

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Explorando Modelos Matemáticos para o  
Manejo Integrado de Pragas (MIP)  
Incluindo Otimização**

por

Priscila Azevedo da Silveira

Tese submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Cristina Varriale  
Orientadora

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cláudia Pio Ferreira  
Coorientadora

Porto Alegre, novembro de 2014.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Azevedo da Silveira, Priscila

Explorando Modelos Matemáticos para o Manejo Integrado de Pragas (MIP) Incluindo Otimização / Priscila Azevedo da Silveira.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2014.

112 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2014.

Orientadora: Varriale, Maria Cristina; Coorientadora: Ferreira, Cláudia Pio

Linha de Pesquisa: Sistemas Não Lineares e Aplicações

Palavras Chave: Ecologia Matemática, Manejo Integrado de Pragas, Controle Ótimo

# Explorando Modelos Matemáticos para o Manejo Integrado de Pragas (MIP) Incluindo Otimização

por

Priscila Azevedo da Silveira

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas Não Lineares e Aplicações

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Cristina Varriale

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cláudia Pio Ferreira

Banca examinadora:

Dra. Diomar Cristina Mistro  
PPGMat - UFSM

Dr. Jacques Aveline Loureiro da Silva  
PPGMAp - UFRGS

Dr. Wesley Augusto Conde Godoy  
ESALQ - USP

Tese apresentada  
21/11/2014.

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Cristina Varriale  
Coordenadora

## Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 MODELO PARA DESCREVER A DINÂMICA NATURAL LOCAL DE UMA PRAGA E DE SEU PREDADOR/PARASITÓIDE</b>	<b>7</b>
<b>2.1 Formulação do sistema e seus pontos de equilíbrio</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>2.2 Estabilidade local dos pontos de equilíbrio</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio de coexistência e a existência de ciclo limite</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2.4 Simulações numéricas</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.5 Análise de sensibilidade</b> . . . . .	<b>17</b>
2.5.1 Análise de sensibilidade dos números $R_0$ , $R_1$ e $R_2$ . . . . .	<b>18</b>
2.5.2 Análise de sensibilidade dos equilíbrios $E_1$ e $E_2$ . . . . .	<b>22</b>
2.5.3 Análise de sensibilidade do ciclo limite . . . . .	<b>26</b>
<b>2.6 Síntese dos resultados do capítulo</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>3 MODELO PARA CONTROLE DA PRAGA INCLUINDO MANEJO INTEGRADO DE PRAGAS (MIP)</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>3.1 Formulação do modelo</b> . . . . .	<b>33</b>

3.1.1	Caso I . . . . .	33
3.1.2	Caso II . . . . .	34
<b>3.2</b>	<b>Simulações . . . . .</b>	<b>34</b>
3.2.1	Densidades populacionais com MIP . . . . .	35
3.2.2	O intervalo médio de tempo entre as aplicações do MIP . . . . .	37
<b>3.3</b>	<b>Síntese dos resultados do capítulo . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>MODELO PARA CONTROLE DA PRAGA INCLUINDO MIP E ESTRUTURA ESPACIAL . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Formulação do modelo com estrutura espacial . . . . .</b>	<b>45</b>
4.1.1	Dispersão por difusão . . . . .	47
4.1.2	Dispersão orientada - taxia local . . . . .	48
4.1.3	Dispersão orientada - taxia quase local . . . . .	49
<b>4.2</b>	<b>Formulação do modelo com MIP e estrutura espacial . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>4.3</b>	<b>Simulações . . . . .</b>	<b>53</b>
4.3.1	Dispersão por difusão . . . . .	53
4.3.2	Dispersão por difusão e MIP . . . . .	57
4.3.3	Dispersão orientada - taxia local . . . . .	60
4.3.4	Dispersão orientada - taxia local e MIP . . . . .	62
4.3.5	Dispersão orientada - taxia quase local . . . . .	63
4.3.6	Dispersão orientada - taxia quase local e MIP . . . . .	65
<b>4.4</b>	<b>Síntese dos resultados do capítulo . . . . .</b>	<b>67</b>

<b>5</b>	<b>MODELO PARA CONTROLE ÓTIMO DA PRAGA . . . . .</b>	<b>70</b>
5.1	Formulação do problema de controle ótimo . . . . .	70
5.2	Resolução do problema de controle ótimo . . . . .	72
5.3	Simulações do controle ótimo sem estrutura espacial . . . . .	76
5.4	Inclusão da estrutura espacial no modelo . . . . .	79
5.5	Simulações do controle ótimo com estrutura espacial . . . . .	80
5.6	Síntese dos resultados do capítulo . . . . .	89
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>SUBCONJUNTOS DA BACIA DE ATRAÇÃO DO EQUILÍBRIO DE COEXISTÊNCIA . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>CONDIÇÃO PARA UMA BIFURCAÇÃO DE HOPF . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A OTIMA- LIDADE . . . . .</b>	<b>101</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>108</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1	Diagramas de bifurcação para (a) $n$ e (b) $p$ , em função do parâmetro $a$ . . . . .	16
Figura 2.2	Espaço de fase para $a = 8$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ (ciclo limite). . . . .	16
Figura 2.3	(a) $\gamma_b^{R_0}$ como função de $b$ para $c_1 = 0.2$ ; (b) $\gamma_{c_1}^{R_0}$ como função de $c_1$ para $b = 0.7$ . . . . .	18
Figura 2.4	(a) $\gamma_a^{R_1}$ , (b) $\gamma_b^{R_1}$ , (c) $\gamma_{c_1}^{R_1}$ , (d) $\gamma_{c_2}^{R_1}$ e (e) $\gamma_d^{R_1}$ ; $a = 2$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ . . . . .	19
Figura 2.5	(a) $\gamma_b^{R_2}$ , (b) $\gamma_d^{R_2}$ , (c) $\gamma_{c_1}^{R_2}$ e (d) $\gamma_{c_2}^{R_2}$ ; $a = 2$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ . . . . .	21
Figura 2.6	(a) $\gamma_a^{R_2}$ , (b) $\gamma_{c_3}^{R_2}$ e (c) $\gamma_e^{R_2}$ ; $a = 2$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ . . . . .	22
Figura 2.7	(a) $\gamma_b^{f^*}$ , com $a = 1$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ ; (b) $\gamma_{c_3}^{n_2^*}$ como função de $c_3$ para $e = 0.4$ ; (c) $\gamma_e^{n_2^*}$ como função de $e$ para $c_3 = 0.2$ . . . . .	23
Figura 2.8	(a) $\gamma_a^{p_2^*}$ , (b) $\gamma_b^{p_2^*}$ , (c) $\gamma_d^{p_2^*}$ e (d) $\gamma_e^{p_2^*}$ ; $a = 2$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ . . . . .	24
Figura 2.9	(a) $\gamma_{c_1}^{p_2^*}$ , (b) $\gamma_{c_2}^{p_2^*}$ e (c) $\gamma_{c_3}^{p_2^*}$ ; $a = 2$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ . . . . .	25
Figura 2.10	“Índices de sensibilidade” dos valores máximo e mínimo que uma densidade populacional ( $n$ , $f$ ou $p$ ) assume no ciclo limite, em relação ao parâmetro indicado, sendo todos os outros parâmetros fixados; $a = 8$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ . . . . .	27

Figura 2.11	“Índices de sensibilidade” dos valores máximo e mínimo que uma densidade populacional ( $n$ , $f$ ou $p$ ) assume no ciclo limite, em relação ao parâmetro indicado, sendo todos os outros parâmetros fixados; $a = 8$ , $b = 0.7$ , $c_1 = 0.2$ , $c_2 = 0.3$ , $c_3 = 0.2$ , $d = 0.7$ e $e = 0.4$ . . . . .	28
Figura 3.1	Densidades de pragas $n$ e $f$ e de predadores/parasitóides $p$ considerando MIP - Caso I - $LE = 1$ e $\rho = 0.5$ ; conjunto de parâmetros A. . . . .	35
Figura 3.2	Conjunto de parâmetros B; MIP - Caso I - $LE = 3$ e $\rho = 0.5$ ; (a) densidades de pragas $n$ e $f$ e de predadores/parasitóides $p$ ; (b) espaço de fase. . . . .	36
Figura 3.3	Conjunto de parâmetros A; MIP - Caso II - $\zeta = 0$ ; (a), (b) e (c) $\Delta t \times LE$ com $\rho = 0.3$ , 1 e 5, respectivamente; (d) $m_a \times LE$ com $\rho = 1$ . . . . .	38
Figura 3.4	Conjunto de parâmetros B; MIP - Caso I; (a), (b) e (c) $\Delta t \times LE$ com $\rho = 1$ , 5 e 10, respectivamente; (d) $m_a \times LE$ com $\rho = 1$ . . . . .	40
Figura 3.5	(a) e (b) conjunto de parâmetros A; (c) e (d) conjunto de parâmetros B. . . . .	42
Figura 4.1	(a) e (b) coeficientes de dispersão $D_f$ e $D_p$ , dependentes das densidades $p$ e $n$ , respectivamente. . . . .	49
Figura 4.2	Densidades populacionais $n$ , $f$ e $p$ para o conjunto de parâmetros A com $D_f = D_p = 0.5$ . . . . .	54
Figura 4.3	Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com $D_f = D_p = 0.5$ . . . . .	54

- Figura 4.4 Conjunto de parâmetros A; densidades de equilíbrio obtidas após 500 iterações temporais; (a) densidades de equilíbrio  $f^* \approx 1.63$  e  $p^* \approx 1.46$  no sítio central da malha  $x = (28, 28)$ , como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades de equilíbrio de todos os sítios da malha como função de  $D_f$  e  $D_p$  ( $\sum f^* \approx 4931$  e  $\sum p^* \approx 4417$ ). 55
- Figura 4.5 Densidades populacionais  $n$ ,  $f$  e  $p$ , para o conjunto de parâmetros B com  $D_f = D_p = 0.5$ . . . . . 55
- Figura 4.6 Conjunto de parâmetros B; (a) densidades máxima e mínima da população  $f$ , em  $t = 1000$ , no sítio central da malha  $x = (28, 28)$ , como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades máxima e mínima da população  $f$  de todos os sítios da malha, em  $t = 1000$ , como função de  $D_f$  e  $D_p$ . . . . . 56
- Figura 4.7 Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com  $D_f = D_p = 0.5$ . . 57
- Figura 4.8 Densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$  no sítio central da malha  $x = (28, 28)$ ; (a) conjunto de parâmetros A e MIP com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ ; (b) conjunto de parâmetros B e MIP com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ . . . . . 58
- Figura 4.9 Distribuição espacial das populações, em  $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros A e MIP com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ . . . . . 59
- Figura 4.10 Distribuição espacial das populações em  $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros B e MIP com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ . . . . . 59
- Figura 4.11 Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com taxia local. . . . . 61
- Figura 4.12 Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com taxia local. . . . . 61

Figura 4.13	Densidades $n$ , $f$ e $p$ no sítio central da malha $x = (28, 28)$ ; (a) conjunto de parâmetros A e MIP com $LE = 1$ e $\rho = 0.3$ ; (b) conjunto de parâmetros B e MIP com $LE = 2.5$ e $\rho = 2$ . . . . .	62
Figura 4.14	Distribuição espacial das populações em $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros A e MIP com $LE = 1$ e $\rho = 0.3$ . . . . .	63
Figura 4.15	Distribuição espacial das populações em $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros B e MIP com $LE = 2.5$ e $\rho = 2$ . . . . .	63
Figura 4.16	Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com taxia quase local. . . . .	64
Figura 4.17	Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com taxia quase local. . . . .	65
Figura 4.18	Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com MIP ( $LE = 1$ e $\rho = 0.3$ ) e taxia quase local. . . . .	66
Figura 4.19	Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com MIP ( $LE = 2.5$ e $\rho = 2$ ) e taxia quase local. . . . .	67
Figura 5.1	(a) e (b) comportamentos das populações ao longo do tempo para os conjuntos de parâmetros A e B, respectivamente. . . . .	77
Figura 5.2	Densidades de pragas $n$ (linha azul) e $f$ (linha vermelha) e de predadores/parasitóides $p$ (linha preta) em tempos transientes; dinâmica natural: sem aplicação das técnicas de controle (linhas pontilhadas); dinâmica com aplicação das técnicas de controle ótimo (linhas contínuas); conjunto de parâmetros A. . . . .	78

- Figura 5.3 (a) Densidades de pragas  $n$  (linha azul) e  $f$  (linha vermelha) e de predadores/parasitóides  $p$  (linha preta) em tempos transientes; dinâmica natural: sem aplicação das técnicas de controle (linhas pontilhadas); dinâmica com aplicação das técnicas de controle ótimo (linhas contínuas); (b) zoom destacando as densidades de pragas nos estágios  $n$  (linha azul) e  $f$  (linha vermelha) com aplicação das técnicas de controle ótimo; conjunto de parâmetros B. 79
- Figura 5.4 Conjunto de parâmetros A; densidades obtidas após 500 iterações temporais; (a) densidades de equilíbrio  $f^* \approx 0.37$  e  $p^* \approx 0.96$  no sítio central da malha, como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades de equilíbrio de todos os sítios como função de  $D_f$  e  $D_p$  ( $\sum f^* \approx 1119$  e  $\sum p^* \approx 2904$ ). . . . . 82
- Figura 5.5 Conjunto de parâmetros B; densidades obtidas após 500 iterações temporais; (a) densidades de equilíbrio  $f^* \approx 0.27$  e  $p^* \approx 7.92$  no sítio central da malha, como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades de equilíbrio de todos os sítios como função de  $D_f$  e  $D_p$  ( $\sum f^* \approx 817$  e  $\sum p^* \approx 23958$ ). . . . . 83
- Figura 5.6 (a) e (b) densidades ao longo do tempo para os conjuntos de parâmetros A e B, respectivamente; dispersão por taxia local. . . . 84
- Figura 5.7 Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A; dispersão por taxia local. . . . . 84
- Figura 5.8 Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B; dispersão por taxia local. . . . . 85
- Figura 5.9 Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B; dispersão por taxia quase local. . . . . 86

- Figura 5.10 (a), (b) e (c) densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$ , quando as populações são medidas em aproximadamente 10%, 33% e 50% dos sítios da malha, respectivamente; conjunto de parâmetros A; dispersão por taxia quase local. . . . . 87
- Figura 5.11 Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, quando as populações são medidas em aproximadamente 33% dos sítios da malha; conjunto de parâmetros A; dispersão por taxia quase local. . . . . 88

## RESUMO

Partindo de um modelo para descrever a evolução temporal das populações de uma praga e de seu inimigo natural, determinamos os seus equilíbrios, e condições de estabilidade dos mesmos; investigamos também a possibilidade de ocorrer uma bifurcação de Hopf e conseqüentemente ciclos-limite. Antes de incluir no modelo a aplicação do controle de pragas, desenvolvemos uma análise de sensibilidade de certos números característicos do sistema.

Em seguida, acoplamos ao modelo uma estratégia de Manejo Integrado de Pragas (MIP) que consiste na aplicação de inseticida e na liberação de inimigos naturais da praga, sempre que a densidade de pragas ultrapassar um Limiar Econômico; verificamos que, assim, a população de pragas é mantida em níveis toleráveis. Adicionalmente, formulamos um problema de controle ótimo, que é resolvido através da aplicação do princípio do máximo de Pontryagin.

Por fim, acrescentamos uma estrutura espacial discreta aos modelos propostos, com diferentes regras de movimentação para as populações (difusão, taxia local e taxia quase local), e aplicamos as técnicas de controle a estes modelos.

## ABSTRACT

Starting from a model to describe the temporal evolution of a pest and its natural enemy, their equilibrium and stability conditions are studied; the possibility of Hopf bifurcation and thereby limit cycles is also investigated. Before including the application of pest control, we develop a sensitivity analysis of certain characteristic numbers of the system.

Then we include an Integrated Pest Management (IPM) strategy, consisting of insecticide application and natural enemies release, whenever the pest density exceeds an Economic Threshold; we verify that in fact the pest population is kept within tolerable levels. Additionally, we formulate a problem of optimal control, which is solved by applying the Pontryagin maximum principle.

Finally, a discrete spatial structure is proposed, with different movement rules (diffusion, local taxis and almost local taxis) models, and control techniques are applied to these models.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Luiz Carlos e Neusa pelo carinho e incentivo incondicionais ao longo de toda a minha trajetória acadêmica.

À Professora Maria Cristina Varriale pela orientação, apoio e incentivo no desenvolvimento deste trabalho.

À Professora Cláudia Pio Ferreira pela coorientação e pelas importantes colaborações no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Marcus Aloizio Martinez de Aguiar pelas sugestões feitas no exame de qualificação.

A todos os amigos e familiares que colaboraram de alguma forma para a concretização deste trabalho.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

# 1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de sistemas ecológicos exerce um papel fundamental na descrição da dinâmica populacional dos indivíduos envolvidos nestes sistemas (Goh, 1980). Aplicada a problemas de controle biológico de pragas, ela permite uma avaliação qualitativa e quantitativa do comportamento da praga e do seu inimigo natural. Modelos matemáticos podem ser usados para determinar as condições necessárias para a estabilidade de sistemas presa-predador ou parasitóide-hospedeiro (Rafikov et al., 2008). Além disso, permitem a visualização de padrões ecológicos, podendo revelar padrões de persistência populacional, surtos ou extinções (Lima et al., 2009). Inúmeros modelos matemáticos envolvendo as relações clássicas presa-predador e parasitóide-hospedeiro foram e são constantemente formulados com o objetivo de analisar o comportamento das mais diversas populações biológicas presentes no ecossistema terrestre.

Alguns seres biológicos, que hoje podem ser considerados pragas, já existiam muito antes da civilização humana, mas sua presença passou a ser danosa devido ao desequilíbrio ecológico provocado pelo próprio homem. Desde então, buscamos soluções que levem ao controle da disseminação das pragas nas suas diversas formas de apresentação: doenças, danos aos alimentos e ao ambiente de modo geral, entre outras. De acordo com Norris et al. (2003), em agroecossistemas, **pragas** são todos os organismos dentro do ambiente da cultura que causam alguma lesão a esta cultura e são capazes de reduzir seu rendimento ou qualidade. As lesões ocorrem, geralmente, em resposta a altas densidades populacionais do organismo que então é considerado uma praga.

As mudanças climáticas atuais, em sua maioria causadas pelo aquecimento global, afetam a biodiversidade de modo que as espécies acabam tendo que se adaptar a novos regimes climáticos ou procurar locais mais adequados. O estabelecimento de determinadas espécies de insetos exóticos em novas regiões muitas vezes

leva a consequências ecológicas e econômicas significativamente negativas (Qureshi, et al., 2009).

Por muito tempo, as técnicas de combate utilizadas no controle de pragas baseavam-se, essencialmente, no uso de inseticidas; porém o uso constante e de maneira indiscriminada fez com que, em algumas culturas, muitas pragas conquistassem resistência a este tipo de controle. Isso tem sido registrado em mais de 500 espécies de insetos em todo o mundo, de modo que o uso de pesticidas químicos não tem bons resultados no combate às pragas (Bhattacharyya & Bhattacharya, 2006). Além disso, o uso excessivo de inseticidas causa prejuízos ecológicos como o decréscimo das populações de inimigos naturais das pragas e resíduos indesejados em frutas e vegetais. Estes problemas são particularmente severos em países em desenvolvimento, onde o uso de pesticida é mal regulamentado e os agricultores frequentemente não têm informações ou treinamento apropriados.

Reunidos, estes fatores tiveram como consequência a busca de novos métodos de controle, surgindo como opção o Manejo Integrado de Pragas (MIP), que está se tornando cada vez mais e mais popular entre os agricultores, pesquisadores e formuladores de políticas. O MIP é uma estratégia de controle de longo prazo, que pode associar táticas da biologia, da química, bem como de cultivo, e cujo objetivo não é o de erradicar completamente a população de pragas, mas sim reduzi-la a níveis toleráveis. Um importante conceito envolvido no Manejo Integrado de Pragas é o de Limiar Econômico (LE). O Limiar Econômico é usualmente definido como o número de pragas no ambiente, a partir do qual a ação de controle deve ser tomada para evitar que o Nível de Lesão Econômica (NLE) seja alcançado ou excedido. O Nível de Lesão Econômica é a menor densidade populacional de pragas que causa algum dano econômico (Norris et al., 2003; Tang et al., 2005; Tang et al., 2008; Radcliffe et al., 2009). O LE é um valor complexo, difícil de ser deduzido e requer a estimativa e previsão de diversos parâmetros diferentes (Metcalf & Luckmann, 1994). As incertezas envolvidas, particularmente nas taxas de crescimento da população de pragas, tornam a maioria dos valores estimados para LE pouco precisos (Tang & Cheke, 2008).

Experimentalmente a estratégia de controle através do MIP, além de resultar na redução da quantidade de inseticida a ser utilizada, tem se mostrado mais efetiva do que os métodos clássicos, tais como apenas controle biológico ou apenas controle químico. De acordo com Graça (1991), estratégias de controle integrado são, claramente, mais efetivas.

A escolha da estratégia de controle para uma praga está fortemente ligada à biologia da praga e sua interação com a cultura e o ambiente. Para contornar os efeitos nocivos do uso excessivo de pesticidas agrícolas no ambiente e na saúde humana, o controle biológico vem servindo como uma alternativa ao uso de produtos químicos no combate às pragas (Bhattacharyya & Bhattacharya, 2007). Porém o uso de inseticidas é, ainda hoje, considerado indispensável no controle de pragas. No Brasil, existem poucos casos de controle de pragas onde não se usa mais sistematicamente inseticidas; isto ocorre, por exemplo, com a broca da cana-de-açúcar (*Diatraea saccharalis*) que é praticamente controlada apenas com parasitóides (Polanczyk et al., 2004).

Existem diversas formas através das quais programas de MIP podem ser incorporados a modelos matemáticos que descrevam a dinâmica natural de sistemas presa-predador ou parasitóide-hospedeiro. Neste trabalho, adotamos uma estratégia de MIP para o controle da praga, que consiste na associação das técnicas de controle químico (através da aplicação de pesticida) e de controle biológico (liberação de inimigos naturais). Esta estratégia é, em um primeiro momento, incorporada ao modelo fornecendo novas condições iniciais a cada vez que a população de pragas atinge um LE fixado. Mais detalhes da formulação matemática da aplicação destas técnicas de controle serão apresentados ao longo do trabalho.

Outra forma através da qual modelos matemáticos podem ser usados no controle de pragas, é a formulação de estratégias de controle ótimo, através da manipulação dinâmica das variáveis de controle da praga e dos inimigos naturais (Rafikov et al., 2008). A teoria de controle ótimo abrange poderosas técnicas de otimização fornecidas pelo cálculo de variações. As técnicas da teoria de controle ótimo, em particular o famoso princípio do máximo de Pontryagin, são consequências

e extensões do cálculo de variações clássico de Euler, Lagrange, Legendre, Weierstrass, Hamilton e Jacob (Clark, 1976).

Estratégias de controle ótimo podem ser consideradas programas de MIP considerando a otimalidade de alguns critérios e restrições envolvidos nestes processos. Em uma estratégia de controle de pragas, a teoria de controle ótimo pode determinar qual é a maneira mais eficiente de distribuir os controles disponíveis para que o custo associado às ferramentas de controle e aos danos que esta praga causa à cultura e ao ambiente sejam minimizados e, para que o lucro líquido do processo seja maximizado (Ghosh & Bhattacharya, 2010).

O controle de pragas, através do MIP e/ou das estratégias de controle ótimo, pode ser utilizado nas mais diversas culturas. Os sistemas que estamos propondo podem ser utilizados para modelar as interações entre diversos tipos de pragas e seu respectivo predador/parasitóide. Como exemplo podemos citar: o pulgão *Aphis gossypii glover* (Homoptera: aphididae), praga das culturas de algodão, e as joaninhas que são suas predadoras (Sujii et al., 2007); percevejos (*Nezara viridula*, *Piezodorus guildinii* e *Euchistus heros*), pragas da soja, e as vespas que parasitam seus ovos (*Trissolcus basalus* e *Telenomus podisi*) (Corrêa-Ferreira, 1993); pragas das culturas de pêssego (como mosca-das-frutas sul-americana *Anastrepha fraterculus* (Diptera: Tephritidae) e a mariposa oriental *Grapholita molesta* (Lepidoptera: Tortricidae)) e insetos predadores da espécie *Chrysoperla externa* (Castilhos et al., 2011); a *Diaphorina citri*, praga de culturas cítricas, e seu predador/parasitóide *Tamarixia Radiata* (Paiva & Parra, 2012).

Quando tratamos de modelagem matemática em sistemas ecológicos, a evolução temporal das espécies é, em geral, o primeiro elemento a ser analisado. Porém, além da evolução temporal, é importante considerarmos a distribuição espacial e a maneira como as espécies envolvidas se movimentam no espaço onde elas estão situadas. Quando analisamos apenas a evolução temporal das populações, estamos supondo a homogeneidade espacial do ambiente. Nestes casos, trabalhamos com modelos com uma única variável independente, o tempo. Para considerarmos a distribuição espacial das espécies, precisamos incluir ao modelo mais uma va-

riável independente representando o espaço. A inclusão do espaço como variável do modelo pode produzir resultados diferentes daqueles obtidos em sistemas supostos homoganeamente distribuídos. Um exemplo clássico deste fato é o modelo parasitóide-hospedeiro de Nicholson-Bailey apresentado por Hassell et al. (1991), em que para o sistema espacialmente homogêneo o equilíbrio de coexistência é instável e a consideração explícita do espaço provoca a persistência das espécies com diferentes padrões de distribuição espacial. A consideração da estrutura espacial pode provocar a persistência das espécies no sistema, pois, entre outros fatores, possibilita a recolonização de áreas de extinção.

Adicionalmente, a inclusão de uma estrutura espacial no modelo matemático se mostra de fundamental importância para o sucesso das estratégias de MIP (Hughes, 1996; Ferguson et al., 2003). A migração entre as populações pode cancelar ou melhorar o efeito local produzido por estas estratégias, sendo favorável, ou, ao contrário, prejudicial ao controle de pragas. Além disso, a heterogeneidade espacial pode estar presente na distribuição das diversas populações, inclusive na de pragas, sugerindo que o seu controle seja gerenciado de forma distinta, dependendo da localização espacial.

Neste trabalho, estamos, inicialmente, propondo e analisando um modelo matemático para descrever a evolução temporal das populações de uma praga e de seu inimigo natural. Analisamos a eficiência de uma estratégia de MIP no controle desta praga e também resolvemos um problema de controle ótimo com restrições específicas para o modelo proposto. Em seguida, consideramos a inclusão de uma estrutura espacial discreta aos modelos propostos e analisamos a eficiência da estratégia de MIP e da estratégia de controle ótimo para os modelos com estrutura espacial. A seguir especificamos a estrutura do trabalho, por capítulos.

No Capítulo 1, formulamos e analisamos um modelo de equações diferenciais ordinárias para descrever a evolução temporal das populações de uma praga (considerando dois estágios de desenvolvimento) e de seu inimigo natural (predador/parasitóide).

No Capítulo 2, analisamos a eficiência da estratégia de MIP, que combina controle químico (aplicação de pesticida) e controle biológico (liberação de inimigos naturais), para a redução das populações desta praga.

No Capítulo 3, consideramos a estrutura espacial discreta para o modelo proposto com diferentes regras de movimentação para as populações adultas (difusão, taxia local e taxia quase local) e analisamos a eficiência da estratégia de MIP para o modelo com estrutura espacial.

No Capítulo 4, apresentamos a proposta e a resolução de um problema de controle ótimo com restrições específicas para o modelo formulado no Capítulo 1. Em seguida, acrescentamos a estrutura espacial discreta adotada no Capítulo 3 e analisamos a eficiência da estratégia de controle ótimo obtida para este modelo.

## 2 MODELO PARA DESCREVER A DINÂMICA NATURAL LOCAL DE UMA PRAGA E DE SEU PREDADOR/PARASITÓIDE

A proposta deste capítulo é formular e analisar um modelo de equações diferenciais ordinárias para descrever a evolução temporal das populações de uma praga e de seu inimigo natural (predador/parasitóide). Após obter os pontos de equilíbrio deste modelo, deduzimos condições de estabilidade local para cada um deles e obtemos subconjuntos da bacia de atração do equilíbrio de coexistência. Em seguida, determinamos condições para ocorrer uma bifurcação de Hopf. Por fim, fazemos uma análise de sensibilidade dos números característicos e dos equilíbrios do modelo.

### 2.1 Formulação do sistema e seus pontos de equilíbrio

Com o objetivo de formular um modelo de equações diferenciais ordinárias para descrever a evolução temporal das populações de uma praga e de seu inimigo natural (predador/parasitóide), buscamos na literatura alguns modelos presa-predador ou parasitóide-hospedeiro de equações diferenciais ordinárias que serviram como inspiração para a formulação proposta.

Os modelos clássicos presa-predador enquadram-se, de modo geral, no formato (Edelstein-Keshet, 1988; Murray, 1993; Alligood et al., 1996)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y), \end{cases}$$

onde  $x(t)$  representa a população de presas e  $y(t)$  a população de predadores;  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  são as funções que representam as interações intra e interespecíficas das populações.

Uma formulação mais simples considera

$$f(x, y) = a - by \quad \text{e} \quad g(x, y) = -c + dx,$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são parâmetros positivos; neste caso, temos crescimento malthusiano para as presas ( $ax$  na equação das presas) e resposta funcional Holling do tipo I dos predadores à densidade de presas ( $-bxy$  na equação das presas e  $dxy$  na equação dos predadores). Este modelo é denominado Lotka-Volterra e suas soluções são trajetórias fechadas no plano de fase do sistema, estruturalmente instáveis e, portanto, inadequadas para descrever situações reais.

Por outro lado, uma formulação mais realística, pode considerar crescimento logístico para as presas (prevendo uma capacidade suporte do ambiente) e resposta funcional Holling do tipo II ou do tipo III (prevendo uma saturação para a predação). Assim temos

$$f(x, y) = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - yh(x),$$

onde

$$h(x) = \frac{\alpha}{\omega + x} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{\alpha x}{\omega^2 + x^2}$$

representam as respostas funcionais dos tipos II e III, respectivamente, com  $r$ ,  $k$ ,  $\alpha$  e  $\omega$  sendo parâmetros positivos. Nestes casos, dependendo dos valores dos parâmetros, o modelo apresenta soluções estáveis do tipo ponto de equilíbrio e também ciclo-limite no plano de fase do sistema.

Como exemplo de modelo com três equações diferenciais temos o modelo apresentado por Hastings & Powell (1991), que ilustra o comportamento de uma cadeia alimentar de três espécies:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - c_1 f_1(x)y, \\ \frac{dy}{dt} = f_1(x)y - f_2(y)z - d_1 y, \\ \frac{dz}{dt} = c_2 f_2(y)z - d_2 z, \end{cases}$$

onde  $f_i(u) = a_i u / (b_i + u)$ , para  $i = 1, 2$  (resposta funcional do tipo II);  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  representam cada uma das espécies;  $r$ ,  $k$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  e  $d_2$  são

parâmetros positivos. Neste modelo, para escolhas adequadas dos parâmetros, as populações apresentam soluções estáveis do tipo ponto de equilíbrio e também ciclos-limite, além de atratores caóticos no espaço de fase do tridimensional (Varriale & Gomes, 1998; Gomes et al., 2008).

No modelo que estamos propondo, consideramos dois estágios de desenvolvimento para a praga: uma fase de larva e a fase adulta. Enquanto para o predador/parasitóide, consideramos apenas a fase adulta. Desta forma, formulamos um modelo com três equações diferenciais, uma para cada fase da praga e mais uma para o predador/parasitóide.

Nos dois estágios de desenvolvimento da praga, as densidades populacionais são representadas respectivamente por:  $N(t)$ , da fase de larvas e  $F(t)$ , da fase de fêmea adulta. Quando na fase  $N(t)$ , a praga é predada/parasitada pelo predador/parasitóide especialista, para o qual consideramos apenas a fase adulta, e cuja densidade populacional representamos por  $P(t)$ . Supondo:

1.  $\eta \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ , a taxa de oviposição (ovos viáveis) por fêmea  $F$ , onde  $\eta$  é a taxa de oviposição intrínseca, e  $K$  a capacidade de suporte do meio para a fase  $N$  - relacionada com a quantidade de nutrientes, espaço, etc.;
2.  $\sigma_N$ , a taxa per capita com a qual  $N$  passa para a fase adulta;
3.  $\psi$ , a proporção das pragas adultas que são fêmeas;
4.  $\frac{\gamma N}{1+\phi N}$ , a taxa por predador/parasitóide com a qual uma praga  $N$  é predada/parasitada, resultante de uma probabilidade  $\frac{N}{1+\phi N}$  de encontro de um indivíduo da espécie  $P$ , com uma praga na fase  $N$  (predação Holling do tipo II);
5.  $\omega$ , o fator de conversão de presas/hospedeiros para predador/parasitóide;
6.  $\mu_N$ ,  $\mu_F$  e  $\mu_P$ , as taxas de mortalidade per capita de cada uma das populações,

escrevemos o sistema que descreve a dinâmica populacional natural das duas espécies sob a forma:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \eta F \left(1 - \frac{N}{K}\right) - (\sigma_N + \mu_N)N - \frac{\gamma NP}{1 + \phi N}, \\ \frac{dF}{dt} = \psi \sigma_N N - \mu_F F, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{\omega \gamma NP}{1 + \phi N} - \mu_P P. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definindo variáveis adimensionais através de

$$\theta = \eta t, \quad n = \phi N, \quad f = \frac{F}{K}, \quad \text{e} \quad p = \frac{\gamma}{\eta} P, \quad (2.2)$$

obtemos a seguinte forma adimensional para o modelo (2.1):

$$\begin{cases} \frac{dn}{d\theta} = a f \left(1 - \frac{n}{a}\right) - (b + c_1)n - \frac{np}{1+n}, \\ \frac{df}{d\theta} = b d n - c_2 f, \\ \frac{dp}{d\theta} = e \frac{np}{1+n} - c_3 p, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= K\phi, & b &= \frac{\sigma_N}{\eta}, & c_1 &= \frac{\mu_N}{\eta}, & c_2 &= \frac{\mu_F}{\eta}, \\ c_3 &= \frac{\mu_P}{\eta}, & d &= \frac{\psi}{K\phi}, & e &= \frac{\omega\gamma}{\eta\phi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

são os parâmetros adimensionais, todos positivos.

A partir de agora convencionamos que a variável adimensional temporal ( $\theta$ ) é representada pela letra  $t$ .

O sistema adimensional (2.3) apresenta três pontos de equilíbrio  $(n^*, f^*, p^*)$ , como segue:

- O ponto de equilíbrio trivial, que corresponde à extinção de todas as populações,

$$E_0 = (0, 0, 0);$$

- O ponto de equilíbrio que corresponde à extinção da população de predadores/parasitóides e persistência das populações de pragas,

$$E_1 = (n_1^*, f_1^*, 0),$$

onde

$$n_1^* = a - \frac{c_2(b + c_1)}{db} \quad \text{e} \quad f_1^* = \frac{abd}{c_2} - (b + c_1); \quad (2.5)$$

- E o ponto de equilíbrio de coexistência das espécies, em que todas as populações persistem,

$$E_2 = (n_2^*, f_2^*, p_2^*),$$

onde

$$n_2^* = \frac{c_3}{e - c_3}, \quad f_2^* = \frac{bdc_3}{c_2(e - c_3)} \quad (2.6)$$

e

$$p_2^* = \frac{abde(e - c_3) - ebdc_3 - ec_2(b + c_1)(e - c_3)}{c_2(e - c_3)^2}. \quad (2.7)$$

No que se refere à viabilidade biológica destes equilíbrios, lembremos que não faz sentido termos densidades populacionais negativas.

O equilíbrio  $E_0$  é sempre (para qualquer escolha dos parâmetros positivos do sistema (2.3)) biologicamente viável.

O equilíbrio  $E_1$  é biologicamente viável se, e somente se,  $R_0 > 1$ , onde

$$R_0 \equiv \frac{a}{b + c_1} \cdot \frac{bd}{c_2}. \quad (2.8)$$

Observe que  $R_0$  é produto dos números reprodutivos básicos (Keeling, 1999) das populações de pragas em cada estágio,  $n$  e  $f$ , pois (ver sistema (2.3))  $a$  é a taxa com a qual uma fêmea gera novas larvas,  $\frac{1}{b+c_1}$  é o tempo médio durante o qual uma praga permanece no estágio de larva,  $bd$  é a taxa com a qual uma larva gera novas fêmeas adultas e  $\frac{1}{c_2}$  é o tempo médio durante o qual uma praga permanece no estágio adulto. A condição  $R_0 > 1$  estabelece que, se o produto dos números reprodutivos básicos das duas populações de pragas for maior do que 1, então existe a possibilidade da espécie não ir à extinção. É interessante observar que se apenas um dos números reprodutivos básicos for menor do que 1, ainda assim podemos ter  $R_0 > 1$ , e conseqüentemente, a praga persistir no ambiente.

Com relação ao equilíbrio  $E_2$ , supondo  $R_0 > 1$ , temos  $E_2$  biologicamente viável se, e somente se,  $e > c_3$  e  $R_1 > 1$ , onde

$$R_1 \equiv \frac{e}{c_3} \cdot \chi, \quad \text{com} \quad \chi = \frac{a(R_0 - 1)}{R_0 + a(R_0 - 1)}. \quad (2.9)$$

O quociente  $\frac{e}{c_3}$  pode ser interpretado como o número reprodutivo básico da população  $p$  de predadores/parasitóides, pois (ver sistema (2.3))  $e$  é a taxa através da qual novos predadores/parasitóides são gerados a partir de uma larva e  $\frac{1}{c_3}$  é o tempo médio de vida de um predador/parasitóide. Como  $0 < \chi < 1$  quando  $R_0 > 1$ , precisamos que o número reprodutivo básico da população de predadores/parasitóides seja suficientemente maior do que 1 para termos  $R_1 > 1$ , ou seja, para que o equilíbrio de coexistência de ambas as espécies seja viável.

## 2.2 Estabilidade local dos pontos de equilíbrio

A análise da estabilidade local de cada um destes pontos de equilíbrio é baseada nos autovalores  $\lambda$  da equação característica

$$\det(\lambda I - J(E_i)) = 0,$$

onde  $J(E_i)$ ,  $i = 0,1,2$ , é a matriz Jacobiana do sistema avaliada no equilíbrio  $E_i$  e  $I$  é a matriz identidade. O equilíbrio é estável se, e somente se, todas as raízes da equação característica possuem parte real negativa (Edelstein-Keshet, 1988; Murray, 1993). Assim, temos as seguintes condições sobre a estabilidade local dos pontos de equilíbrio.

Se  $R_0 < 1$ , onde  $R_0$  é dado por (2.8), então o ponto de equilíbrio  $E_0$  é localmente estável, ou seja,  $E_0$  é um atrator e todas as populações vão à extinção. Note que a condição  $R_0 > 1$ , isto é, a não estabilidade de  $E_0$ , implica na viabilidade biológica de  $E_1$ .

Se os parâmetros forem tais que o equilíbrio  $E_1$  seja biologicamente viável ( $R_0 > 1$ ), obtemos que se  $R_1 < 1$ , onde  $R_1$  é dado por (2.9), então o ponto de

equilíbrio  $E_1$  é localmente estável. Portanto, quando  $R_0 > 1$  e  $R_1 < 1$ , o equilíbrio  $E_1$  é um atrator biologicamente viável. Agora, note que a condição  $R_1 > 1$ , isto é, a não estabilidade de  $E_1$ , é uma condição necessária para a viabilidade biológica de  $E_2$ .

Se os parâmetros forem tais que  $R_0 > 1$ ,  $R_1 > 1$  e  $e > c_3$ , ou seja, tais que  $E_2$  seja biologicamente viável, obtemos que, se  $R_2 < 1$ , onde  $R_2$  é dado por

$$R_2 \equiv \frac{[A + ec_2^2(e - c_3)](B - bdec_3)c_2}{AB(e - c_3)}, \quad (2.10)$$

com

$$A = (e - c_3)[abd(e - c_3) + c_2c_3(b + c_1)] + bdc_3^2 \quad (2.11)$$

e

$$B = c_3\{(e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3\}, \quad (2.12)$$

então o ponto de equilíbrio  $E_2$  é localmente estável. Neste caso dizemos que, quando  $R_0 > 1$ ,  $R_1 > 1$ ,  $e > c_3$  e  $R_2 < 1$ , o equilíbrio  $E_2$  é um atrator biologicamente viável.

### 2.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio de coexistência e a existência de ciclo limite

Nesta seção analisamos a estabilidade global do ponto de equilíbrio de coexistência das espécies. Esta análise é feita apenas para  $E_2$  pois, em geral, em sistemas biológicos estamos interessados em manter o equilíbrio ecológico (coexistência das espécies). Esta análise é feita através da utilização de uma técnica que envolve funções de Lyapunov. A técnica consiste em estabelecer para o atrator  $E_2 = (n_2^*, f_2^*, p_2^*)$  uma função de Lyapunov estrita (Robinson, 1995). A bacia de atração (Alligood et al., 1996; Bhattacharyya & Bhattacharya, 2007; Sotomayor, 1979) do atrator  $E_2$  é formada por todos os pontos  $(n, f, p)$  de  $\mathbb{R}_+^3$  para os quais esta função de Lyapunov estrita está bem definida.

Vamos considerar a função de Lyapunov

$$V(n, f, p) = m_1(n - n_2^*)^2 + m_2(f - f_2^*)^2 + m_3(p - p_2^*)^2 \quad (2.13)$$

onde cada  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , é uma constante real positiva a ser determinada.

Evidentemente, temos  $V(E_2) = 0$  e  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq E_2$ , onde  $x = (n, f, p) \in \mathbb{R}_+^3$ . Resta determinar a região formada pelos pontos  $x \in \mathbb{R}_+^3$  tais que  $\dot{V}(x) < 0$ . Nesta região as soluções serão atraídas por  $E_2$ .

Escolhendo  $m_1 = e$  e  $m_2 = m_3 = 1$ , após algumas manipulações algébricas (ver Apêndice A), obtemos dois subconjuntos da bacia de atração do atrator  $E_2$  de coexistência das espécies:

$$W_1 = \{(n, f, p) \in \mathbb{R}_+^3 : n > n_2^*, \quad f < f_2^*, \\ nf > n_2^* f_2^*, \quad p > p_2^* \quad \wedge \quad p - n < p_2^* - n_2^*\}$$

e

$$W_2 = \{(n, f, p) \in \mathbb{R}_+^3 : n < n_2^*, \quad f > f_2^*, \\ nf < n_2^* f_2^*, \quad p < p_2^*, \quad \wedge \quad p - n > p_2^* - n_2^*\}.$$

Agora, vamos investigar analiticamente a existência de um ciclo limite estável para o modelo (2.3). Mais especificamente, verificaremos se existe uma bifurcação de Hopf para o equilíbrio de coexistência  $E_2$  (Guckenheimer & Holmes, 1993) quando variamos o parâmetro adimensional  $a$ .

De acordo com Liu (1994), se para um determinado valor do parâmetro  $a$ , digamos  $a_0$ , tivermos

$$p_0(a_0) > 0, \quad p_1(a_0) > 0, \quad p_1(a_0)p_2(a_0) - p_0(a_0) = 0 \quad (2.14)$$

e

$$\frac{d}{da} [p_1(a)p_2(a) - p_0(a)]_{a=a_0} \neq 0, \quad (2.15)$$

onde  $p_0(a)$ ,  $p_1(a)$  e  $p_2(a)$  são obtidos a partir da equação característica

$$\det(\lambda I - J(E_2)) = 0 \iff \lambda^3 + p_2(a)\lambda^2 + p_1(a)\lambda + p_0(a) = 0, \quad (2.16)$$

então existe uma bifurcação de Hopf em  $a_0$ .

A partir do sistema (2.3), obtemos os coeficientes das diversas potências de  $\lambda$  em (2.16):

$$p_0(a) = \frac{c_3}{e} \{ (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3 \}, \quad (2.17)$$

$$p_1(a) = \left( \frac{1}{e} + \frac{c_3}{ec_2} \right) \{ (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3 \} + \frac{2bdc_3}{e - c_3} + c_2(b + c_1) - abd \quad (2.18)$$

e

$$p_2(a) = \frac{1}{ec_2} \{ (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3 \} + \frac{bdc_3}{c_2(e - c_3)} + b + c_1 + c_2. \quad (2.19)$$

O valor do parâmetro  $a$  no qual ocorre a bifurcação de Hopf é obtido a partir da terceira expressão em (2.14). Manipulando algebricamente esta expressão podemos ver que ela é equivalente a  $R_2 = 1$ , para  $R_2$  dado em (2.10) (ver Apêndice B).

Note que, para parâmetros tais que  $R_0 > 1$ ,  $R_1 > 1$  e  $e > c_3$ , onde  $R_0$  e  $R_1$  são dados por (2.8) e (2.9), respectivamente, o valor de  $a$  no qual ocorre a bifurcação de Hopf é, como seria de se esperar, exatamente aquele em que o equilíbrio  $E_2$  perde sua estabilidade local.

## 2.4 Simulações numéricas

Todas as simulações deste trabalho são feitas com a utilização do software matlab. As soluções numéricas para os sistemas de equações diferenciais são obtidas através da implementação do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Os resultados obtidos analiticamente referentes aos pontos de equilíbrio, à viabilidade biológica, à estabilidade local e à estabilidade global destes equilíbrios podem ser verificados através de simulações numéricas.

Nos diagramas de bifurcação da Figura 2.1 apresentamos as densidades de equilíbrio  $n^*$  e  $p^*$  em função do parâmetro  $a$  (omitimos o diagrama de bifurcação

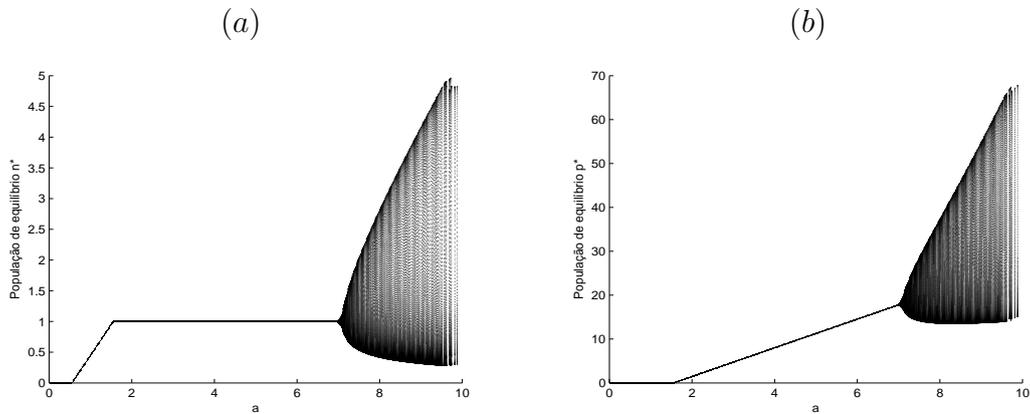


Figura 2.1: Diagramas de bifurcação para (a)  $n$  e (b)  $p$ , em função do parâmetro  $a$ .

de  $f^*$ , pois este é muito semelhante ao de  $n^*$ ). Fixamos  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$  e a condição inicial  $(n_0, f_0, p_0) = (1.3, 2, 1.8) \in W_1$ . Neste caso podemos ver que, a partir de  $a = 0$ , temos inicialmente,  $n^* = f^* = p^* = 0$ . Depois, aumentando o valor de  $a$ , as densidades de equilíbrio  $n^*$  e  $f^*$  deixam de ser nulas, dando origem ao equilíbrio de extinção dos predadores/parasitóides. Aumentando um pouco mais o valor de  $a$  podemos ver que a densidade de equilíbrio  $p^*$  também deixa de ser nula, originando o equilíbrio de coexistência das espécies. Finalmente, em  $a \approx 7.09$  podemos observar o surgimento do ciclo limite, como foi previsto na condição (2.14).

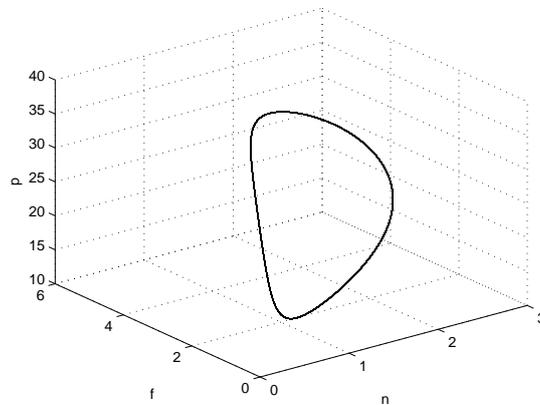


Figura 2.2: Espaço de fase para  $a = 8$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$  (ciclo limite).

Na Figura 2.2 escolhemos  $a = 8 > 7.09$  e podemos observar que, de fato, após os transientes, as densidades populacionais de pragas e predadores/parasitóides oscilam, formando um ciclo limite no espaço de fase, independente da condição inicial  $(n_0, f_0, p_0)$ . A densidade populacional de larvas  $n$  oscila entre os valores 0.4 e 2.8; a densidade populacional de fêmeas adultas  $f$  oscila entre os valores 0.8 e 4.1; e a densidade populacional de predadores/parasitóides oscila entre os valores 13.5 e 37.3.

## 2.5 Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade nos permite determinar a relevância de cada um dos parâmetros para os fatores envolvidos neste modelo. Para fazer esta análise consideramos a definição de índice de sensibilidade normalizado apresentada em Chitnis et al. (2008). Ela diz que o índice de sensibilidade normalizado de uma variável  $x$ , que depende diferencialmente de um parâmetro  $p$ , é definido como

$$\gamma_p^x = \frac{\partial x}{\partial p} \times \frac{p}{x}. \quad (2.20)$$

Note que este índice é definido de modo que tenhamos

$$\text{aumento percentual de } x = \gamma_p^x \times \text{aumento percentual de } p.$$

Vamos calcular o índice de sensibilidade normalizado dos números  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$ , em relação a cada um dos parâmetros do sistema. Estes números determinam a possibilidade de persistência ou não das espécies no ecossistema. Além disso, vamos analisar a sensibilidade de cada uma das densidades de equilíbrio não nulas e do ciclo limite.

Todos os índices de sensibilidade são obtidos a partir de (2.20). Apresentamos explicitamente apenas aqueles que têm expressões simples. Aqueles que têm expressões mais complicadas são analisados a partir de suas representações gráficas.

### 2.5.1 Análise de sensibilidade dos números $R_0$ , $R_1$ e $R_2$

Para  $R_0$  dado em (2.8), temos:

- $\gamma_{c_3}^{R_0} = \gamma_e^{R_0} = 0$ , já que  $R_0$  independe dos parâmetros  $c_3$  e  $e$ ;
- $\gamma_a^{R_0} = \gamma_d^{R_0} = 1$ ;  $\gamma_{c_2}^{R_0} = -1$ ;
- $\gamma_b^{R_0} = \frac{c_1}{b+c_1}$  e  $\gamma_{c_1}^{R_0} = -\frac{c_1}{b+c_1}$ .

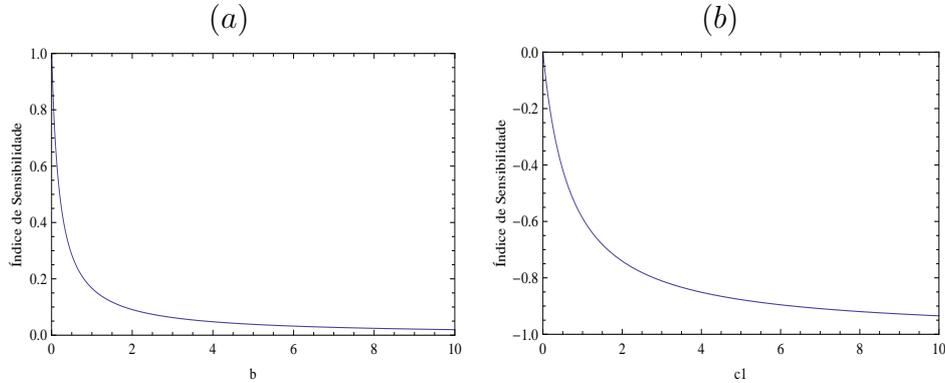


Figura 2.3: (a)  $\gamma_b^{R_0}$  como função de  $b$  para  $c_1 = 0.2$ ; (b)  $\gamma_{c_1}^{R_0}$  como função de  $c_1$  para  $b = 0.7$ .

Aumentando (reduzindo) os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $d$  (que estão relacionados diretamente com capacidade suporte, taxa per capita com que a praga passa da fase de larva para o estágio adulto e proporção de pragas adultas que são fêmeas, respectivamente) aumentamos (reduzimos) o valor de  $R_0$ . Por outro lado, aumentando (reduzindo) os valores dos parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  (que estão relacionados com as taxas de mortalidade das populações de pragas) diminuimos (aumentamos) o valor de  $R_0$ . Como  $R_0$  determina a extinção ( $R_0 < 1$ ) ou a possibilidade de persistência ( $R_0 > 1$ ) das populações de pragas, vemos que estes resultados são intuitivamente coerentes.

Além disso,  $R_0$  apresenta índices de sensibilidade com mesmo valor absoluto para os parâmetros  $a$ ,  $d$  e  $c_2$ , sendo mais sensível a estes do que aos parâmetros  $b$  e  $c_1$ . Na Figura 2.3 vemos que  $0 < \gamma_b^{R_0} \leq 1$  e  $-1 < \gamma_{c_1}^{R_0} \leq 0$ , sendo funções decrescentes de  $b$  e  $c_1$ , respectivamente. Em  $\gamma_b^{R_0}$ , quanto maior o valor fixado para  $c_1$

mais a curva demora para se aproximar de 0. Em  $\gamma_{c_1}^{R_0}$ , quanto maior o valor fixado para  $b$  mais a curva demora para se aproximar de  $-1$ .

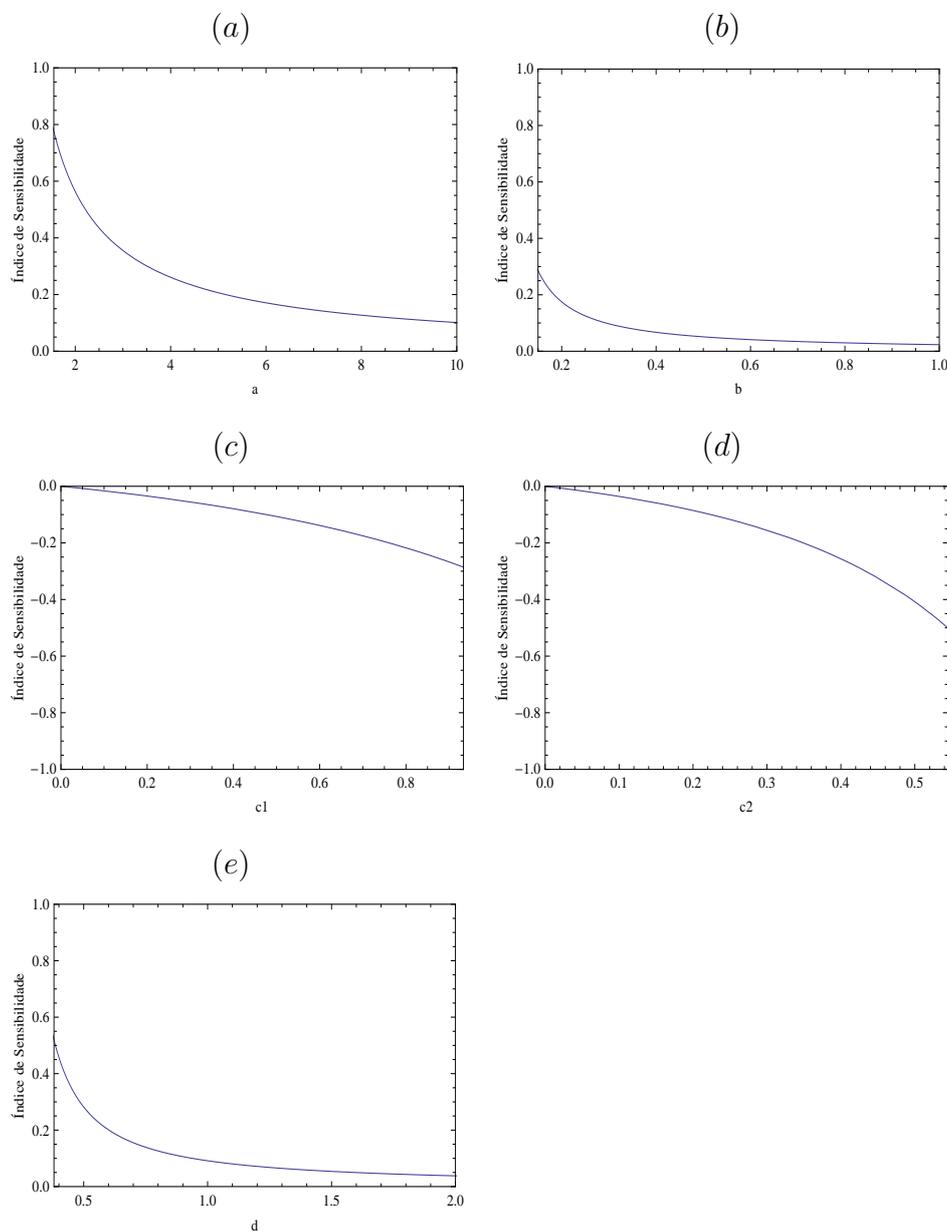


Figura 2.4: (a)  $\gamma_a^{R_1}$ , (b)  $\gamma_b^{R_1}$ , (c)  $\gamma_{c_1}^{R_1}$ , (d)  $\gamma_{c_2}^{R_1}$  e (e)  $\gamma_d^{R_1}$ ;  $a = 2$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ .

Para  $R_1$  dado em (2.9), temos:

- $\gamma_{c_3}^{R_1} = -1$  e  $\gamma_e^{R_1} = 1$ ;

- os índices de sensibilidade de  $R_1$  em relação aos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $d$  são apresentados na Figura 2.4.

O intervalo apresentado no eixo horizontal de cada um dos gráficos da Figura 2.4 corresponde àquele para o qual  $R_0 > 1$  e  $R_1 > 1$ , de acordo com o conjunto de parâmetros escolhido. As limitações são intuitivamente coerentes, já que  $c_1$  e  $c_2$  são limitados superiormente e,  $a$ ,  $b$  e  $d$  são limitados inferiormente.

De modo geral, temos  $\gamma_a^{R_1}, \gamma_b^{R_1}, \gamma_d^{R_1} > 0$  e  $\gamma_e^{R_1} = 1$ , ou seja, aumentos nos valores dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $d$  e  $e$  (que estão relacionados diretamente com capacidade suporte, taxa per capita com que a praga passa da fase de larva para o estágio adulto, proporção de pragas adultas que são fêmeas e crescimento da população de predadores/parasitóides através da predação/parasitação, respectivamente) aumentam o valor de  $R_1$ ; e  $\gamma_{c_1}^{R_1}, \gamma_{c_2}^{R_1} < 0$  e  $\gamma_{c_3}^{R_1} = -1$ , ou seja, aumentos nos valores dos parâmetros  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  (que estão relacionados com as taxas de mortalidade das populações de pragas e taxa de mortalidade dos predadores/parasitóides, respectivamente) diminuem o valor de  $R_1$ . Resultados intuitivamente coerentes, já que o fator  $R_1$  determina a persistência apenas das populações de pragas ( $R_1 < 1$ ) ou a possibilidade de coexistência das espécies ( $R_1 > 1$ ).

Além disso,  $R_1$  é mais sensível aos parâmetros  $e$  e  $c_3$ , já que os índices de sensibilidade  $\gamma_a^{R_1}, \gamma_b^{R_1}, \gamma_{c_1}^{R_1}, \gamma_{c_2}^{R_1}$  e  $\gamma_d^{R_1}$  não assumem valores em módulo maiores do que 1. Comparando  $\gamma_a^{R_1}, \gamma_b^{R_1}$  e  $\gamma_d^{R_1}$  podemos dizer que  $R_1$  é “mais sensível” a  $a$  do que a  $d$  e, mais sensível a  $d$  do que a  $b$ . Comparando  $\gamma_{c_1}^{R_1}$  e  $\gamma_{c_2}^{R_1}$  podemos dizer que  $R_1$  é “mais sensível” a  $c_1$  do que a  $c_2$ .

Para  $R_2$  dado em (2.10), os índices de sensibilidade são apresentados nas Figuras 2.5 e 2.6. Novamente, o intervalo apresentado no eixo horizontal de cada um dos gráficos corresponde àquele para o qual  $R_0 > 1$  e  $R_1 > 1$ .

Nos gráficos (a) e (b) da Figura 2.5, quanto maior o valor do parâmetro menor é o índice de sensibilidade em módulo e nos gráficos (c) e (d), quanto maior o valor do parâmetro maior é o índice de sensibilidade em módulo. Além disso,

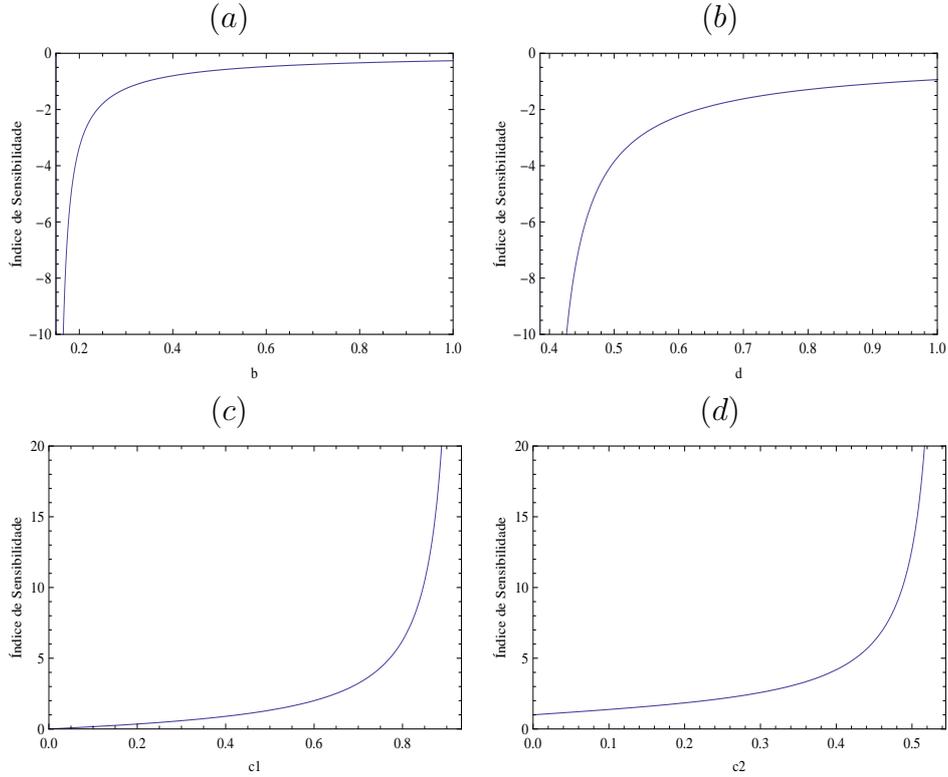


Figura 2.5: (a)  $\gamma_b^{R_2}$ , (b)  $\gamma_d^{R_2}$ , (c)  $\gamma_{c_1}^{R_2}$  e (d)  $\gamma_{c_2}^{R_2}$ ;  $a = 2$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ .

temos  $\gamma_{c_1}^{R_2}, \gamma_{c_2}^{R_2} > 0$ , ou seja, aumentos nos valores dos parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  aumentam o valor de  $R_2$ ; e  $\gamma_b^{R_2}, \gamma_d^{R_2} < 0$ , ou seja, aumentos nos valores dos parâmetros  $b$  e  $d$  diminuem o valor de  $R_2$ . Portanto, taxas de mortalidade das populações de pragas altas combinadas com taxa per capita de mudança de fase e proporção de pragas adultas fêmeas baixas podem provocar a perda da estabilidade de equilíbrio do sistema gerando oscilações nas densidades populacionais.

$\gamma_a^{R_2}$ ,  $\gamma_{c_3}^{R_2}$  e  $\gamma_e^{R_2}$  podem ser positivos ou negativos assumindo valores mais altos ou mais baixos e, além disso, não apresentam um padrão de crescimento ou de decréscimo em função do parâmetro, portanto pode-se obter diferentes conclusões dependendo dos valores específicos que são escolhidos para os parâmetros (Figura 2.6).

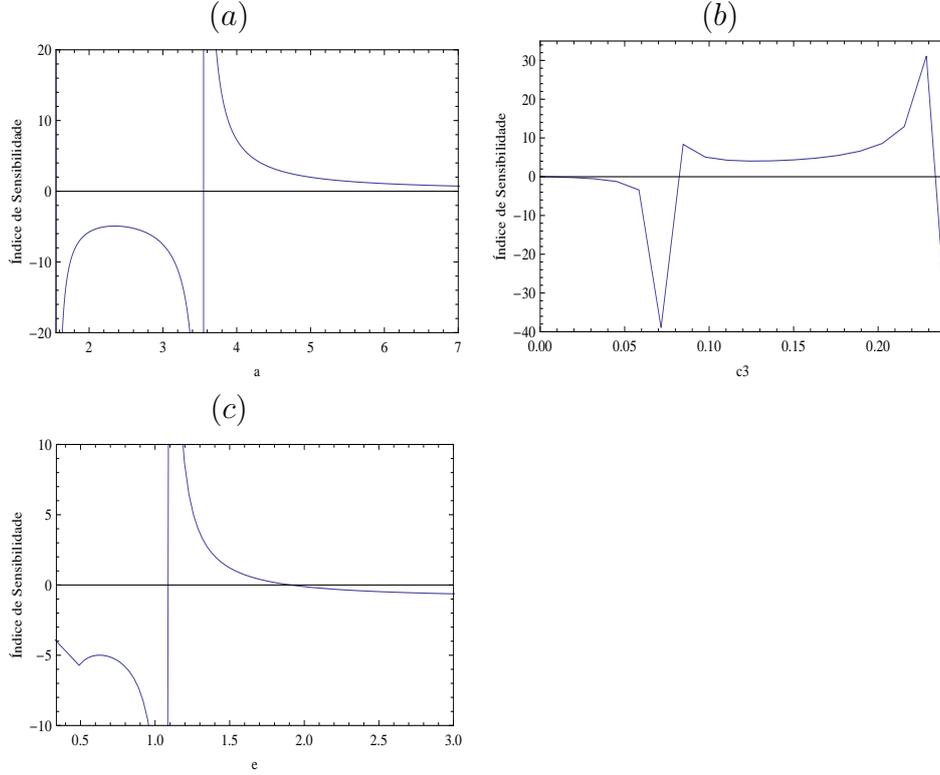


Figura 2.6: (a)  $\gamma_a^{R_2}$ , (b)  $\gamma_{c_3}^{R_2}$  e (c)  $\gamma_e^{R_2}$ ;  $a = 2$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ .

### 2.5.2 Análise de sensibilidade dos equilíbrios $E_1$ e $E_2$

Vamos obter e analisar as expressões que representam os índices de sensibilidade, em relação a cada um dos parâmetros do sistema, para cada coordenada não nula dos equilíbrios  $E_1$  (extinção dos predadores/parasitóides) e  $E_2$  (coexistência das espécies). Em toda a análise os parâmetros são tais que as condições de viabilidade biológica e de estabilidade local de cada equilíbrio estejam satisfeitas. Nos gráficos, os limites superiores e/ou inferiores dos parâmetros apresentados são estabelecidos por estas condições.

Para  $E_1$ , considerando  $r_0 = abd - c_2(b + c_1)$ , temos:

- $\gamma_{c_3}^{n_1^*} = \gamma_e^{n_1^*} = \gamma_{c_3}^{f_1^*} = \gamma_e^{f_1^*} = 0$ ;
- $\gamma_a^{n_1^*} = \gamma_a^{f_1^*} = \frac{abd}{r_0}$ ;  $\gamma_b^{n_1^*} = \frac{c_1 c_2}{r_0}$ ;  $\gamma_{c_1}^{n_1^*} = \gamma_{c_1}^{f_1^*} = -\frac{c_1 c_2}{r_0}$ ;
- $\gamma_{c_2}^{n_1^*} = -\gamma_d^{n_1^*} = -\frac{c_2(b+c_1)}{r_0}$ ;  $\gamma_b^{f_1^*} = \frac{abd-bc_2}{r_0}$ ;  $\gamma_{c_2}^{f_1^*} = -\gamma_d^{f_1^*} = -\frac{abd}{r_0}$ .

Note que  $r_0 > 0 \iff R_0 > 1$ .

De modo geral, os índices de sensibilidade de  $n_1^*$  e  $f_1^*$  em relação a cada parâmetro têm expressões muito semelhantes ou idênticas. Como  $\gamma_b^{n_1^*} = -\gamma_{c_1}^{n_1^*}$ ,  $n_1^*$  é igualmente sensível aos parâmetros  $b$  e  $c_1$ . Ou seja, se aumentamos, ao mesmo tempo, em um mesmo valor percentual  $b$  e  $c_1$ , não temos aumento (nem redução) percentual em  $n_1^*$ . As mesmas conclusões valem para  $\gamma_d^{n_1^*}$  e  $\gamma_{c_2}^{n_1^*}$ , já que  $\gamma_d^{n_1^*} = -\gamma_{c_2}^{n_1^*}$ , e para  $\gamma_a^{f_1^*}$ ,  $\gamma_d^{f_1^*}$  e  $\gamma_{c_2}^{f_1^*}$ , já que também temos  $\gamma_a^{f_1^*} = \gamma_d^{f_1^*} = -\gamma_{c_2}^{f_1^*}$ . Além disso, temos  $\gamma_a^{n_1^*} = \gamma_a^{f_1^*}$ ,  $\gamma_b^{n_1^*}, \gamma_b^{f_1^*}, \gamma_d^{n_1^*}, \gamma_d^{f_1^*} > 0$  e  $\gamma_{c_1}^{n_1^*} = \gamma_{c_1}^{f_1^*}, \gamma_{c_2}^{n_1^*}, \gamma_{c_2}^{f_1^*} < 0$ . Ou seja, aumentando os valores de  $a$ ,  $b$  e  $d$ , aumentamos os valores de equilíbrio  $n_1^*$  e  $f_1^*$  e, aumentando os valores de  $c_1$  e  $c_2$  diminuímos os valores de  $n_1^*$  e  $f_1^*$ . O fato de cada um dos índices de sensibilidade assumir valores positivos ou negativos pode ser observado diretamente nas suas expressões algébricas, exceto para  $\gamma_b^{f_1^*}$ . Neste caso, o gráfico (a) da Figura 2.7 esclarece isso.

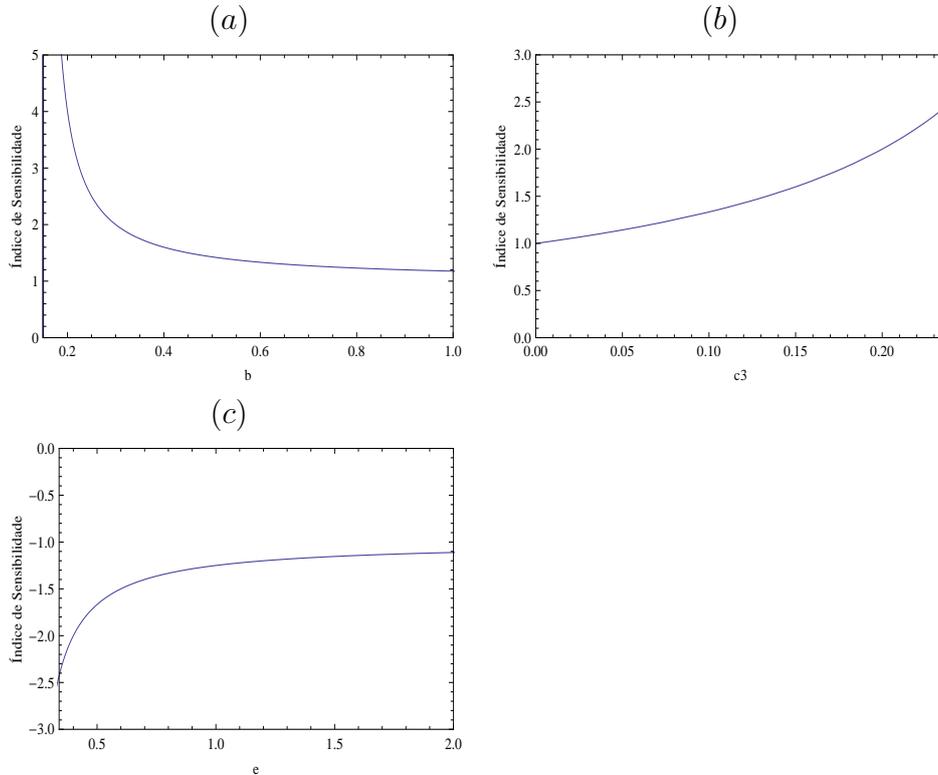


Figura 2.7: (a)  $\gamma_b^{f_1^*}$ , com  $a = 1$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ ; (b)  $\gamma_{c_3}^{n_2^*}$  como função de  $c_3$  para  $e = 0.4$ ; (c)  $\gamma_e^{n_2^*}$  como função de  $e$  para  $c_3 = 0.2$ .

Para  $E_2$ , temos:

- $\gamma_a^{n_2^*} = \gamma_b^{n_2^*} = \gamma_{c_1}^{n_2^*} = \gamma_{c_2}^{n_2^*} = \gamma_d^{n_2^*} = 0$ ;
- $\gamma_{c_3}^{n_2^*} = \gamma_{c_3}^{f_2^*} = \frac{e}{e-c_3}$ ;  $\gamma_e^{n_2^*} = \gamma_e^{f_2^*} = -\frac{e}{e-c_3}$ ;
- $\gamma_a^{f_2^*} = \gamma_{c_1}^{f_2^*} = 0$ ;  $\gamma_b^{f_2^*} = \gamma_d^{f_2^*} = 1$ ;  $\gamma_{c_2}^{f_2^*} = -1$ ;
- os índices de sensibilidade  $\gamma_a^{p_2^*}$ ,  $\gamma_b^{p_2^*}$ ,  $\gamma_{c_1}^{p_2^*}$ ,  $\gamma_{c_2}^{p_2^*}$ ,  $\gamma_{c_3}^{p_2^*}$ ,  $\gamma_d^{p_2^*}$  e  $\gamma_e^{p_2^*}$  são apresentados nas Figuras 2.8 e 2.9.

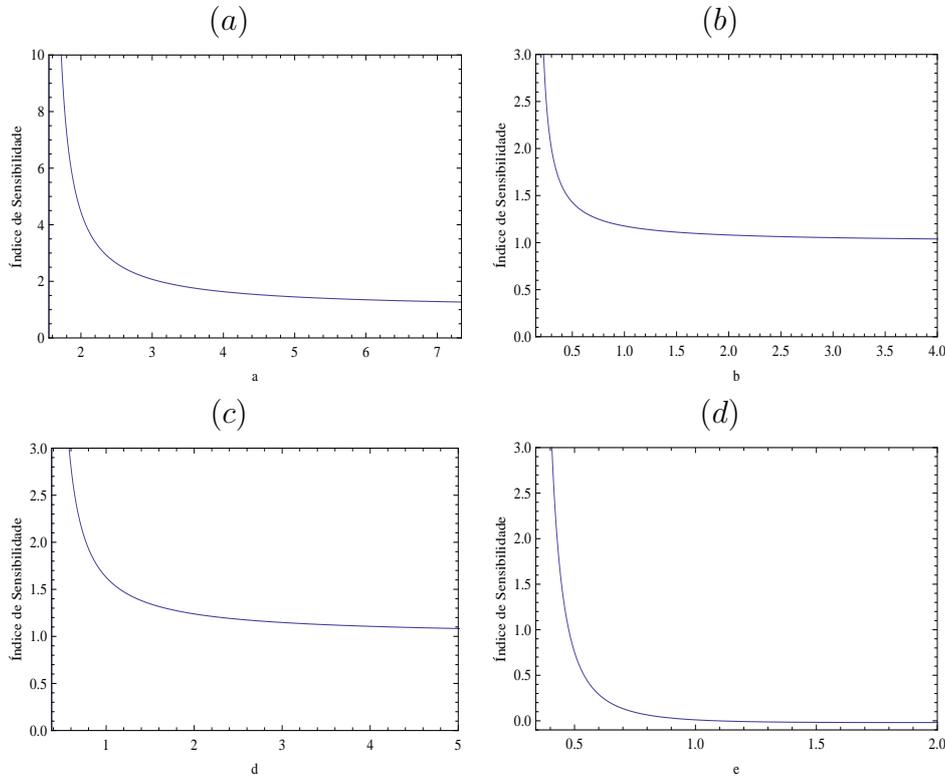


Figura 2.8: (a)  $\gamma_a^{p_2^*}$ , (b)  $\gamma_b^{p_2^*}$ , (c)  $\gamma_d^{p_2^*}$  e (d)  $\gamma_e^{p_2^*}$ ;  $a = 2$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ .

$n_2^*$  e  $f_2^*$  são igualmente sensíveis aos parâmetros  $c_3$  e  $e$ , já que  $\gamma_{c_3}^{n_2^*} = -\gamma_e^{n_2^*}$  e  $\gamma_{c_3}^{f_2^*} = -\gamma_e^{f_2^*}$ . Aumentando o valor de  $c_3$  (que está relacionado diretamente com a taxa de mortalidade da população de predadores/parasitóides) aumentamos os valores de  $n_2^*$  e  $f_2^*$ , e aumentando o valor de  $e$  (que está diretamente relacionado com o crescimento da população de predadores/parasitóides através da predação/parasitação) diminuímos os valores de  $n_2^*$  e  $f_2^*$ . Na Figura 2.7 (gráficos (b)

e (c)) temos os gráficos de  $\gamma_{c_3}^{n_2^*} = \gamma_{c_3}^{f_2^*}$  e  $\gamma_e^{n_2^*} = \gamma_e^{f_2^*}$  como função do correspondente parâmetro. Neles podemos ver que  $\gamma_{c_3}^{n_2^*} = \gamma_{c_3}^{f_2^*}$  e  $\gamma_e^{n_2^*} = \gamma_e^{f_2^*}$  são funções crescentes de  $c_3$  e  $e$ , respectivamente.

$f_2^*$  é igualmente sensível aos parâmetros  $b$ ,  $d$  e  $c_2$ , já que  $\gamma_b^{f_2^*} = \gamma_d^{f_2^*} = -\gamma_{c_2}^{f_2^*}$ . Como  $\gamma_b^{f_2^*}, \gamma_d^{f_2^*} > 0$ , aumentando o valor de  $b$  ou de  $d$  (que estão relacionados diretamente com a taxa per capita com que a praga passa da fase de larva para o estágio adulto e proporção de pragas adultas que são fêmeas, respectivamente) aumentamos o valor de  $f_2^*$ . Conseqüentemente, aumentando o valor de  $c_2$  (que está relacionado com a taxa de mortalidade da população de pragas adultas) diminuimos o valor de  $f_2^*$ .

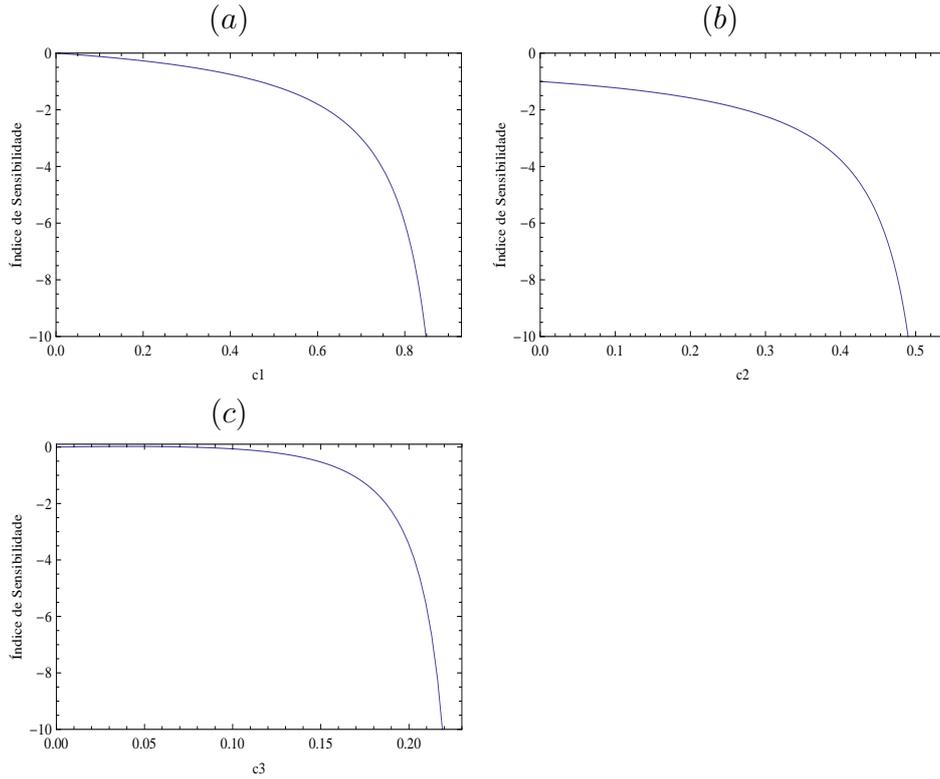


Figura 2.9: (a)  $\gamma_{c_1}^{p_2^*}$ , (b)  $\gamma_{c_2}^{p_2^*}$  e (c)  $\gamma_{c_3}^{p_2^*}$ ;  $a = 2$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ .

Temos  $\gamma_a^{p_2^*}, \gamma_b^{p_2^*}, \gamma_d^{p_2^*}, \gamma_e^{p_2^*} > 0$ , sendo todos funções decrescentes dos correspondentes parâmetros (Figura 2.8). Nos casos de  $\gamma_a^{p_2^*}$ ,  $\gamma_b^{p_2^*}$  e  $\gamma_d^{p_2^*}$ , para valores mais altos do parâmetro o índice de sensibilidade se aproxima de 1 e, no caso de  $\gamma_e^{p_2^*}$  se aproxima de 0. Este último resultado se deve ao fato de  $e$  estar rela-

cionado com o crescimento da população de predadores/parasitóides através da predação/parasitação e esta apresentar uma saturação.

Por outro lado,  $\gamma_{c_1}^{p_2^*}, \gamma_{c_2}^{p_2^*}, \gamma_{c_3}^{p_2^*} < 0$ , todos tendo seus valores aumentados em módulo quando aumentamos o valor do respectivo parâmetro (Figura 2.9). Ou seja, aumentando a taxa de mortalidade de alguma das populações reduzimos a densidade de equilíbrio dos predadores/parasitóides.

### 2.5.3 Análise de sensibilidade do ciclo limite

Finalmente, vamos fazer a análise de sensibilidade do ciclo limite em relação a cada um dos parâmetros do sistema.

Neste caso, calculamos os valores máximo e mínimo assumidos por cada densidade populacional no ciclo limite, obtendo estes valores como função de cada um dos parâmetros do sistema. Nas Figuras 2.10 e 2.11 apresentamos alguns destes resultados. O intervalo apresentado no eixo horizontal de cada um dos gráficos destas figuras corresponde àquele para o qual as condições  $R_0 > 1$ ,  $R_1 > 1$ ,  $e > c_3$  e  $R_2 > 1$  são satisfeitas.

Em todos os casos em que ocorrem alterações (reduções/aumentos) nos valores máximo e mínimo das densidades populacionais, estas alterações são maiores no valor máximo do que no valor mínimo. Em relação aos parâmetros  $a$ ,  $c_1$  e  $c_3$ , as três densidades populacionais apresentam comportamentos qualitativos semelhantes, por isso apresentamos o comportamento gráfico de apenas uma das densidades em relação a cada um destes parâmetros (Figura 2.10 (a) e (d) e Figura 2.11 (a)). Em relação aos parâmetros  $b$ ,  $c_2$  e  $d$ , as densidades  $f$  e  $p$  têm comportamentos qualitativos semelhantes (Figura 2.10 (c) e (f) e Figura 2.11 (c)). Em relação ao parâmetro  $e$ , as densidades  $n$  e  $f$  têm comportamentos qualitativos semelhantes (Figura 2.11 (d)).

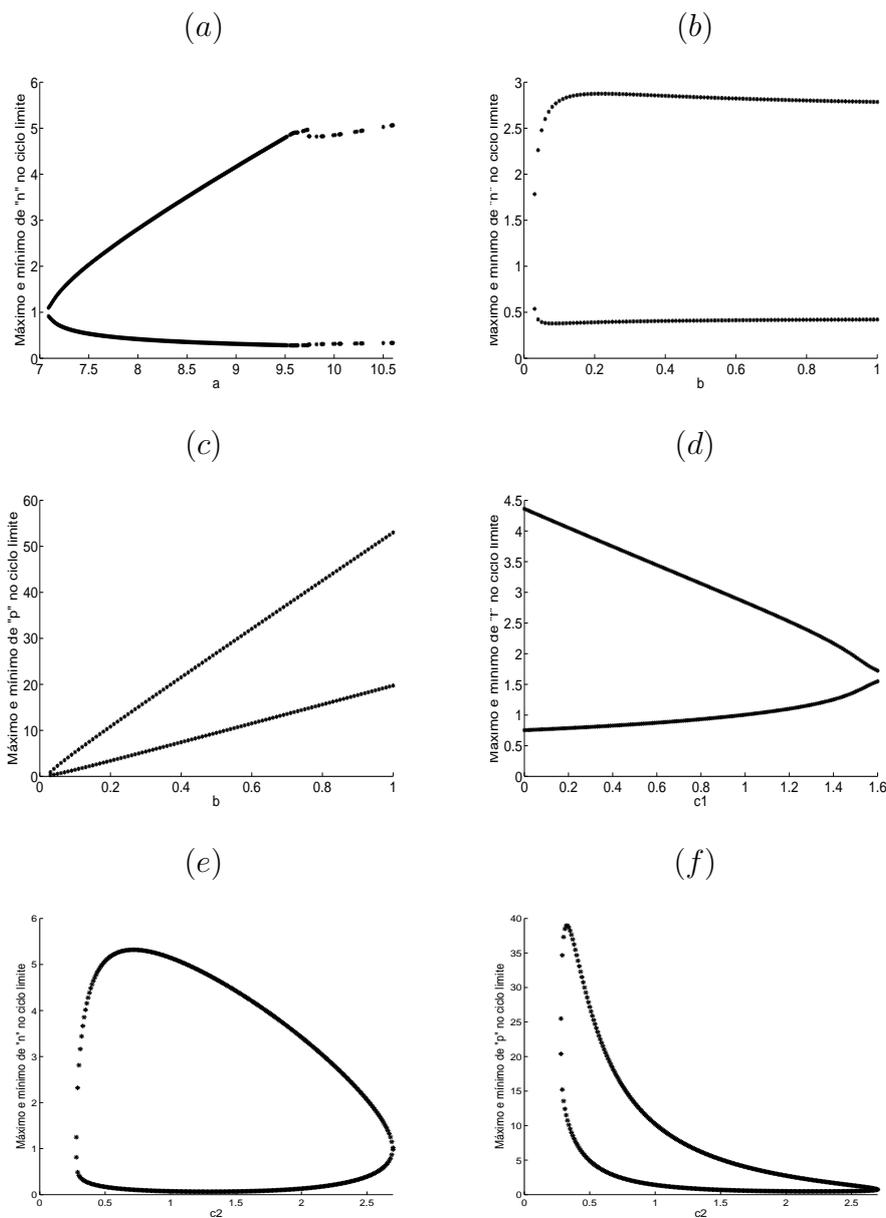


Figura 2.10: “Índices de sensibilidade” dos valores máximo e mínimo que uma densidade populacional ( $n$ ,  $f$  ou  $p$ ) assume no ciclo limite, em relação ao parâmetro indicado, sendo todos os outros parâmetros fixados;  $a = 8$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ .

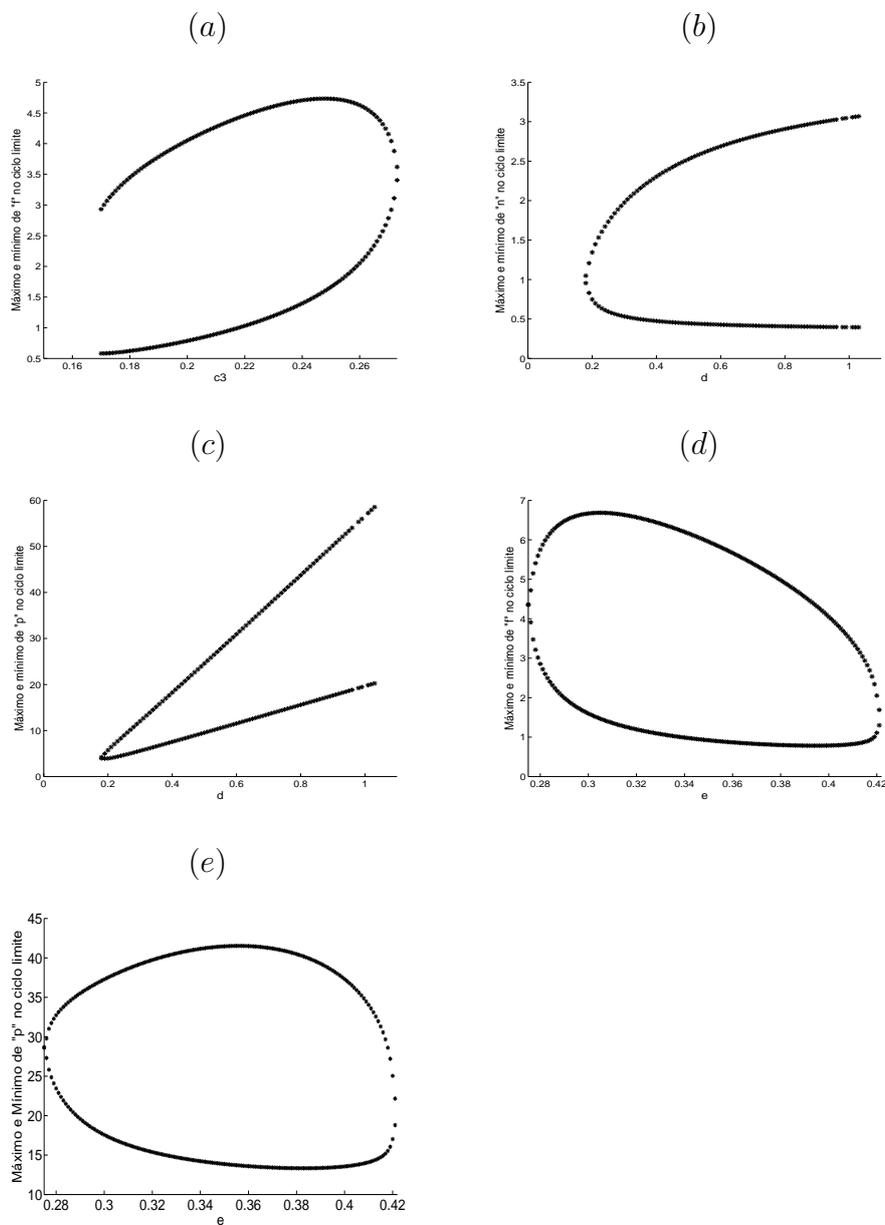


Figura 2.11: “Índices de sensibilidade” dos valores máximo e mínimo que uma densidade populacional ( $n$ ,  $f$  ou  $p$ ) assume no ciclo limite, em relação ao parâmetro indicado, sendo todos os outros parâmetros fixados;  $a = 8$ ,  $b = 0.7$ ,  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.3$ ,  $c_3 = 0.2$ ,  $d = 0.7$  e  $e = 0.4$ .

Mais especificamente, podemos dizer que: aumentando o valor de  $a$ , aumentamos a amplitude do ciclo para as três densidades, reduzindo o valor mínimo e aumentando o valor máximo de cada uma delas (Figura 2.10 (a)); aumentando o valor de  $c_1$  (Figura 2.10 (d)) ou de  $c_2$  (Figura 2.10 (e) e (f)), diminuimos a amplitude do ciclo para as três densidades, reduzindo o valor máximo e aumentando o valor mínimo de cada uma delas; aumentando o valor de  $c_3$ , aumentamos os valores máximo e mínimo das três densidades (Figura 2.11 (a)); aumentando o valor de  $b$ , aumentamos a amplitude do ciclo para  $f$  e  $p$ , aumentando os valores máximo e mínimo das duas densidades (Figura 2.10 (c)); em relação a  $n$ , alterações nos valores de  $b$  não alteram significativamente os valores máximo e mínimo desta densidade, exceto para valores muito pequenos de  $b$  ( $b < 0.1$ ) (Figura 2.10 (b)); aumentando o valor de  $d$ , aumentamos a amplitude do ciclo para  $n$ ,  $f$  e  $p$ , aumentando o valor máximo e reduzindo o valor mínimo de  $n$  (Figura 2.11 (b)); para  $f$  e  $p$ , aumentando o valor de  $d$ , aumentamos os valores máximo e mínimo das duas densidades (Figura 2.11 (c)); aumentando o valor de  $e$ , reduzimos os valores máximo e mínimo das densidades de pragas  $n$  e  $f$  (Figura 2.11 (d)); em relação a  $p$ , reduzimos o valor mínimo, enquanto o valor máximo aumenta até um determinado valor de  $e$ , depois reduz (Figura 2.11 (e)).

## 2.6 Síntese dos resultados do capítulo

O modelo proposto apresenta três pontos de equilíbrio: extinção de todas as espécies, extinção do predador/parasitóide e coexistência. Analisamos as condições de estabilidade local de cada um destes pontos e, obtivemos, através da uma técnica que envolve funções de Lyapunov, condições de estabilidade global do ponto de equilíbrio de coexistência, encontrando subconjuntos da sua bacia de atração. Além disso, mostramos analiticamente condições para uma bifurcação de Hopf. Fizemos também uma análise de sensibilidade dos números  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$ , dos equilíbrios  $E_1$  e  $E_2$  e do ciclo limite em relação a cada um dos parâmetros do modelo.

Na análise, de sensibilidade podemos destacar que, exceto por  $\gamma_a^{R_2}$ ,  $\gamma_e^{R_2}$  e  $\gamma_{c_3}^{R_2}$ , todos os outros índices de sensibilidade de  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$  mantêm o mesmo sinal ( $\gamma > 0$  ou  $\gamma < 0$ ) na região de interesse do parâmetro. Isso significa que o “tipo” de influência do parâmetro sobre o fator determinante de persistência ou não das populações não se altera na região de interesse deste parâmetro. Os índices de sensibilidade de cada coordenada dos pontos de equilíbrio também mantêm o mesmo sinal na região de interesse do parâmetro.

O número  $R_0$  é mais sensível aos parâmetros  $a$ ,  $d$  e  $c_2$ . O número  $R_1$  é mais sensível aos parâmetros  $e$  e  $c_3$ . Quanto a  $R_2$ , não é possível determinar em relação a qual parâmetro ele é mais sensível. Porém, conseguimos determinar qual tipo de influência cada um dos parâmetros tem sobre seu valor. Por exemplo, podemos dizer que altas taxas de mortalidade das populações de pragas combinadas com taxa per capita de mudança de fase e proporção de fêmeas adultas baixas podem provocar a perda da estabilidade de equilíbrio do sistema gerando oscilações nas densidades populacionais.

Quanto aos equilíbrios: as densidades  $n_1^*$  e  $f_1^*$  de  $E_1$  têm índices de sensibilidade muito parecidos em relação a todos os parâmetros; as densidades  $n_2^*$  e  $f_2^*$  de  $E_2$  são (em módulo) igualmente sensíveis aos parâmetros  $c_3$  e  $e$ ;  $f_2^*$  é mais sensível a estes parâmetros do que aos outros ( $b$ ,  $d$  e  $c_2$ ); a densidade  $p_2^*$  de  $E_2$  é sensível a todos os parâmetros; para valores altos do respectivo parâmetro, os índices de sensibilidade de  $p_2^*$  em relação a  $a$ ,  $b$  e  $d$  se aproximam de 1, enquanto o índice de sensibilidade em relação a  $e$  se aproxima de 0 (consequência da saturação da predação/parasitação); os índices de sensibilidade de  $p_2^*$  em relação a  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  crescem em módulo rapidamente quando aumentamos o parâmetro.

Por fim, quando as populações coexistem formando um ciclo limite no espaço de fase, alterações nos parâmetros causam mudanças mais significativas nos valores máximos que as densidades populacionais atingem do que nos valores mínimos. Além disso, de modo geral, podemos dizer que aumentando os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $d$  aumentamos a amplitude das oscilações das densidades e, aumentando os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  diminuimos a amplitude destas oscilações.

Todos os resultados obtidos nesta análise de sensibilidade são intuitivamente coerentes de acordo com a interpretação biológica dos parâmetros envolvidos no modelo.

A seguir, vamos incluir ao modelo formulado e analisado neste capítulo, estratégias de Manejo Integrado de Pragas (MIP), para que as populações  $n$  e  $f$  sejam mantidas em níveis toleráveis.

### 3 MODELO PARA CONTROLE DA PRAGA INCLUINDO MANEJO INTEGRADO DE PRAGAS (MIP)

Neste capítulo, adicionamos ao modelo formulado e analisado no capítulo anterior estratégias de controle da população de pragas. O Manejo Integrado de Pragas (MIP), que estamos propondo, consiste na aplicação de inseticida e na liberação de uma certa quantidade do inimigo natural da praga, quando constatado que a quantidade crescente da densidade de fêmeas adultas ultrapassa o Limiar Econômico (LE). De acordo com pesquisadores da área, para diversas espécies de pragas existem inimigos naturais que apresentam boas potencialidades para serem usados como ferramentas de controle. Por outro lado, o uso de inseticidas ainda é totalmente indispensável no controle de pragas. No Brasil, temos apenas um exemplo de controle de pragas onde não se usa mais sistematicamente inseticidas (Polanczyk et al., 2004). Além disso, experimentalmente, a estratégia de controle através do MIP tem se mostrado mais efetiva do que os métodos clássicos, tais como apenas controle biológico (liberação de predadores ou parasitóides da praga) ou apenas controle químico (uso de pesticidas).

Consideramos dois cenários para esta estratégia de MIP: no Caso I, o pesticida prejudica igualmente o crescimento das populações de pragas e predadores/parasitóides; e no Caso II, o pesticida causa mais danos às pragas do que aos predadores/parasitóides. A eficiência do MIP proposto, nas duas situações, é verificada através de simulações.

## 3.1 Formulação do modelo

### 3.1.1 Caso I

Se considerarmos que o pesticida atinge a praga e o predador/parasitóide com a mesma intensidade, o modelo com a inclusão do MIP pela intervenção humana, passa a ser descrito da seguinte forma:

- Enquanto a população de fêmeas adultas  $f$  estiver abaixo do LE, o sistema que descreve a dinâmica natural das populações (isto é, na ausência de MIP) é o sistema (2.3);
- No instante  $\tau$  em que a população de pragas  $f$  atingir o LE, a intervenção humana implicará em reduzir cada uma das populações  $n$ ,  $f$  e  $p$  pelas quantidades  $\delta n$ ,  $\delta f$  e  $\delta p$ , respectivamente, onde  $\delta = 1 - \frac{LE}{f}$ . Além disso, a população de inimigos naturais é aumentada por uma quantidade constante  $\rho$ . Portanto, as equações

$$\begin{aligned} n(\tau^+) &= (1 - \delta)n(\tau), \\ f(\tau^+) &= (1 - \delta)f(\tau), \\ p(\tau^+) &= (1 - \delta)p(\tau) + \rho \end{aligned} \tag{3.1}$$

tornam-se as condições iniciais do sistema (2.3), para  $t \geq \tau$ .

Desta forma, observamos que  $f(\tau^+) = LE$ , isto é, após a intervenção humana, o número de fêmeas adultas da praga é igual a LE.

Para  $t > \tau^+$ , a intervenção descrita acima será repetida cada vez que a população de fêmeas adultas atingir o LE.

Do ponto de vista prático, pode ser pouco viável que seja feita a medição somente das fêmeas da população adulta, para que se decida a aplicação ou não do MIP. Nestes casos, pode-se fazer a medição da população total de pragas adultas e considerar que 50% são fêmeas.

### 3.1.2 Caso II

Agora, considerando que o pesticida utilizado atinge mais a praga do que o predador/parasitóide, o modelo com a inclusão do MIP pela intervenção humana, passa a ser descrito da seguinte forma:

- Enquanto a população de fêmeas adultas  $f$  estiver abaixo do LE, o sistema que descreve a dinâmica natural das populações é o sistema (2.3);
- No instante  $\tau$  em que a população de pragas  $f$  atingir o LE, a intervenção humana implicará em reduzir cada uma das populações de pragas  $n$  e  $f$  pelas quantidades  $\delta n$  e  $\delta f$ , respectivamente, e reduzir em  $\zeta\delta p$  a população de inimigos naturais  $p$ . Além disso, a população de inimigos naturais é aumentada por uma quantidade constante  $\rho$ . Portanto, as equações

$$\begin{aligned} n(\tau^+) &= (1 - \delta)n(\tau), \\ f(\tau^+) &= (1 - \delta)f(\tau), \\ p(\tau^+) &= (1 - \zeta\delta)p(\tau) + \rho \end{aligned} \tag{3.2}$$

tornam-se as condições iniciais do sistema (2.3), para  $t \geq \tau$ .

Novamente, temos  $f(\tau^+) = LE$ . Foram usados três valores distintos para  $\zeta$ , a saber:  $\zeta = \frac{1}{2}$ ,  $\zeta = \frac{1}{10}$  e  $\zeta = 0$ . A situação  $\zeta = 0$  corresponde a  $p(\tau^+) = p(\tau) + \rho$ , ou seja, o pesticida não causa danos aos predadores/parasitóides.

Para  $t > \tau^+$ , a intervenção acima descrita será repetida cada vez que a população de fêmeas adultas atingir o LE.

## 3.2 Simulações

Nesta seção apresentamos os resultados das aplicações do MIP formuladas acima, testando a eficiência destas no controle de uma possível praga que tenha

sua dinâmica natural descrita pelo sistema (2.3). Além disso, realizamos simulações visando quantificar a influência dos valores escolhidos para  $LE$  e  $\rho$  no intervalo médio de tempo entre as aplicações das técnicas de controle.

Quanto aos parâmetros da dinâmica natural das populações  $n$ ,  $f$  e  $p$ , nossas simulações foram realizadas para os dois conjuntos especificados na tabela abaixo.

Parâmetro	$a$	$b$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$d$	$e$	Atrator no espaço de fase
Conjunto A	2	0.7	0.2	0.3	0.2	0.7	0.4	Ponto de Equilíbrio $E_2 = (1, 1.63, 1.46)$
Conjunto B	8	0.7	0.2	0.3	0.2	0.7	0.4	Ciclo Limite Figura 2.2

### 3.2.1 Densidades populacionais com MIP

Nas Figuras 3.1 e 3.2 ilustramos a inclusão do MIP - Caso I - ao modelo proposto para descrever a dinâmica populacional natural da praga e do predador/parasitóide.

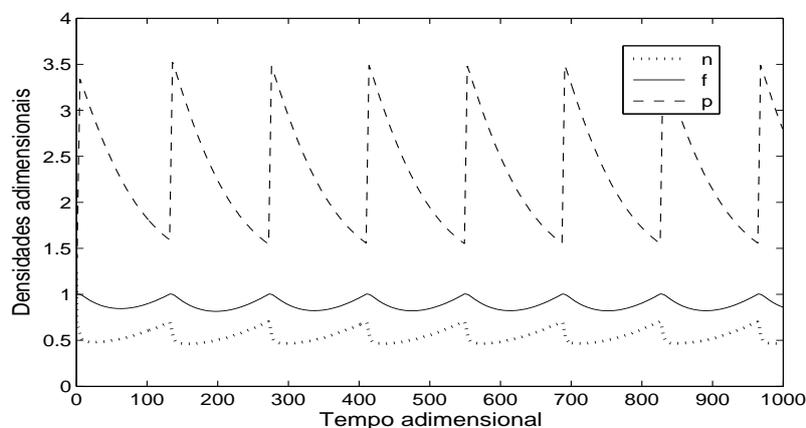


Figura 3.1: Densidades de pragas  $n$  e  $f$  e de predadores/parasitóides  $p$  considerando MIP - Caso I -  $LE = 1$  e  $\rho = 0.5$ ; conjunto de parâmetros A.

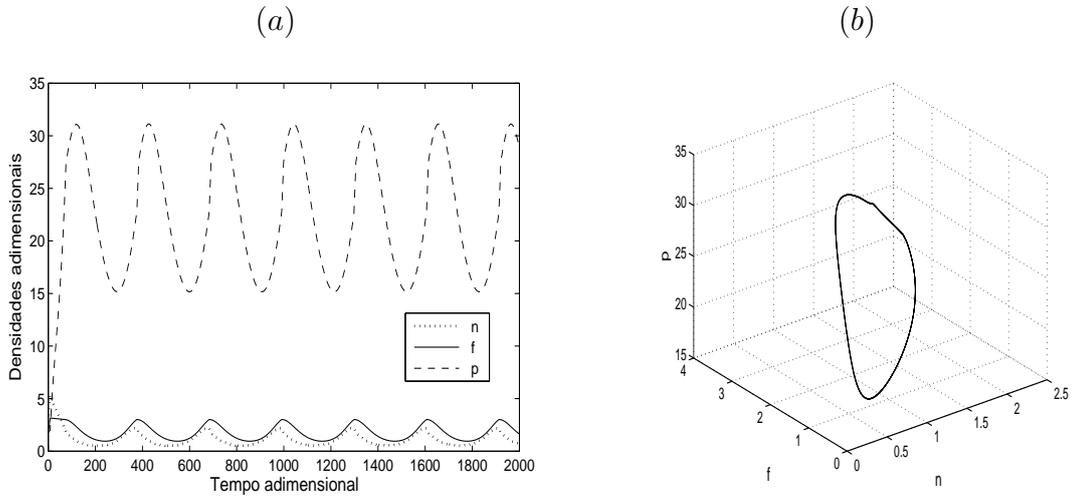


Figura 3.2: Conjunto de parâmetros B; MIP - Caso I -  $LE = 3$  e  $\rho = 0.5$ ; (a) densidades de pragas  $n$  e  $f$  e de predadores/parasitóides  $p$ ; (b) espaço de fase.

Na Figura 3.1 escolhemos o conjunto de parâmetros A e a condição inicial  $(n_0, f_0, p_0) = (1.3, 2, 1.8)$ . Estabelecemos um Limiar Econômico  $LE = 1 < f^*$  (neste caso,  $f^* \approx 1.63$ ). Além disso, a quantidade de predadores/parasitóides inseridos no sistema ao aplicarmos as técnicas de controle é  $\rho = 0.5$ . Neste caso, verificamos que as técnicas são eficientes, mantendo a densidade de fêmeas adultas abaixo do  $LE$ . A densidade de larvas da praga também é mantida abaixo do valor de equilíbrio ( $n^* = 1$ ). Além disso, o MIP altera o comportamento qualitativo das soluções. Em um espaço de parâmetros para o qual as populações coexistem naturalmente em equilíbrio, ao considerarmos o MIP todas as densidades populacionais passam a oscilar. Por fim, é relevante, o fato de que, depois dos transientes, as aplicações do MIP tornam-se periódicas, ou seja, os intervalos de tempo entre as aplicações das técnicas de controle tornam-se constantes (entre 138 e 139 iterações temporais: 4 aplicações consecutivas do MIP fazem com que a densidade populacional de pragas  $f$  permaneça abaixo do  $LE$  por mais 134 ou 135 iterações).

Na Figura 3.2 aumentamos o valor escolhido para o parâmetro  $a$  (conjunto de parâmetros B). Consideramos  $LE = 3$  para as fêmeas adultas da praga e  $\rho = 0.5$ . Novamente, as técnicas de controle são eficientes, mantendo a densidade de

fêmeas adultas abaixo do  $LE$  (Figura 3.2 (a)). Qualitativamente, podemos ver que, com MIP, o ciclo limite mantém-se no espaço de fase (Figura 3.2 (b)). Entretanto, dependendo da escolha dos parâmetros, o ciclo limite pode se desfazer ao aplicarmos as técnicas de controle. Nestes casos, as densidades populacionais oscilam, porém no espaço de fase não tem-se a configuração de um ciclo limite. Também observamos que, depois dos transientes, as aplicações do MIP tornam-se periódicas (intervalos de tempo entre as aplicações das técnicas de controle entre 307 e 308 iterações temporais: 8 aplicações consecutivas do MIP fazem com que a densidade populacional de pragas  $f$  permaneça abaixo do  $LE$  por mais 299 ou 300 iterações).

Se aplicarmos o MIP - Caso II - em que o pesticida utilizado atinge mais a praga do que o predador/parasitóide, não observamos, exceto pelos transientes, alterações significativas no comportamento das populações em relação ao Caso I. Isso pode ser explicado pelo fato de que o predador/parasitóide especialista se alimenta apenas de larvas da praga. No momento em que reduzimos a população de larvas, reduzimos alimentação e hospedeiro deste predador/parasitóide especialista, portanto sua população também decairá, mesmo não sendo atingida pelo pesticida.

### 3.2.2 O intervalo médio de tempo entre as aplicações do MIP

Agora, vamos fazer uma análise mais detalhada da influência dos parâmetros  $LE$  e  $\rho$  no intervalo médio de tempo entre as aplicações das técnicas de controle.

Visando quantificar como o intervalo médio de tempo  $\Delta t$ , entre as aplicações das técnicas de controle, varia como função de  $LE$ , realizamos simulações nas quais calculamos o valor de  $\Delta t$  para diversas escolhas de  $LE$ , de modo que não houvesse prejuízo econômico. Este intervalo médio de tempo pode ser facilmente visualizado na Figura 3.1, correspondendo ao intervalo de tempo entre dois mínimos consecutivos da curva de predadores/parasitóides.

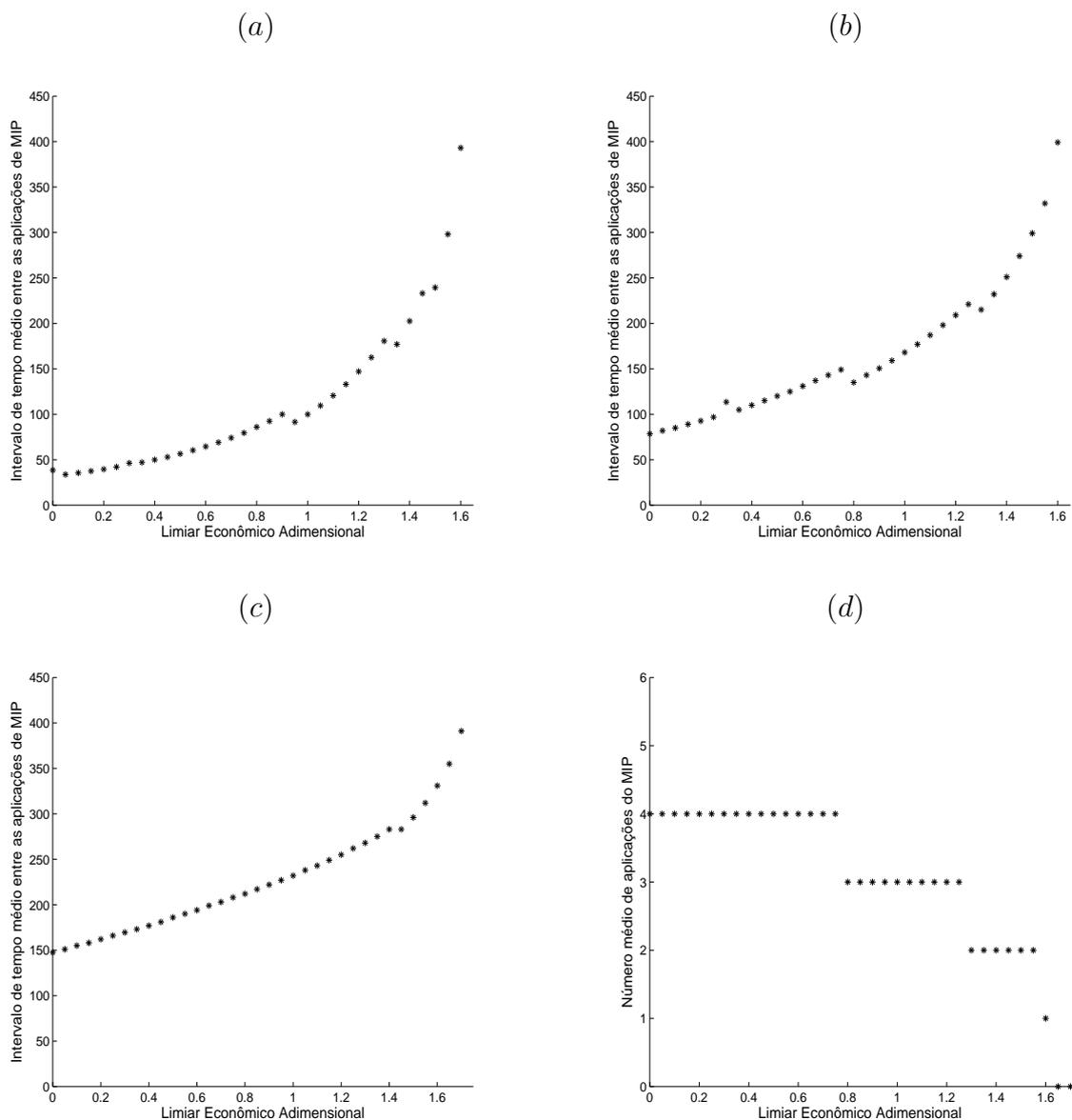


Figura 3.3: Conjunto de parâmetros A; MIP - Caso II -  $\zeta = 0$ ; (a), (b) e (c)  $\Delta t \times LE$  com  $\rho = 0.3, 1$  e  $5$ , respectivamente; (d)  $m_a \times LE$  com  $\rho = 1$ .

Na Figura 3.3, fixamos os parâmetros adimensionais de acordo com o conjunto A e consideramos o valor máximo de  $LE$  sendo o valor de equilíbrio das fêmeas adultas ( $f_2^* \approx 1.63$  para esta escolha dos parâmetros). Para valores de

$LE$  maiores do que  $f_2^*$  a população tende a se estabelecer em níveis toleráveis sem nenhuma aplicação do MIP.

De modo geral,  $\Delta t$  cresce com o aumento do  $LE$ , formando uma curva com concavidade voltada para cima. Por outro lado, quando aumentamos a densidade  $\rho$  de predadores/parasitóides inseridos no sistema a cada aplicação do MIP, a curva gerada pelos pontos  $\Delta t \times LE$  torna-se menos acentuada (Figura 3.3(a), (b) e (c)). Aumentando  $\rho$ ,  $\Delta t$  assume valores mais altos para valores pequenos do  $LE$  e a taxa de variação de  $\Delta t$  com relação a  $LE$  diminui.

A Figura 3.3(d) apresenta o número médio  $m_a$  de aplicações consecutivas necessárias das técnicas de controle durante um intervalo médio de tempo  $\Delta t \times LE$ , de modo que a população se mantenha em níveis toleráveis. O número médio  $m_a$  coincide com o intervalo de tempo, na Figura 3.1, de um mínimo até um máximo consecutivos da curva de predadores/parasitóides. Os pontos formam uma escada decrescente, portanto, como é esperado, aumentando o  $LE$ , são necessárias menos aplicações do MIP e a população de pragas se mantém em níveis toleráveis por um intervalo médio de tempo  $\Delta t$  maior (Figura 3.3(b) e (d)). Também foram feitas simulações para o Caso I e para cada uma das situações restantes do Caso II ( $\zeta = \frac{1}{2}$  e  $\zeta = \frac{1}{10}$ ). Nestes casos o comportamento das populações apresenta as mesmas características do Caso II -  $\zeta = 0$ .

Consideramos também o conjunto de parâmetros B (Figura 3.4), com o valor máximo de  $LE$  sendo a densidade mais alta alcançada pela população de fêmeas adultas no ciclo limite ( $f \approx 4$  para esta escolha dos parâmetros).

Observamos novamente que  $\Delta t$  cresce com o aumento do  $LE$ , mas as curvas apresentam um ponto de inflexão, que não aparecia nas curvas da Figura 3.3. As curvas começam com concavidade voltada para cima (crescendo rapidamente quando  $LE$  cresce) e depois do ponto de inflexão passam a ter concavidade voltada para baixo (crescendo mais lentamente quando  $LE$  cresce). É importante destacar que este ponto de inflexão ocorre para valores de  $LE$  que não fazem sentido na Figura 3.3. Por outro lado, como na Figura 3.3, quando aumentamos a densidade

$\rho$  de predadores/parasitóides inseridos no sistema em cada aplicação do MIP, a curva  $\Delta t \times LE$  torna-se menos acentuada (Figura 3.4(a), (b) e (c)). Mais ainda, comparando as Figuras 3.3 e 3.4 (para  $0 \leq LE \leq 1.63$ ), podemos observar que  $\Delta t$  na situação de equilíbrio é maior do que  $\Delta t$  no ciclo limite, para cada valor de  $LE$ .

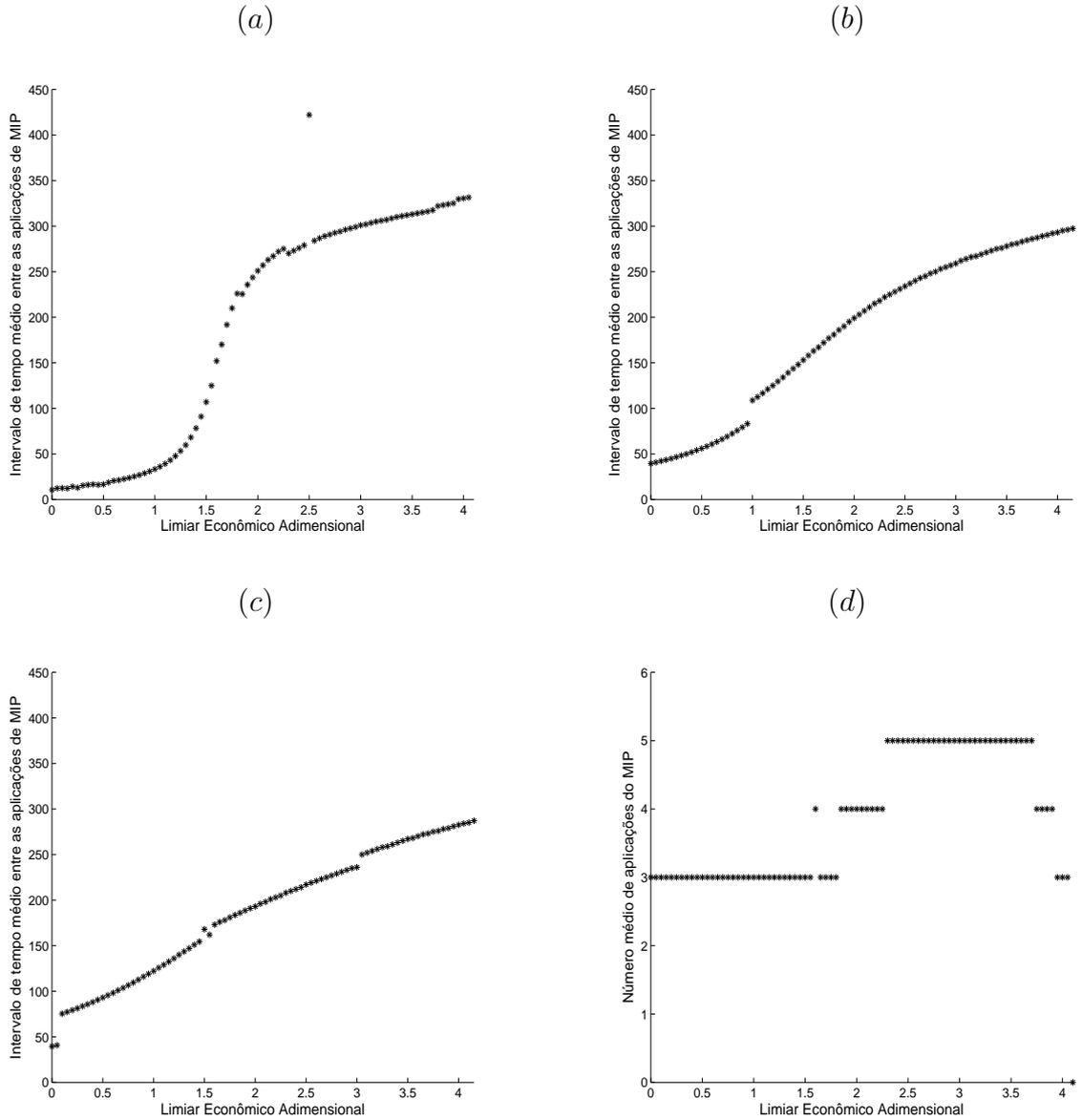


Figura 3.4: Conjunto de parâmetros B; MIP - Caso I; (a), (b) e (c)  $\Delta t \times LE$  com  $\rho = 1, 5$  e  $10$ , respectivamente; (d)  $m_a \times LE$  com  $\rho = 1$ .

Na Figura 3.4(d) os pontos aparecem novamente formando uma escada. Para os valores de  $LE$  que fazem sentido na Figura 3.3(d) ( $0 \leq LE \leq 1.63$ ) o número médio  $m_a$  de aplicações necessárias das técnicas de controle durante um intervalo médio de tempo  $\Delta t$  é constante. Isso pode ser explicado pelo fato de que, para um mesmo aumento de  $LE$  (de 0 a 1.5) observamos que, na Figura 3.3(a),  $\Delta t$  aumenta em torno de 360, enquanto na Figura 3.4(a) o correspondente aumento é em torno de 180. Para valores de  $LE$  maiores do que 1.5 o número médio  $m_a$  de aplicações necessárias das técnicas de controle durante um intervalo médio de tempo  $\Delta t$  aumenta e em seguida diminui. Também foram feitas simulações para o Caso II ( $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \frac{1}{2}$  e  $\zeta = \frac{1}{10}$ ). Nestes casos o comportamento das populações apresenta as mesmas características do Caso I.

Na Figura 3.5 analisamos como o intervalo médio de tempo  $\Delta t$  entre as aplicações das técnicas de controle, e como o número médio  $m_a$  de aplicações necessárias das técnicas de controle durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , variam como função da densidade  $\rho$  de predadores/parasitóides liberados no sistema. Os gráficos ilustram o Caso II para  $\zeta = \frac{1}{2}$ .

Para o conjunto de parâmetros A, o número médio  $m_a$  decresce quando aumentamos o valor de  $\rho$  (Figura 3.5(b)). Além disso, exceto por alguns valores específicos de  $\rho$ , quando aumentamos o valor de  $\rho$ , o valor de  $\Delta t$  também aumenta e a curva tem concavidade voltada para baixo ( $\Delta t$  aumenta mais lentamente quando  $\rho$  aumenta) (Figura 3.5(a)). Para estes valores específicos de  $\rho$ , a curva  $\Delta t \times \rho$  apresenta descontinuidades. Estas descontinuidades ocorrem exatamente nos valores de  $\rho$  para os quais o intervalo médio de tempo  $\Delta t$  entre as aplicações das técnicas de controle muda de valor. Analisamos detalhadamente o comportamento das populações para cada um destes valores de  $\rho$  e não observamos nenhum tipo de alteração no comportamento destas, em comparação aos outros valores de  $\rho$ . Em momentos futuros pretendemos considerar a distribuição espacial das populações e investigar a formação de padrões espaciais interessantes para estes valores de parâmetros. Portanto, de modo geral, podemos dizer que quanto maior for a quantidade de predadores/parasitóides inseridos no sistema, menos aplicações das técnicas de

controle são necessárias e estas mantêm a população de pragas em níveis toleráveis por mais tempo.

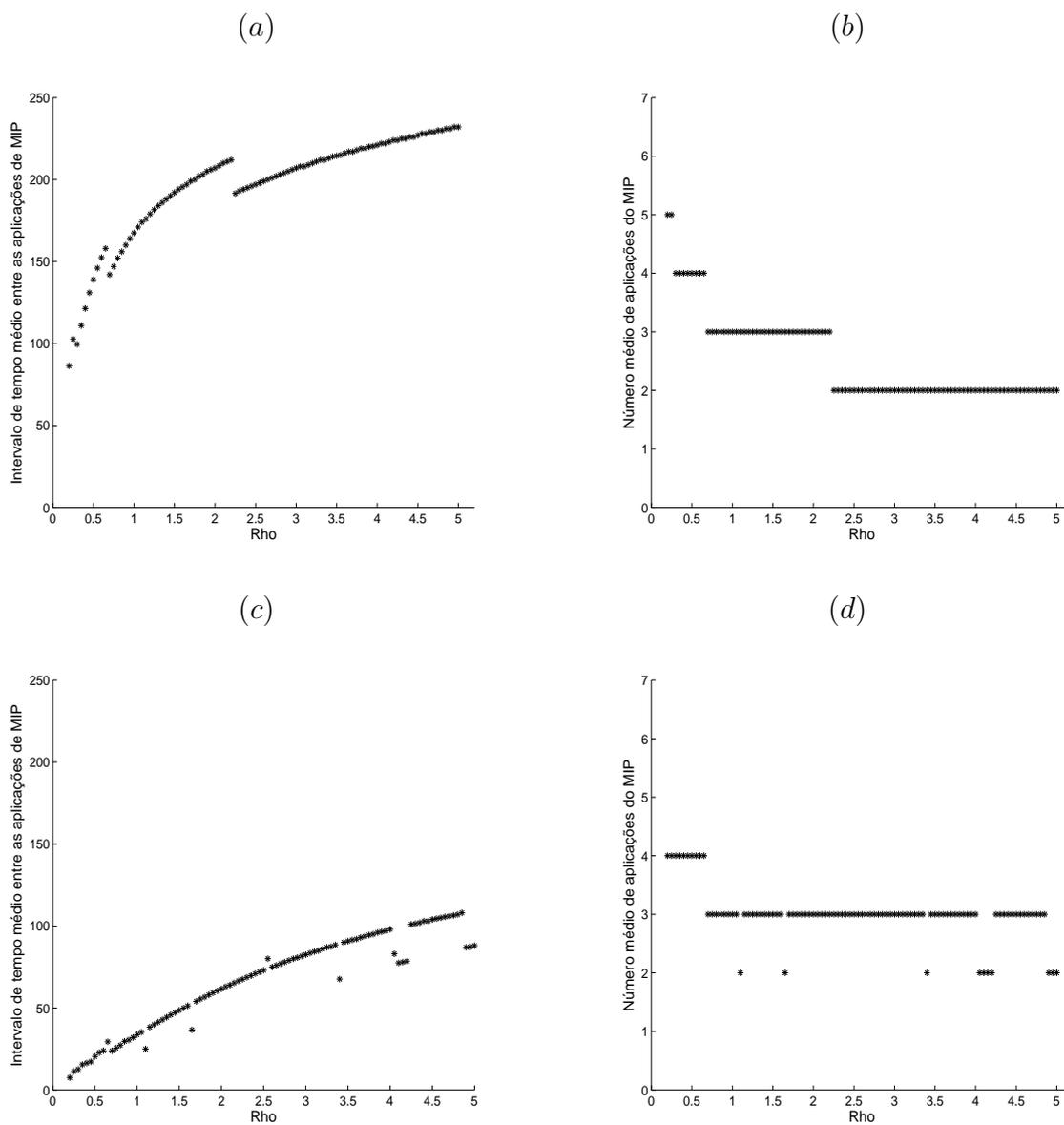


Figura 3.5: (a) e (b) conjunto de parâmetros A; (c) e (d) conjunto de parâmetros B.

Para o conjunto de parâmetros B, o número médio  $m_a$  mantém-se constante para os valores de  $\rho$  considerados, com algumas exceções (Figura 3.5(d)). Por outro lado, exceto também por alguns valores específicos de  $\rho$ , o valor de  $\Delta t$  aumenta

formando uma curva com concavidade voltada para baixo, quando aumentamos o valor de  $\rho$  (Figura 3.5(c)). Assim como no caso anterior (conjunto de parâmetros A), analisamos detalhadamente o comportamento das populações para cada um destes valores específicos de  $\rho$  e não observamos nenhum tipo de alteração no comportamento destas, em comparação aos outros valores de  $\rho$ .

No Caso I e nas outras duas situações do Caso II, os resultados apresentam características semelhantes às deste caso.

### 3.3 Síntese dos resultados do capítulo

A estratégia de MIP proposta mostrou-se eficiente nas simulações, mantendo a população de pragas em níveis toleráveis. Depois dos transientes, em todos os casos analisados, as aplicações de MIP tornam-se periódicas. Isso é muito importante do ponto de vista da aplicação concreta desta estratégia, pois, nestes casos, depois de um determinado tempo, o produtor não precisa mais “medir” a população de pragas antes de aplicar as técnicas de controle. Além disso, observamos que o fato de o predador/parasitóide ser resistente ao pesticida, praticamente, não influencia no comportamento das populações para os conjuntos de parâmetros considerados. Por outro lado, a aplicação das técnicas de controle altera significativamente o comportamento qualitativo das populações. Por exemplo, altera a frequência e a amplitude das oscilações que aparecem na evolução temporal das populações.

Os valores de Limiar Econômico  $LE$  e quantidade  $\rho$  de predadores/parasitóides liberados no sistema influenciam fortemente o intervalo médio de tempo  $\Delta t$  entre as aplicações das técnicas de controle e o número médio  $m_a$  de aplicações necessárias das técnicas de controle neste intervalo de tempo. Para determinados conjuntos de parâmetros, uma pequena modificação no valor estabelecido para  $LE$  ou  $\rho$  pode modificar significativamente o intervalo de tempo entre as aplicações das técnicas de controle.

No que segue, vamos incluir ao modelo formulado e analisado no capítulo anterior a distribuição espacial dos indivíduos. Além disso, vamos aplicar o MIP neste modelo considerando a influência das regras de movimentação estabelecidas para as populações adultas.

## 4 MODELO PARA CONTROLE DA PRAGA INCLUINDO MIP E ESTRUTURA ESPACIAL

Neste capítulo, incluímos ao modelo proposto no Capítulo 2 uma estrutura espacial discreta, na qual estamos supondo diferentes regras de movimentação. A inclusão do espaço como variável independente faz com que o modelo aproxime melhor o comportamento de indivíduos biológicos, pois a dispersão no espaço é uma característica fundamental destes, principalmente em modelos presa-predador e parasitóide-hospedeiro.

O habitat é representado por uma malha (matriz) bidimensional de tamanho  $L \times L$  sítios (ou “patches”). Dentro de cada sítio, utilizamos para a dinâmica vital o modelo (2.3) que descreve a dinâmica populacional natural local. Assumimos que as populações estejam homogeneamente distribuídas dentro de cada sítio e que as fronteiras da malha sejam reflexivas, ou seja, os indivíduos não atravessam as fronteiras, permanecendo no interior do espaço. Esta condição de fronteira pode representar o fato de que fora do domínio considerado, o ambiente é inóspito. Isso pode ser percebido por muitas espécies que então, não deixam a região.

O MIP para o modelo com distribuição espacial é considerado tendo como base a formulação do capítulo anterior. A densidade populacional  $f$  é medida, a cada iteração, em uma quantidade fixada de sítios da malha, determinando se as técnicas de controle devem ser utilizadas.

### 4.1 Formulação do modelo com estrutura espacial

A ideia do modelo é acoplar o conjunto de equações diferenciais que descreve a dinâmica local dos indivíduos com uma movimentação entre os sítios de uma vizinhança. Diferentes configurações de vizinhanças podem ser utilizadas. Identificando cada sítio com uma posição  $x = (i, j)$ , se considerarmos que o acoplamento acontece com os oito vizinhos mais próximos, definimos as seguintes vizinhanças de

$x$ :

$$V_x = \{(i-1, j+1), (i, j+1), (i+1, j+1), (i+1, j), \\ (i+1, j-1), (i, j-1), (i-1, j-1), (i-1, j)\} \quad (4.1)$$

e

$$\overline{V}_x = V_x \cup \{x\}. \quad (4.2)$$

Estas vizinhanças são conhecidas como vizinhanças de Moore.

Consideramos que apenas os indivíduos adultos se movimentam. A dinâmica do modelo com dispersão ocorre, portanto, em duas etapas distintas: uma fase de movimentação, em que ocorre a dispersão espacial dos indivíduos adultos, e uma fase de reação, em que ocorrem as interações intra e interespecíficas dentro de cada sítio, descrita pelo sistema (2.3).

Representando por  $n_x(t)$ ,  $f_x(t)$  e  $p_x(t)$ , respectivamente, as densidades de pragas no estágio de larva, fêmeas adultas e predadores/parasitóides no sítio  $x$ , no instante  $t$ , antes da dispersão; e por  $n'_x(t)$ ,  $f'_x(t)$  e  $p'_x(t)$ , respectivamente, as suas densidades no sítio  $x$ , no instante  $t$ , após a dispersão, podemos escrever as equações para a fase de dispersão das pragas e dos predadores/parasitóides como segue:

$$\begin{cases} n'_x(t) = n_x(t), \\ f'_x(t) = f_x(t) - \sum_{y \in V_x} S_y^f(t) + \sum_{y \in V_x} E_y^f(t), \\ p'_x(t) = p_x(t) - \sum_{y \in V_x} S_y^p(t) + \sum_{y \in V_x} E_y^p(t), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $S_y^f(t)$  e  $S_y^p(t)$  representam, respectivamente, as quantidades de fêmeas adultas e predadores/parasitóides que saem do sítio  $x$  e vão para cada um dos sítios  $y \in V_x$ , a cada iteração temporal;  $E_y^f(t)$  e  $E_y^p(t)$  representam, respectivamente, as quantidades de fêmeas adultas e predadores/parasitóides que entram no sítio  $x$ , vindas de cada um dos sítios  $y \in V_x$ , a cada iteração temporal.

Após a fase de dispersão, ocorrem, em cada sítio da malha, as interações intra e interespecíficas (reprodução, morte natural e predação):

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = af'(1 - \frac{n'}{a}) - (b + c_1)n' - \frac{n'p'}{1+n'}, \\ \frac{df}{dt} = bdn' - c_2f', \\ \frac{dp}{dt} = e\frac{n'p'}{1+n'} - c_3p'. \end{cases} \quad (4.4)$$

Consideramos três tipos diferentes de movimentação para as populações adultas: difusão, taxia local e taxia quase local, o que nos levará a definições distintas para  $S_y^f(t)$ ,  $S_y^p(t)$ ,  $E_y^f(t)$  e  $E_y^p(t)$  em (4.3).

#### 4.1.1 Dispersão por difusão

Quando os indivíduos adultos se dispersam de acordo com um processo difusivo, introduzimos dois parâmetros  $D_f$  e  $D_p$  ( $0 < D_f < 1$  e  $0 < D_p < 1$ ), denominados coeficientes de dispersão.  $D_f$  e  $D_p$  representam a fração de pragas adultas e predadores/parasitóides, respectivamente, que deixa um sítio, a cada passo de tempo, dispersando-se igualmente entre os seus oito vizinhos mais próximos. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} S_y^f(t) &= D_f \frac{f_x(t)}{8}, & S_y^p(t) &= D_p \frac{p_x(t)}{8}, \\ E_y^f(t) &= D_f \frac{f_y(t)}{8} & \text{e} & E_y^p(t) = D_p \frac{p_y(t)}{8}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

de modo que as equações para a fase de dispersão das populações adultas dadas em (4.3), podem ser escritas sob a forma

$$\begin{cases} f'_x(t) = (1 - D_f)f_x(t) + \frac{D_f}{8} \sum_{y \in V_x} f_y(t), \\ p'_x(t) = (1 - D_p)p_x(t) + \frac{D_p}{8} \sum_{y \in V_x} p_y(t). \end{cases} \quad (4.6)$$

Este esquema de movimentação corresponde, se  $D_f$  e  $D_p$  são constantes, na escala macroscópica, ao processo de difusão simples.

### 4.1.2 Dispersão orientada - taxia local

A dispersão por taxia é caracterizada pelo fato de que os indivíduos têm seu movimento orientado por algum estímulo (Chakraborty et al., 2007; Edelstein-Keshet, 1988; Kareiva & Odell, 1987; Segel, 1984). Os indivíduos dispõem de mecanismos de percepção de gradientes de concentração de um agente atrator (ou repelente), o que os leva a se movimentar na direção do gradiente. Neste caso, a fração de indivíduos que se dispersa de cada sítio poderá não ser igualmente distribuída entre os vizinhos considerados.

No caso de dispersão por taxia local, os indivíduos possuem percepção limitada ao sítio em que se encontram, respondendo somente a informações locais (por exemplo, através do tato ou sabor). Eles percebem as diferenças de concentração do seu predador/parasitóide ou da sua presa/hospedeiro no sítio e com base nestas informações, se fixam ou abandonam o local. Podemos dizer que eles adotam uma estratégia de pesquisa em área restrita.

Para representar esta situação, consideramos que os coeficientes de dispersão das populações adultas sejam funções dependentes das densidades da outra espécie em cada sítio do domínio. Mais especificamente, temos  $D_f = D_f(p_x(t))$  e  $D_p = D_p(n_x(t))$ .

Para estabelecer as funções  $D_f(p_x(t))$  e  $D_p(n_x(t))$  vamos considerar a hipótese de que ambas as espécies movimentam-se em resposta a algum estímulo emitido pela outra, isto é, pragas e predadores/parasitóides conseguem perceber a densidade da outra espécie no sítio em que se encontram (Mistro et al., 2010). Além disso, vamos supor que quanto maior (menor) a densidade de predadores/parasitóides em um sítio, maior (menor) será a fração de pragas que se dispersa deste sítio, de modo que o coeficiente de dispersão das pragas seja uma função crescente da densidade de predadores/parasitóides (Figura 4.1(a)):

$$D_f(p_x(t)) = \frac{p_x(t)}{1 + p_x(t)}; \quad (4.7)$$

por outro lado, vamos supor que quanto maior (menor) a densidade de pragas em um sítio, menor (maior) será a fração de predadores/parasitóides que se dispersa deste sítio, a cada geração, de modo que o coeficiente de dispersão dos predadores/parasitóides seja uma função decrescente da densidade de larvas da praga (Figura 4.1(b)):

$$D_p(n_x(t)) = \frac{1}{1 + n_x(t)}. \quad (4.8)$$

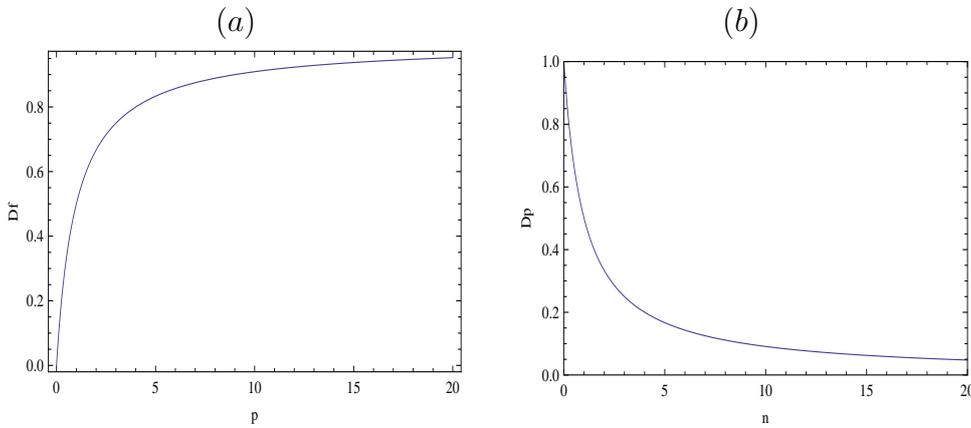


Figura 4.1: (a) e (b) coeficientes de dispersão  $D_f$  e  $D_p$ , dependentes das densidades  $p$  e  $n$ , respectivamente.

Neste caso, as equações para a fase de dispersão das populações adultas dadas em (4.6), tornam-se:

$$\begin{cases} f'_x(t) = [1 - D_f(p_x(t))]f_x(t) + \sum_{y \in V_x} \frac{D_f(p_y(t))}{8} f_y(t), \\ p'_x(t) = [1 - D_p(n_x(t))]p_x(t) + \sum_{y \in V_x} \frac{D_p(n_y(t))}{8} p_y(t), \end{cases} \quad (4.9)$$

onde  $D_f(p_x(t))$  e  $D_p(n_x(t))$  são dados em (4.7) e (4.8).

### 4.1.3 Dispersão orientada - taxia quase local

Quando os indivíduos biológicos podem detectar estímulos que não exigem contato direto e se dispersar a partir destes estímulos, dizemos que eles se movimentam por um processo de taxia quase local. No caso de sistemas presa-predador, a detecção de um estímulo pode ser realizada por meio de um campo

de sinais (odores, visão) emitido pelo conjunto de predadores (ou presas) de uma determinada vizinhança (Rodrigues, 1998).

Agora, ao invés de considerar que pragas e predadores/parasitóides conseguem perceber a densidade da outra espécie apenas no sítio em que se encontram e decidem se saem ou ficam, vamos considerar que eles percebem a densidade da outra espécie na vizinhança  $V_x$  além do seu próprio sítio  $x$ . Assim, podem se movimentar para os sítios da vizinhança ou permanecer no sítio original de acordo com as informações coletadas.

Neste caso, para formular as expressões que descrevem  $S_y^f(t)$ ,  $S_y^p(t)$ ,  $E_y^f(t)$  e  $E_y^p(t)$  presentes em (4.3), vamos considerar as hipóteses (Silveira, 2010):

- as pragas e os predadores/parasitóides que estão no sítio  $x$  conseguem comparar as densidades (da outra espécie) em cada sítio da vizinhança  $\overline{V_x}$  e assim “escolher” para qual sítio devem se locomover a cada iteração temporal, ou se devem permanecer onde estão;
- uma fração maior de predadores/parasitóides deve se locomover para o sítio de maior densidade relativa de pragas;
- uma fração menor de pragas deve se locomover para o sítio de maior densidade relativa de predadores/parasitóides.

De acordo com estas hipóteses definimos:

$$S_y^f(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(1 - \frac{p_y(t)}{\Omega_x^p(t)}\right) f_x(t), & \text{se } \Omega_x^p(t) \neq 0, \\ \frac{f_x(t)}{8}, & \text{se } \Omega_x^p(t) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $\Omega_x^p(t) = \sum_{y \in \overline{V_x}} p_y(t)$ ;

$$S_y^p(t) = \begin{cases} \frac{n_y(t)}{\Omega_x^n(t)} p_x(t), & \text{se } \Omega_x^n(t) \neq 0, \\ 0, & \text{se } \Omega_x^n(t) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

onde  $\Omega_x^n(t) = \sum_{y \in \overline{V_x}} n_y(t)$ ;

$$E_y^f(t) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(1 - \frac{p_x(t)}{\Omega_y^p(t)}\right) f_y(t), & \text{se } \Omega_y^p(t) \neq 0, \\ \frac{f_y(t)}{8}, & \text{se } \Omega_y^p(t) = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

onde  $\Omega_y^p(t) = \sum_{z \in \overline{V_y}} p_z(t)$ ,  $\overline{V_y} = V_y \cup \{y\}$  e, para cada  $y \in \overline{V_x}$ , temos:

$$y = (i-1, j+1) \implies V_y = \{(i-2, j+2), (i-1, j+2), (i, j+2), (i, j+1), \\ (i, j), (i-1, j), (i-2, j), (i-2, j+1)\},$$

$$y = (i, j+1) \implies V_y = \{(i-1, j+2), (i, j+2), (i+1, j+2), (i+1, j+1), \\ (i+1, j), (i, j), (i-1, j), (i-1, j+1)\},$$

$$y = (i+1, j+1) \implies V_y = \{(i, j+2), (i+1, j+2), (i+2, j+2), (i+2, j+1), \\ (i+2, j), (i+1, j), (i, j), (i, j+1)\},$$

$$y = (i+1, j) \implies V_y = \{(i, j+1), (i+1, j+1), (i+2, j+1), (i+2, j), \\ (i+2, j-1), (i+1, j-1), (i, j-1), (i, j)\},$$

$$y = (i+1, j-1) \implies V_y = \{(i, j), (i+1, j), (i+2, j), (i+2, j-1), \\ (i+2, j-2), (i+1, j-2), (i, j-2), (i, j-1)\},$$

$$y = (i, j-1) \implies V_y = \{(i-1, j), (i, j), (i+1, j), (i+1, j-1), \\ (i+1, j-2), (i, j-2), (i-1, j-2), (i-1, j-1)\},$$

$$y = (i-1, j-1) \implies V_y = \{(i-2, j), (i-1, j), (i, j), (i, j-1), \\ (i, j-2), (i-1, j-2), (i-2, j-2), (i-2, j-1)\},$$

$$y = (i-1, j) \implies V_y = \{(i-2, j+1), (i-1, j+1), (i, j+1), (i, j), \\ (i, j-1), (i-1, j-1), (i-2, j-1), (i-2, j)\};$$

$$E_y^p(t) = \begin{cases} \frac{n_x(t)}{\Omega_y^n(t)} p_y(t), & \text{se } \Omega_y^n(t) \neq 0, \\ 0, & \text{se } \Omega_y^n(t) = 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

onde  $\Omega_y^n(t) = \sum_{z \in \bar{V}_y} n_z(t)$ .

Portanto, a fase de dispersão das populações adultas, de acordo com o processo de taxia quase local, é descrita pelas equações (4.3), onde  $S_y^f(t)$ ,  $S_y^p(t)$ ,  $E_y^f(t)$  e  $E_y^p(t)$  são dadas por (4.10), (4.11), (4.12) e (4.13), respectivamente.

## 4.2 Formulação do modelo com MIP e estrutura espacial

Quando incluímos a estrutura espacial, para simular a aplicação das técnicas de controle consideramos que os  $L \times L$  sítios da malha estão organizados em  $\frac{L}{M}$  blocos de tamanho  $M \times M$  sítios. Iremos supor que a movimentação dos indivíduos adultos possa ser descrita por processos de difusão (subseção 4.1.1), taxia local (subseção 4.1.2) ou taxia quase local (subseção 4.1.3) e, ocorra a cada passo de tempo.

As técnicas de controle consideradas são aquelas apresentadas no Capítulo 3. Para o MIP em um sistema espacialmente distribuído, adotamos a seguinte forma (Lima, 2010):

- a) A cada passo de tempo, a densidade populacional  $f$  é medida em aproximadamente 15% dos sítios de cada bloco da malha, sendo estes sítios selecionados aleatoriamente (utilizando um gerador de números aleatórios de um programa computacional).
- b) Em cada bloco tem-se a seguinte situação:
  - Se a densidade  $f$  estiver abaixo do Limiar Econômico (LE) em mais de 90% destes sítios, a dinâmica em cada sítio do bloco é descrita pelo sistema que descreve a dinâmica natural das populações;
  - Se a densidade  $f$  atingir o LE em 10% dos sítios selecionados, aplica-se o MIP em todos os sítios do bloco.

No passo de tempo seguinte, inicia-se medindo-se novamente a densidade  $f$  como descrito em **a)** acima.

### 4.3 Simulações

As simulações foram feitas com o objetivo de mostrar o comportamento das populações de pragas e predadores/parasitóides para cada um dos três tipos de dispersão formulados acima. Além disso, elas mostram a eficiência do MIP no modelo com distribuição espacial.

Para todas as simulações consideramos uma malha bidimensional com  $55 \times 55$  sítios e dois conjuntos de parâmetros adimensionais para a dinâmica local: Conjunto A e Conjunto B, apresentados na segunda seção do Capítulo 3. Como condição inicial consideramos  $n_x(0) = 1.3$ ,  $f_x(0) = 2$  e  $p_x(0) = 1.8$ , onde  $x = (28, 28)$  é o sítio localizado no centro do domínio, e todos os outros sítios estão inicialmente vazios. Outras condições iniciais, como focos das três densidades em outras posições da malha ou espalhados por toda a malha, foram testadas e os resultados pós-transientes foram idênticos. Para a aplicação do MIP, consideramos blocos com  $11 \times 11$  sítios.

#### 4.3.1 Dispersão por difusão

Em um primeiro momento, vamos analisar o comportamento das populações de pragas e predadores/parasitóides quando estes se dispersam de acordo com o processo difusivo.

Na Figura 4.3 temos a distribuição espacial das populações de pragas  $n$  e  $f$  e, da população de predadores/parasitóides  $p$ , em diversos instantes de tempo, para os parâmetros indicados. Para cada linha de gráficos desta figura, a escala é apresentada após o último gráfico. As populações se difundem pela malha a partir da condição inicial e após 500 iterações temporais, todas as populações já estão homoganeamente distribuídas no espaço (característica típica da difusão). As

populações de larvas, fêmeas adultas e predadores/parasitóides atingem, em cada sítio, os valores de equilíbrio  $n^* = 1$ ,  $f^* \approx 1.63$  e  $p^* \approx 1.46$ , respectivamente. Para o sítio  $x = (28, 28)$ , isso pode ser observado na Figura 4.2.

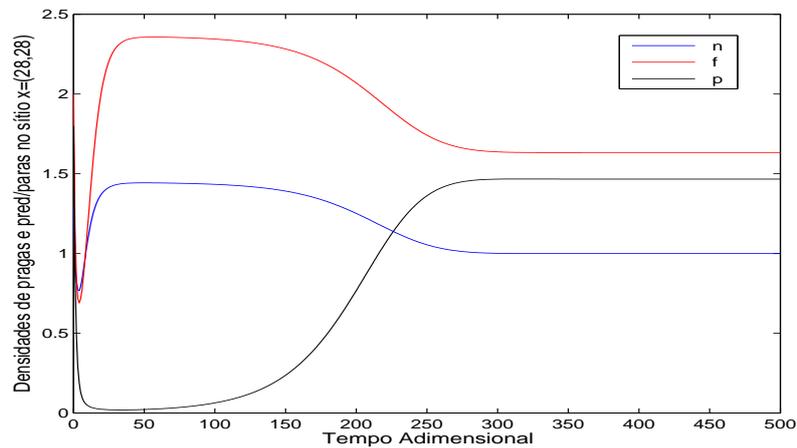


Figura 4.2: Densidades populacionais  $n$ ,  $f$  e  $p$  para o conjunto de parâmetros A com  $D_f = D_p = 0.5$ .

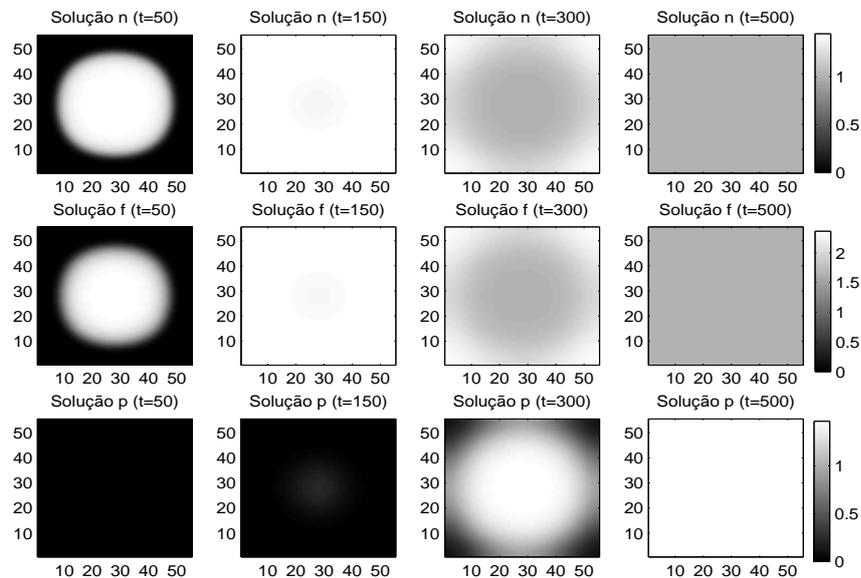


Figura 4.3: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com  $D_f = D_p = 0.5$ .

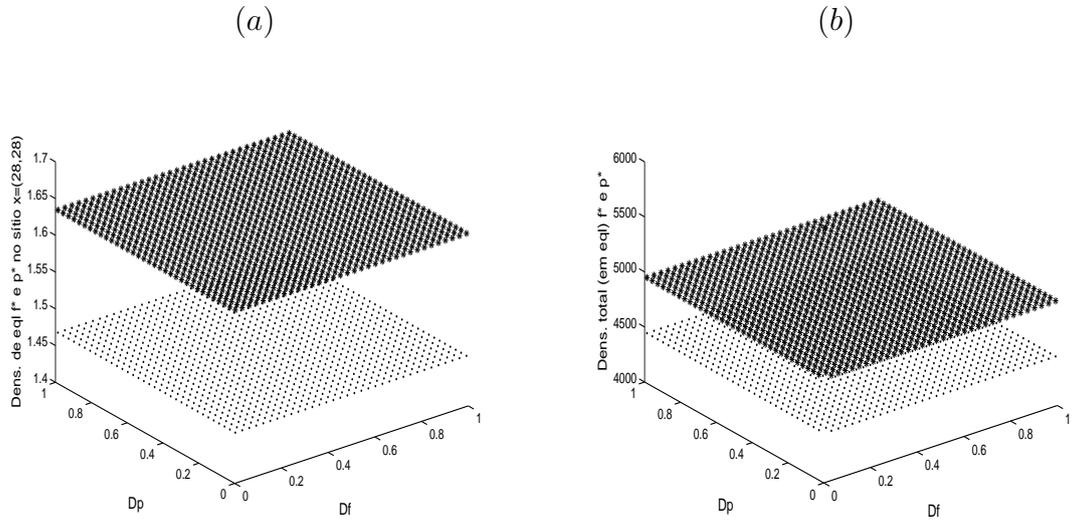


Figura 4.4: Conjunto de parâmetros A; densidades de equilíbrio obtidas após 500 iterações temporais; (a) densidades de equilíbrio  $f^* \approx 1.63$  e  $p^* \approx 1.46$  no sítio central da malha  $x = (28, 28)$ , como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades de equilíbrio de todos os sítios da malha como função de  $D_f$  e  $D_p$  ( $\sum f^* \approx 4931$  e  $\sum p^* \approx 4417$ ).

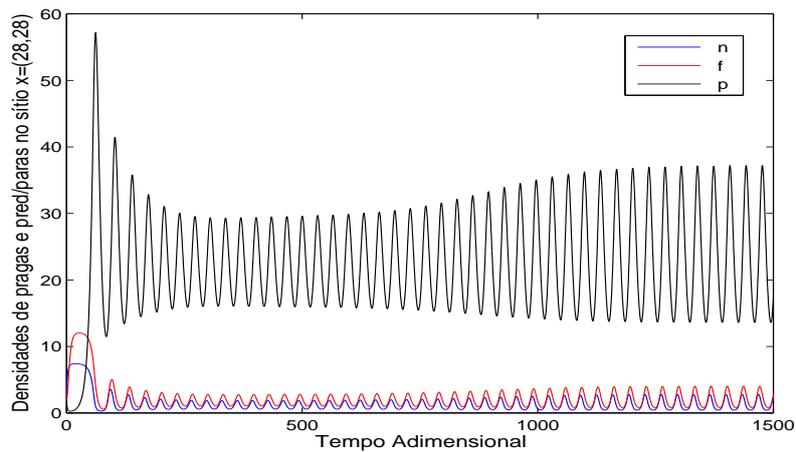


Figura 4.5: Densidades populacionais  $n$ ,  $f$  e  $p$ , para o conjunto de parâmetros B com  $D_f = D_p = 0.5$ .

Considerando ainda o conjunto de parâmetros A e variando a escolha dos parâmetros de dispersão, observamos que as populações evoluem sempre para o mesmo equilíbrio homogêneo estável, onde, em cada sítio, a densidade populacional é a mesma do equilíbrio da dinâmica local. Na Figura 4.4 podemos ver que as densidades de equilíbrio das populações  $f$  e  $p$  (em um sítio ou a soma total de todos os sítios da malha) permanecem constantes, quando variamos os valores dos coeficientes de dispersão  $D_f$  e  $D_p$  entre 0 e 1. Por isso, para as simulações que seguem nesta seção e na próxima, fixaremos  $D_f = D_p = 0.5$ . A densidade de equilíbrio da população  $n$  no sítio central da malha é 1 e a soma das densidades de equilíbrio de  $n$  de todos os sítios da malha é  $1 \times 55 \times 55 = 3025$ , para  $D_f$  e  $D_p$  entre 0 e 1.

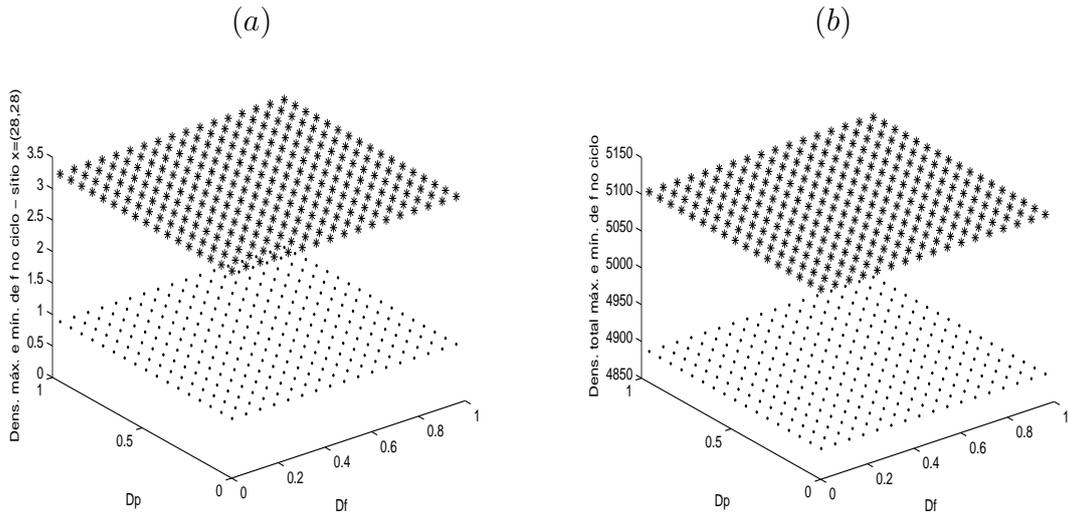


Figura 4.6: Conjunto de parâmetros B; (a) densidades máxima e mínima da população  $f$ , em  $t = 1000$ , no sítio central da malha  $x = (28, 28)$ , como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades máxima e mínima da população  $f$  de todos os sítios da malha, em  $t = 1000$ , como função de  $D_f$  e  $D_p$ .

Considerando o conjunto de parâmetros B, também temos as populações se comportando da mesma forma para todas as escolhas feitas para os parâmetros de dispersão, com as densidades em cada sítio e totais das populações oscilando. Na Figura 4.6 temos os valores máximo e mínimo que a densidade (em cada sítio e total) da população  $f$  assume, em função de  $D_f$  e  $D_p$ .

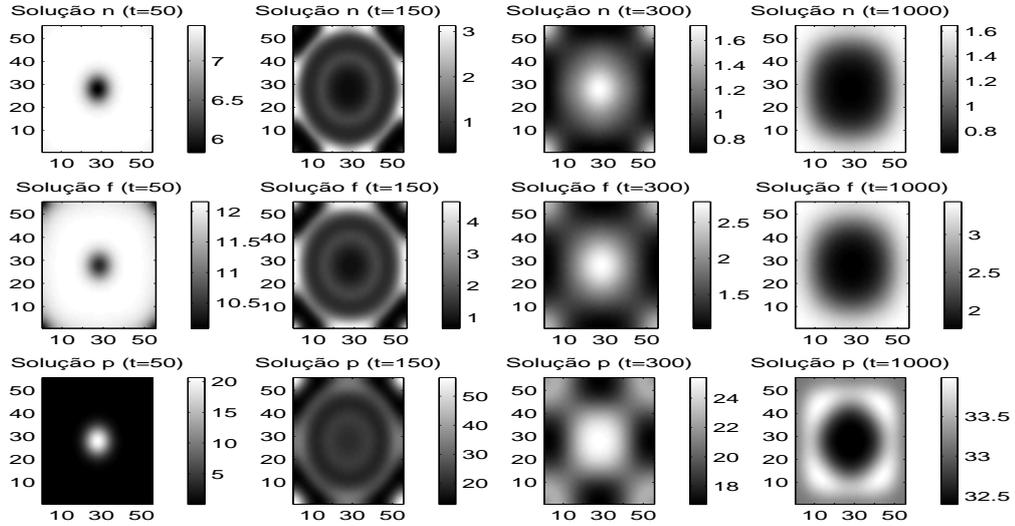


Figura 4.7: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com  $D_f = D_p = 0.5$ .

Na Figura 4.7 temos a evolução da distribuição espacial das populações ao longo do tempo, para  $D_f = D_p = 0.5$ , onde cada gráfico “densityplot” tem a sua escala específica. Neste caso, após os transientes, as densidades populacionais em cada sítio oscilam ao longo do tempo. Da mesma forma que no caso sem estrutura espacial, em cada sítio, a densidade  $n$  oscila entre os valores 0.4 e 2.8; a densidade  $f$  oscila entre os valores 0.8 e 4.1; e a densidade  $p$  oscila entre os valores 13.5 e 37.3 (Figura 4.5 - sítio  $x = (28, 28)$ ). Além disso, a distribuição espacial dos indivíduos permanece heterogênea e instável.

### 4.3.2 Dispersão por difusão e MIP

Agora vamos incluir ao modelo com dispersão por difusão o MIP, como foi formulado na seção 4.2 deste capítulo.

Da mesma forma como foi observado no Capítulo 2, exceto pelos transientes, não vemos alterações significativas no comportamento das populações ao considerarmos MIP - Caso I ou Caso II. Ou seja, o fato de o pesticida não preju-

dicar ou prejudicar menos o crescimento da população de predadores/parasitóides não se mostra relevante. Aparentemente, o efeito do parâmetro que estamos usando para distinguir entre o efeito do pesticida sobre o predador/parasitóide e sobre a praga não se faz sentir. Por isso, vamos apresentar as simulações considerando apenas o MIP - Caso I.

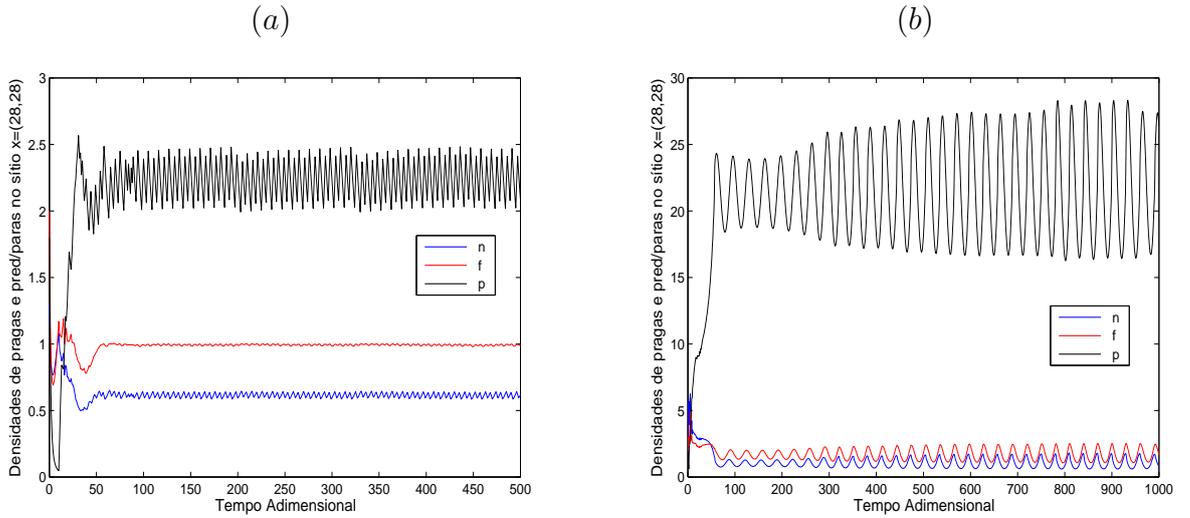


Figura 4.8: Densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$  no sítio central da malha  $x = (28, 28)$ ; (a) conjunto de parâmetros A e MIP com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ ; (b) conjunto de parâmetros B e MIP com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ .

As simulações foram feitas considerando os conjuntos A e B de parâmetros da dinâmica local e os parâmetros de dispersão  $D_f = D_p = 0.5$ , ou seja, simulamos a aplicação do MIP nas situações descritas na seção anterior. Para o conjunto de parâmetros A, consideramos um Limiar Econômico adimensional  $LE = 1$  e a quantidade adimensional de predadores/parasitóides liberados no sistema  $\rho = 0.3$  (Figuras 4.8(a) e 4.9). Para o conjunto de parâmetros B, consideramos um Limiar Econômico adimensional  $LE = 2.5$  e a quantidade adimensional de predadores/parasitóides liberados no sistema  $\rho = 2$  (Figuras 4.8(b) e 4.10).

Na Figura 4.8(a) vemos que, no sítio  $x = (28, 28)$ , para o conjunto de parâmetros A, a densidade de fêmeas adultas  $f$  é reduzida e mantida em torno do  $LE = 1$  com a aplicação do MIP. Isso acontece também em todos os outros sítios

da malha, como podemos ver na Figura 4.9. A densidade de larvas  $n$ , em cada sítio, também é reduzida com a aplicação do MIP.

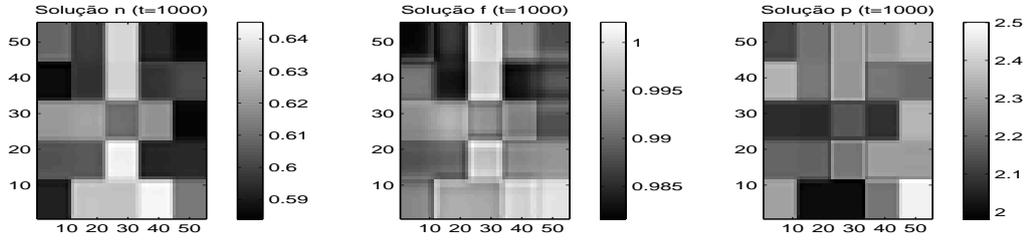


Figura 4.9: Distribuição espacial das populações, em  $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros A e MIP com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ .

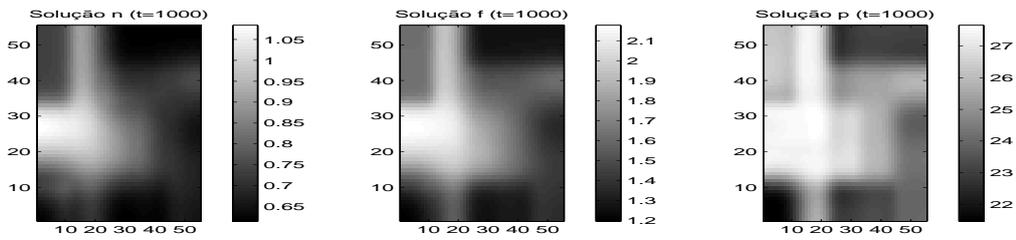


Figura 4.10: Distribuição espacial das populações em  $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros B e MIP com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ .

Na Figura 4.8(b) vemos, novamente, a eficiência da inclusão do MIP no modelo com dispersão por difusão. Para o conjunto de parâmetros B, após os transientes, a densidade de fêmeas adultas  $f$  é reduzida e mantida oscilando, assumindo valores menores do que o  $LE = 2.5$  no sítio  $x = (28, 28)$ . A densidade de larvas  $n$  também é reduzida com a aplicação do MIP. Isso acontece em todos os outros sítios da malha (Figura 4.10), o que provoca a redução das densidades totais (soma sobre todos os sítios da malha) das populações  $n$  e  $f$ .

É importante destacar as alterações provocadas pelo MIP no comportamento espaço-temporal das populações. No caso em que as populações estavam em equilíbrio homogêneo estável, antes da aplicação do MIP, todas as densidades populacionais passam a oscilar ao longo do tempo e a distribuição espacial dos indivíduos torna-se heterogênea e instável, mostrando que o MIP interfere na tendência homogeneizadora da difusão (comparar Figuras 4.3 e 4.9).

Por outro lado, no caso em que, antes da aplicação do MIP, as densidades populacionais (em cada sítio e totais) apresentavam comportamento oscilatório ao longo do tempo, este comportamento oscilatório permanece com as mesmas características qualitativas. A distribuição espacial também permanece heterogênea e instável, porém com padrões espaciais diferentes daqueles que aparecem antes da aplicação do MIP (comparar Figuras 4.7 e 4.10).

Ao compararmos as Figuras 4.9 e 4.10 podemos ver que os padrões espaciais que surgem quando consideramos a aplicação do MIP podem ser bastante diferenciados, dependendo dos diversos parâmetros envolvidos no modelo.

Outra observação importante é o fato de que, quando consideramos a estrutura espacial, não é possível determinar uma periodicidade das aplicações do MIP por sítio após os transientes, como ocorreu no caso sem estrutura espacial.

### 4.3.3 Dispersão orientada - taxia local

Ao analisarmos o comportamento das populações de pragas e predadores/parasitóides quando consideramos a distribuição espacial dos indivíduos, onde eles se dispersam de acordo com o processo de taxia local, observamos que as conclusões obtidas são muito semelhantes às aquelas que obtivemos no caso de dispersão por difusão.

Para o conjunto de parâmetros A, as densidades populacionais em cada sítio atingem o mesmo equilíbrio do caso difusivo, de modo que, após os transientes, todas as populações apresentam-se distribuídas de forma homogênea no espaço. Um fato a ser destacado é o de que, no caso da taxia local, as populações se dispersam mais lentamente (partindo da condição inicial até cobrir toda a malha) do que no caso difusivo, fazendo com que as populações demorem um pouco mais para alcançar o estado de equilíbrio homogêneo estável (Figura 4.11).

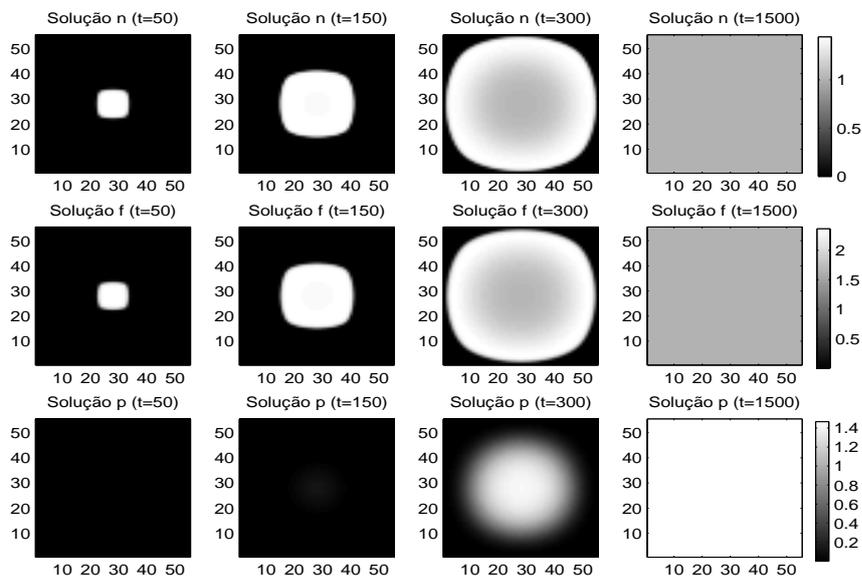


Figura 4.11: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com taxia local.

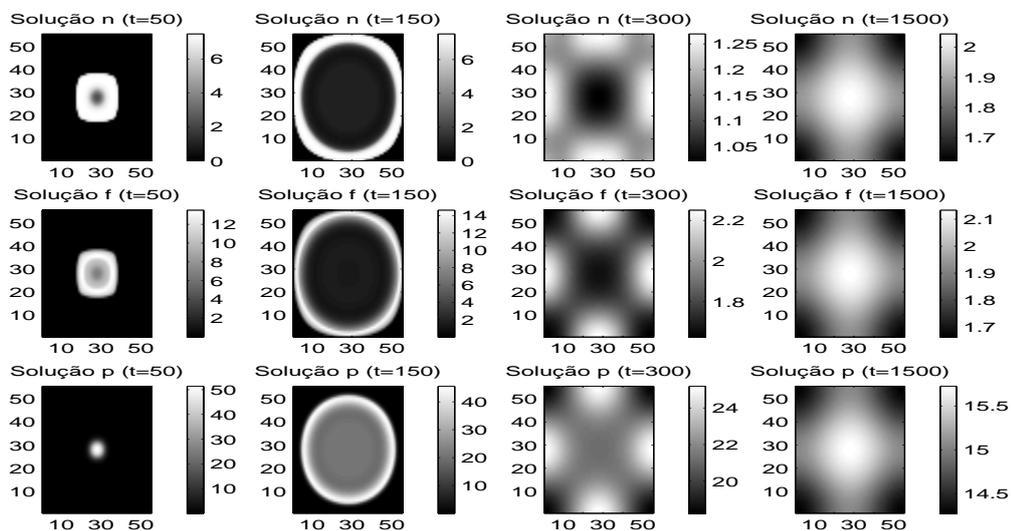


Figura 4.12: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com taxia local.

Para o conjunto de parâmetros B, as densidades populacionais, em cada sítio, oscilam ao longo do tempo, de modo que, após os transientes, todas as populações apresentam-se distribuídas de forma heterogênea no espaço. Novamente, o que se observa de diferente no caso da taxia local, é o fato de que as populações se dispersam mais lentamente do que no caso difusivo, de modo que as populações demoram um pouco mais para cobrir toda a malha (Figura 4.12).

#### 4.3.4 Dispersão orientada - taxia local e MIP

Incluindo o MIP ao modelo com dispersão por taxia local, observamos novamente que, exceto pelos transientes, não ocorrem alterações significativas no comportamento das populações ao considerarmos MIP - Caso I ou Caso II. Por isso, vamos apresentar as simulações considerando apenas o MIP - Caso I.

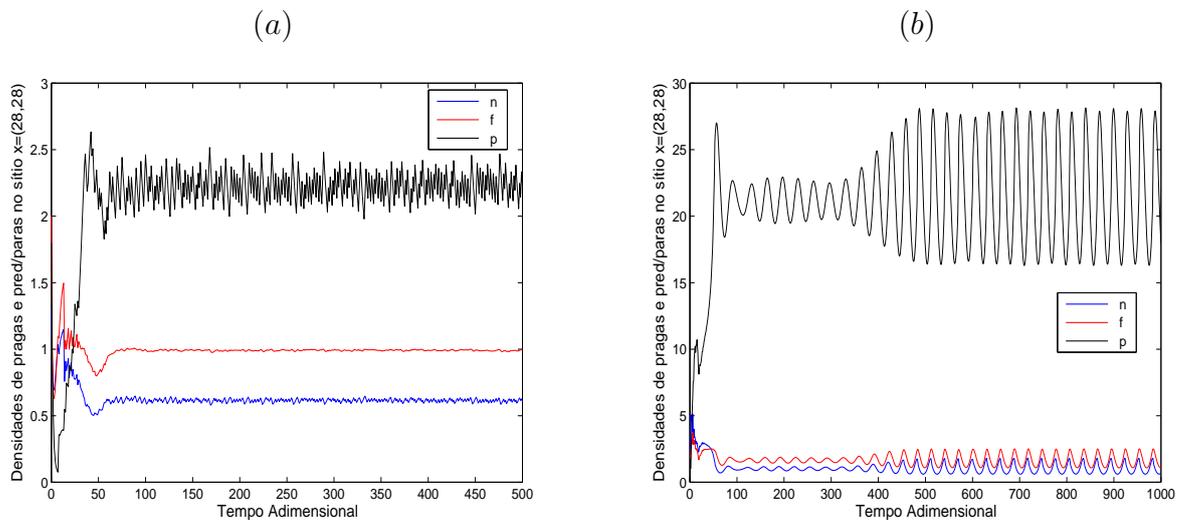


Figura 4.13: Densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$  no sítio central da malha  $x = (28, 28)$ ; (a) conjunto de parâmetros A e MIP com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ ; (b) conjunto de parâmetros B e MIP com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ .

Para o conjunto de parâmetros A, com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ , as densidades  $n$  e  $f$  do sítio  $x = (28, 28)$  são reduzidas, de modo que a densidade  $f$  é mantida em torno do  $LE$ , com a aplicação do MIP (Figura 4.13(a)). Isso acontece em todos os outros sítios da malha, como podemos ver na Figura 4.14.

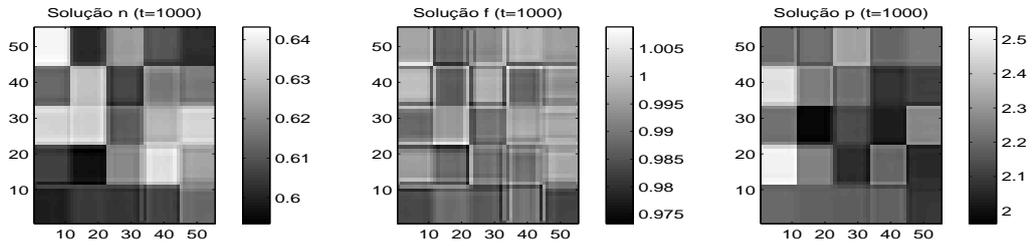


Figura 4.14: Distribuição espacial das populações em  $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros A e MIP com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ .

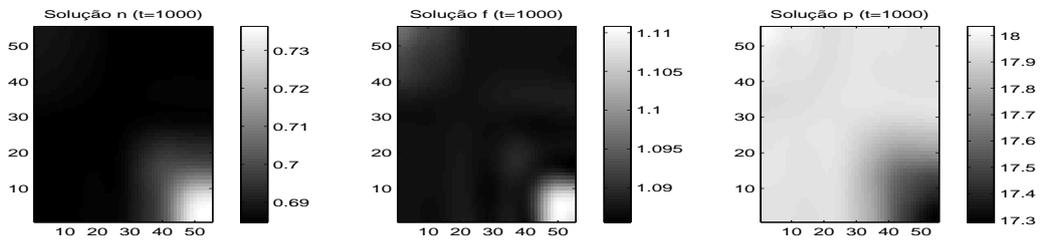


Figura 4.15: Distribuição espacial das populações em  $t = 1000$ , para o conjunto de parâmetros B e MIP com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ .

Para o conjunto de parâmetros B com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ , novamente, o MIP mostra-se eficiente. Após os transientes, as densidades  $n$  e  $f$  são reduzidas e se mantêm oscilando, sendo que a densidade  $f$  assume sempre valores menores do que o  $LE = 2.5$  no sítio  $x = (28, 28)$  (Figura 4.13(b)). Isso acontece em todos os outros sítios da malha (Figura 4.15).

As alterações provocadas pelo MIP no comportamento espaço temporal das populações, para o caso de dispersão por taxia local, são as mesmas do caso difusivo.

#### 4.3.5 Dispersão orientada - taxia quase local

Por fim, vamos analisar o comportamento das populações de pragas e predadores/parasitóides quando consideramos a distribuição espacial dos indivíduos, onde eles se dispersam de acordo com o processo de taxia quase local.

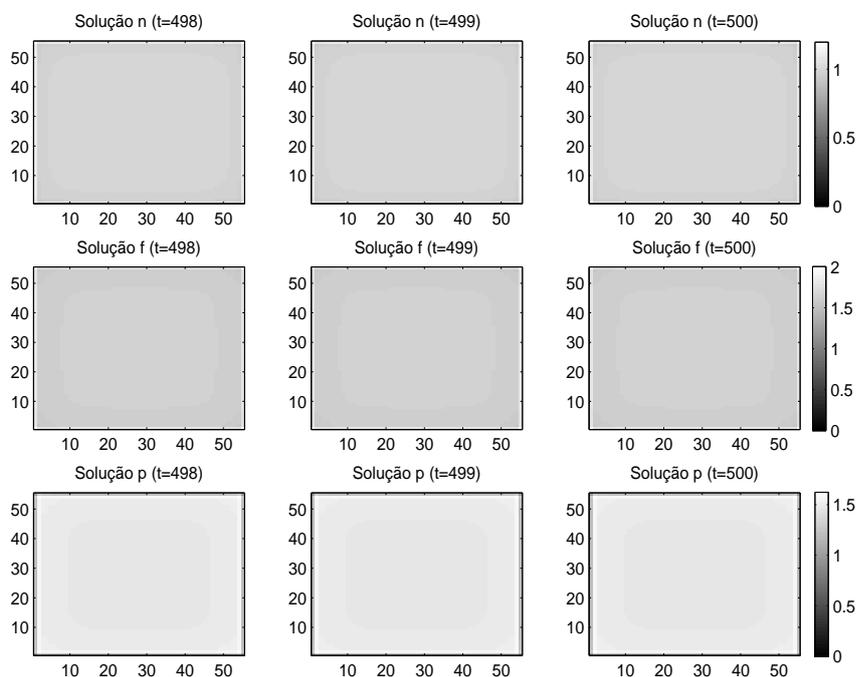


Figura 4.16: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com taxa quase local.

Para o conjunto de parâmetros A, após os transientes, todas as populações apresentam-se distribuídas de forma heterogênea no espaço. Em uma distribuição espacial heterogênea estável, como pode ser observado na Figura 4.16. Note que, trata-se de uma distribuição espacial praticamente homogênea. As densidades de equilíbrio em cada sítio assumem valores entre 0.95 e 1.2 para  $n$ ; 1.55 e 2 para  $f$ ; 1 e 1.6 para  $p$ . As populações se dispersam mais rapidamente (partindo da condição inicial até cobrir toda a malha) do que nos casos difusivo e de taxa local, fazendo com que as populações atinjam mais rapidamente o estado de equilíbrio.

Para o conjunto de parâmetros B, no caso de dispersão por taxa quase local, após os transientes, as populações apresentam um comportamento espaço-temporal bastante diferenciado daqueles que observamos nas situações anteriores. A distribuição espacial é heterogênea e instável (Figura 4.17). Em cada sítio as densidades populacionais oscilam com frequências muito altas (período de dois passos de tempo para as três populações) e altas amplitudes para a população  $p$ . Padrões

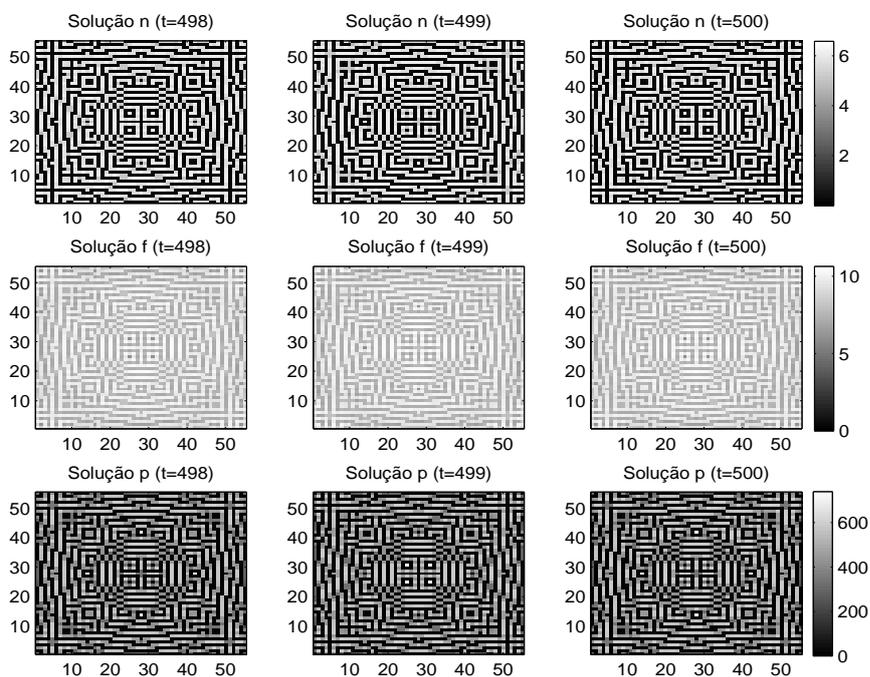


Figura 4.17: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com taxia quase local.

de distribuição espacial semelhantes a estes podem ser encontrados em Comins et al. (1992), onde são chamados de padrões “crystal lattice”.

#### 4.3.6 Dispersão orientada - taxia quase local e MIP

Incluindo o MIP ao modelo com dispersão por taxia quase local, observamos novamente que, exceto pelos transientes, não ocorrem alterações significativas no comportamento das populações ao considerarmos MIP - Caso I ou Caso II. Por isso, vamos apresentar as simulações considerando apenas o MIP - Caso I.

Considerando o conjunto de parâmetros A e aplicando MIP com  $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ , podemos ver que, com as aplicações do MIP, as densidades  $n$  e  $f$  em todos os sítios da malha são reduzidas, de modo que a densidade  $f$  é mantida em torno do  $LE = 1$  (Figura 4.18). Além disso, a distribuição espacial das populações é alterada, apresentando padrões espaciais heterogêneos instáveis.

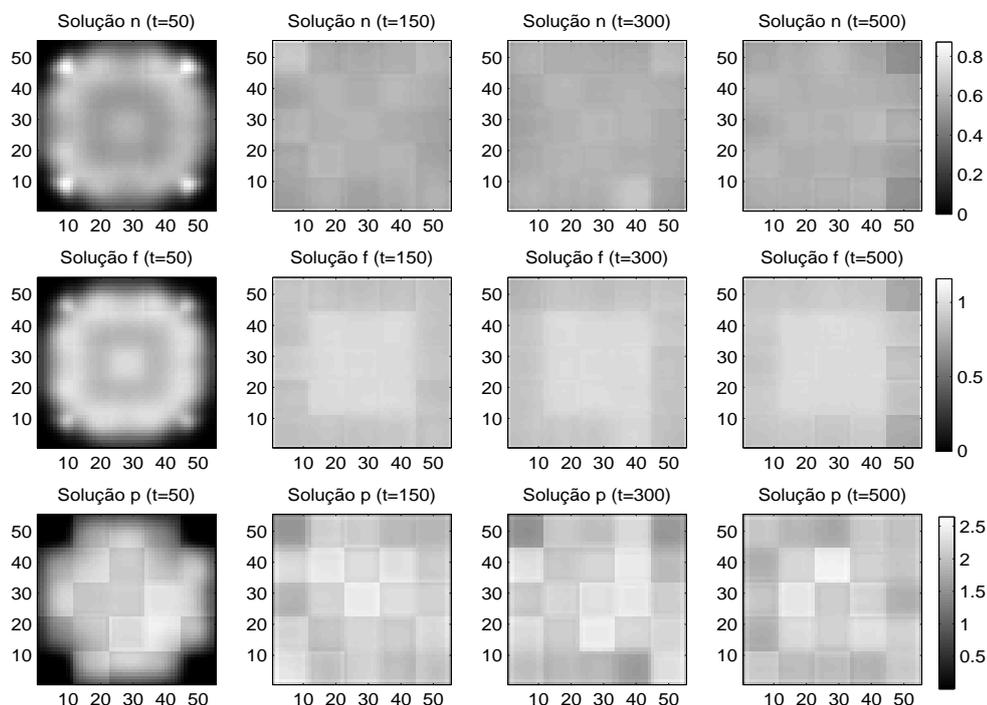


Figura 4.18: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A com MIP ( $LE = 1$  e  $\rho = 0.3$ ) e taxia quase local.

Considerando o conjunto de parâmetros B e aplicando MIP com  $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ , as aplicações do MIP também reduzem as densidades  $n$  e  $f$  em todos os sítios da malha, de modo que a densidade  $f$  é mantida em torno do  $LE$  (Figura 4.19). A redução da densidade de pragas pelo MIP provoca a redução da densidade de predadores/parasitóides em cada sítio, apesar da quantidade destes que é liberada no ambiente a cada aplicação. A distribuição espacial das populações também é alterada, apresentando padrões espaciais heterogêneos diferentes e instáveis.

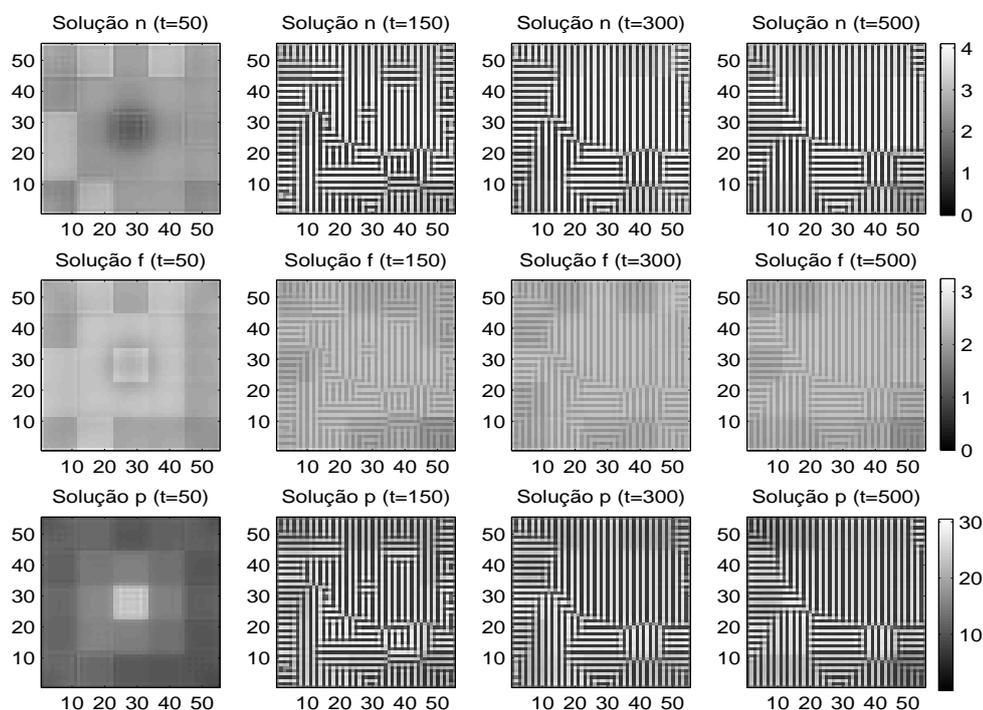


Figura 4.19: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B com MIP ( $LE = 2.5$  e  $\rho = 2$ ) e taxia quase local.

#### 4.4 Síntese dos resultados do capítulo

Em síntese, incluímos ao modelo formulado no Capítulo 1 a estrutura espacial de forma discreta, considerando três tipos de movimentação para os indivíduos adultos: difusão, taxia local e taxia quase local. Além disso, aplicamos o MIP formulado no Capítulo 2 ao modelo com estrutura espacial.

Nas simulações, podemos observar algumas mudanças no comportamento das populações, em relação à distribuição espacial e densidades ao longo do tempo, dependendo do tipo de movimentação. As variações nas densidades totais e em cada sítio das populações, ao longo do tempo, apresentam comportamento muito semelhante ao comportamento local em todos os casos, exceto para o caso de taxia quase local com o conjunto de parâmetros B.

Nos casos difusivo e de taxia local, partindo da situação local de equilíbrio (conjunto de parâmetros A), a distribuição espacial das populações torna-se homogênea, enquanto no caso de taxia quase local as populações permanecem distribuídas de forma heterogênea no espaço, atingindo um estado de equilíbrio heterogêneo estável. É importante salientar que esta heterogeneidade espacial apresenta variações pequenas de densidades populacionais entre os sítios.

Partindo da situação de coexistência das espécies com suas densidades oscilando (conjunto de parâmetros B), observamos que nos três casos, difusão, taxia local e taxia quase local, as densidades populacionais oscilam em cada sítio, permanecendo distribuídas de forma heterogênea no espaço (padrão heterogêneo instável). O caso de taxia quase local diferencia-se dos outros dois pelo fato de que as oscilações, em cada sítio, são menos suaves com altas amplitudes para os predadores/parasitóides. Além disso, a distribuição espacial apresenta um padrão mais “marcado” (“definido”), com sítios de altas densidades próximos de sítios de baixas densidades. No caso da taxia quase local eles se espalham pelo ambiente mais rapidamente do que no caso de difusão. E no caso de taxia local, mais lentamente do que nestes outros dois casos.

O MIP mostrou-se eficiente nos três casos de dispersão considerados, não apresentando diferenças significativas nos resultados de aplicações do MIP - Caso I ou Caso II. Aparentemente, o efeito do parâmetro que estamos usando para distinguir entre o efeito do pesticida sobre o predador/parasitóide e sobre a praga não se faz sentir.

O MIP provoca alterações no comportamento espaço-temporal das populações. Para os casos de equilíbrio homogêneo (ou heterogêneo) estável antes da aplicação do MIP, surgem oscilações nas densidades populacionais, de modo que a população de pragas seja mantida abaixo do LE e a população de predadores/parasitóides seja aumentada periodicamente. Além disso, os indivíduos passam a se apresentar distribuídos de forma heterogênea instável no espaço. Para os casos em que, antes da aplicação do MIP, as densidades em cada sítio oscilavam e a distribuição es-

pacial era instável, este comportamento permanece, apenas com padrões espaciais heterogêneos instáveis diferentes.

No próximo capítulo, apresentaremos uma nova estratégia para o controle de pragas: o controle ótimo. Inicialmente, formularemos um problema de controle ótimo, que incorpora as variáveis de controle ao modelo formulado no Capítulo 1. A solução deste problema fornece-nos uma estratégia de controle ótimo. Em seguida, aplicaremos esta estratégia a um modelo espacialmente distribuído.

## 5 MODELO PARA CONTROLE ÓTIMO DA PRAGA

Neste capítulo, inicialmente, incluímos ao modelo formulado no Capítulo 2 variáveis que representam a ação contínua da aplicação das técnicas de controle e utilizamos a teoria de controle ótimo (princípio do máximo de Pontryagin) para otimizar a aplicação destas técnicas de controle. Além disso, simulamos a aplicação destas estratégias de controle otimizadas para um modelo com distribuição espacial, considerando as regras de movimentação formuladas no Capítulo 4.

### 5.1 Formulação do problema de controle ótimo

A dinâmica natural da praga e de seu predador/parasitóide é descrita pelo sistema adimensional (2.3) formulado no Capítulo 2. Na abordagem que adotaremos, as aplicações das técnicas de controle biológico (liberação de predadores/parasitoides) e químico (aplicação de pesticida) passarão a constituir termos do sistema de equações diferenciais (2.3).

Parte-se da definição das variáveis

$$\delta_1 = n - u_1, \quad \delta_2 = f - u_2 \quad \text{e} \quad \delta_3 = p + u_3. \quad (5.1)$$

Elas representam a ação contínua da aplicação das técnicas de controle e  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  e  $u_3(t)$  são chamadas variáveis de controle. As variáveis  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  determinam, respectivamente, as quantidades de pragas nas fases jovem e adulta que são retiradas do sistema no instante  $t$  através da aplicação das técnicas de controle, e a variável  $u_3(t)$  determina a quantidade de predadores/parasitoides inseridos no sistema no instante  $t$ . Sendo definidas desta forma,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  devem obedecer as restrições

$$0 \leq u_1 \leq n, \quad 0 \leq u_2 \leq f, \quad \text{e} \quad 0 \leq u_3. \quad (5.2)$$

A partir das expressões em (5.1), podemos escrever cada uma das variáveis de controle,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , sob a forma

$$u_1(t) = n(t) - \delta_1, \quad u_2(t) = f(t) - \delta_2 \quad \text{e} \quad u_3(t) = \delta_3 - p(t).$$

As variáveis de controle  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  devem satisfazer as restrições (5.2) e os valores de  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , serão obtidos através do princípio do máximo de Pontryagin (Pontryagin, 1986; Rafikov & Maleico, 2000; Sakr et al., 2001; Rafikov & Balthazar, 2005). Desta forma ficarão determinadas as funções ótimas de controle:

$$u_1(t) = \begin{cases} n(t) - \delta_1, & \text{quando } n(t) > \delta_1, \\ 0, & \text{quando } n(t) \leq \delta_1, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} f(t) - \delta_2, & \text{quando } f(t) > \delta_2, \\ 0, & \text{quando } f(t) \leq \delta_2, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$u_3(t) = \begin{cases} \delta_3 - p(t), & \text{quando } p(t) < \delta_3, \\ 0, & \text{quando } p(t) \geq \delta_3. \end{cases} \quad (5.5)$$

Note que, os valores de  $\delta_1$  e  $\delta_2$  podem ser interpretados como máximos admissíveis ou Limiares Econômicos para cada uma das populações de pragas (a definição de Limiar Econômico é apresentada na introdução deste trabalho). Por outro lado, o valor de  $\delta_3$  pode ser interpretado como um mínimo admissível para a população de predadores/parasitóides, pois quando a população de predadores/parasitóides está abaixo desta quantidade devemos aplicar as técnicas de controle.

Considerando as variáveis  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , formulamos a partir do sistema (2.3), o sistema que descreve as interações intra e entre as espécies incluindo as variáveis de controle, como segue:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dt} = a\delta_2 \left(1 - \frac{\delta_1}{a}\right) - (b + c_1)\delta_1 - \frac{\delta_1\delta_3}{1+\delta_1} - k_1u_1, \\ \frac{df}{dt} = b\delta_2 - c_2\delta_2 - k_2u_2, \\ \frac{dp}{dt} = e\frac{\delta_1\delta_3}{1+\delta_1} - c_3\delta_3 + k_3u_3, \end{cases} \quad (5.6)$$

onde  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são constantes positivas. Note que, a ação do pesticida não aparece diretamente na equação diferencial dos predadores/parasitóides.

Desejamos manter as populações da praga em níveis toleráveis e, além disso, minimizar as aplicações das técnicas de controle. Para isso, vamos considerar um funcional integral envolvendo as variáveis de estado (populações de pragas e predadores/parasitóides) e as variáveis de controle

$$\begin{aligned} J &= d_1 \left\{ n(\tau) + k_1 \int_{t_0}^{\tau} u_1(t) dt \right\} + \\ &+ d_2 \left\{ f(\tau) + k_2 \int_{t_0}^{\tau} u_2(t) dt \right\} + \\ &+ d_3 \left\{ k_3 \int_{t_0}^{\tau} u_3(t) dt - p(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  são constantes positivas que representam os pesos de cada variável de controle;  $t_0$  e  $\tau$  representam os momentos inicial e final da aplicação das técnicas de controle, respectivamente.

Este funcional é chamado “funcional custo”. Ao minimizar  $J$ , estamos minimizando as funções de controle ( $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ ) no intervalo de tempo de aplicação  $[t_0, \tau]$ . Além disso, estamos minimizando as populações de pragas  $n(\tau)$  e  $f(\tau)$  e maximizando a população de inimigos naturais  $p(\tau)$ .

Nosso problema de controle ótimo consiste, então, em encontrar controles ótimos  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  que transfiram o sistema (5.6) de uma condição inicial  $(n_0, f_0, p_0)$  para um estado final não especificado de modo que  $J$  seja minimizado.

## 5.2 Resolução do problema de controle ótimo

O problema é resolvido, mediante a aplicação do princípio do máximo de Pontryagin, que nos fornece condições necessárias para que se obtenha um controle ótimo e pode ser aplicado a problemas de otimização lineares e não lineares.

Inicialmente consideremos a função auxiliar

$$\begin{aligned} W(t) &= d_1 \left\{ n(t) + k_1 \int_{t_0}^t u_1(s) ds \right\} + \\ &+ d_2 \left\{ f(t) + k_2 \int_{t_0}^t u_2(s) ds \right\} + \\ &+ d_3 \left\{ k_3 \int_{t_0}^t u_3(s) ds - p(t) \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

obtida a partir do funcional  $J$ . Note que

$$\frac{dW}{dt} = d_1 \left\{ \frac{dn}{dt} + k_1 u_1(t) \right\} + d_2 \left\{ \frac{df}{dt} + k_2 u_2(t) \right\} + d_3 \left\{ k_3 u_3(t) - \frac{dp}{dt} \right\}. \quad (5.9)$$

A teoria clássica do cálculo de variações (Pinch, 1995) sugere que devemos analisar o comportamento da função

$$H = \lambda_0 \frac{dW}{dt} + \lambda_1 \frac{dn}{dt} + \lambda_2 \frac{df}{dt} + \lambda_3 \frac{dp}{dt}, \quad (5.10)$$

onde  $\lambda_0 = -1$  e  $\lambda_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ , são variáveis adjuntas satisfazendo as equações

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial n}, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial f} \quad \text{e} \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p}. \quad (5.11)$$

As condições necessárias para otimalidade são:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \quad (5.12)$$

em cada ponto da trajetória ótima; e

$$H = 0 \quad (5.13)$$

em  $t = \tau$  sobre a trajetória ótima.

A dedução destas condições é apresentada no Apêndice C.

Após escrever  $H$  como função das variáveis  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$ , definidas em (5.1), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \delta_1} &= \lambda_0 \left\{ d_1 \left[ -\delta_2 - (b + c_1) - \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2} \right] + d_2 bd - d_3 e \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2} \right\} + \\ &+ \lambda_1 \left[ -\delta_2 - (b + c_1) - \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2} \right] + \lambda_2 bd + \lambda_3 e \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1} &= \lambda_0 \left\{ d_1 \left[ \delta_2 + (b + c_1) + \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2} \right] - d_2 b d + d_3 e^{\frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2}} \right\} + \\ &+ \lambda_1 \left[ \delta_2 + (b + c_1) + \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2} - k_1 \right] - \lambda_2 b d - \lambda_3 e^{\frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Igualando as expressões (5.14) e (5.15), vemos que

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = -\frac{\partial H}{\partial \delta_1} - \lambda_1 k_1. \quad (5.16)$$

De forma análoga, podemos ver que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_2} &= -\frac{\partial H}{\partial \delta_2} - \lambda_2 k_2, \\ \frac{\partial H}{\partial u_3} &= -\frac{\partial H}{\partial \delta_3} - \lambda_3 k_3. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Combinando a primeira condição necessária para otimalidade (5.12) com os resultados obtidos nas expressões (5.11), (5.16) e (5.17) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial n} = -\frac{\partial H}{\partial \delta_1} \frac{\partial \delta_1}{\partial n} = -(-\lambda_1 k_1) = \lambda_1 k_1, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial f} = -\frac{\partial H}{\partial \delta_2} \frac{\partial \delta_2}{\partial f} = -(-\lambda_2 k_2) = \lambda_2 k_2, \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial H}{\partial \delta_3} \frac{\partial \delta_3}{\partial p} = -(-\lambda_3 k_3) = \lambda_3 k_3. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Como estamos trabalhando com um problema de controle ótimo cujo estado final não é especificado, precisamos considerar condições extras para que possamos garantir que o correspondente controle minimize  $J$ . Neste caso, o estado final é completamente não especificado, portanto precisamos que o vetor  $(\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \lambda_3(\tau))^T$  seja perpendicular à tangente a qualquer curva  $C$  no espaço de estado  $\mathbb{R}_+^3$  (ver Apêndice C). O único vetor que satisfaz esta condição é o vetor nulo (Knowles, 1981). Portanto,

$$\lambda_i(\tau) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.19)$$

Cada uma das equações em (5.18) juntamente com a respectiva condição de transversalidade em (5.19) formam um problema de valor inicial, cuja solução é

$$\lambda_i(t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq \tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Substituindo os valores de  $\lambda_0$  e  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , na primeira condição necessária para otimalidade (5.12), para cada uma das variáveis de controle,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , obtemos o sistema algébrico

$$\begin{cases} -d_1 \left[ \delta_2 + b + c_1 + \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2} \right] + d_2bd - d_3e \frac{\delta_3}{(1+\delta_1)^2} = 0 \\ d_1(a - \delta_1) - d_2c_2 = 0 \\ d_1 \frac{\delta_1}{1+\delta_1} + d_3e \frac{\delta_1}{1+\delta_1} - c_3d_3 = 0 \end{cases}, \quad (5.20)$$

nas variáveis  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$ .

Além disso, substituindo estes valores na segunda condição necessária para otimalidade (5.13) temos  $\frac{dW}{dt} = 0$ . Manipulando algebricamente esta expressão e utilizando as igualdades do sistema (5.20), segue que

$$-d_1\delta_1(b + c_1) + d_2bd\delta_2 = 0. \quad (5.21)$$

A partir de (5.20) e (5.21) obtemos os seguintes valores para  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  como funções dos parâmetros do sistema e dos pesos  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ :

$$\frac{ad_1 - c_2d_2}{d_1} = \delta_1 = \frac{c_3d_3}{d_1 + d_3(e - c_3)}, \quad (5.22)$$

$$\delta_2 = \frac{d_1(b + c_1)}{d_2bd} \delta_1 \quad (5.23)$$

$$\delta_3 = \frac{(1 + \delta_1)^2 [d_2bd - d_1(b + c_1 + \delta_2)]}{d_1 + d_3e}. \quad (5.24)$$

Estes são os valores que determinam as funções ótimas de controle  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  e  $u_3(t)$  em (5.3), (5.4) e (5.5), respectivamente.

Utilizando no sistema (5.6) os valores de  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  obtidos acima podemos otimizar as aplicações das técnicas de controle, minimizando as populações de pragas e os custos das aplicações e maximizando a população de predadores/parasitóides.

Note que, de acordo com as definições de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$ , podemos determinar restrições sobre os valores dos pesos  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ .

De (5.22) temos

$$d_3 = \frac{d_1(c_2d_2 - ad_1)}{(ad_1 - c_2d_2)(e - c_3) - d_1c_3}. \quad (5.25)$$

E, para que tenhamos  $d_3 \geq 0$ , precisamos ter  $d_1$  e  $d_2$  satisfazendo:

$$\frac{c_2}{a} \leq \frac{d_1}{d_2} \leq \frac{c_2(e - c_3)}{a(e - c_3) - c_3}. \quad (5.26)$$

Como  $\delta_1 \geq 0$ , temos, ainda de acordo com (5.22),

$$\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{c_2}{a} \quad \text{e} \quad \frac{d_1}{d_3} \geq c_3 - e. \quad (5.27)$$

Por fim, como  $\delta_3 \geq 0$ , temos, de acordo com (5.24),

$$\frac{d_1}{d_2} \leq \frac{\delta_2 + b + c_1}{bd}. \quad (5.28)$$

### 5.3 Simulações do controle ótimo sem estrutura espacial

Nas simulações vamos testar os efeitos da aplicação do controle estabelecido acima no sistema praga-predador/parasitóide apresentado no Capítulo 2. Para isso, vamos comparar crescimento natural das populações ao longo do tempo ( $u_1 = u_2 = u_3 = 0$  em (5.6)) com o crescimento das populações quando aplicamos as estratégias de controle. Consideramos a condição inicial  $(n_0, f_0, p_0) = (1.3, 2, 1.8)$  e dois cenários para os parâmetros da dinâmica: conjunto de parâmetros A e conjunto de parâmetros B, definidos no Capítulo 3. Os comportamentos naturais das populações ao longo do tempo para estes conjuntos de parâmetros são apresentados na Figura 5.1.

Para os dois conjuntos de parâmetros considerados, os valores escolhidos para  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  satisfazem as condições (5.25), (5.26), (5.27) e (5.28).

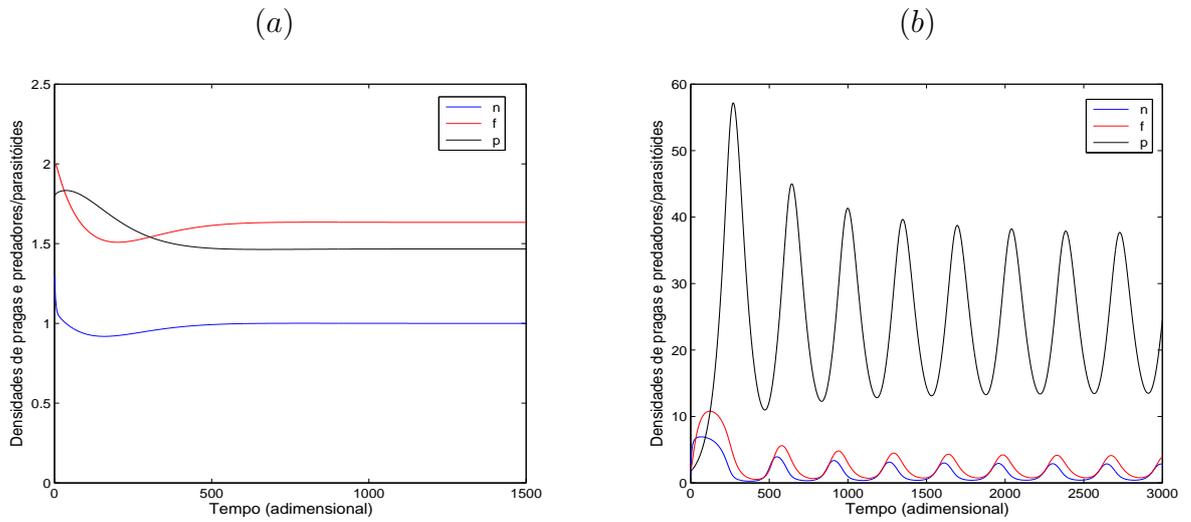


Figura 5.1: (a) e (b) comportamentos das populações ao longo do tempo para os conjuntos de parâmetros A e B, respectivamente.

Para o conjunto de parâmetros A, escolhendo  $d_1 = 0.2$  e  $d_2 = d_3 = 1$ , temos

$$\delta_1 = 0.5, \quad (5.29)$$

$$\delta_2 = 0.183673,$$

$$\delta_3 = 1.02474.$$

Enquanto para o conjunto de parâmetros B, escolhendo  $d_1 = 0.1$  e  $d_2 = 2.5$  e  $d_3 = 0.5$ , temos

$$\delta_1 = 0.5, \quad (5.30)$$

$$\delta_2 = 0.0367347,$$

$$\delta_3 = 8.484495.$$

Podemos ver na Figura 5.1 que naturalmente as densidades de larvas e fêmeas adultas atingem valores acima dos valores máximos admissíveis  $\delta_1$  e  $\delta_2$  para os dois conjuntos de parâmetros. Portanto, nos dois casos, a aplicação das técnicas de controle é necessária.

Nas Figuras 5.2 e 5.3 vemos a eficiência da aplicação das técnicas de controle ótimo de acordo com o modelo formulado neste capítulo e os máximos e

mínimos admissíveis dados em (5.29) e (5.30) para os conjuntos de parâmetros A e B, respectivamente. Observamos que,  $\forall t \geq 0$ , as populações de pragas nos sistemas com a aplicação do controle ótimo (linhas contínuas) estão abaixo daquelas dos sistemas sem este controle (linhas pontilhadas).

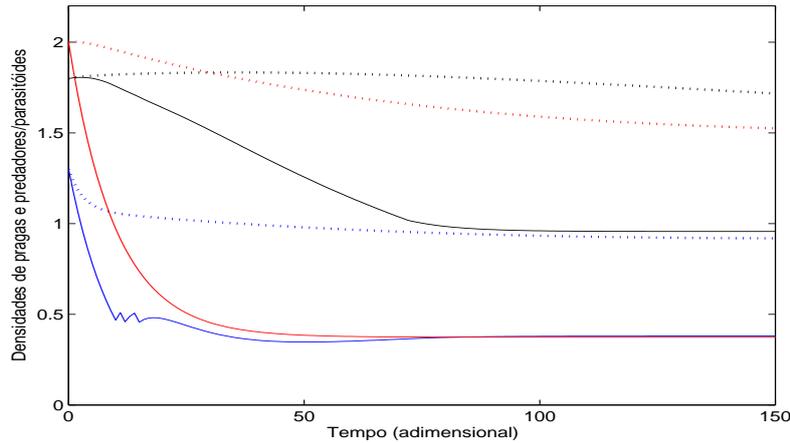


Figura 5.2: Densidades de pragas  $n$  (linha azul) e  $f$  (linha vermelha) e de predadores/parasitóides  $p$  (linha preta) em tempos transientes; dinâmica natural: sem aplicação das técnicas de controle (linhas pontilhadas); dinâmica com aplicação das técnicas de controle ótimo (linhas contínuas); conjunto de parâmetros A.

Para manter os níveis da Figura 5.2, o controle ótimo é aplicado em todas as iterações temporais para  $f$ , apenas nas primeiras 15 iterações para a população  $n$  e a partir da 72<sup>a</sup> iteração para os predadores/parasitóides  $p$ . No caso da Figura 5.3, o controle precisa ser aplicado a cada iteração temporal para  $f$  e  $p$ , enquanto para  $n$ , os níveis são mantidos com algumas aplicações do controle até a 25<sup>a</sup> iteração temporal.

Note que, para os dois conjuntos de parâmetros considerados, a densidade de larvas é mantida abaixo do valor máximo admissível  $\delta_1$ , enquanto a densidade de fêmeas adultas é reduzida, mas permanece acima do valor máximo admissível  $\delta_2$  (Figuras 5.2 e 5.3). Resultados semelhantes a estes podem ser observados em Sakr et al. (2001). É interessante também observar que, apesar da liberação de predadores/parasitóides no sistema, a população destes é reduzida. Isso pode ser

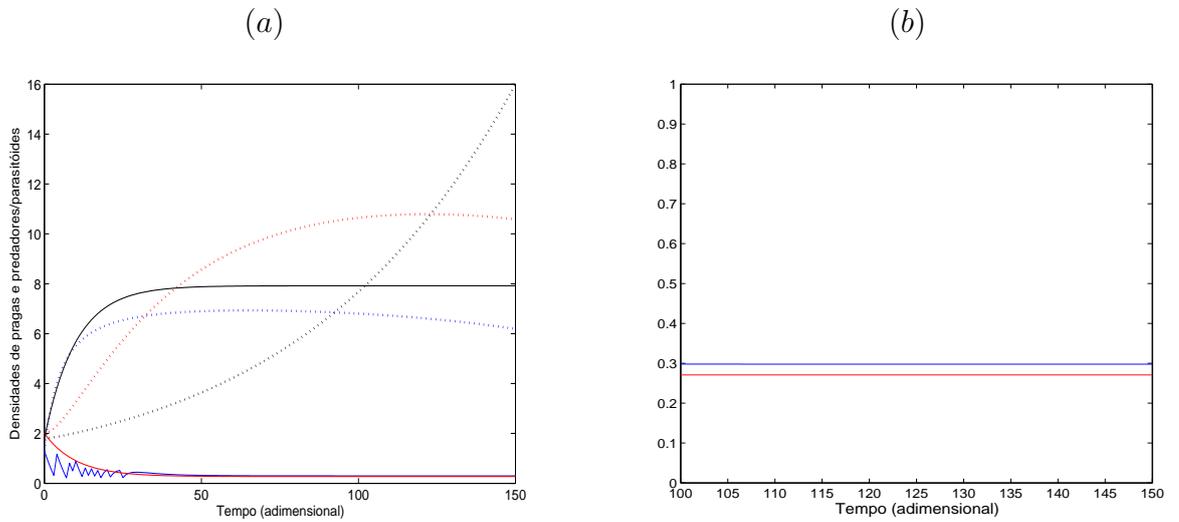


Figura 5.3: (a) Densidades de pragas  $n$  (linha azul) e  $f$  (linha vermelha) e de predadores/parasitóides  $p$  (linha preta) em tempos transientes; dinâmica natural: sem aplicação das técnicas de controle (linhas pontilhadas); dinâmica com aplicação das técnicas de controle ótimo (linhas contínuas); (b) zoom destacando as densidades de pragas nos estágios  $n$  (linha azul) e  $f$  (linha vermelha) com aplicação das técnicas de controle ótimo; conjunto de parâmetros B.

explicado pelo fato de que os predadores/parasitóides são especialistas e, portanto, ao reduzirmos a quantidade de pragas, eles ficam sem alimentação/hospedeiros.

Em todos os casos, consideramos  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ .

## 5.4 Inclusão da estrutura espacial no modelo

Nas seções anteriores, obtivemos a solução para um problema de controle ótimo, considerando apenas a evolução temporal das populações. Neste caso, estamos supondo que estas populações estão homogeneamente distribuídas no espaço. Agora, vamos considerar que as populações estejam distribuídas de forma heterogênea no espaço. A estrutura espacial e as regras de movimentação são consideradas exatamente como no Capítulo 4. O habitat é representado por uma malha (matriz) bidimensional de tamanho  $L \times L$  sítios (ou “patches”) com fronteiras reflexivas e a movimentação pode ocorrer por difusão, taxia local ou quase local.

Para aplicar o controle ótimo no modelo com estrutura espacial discreta, consideramos o sistema (5.6) descrevendo a dinâmica local (em cada sítio) das populações onde  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  são definidos em (5.3), (5.4) e (5.5) e os valores de  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , obtidos em (5.22) (5.23) e (5.24); a cada passo de tempo ocorre a dispersão por difusão (subseção 4.1.1), taxa local (subseção 4.1.2) ou quase local (subseção 4.1.3) e as densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$  são medidas em cada sítio da malha ou em um percentual destes sítios para que sejam aplicadas ou não as técnicas de controle.

## 5.5 Simulações do controle ótimo com estrutura espacial

Analisamos o comportamento das populações de pragas e predadores/parasitóides ao considerarmos cada um dos três tipos de dispersão (difusão, taxa local ou quase local) juntamente com as técnicas de controle ótimo através de simulações numéricas. Inicialmente, pensamos em considerar três formas de aplicação das técnicas de controle ótimo:

1. as densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$  são medidas a cada passo de tempo em todos os sítios da malha, para que possamos verificar se estas ultrapassam as densidades limiares (máximos admissíveis ou mínimo admissível) e, conseqüentemente, se as técnicas de controle devem ser utilizadas;
2. as densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$  são medidas a cada passo de tempo em um percentual de sítios da malha, selecionados aleatoriamente, e então verificamos se estas ultrapassam as densidades limiares (máximos admissíveis ou mínimo admissível) e, conseqüentemente, se as técnicas de controle devem ser utilizadas nestes sítios; nos sítios não selecionados as populações evoluem naturalmente;
3. a malha é subdividida em blocos (como na seção 4.2), as populações  $n$ ,  $f$  e  $p$  são medidas a cada passo de tempo em um percentual de sítios de cada bloco e, a partir destes sítios, decide-se a utilização ou não das técnicas de controle em todos os sítios do bloco;

Ao simularmos a forma **3** de aplicação, obtivemos em alguns casos, para alguns sítios, densidades populacionais negativas para  $n$  e  $f$ , o que não é biologicamente viável. Isso pode ser explicado pelo fato de que, na solução ótima obtida as densidades limiars (máximos admissíveis) de  $n$  e  $f$  são muito baixas ( $\delta_1 = 0.5$  e  $\delta_2 \approx 0.18$  ou  $0.04$ ) e nesta forma de aplicação as técnicas de controle são aplicadas em sítios que ainda não atingiram as densidades limiars. Esta situação não ocorre no Capítulo 4, provavelmente, pelo fato de que lá os Limiars Econômicos considerados são valores de densidades mais altas. Portanto, por não representar uma situação biologicamente viável, não apresentamos as simulações deste caso.

Para verificarmos os efeitos das formas **1** e **2** de aplicação das técnicas de controle ótimo, os resultados obtidos serão comparados com aqueles obtidos nas subseções 4.3.1, 4.3.3 e 4.3.5.

Em todas as simulações consideramos uma malha bidimensional com  $55 \times 55$  sítios e dois cenários para os parâmetros da dinâmica local: conjunto de parâmetros A e conjunto de parâmetros B, definidos no Capítulo 3. Como condição inicial consideramos  $n_x(0) = 1.3$ ,  $f_x(0) = 2$  e  $p_x(0) = 1.8$ , onde  $x = (28, 28)$  é o sítio localizado no centro do domínio, e todos os outros sítios vazios. Outras condições iniciais, como focos das três densidades em outras posições da malha ou espalhados por toda a malha, foram testadas e os resultados pós-transientes foram idênticos.

Vamos começar com a aplicação das técnicas de controle ótimo sob a forma **1**.

Para o caso de dispersão por difusão, fizemos uma análise do comportamento pós-transientes das densidades em função dos parâmetros de dispersão  $D_f$  e  $D_p$ . Nas Figuras 5.4 e 5.5 apresentamos o comportamento das densidades para os conjuntos de parâmetros A e B, respectivamente. Variando a escolha dos parâmetros de dispersão ( $D_f$  e  $D_p$  entre 0 e 1), as densidades  $f$  e  $p$  evoluem sempre para o mesmo equilíbrio homogêneo estável, onde, em cada sítio, a densidade populacional é a mesma que se tinha para a dinâmica local com aplicação das técnicas de controle

ótimo. A densidade  $n$  no sítio central ou em toda a malha comporta-se de maneira análoga ao variarmos  $D_f$  e  $D_p$ .

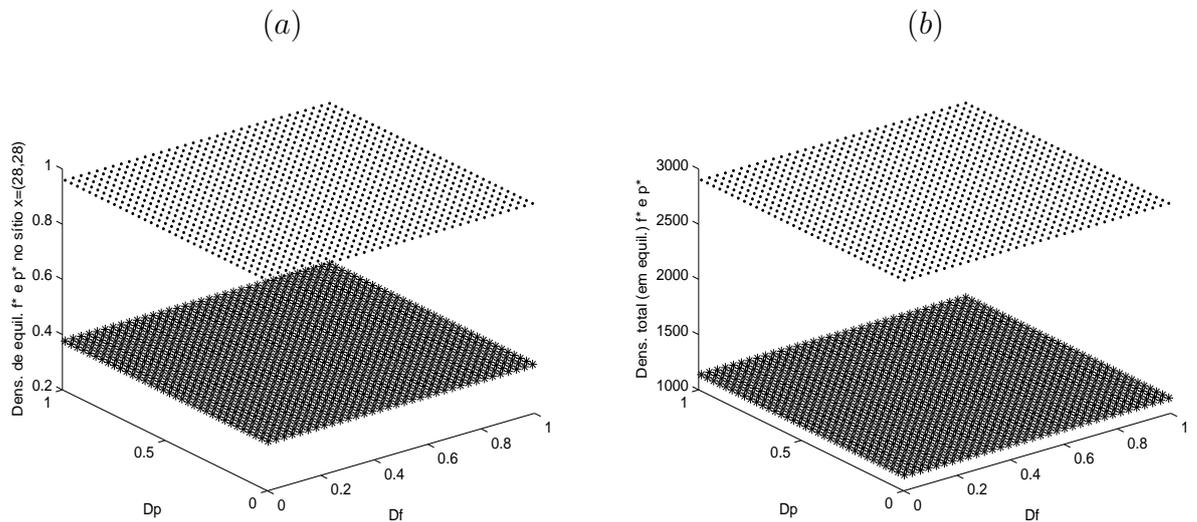


Figura 5.4: Conjunto de parâmetros A; densidades obtidas após 500 iterações temporais; (a) densidades de equilíbrio  $f^* \approx 0.37$  e  $p^* \approx 0.96$  no sítio central da malha, como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades de equilíbrio de todos os sítios como função de  $D_f$  e  $D_p$  ( $\sum f^* \approx 1119$  e  $\sum p^* \approx 2904$ ).

No Capítulo 4, as conclusões obtidas ao compararmos dispersão por difusão e dispersão por taxia local (sem nenhuma interferência de controle ou manejo de pragas) foram muito semelhantes. Agora, considerando técnicas de controle ótimo inseridas no sistema e comparando os resultados obtidos referentes ao comportamento espaço-temporal das populações para estes dois tipos de dispersão, observamos novamente comportamentos muito semelhantes. Por isso, apresentamos nas Figuras 5.6 a 5.8 os resultados apenas para o caso de dispersão por taxia local.

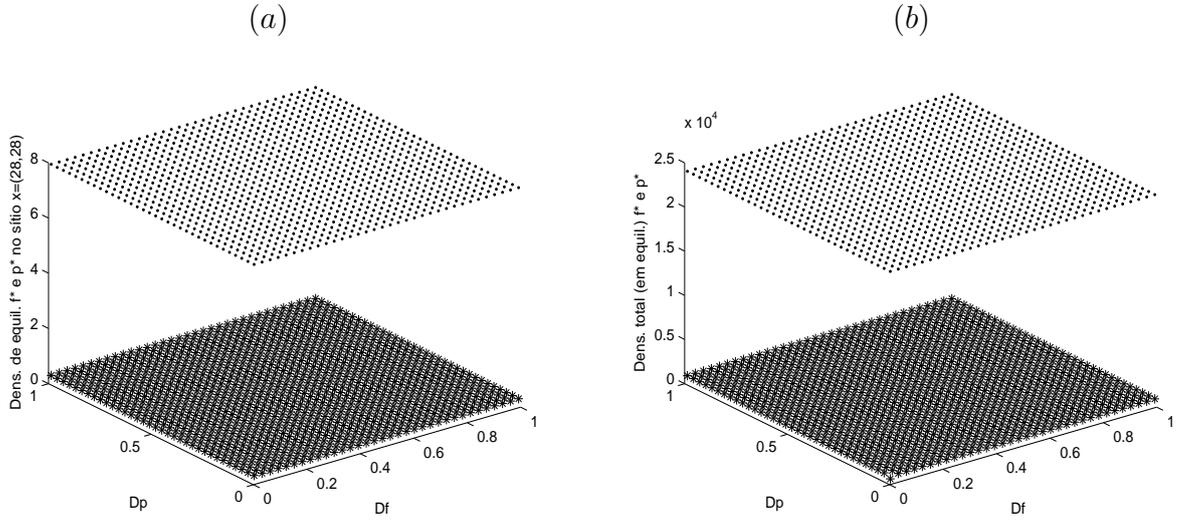


Figura 5.5: Conjunto de parâmetros B; densidades obtidas após 500 iterações temporais; (a) densidades de equilíbrio  $f^* \approx 0.27$  e  $p^* \approx 7.92$  no sítio central da malha, como função de  $D_f$  e  $D_p$ ; (b) soma das densidades de equilíbrio de todos os sítios como função de  $D_f$  e  $D_p$  ( $\sum f^* \approx 817$  e  $\sum p^* \approx 23958$ ).

Na Figura 5.6 apresentamos o comportamento ao longo do tempo das densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$  no sítio  $x = (28, 28)$  para o caso de taxa local. Em ambos os cenários as densidades atingem os mesmos níveis do caso difusivo. No cenário A (Figura 5.6(a)) as populações atingem as densidades de equilíbrio  $n \approx 0.38$ ,  $f \approx 0.37$  e  $p \approx 0.95$ . Enquanto no cenário B (Figura 5.6(b)) as populações atingem as densidades de equilíbrio  $n \approx 0.30$ ,  $f \approx 0.27$  e  $p \approx 7.92$ . Em todos os outros sítios da malha, as populações atingem estas mesmas densidades e, como pode ser observado nas Figuras 5.7 e 5.8, para os dois cenários as populações atingem um estado de equilíbrio homogêneo estável. No cenário B este estado de equilíbrio é alcançado mais rapidamente.

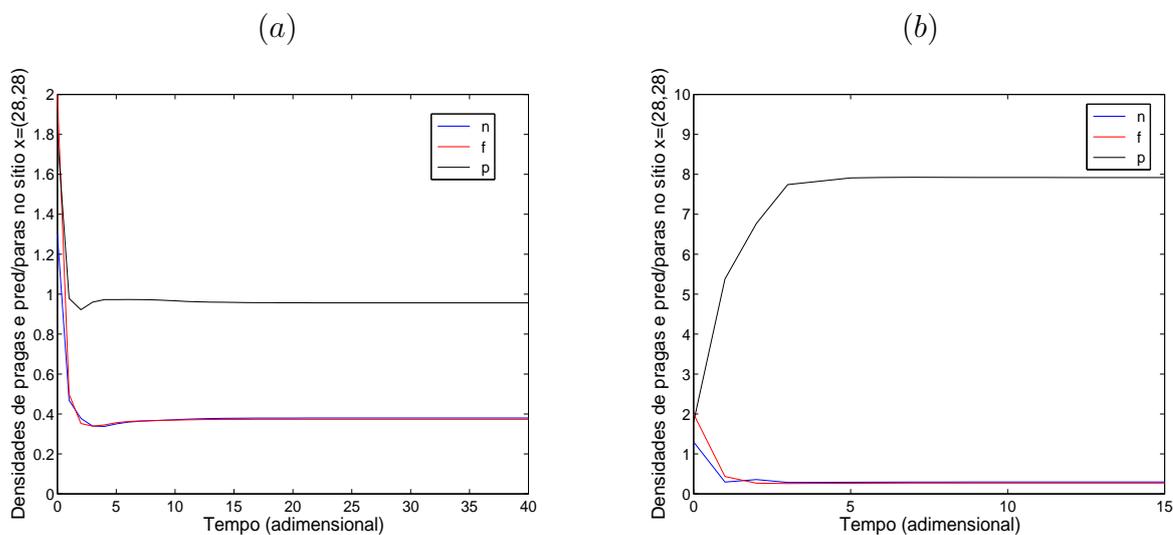


Figura 5.6: (a) e (b) densidades ao longo do tempo para os conjuntos de parâmetros A e B, respectivamente; dispersão por taxia local.

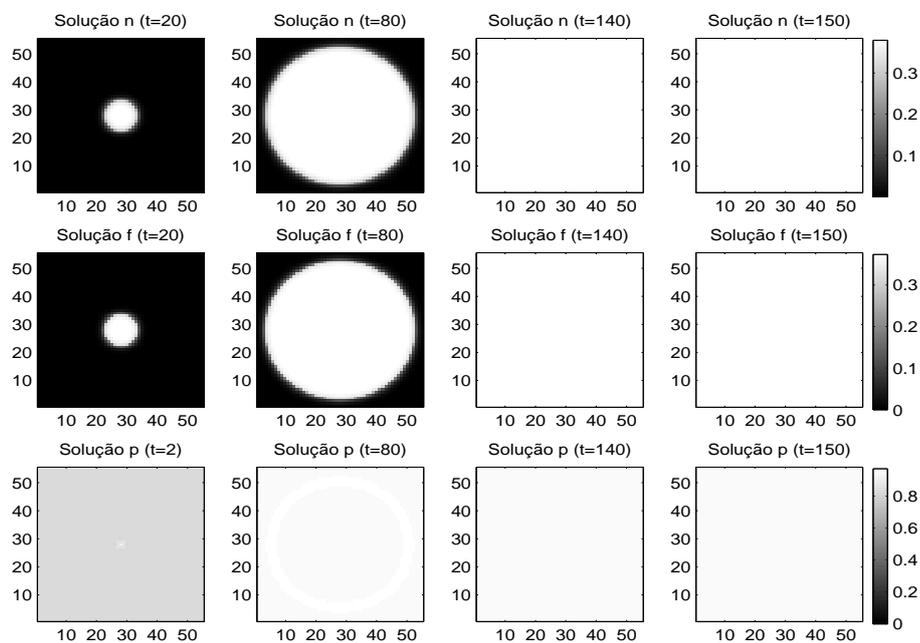


Figura 5.7: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros A; dispersão por taxia local.

A densidade  $p$  de predadores/parasitóides, para os dois conjuntos de parâmetros A e B, atinge muito rapidamente a situação de equilíbrio homogêneo estável. Isso pode ser explicado pelo fato de que, desde o primeiro instante, uma quantidade de predadores/parasitóides é inserida em cada sítio da malha, já que, exceto pelo sítio  $x = (28, 28)$ , estes estão vazios inicialmente, tendo assim densidades abaixo do valor mínimo admissível estabelecido para  $p$ .

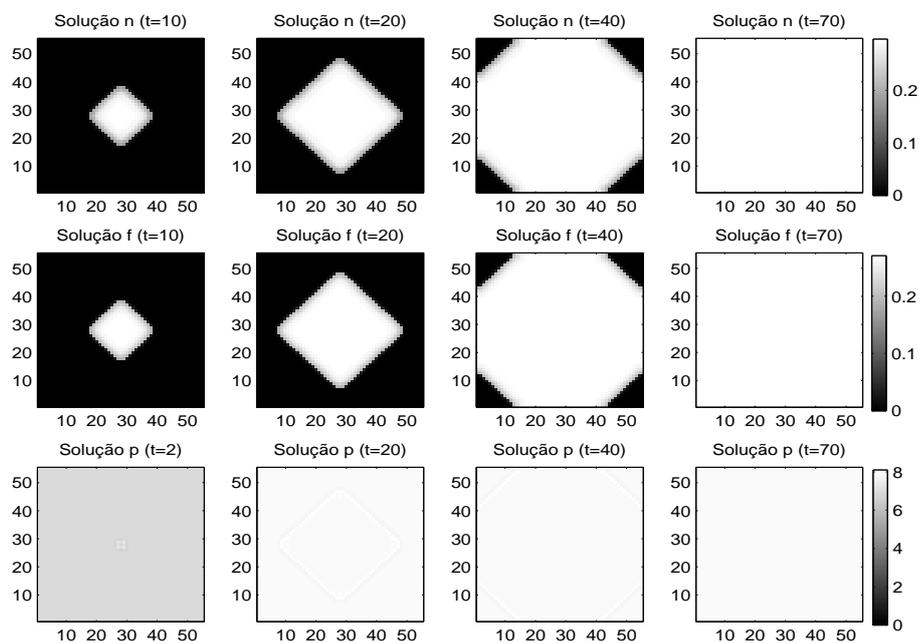


Figura 5.8: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B; dispersão por taxia local.

Para os dois tipos de dispersão e nos dois cenários de parâmetros, as densidades de pragas foram consideravelmente reduzidas, mostrando a eficiência das técnicas de controle otimizadas. No cenário B a população de predadores/parasitóides é estabilizada em uma densidade consideravelmente mais alta do que no cenário A. Isso ocorre porque o valor mínimo admissível  $\delta_3$  para este cenário é consideravelmente mais alto do que para o cenário A. Neste caso, podemos dizer que oscilações no comportamento das populações podem favorecer o desenvolvimento das pragas

e, por isso precisamos de uma quantidade maior de predadores/parasitóides para reduzi-las.

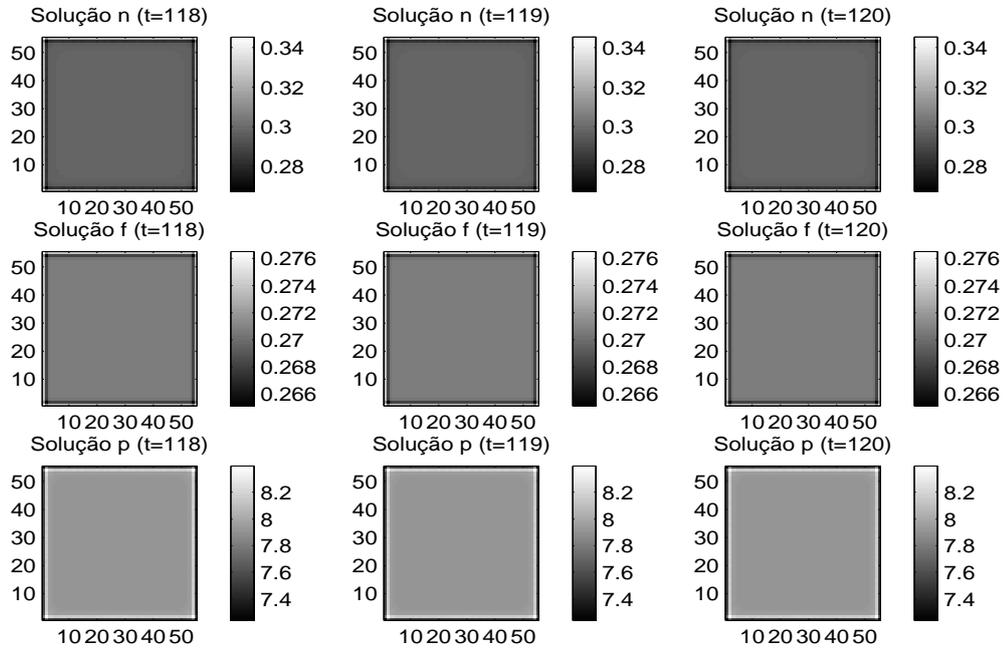


Figura 5.9: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, para o conjunto de parâmetros B; dispersão por taxia quase local.

Por fim, analisamos o caso de controle ótimo sob a forma **1** aplicado ao modelo com estrutura espacial e dispersão por taxia quase local. Neste caso, novamente, as densidades populacionais em cada sítio tornam-se constantes. Entretanto, a distribuição espacial de cada população assume um padrão heterogêneo estável (Figura 5.9). Note que, novamente, trata-se de uma distribuição espacial praticamente homogênea. O comportamento ao longo do tempo e a distribuição espacial das populações são semelhantes para os dois cenários de parâmetros, exceto pelos níveis de densidades, que são mantidos em torno dos valores máximos e valor mínimo admissíveis ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$ ) de cada cenário. Por isso, apresentamos na Figura 5.9 a distribuição espacial heterogênea estável das populações apenas para o cenário B. As densidades de pragas são consideravelmente reduzidas, quando comparadas com os resultados da seção 4.3.5 do Capítulo 4, o que mostra a eficiência das técni-

cas de controle otimizadas. Além disso, ainda em comparação com os resultados da seção 4.3.5 do Capítulo 4, podemos ver que, no cenário B, as técnicas de controle otimizadas alteram o padrão de distribuição espacial das populações.

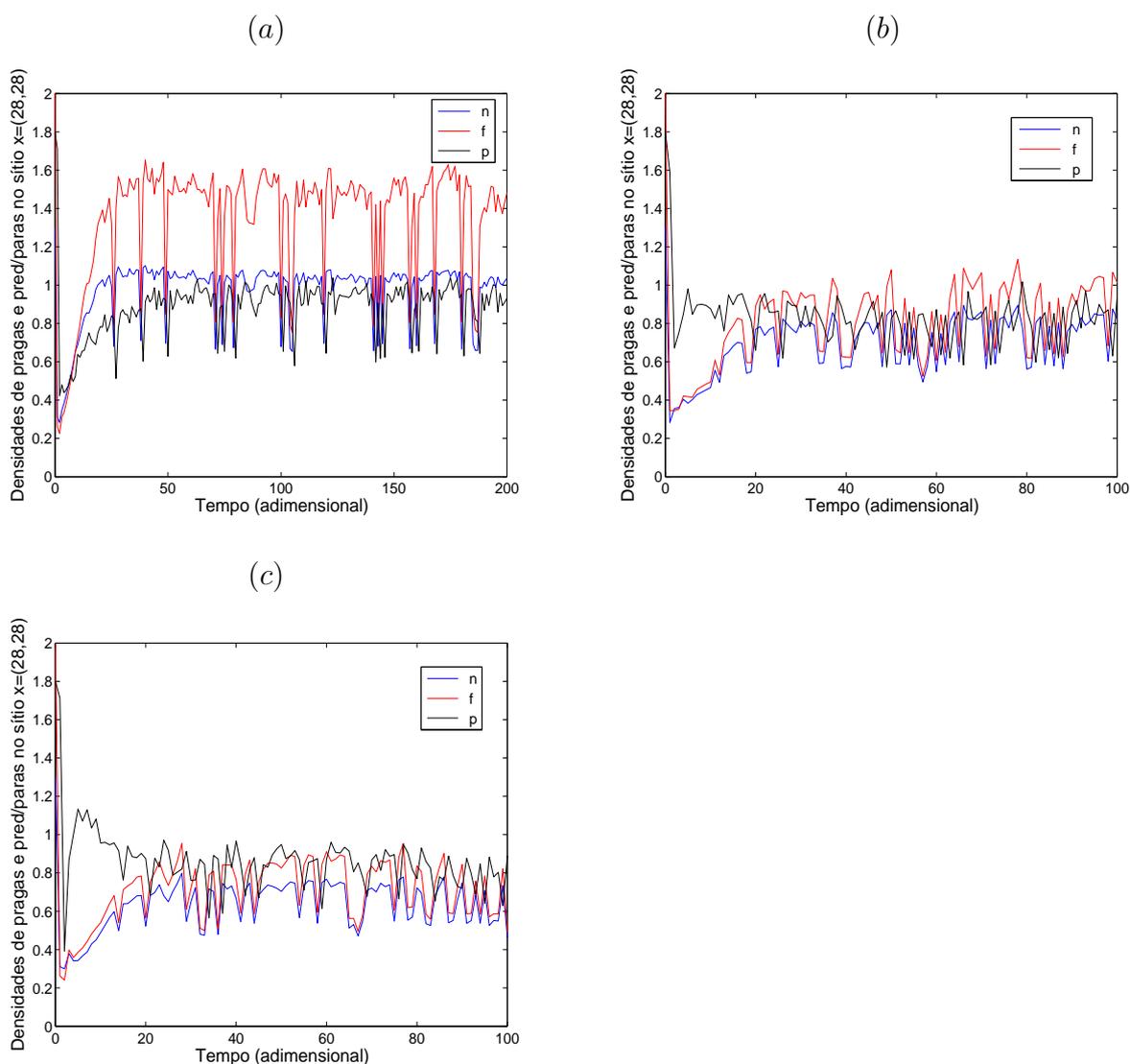


Figura 5.10: (a), (b) e (c) densidades  $n$ ,  $f$  e  $p$ , quando as populações são medidas em aproximadamente 10%, 33% e 50% dos sítios da malha, respectivamente; conjunto de parâmetros A; dispersão por taxia quase local.

Agora vamos considerar a aplicação das técnicas de controle ótimo sob a forma 2. Analisamos três possibilidades para o percentual de sítios da malha

no qual as populações  $n$ ,  $f$  e  $p$  são medidas: aproximadamente 10% (300 sítios); aproximadamente 33% (1000 sítios); aproximadamente 50% (1500 sítios).

Os resultados obtidos são muito semelhantes e intuitivamente esperados para todos os casos analisados. Por isso apresentamos nas Figuras 5.10 e 5.11 o comportamento das populações apenas para um dos casos analisados: o conjunto de parâmetros A com dispersão por taxia quase local. À medida que aumentamos o percentual de sítios nos quais as densidades são medidas, as populações de pragas atingem níveis de densidade mais baixos em cada sítio. Em todos os casos, as densidades populacionais em cada sítio permanecem variando ao longo do tempo e a distribuição espacial de todas as populações assume um padrão heterogêneo instável.

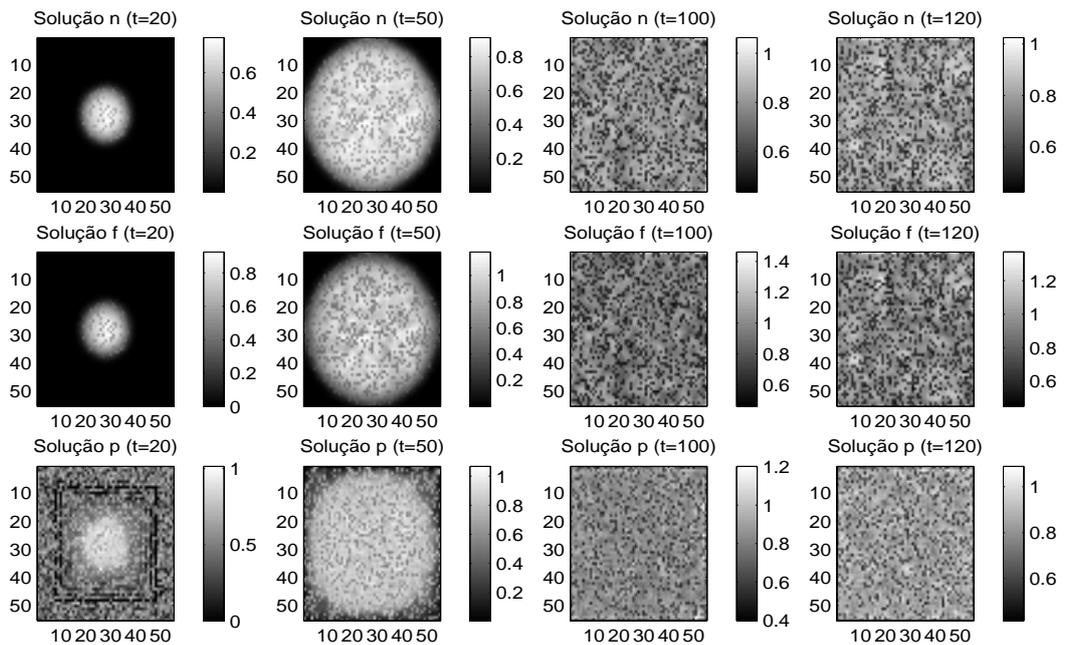


Figura 5.11: Distribuição espacial das populações em diversos instantes de tempo, quando as populações são medidas em aproximadamente 33% dos sítios da malha; conjunto de parâmetros A; dispersão por taxia quase local.

Portanto, com a inclusão da estrutura espacial, o controle ótimo mantém-se eficiente quando aplicado sob a forma **1**. Por outro lado, quando consideramos a aplicação das técnicas de controle ótimo na forma **2**, esta eficiência não é man-

tida, pois apesar de ainda termos redução nas populações de pragas, estas atingem níveis de densidades mais altos. Resultado intuitivamente esperado. A forma **1** de aplicação das técnicas de controle ótimo mostrou-se mais eficiente do que a forma **2**, visto que na forma **1**, as densidades são medidas em todos os sítios a cada passo de tempo.

## 5.6 Síntese dos resultados do capítulo

Formulamos um modelo praga-predador/parasitóide, no qual as variáveis de controle constituem termos deste modelo e a partir dele consideramos um problema de controle ótimo que foi resolvido através da aplicação do princípio do máximo de Pontryagin. Nesta resolução obtivemos as variáveis ótimas de controle, de modo que as densidades de pragas sejam minimizadas. Nas simulações verificamos que as soluções ótimas obtidas são eficientes e mantém as populações de pragas em níveis toleráveis. Além disso, determinamos quando e para quais populações as aplicações do controle ótimo devem ser feitas para que sejam mantidas as densidades ótimas.

Em seguida, consideramos a distribuição espacial discreta das espécies e aplicamos as estratégias de controle ótimo obtidas para o modelo com distribuição espacial. Testamos duas formas de aplicação destas estratégias. Na forma **1** de aplicação das técnicas de controle ótimo, as densidades são medidas a cada passo de tempo em todos os sítios da malha para que possamos decidir a aplicação ou não das técnicas de controle. Esta forma mostrou-se eficiente para os três tipos de movimentação considerados, mantendo as densidades de pragas em torno dos respectivos valores máximos admissíveis e a densidade de predadores/parasitóides em torno do valor mínimo admissível, em cada sítio da malha. Por outro lado, na forma **2**, as densidades são medidas a cada passo de tempo em um percentual de sítios da malha, selecionados aleatoriamente, para que possamos decidir a aplicação ou não das técnicas de controle. Esta forma não tem a mesma eficiência da forma

1. A sua eficiência é diretamente proporcional à quantidade de sítios selecionados.  
Resultado intuitivamente esperado.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho começa com a proposta de um modelo de equações diferenciais ordinárias para descrever a evolução temporal das populações de uma praga e de seu inimigo natural. No Capítulo 2, fizemos um estudo detalhado deste modelo, que vai desde a apresentação dos pontos de equilíbrio até a análise de sensibilidade dos números característicos relevantes para a persistência das populações e dos valores de equilíbrio. Para cada um dos três pontos de equilíbrio: 1) extinção das espécies, 2) extinção do predador/parasitóide e 3) coexistência das espécies, fizemos a análise de estabilidade local respectiva. Além disso, determinamos subconjuntos da bacia de atração do equilíbrio de coexistência. Do ponto de vista da aplicação, estes subconjuntos são importantes, pois eles determinam valores de densidades iniciais das populações a partir dos quais existe a possibilidade de se atingir um equilíbrio em que as pragas estariam em níveis não toleráveis.

Ainda no Capítulo 2, mostramos analiticamente condições para uma bifurcação de Hopf e fizemos uma análise de sensibilidade dos números  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$ , dos equilíbrios  $E_1$  e  $E_2$  e do ciclo limite em relação a cada um dos parâmetros do modelo. Na análise de sensibilidade foi possível destacar alguns resultados relevantes do ponto de vista da aplicação.

O número  $R_0$ , que determina a possibilidade de persistência (ou não) das populações de pragas é mais sensível aos parâmetros  $a$ ,  $d$  e  $c_2$ , onde  $a$  é diretamente proporcional à capacidade suporte do meio para as larvas da praga;  $d$  é diretamente proporcional à proporção de pragas adultas que são fêmeas;  $c_2$  é diretamente proporcional à taxa de mortalidade das fêmeas adultas e inversamente proporcional à taxa de oviposição intrínseca das pragas.

O número  $R_1$ , que determina a possibilidade de persistência da população de predadores/parasitóides é mais sensível aos parâmetros  $c_3$  e  $e$ , onde  $c_3$  é diretamente proporcional à taxa de mortalidade dos predadores/parasitóides e inversamente proporcional à taxa de oviposição intrínseca das pragas;  $e$  é diretamente

proporcional ao fator de conversão presa/hospedeiro para predador/parasitóide e à saturação do predador/parasitóide e inversamente proporcional à taxa de oviposição intrínseca das pragas.

Em relação ao número  $R_2$ , que determina se as espécies coexistem em equilíbrio ou com suas densidades oscilando, apenas conseguimos determinar qual tipo de influência cada um dos parâmetros tem sobre seu valor, não sendo possível determinar, sem a especificação destes, em relação a qual ele é mais sensível.

Em relação ao equilíbrio  $E_2$ , de coexistência das populações, observamos que as densidades de equilíbrio  $n_2^*$  e  $f_2^*$  são mais sensíveis aos parâmetros  $e$  e  $c_3$ . Em relação à densidade de equilíbrio  $p_2^*$ , apenas conseguimos determinar qual tipo de influência cada um dos parâmetros tem sobre seu valor, não sendo possível determinar, sem a especificação destes, em relação a qual ela é mais sensível. O mesmo que ocorre com  $p_2^*$ , também ocorre com as densidades de equilíbrio de  $E_1$ .

No caso de as populações coexistirem formando um ciclo limite no espaço de fase, alterações nos parâmetros causam mudanças mais significativas nos valores máximos que as densidades populacionais atingem do que nos valores mínimos. Além disso, de modo geral, podemos dizer que aumentando os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $d$  aumentamos a amplitude das oscilações das densidades  $e$ , aumentando os parâmetros  $c_1$  e  $c_2$  diminuimos a amplitude destas oscilações;  $b$  e  $c_1$  são diretamente proporcionais à taxa per capita com a qual as larvas passam para a fase adulta e à taxa de mortalidade das larvas da praga, respectivamente, e ambos são inversamente proporcionais à taxa de oviposição intrínseca das pragas.

Estes resultados da análise de estabilidade são relevantes do ponto de vista da aplicação, pois determinam quais parâmetros da dinâmica têm maior influência sobre o comportamento assintótico das populações. Supondo que conheçamos dados biológicos que determinem os valores dos parâmetros de um sistema praga-predador/parasitóide real, podemos determinar o tipo de comportamento assintótico das populações  $e$ , conseqüentemente, qual(is) parâmetro(s) é(são) mais influente(s).

Em seguida, no Capítulo 3, propomos uma estratégia de Manejo Integrado de Pragas para redução das populações da possível praga que tem seu comportamento descrito pelo modelo (2.1). A estratégia proposta mostrou-se eficiente nas simulações, mantendo as populações de pragas em níveis toleráveis em todos os casos analisados. Além disso, as aplicações de MIP tornaram-se periódicas, o que é muito importante do ponto de vista da aplicação concreta desta estratégia, pois, nestes casos, depois de um determinado tempo, o produtor não precisa mais medir a população de pragas antes de aplicar as técnicas de controle, passando a aplicá-las de modo periódico. O que observamos, na verdade, é que devemos realizar uma sequência de aplicações de MIP, e depois existe um intervalo de tempo em que estas aplicações não são necessárias.

Ainda na proposta de MIP do Capítulo 3, observamos que o fato de o predador/parasitóide (especialista) ser resistente ao pesticida, praticamente não influencia o comportamento das populações. Por outro lado, os valores de Limiar Econômico  $LE$  e quantidade  $\rho$  de predadores/parasitóides liberados no sistema influenciam fortemente o intervalo médio de tempo  $\Delta t$  entre as aplicações das técnicas de controle e o número médio  $m_a$  de aplicações necessárias neste intervalo de tempo. Para determinados conjuntos de parâmetros, uma pequena modificação no valor estabelecido para  $LE$  ou  $\rho$  pode modificar significativamente o intervalo de tempo entre as aplicações. Por fim, mostramos que a aplicação da estratégia de MIP altera significativamente o comportamento qualitativo das populações.

Quando, no Capítulo 4, as equações diferenciais do modelo (2.1) foram acopladas a uma estrutura espacial discreta, consideramos três regras de movimentação: difusão, taxia local e taxia quase local. Para os conjuntos de parâmetros considerados, a dispersão por difusão (Figuras 4.3 e 4.7) ou taxia local (Figuras 4.11 e 4.12) não altera o comportamento local das populações. Para o caso de equilíbrio estável na dinâmica local, a distribuição espacial com dispersão por taxia quase local torna-se heterogênea estável, porém as variações de densidades populacionais entre os sítios são muito pequenas (Figura 4.16). No caso local de ciclo limite, com a dispersão por taxia quase local, surgem padrões espaciais bastante diferenciados

daqueles que observamos nas outras situações; em cada sítio, temos oscilações com frequências muito altas para todas as densidades populacionais e altas amplitudes para a população  $p$  (Figura 4.17).

A estratégia de MIP proposta para os modelos com distribuição espacial mostrou-se eficiente nas simulações, mantendo as populações de pragas em níveis toleráveis em todos os casos analisados. Novamente, o efeito do parâmetro que estamos usando para distinguir entre o efeito do pesticida sobre o predador/parasitóide e sobre a praga não se faz sentir, de modo que o fato de o predador/parasitóide (especialista) ser resistente ao pesticida, praticamente não influencia o comportamento das populações. Por fim, o MIP provoca, de modo geral, alterações no comportamento espaço-temporal das populações.

No Capítulo 5, formulamos um problema de controle ótimo, segundo Rafikov & Balthazar (2005), em que as variáveis de controle são incorporadas às equações diferenciais do modelo praga-predador/parasitóide. Este problema é, então, resolvido através da aplicação do princípio do máximo de Pontryagin, que fornece as variáveis ótimas de controle, de modo que as densidades de pragas sejam minimizadas. Verificamos, através de simulações, que as soluções ótimas obtidas são eficientes e mantêm as populações de pragas em níveis toleráveis e, determinamos quando e para quais populações as aplicações do controle ótimo devem ser feitas para que sejam mantidas as densidades ótimas.

Em seguida, consideramos a distribuição espacial discreta das espécies e aplicamos as estratégias de controle ótimo obtidas para o modelo com distribuição espacial. Testamos duas formas de aplicação das técnicas de controle ótimo, que diferem quanto à porcentagem de sítios nos quais as densidades são medidas. Na forma **1**, as densidades são medidas a cada passo de tempo em todos os sítios da malha para que possamos decidir a aplicação ou não das técnicas de controle. Esta forma mostrou-se eficiente para os três tipos de movimentação considerados, mantendo as densidades em torno dos respectivos valores máximos (pragas) e mínimos (predadores/parasitóides) admissíveis em cada sítio da malha. Por outro lado, na forma **2**, as densidades são medidas a cada passo de tempo em um percentual de

sítios da malha, selecionados aleatoriamente, para que possamos decidir a aplicação ou não das técnicas de controle. Esta forma tem eficiência diretamente proporcional à quantidade de sítios selecionados. Portanto, a forma **1** mostrou-se mais eficiente do que a forma **2**, resultado intuitivamente esperado.

Neste trabalho, estamos propondo duas técnicas para o controle de pragas, e podemos dizer que a segunda (Capítulo 5), teoricamente, é um aperfeiçoamento da primeira (Capítulos 3 e 4). No Capítulo 3, caso estivéssemos analisando o comportamento de uma praga específica, para podermos aplicar o MIP, precisaríamos estabelecer, a partir de informações biológicas, químicas e/ou de cultivo (entre outras), valores para o Limiar Econômico  $LE$  e para quantidade de predadores/parasitóides  $\rho$  inseridos no sistema. Por outro lado, no Capítulo 5, as variáveis que representam a ação contínua das técnicas de controle e, conseqüentemente, a quantidade e o tempo de aplicação destas técnicas são determinadas analiticamente a partir das informações do problema de controle ótimo formulado.

Como estamos tratando de modelos teóricos, não obtivemos ainda as informações biológicas, químicas e/ou de cultivo (entre outras) que nos permitiriam determinar valores realísticos para  $LE$  e  $\rho$  e também para os parâmetros envolvidos no problema de controle ótimo. A definição de qual das técnicas, na prática, é mais eficiente vai depender fortemente destas informações. Por isso, pretendemos, futuramente, simular a aplicação destas técnicas a uma praga em particular, considerando valores realísticos para os parâmetros.

Futuramente, poderemos considerar outras técnicas de MIP, como corretores ecológicos e/ou feromônios, que influenciam diretamente na movimentação dos indivíduos.

Há também a possibilidade de alterarmos o modelo que descreve a dinâmica natural das espécies, considerando um predador/parasitóide generalista, o que facilita a sua persistência no ambiente.

## Apêndice A SUBCONJUNTOS DA BACIA DE ATRAÇÃO DO EQUILÍBRIO DE COEXISTÊNCIA

Se escolhermos  $m_1 = e$  e  $m_2 = m_3 = 1$  em (2.13), temos

$$V(n, f, p) = e(n - n_2^*)^2 + (f - f_2^*)^2 + (p - p_2^*)^2.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2e(n - n_2^*)\frac{dn}{dt} + 2(f - f_2^*)\frac{df}{dt} + 2(p - p_2^*)\frac{dp}{dt} \\ &= 2e(n - n_2^*) [f(a - n) - f_2^*(a - n_2^*) + \\ &\quad - (b + c_1)(n - n_2^*) - \frac{np}{1+n} + \frac{n_2^*p_2^*}{1+n_2^*}] + \\ &\quad + 2(f - f_2^*)[bd(n - n_2^*) - c_2(f - f_2^*)] + \\ &\quad + 2(p - p_2^*) \left\{ e \left[ \frac{np}{1+n} - \frac{n_2^*p_2^*}{1+n_2^*} \right] - c_3(p - p_2^*) \right\}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -2e(b + c_1)(n - n_2^*)^2 - 2c_2(f - f_2^*)^2 - 2c_3(p - p_2^*)^2 + \\ &\quad + 2e(n - n_2^*)[a(f - f_2^*) - nf + n_2^*f_2^*] + 2bd(n - n_2^*)(f - f_2^*) + \quad (A.1) \\ &\quad + 2e[(p - p_2^*) - (n - n_2^*)] \left[ \frac{nn_2^*(p - p_2^*) + np - n_2^*p_2^*}{(1+n)(1+n_2^*)} \right]. \end{aligned}$$

Na primeira linha da expressão do lado direito da igualdade (A.1) temos

$$-2e(b + c_1)(n - n_2^*)^2 - 2c_2(f - f_2^*)^2 - 2c_3(p - p_2^*)^2 < 0.$$

Analisando os outros termos do lado direito da igualdade (A.1) podemos ver que a segunda linha pode ser reescrita sob a forma

$$2[(n - n_2^*)(f - f_2^*)(ae + bd) + e(n - n_2^*)(n_2^*f_2^* - nf)].$$

Donde, cada uma das combinações:

$$n > n_2^*, \quad f < f_2^* \quad \text{e} \quad nf < n_2^*f_2^* \quad (A.2)$$

ou

$$n < n_2^*, \quad f > f_2^* \quad \text{e} \quad nf > n_2^* f_2^* \quad (\text{A.3})$$

implica em

$$2[(n - n_2^*)(f - f_2^*)(ae + bd) + e(n - n_2^*)(n_2^* f_2^* - nf)] < 0.$$

Por fim, a última linha do lado direito da igualdade (A.1) pode ser reescrita sob a forma

$$\frac{e\{nn_2^*(p - p_2^*)((p - p_2^*) - (n - n_2^*)) + (np - n_2^* p_2^*)((p - p_2^*) - (n - n_2^*))\}}{(1 + n)(1 + n_2^*)}.$$

Donde, cada uma das combinações:

$$p > p_2^*, \quad p - n < p_2^* - n_2^* \quad \text{e} \quad np > n_2^* p_2^* \quad (\text{A.4})$$

ou

$$p < p_2^*, \quad p - n > p_2^* - n_2^* \quad \text{e} \quad np < n_2^* p_2^* \quad (\text{A.5})$$

implica em

$$\frac{e\{nn_2^*(p - p_2^*)((p - p_2^*) - (n - n_2^*)) + (np - n_2^* p_2^*)((p - p_2^*) - (n - n_2^*))\}}{(1 + n)(1 + n_2^*)} < 0.$$

Assim, temos as seguintes possibilidades de condições para que  $\dot{V}(x)$  seja menor do que zero:

- (A.2) e (A.4) implicam em  $\dot{V}(x) < 0$ ;
- (A.3) e (A.5) implicam em  $\dot{V}(x) < 0$ .

Não podemos combinar as condições (A.2) e (A.5) ou (A.3) e (A.4), pois

$$n > n_2^* \quad \text{e} \quad p < p_2^* \implies p - n < p_2^* - n_2^*$$

e

$$n < n_2^* \quad \text{e} \quad p > p_2^* \implies p - n > p_2^* - n_2^*.$$

Portanto, de acordo com a definição de função de Lyapunov estrita, temos os subconjuntos da bacia de atração de  $E_2$ :

$$W_1 = \{(n, f, p) \in \mathbb{R}_+^3 : n > n_2^*, \quad f < f_2^*, \\ n_2^* f_2^* < nf, \quad p > p_2^* \quad \wedge \quad p - n < p_2^* - n_2^*\}$$

e

$$W_2 = \{(n, f, p) \in \mathbb{R}_+^3 : n < n_2^*, \quad f > f_2^*, \\ n_2^* f_2^* > nf, \quad p < p_2^*, \quad \wedge \quad p - n > p_2^* - n_2^*\},$$

## Apêndice B CONDIÇÃO PARA UMA BIFURCAÇÃO DE HOPF

De acordo com (2.17), (2.18) e (2.19) temos

$$\begin{aligned}
p_1(a)p_2(a) - p_0(a) &= \left\{ \left( \frac{1}{e} + \frac{c_3}{ec_2} \right) \{ (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3 \} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2bdc_3}{e - c_3} + c_2(b + c_1) - abd \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{ec_2} \{ (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3 \} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{bdc_3}{c_2(e - c_3)} + b + c_1 + c_2 \right\} - \frac{c_3}{e} \{ (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3 \} \\
&= \left\{ \frac{\psi}{e} + \frac{c_3\psi}{ec_2} + \frac{2bdc_3}{e - c_3} + c_2(b + c_1) - abd \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\psi}{ec_2} + \frac{bdc_3}{c_2(e - c_3)} + b + c_1 + c_2 \right\} - \frac{c_3\psi}{e},
\end{aligned}$$

onde  $\psi = (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bdc_3$ . Então

$$p_1(a)p_2(a) - p_0(a) = 0$$

é equivalente à equação

$$\frac{\left\{ abd - \left[ \frac{2bdc_3}{e - c_3} + c_2(b + c_1) + \frac{\psi}{e} \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{bdc_3}{c_2(e - c_3)} + \frac{\psi}{ec_2} + b + c_1 + c_2 \right\}}{\left\{ \frac{bdc_3}{c_2(e - c_3)} + \frac{\psi}{ec_2} + b + c_1 \right\} \frac{c_3\psi}{ec_2}} = 1,$$

que, por sua vez, pode ser escrita sob a forma:

$$\frac{\{ bdec_3 + (e - c_3)[\psi + ec_2(b + c_1 + c_2)] \} \cdot \{ (e - c_3)[abde - ec_2(b + c_1) - \psi] - 2bdec_3 \} c_2}{c_3\psi(e - c_3)\{ bdec_3 + (e - c_3)[\psi + ec_2(b + c_1)] \}} = 1. \tag{B.1}$$

Simplificando cada uma das expressões presentes em (B.1) obtemos para o lado esquerdo da igualdade:

- no primeiro termo da multiplicação no numerador

$$(e - c_3)[(e - c_3)abd + c_2c_3(b + c_1) + ec_2^2] + bdc_3^2;$$

- no segundo termo da multiplicação no numerador

$$c_2c_3\{ (e - c_3)[abd - c_2(b + c_1)] - bd(e + c_3) \};$$

- no denominador

$$\{c_3(e-c_3)^2[abd-c_2(b+c_1)]-(e-c_3)bdc_3^2\}\{(e-c_3)[abd(e-c_3)+c_2c_3(b+c_1)]+bdc_3^2\}.$$

Portanto, temos

$$p_1(a)p_2(a) - p_0(a) = 0$$

equivalente a

$$\frac{[A + ec_2^2(e - c_3)](B - bdec_3)c_2}{AB(e - c_3)} = 1,$$

onde  $A$  é dado em (2.11) e  $B$  é dado em (2.12). Ou seja,

$$p_1(a)p_2(a) - p_0(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R_2 = 1.$$

## Apêndice C    CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A OTIMALIDADE

Consideremos uma situação onde são dados:

- as equações de estado  $\dot{x}_i = f_i(x, u)$ , onde  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , para  $i = 1, 2, 3$ ;
- um estado inicial  $x(t_0) = x^0$  em um dado tempo  $t_0$ ;
- um estado final  $x(\tau) = x^\tau$  alcançado em algum tempo  $\tau$ ;
- um funcional custo

$$J = \int_{t_0}^{\tau} f_0(x, u) dt;$$

- e um conjunto de controles admissíveis  $u(t)$  (contínuos por partes e restritos a uma região limitada  $U$ ).

Nosso objetivo é encontrar um controle  $u^*(t)$  com correspondente trajetória  $x^*(t)$  que transfere o sistema de  $x^0$  até  $x^\tau$  minimizando o funcional  $J$ . Satisfazendo estas condições  $u^*$  é chamado controle ótimo.

Seja  $u^*(t)$  um controle ótimo com correspondente trajetória ótima  $x^*(t)$ .

Seja  $u = u^* + \delta u(t)$  uma pequena variação de  $u^*$  com correspondente trajetória  $(x_1^* + \delta x_1(t), x_2^* + \delta x_2(t), x_3^* + \delta x_3(t))$ . Esta trajetória não alcançará  $x^\tau$  em  $\tau$  mas em um tempo levemente diferente  $\tau + \delta t$ . Portanto

$$x_i^\tau = x_i^*(\tau + \delta t) + \delta x_i(\tau + \delta t), \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (\text{C.1})$$

Expandindo  $x_i^*(\tau + \delta t)$  e  $\delta x_i(\tau + \delta t)$  em série de Taylor em torno de  $\tau$  e substituindo em (C.1), temos

$$x_i^\tau = x_i^*(\tau) + \delta t \dot{x}_i^*(\tau) + \delta x_i(\tau) + O((\delta t)^2).$$

Usualmente, quando tratamos de variações, estamos interessados somente nos efeitos de primeira ordem. Para que  $x^*$  seja uma trajetória ótima, precisamos ter a condição final  $x_i^\tau = x_i^*(\tau)$  sendo satisfeita. Portanto, desprezando os termos da ordem de  $(\delta t)^2$ , precisamos ter a variação de primeira ordem de  $x_i$  sendo nula, ou seja,

$$\delta \dot{x}_i^*(\tau) + \delta x_i(\tau) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Considerando as equações de estado, obtemos

$$\delta x_i(\tau) = -f_i(\tau)\delta t,$$

onde  $f_i(\tau) = f_i(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), x_3^*(\tau), u_1^*(\tau), u_2^*(\tau), u_3^*(\tau))$ . Para simplificar a notação, vamos denotar  $f_i = f_i(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t))$  e adotar a mesma convenção para  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  e  $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Agora, vamos considerar uma variação  $\Delta J$  do funcional  $J$

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(x^* + \delta x) - J(x^*) \\ &= \int_{t_0}^{\tau + \delta t} f_0(x^* + \delta x, u^* + \delta u) dt - \int_{t_0}^{\tau} f_0(x^*, u^*) dt. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Fazendo a expansão em Série de Taylor de  $f_0(x^* + \delta x, u^* + \delta u)$  em torno de  $(x^*, u^*)$ , após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{\tau} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} \delta x_3 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f_0}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial f_0}{\partial u_3} \delta u_3 \right] dt + f_0(\tau)\delta t + O((\delta u)^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta J = \delta J + O((\delta u)^2),$$

onde  $\delta J$  é a variação de primeira ordem de  $J$  e as derivadas no integrando são avaliadas sobre a trajetória ótima. De acordo com a teoria do cálculo de variações, para que  $u^*$  minimize  $J$  é necessário que tenhamos  $\delta J = 0$ , ou seja,

$$\int_{t_0}^{\tau} \left[ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f_0}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial f_0}{\partial u_3} \delta u_3 \right] dt + f_0(\tau)\delta t = 0.$$

Como  $\delta x$  e  $\delta u$  não são independentes (estão ligadas pelas equações de estado) temos um problema com restrições. Para resolver este problema, vamos

introduzir os multiplicadores de Lagrange  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  e  $\psi_3(t)$  considerando as integrais:

$$\Phi_i = \int_{t_0}^{\tau} \psi_i(t)(\dot{x}_i - f_i(x, u))dt, \quad i = 1, 2, 3.$$

Estas integrais são nulas, pois devem satisfazer as equações de estado. Assim,  $\Phi_i = 0$  para qualquer controle admissível  $u$ . Conseqüentemente, a variação de primeira ordem  $\delta\Phi_i$  é nula para  $u^*$ .

Por outro lado, considerando argumentos algébricos semelhantes aos utilizados na variação  $\Delta J$ , podemos obter a variação  $\Delta\Phi_i$  e, conseqüentemente, a variação de primeira ordem  $\delta\Phi_i$  sendo

$$\begin{aligned} \delta\Phi_i = \int_{t_0}^{\tau} \psi_i(t) & \left[ -\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \delta x_1 - \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \delta x_2 - \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \delta x_3 + \right. \\ & \left. -\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \delta u_1 - \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \delta u_2 - \frac{\partial f_i}{\partial u_3} \delta u_3 + \frac{d}{dt}(\delta x_i) \right] dt. \end{aligned}$$

Considerando que  $\delta x_i(t_0) = 0$  e  $\delta x_i(\tau) = -f_i(\tau)\delta t$ , integrando por partes a expressão  $\int_{t_0}^{\tau} \psi_i(t) \frac{d}{dt}(\delta x_i)dt$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tau} \psi_i(t) \frac{d}{dt}(\delta x_i)dt & = [\psi_i(t)\delta x_i]_{t_0}^{\tau} - \int_{t_0}^{\tau} \dot{\psi}_i \delta x_i dt \\ & = -\psi_i(\tau)f_i(\tau)\delta t - \int_{t_0}^{\tau} \dot{\psi}_i \delta x_i dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta\Phi_i = - \int_{t_0}^{\tau} \psi_i(t) & \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \delta u_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial f_i}{\partial u_3} \delta u_3 \right] dt - \int_{t_0}^{\tau} \dot{\psi}_i \delta x_i - \psi_i(\tau)f_i(\tau)\delta t = 0. \end{aligned} \quad (C.3)$$

Podemos, portanto, substituir a condição  $\delta J = 0$  por

$$\delta J + \delta\Phi_1 + \delta\Phi_2 + \delta\Phi_3 = 0. \quad (C.4)$$

Substituindo em (C.4) a expressão correspondente a  $\delta J$  e cada uma das expressões  $\delta\Phi_i$  obtidas em (C.3), temos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{\tau} \delta x_1 \left[ \frac{\partial f_0}{\partial x_1} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \psi_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \dot{\psi}_1 \right] dt + \\
& + \int_{t_0}^{\tau} \delta x_2 \left[ \frac{\partial f_0}{\partial x_2} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \psi_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dot{\psi}_2 \right] dt + \\
& + \int_{t_0}^{\tau} \delta x_3 \left[ \frac{\partial f_0}{\partial x_3} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \psi_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - \dot{\psi}_3 \right] dt + \\
& + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_1 \left[ \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \psi_3 \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \right] dt + \\
& + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_2 \left[ \frac{\partial f_0}{\partial u_2} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_2} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \psi_3 \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \right] dt + \\
& + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_3 \left[ \frac{\partial f_0}{\partial u_3} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_3} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial u_3} - \psi_3 \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \right] dt + \\
& + [f_0(\tau) - \psi_1(\tau)f_1(\tau) - \psi_2(\tau)f_2(\tau) - \psi_3(\tau)f_3(\tau)] \delta t = 0.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Esta igualdade pode ser escrita de forma mais compacta, se considerarmos a função

$$H = -f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) - \psi_2 f_2(x, u) - \psi_3 f_3(x, u).$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{\tau} \delta x_1 \left[ \frac{\partial H}{\partial x_1} + \dot{\psi}_1 \right] dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta x_2 \left[ \frac{\partial H}{\partial x_2} + \dot{\psi}_2 \right] dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta x_3 \left[ \frac{\partial H}{\partial x_3} + \dot{\psi}_3 \right] dt + \\
& + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_1 \frac{\partial H}{\partial u_1} dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_2 \frac{\partial H}{\partial u_2} dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_3 \frac{\partial H}{\partial u_3} dt + H(\tau) \delta t = 0,
\end{aligned} \tag{C.6}$$

para variações admissíveis  $\delta x$  e  $\delta u$  com as derivadas sendo calculadas sobre a trajetória ótima.

Os multiplicadores  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  e  $\psi_3(t)$  estão a nossa disposição. Se eles forem escolhidos satisfazendo as equações

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

então a condição (C.6) torna-se

$$\int_{t_0}^{\tau} \delta u_1 \frac{\partial H}{\partial u_1} dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_2 \frac{\partial H}{\partial u_2} dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_3 \frac{\partial H}{\partial u_3} dt + H(\tau) \delta t = 0 \tag{C.7}$$

para todas as variações admissíveis.

Considerando variações  $u^* + \delta u$  para as quais  $\delta t = 0$ , ou seja, a correspondente solução  $x$  chega à  $x^\tau$  em  $t = \tau$  (tempo final fixado), a condição (C.7) torna-se

$$\int_{t_0}^{\tau} \delta u_1 \frac{\partial H}{\partial u_1} dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_2 \frac{\partial H}{\partial u_2} dt + \int_{t_0}^{\tau} \delta u_3 \frac{\partial H}{\partial u_3} dt = 0.$$

Disso, podemos deduzir que

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{C.8})$$

em qualquer ponto da trajetória ótima.

Por outro lado, se temos variações para as quais  $\delta t \neq 0$  (tempo final não fixado), além da condição (C.8), é necessário termos  $H(\tau) = 0$  sobre a trajetória ótima.

Assim, obtivemos condições necessárias para a otimalidade do controle  $u^*$ :

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{em cada ponto da trajetória ótima}$$

e

$$H(\tau) = 0 \quad \text{sobre a trajetória ótima,}$$

onde

$$H = -f_0 + \psi_1 f_1 - \psi_2 f_2 - \psi_3 f_3$$

e cada multiplicador  $\psi_i$  satisfaz

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Estas equações são chamadas *equações de coestado* e  $H$  é, algumas vezes chamada de *Hamiltoniana*.

A partir destas condições, podemos então enunciar o princípio do máximo de Pontryagin.

**Teorema 1 (Princípio do máximo de Pontryagin):** Seja  $u^*(t)$  um controle admissível com correspondente trajetória  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  que transfere o sistema de  $x^0$  em um dado tempo  $t = t_0$  até  $x^\tau$  em um tempo não especificado  $\tau$ .

Então, para que  $u^*$  e  $x^*$  sejam ótimos (ou seja, minimizem  $J$ ) é necessário que exista um vetor não trivial  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$  satisfazendo

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{C.9})$$

e uma função escalar

$$H(\psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u) + \psi_3 f_3(x, u)$$

tais que

- para todo  $t \in [t_0, \tau]$ ,  $H$  tem seu máximo em relação a  $u$  em  $u = u^*(t)$ ;
- $H(\psi^*, x^*, u^*) = 0$  e  $\psi_0 \leq 0$  em  $t = \tau$ , onde  $\psi^*(t)$  é a solução de (C.9) para  $u = u^*(t)$ .

$x_0$  é definida como a solução da equação diferencial

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u) \quad (\text{C.10})$$

que satisfaz a condição inicial  $x_0(t_0) = 0$ . Em um tempo  $t$ ,  $x_0(t)$  é o custo incorrido até o momento. Em  $t = \tau$ ,  $x_0(\tau)$  é o custo total  $J$ .

Mais ainda, podemos mostrar que  $H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{const}$  e  $\psi_0 = \text{const}$  de modo que  $H = 0$  e  $\psi_0 \leq 0$  em cada ponto da trajetória ótima.

Até aqui, tratamos de um problema com estados inicial  $x^0$  e final  $x^\tau$  fixados. Existem problemas para os quais o estado do sistema em  $t_0$  ou  $\tau$  não está completamente especificado, está sobre uma determinada curva.

Vamos supor então que  $x^0$  em  $t = t_0$  está fixado mas em  $t = \tau$  o estado final está sobre uma determinada curva  $C$  no espaço de estado. Neste caso, precisamos de uma condição extra para descobirmos qual ponto de  $C$  e seu correspondente controle minimizam  $J$ . Esta condição extra é chamada *condição de transversalidade*. Uma argumentação geométrica nos leva ao resultado que consiste em uma condição envolvendo as variáveis de coestado em  $\tau$  e a tangente à curva

alvo  $C$  no espaço de estado: o vetor tridimensional  $(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau))^T$  deve ser perpendicular à tangente à curva alvo  $C$  no estado final ótimo.

**Teorema 2:** Seja  $u^*(t)$  um controle admissível que transfere o sistema de  $x^0$  em um dado tempo  $t = t_0$  até um ponto sobre a curva  $C$  em um tempo não especificado  $\tau$ . Então, para que  $u^*$  e  $x^*$  sejam ótimos é necessário que exista um vetor não trivial  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$  satisfazendo as equações (C.9) e uma função escalar

$$H(\psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u) + \psi_3 f_3(x, u)$$

tais que

- para todo  $t \in [t_0, \tau]$ ,  $H$  tem seu máximo em relação a  $u$  em  $u = u^*(t)$ ;
- $H(\psi^*, x^*, u^*) = 0$  e  $\psi_0 \leq 0$  em  $t = \tau$ ;
- $(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau))^T$  é perpendicular à tangente à  $C$  em  $(x_1^*(\tau), x_2^*(\tau), x_3^*(\tau))$ .

Mais ainda, podemos mostrar que  $H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{const}$  e  $\psi_0 = \text{const}$  de modo que  $H = 0$  e  $\psi_0 \leq 0$  em cada ponto da trajetória ótima.

**Corolário do Teorema 2:** Se o estado final em  $t = \tau$  é completamente não especificado, então a condição de transversalidade torna-se

$$(\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau))^T = 0.$$

## Referências Bibliográficas

- [1] Alligood, K. T., Sauer, T. D. & Yorke, J. A., *Chaos An Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [2] Bhattacharyya, S. & Bhattacharya, D. K., Pest control through viral disease: Mathematical modeling and analysis. *Journal of Theoretical Biology*, **238**, 177-197, 2006.
- [3] Bhattacharyya, S. & Bhattacharya, D. K., An improved integrated pest management model under 2-control parameters (sterile male and pesticide). *Mathematical Biosciences*, **209**, 256-281, 2007.
- [4] Castilhos, R. V., Grutzmacher, A. D., Nava, D. E., Siqueira, P. R. B., Spagnol, D. & Zotti, M. J., Seletividade de Agrotóxicos Recomendados na Persicultura ao Predador *Chrysoperla externa* (Hagen, 1861) (Neuroptera: Chrysopidae), Embrapa Clima Temperado (Boletim de pesquisa e desenvolvimento 152), Pelotas, 2011.
- [5] Chitnis, N., Hyman, J. M. & Cushing, J. M., Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. *Bulletin of Mathematical Biology*, **70**, 1272-1296, 2008.
- [6] Chakraborty, A., Singh, M., Lucy, D. & Ridland, P., Predator-prey Model with Prey-taxis and Diffusion. *Mathematical and Computer Modelling*, **46**, 482-498, 2007.
- [7] Clark, C. W., "Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources", John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [8] Corrêa-Ferreira, B. S., Utilização do parasitóide de ovos *Trissolcus basalis* (Wollaston) no controle de percevejos da soja, EMBRAPA-CNPSO (circular técnica 11), Londrina, 1993.
- [9] Edelstein-Keshet, L., "Mathematical Models in Biology", McGraw-Hill, New York, 1988.

- [10] Ferguson, A. W., Klukowski, Z., Walczak, B., Clark, S. J., Muggleston, M. A., Perry J. N. & Williams, I. H., Spatial distribution of pest insects in oilseed rape: implications for integrated pest management. *Agriculture and ecosystems & environment*, **95**, 509-521, 2003.
- [11] Ghosh, S. & Bhattacharya, D. K., Optimization in microbial pest control: An integrated approach. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 1382-1395, 2010.
- [12] Goh, B. S., "Management and Analysis of Biological Populations", Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1980.
- [13] Graça, J. V., Citrus Greening Disease. *Annu. Rev. Phytopathol*, **29**, 109-136, 1991.
- [14] Guckenheimer, J. & Holmes, P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields", Springer-Verlag, New York, 1993.
- [15] Hassell, M., Comins, H. & May, R., Spatial Structure and Chaos in Insect Population Dynamics. *Nature*, **353**, 255-258, 1991.
- [16] Comins, H. N., Hassell, M. P. & May, R. M., The Spatial Dynamics of Host-Parasitoid Systems. *Journal of Annual Ecology*, **61**, 735-748, 1992.
- [17] Gomes, A. A., Manica, E. & Varriale, M. C., Applications of Chaos Control Techniques to a Three-species Food Chain. *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**, 1097-1107, 2008.
- [18] Hastings, A. & Powell, T., Chaos in a Three-species Food Chain. *Ecology*, **72** (3), 896-903, 1991.
- [19] Hughes, G., Incorporating spatial pattern of harmful organisms into crop loss models. *Crop protection*, **15** (5), 407-421, 1996.
- [20] Kareiva, P. & Odell, G., Swarms of Predators Exhibit "Preytaxis" if Individual Predators Use Area-restricted Search. *The American Naturalist*, **130**, 233-270, 1987.

- [21] Keeling, M. J., The Effects of Local Spatial Structure on Epidemiological Invasions. *Biological Sciences*, **266**, 859-867, 1999.
- [22] Knowles, G., “An Introduction do Applied Optimal Control”, Academid Press, New York, 1981.
- [23] Lima, E . A . B . F., “Desenvolvimento e Aplicação de Modelos Matemáticos para o Controle da *Diaphorina citri* Via Manejo Integrado e Estudo da Influência da Temperatura sobre a Dinâmica Populacional de *Talitroides Topitotum*”. Dissertação de Mestrado, Biometria, UNESP-Botucatu, 2010.
- [24] Lima, E. A. B. F., Ferreira, C. P. & Godoy, W. A. C., Ecological Modeling and Pest Population Management: A Possible and Necessary Connection in a Changing World. *Neotrop. Entomol. [online]*, **38** (6), 699- 707, 2009.
- [25] Liu, W., Criterion of Hopf Bifurcations without Using Eigenvalues. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **182**, 250-256, 1994.
- [26] Metcalf, R. L. & Luckmann, W. H., “Introduction to Insect Pest Management”, John Wiley & Sons, 3ª edição, New York, 1994.
- [27] Mistro, D. C., Rodrigues, L. A. D. & Silveira, P. A., Modelo Presa-predador com Taxia Local. *Biomatemática (UNICAMP)*, **20**, 59-68, 2010.
- [28] Murray, J. D., “Mathematical Biology I: An Introduction”, Springer-Verlag, 3ª edição, Berlin, 1993.
- [29] Norris, R. F., Caswell-Chen, E. P. & Kogan, M., “Concepts in integrated pest management”, Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [30] Paiva, P. E. B & Parra, J. R. P., Natural parasitism of *Diaphorina citri* Kuwayama (Hemiptera, Psyllidae) nymphs by *Tamarixia radiata* Waterston (Hymenoptera, Eulophidae) in São Paulo orange groves. *Revista Brasileira de Entomologia*, **56** (4), 499-503, 2012.
- [31] Pinch, E. R., “Optimal control and the calculus of variations”, Oxford University Press, New York, 1995.

- [32] Polanczyk, R. A., Almeida, L. C., Padulla, L. & Alves S. B., Pragas de Cana-de-açúcar X Métodos Alternativos de Controle. *Revista Biotecnologia Ciência & Desenvolvimento*, **33**, 14-17, 2004.
- [33] Pontryagin, L. S., “The Mathematical Theory of Optimal Process”, Selected Works, Vol. 4, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.
- [34] Qureshi, J. A., Rogers, M. E., Hall, D. G. & Stansly, P. A., Incidence of Invasive *Diaphorina citri* (Hemiptera: Psyllidae) and its Introduced Parasitoid *Tamarixia radiata* (Hymenoptera: Eulophidae) in Florida Citrus. *Journal of Economic Entomology*, **102** (1), 247-256, 2009.
- [35] Radcliffe, E. B., Hutchison, W. D. & Cancelado, R. E., “Integrated Pest Management: Concepts, Tactics, Strategies and Case Studies”, Cambridge, New York, 2009.
- [36] Rafikov, M. & Balthazar, J. M., Optimal Pest Control Problem in Population Dynamics. *Computational & Applied Mathematics*, **24**, 65-81, 2005.
- [37] Rafikov, M., Balthazar, J. M. & Von Bremen, H. F., Mathematical Modeling and Control of Population Systems: Applications in Biological Pest Control. *Applied Mathematics and Computation*, **200**, 557-573, 2008.
- [38] Rafikov, M, & Maleico, E. R., Controle Ótimo de Pragas com Base no Modelo Generalizado de Presa-Predador. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **1**, 215-222, 2000.
- [39] Robinson, C., “Dynamical Systems - Stability, Symbolic Dynamics and Chaos”, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [40] Rodrigues, L. A. D., “O Acaso e a Decisão: Modelos Matemáticos para Dispersão Populacional”. Tese de Doutorado, Matemática Aplicada, IMECC/UNICAMP, 1998.
- [41] Sakr, L. C., Luetkemeyer, L. & Rafikov, M., Controle Ótimo de Pragas em Vários Estágios do seu Desenvolvimento. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **2**, 203-212, 2001.

- [42] Segel, L. A., Taxis in Cellular Ecology. *Lect. Notes Biomath.*, **54**, 407-424, 1984.
- [43] Silveira, P. A., “Perseguição e Fuga em Modelos Presa-Predador”. Dissertação de Mestrado, Matemática Aplicada, CCNE/UFMSM, 2010.
- [44] Sotomayor. J., “Lições de Equações Diferenciais Ordinárias”, Projeto Euclides - IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [45] Sujii, E. R., Beserra, V. A., Ribeiro, P. H., Silva-Santos, P. V., Pires, C. S. S., Schmidt, F. G. V., Fontes, E. M. G. & Laumann, R. A., Comunidade de inimigos naturais e controle biológico natural do pulgão, *Aphis Gossypii* Glover (Hemiptera: aphididae) e do curuquerê, *Alabama Argillacea* Hubner (Lepidoptera: noctuidae) na cultura do algodoeiro no Distrito Federal. *Arq. Inst. Biol.*, **74** (4), 329-336, 2007.
- [46] Tang, S., Xiao, Y., Chen, L. & Cheke R. A., Integrated pest management models and their dynamical behaviour. *Bulletin of Mathematical Biology*, **67**, 115-135, 2005.
- [47] Tang, S. & Cheke, R. A., Models for integrated pest control and their biological implications. *Mathematical Biosciences*, **215**, 115-125, 2008.
- [48] Varriale, M. C. & Gomes, A. A., A Study of a Three Species Food Chain. *Ecological Modelling*, **110**, 119-133, 1998.