UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Problema de Dirichlet para a Equação das Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante

Isabel Castro Bonow

Porto Alegre, abril de 2007

Dissertação submetida por Isabel Castro Bonow como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:

Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPG-Mat/UFRGS)

Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPG-Mat/UFRGS)

Dr. José Afonso Barrionuevo (PPG-MAp/UFRGS)

Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPG-Mat/UFRGS)

Data de Apresentação:

26 de abril de 2007

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de soluções para o problema de Dirichlet para a equação das hipersuperfícies de curvatura média constante em domínios limitados do espaço euclidiano.

Abstract

In this work we study the existence and uniqueness of solutions to the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in bounded domains of the Euclidean space.

Sumário

Introdução

O seguinte teorema, fundamental na teoria da hipersuperfícies de curvatura média constante do espaço euclidiano, é um conhecido resultado de James Serrin sobre a existência e unicidade de soluções (suaves até o bordo) para o problema de Dirichlet

$$\operatorname{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = -nH \text{ em } \Omega, \quad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega, \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, $H \geqslant 0$ é uma constante e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função conhecida:

Teorema 0.1. *Suponha que Ω seja de classe $C^{2,\alpha}$ e que a curvatura média $H_{\partial\Omega}$ da fronteira de Ω satisfaça a condição*

$$H_{\partial\Omega}(x) \geqslant \frac{n}{n-1}H, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Então, para cada $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ dada, existe uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para o problema (1).

Lembramos que o gráfico de uma solução $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto

$$\{(x, u(x)) \text{ tal que } x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

é uma hipersuperfície do $\mathbb{R}^{n+1}$ de curvatura média constante H em relação ao campo normal unitário $N = (N_1, ..., N_{n+1}) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ escolhido de forma que $N_{n+1}(x) \leqslant 0$ para todo $x \in \Omega$.

Este teorema foi originalmente demonstrado por Serrin em um extenso artigo de 1969 ([5]) e, em uma versão mais abrangente, que inclui o caso com dados apenas contínuos no bordo, quase ao final do conhecido livro de David Gilbarg e Neil S. Trudinger sobre Equações Diferenciais Parciais Elípticas (Teorema 16.11 de [6]). Ambas as demonstrações, mas principalmente a de

[6], são desenvolvidas de modo a contemplar operadores quasilineares elípticos satisfazendo hipóteses as mais abrangentes possíveis. Por esta razão, as demonstrações não só ficam bastante elaboradas, mas muito técnicas, de difícil leitura.

Nosso objetivo nesta dissertação é apresentar uma prova direta, específica, do Teorema de Serrin. Procuramos destacar os pontos que são fundamentais para eventuais extensões e generalizações deste teorema. Embora os resultados que utilizamos estejam contidos em [6], é dado aqui maior destaque aos argumentos geométricos, como feito em [3], que estende e generaliza o resultado de Serrin a uma classe bastante ampla de variedades riemannianas, os chamados espaços warped. A prova que apresentamos, de fato, segue os mesmos passos de [3], mas só que aplicados diretamente ao espaço euclidiano. Diversas técnicas de EDP's utilizadas na demonstração do Teorema de Serrin vêm sendo muito estudadas em espaços warped.

Em relação à prova do Teorema de Serrin propriamente dita, usamos o método da continuidade, embora não na mesma forma apresentada em [6] (Teorema 13.8) (enquanto o Teorema 13.8 está baseado no Teorema do Ponto Fixo Topológico, utilizamos na dissertação o Teorema das Funções Implícitas em espaços de Banach).

Com relação ao método da continuidade, como sua aplicabilidade depende de forma crucial do estabelecimento de estimativas a priori para a altura e para o gradiente de soluções do problema de Dirichlet associado (e em muitos casos, como nos casos do espaços warped, apenas destas estimativas), na dissertação damos ênfase especial a este ponto, particularmente a estimativas do gradiente. Neste sentido podemos afirmar que o Teorema 3.7, que é uma versão direta para o operador curvatura média do espaço euclidiano do Capítulo 14 de [6], é o resultado mais importante desta dissertação. De fato, este é o resultado mais importante para o Teorema de Serrin uma vez que é nele, e apenas nele, que é usada a hipótese mais fundamental deste resultado, a saber, a hipótese geométrica. O Teorema 3.7 se generaliza e se estende ao operador curvatura média de uma variedade riemanniana tipo espaço warped (conforme [3]).

Outros resultados que utilizaremos, como por exemplo, as estimativas de Hölder para o gradiente, bem como resultados clássicos sobre EDP's lineares elípticas (teoria de Schauder, resultados da regularidade), subjacentes e fundamentais a teoria não linear, serão apenas mencionados.

1 Preliminares

1.1 Espaços de Hölder

Denotamos por $C^0(X, \mathbb{R}^m)$ o espaço vetorial das aplicações contínuas em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Quando $m = 1$, escrevemos $C^0(X, \mathbb{R}) = C^0(X)$. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então qualquer $f \in C^0(K, \mathbb{R}^m)$ é uniformemente contínua. Neste caso, munido da norma

$$|f|_{C^0(K)} = |f|_{0;K} = \sup_K |f|,$$

$C^0(K, \mathbb{R}^m)$ é um espaço de Banach.

Seja Ω um domínio (i.e., um aberto conexo) em $\mathbb{R}^n$. Dado um inteiro não-negativo k, denotamos por $C^k(\Omega)$ o espaço vetorial das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que têm todas derivadas de ordem $\leqslant k$ em $C^0(\Omega)$, e por $C^k(\overline{\Omega})$ o espaço das funções $u \in C^k(\Omega)$ que, juntamente com suas derivadas de ordem $\leqslant k$, têm extensão contínua em $\overline{\Omega}$. Se o domínio Ω é limitado, então seu fecho $\overline{\Omega}$ é compacto e $C^k(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach mediante a escolha da norma

$$|u|_{C^k(\overline{\Omega})} = |u|_{k;\overline{\Omega}} = \sum_{r=0}^{k} |D^r u|_{C^0(\overline{\Omega})},$$

onde

$$|D^r u|_{C^0(\overline{\Omega})} = |D^r u|_{0;\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} \left(\sum_{i_1,\dots,i_r}^{n} |D_{i_1\dots i_r} u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

é uma norma para a derivada de ordem r de u, que a cada $x \in \Omega$ associa a aplicação r-linear $D^r u(x) = D^r u_x : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1. Se

$$Du(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) = (D_1 u(x), \dots, D_n u(x))$$

é o gradiente e

$$D^2u(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \big(D_{ij}u(x)\big),\ 0 \leqslant i,j \leqslant n$$

é a matriz hessiana de u em $x \in \Omega$, então para $k = 2$ temos

$$|u|_{C^2(\overline{\Omega})} = |u|_{2;\overline{\Omega}} = |u|_{0;\overline{\Omega}} + |Du|_{0;\overline{\Omega}} + |D^2u|_{0;\overline{\Omega}},$$

onde $|u|_{0;\overline{\Omega}} = \sup|u(x)|$, $|Du|_{0;\overline{\Omega}} = \sup|Du(x)| = \sup\sqrt{\sum|D_iu(x)|^2}$, e $|D^2u|_{0;\overline{\Omega}} = \sup|D^2u(x)| = \sup\sqrt{\sum|D_{ij}u(x)|^2}$.

Se Ω é um domínio *limitado* e $0 < \alpha < 1$, dizemos que uma função u é *Hölder contínua* com expoente α em Ω se

$$[u]_{\alpha;\overline{\Omega}} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Quando a condição acima vale para $\alpha = 1$, a função u é dita *Lipschitz contínua* em Ω. Em ambos os casos, u é uniformemente contínua em $\overline{\Omega}$ e o conjunto

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R};\ [u]_{\alpha;\overline{\Omega}} < \infty\}$$

é um espaço de Banach com a norma

$$|u|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = |u|_{0,\alpha;\overline{\Omega}} = |u|_{0;\overline{\Omega}} + [u]_{\alpha;\overline{\Omega}}.$$

Para k inteiro não negativo, escrevemos $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ para indicar o espaço das funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ que têm todas derivadas de ordem $\leqslant k$ em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Mostra-se que, munido da norma

$$|u|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = |u|_{k,\alpha;\overline{\Omega}} = |u|_{k;\overline{\Omega}} + [D^k u]_{\alpha;\overline{\Omega}},$$

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach.

Exemplo 1.2. Para $k = 2$, $|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} = |u|_{2;\overline{\Omega}} + [D^2u]_{\alpha;\overline{\Omega}}$, com

$$[D^2u]_{\alpha;\overline{\Omega}} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Por simplicidade, vamos escrever

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega),\ C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega}),\ C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega) \text{ e } C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega}).$$

Com essa notação, podemos considerar espaços de classe $C^{k,\alpha}$ com $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Vamos dizer que a fronteira $\partial\Omega$ de um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe $C^{k,\alpha}$, com $k \in \{0, 1, ...\}$ e $\alpha \in [0, 1]$, quando para todo ponto $p \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança aberta $\mathcal{V} = \mathcal{V}_p \subset \mathbb{R}^n$ contendo p e uma bijeção ψ de $\mathcal{V}$ sobre um aberto $\mathcal{W} = \mathcal{W}_p \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

i $\psi\,(\mathcal{V} \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n \geqslant 0\}$;

ii $\psi\,(\mathcal{V} \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$;

iii $\psi \in C^{k,\alpha}(\mathcal{V}, \mathbb{R}^n)$, $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\mathcal{W}, \mathbb{R}^n)$.

Quando $\partial\Omega$ for de classe $C^{k,\alpha}$, vamos dizer que o domínio Ω é de classe $C^{k,\alpha}$. Não é difícil ver que:

Lema 1.3. *Dados $k, j \in \{0, 1, ...\}$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, suponha que Ω um domínio limitado de classe $C^{k,\alpha}$. Se $j + \beta < k + \alpha$ então Ω é um domínio de classe $C^{j,\beta}$ e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$.*

Se Ω é um domínio $C^{k,\alpha}$, uma função $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ está em $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ se $f \circ \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\mathcal{W}_p \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$ para todo $p \in \partial\Omega$.
Neste trabalho, nos interessam especialmente os domínios limitados de classe $C^{2,\alpha}$ e as funções de classe $C^{k,\alpha}$, com $k = 0, 1$ ou 2 e $\alpha \in (0, 1)$.

Lema 1.4 (p.137 de [6])**.** *Se* $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$ *com* $k \geqslant 1$*, então toda* $f \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ *tem uma extensão* $\bar{f} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$*, ou seja, toda função de classe* $C^{k,\alpha}$ *em* $\partial\Omega$ *é a restrição de uma função de classe* $C^{k,\alpha}$ *em* $\overline{\Omega}$*.*

Lema 1.5 (p.136 de [6])**.** *Seja* Ω *um domínio de classe* $C^{k,\alpha}$ *em* $\mathbb{R}^n$ $(k \geqslant 1)$ *e seja* S *um subconjunto limitado em* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$*. Se* $j + \beta < k + \alpha$*, então* S *é relativamente compacto em* $C^{j,\beta}(\overline{\Omega})$*.*

O Lema 1.4 nos diz que, quando $k \geqslant 1$, sempre podemos considerar uma função $f \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ como sendo a restrição de uma função $\bar{f} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Em $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ vamos considerar a norma

$$|f|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} = \inf\{\bar{f} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega});\ \bar{f}|_{\partial\Omega} = f\}.$$

Munido desta norma, $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.6. Note que, se cada ponto $p \in \partial\Omega$ tem uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{V} \cap \partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe $C^{k,\alpha}$ com $n-1$ variáveis, então $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$. Se $k \geqslant 1$, então a recíproca é verdadeira e $\partial\Omega$ é uma *hipersuperfície* de classe $C^{k,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$.

1.2 Considerações de Natureza Geométrica

O gráfico de uma função de classe $C^{k,\alpha}$ definida num domínio do $\mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície de classe $C^{k,\alpha}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Já observamos que, se $k \geqslant 1$, dizer que um domínio limitado é de classe $C^{k,\alpha}$ é o mesmo que dizer que sua fronteira é uma hipersuperfície de classe $C^{k,\alpha}$ em $\mathbb{R}^n$. A seguir, vamos caracterizar hipersuperfícies utilizando parametrizações.

Dizemos que $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *hipersuperfície* de classe C^k, $k \geqslant 1$, quando para todo $p \in \mathcal{M}$ existe uma aplicação injetiva $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^k num aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in \phi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}$ e tal que a derivada $D\phi(x) =$

$D\phi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma transformação linear injetiva para todo $x \in \mathcal{U}$. Cada $p = \phi(x) \in \phi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}$ tem sua posição determinada por n *parâmetros*, a saber, as n coordenadas $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ de $x \in \mathcal{U}$ em relação à base canônica $\{e_1, ..., e_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Nestas condições, $\phi(\mathcal{U})$ é uma *vizinhança parametrizada* (de classe C^k) de p e ϕ é uma *parametrização local* (ou um *sistema de coordenadas locais*) em torno de $p \in \mathcal{M}$.

Se f é uma aplicação de classe C^k definida num aberto de $\mathbb{R}^m$ e com imagem contida em $\mathcal{M}$, então, para qualquer parametrização ϕ de $\mathcal{M}$, a aplicação $\phi^{-1} \circ f$ é de classe C^k em todos os pontos em que estiver definida. Em particular, se $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é outra parametrização de classe C^k em torno de $p \in \mathcal{W} = \phi(\mathcal{U}) \cap \psi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{M}$, então os conjuntos $\psi^{-1}(\mathcal{W})$ e $\phi^{-1}(\mathcal{W})$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a *mudança de coordenadas*

$$\phi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\mathcal{W}) \to \phi^{-1}(\mathcal{W})$$

é um difeomorfismo de classe C^k, e reciprocamente.

Dado $p \in \mathcal{M}$, o *espaço tangente* a $\mathcal{M}$ no ponto p é o subespaço vetorial $T_p\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são os vetores velocidade de todos os caminhos por p em $\mathcal{M}$. Mais precisamente, se $0 \neq \xi \in T_p\mathcal{M}$ então existe uma aplicação injetiva $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{M}$ (de classe C^1) tal que $c(0) = p$ e $c'(0) = \xi$. Supomos que $c'(t) \neq 0$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e dizemos que tanto c como sua imagem é uma *curva parametrizada* em $\mathcal{M}$. Em particular, se ϕ é qualquer parametrização em torno de $p = \phi(x)$, então $T_p\mathcal{M}$ coincide com $D\phi_x(\mathbb{R}^n)$ e o conjunto formado pelos n vetores definidos por

$$E_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = D\phi_x(e_i) = \frac{d}{dt}\phi(x + te_i)\Big|_{t=0} \quad (i = 1, ..., n) \tag{2}$$

é uma base de $T_p\mathcal{M}$.

Dizemos que uma função $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é de classe C^k, e escrevemos $f \in C^k(\mathcal{M})$, quando para cada ponto $p \in \mathcal{M}$ existe uma C^k-parametrização

$\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}$, com $p \in \phi(\mathcal{U})$, tal que $f \circ \phi \in C^k(\mathcal{U})$. Chamamos $f \circ \phi$ de *expressão de* f na parametrização ϕ. A diferenciabilidade das mudanças de coordenadas garante que f está bem definida. A derivada de f no ponto p é o funcional linear $Df_p : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definido por

$$Df_p(\xi) = \xi(f) = \frac{d}{dt} f(c(t))\Big|_{t=0} \in \mathbb{R},$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{M}$ é qualquer curva parametrizada em $\mathcal{M}$ com $c(0) = p$ e $c'(0) = \xi$. Um campo de vetores tangente em $\mathcal{M}$ é uma aplicação X que associa a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ um vetor tangente $X(p) \in T_p\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Vamos dizer que o campo X é de classe C^k se a aplicação $X : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é de classe C^k.

Exemplo 1.7. Seja $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{M}$ é uma parametrização de classe C^k em $\mathcal{M}$. Para cada $x \in \mathcal{U}$ existe um único $p \in \mathcal{M}$ tal que

$$x = \phi^{-1}(p) = (x_1(p), ..., x_n(p)).$$

Para cada $i = 1, ..., n$ definimos a *i-ésima função coordenada* por

$$\begin{array}{rccl} x_i : & \phi(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & x_i(p) = \langle \phi^{-1}(p), e_i \rangle, \end{array}$$

onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno usual. Então, cada função x_i é de classe C^k num aberto de $\mathcal{M}$ e sua expressão na parametrização ϕ coincide com a restrição a $\mathcal{U}$ do funcional linear $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por $\pi_i(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Exemplo 1.8. As n aplicações definidas por (2) são campos tangentes de classe C^k definidos numa vizinhança de $\mathcal{M}$, os quais têm a propriedade de, em cada ponto $p = \phi(x)$, constituirem uma base para o espaço $T_p\mathcal{M}$. Se X é um campo de vetores tangentes em $\mathcal{M}$, então as coordenadas de X em relação à parametrização ϕ são as n funções $a_i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tais que, para cada $p = \phi(x) \in \mathcal{M}$, temos

$$X(p) = a_1(p)E_1(p) + ... + a_n(p)E_n(p).$$

Dizemos que $\mathcal{M}$ é *orientável* quando existe um campo contínuo de vetores unitários normais a $\mathcal{M}$, ou seja, quando existe uma aplicação contínua

$$p \in \mathcal{M} \longmapsto N(p) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tal que } |N(p)| \equiv 1 \text{ e } \langle N(p), \xi \rangle = 0 \ \forall \xi \in T_p\mathcal{M}.$$

Dizemos que $N : \mathcal{M} \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma *aplicação de Gauss* em $\mathcal{M}$.
Para cada $p \in \mathcal{M}$, o produto interno euclidiano $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ decompõe o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ na soma direta $\mathbb{R}^{n+1} = T_p\mathcal{M} \oplus (T_p\mathcal{M})^{\perp}$, onde $(T_p\mathcal{M})^{\perp}$ denota o complemento ortogonal de $T_p\mathcal{M}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, no caso, a reta gerada pelo vetor $N(p)$. Sendo assim, podemos escrever

$$T_p\mathcal{M} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1};\ \langle N(p), \xi \rangle = 0\}.$$

A aplicação que associa a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ a restrição de $\langle \ , \ \rangle$ a $T_p\mathcal{M}$ define uma *métrica riemanniana* na hipersuperfície $\mathcal{M}$.
Se $\phi(\mathcal{U})$ é uma vizinhança parametrizada de $\mathcal{M}$ e $E_1, ..., E_n$ são os campos definidos por (2), as funções $g_{ij} : \phi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g_{ij}(p) = \langle E_i(p), E_j(p) \rangle \quad i, j = 1, ..., n, \tag{3}$$

são chamadas de *coeficientes* da expressão da métrica de $\mathcal{M}$ em relação à parametrização ϕ. Se X, Y são campos de vetores de tangentes em $\mathcal{M}$, existem funções coordenadas $a_i, b_j : \phi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ tais que, localmente, $X = \sum a_i E_i$ e $Y = \sum b_i E_i$. Daí, $\langle X, Y \rangle = \sum g_{ij} a_i b_j$.
A derivada de um campo X na direção de um vetor $\xi \in T_p\mathcal{M}$ é o vetor

$$DX_p(\xi) = \frac{d}{dt} X(c(t))\Big|_{t=0} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{M}$ é qualquer curva parametrizada em $\mathcal{M}$ com $c(0) = p$ e $c'(0) = \xi$. A parte tangente de $DX_p(\xi)$, a qual é dada por

$$\nabla_\xi X = DX_p(\xi) - \langle DX_p(\xi), N(p) \rangle N(p) \in T_p\mathcal{M}, \tag{4}$$

é a *derivada covariante* (ou *intrínseca*) do campo de vetores tangente X na direção do vetor $\xi \in T_p\mathcal{M}$. Note que a definição de $\nabla_\xi X$ não depende da orientação escolhida.

Dado um campo de vetores tangente $X : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n+1}$ e uma função diferenciável $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, a *derivada de f em relação a X* é a função $X(f) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definida por

$$X(f)(p) = X(p)(f) = Df_p(X(p)) \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Valem as seguintes propriedades:

a) $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$,

b) $(fX)(g) = fX(g)$,

c) $X(f + g) = X(f) + X(g)$,

d) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$,

para quaisquer campos tangentes X, Y e funções f, g em $\mathcal{M}$.

Dados dois campos de vetores tangentes X, Y em $\mathcal{M}$, a *derivada covariante de Y em relação a X* é o campo de vetores tangente $\nabla_X Y$ dado por

$$(\nabla_X Y)(p) = \nabla_{X(p)} Y \in T_p(\mathcal{M}) \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

A derivada covariante de campos de vetores tangentes satisfaz as seguintes propriedades: para quaisquer X, Y, Z e f, g em $\mathcal{M}$:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$,

as quais indicam que a aplicação $\nabla : (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ é uma *conexão afim* sobre $\mathcal{M}$, enquanto a propriedade

(iv) $X(\langle Y,Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

indica que tal conexão afim é *compatível* com a métrica de $\mathcal{M}$. Dizemos então que ∇ é a *conexão riemanniana* de $\mathcal{M}$.
Em coordenadas locais, se $X = \sum a_i E_i$ e $Y = \sum b_i E_i$,

$$\nabla_X Y = \sum_\ell \left(X(b_\ell) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^\ell a_i b_j \right) E_\ell,$$

onde as funções Γ_{ij}^ℓ definidas por

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell E_\ell, \quad i,j = 1,...,n,$$

são os *símbolos de Christoffel* da conexão ∇. Se (g^{ij}) denota a inversa da matriz (g_{ij}) então

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_\ell g^{m\ell} \left(E_i(g_{j\ell}) + E_j(g_{\ell i}) - E_\ell(g_{ij}) \right).$$

Observe que, no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica euclidiana, a conexão riemanniana é dada por $(\overline{\nabla}_X Y)(p) = DY_p(X(p))$ para quaisquer campos de vetores X, Y definidos sobre abertos em $\mathbb{R}^{n+1}$, e os símbolos de Christoffel de $\overline{\nabla}$ são todos nulos.
Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa e orientável. Eleja uma aplicação de Gauss

$$N : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

A derivada da aplicação normal de Gauss em um ponto $p \in \mathcal{M}$ é a transformação linear

$$\overline{\nabla}_\xi N = DN_p(\xi) = \frac{d}{dt}N(c(t))\Big|_{t=0},$$

onde $c\colon(-\epsilon,\epsilon)\to\mathcal{M}$ é uma curva parametrizada tal que $c(0)=p$, $c'(0)=\xi$. Note que $|N(p)|\equiv 1$ implica $\langle DN_p(\xi), N(p)\rangle = 0$ para todo $\xi \in T_p\mathcal{M}$. Sendo assim, está bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rccl} A_p: & T_p\mathcal{M} & \longrightarrow & T_p\mathcal{M} \\ & \xi & \longmapsto & A_p(\xi) = -DN_p(\xi), \end{array}$$

chamada de *operador forma* (ou *operador de Weingarten*) da superfície $\mathcal{M}$. Para cada $p \in \mathcal{M}$, A_p é um operador linear autoadjunto (em relação ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$ restrito a $T_p\mathcal{M}$), de modo que a forma bilinear correspondente $\alpha_p : T_p\mathcal{M}\times T_p\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ é simétrica, ou seja,

$$\alpha_p(\xi,\zeta) = \langle A_p(\xi),\zeta\rangle = \langle \xi, A_p(\zeta)\rangle = \alpha_p(\zeta,\xi) \text{ para quaisquer } \xi,\zeta \in T_p\mathcal{M}.$$

Se X é um campo de vetores tangentes em $\mathcal{M}$, a função $\langle X, N\rangle$ é identicamente nula sobre $\mathcal{M}$, logo

$$\xi\left(\langle X,N\rangle\right) = \langle DX_p(\xi), N(p)\rangle + \langle X(p), DN_p(\xi)\rangle = 0$$

para todo $\xi \in T_p\mathcal{M}$, qualquer que seja $p \in \mathcal{M}$. Daí,

$$\langle DX_p(\xi), N(p)\rangle = -\langle X(p), DN_p(\xi)\rangle = \langle X(p), A_p(\xi)\rangle$$

e (4) pode ser escrita na forma

$$DX_p(\xi) = \nabla_\xi X + \langle A_p(\xi), X(p)\rangle N(p), \tag{5}$$

chamada de *fórmula de Gauss* da hipersuperfície.

Dados dois campos tangentes X, Y, como $X\langle Y, N\rangle = 0$, para cada $p \in \mathcal{M}$ temos

$$\begin{aligned}
\langle DY_p(X(p)), N(p)\rangle &= \langle A_p(X(p)), Y(p)\rangle = \\
&= \langle X(p), A_p(Y(p))\rangle = \langle DX_p(Y(p)), N(p)\rangle,
\end{aligned}$$

isto é, os vetores $DX_p(Y(p))$ e $DY(X(p))$ têm a mesma parte normal e a diferença $DY_p(X(p)) - DX_p(Y(p))$ é um vetor tangente a $\mathcal{M}$ no ponto p. O campo $[X, Y]$ definido por

$$[X, Y](p) = DY_p(X(p)) - DX_p(Y(p)) = \left(\nabla_X Y - \nabla_Y X\right)(p)$$

é chamado de *colchete de Lie* dos campos tangentes $X, Y : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n+1}$ e satisfaz a identidade

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)). \tag{6}$$

Dada uma função $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ (suficientemente diferenciável), para cada ponto $p \in \mathcal{M}$, o *gradiente* de f no ponto p é o vetor $\nabla f(p) \in T_p\mathcal{M}$ definido por

$$\langle \nabla f(p), \xi\rangle = Df_p(\xi) = \xi(f) \quad \forall \xi \in T_p(\mathcal{M}).$$

Daí, ∇f é um campo de vetores tangente sobre $\mathcal{M}$, dado por

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f)$$

para todo campo tangente $X : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Definimos o *hessiano* de f no ponto ponto p como sendo a aplicação

$$\nabla^2 f(p) : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_p\mathcal{M}$$

dada por

$$\nabla^2 f(p)(\xi) = \nabla_\xi \nabla f$$

para todo $\xi \in T_p\mathcal{M}$.

De acordo com (4), $\nabla_\xi \nabla f = D\left(\nabla f\right)_p(\xi) - \langle D\left(\nabla f\right)_p(\xi), \nabla f(p)\rangle N(p)$, donde para quaisquer $\xi, \zeta \in T_p\mathcal{M}$ vale

$$\nabla^2 f(p)(\xi,\zeta) = \langle \nabla_\xi \nabla f, \zeta\rangle = \langle D\left(\nabla f\right)_p(\xi), \zeta\rangle.$$

Para cada $f \in C^2(\mathcal{M})$ operador $\nabla^2 f$ definido por $\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle$ é bilinear e simétrico (a simetria segue de (6)).

A *divergência* de um campo X em um ponto $p \in \mathcal{M}$ é definida como sendo o traço da aplicação linear $\xi \in T_p\mathcal{M} \longmapsto \nabla_\xi X \in T_p\mathcal{M}$, ou seja,

$$\mathrm{div}X(p) = \mathrm{tr}\left(\xi \mapsto \nabla_\xi X\right).$$

Finalmente, definimos o *laplaciano* de f como sendo a função Δf dada por

$$\Delta f = \mathrm{div}\nabla f.$$

Em coordenadas locais, temos $\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} E_i(f) E_j$,

$$\mathrm{div}X = \sum_i \left(E_i(a_i) + \sum_j \Gamma^i_{ij} a_j\right) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_j E_j\left(\sqrt{\det(g_{ij})}a_j\right),$$

e

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j} E_i\left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} E_j(f)\right) = \sum_{i,j} g^{ij}\left(E_i E_j(f) - \Gamma^\ell_{ij} E_\ell(f)\right).$$

Exemplo 1.9. Se f é a restrição de uma função $\bar{f} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ definida num aberto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contendo $\mathcal{M}$, denotando por Df o gradiente euclidiano de f, temos

$$\nabla f(p) = Df(p) - \langle Df(p), N(p)\rangle N(p), \tag{7}$$

ou seja, nesse caso $\nabla f(p)$ é a projeção do vetor gradiente

$$Df(p) = (D_1 f(p), ..., D_{n+1} f(p)) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

sobre o espaço tangente $T_p\mathcal{M}$. Usando (3.6), não é difícil ver que

$$\nabla^2 f(p)(\xi,\zeta) = \langle D(\nabla f)_p(\xi),\zeta\rangle = D^2 f(p)(\xi,\zeta) + \langle A_p(\xi),\zeta\rangle\langle Df(p),N(p)\rangle,$$

onde

$$D^2 f(p)(\xi,\zeta) = \langle D(Df)_p(\xi),\zeta\rangle = \sum_{i,j=1}^{n+1} \xi_i \frac{\partial^2 f(p)}{\partial p_i \partial p_j}\zeta_j$$

denota o hessiano euclidiano de f no ponto $p = (p_1,...,p_{n+1}) \in \mathcal{M} \subset \mathcal{W}$ aplicado aos vetores $\xi = (\xi_1,...,\xi_{n+1}), \zeta = (\zeta_1,...,\zeta_{n+1}) \in T_p\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Além disso,

$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} f(p) + nH(p)\langle Df(p),N(p)\rangle - D^2 f(p)(N(p),N(p)),$$

sendo $\overline{\Delta} f = \mathrm{tr} D^2 f$ o laplaciano euclidiano de f.

Denote por A a aplicação que associa cada ponto $p \in \mathcal{M}$ ao operador

$$\begin{array}{rccl} A_p : & T_p\mathcal{M} & \longrightarrow & T_p\mathcal{M} \\ & \xi & \longmapsto & A_p(\xi) = -DN_p(\xi). \end{array}$$

Tal aplicação é diferenciável no seguinte sentido: para todo campo de vetores tangente X em $\mathcal{M}$, o campo de vetores

$$\begin{array}{rccl} AX : & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & p & \longmapsto & (AX)(p) = A_p(X(p)) \in T_p\mathcal{M} \end{array}$$

é diferenciável. Esta aplicação tem as seguintes propriedades:

(i) $A(X+Y) = AX + AY$,

(ii) $A(fX) = fA(X)$,

para quaisquer campos tangentes X, Y e qualquer função diferenciável f. Dado um campo tangente X em $\mathcal{M}$, vamos definir a *derivada covariante* de A em relação a X como sendo a aplicação $\nabla_X A$ que associa cada campo tangente Y de $\mathcal{M}$ ao campo tangente em $\mathcal{M}$ dado por

$$(\nabla_X A)(Y) = \nabla_X (AY) - A(\nabla_X Y). \tag{8}$$

Lema 1.10. *Seja* $\mathrm{tr}A : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *a função dada por* $(\mathrm{tr}A)(p) = \mathrm{tr}(A_p)$. *Para cada campo tangente* X *em* $\mathcal{M}$*, verifica-se que* $\mathrm{tr}\,(\nabla_X A) = X\,(\mathrm{tr}A)$. *Equivalentemente, para cada* $p \in \mathcal{M}$ *vale*

$$\mathrm{tr}\,(\nabla_\xi A) = \xi\,(\mathrm{tr}A) = \langle \xi, \nabla(\mathrm{tr}A)(p)\rangle \quad \forall \xi \in T_p\mathcal{M}. \tag{9}$$

Além disso, para quaisquer campos X, Y *em* $\mathcal{M}$ *vale a identidade*

$$(\nabla_X A)\,(Y) = (\nabla_Y A)\,(X).$$

Ou seja, para todo ponto $p \in \mathcal{M}$ *vale*

$$(\nabla_\xi A)\,(\zeta) = (\nabla_\zeta A)\,(\xi) \quad \forall \xi, \zeta \in T_p\mathcal{M}. \tag{10}$$

Em especial, note que, denotando por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana em $\mathbb{R}^{n+1}$, (5) é equivalente a

$$\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \langle AY, X\rangle N.$$

Dada uma direção $\xi \in T_p\mathcal{M}$, o número real

$$\kappa(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}\langle A_p(\xi), \xi\rangle$$

é a *curvatura normal* de $\mathcal{M}$ em p na direção de ξ. Tal valor é a medida da curvatura da seção normal determinada pela direção ξ, ou seja, é a curvatura em p da curva formada pela interseção entre a hipersuperfície $\mathcal{M}$ e o plano que passa por p e é gerado por ξ e $N(p)$.

Como A_p é autoadjunta, existe uma base ortonormal que diagonaliza A_p, para todo $p \in \mathcal{M}$. Os n autovalores $\kappa_1(p), ..., \kappa_n(p)$ de A_p são as *curvaturas principais*, e os correspondentes autovetores são as *direções principais* de $\mathcal{M}$ em p.

A *curvatura média* de $\mathcal{M}$ em um ponto p é a média aritmética de suas curvaturas principais, ou seja,

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \kappa_i(p) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}A_p. \tag{11}$$

1.3 Operadores Lineares Elípticos

Um operador diferencial linear de segunda ordem num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear $L : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ da forma

$$u(x) \mapsto L(u)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x),$$

com coeficientes $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in C^0(\Omega)$. Diremos que L é *elíptico* em Ω quando a matriz $\left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ é positiva definida para todo $x \in \Omega$, ou seja, se $\lambda(x)$ é o autovalor mínimo e $\Lambda(x)$ é o autovalor máximo de $(a_{ij}(x))$, então L é elíptico em Ω se

$$0 < \lambda(x)|p|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) p_i p_j \leqslant \Lambda(x)|p|^2$$

para quaisquer $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $x \in \Omega$. Além disso, se

$$\lambda = \inf_{x \in \Omega} \lambda(x) \quad \text{e} \quad \Lambda = \sup_{x \in \Omega} \Lambda(x),$$

então diremos que o operador L é *estritamente elíptico* em Ω se $\lambda > 0$ e *uniformemente elíptico* se $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$.

Observe que da continuidade das funções $a_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, segue a continuidade das funções λ, Λ. Sendo assim, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, todo operador elíptico com coeficientes contínuos é uniformemente elíptico em $\overline{\Omega}$.

No que segue, vamos nos restringir às características dos operadores linares elípticos da forma

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u, \tag{12}$$

com coeficientes contínuos e limitados.

1.3.1 O Princípio do Máximo

Os operadores elípticos de segunda ordem distinguem-se especialmente pelo chamado *princípio do máximo*, o qual torna possível que se estabeleçam limites para os valores que uma função u assume num domínio onde satisfaz $L(u) \geqslant 0$ (ou $L(u) \leqslant 0$). A seguir, enunciamos as versões deste princípio que servirão aos propósitos do presente trabalho. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em [6] (p.33-34).

Teorema 1.11 (Princípio Fraco do Máximo)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, suponha que*

$$L(u) \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \ \text{em}\ \Omega,$$

onde L é o operador elíptico dado por (12). Então

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u).$$

Corolário 1.12. *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

i *Se $L(u) = L(v)$ em Ω, $u = v$ em $\partial\Omega$, então $u = v$ em Ω.*

ii *Se $L(u) \geqslant L(v)$ em Ω, $u \leqslant v$ em $\partial\Omega$, então $u \leqslant v$ em Ω.*

Lema 1.13 (Hopf). *Seja L dado por (12) e suponha que $Lu \geqslant 0$ para qualquer $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Se $x_0 \in \partial\Omega$ é tal que, $\forall x \in \Omega$, vale $u(x_0) > u(x)$ e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0, então a derivada de u na direção da normal exterior ν em x_0 é tal que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \langle \nabla u(x_0), \nu(x_0) \rangle > 0$.*

Teorema 1.14 (Princípio Forte do Máximo). *Seja L dado por (12). Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é tal que $Lu \geqslant 0$ (ou $Lu \leqslant 0$) em Ω, então u atinge um valor máximo (ou mínimo) em Ω se, e somente se, u é uma constante.*

1.3.2 Estimativas A Priori para o Caso Linear

Munidos com o princípio do máximo, somos capazes de estimar, sob hipóteses bem gerais, as normas de uma solução de uma equação linear elíptica por cotas que dependem apenas do operador elíptico associado à equação.
Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma dada função contínua. Vamos enunciar um resultado que estabelece que a norma C^0 das soluções da equação linear elíptica

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{a}_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{b}_i D_i u = f \text{ em } \Omega \tag{13}$$

pode ser estimada em termos do diâmetro do domínio Ω e das normas dos coeficientes do operador L e da função f no espaço $C^0(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.15 (p.36, [6]). *Seja $L : C^2(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ um operador linear estritamente elíptico do tipo (12). Se $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ são tais que $L(v) = f$ no domínio limitado Ω, então*

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{\mathrm{C}}{\lambda} \sup_{\Omega} |f|$$

com $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\delta, \beta)$ onde $\delta = \mathrm{diam}\Omega$, λ é o menor autovalor de L e $\beta = \frac{1}{\lambda} \sup |b_i|$.

Para garantir a existência de uma solução clássica para (13), é necessário que exista $\alpha > 0$ tal que f e os coeficientes de L sejam de classe C^{α}. Um enunciado fundamental referente a essa classe de equações é o seguinte:

Teorema 1.16 ([6], p.98-99). *Seja L um operador linear estritamente elíptico com coeficientes contínuos em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe $C^{2,\alpha}$ e seja $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma solução de $L(u) = f$ em Ω, onde $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Suponha que $u = \varphi$ em $\partial\Omega$, com $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*
Então

$$|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} \leqslant \mathrm{C}\left(|u|_{0;\overline{\Omega}} + |\varphi|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} + |f|_{0,\alpha;\overline{\Omega}}\right),$$

com $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \alpha, \lambda, \mathrm{M}, \Omega)$ *e* M *tal que* $|a_{ij}|_{0,\alpha;\overline{\Omega}}, |b_i|_{0,\alpha;\overline{\Omega}} \leqslant \mathrm{M}$.

Este Teorema sintetiza muitos dos resultados que podem ser obtidos mediante as técnicas que constituem o que hoje é conhecido como *Teoria de Schauder*. Nós o usaremos adiante para estabelecer a compacidade do operador quasilinear elíptico associado às hipersuperfícies de curvatura média contante do espaço euclidiano.

1.3.3 Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções para o Problema Linear

Teorema 1.17 (p.107 de [6]). *Seja L um operador linear estritamente elíptico num domínio limitado Ω de classe $C^{2,\alpha}$. Suponha que f e os coeficientes de L pertencem ao espaço $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, para cada $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, o problema de Dirichlet*

$$L(u) = f \text{ em } \Omega, \quad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega$$

tem uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.18 (p.109 de [6])**.** *Seja* $u \in C^2(\Omega)$ *uma solução da equação linear elíptica* $L(u) = f$ *num aberto* Ω*. Suponha que* f *e os coeficientes de* L *estão em* $C^{k,\alpha}(\Omega)$*. Então* $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$*. Se* f *e os coeficientes de* L *estão em* $C^\infty(\Omega)$*, então* $u \in C^\infty(\Omega)$*.*

Teorema 1.19 (p.111 de [6])**.** *Seja* L *um operador linear estritamente elíptico num domínio* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *de classe* $C^{k+2,\alpha}$ $(k \geqslant 0)$ *e seja* $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$*. Suponha que* $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *é uma solução do problema* $L(u) = f$ *em* Ω*,* $u = \varphi$ *em* $\partial\Omega$*, onde* f *e os coeficientes de* L *são funções em* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$*. Então* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$*.*

2 O Operador Curvatura Média

2.1 Definição e Propriedades

Seja $f : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 num aberto $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f, isto é, se $f(p) = c \Rightarrow Df(p) \neq 0$, então $\mathcal{M} = f^{-1}(c)$ é uma hipersuperfície de classe C^2. Em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, o espaço vetorial tangente $T_p\mathcal{M}$ é o conjunto formado pelos vetores $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ perpendiculares ao vetor $Df(p)$. Em particular, a expressão $N = \frac{Df}{|Df|}$ define uma aplicação de Gauss em $\mathcal{M}$. Temos

$$nH(p) = \mathrm{tr}A_p = -\mathrm{tr}DN_p = -\mathrm{div}N(p) = -\mathrm{div}\frac{Df(p)}{|Df(p)|}.$$

Suponhamos que $\mathcal{M}$ é o *gráfico* de uma função diferenciável $u : \Omega \to \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto em $\mathbb{R}^n = \{x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ou seja

$$\mathcal{M} = \{(x_1, ..., x_n, u(x_1, ..., x_n)) \mid (x_1, ..., x_n, 0) \in \Omega\}.$$

(note que a exigência de u ser diferenciável é necessária pois, mesmo sendo $\mathcal{M}$ diferenciável, ela pode ser o gráfico de uma função apenas contínua). Daí, definindo $f(x_1, ..., x_{n+1}) = x_{n+1} - u(x_1, ..., x_n)$ no aberto

$$\mathcal{W} = \Omega \times \mathbb{R} = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \mid (x_1, ..., x_n, 0) \in \Omega\}$$

de $\mathbb{R}^{n+1}$, decorre que f é diferenciável em $\mathcal{W}$ e $Df = (Du, -1) \neq 0$ para todo $p \in \mathcal{W}$. Conseqüentemente, a curvatura média de $\mathcal{M}$ com relação à normal $N = Df/|Df|$ é dada por

$$nH(x_1, ..., x_{n+1}) = -\left(\mathrm{div}\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right)(x_1, ..., x_n, 0),\ (x_1, ..., x_n, 0) \in \Omega.$$

Portanto, dado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o gráfico de uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tem curvatura média constante $H \geqslant 0$ se u satisfaz a equação diferencial parcial

$$\mathrm{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = -nH. \tag{14}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{-D_j u D_{ij} u}{(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}},$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\Delta u + \left\langle D\left(\frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right), Du\right\rangle = \\
&= \frac{1}{(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}}\left((1+|Du|^2)\Delta u - \sum_{i,j=1}^{n} D_i u D_j u D_{ij} u\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta u = \mathrm{div} Du = \sum_{i=1}^{n} D_i u$$

é o laplaciano da função u. Assim,

$$\mathrm{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = -nH \iff \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(Du) D_{ij} u + nH\left(1+|Du|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

onde

$$A_{ij}(Du) = \left(1+|Du|^2\right)\delta_{ij} - D_i u D_j u.$$

Para ver que a equação (14) é do tipo elíptico, denotemos por $\mathrm{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensional das matrizes simétricas de ordem n (naturalmente identificado com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n\times n}$) e consideremos a aplicação

$$A : \xi \in \mathbb{R}^n \longmapsto A(\xi) = (A_{ij}(\xi)) \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^n).$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, verifica-se que $A(\xi)$ é uma matriz positiva definida, com autovalor mínimo igual a 1 e autovalor máximo igual a $1+|\xi|^2$. Em particular, para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$0 < |p|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\left(Du(x)\right) p_i p_j \leqslant (1+|Du(x)|^2)|p|^2, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \tag{15}$$

Vamos definir o *operador curvatura média* como sendo o operador diferencial elíptico $Q_{H} : C^2(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$ dado por

$$Q_{H}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(Du) D_{ij} u + nH \left(1 + |Du|^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Este operador é diferenciável no espaço de Banach $C^2(\overline{\Omega})$, ou seja, para cada $u \in C^2(\overline{\Omega})$ existe uma aplicação linear contínua

$$D(Q_{H})_u : C^2(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega}),$$

a *derivada* de Q_{H} em u, tal que

$$\lim_{v \to u} \frac{\left|Q_{H}(v) - Q_{H}(u) - D(Q_{H})_u (v-u)\right|_{0;\Omega}}{\left|v-u\right|_{2;\Omega}} = 0.$$

Com efeito, não é difícil ver que

$$D(Q_{H})_u(v) = \frac{d}{dt} Q_{H}(u+tv)\Big|_{t=0} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(Du) D_{ij} v + \sum_{i=1}^{n} B_i \left(Du, D^2 u\right) D_i v,$$

onde

$$B_i \left(Du, D^2u\right) \;\; = \;\; \left(2\Delta u + 3nH\sqrt{1+|Du|^2}\right) D_i u - 2\sum_{j=1}^{n} D_j u D_{ij} u.$$

Para mostrar que $D(Q_{H})_u$ é contínua, lembremo-nos que uma aplicação linear entre espaços vetoriais normados é contínua se, e somente se, é limitada. Ora, para cada $u \in C^2(\overline{\Omega})$, os coeficientes A_{ij} e B_i são limitados por uma constante $\mathrm{C} = \mathrm{C}\left(n, H, |u|_{2;\overline{\Omega}}\right)$, logo

$$\begin{aligned} |D(Q_{H})_u(v)|_{0;\Omega} &\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|_{0;\Omega} |D_{ij} v|_{0;\Omega} + \sum_{i=1}^{n} |B_i|_{0;\Omega} |D_i v|_{0;\Omega} \\ &\leqslant \mathrm{C}\left(|D^2 v|_{0;\Omega} + |Dv|_{0;\Omega}\right) \leqslant \mathrm{C}|v|_{2;\Omega}, \end{aligned}$$

o que mostra que $D(Q_{H})_u$ é contínua. Além disso, também é contínua a aplicação $D(Q_{H}) : u \mapsto D(Q_{H})_u$, já que

$$A : \xi \in \mathbb{R}^n \longmapsto A(\xi) = (A_{ij}(\xi)) \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^n)$$

e

$$B : (\xi, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathrm{S}(\mathbb{R}^n) \longmapsto B(\xi, \sigma) = (B_i(\xi, \sigma)) \in \mathbb{R}^n$$

são contínuas. Portanto, o operador curvatura média é de classe C^1.

Lema 2.1. *Dadas $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, existe um operador linear elíptico $L = L(u, v)$ tal que $Q_H(u) - Q_H(v) = L(u - v)$.*

Prova: Tome $w = u - v$. Queremos encontrar L linear elíptico tal que $L(w)(x) = Q_H(u)(x) - Q_H(v)(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Consideremos o caminho $\vartheta(t) = tu + (1-t)v$. Com tal notação,

$$\begin{aligned} Q_H(u) - Q_H(v) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} Q_H(\vartheta(t)) dt = \int_0^1 D(Q_H)_{\vartheta(t)} \left(\vartheta'(t)\right) dt = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\left(D\vartheta(t)\right) D_{ij} w + \sum_{i=1}^n B_i \left(D\vartheta(t), D^2\vartheta(t)\right) D_i w \right) dt = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^1 A_{ij}\left(D\vartheta(t)\right) dt \right) D_{ij} w + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 B_i \left(D\vartheta(t), D^2\vartheta(t)\right) dt \right) D_i w. \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos um operador linear $L = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ com coeficientes $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{B}_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\mathcal{A}_{ij}(x) = \int_0^1 A_{ij}\left(D\vartheta(t)(x)\right) dt \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_i(x) = \int_0^1 B_i \left(D\vartheta(t)(x), D^2\vartheta(t)(x)\right) dt.$$

Finalmente, como

$$\sum_{i,j=1}^n \mathcal{A}_{ij}(x)\xi_i\xi_j = \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 A_{ij}(D\vartheta(t)(x))\xi_i\xi_j dt \geqslant \int_0^1 |\xi|^2 dt = |\xi|^2,$$

para quaisquer $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \overline{\Omega}$, vemos que L é elíptico.

$\square$

A importância da correspondência acima demonstrada está no fato de ela tornar possível estender os princípios de máximo e comparação válidos para os operadores lineares ao operador curvatura média. Combinando o Teorema 1.11 com este Lema, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Suponhamos que as funções* $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *são tais que* $Q_H(u) \geqslant Q_H(v)$ *no domínio limitado* Ω. *Então*

$$\sup_{\Omega}(u - v) = \sup_{\partial\Omega}(u - v).$$

Em particular, se $u \leqslant v$ *em* $\partial\Omega$, *então* $u \leqslant v$ *em* Ω.

2.2 O Método da Continuidade

Com a notação da seção anterior, o problema de Dirichlet (1) é equivalente ao problema de Dirichlet

$$Q_H(u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = \varphi \text{ em } \partial\Omega, \tag{16}$$

onde $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função conhecida. Vamos aplicar o método da continuidade para estabelecer, sob certas condições, a existência e unicidade de soluções deste problema. Para tal, consideramos o conjunto

$$\mathcal{I} = \{t \in [0,1];\ \exists\, u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ tal que } Q_{tH}(u) = 0 \text{ e } u|_{\partial\Omega} = t\varphi\}.$$

Note que $\mathcal{I} \neq \varnothing$, pois $u = 0$ é uma solução quando $t = 0$.
Se formos capazes de mostrar que $\mathcal{I}$ é aberto e fechado em $[0,1]$, garantimos a existência das soluções de todo os problemas

$$Q_{tH}(u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = t\varphi \text{ em } \partial\Omega;$$

em particular, mostramos que existe solução para (16).

2.2.1 A Abertura

Dado $t_0 \in \mathcal{I}$, precisamos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap [0,1] \subset \mathcal{I}.$$

Isso é feito mediante o Teorema da Aplicação Implícita. Tomamos uma extensão $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e construímos a aplicação

$$T(t,u) = Q_{tH}(u + t\varphi),$$

com $t \in \mathbb{R}$ e $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Temos

$$DT_{(t_0,u_0)}(t,u) = D(Q_{t_0 H})_{u_0 + t_0\varphi}(u + t\varphi)\,,$$

logo, como Q_H é de classe C^1, T também é de classe C^1. Note que

$$t_0 \in \mathcal{I} \iff T(t_0, u_0 - t_0\varphi) = 0.$$

Sendo assim, se mostrarmos que a derivada de Q_H em relação a u no ponto $u_0 - t_0\varphi$ é um homeomorfismo, garantimos a existência de uma vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $u_0 - t_0\varphi \in \mathcal{U}$, e de uma função de classe C^1 $\zeta : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \mathcal{U}$ tal que $T(t, \zeta(t)) = 0$ para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$; conseqüentemente, garantimos que $\mathcal{I}$ é aberto em $[0,1]$.
Para mostrar que

$$\frac{\partial T}{\partial u}(t_0, u_0 - t_0\varphi) = D(Q_{t_0 H})_{u_0}$$

é um homeomorfismo, vamos provar que $D(Q_H)_u$ é bijetiva e tem inversa contínua. Note que, fixada $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, dizer que a aplicação $D(Q_H)_u$ é sobrejetiva é o mesmo que dizer que, para cada $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, existe uma solução $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para a equação linear $D(Q_H)_u v = f$, e dizer que é injetiva é dizer que tal solução é única.
Pois bem, restrito ao subconjunto

$$C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega});\, v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

o operador linear $D(Q_H)_u$ satisfaz as condições do Teorema 1.17, logo

$$D(Q_H)_u : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega})$$

é bijetiva.

Falta mostrar que a aplicação inversa

$$L = (D(Q_H)_u)^{-1} : C^\alpha(\overline{\Omega}) \to C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

é contínua. Para isso, sejam $f, g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $v, w \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que

$$f = D(Q_H)_u(v) \text{ e } g = D(Q_H)_u(w).$$

Então $v - w \in C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução de

$$D(Q_H)_u(v-w) = f - g \text{ em } \Omega, \quad v - w = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

e podemos aplicar o Teorema 1.16 para concluir que existe uma constante C_1 tal que

$$|L(f) - L(g)|_{2,\alpha} = |v - w|_{2,\alpha} \leqslant \mathrm{C}_1 \left(|v - w|_0 + |f - g|_{0,\alpha}\right).$$

Pelo Teorema 1.15, existe C_2 tal que

$$|v - w|_0 \leqslant \mathrm{C}_2 |f - g|_{0,\alpha},$$

e então

$$|L(f) - L(g)|_{2,\alpha} \leqslant \mathrm{C}|f - g|_{0,\alpha}.$$

Isso mostra que L é contínua. Portanto, $D(Q_H)_u$ é um homeomorfismo linear e $\mathcal{I}$ é aberto em $[0,1]$.

2.2.2 O Fechamento

O objetivo principal nesta seção é demonstrar o seguinte:

Teorema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe $C^{2,\alpha}$, com $\alpha \in (0,1)$. Consideremos o conjunto*

$$\mathcal{S} = \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega});\ \exists\, t \in [0,1] \text{ tal que } Q_{tH}(u) = 0 \text{ e } u|_{\partial\Omega} = t\varphi\}.$$

Suponha que existe uma constante C *tal que*

$$|u|_{1;\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} |u| + \sup_{\overline{\Omega}} |Du| \leqslant \mathrm{C} \quad \forall u \in \mathcal{S}.$$

Então $\mathcal{I}$ é fechado em $[0,1]$.

Isso será feito com o auxílio dos resultados considerados na seqüência.

Lema 2.4. *Como sempre, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é tal que*

$$Q_{H}(u) = 0 \ em\ \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega),$$

então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega)$ e existe $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, \alpha, \Omega, |u|_{1,\alpha;\overline{\Omega}}, |\varphi|_{2,\alpha;\partial\Omega})$ *tal que*

$$|u|_{2,\alpha;\overline{\Omega}} \leqslant \mathrm{C}.$$

Prova: Para cada $u \in C^2(\overline{\Omega})$, defina

$$f^u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad f^u(x) = -nH\left(1 + |Du(x)|^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \tag{17}$$

$$L^u : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{por} \quad L^u(v) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(Du) D_{ij} v. \tag{18}$$

Note que

$$Q_{H}(u) = 0 \text{ em } \Omega \iff L^u(u) = f^u \text{ em } \Omega$$

e, pelo Lema 1.3, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ implica $f^u, A_{ij}(Du) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, dos Teoremas 1.18 e 1.19 segue que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega)$ e do Teorema 1.16 segue a estimativa desejada.

$\square$

Lema 2.5. *Se Ω é de classe $C^{2,\alpha}$ e $\mathcal{S}$ é limitado em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para algum $\beta \in (0, \alpha]$, então $\mathcal{I}$ é fechado em* $[0,1]$.

Prova: Tomemos uma seqüência $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}$ com $t_k \to t \in [0,1]$. É preciso mostrar que então $t \in \mathcal{I}$. Pois bem, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $u_k \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$Q_{t_k H}(u_k) = 0 \text{ em } \Omega, \quad u_k = t_k \varphi \text{ em } \partial\Omega.$$

Ou seja, para cada seqüência $\{t_k\} \subset \mathcal{I}$ existe uma seqüência correspondente $\{u_k\} \subset \mathcal{S}$. Se $\mathcal{S}$ é limitado em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para algum $\beta \in (0,\alpha]$ então, pelo Lema 2.4, $\mathcal{S}$ é limitado em $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$. Daí, pelo Lema 1.5, $\mathcal{S}$ é relativamente compacto em $C^2(\overline{\Omega})$. Ora, dizer que $\mathcal{S}$ é relativamente compacto em $C^2(\overline{\Omega})$ é o mesmo que dizer que toda seqüência de elementos de $\mathcal{S}$ possui uma subseqüência convergente em $C^2(\overline{\Omega})$. Sendo assim, existe uma subseqüência $\{u_{k_\ell}\} \subset \{u_k\}$ convergindo para uma certa $u \in C^2(\overline{\Omega})$, isto é, tal que $\lim\limits_{\ell\to\infty} |u_{k_\ell} - u|_2 = 0$. Como

$$T : [0,1] \times C^2(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})$$

dada por

$$T(t,u) = Q_{tH}(u)$$

é uma aplicação contínua, então

$$\begin{aligned} Q_{tH}(u) &= T(t,u) = T\left(\lim_{\ell\to\infty} (t_{k_\ell}, u_{k_\ell})\right) = \\ &= \lim_{\ell\to\infty} T\left(t_{k_\ell}, u_{k_\ell}\right) = \lim_{\ell\to\infty} Q_{t_{k_\ell} H}\left(u_{k_\ell}\right) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $Q_{tH}(u) = 0$ em Ω. Além disso, como

$$u|_{\partial\Omega} = \lim_{\ell\to\infty} (u_{k_\ell}|_{\partial\Omega}) = \lim_{\ell\to\infty} t_{k_\ell}\varphi = t\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

do Lema 2.4 resulta que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Conseqüentemente, $t \in \mathcal{I}$.

□

O último Lema nos diz que o fechamento de $\mathcal{I}$ está subordinado à existência de uma estimativa uniforme para a norma $C^{1,\beta}$ dos elementos de $\mathcal{S}$. Para melhorar essa situação, podemos nos valer da seguinte versão de um resultado conhecido como *Estimativa de Hölder para o Gradiente*:

Teorema 2.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfaz $Q_H(u) = 0$ em Ω, então existe $\beta = \beta(n, |u|_{1;\overline{\Omega}}, \Omega) > 0$ tal que*

$$[u]_{\beta;\overline{\Omega}} \leqslant \mathrm{C},$$

onde $\mathrm{C} = \mathrm{C}(n, H, |u|_{1;\overline{\Omega}}, |u|_{2;\partial\Omega}, \Omega)$.

A demonstração desse último Teorema segue os passos da demonstração do Teorema 13.2 de [6].

Prova do Teorema 2.3: Decorre diretamente do Teorema 2.6 juntamente com o Lema 2.5.

$\square$

Observação 2.7. De acordo com o que vimos até aqui, podemos dizer que a abertura de $\mathcal{I}$ ocorre sempre que Ω é um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$. Contudo é fácil ver que o fechamento de $\mathcal{I}$ em geral é falso. O fechamento de $\mathcal{I}$ só vai ocorrer mediante hipóteses sobre o domínio e sobre o dado no bordo. Estas hipóteses são de natureza geométrica e envolvem H, a dimensão n do espaço Euclidiano, a curvatura média da hipersuperfície bordo de Ω, e a regularidade do dado no bordo φ.

Como veremos adiante, o uso de barreiras e o principio do máximo para o gradiente nos permite inferir estimativas uniformes a priori para a norma C^1 das soluções.

3 Estimativas A Priori

3.1 Estimativa da Altura

Lema 3.1. *Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa de classe C^2. Dada uma função $f \in C^2(\mathcal{M})$, suponha que o laplaciano de f em $\mathcal{M}$ verifica*

$$\Delta f \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \ em \, \mathcal{M}.$$

Então f atinge um valor máximo (ou mínimo) em $\mathcal{M}$ se, e somente se, f é uma constante.

Prova: Seja $p_0 \in \mathcal{M}$ um ponto de máximo de f. Tome uma parametrização local $\phi : \Omega \to \mathcal{M}$ com $p_0 = \phi(x_0)$. Para todo $x \in \Omega$ temos

$$\Delta f(\phi(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ \phi)(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi)(x) \geqslant 0,$$

onde

$$h_i(x) = \sum_j \frac{1}{g(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} g(x) g^{ij}(x),$$

sendo $g = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Note que as funções g^{ij}, h_i estão em $C^0(\Omega)$ e a matriz (g^{ij}) é positiva definida em Ω.

Por hipótese,

$$(f \circ \phi)(x) = f(\phi(x)) \leqslant f(p_0) = (f \circ \phi)(x_0),$$

ou seja, x_0 é um ponto de máximo para $f \circ \phi \in C^2(\Omega)$. Portanto, do Teorema 1.14, segue que $f \circ \phi$ é constante em Ω. Daí, f é constante em $\phi(\Omega)$. Como $\mathcal{M}$ é conexa, f é constante em $\mathcal{M}$.

$\square$

Seja $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ a restrição a $\mathcal{M}$ da função dada por $h(p) = \langle p, \mathrm{e}_{n+1} \rangle = p_{n+1}$, onde e_{n+1} denota o $n+1$-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^{n+1}$. O gradiente de h em $\mathcal{M}$, o qual vamos denotar por ∇h, é a parte tangente do seu gradiente euclidiano Dh, isto é,

$$\begin{aligned} \nabla h(p) &= Dh(p) - \langle Dh(p), N(p) \rangle N(p) \\ &= \mathrm{e}_{n+1} - \langle \mathrm{e}_{n+1}, N(p) \rangle N(p) = \mathrm{e}_{n+1} - N_{n+1}(p) N(p). \end{aligned}$$

Dados $\xi, \zeta \in T_p\mathcal{M}$, temos

$$\nabla^2 h(p)(\xi, \zeta) = \langle D(\nabla h)_p(\xi), \zeta \rangle = \langle A_p(\xi), \zeta \rangle N_{n+1}(p).$$

Então,

$$\Delta h(p) = \mathrm{tr}\left(\nabla^2 h(p)\right) = (\mathrm{tr} A_p)\, N_{n+1}(p) = nH N_{n+1}(p).$$

Consideremos agora $N_{n+1} = \langle N, \mathrm{e}_{n+1} \rangle$. Para cada $\xi \in T_p\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} D\left(N_{n+1}\right)_p(\xi) &= D\left(\langle N, \mathrm{e}_{n+1} \rangle\right)_p(\xi) = \langle DN_p(\xi), \mathrm{e}_{n+1} \rangle \\ &= -\langle A_p(\xi), \mathrm{e}_{n+1} \rangle = -\langle A_p(\xi), \nabla h(p) \rangle = -\langle \xi, A_p(\nabla h(p)) \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla N_{n+1}(p) = -A_p\left(\nabla h(p)\right).$$

Dados $\xi, \zeta \in T_p\mathcal{M}$, temos

$$\nabla^2 N_{n+1}(p)(\xi, \zeta) = \langle \nabla_\xi \nabla N_{n+1}, \zeta \rangle.$$

Usando (8) e (10), obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \nabla N_{n+1}(p) &= -\nabla_\xi\left(A(\nabla h(p))\right) \\ &= -\left(\nabla_\xi A\right)\left(\nabla h(p)\right) - A_p\left(\nabla_\xi \nabla h(p)\right) \\ &= -\left(\nabla_{\nabla h(p)} A\right)(\xi) - A_p\left(\nabla_\xi \nabla h(p)\right). \end{aligned}$$

Sendo assim, se $\xi \in T_p\mathcal{M}$ é um vetor unitário,

$$\nabla^2 N_{n+1}(p)(\xi, \xi) = -\langle \left(\nabla_{\nabla h(p)} A\right)(\xi), \xi \rangle - \left(\kappa(\xi)\right)^2 N_{n+1}(p).$$

Como a aplicação $\mathrm{tr}A : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é constante, usando (9),

$$\mathrm{tr}\left(\nabla_{\nabla h(p)} A\right) = \langle \nabla(\mathrm{tr}A)(p), \nabla h(p) \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\Delta N_{n+1}(p) = \mathrm{tr}\left(\nabla^2 N_{n+1}(p)\right) = -|A_p|^2 N_{n+1}(p).$$

Teorema 3.2. *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $Q_H(u) = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.*

Se $H = 0$ então

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Se $H \neq 0$ então

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \frac{1}{H}.$$

Prova: Se $H = 0$, o resultado é conseqüência imediata do Teorema 2.2. Suponha $H > 0$ e considere a função $f(p) = Hp_{n+1} + N_{n+1}(p)$ definida sobre o gráfico de u. Para todo $p \in \mathcal{M} = u(\Omega)$ vale

$$\Delta f(p) = H(nHN_{n+1}(p)) - |A_p|^2 N_{n+1}(p) = \left(nH^2 - |A_p|^2\right) N_{n+1}(p) \geqslant 0,$$

pois $N_{n+1} < 0$ por hipótese e, além disso, vale

$$|A_p|^2 = (nH)^2 - \sum_{i<j} \kappa_i(p)\kappa_j(p) \geqslant nH^2 \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Se $x \in \partial\Omega$ então

$$f(x, u(x)) = H\varphi(x) + N_{n+1}(x, \varphi(x)) \leqslant H \sup_{\partial\Omega} \varphi.$$

Logo, do Lema 3.1 segue que

$$f(x, u(x)) = Hu(x) - N_{n+1}(x, u(x)) \leqslant H \sup_{\partial\Omega} \varphi \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Sendo assim,

$$u(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} \varphi + \frac{1}{H} \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

$\square$

3.2 A Distância até a Fronteira

Nesta seção o objetivo é encontrar uma expressão conveniente para a função distância ao bordo $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ de modo que fiquem claras suas propriedades. Usaremos esta função para construir barreiras que darão estimativas para o gradiente de soluções no bordo.

Primeiramente, vamos mostrar uma versão fraca (Lema 3.3) do conhecido Teorema da Vizinhança Tubular, seguindo a linha usada em [4]. A seguir, relacionamos este último resultado com a curvatura do bordo (Lema 3.4).

Se $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um domínio limitado de classe C^2, sua fronteira $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície orientável (porque é fechada e sem bordo) de classe C^2. Seja $\nu : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ a aplicação normal de Gauss interior de $\partial\Omega$. Então $\nu \in C^1(\partial\Omega)$ e, para cada $x \in \partial\Omega$,

$$H_{\partial\Omega}(x) = -\frac{1}{n-1} \operatorname{div} \nu(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i(x),$$

onde $\kappa_1(x), ..., \kappa_{n-1}(x)$ são as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em x, isto é, os autovalores do operador $A_x = -D\nu_x : T_x(\partial\Omega) \longrightarrow T_x(\partial\Omega)$, associados a uma correspondente base ortonormal de $T_x(\partial\Omega)$.

Lema 3.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2. Então existe um número positivo $\epsilon = \epsilon(\Omega)$ tal que $d \in C^2(\mathcal{V}_\epsilon)$, onde $\mathcal{V}_\epsilon = \{x \in \overline{\Omega};\, d(x) < \epsilon\}$.*

Prova: Para uma dada parametrização (local) $\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ de $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$, consideremos a aplicação $\psi : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\psi(p, r) = \phi(p) + r\nu(\phi(p)),$$

onde ν denota o campo normal unitário interior de $\partial\Omega$.

Como ϕ é de classe C^2 e ν é de classe C^1, certamente ψ é C^1. Temos

$$\frac{\partial\psi}{\partial p}(p,r) = D\phi_p + rD\nu_{\phi(p)} \circ D\phi_p \quad \text{e} \quad \frac{\partial\psi}{\partial r}(p,r) = \nu(\phi(p)).$$

Dado $x = \phi(p) \in \partial\Omega$,

$$T_x(\partial\Omega) = T_{\phi(p)}(\partial\Omega) = D\phi_p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right) = D\psi_{(p,0)}\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\right) \subset D\psi_{(p,0)}\left(\mathbb{R}^n\right)$$

e

$$\nu(x) = \nu\left(\phi(p)\right) = \frac{\partial\psi}{\partial r}(p,0) \in \; D\psi_{(p,0)}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Logo,

$$T_x(\partial\Omega) \oplus \left(T_x(\partial\Omega)\right)^{\perp} \equiv \mathbb{R}^n \subset D\psi_{(p,0)}\left(\mathbb{R}^n\right),$$

onde $\left(T_x(\partial\Omega)\right)^{\perp}$ é a reta gerada por $\nu(x)$. Isto mostra que $D\psi_{(p,0)}$ é sobrejetiva. Portanto, $D\psi_{(p,0)}$ é um isomorfismo e podemos aplicar o Teorema da Aplicação Inversa para encontrar $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ tal que ψ é um difeomorfismo de classe C^1 sobre o aberto $\mathcal{W} = \psi\left(\mathcal{U}\times(-\epsilon,\epsilon)\right) \subset \mathbb{R}^n$.
Denotando por P a projeção $P(p,r) = p$, vemos que a aplicação dada por

$$\pi = \phi \circ P \circ \psi^{-1} : \mathcal{W} \to \partial\Omega \quad \text{tal que} \quad y = x + r\nu(x) \Rightarrow \pi(y) = x$$

é de classe C^1. Além disso, para cada $y \in \mathcal{W}$,

$$d(y) = d(\psi(p,r)) = r = \langle y - \pi(y), \nu\left(\pi(y)\right)\rangle$$

é a *distância com sinal* de y até $\partial\Omega$. Daí,

$$Dd(y) = \nu\left(\pi(y)\right) \; \forall y \in \mathcal{W} \Rightarrow Dd = \nu \circ \pi \in C^1(\mathcal{W}) \Rightarrow d \in C^2(\mathcal{W}).$$

Como $\partial\Omega$ é compacta, existe um $\epsilon > 0$ tal que $d \in C^2(\mathcal{W}_\epsilon)$ onde

$$\mathcal{W}_\epsilon(\partial\Omega) = \bigcup_{x\in\partial\Omega}\{x + r\nu(x); -\epsilon < r < \epsilon\}$$

é uma vizinhança aberta de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$. Tome $\mathcal{V}_\epsilon = \overline{\Omega} \cap \mathcal{W}_\epsilon$.

$\square$

Lema 3.4. *Para quaisquer $x \in \partial\Omega$ e $y = x + r\nu(x) \in \mathcal{V}_\epsilon(\partial\Omega)$, temos*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \kappa_i(x) < \frac{1}{\epsilon} \quad e \quad \Delta d(y) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i(x)}{1 - r\kappa_i(x)}.$$

Prova: Note que, $\forall\, (p, r) \in \psi^{-1}\left(\mathcal{W}_\epsilon\right)$,

$$\psi\big(\{p\} \times (-\epsilon, \epsilon)\big) = \{x + r\nu(x); -\epsilon < r < \epsilon\}$$

é um segmento normal à $\partial\Omega$ em $x = \phi(p)$ e a aplicação π projeta cada um desses segmentos no ponto correspondente de $\partial\Omega$, ou seja, para cada $y = x + r\nu(x)$, $\pi(y) = x$ é a projeção ortogonal de y sobre $\partial\Omega$; $\psi\big(\mathcal{U} \times \{r\}\big)$ é uma hipersuperfície parametrizada *paralela* à porção de $\partial\Omega$ que contém $\phi(p)$, isto é, paralela ao subconjunto $\phi\left(\mathcal{U}\right) = \psi\big(\mathcal{U} \times \{0\}\big) \subset \partial\Omega$.

Para cada r fixo temos

$$D(\phi_r)_p = \frac{\partial\psi}{\partial p}(p, r) = (I + rD\nu_{\phi(p)}) \circ D\phi_p = (I - rA_{\phi(p)}) \circ D\phi_p, \qquad (19)$$

onde $A_{\phi(p)}$ e I denotam, respectivamente, o operador de Weingarten e a identidade em $\mathbb{R}^{n-1} \cong T_{\phi(p)}\left(\partial\Omega\right) \subset \mathbb{R}^n$. Como ϕ_r tem derivada injetiva para todo $r \in (-\epsilon, \epsilon)$, segue-se de (19) que $0 < |I - rA_{\phi(p)}|$, $r \in (-\epsilon, \epsilon)$. Daí decorre que

$$r|A_x| < 1, \;\; r \in (-\epsilon, \epsilon)$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Fazendo $r \to \epsilon$ obtemos

$$1 > \epsilon \max |A_x| = \epsilon \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \kappa_i(x)$$

o que prova uma das desigualdades do lema.

Como

$$Dd(y) = \nu\left(x\right) \Rightarrow D(Dd)_y \circ D(\phi_r)_p \circ D\phi_p = D\nu_x \circ D\phi_p,$$

usando (19) e o fato de que ϕ é um homeomorfismo obtemos

$$D^2d(y) \circ (I - rA_x) = -A_x.$$

Daí, se $\kappa_i(x)$ é um autovalor de A_x, então

$$\lambda_i(y) = \frac{-\kappa_i(x)}{1 - r\kappa_i(x)}$$

é um autovalor de $D^2d(y) = D(Dd)_y = -A_y$ associado ao mesmo autovetor.

□

3.3 O Princípio do Máximo Para o Gradiente

Teorema 3.5. *Suponhamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução de $Q_H(u) = 0$ em Ω. Então*

$$\sup_{\Omega} |Du| = \sup_{\partial\Omega} |Du|.$$

Prova: Note que, pelo Teorema 1.18, $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, de modo que $v = |Du|^2 \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Temos

$$Q_H(u) = 0 \iff \Delta u - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{D_i u}{1 + |Du|^2} D_j u D_{ij} u + nH\sqrt{1 + |Du|^2} = 0.$$

Escrevendo $\mathbf{c}_i = \dfrac{-D_i u}{1 + |Du|^2}$ e notando que $D_i v = 2\sum_j D_j u D_{ij} u$, obtemos

$$Q_H(u) = 0 \iff \Delta u + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i D_i v + nH\sqrt{1 + |Du|^2} = 0.$$

Derivando em relação a x_j, multiplicando por $D_j u$ e em seguida somando em relação j, obtemos que $Q_H(u) = 0$ equivale a

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_j u D_{iij} u + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{c}_i D_j u D_{ij} v + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_j \mathbf{c}_i D_j u D_i v +$$

$$+ \frac{nH}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} D_i v = 0,$$

que por sua vez equivale a

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}u)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}D_{ii}v+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{c}_iD_juD_{ij}v+ \\
+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}D_j\mathbf{c}_iD_juD_iv+\frac{nH}{2}\sqrt{1+|Du|^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{D_iu}{1+|Du|^2}D_iv=0.
\end{aligned}
$$

Assim, escrevendo

$$
\mathrm{a}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}+\mathbf{c}_iD_iu\right)=\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\frac{D_iuD_ju}{1+|Du|^2}\right),
$$

$$
\mathrm{b}_i=\frac{1}{2}\sum_{j}D_j\mathbf{c}_iD_ju-\frac{nH}{2}\sqrt{1+|Du|^2}\mathbf{c}_i,
$$

obtemos por fim que

$$
Q_{H}(u)=0 \iff L(v)=\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{a}_{ij}D_{ij}v+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{b}_iD_iv=\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}u)^2\geqslant 0.
$$

Logo, pelo Teorema 1.11,

$$
\sup_{\Omega}v=\sup_{\partial\Omega}v,
$$

e portanto

$$
\sup_{\Omega}|Du|=\sup_{\partial\Omega}|Du|.
$$

□

Lema 3.6. *Dados $w,u,v\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $x\in\partial\Omega$, se $w(x)=u(x)=v(x)$ e $w\leqslant u\leqslant v$, então*

$$
|Du(x)|\leqslant\max\{|Dw(x)|,|Dv(x)|\}.
$$

Prova: Seja $M=\max\{|Dw(x)|,|Dv(x)|\}$ e seja ν o vetor unitário normal à $\partial\Omega$ em x apontando para o interior de Ω.

Seja ω um vetor unitário tal que $\langle\omega,\nu\rangle\geqslant 0$ e seja $\gamma:[0,\ell)\to\overline{\Omega}$ tal que $\gamma(0)=x$ e $\gamma'(0^+)=\omega$.

Temos que $w(\gamma(t)) \leqslant u(\gamma(t)) \leqslant v(\gamma(t))$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta \leqslant \ell$ tal que para todo $t \in (0, \delta)$ tem-se

$$-M - \varepsilon \leqslant \frac{w(\gamma(t)) - w(x)}{t} \leqslant \frac{u(\gamma(t)) - u(x)}{t} \leqslant \frac{v(\gamma(t)) - v(x)}{t} \leqslant M + \varepsilon,$$

de modo que

$$\left| \frac{u(\gamma(t)) - u(x)}{t} \right| \leqslant M + \varepsilon.$$

Fazendo $t \to 0$ obtemos $\langle Du(x), \omega \rangle \leqslant M + \varepsilon$. Logo $\langle Du(x), \omega \rangle \leqslant M$ e o resultado segue.

$\square$

3.4 Estimativa do Gradiente

Teorema 3.7. *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ uma solução de (16). Suponha que*

$$H_{\partial\Omega}(x) \geqslant \frac{n}{n-1} H, \ \forall x \in \partial\Omega. \tag{20}$$

Então $|Du| \leqslant \mathrm{C}$ em $\partial\Omega$, com $\mathrm{C} = \mathrm{C}\left(n, \Omega, H, |u|_{0;\overline{\Omega}}, |\varphi|_{2;\overline{\Omega}}\right)$.

Prova: Seja $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Vimos que $d \in C^2(\mathcal{V}_\epsilon)$, onde

$$\mathcal{V}_\epsilon = \{x \in \overline{\Omega}; d(x) < \epsilon\}.$$

Tome $w = f \circ d + \varphi$, onde $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ é conhecida e $f \in C^\infty[0, \infty)$ é a função $f(d) = \ell \ln(1 + kd)$ com ℓ e k constantes positivas. Note que $f' > 0$ e $f'' = -\frac{1}{\ell} f'^2$. Temos

$$\begin{aligned} Q_H(w) &= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_{ij} w + nH \left(1 + |Dw|^2\right)^{\frac{3}{2}} = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} (f'' D_i d D_j d + f' D_{ij} d + D_{ij}\varphi) + \\ &\quad + nH(1 + |Dw|^2)(1 + |Dw|^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

onde $A_{ij} = (1+|Dw|^2)\delta_{ij} - D_iwD_jw$. Como $|Dd| = 1$, $f'' < 0$ e

$$|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant (1+|Dw|^2)|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

é fácil ver que

$$f'' \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}D_idD_jd \leqslant f'' \quad \text{e} \quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}D_{ij}\varphi \leqslant (1+|Dw|^2)|D^2\varphi|.$$

Portanto, observando que $(1+|Dw|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1+|Dw|$,

$$Q_{\scriptscriptstyle H}(w) \leqslant f'' + f' \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}D_{ij}d + (1+|Dw|^2)|D^2\varphi| + nH(1+|Dw|^2)(1+|Dw|).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} D_iwD_jwD_{ij}d &= \sum_{i,j=1}^{n} (f'D_id + D_i\varphi)(f'D_jd + D_j\varphi)D_{ij}d = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(f'^2D_id + 2f'D_i\varphi\right) D_jdD_{ij}d + \sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_j\varphi D_{ij}d = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_j\varphi D_{ij}d,
\end{aligned}$$

pois $|Dd(x)| = 1 \ \forall x \in \mathcal{V}_\epsilon \Rightarrow \langle D(Dd)_x(\xi), Dd(x)\rangle = 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, e em particular

$$\langle D(Dd)_x(e_i), Dd(x)\rangle = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}dD_jd = 0.$$

Agora,

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}D_{ij}d = (1+|Dw|^2)\Delta d - \sum_{i,j=1}^{n} D_iwD_jwD_{ij}d = (1+|Dw|^2)\Delta d - \sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_j\varphi D_{ij}d.$$

Lembrando que D^2d é negativa definida e denotando seus autovalores por λ_i^d,

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i\varphi D_j\varphi D_{ij}d = \sum_{i=1}^{n} (D_i\varphi)^2 \lambda_i^d \geqslant |D\varphi|^2\Delta d.$$

Logo,

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_{ij} d \leqslant (1 + |Dw|^2 - |D\varphi|^2)\Delta d.$$

Conseqüentemente, tendo em vista que

$$|Dw|^2 = f'^2 + 2f'\langle Dd, D\varphi\rangle + |D\varphi|^2 \leqslant (f' + |D\varphi|)^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned} Q_{_H}(w) &\leqslant f'' + f'(1 + |Dw|^2 - |D\varphi|^2)\Delta d + \\ &\quad +(1 + |Dw|^2)|D^2\varphi| + nH(1 + |Dw|^2)(1 + f' + |D\varphi|) \\ &= f'' + f'(1 + |Dw|^2 - |D\varphi|^2)\left(\Delta d + nH\right) + \\ &\quad +(1 + |Dw|^2)\left(|D^2\varphi| + nH(1 + |D\varphi|)\right) + f'nH|D\varphi|^2. \end{aligned}$$

Já vimos que, para cada $x \in \mathcal{V}_\epsilon$, se $\kappa_1(\pi(x)), ..., \kappa_{n-1}(\pi(x))$ são as curvaturas principais de $\partial\Omega$ no ponto $\pi(x)$ = projeção ortogonal de x sobre $\partial\Omega$, então $\lambda_i^d(x) = \dfrac{-\kappa_i(\pi(x))}{1 - d\kappa_i(\pi(x))}$, se $1 \leqslant i \leqslant n-1$, e $\lambda_n^d(\pi(x)) = 0$. Sendo assim, não esquecendo que $\max \kappa_i < \dfrac{1}{\epsilon}$,

$$\Delta d = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-\kappa_i}{1 - d\kappa_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} -\kappa_i = -(n-1)H_{\partial\Omega} \leqslant -nH.$$

Logo,

$$Q_{_H}(w) \leqslant f'' + f'nH|D\varphi|^2 + (1 + |Dw|^2)\left(|D^2\varphi| + nH(1 + |D\varphi|)\right).$$

Finalmente, lembrando que $-\ell f'' = f'^2$ e escolhendo ℓ de modo que

$$\frac{1}{\ell} > \beta = \left(|D^2\varphi| + nH(1 + |D\varphi|)\right),$$

obtemos

$$Q_{_H}(w) \leqslant \left(-\ell^{-1} + \beta\right) f'^2 + \left(nH|D\varphi|^2 + 2|D\varphi|\beta\right) f' + \left(1 + |D\varphi|^2\right)\beta < 0. \quad (21)$$

Para escolher a constante k, escreva $\mu = |u|_{0;\overline{\Omega}} + |\varphi|_{0;\overline{\Omega}}$. Como

$$w(x) = \ell \ln (1 + kd(x)) + \varphi(x) < \ell \ln (1 + k\epsilon) + |\varphi|_{0;\overline{\Omega}}$$

tomando $k = \frac{1}{\epsilon}\left(e^{\frac{\mu}{\ell}} - 1\right)$ teremos

$$w(x) \geqslant u(x) \quad \text{para todo } x \in \partial\left(\mathcal{V}_\epsilon \cap \Omega\right). \tag{22}$$

Sendo assim, pelo Teorema 2.2, de (21) e (22) segue que

$$w(x) \geqslant u(x) \quad \text{para todo } x \in \mathcal{V}_\epsilon \cap \Omega.$$

Portanto, podemos aplicar o Lema 3.6 para concluir que

$$|Du(y)| \leqslant |Dw(y)| = k\ell \quad \text{para todo } y \in \partial\Omega.$$

$\square$

4 Demonstração do Teorema de Serrin

Concluímos esta dissertação juntando as peças que demonstram o teorema:

Teorema 4.1. *Suponha que* Ω *seja de classe* $C^{2,\alpha}$ *e que a curvatura média* $H_{\partial\Omega}$ *da fronteira de* Ω *satisfaz a condição*

$$H_{\partial\Omega}(x) \geqslant \frac{n}{n-1}H, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Então, para cada $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ *dada, existe uma única solução* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para o problema (1)*

Prova: Definindo, como antes

$$\mathcal{I} = \{t \in [0,1];\ \exists\, u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ tal que } Q_{tH}(u) = 0 \text{ e } u|_{\partial\Omega} = t\varphi\}$$

temos $\mathcal{I} \neq \varnothing$ pois $u = 0$ é uma solução quando $t = 0$. Decorre do provado na seção 2.2.1 que $\mathcal{I}$ é aberto e dos Teoremas 3.7 e 3.2 que existe C tal que

$$|u|_{1;\Omega} \leq C$$

para toda $u \in \mathcal{I}$. Podemos então aplicar o Teorema 2.3 para concluir que $\mathcal{I}$ é fechado. Segue-se que $\mathcal{I} =[0,1]$ e o teorema de Serrin está provado.

$\square$

Referências

[1] Alías, Luis J. Análisis Geométrico y Geometria Global de Superfícies: Una Introducción Elemental. In: XIV Escola de Geometria Diferencial, 2006, Salvador, Bahia.

[2] Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. 2a. edição. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1988.

[3] Dajczer, M.; Ripoll, J. An extension of a Theorem of Serrin to warped products. *The Journal of Geometric Analysis*, Vol. 15, N. 2, p. 193 - 205, 2005.

[4] Lima, E.L. Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan-Brower no caso diferenciável. *Revista Matemática Universitária*, N. 4, p. 89 - 104, 1986.

[5] J. Serrin. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **264**, p. 413 - 496, 1969.

[6] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.