeficientes  $a_{ijk}$  que minimizem o funcional:

$$\chi = \iiint (\sigma - g)^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{A.2})$$

Assim, para que  $\chi$  seja um mínimo,

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_{ijk}} = 0 \quad (\text{A.3})$$

### A.1 Formulação em elementos finitos

Neste procedimento, as incógnitas são tomadas com sendo as tensões nodais suavizadas  $\sigma^*$  e a função de suavização  $g(\xi, \eta, \zeta)$  é dada, usando-se as funções de forma do elemento, pela expressão:

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1, n} N^*_i \sigma^*_i \quad (\text{A.4})$$

onde  $N^*_i$  são as funções de forma suavizadas em coordenadas naturais do nó  $i$ ,  $\sigma^*_i$  é a tensão nodal suavizada do nó  $i$  e  $n$  é o número de nós por elemento. Na presente formulação, é feita uma aproximação em que as funções de interpolação suavizadas são idênticas às funções de forma do elemento ( $N^*_i \approx N_i$ ).

O erro entre as tensões suavizadas e as não suavizadas em qualquer ponto dentro do elemento é dado por

$$e(\xi, \eta, \zeta) = \sigma(\xi, \eta, \zeta) - g(\xi, \eta, \zeta) \quad (\text{A.5})$$

onde as tensões não suavizadas  $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ .

O problema agora é o de encontrar o conjunto de tensões nodais suavizadas que minimizem o funcional



$$\chi = \sum_{j=1,ne} \iiint e^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \sum_{j=1,ne} \iiint [\sigma(\xi, \eta, \zeta) - g(\xi, \eta, \zeta)]^2 \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (\text{A.6})$$

onde ne é o número total de elemento, e detJ é o determinante da matriz Jacobiana.

Para  $\chi$  ser um mínimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma^*_i} = 0 \quad \text{para } i=1,2,\dots,p \quad (\text{A.7})$$

onde p é o número total de nós.

Portanto, para cada elemento, a matriz de suavização do elemento é dada pela matriz

$$Se = \begin{bmatrix} \iiint N_1 N_1 \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta & \dots & \iiint N_1 N_n \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ \dots & \dots & \dots \\ \iiint N_n N_1 \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta & \dots & \iiint N_n N_n \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

e associado a um vetor de “forças” do elemento dado por

$$Fe = \begin{Bmatrix} \iiint N_1 \sigma \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ \dots \\ \iiint N_n \sigma \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

O vetor de “forças” global F e a matriz de suavização global S são obtidos reunindo-se o vetor de “forças” de cada elemento Fe e a matriz de suavização de cada elemento Se, respectivamente.

O cálculo destas matrizes devem ser feitas utilizando as regras de integração numérica.

As tensões nodais suavizadas  $\sigma^*$  são obtidas resolvendo-se o sistema de equações:

$$F = S\sigma^* \quad (\text{A.10})$$

## **APÊNDICE B – EXEMPLO DE ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS**

## APÊNDICE B – EXEMPLO DE ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS

A aplicação dos comandos em Linguagem Orientada é exemplificada, neste item, através de um arquivo de entrada de dados referente ao exemplo da viga V1 do item 6.2.

TITULO "Viga Protendida com cordoalhas engraxadas interna"

DADOS DE ANALISE

NAO LINEARIDADE FISICA E GEOMETRICA

INCREMENTOS DE CARGA 200

PROPRIEDADES DO AMBIENTE

VARIACAO DA TEMPERATURA

PERIODO 30 TEMPERATURA 20

DADOS DA MALHA

TIPO DE ELEMENTO

1 ATE 12 HQ20

13 CEINTERNA3

14 ATE 97 APASSIVA

PONTOS DE INTEGRACAO 15

COORDENADAS MULTIPLAS

1 ATE	7 INICIO	0 0 0	FIM	210 0 0
8 ATE	14 INICIO	0 16 0	FIM	210 16 0
15 ATE	21 INICIO	0 0 14	FIM	210 0 14
22 ATE	28 INICIO	0 16 14	FIM	210 16 14
29 ATE	34 INICIO	17.5 0 0	FIM	192.5 0 0
35 ATE	41 INICIO	0 8 0	FIM	210 8 0
42 ATE	47 INICIO	17.5 16 0	FIM	192.5 16 0
48 ATE	53 INICIO	17.5 0 14	FIM	192.5 0 14
54 ATE	60 INICIO	0 8 14	FIM	210 8 14
61 ATE	66 INICIO	17.5 16 14	FIM	192.5 16 14
67 ATE	73 INICIO	0 0 7	FIM	210 0 7
74 ATE	80 INICIO	0 16 7	FIM	210 16 7
81 ATE	87 INICIO	0 0 28	FIM	210 0 28
88 ATE	94 INICIO	0 16 28	FIM	210 16 28
95 ATE	100 INICIO	17.5 0 28	FIM	192.5 0 28
101 ATE	107 INICIO	0 8 28	FIM	210 8 28
108 ATE	113 INICIO	17.5 16 28	FIM	192.5 16 28
114 ATE	120 INICIO	0 0 21	FIM	210 0 21
121 ATE	127 INICIO	0 16 21	FIM	210 16 21
134 ATE	153 INICIO	5 3 3	FIM	205 3 3
154 ATE	173 INICIO	5 3 25	FIM	205 3 25
174 ATE	193 INICIO	5 13 3	FIM	205 13 3
194 ATE	213 INICIO	5 13 25	FIM	205 13 25

COORDENADAS

128 0 8 6  
 129 210 8 6  
 130 0 3 3  
 131 210 3 3  
 132 0 13 25  
 133 210 13 25  
 214 0 13 3  
 215 210 13 3  
 216 0 3 25  
 217 210 3 25

#### CONETIVIDADES MULTIPLAS

1 ATE 6 NOS 1 2 9 8 15 16 23 22 29 36 42 35 48 55 61 54 67 68 75 74 PASSO 1  
 7 ATE 12 NOS 15 16 23 22 81 82 89 88 48 55 61 54 95 102 108 101 114 115 122

#### 121 PASSO 1

16 ATE 35 NOS 134 154 PASSO 1  
 36 ATE 55 NOS 174 194 PASSO 1  
 56 ATE 75 NOS 134 174 PASSO 1  
 76 ATE 95 NOS 154 194 PASSO 1

#### CONETIVIDADES

13 128 129  
 14 130 131  
 15 214 215  
 96 216 217  
 97 132 133

#### DADOS DE CARGA

##### CARREGAMENTO 1

DATA 28

PESO PROPRIO

TENSAO INICIAL NA ARMADURA

13 ANCORAGENS 1 35 8 67 74 15 54 22 114 121 81 101 88 TENSAO 96

##### CARGAS NODAIS

5 12 85 92 CARGA Z 4.1666666667  
 19 36 CARGA Z 8.3333333333  
 39 71 78 105 118 125 CARGA Z -16.6666666667  
 58 CARGA Z -33.3333333333

#### DADOS ESTRUTURAIS

##### PROPRIEDADES

1 ATE 12 FCM28 3.06 POISSON 0.2 CIMENTO 0 ESPESSURA FICTICIA 10.16

PESO -0.000025

13 E 20500 DIAMETRO 0.865 FPTK 179 ENDURECIMENTO 1 ATRITO 0.5

##### RELAXACAO 2

14 15 E 21000 DIAMETRO 1.0 FY 26.7

16 ATE 97 E 21000 DIAMETRO 0.63 FY 43

##### RESTRICOES NODAIS

1 8 35

INCOGNITAS Z

35

INCOGNITAS Y Z

7 41 14 73 80 21 60 28 120 127 87 107 94 INCOGNITAS X

FIM

## **APÊNDICE C – EXEMPLOS DO ARQUIVO DO GID**

## APÊNDICE C – EXEMPLO DE ARQUIVOS DO GID®

### C.1 Arquivo com extensão “.msh”

MESH "Malha dos Elementos de Concreto" dimension = 3 Elemtype Hexahedra Nnode = 20

Coordinates

1	0.000	0.000	0.000
2	100.000	0.000	0.000
3	100.000	100.000	0.000
4	0.000	100.000	0.000
5	0.000	0.000	100.000
6	100.000	0.000	100.000
7	100.000	100.000	100.000
8	0.000	100.000	100.000
9	50.000	0.000	0.000
10	100.000	50.000	0.000
11	50.000	100.000	0.000
12	0.000	50.000	0.000
13	50.000	0.000	100.000
14	100.000	50.000	100.000
15	50.000	100.000	100.000
16	0.000	50.000	100.000
17	0.000	0.000	50.000
18	100.000	0.000	50.000
19	100.000	100.000	50.000
20	0.000	100.000	50.000

End coordinates

Elements

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	17	18	19	20	13	14	15	16
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

End elements

MESH "Malha dos Elementos da Armadura" dimension = 3 Elemtype linear Nnode = 3

Coordinates

21	5.000	5.000	0.000
22	5.000	5.000	50.000
23	5.000	5.000	100.000
24	95.000	5.000	0.000
25	95.000	5.000	50.000
26	95.000	5.000	100.000
27	95.000	95.000	0.000

28	95.000	95.000	50.000
29	95.000	95.000	100.000
30	5.000	95.000	0.000
31	5.000	95.000	50.000
32	5.000	95.000	100.000

End coordinates

Elements

2	21	23	22
3	24	26	25
4	27	29	28
5	30	32	31

End elements

## C.2 Arquivo com extensão “.res”

GiD Post Results File 1.0

GaussPoints "PI Concr" ElemType Hexahedra

Number Of Gauss Points: 15

Natural Coordinates: given

0.0	0.0	0.0
+1.0	0.0	0.0
-1.0	0.0	0.0
0.0	+1.0	0.0
0.0	-1.0	0.0
0.0	0.0	+1.0
0.0	0.0	-1.0
+0.67	+0.67	+0.67
+0.67	+0.67	-0.67
+0.67	-0.67	+0.67
+0.67	-0.67	-0.67
-0.67	+0.67	+0.67
-0.67	+0.67	-0.67
-0.67	-0.67	+0.67
-0.67	-0.67	-0.67

end gausspoints

GaussPoints "PI Arm" ElemType Linear

Number Of Gauss Points: 3

Nodes not included

Natural Coordinates: internal

end gausspoints

Result "DESLOCAMENTOS" "Load Analysis" 1 Vector OnNodes  
ComponentNames "X-DESL", "Y-DESL", "Z-DESL"

Values

1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	-0.10740E-02	-0.10740E-02	-0.31362E-01
6	0.10740E-02	-0.10740E-02	-0.31362E-01
7	0.10740E-02	0.10740E-02	-0.31362E-01
8	-0.10740E-02	0.10740E-02	-0.31362E-01
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
11	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
12	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
13	-0.66801E-17	-0.10717E-02	-0.31195E-01
14	0.10717E-02	0.32890E-16	-0.31195E-01
15	0.35548E-17	0.10717E-02	-0.31195E-01
16	-0.10717E-02	0.29179E-16	-0.31195E-01
17	-0.98002E-03	-0.98002E-03	-0.15610E-01
18	0.98002E-03	-0.98002E-03	-0.15610E-01
19	0.98002E-03	0.98002E-03	-0.15610E-01
20	-0.98002E-03	0.98002E-03	-0.15610E-01
21	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
22	-0.88183E-03	-0.88183E-03	-0.15578E-01
23	-0.96619E-03	-0.96619E-03	-0.31299E-01
24	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
25	0.88183E-03	-0.88183E-03	-0.15578E-01
26	0.96619E-03	-0.96619E-03	-0.31299E-01
27	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
28	0.88183E-03	0.88183E-03	-0.15578E-01
29	0.96619E-03	0.96619E-03	-0.31299E-01
30	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
31	-0.88183E-03	0.88183E-03	-0.15578E-01
32	-0.96619E-03	0.96619E-03	-0.31299E-01

End Values

Result "Tensões PI Concr" "Load Analysis" 1 Matrix OnGaussPoints "PI Concr"

Values

1	-0.5354E-02	-0.5354E-02	-0.9945E+00	-0.78E-16	-0.18E-15	0.92E-16
	-0.6047E-02	-0.5969E-02	-0.9993E+00	-0.97E-16	0.78E-17	0.12E-01
	-0.6047E-02	-0.5969E-02	-0.9993E+00	-0.57E-16	0.20E-16	-0.12E-01
	-0.5969E-02	-0.6047E-02	-0.9993E+00	-0.78E-16	0.12E-01	-0.58E-16



-0.5969E-02	-0.6047E-02	-0.9993E+00	-0.86E-16	-0.12E-01	-0.12E-15
-0.2603E-03	-0.2603E-03	-0.1001E+01	0.24E-15	0.15E-15	0.78E-16
-0.6908E-01	-0.6908E-01	-0.1002E+01	-0.39E-25	0.25E-15	-0.47E-16
0.3921E-02	0.3921E-02	-0.1002E+01	0.11E-03	-0.75E-02	-0.75E-02
-0.4258E-01	-0.4258E-01	-0.1002E+01	0.23E-04	0.24E-01	0.24E-01
0.3921E-02	0.3921E-02	-0.1002E+01	-0.11E-03	0.75E-02	-0.75E-02
-0.4258E-01	-0.4258E-01	-0.1002E+01	-0.23E-04	-0.24E-01	0.24E-01
0.3921E-02	0.3921E-02	-0.1002E+01	-0.11E-03	-0.75E-02	0.75E-02
-0.4258E-01	-0.4258E-01	-0.1002E+01	-0.23E-04	0.24E-01	-0.24E-01
0.3921E-02	0.3921E-02	-0.1002E+01	0.11E-03	0.75E-02	0.75E-02
-0.4258E-01	-0.4258E-01	-0.1002E+01	0.23E-04	-0.24E-01	-0.24E-01

End Values

Result "Deformações PI Concr" "Load Analysis" 1 Matrix OnGaussPoints "PI Concr"  
Values

1	0.1958E-04	0.1958E-04	-0.3103E-03	-0.40E-19	0.81E-19	0.13E-18
	0.1958E-04	0.1960E-04	-0.3119E-03	-0.54E-19	0.81E-19	0.73E-05
	0.1958E-04	0.1960E-04	-0.3119E-03	-0.27E-19	0.10E-18	-0.73E-05
	0.1960E-04	0.1958E-04	-0.3119E-03	-0.59E-19	0.73E-05	-0.27E-19
	0.1960E-04	0.1958E-04	-0.3119E-03	-0.24E-19	-0.73E-05	-0.54E-19
	0.2143E-04	0.2143E-04	-0.3131E-03	0.13E-18	0.45E-18	0.14E-18
	0.000E+00	0.000E+00	-0.3074E-03	0.00E+00	0.15E-18	-0.16E-19
	0.2279E-04	0.2279E-04	-0.3137E-03	0.67E-07	-0.46E-05	-0.46E-05
	0.8328E-05	0.8328E-05	-0.3099E-03	0.13E-07	0.14E-04	0.14E-04
	0.2279E-04	0.2279E-04	-0.3137E-03	-0.67E-07	0.46E-05	-0.46E-05
	0.8328E-05	0.8328E-05	-0.3099E-03	-0.13E-07	-0.14E-04	0.14E-04
	0.2279E-04	0.2279E-04	-0.3137E-03	-0.67E-07	-0.46E-05	0.46E-05
	0.8328E-05	0.8328E-05	-0.3099E-03	-0.13E-07	0.14E-04	-0.14E-04
	0.2279E-04	0.2279E-04	-0.3137E-03	0.67E-07	0.46E-05	0.46E-05
	0.8328E-05	0.8328E-05	-0.3099E-03	0.13E-07	-0.14E-04	-0.14E-04

End Values

Result "Tensoes PI Arm" "Load Analysis" 1 Scalar OnGaussPoints "PI Arm"  
Values

2	-0.2463E-01
	-0.2864E-01
	-0.3264E-01
3	-0.2463E-01
	-0.2864E-01
	-0.3264E-01
4	-0.2463E-01
	-0.2864E-01
	-0.3264E-01
5	-0.2463E-01

-0.2864E-01  
 -0.3264E-01  
 End Values

Result "Deformacoes PI Arm" "Load Analysis" 1 Scalar OnGaussPoints "PI Arm"  
 Values

2 -0.3108E-03  
 -0.3130E-03  
 -0.3152E-03  
 3 -0.3108E-03  
 -0.3130E-03  
 -0.3152E-03  
 4 -0.3108E-03  
 -0.3130E-03  
 -0.3152E-03  
 5 -0.3108E-03  
 -0.3130E-03  
 -0.3152E-03

End Values

Result "Tensoes NOS Concreto" "Load Analysis" 1 Matrix OnNodes

Values

1	-0.7067E-01	-0.7067E-01	-0.1011E+01	0.85E-04	-0.79E-01	-0.79E-01
2	-0.7067E-01	-0.7067E-01	-0.1011E+01	-0.85E-04	-0.79E-01	0.79E-01
3	-0.7067E-01	-0.7067E-01	-0.1011E+01	0.85E-04	0.79E-01	0.79E-01
4	-0.7067E-01	-0.7067E-01	-0.1011E+01	-0.85E-04	0.79E-01	-0.79E-01
5	-0.1518E-02	-0.1518E-02	-0.1011E+01	0.50E-03	0.54E-01	0.54E-01
6	-0.1518E-02	-0.1518E-02	-0.1011E+01	-0.50E-03	0.54E-01	-0.54E-01
7	-0.1518E-02	-0.1518E-02	-0.1011E+01	0.50E-03	-0.54E-01	-0.54E-01
8	-0.1518E-02	-0.1518E-02	-0.1011E+01	-0.50E-03	-0.54E-01	0.54E-01
9	-0.6985E-01	-0.6993E-01	-0.1006E+01	-0.16E-17	-0.31E-01	-0.11E-15
10	-0.6993E-01	-0.6985E-01	-0.1006E+01	-0.19E-17	0.35E-15	0.31E-01
11	-0.6985E-01	-0.6993E-01	-0.1006E+01	-0.20E-17	0.31E-01	-0.27E-15
12	-0.6993E-01	-0.6985E-01	-0.1006E+01	0.24E-17	0.42E-15	-0.31E-01
13	-0.8630E-03	-0.9408E-03	-0.1006E+01	0.20E-15	0.67E-02	-0.25E-16
14	-0.9408E-03	-0.8630E-03	-0.1006E+01	0.21E-15	0.16E-15	-0.67E-02
15	-0.8630E-03	-0.9408E-03	-0.1006E+01	0.27E-15	-0.67E-02	-0.37E-15
16	-0.9408E-03	-0.8630E-03	-0.1006E+01	0.27E-15	0.57E-15	0.67E-02
17	-0.6736E-02	-0.6736E-02	-0.1004E+01	0.84E-04	-0.12E-01	-0.12E-01
18	-0.6736E-02	-0.6736E-02	-0.1004E+01	-0.84E-04	-0.12E-01	0.12E-01
19	-0.6736E-02	-0.6736E-02	-0.1004E+01	0.84E-04	0.12E-01	0.12E-01
20	-0.6736E-02	-0.6736E-02	-0.1004E+01	-0.84E-04	0.12E-01	-0.12E-01

End Values

Result "Deformacoes NOS Concreto" "Load Analysis" 1 Matrix OnNodes

Values

1	0.1343E-08	0.1343E-08	-0.3108E-03	0.48E-07	-0.47E-04	-0.47-04
2	0.1343E-08	0.1343E-08	-0.3108E-03	-0.48E-07	-0.47E-04	0.47E-04
3	0.1343E-08	0.1343E-08	-0.3108E-03	0.48E-07	0.47E-04	0.47E-04
4	0.1343E-08	0.1343E-08	-0.3108E-03	-0.48E-07	0.47E-04	-0.47E-04
5	0.2148E-04	0.2148E-04	-0.3165E-03	0.29E-06	0.32E-04	0.32E-04
6	0.2148E-04	0.2148E-04	-0.3165E-03	-0.29E-06	0.32E-04	-0.32E-04
7	0.2148E-04	0.2148E-04	-0.3165E-03	0.29E-06	-0.32E-04	-0.32E-04
8	0.2148E-04	0.2148E-04	-0.3165E-03	-0.29E-06	-0.32E-04	0.32E-04
9	0.1142E-07	-0.1075E-07	-0.3091E-03	0.37E-20	-0.18E-04	-0.24E-19
10	-0.1075E-07	0.1142E-07	-0.3091E-03	-0.37E-20	0.11E-18	0.18E-04
11	0.1142E-07	-0.1075E-07	-0.3091E-03	-0.11E-19	0.18E-04	-0.13E-18
12	-0.1075E-07	0.1142E-07	-0.3091E-03	-0.22E-20	0.10E-18	-0.18E-04
13	0.2147E-04	0.2145E-04	-0.3148E-03	0.12E-18	0.41E-05	0.11E-18
14	0.2145E-04	0.2147E-04	-0.3148E-03	0.12E-18	0.47E-18	-0.41E-05
15	0.2147E-04	0.2145E-04	-0.3148E-03	0.15E-18	-0.41E-05	0.16E-19
16	0.2145E-04	0.2147E-04	-0.3148E-03	0.16E-18	0.41E-18	0.41E-05
17	0.1960E-04	0.1960E-04	-0.3136E-03	0.48E-07	-0.73E-05	-0.73E-05
18	0.1960E-04	0.1960E-04	-0.3136E-03	-0.48E-07	-0.73E-05	0.73E-05
19	0.1960E-04	0.1960E-04	-0.3136E-03	0.48E-07	0.73E-05	0.73E-05
20	0.1960E-04	0.1960E-04	-0.3136E-03	-0.48E-07	0.73E-05	-0.73E-05

End Values

Result "Tensoes NOS Armadura" "Load Analysis" 1 Scalar OnNodes

Values

21	-0.2347E-01
22	-0.2864E-01
23	-0.3381E-01
24	-0.2347E-01
25	-0.2864E-01
26	-0.3381E-01
27	-0.2347E-01
28	-0.2864E-01
29	-0.3381E-01
30	-0.2347E-01
31	-0.2864E-01
32	-0.3381E-01

End Values

Result "Deformacoes NOS Armadura" "Load Analysis" 1 Scalar OnNodes

Values

21	-0.3101E-03
22	-0.3130E-03
23	-0.3158E-03
24	-0.3101E-03

25 -0.3130E-03  
26 -0.3158E-03  
27 -0.3101E-03  
28 -0.3130E-03  
29 -0.3158E-03  
30 -0.3101E-03  
31 -0.3130E-03  
32 -0.3158E-03

End Values