

MODELAGEM MATEMÁTICA DO EFEITO CHICOTE EM AMBIENTES COM DEMANDA E *LEAD TIME* ESTOCÁSTICOS

José Carlos Fiorioli

Escola de Administração
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Porto Alegre – RS
fiorioli@producao.ufrgs.br

Flávio Sanson Fogliatto*

Dep. de Engenharia de Produção e Transportes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Porto Alegre – RS
ffogliatto@producao.ufrgs.br

* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 05/2008; aceito em 02/2009 após 1 revisão
Received May 2008; accepted February 2009 after one revision

Resumo

O aumento da variabilidade da demanda ao longo de uma cadeia de abastecimento é conhecido como Efeito Chicote (EC). A modelagem deste fenômeno é fundamental para a quantificação de sua intensidade, ajudando a reduzir seus impactos negativos sobre o nível de serviço e sobre os estoques em cadeias de abastecimento. Este artigo apresenta uma proposta de modelagem do EC que tem por objetivo aumentar a precisão na quantificação deste fenômeno em ambientes com demanda e *lead time* estocásticos. O novo modelo considera um elemento que não está presente nos principais modelos disponíveis na literatura: a variabilidade no *lead time* de entrega de pedidos. Além disso, define de modo mais preciso o papel do coeficiente de variação da demanda na quantificação do EC. A utilização do modelo proposto aumenta a eficiência da gestão de cadeias de abastecimento ao contribuir para atenuar a propagação do EC.

Palavras-chave: efeito chicote; modelagem estocástica; cadeia de abastecimento.

Abstract

The increase in demand variability as information flows from customers to manufacturers in a supply chain is known as the Bullwhip Effect (BE). Modeling this phenomenon is key in measuring its intensity, aiming at reducing its negative impact on both service and inventory levels in supply chains. This paper proposes a new, more precise mathematical model for quantifying the BE in systems with stochastic demand and lead time. The new model takes into account the lead time variability, an element not present in the BE literature. In addition, the model allows a more precise assessment of the role that the demand's coefficient of variation plays when quantifying the BE. The use of the proposed model enables an improved management of the supply chain by attenuating the propagation of the BE.

Keywords: bullwhip effect; stochastic modeling; supply chain.

1. Introdução

Uma cadeia de abastecimento (CA) é uma estrutura que compreende um conjunto de atividades intra e interempresariais. De acordo com Delfmann (2000), inicia com a aquisição de matéria-prima junto a fornecedores independentes, passa pela fabricação e distribuição, e termina com a entrega dos produtos aos varejistas ou consumidores finais.

O efeito chicote (EC) é um importante fenômeno presente em CAs. Segundo Chen *et al.* (2003), observa-se um EC quando a variabilidade da demanda aumenta na medida em que se avança nos níveis da cadeia, desde o varejista até o fabricante, produzindo impactos negativos sobre a regularidade e a estabilidade dos pedidos recebidos em todos os seus níveis.

A dinâmica do EC em dois níveis adjacentes k e $k-1$ de uma CA pode ser assim descrita. O pedido gerado pelo nível k é definido a partir da previsão de demanda do nível imediatamente anterior ($k-1$) e depende dos dados históricos relativos àquela demanda e da técnica de previsão utilizada no nível k . Da mesma forma, os pedidos gerados pelo nível $k+1$ são definidos em função dos dados históricos disponíveis sobre a demanda no nível anterior (k) e da técnica de previsão utilizada no nível $k+1$. Esta lógica se repete a cada avanço de nível, de modo que os dados disponíveis, em cada nível (com exceção do nível mais baixo da cadeia), baseiam-se em uma expectativa de demanda e não na demanda real.

Vários aspectos gerenciais merecem destaque neste processo de amplificação da variabilidade da demanda. De acordo com Lee *et al.* (1997), Carlsson & Fullér (2000) e Chen *et al.* (2003), o EC potencialmente traz consequências locais e sistêmicas para fabricantes, distribuidores e varejistas. Entre as consequências locais, destacam-se (i) baixos níveis de serviço, gerados pela dificuldade de amortecer, em tempo hábil, as variações extremas da demanda; (ii) vendas perdidas em função das rupturas de estoques geradas pelas variações extremas da demanda; (iii) aumentos dos estoques de segurança, com vistas à recuperação dos níveis de serviço que garantam a competitividade da estrutura; (iv) aumento no número de reprogramações de produção para cobrir emergências; e (v) gestão ineficiente de recursos locais, como pessoal, equipamentos e capital. Entre as consequências sistêmicas, destacam-se: (i) elevação dos custos relacionados a estoques na CA em razão do aumento dos estoques locais, em cada um dos pontos do sistema; (ii) queda do retorno sobre o capital investido nas operações da CA; (iii) queda da produtividade dos funcionários que atuam nos processos produtivos ao longo da CA, conforme demonstrado por Anderson e Fine (2003); (iv) processo decisório reativo, principalmente em função dos picos de demanda, causando ruptura de planejamento; e (v) gestão ineficiente dos recursos da CA como um todo, em decorrência das ineficiências locais e da dificuldade de integração das operações da CA.

O principal desafio no gerenciamento do EC consiste em reduzir ineficiências e atenuar/eliminar a sua propagação ao longo da CA, de modo que seja possível otimizar o uso dos recursos empregados em seus diferentes níveis. Isto depende do grau de conhecimento que se tem sobre as suas causas e sobre a sua intensidade.

Nesse sentido, a quantificação do EC tem sido um tema frequente de pesquisa nos últimos anos. Autores como Lee *et al.* (1997), Chen *et al.* (2000), Fransoo & Wouters (2000) e Warburton (2004) vêm apresentando importantes desenvolvimentos teóricos sobre o tema. Um dos principais modelos de quantificação do EC, apresentado por Chen *et al.* (2000), é formulado como função do *lead time*, da variância da demanda e do número de períodos utilizados na previsão da demanda. O modelo trabalha com cenários com *lead time* constante, o que não reflete a realidade de grande parte das CAs, em vários setores

econômicos. Além disso, em sua operacionalização, o modelo de Chen *et al.* (2000) não quantifica a influência do coeficiente de variação da demanda sobre o EC. De modo similar, os modelos de Lee *et al.* (1997), Fransoo & Wouters (2000) e Warburton (2004) também operam em ambientes com *lead time* constante. Tais restrições nesses modelos resultam em uma quantificação parcial do EC, sendo aplicáveis em cenários raramente encontrados na prática, uma vez que os *lead times* de entrega normalmente apresentam variabilidade.

As principais contribuições do presente artigo visam suprir as deficiências e limitações presentes nos modelos de quantificação do EC disponíveis na literatura. Mais especificamente, propõe-se um modelo matemático para quantificação do EC em ambientes que utilizam a política de pedidos do tipo *out-EA* (*order-up-to* Estoque Alvo), sujeitos à demanda e *lead time* estocásticos e independentes, supondo ambas as variáveis como normalmente distribuídas. Além de considerar a variabilidade nos *lead times* de entrega de pedidos nos diferentes níveis da CA, explicita-se no novo modelo o grau de influência que o coeficiente de variação da demanda exerce sobre a amplificação da variabilidade da demanda ao longo da CA.

O desenvolvimento de uma modelagem matemática de acordo com a proposta aqui apresentada se justifica já que, a partir da incorporação da variabilidade do *lead time* e da determinação do grau de influência que o coeficiente de variação da demanda exerce sobre o EC, torna-se mais precisa a identificação das causas deste fenômeno e mais fácil o entendimento da sua dinâmica. Isto é fundamental para a adoção de medidas gerenciais que visem à redução dos impactos negativos do EC sobre os estoques e os níveis de serviço em uma CA. Complementarmente, a modelagem pode ser utilizada para otimizar as quantidades a serem estocadas nos diferentes pontos de uma CA e para qualificar os processos decisórios relacionados à gestão dos estoques globais.

A escolha da política *out-EA* deve-se ao seu desempenho em ambientes estocásticos. A partir do trabalho de Clark & Scarf (1960), vários autores desenvolveram pesquisas que demonstram a otimalidade desta política em ambientes hierárquicos com demanda normalmente distribuída, entre os quais destacam-se Muharremoglu & Tsitsiklis (2001) e Chen *et al.* (2003). Para um detalhamento sobre a prova de otimalidade da política *out-EA* em ambientes com demanda e *lead time* estocásticos, ver Muckstadt (2005).

Por viabilizar uma quantificação mais precisa do EC em CAs, a implementação prática do modelo aqui proposto pode contribuir para: (i) a incorporação do EC na otimização dos estoques globais de uma CA; (ii) redução dos custos dos estoques; (iii) identificação das quantidades ótimas a serem estocadas nos diferentes pontos da CA; e (iv) qualificação dos processos decisórios relacionados à previsão de demanda.

Este artigo está organizado em cinco seções, incluindo a presente introdução. Na seção 2, apresentam-se os principais modelos de quantificação do EC disponíveis na literatura. Um novo modelo para quantificação do EC, menos restritivo em seus pressupostos, é apresentado na seção 3. Uma análise comparativa do desempenho do novo modelo em relação ao modelo de Chen *et al.* (2000) é apresentada na seção 4. Uma conclusão encerra o artigo na seção 5.

2. Referencial Teórico

O EC refere-se a uma situação em que o tamanho dos pedidos enviados aos fornecedores tende a apresentar maior variância do que as vendas efetuadas junto aos compradores (Carlsson & Fullér, 2001). De acordo com Lee *et al.* (1997), ocorre uma distorção da

demanda, que se propaga ao longo da CA através do fluxo básico de informação e produz uma amplificação da variabilidade dos pedidos encaminhados aos fornecedores.

Considerando uma estrutura com três níveis [(i) Loja; (ii) Depósito; e (iii) Fornecedor], observa-se que a demanda dos clientes apresenta pequenas variações durante o ano (Figura 1). Em razão da distorção da informação no sistema, os pedidos da Loja para o Depósito (Figura 2) apresentam variações maiores em comparação à demanda dos clientes. No último nível, os pedidos encaminhados ao Fornecedor estão amplificando as variações observadas na Loja e no Depósito (Figura 3).

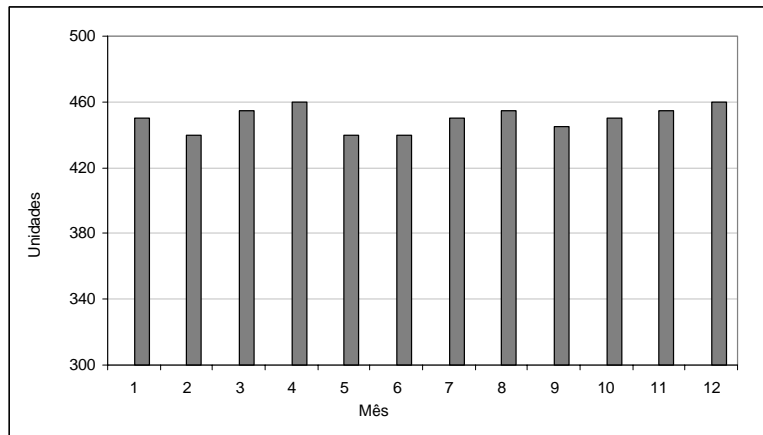


Figura 1 – Demanda original dos clientes junto à loja.
 Fonte: adaptada de Johnson & Pyke (1999).

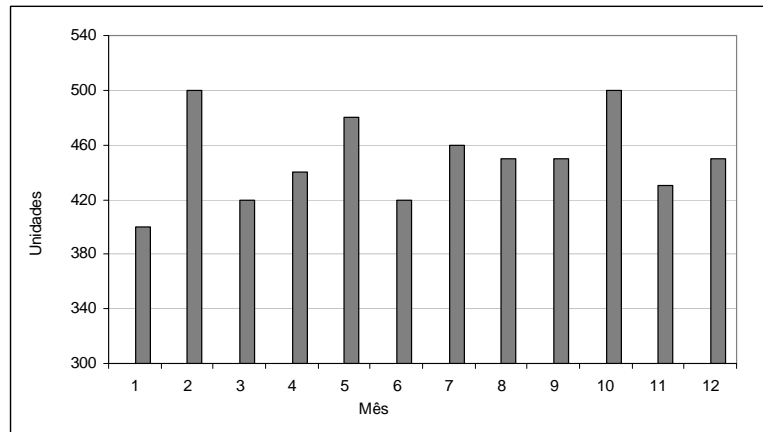


Figura 2 – Pedidos encaminhados ao depósito.
 Fonte: adaptada de Johnson & Pyke (1999).

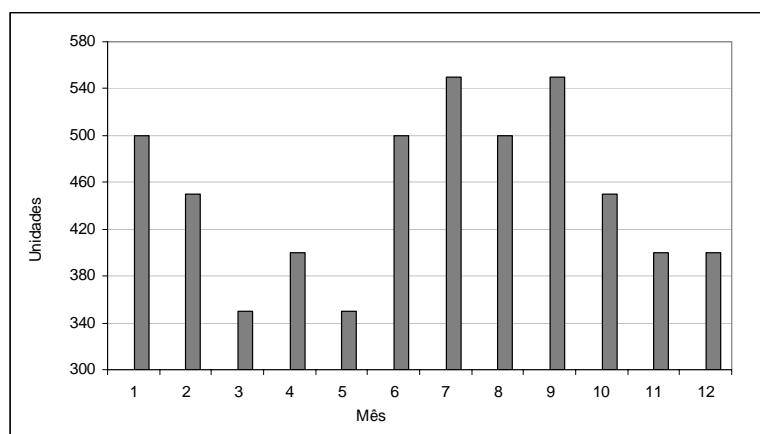


Figura 3 – Pedidos encaminhados ao fornecedor.

Fonte: adaptada de Johnson & Pyke (1999).

As abordagens utilizadas para a quantificação do EC podem ser divididas em três grupos: (i) cálculo da relação entre a variância dos pedidos e a variância da demanda, utilizado por Lee *et al.* (1997) e Chen *et al.* (2000); (ii) cálculo da relação entre a taxa de pedidos e a taxa da demanda, utilizado por Warburton (2004); e (iii) cálculo do quociente entre o coeficiente de variação da demanda gerada por um nível da cadeia e o coeficiente de variação da demanda recebida por este mesmo nível, utilizado por Fransoo & Wouters (2000).

Na exposição que se segue, as notações dos modelos apresentados foram uniformizadas, sendo apresentadas na Tabela 1. O desenvolvimento dos modelos de Lee *et al.* (1997) e de Chen *et al.* (2000) é apresentado em detalhes; os demais modelos são apresentados somente quanto à sua forma final. No caso de Lee *et al.* (1997), o detalhamento se justifica por ter sido este o primeiro modelo proposto para o EC na literatura; no caso de Chen *et al.* (2000), por ser o modelo um dos mais referenciados em trabalhos sobre o EC e por ser diretamente comparável com a proposta apresentada na seção 3.

Lee, Padmanabhan & Whang (1997) propõem um modelo onde o EC é calculado através da relação entre a variância dos pedidos e a variância da demanda. O processo de formação da demanda é definido utilizando um modelo autorregressivo de primeira ordem, com a seguinte forma:

$$D_t = \mu + \rho D_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

O tamanho ótimo do pedido é calculado somando a diferença entre os estoques-alvo dos períodos t e $t-1$ à demanda do período $t-1$:

$$Q_t = A_t - A_{t-1} + D_{t-1} \quad (2)$$

O desenvolvimento algébrico realizado pelos autores a partir da eq. (1) permite definir o tamanho do pedido a ser colocado em função do parâmetro de correlação da demanda e do *lead time*, da seguinte maneira:

$$Q_t = A_t - A_{t-1} + D_{t-1} = \left(\rho(1 - \rho^{L+1}) / (1 - \rho) \right) (D_{t-1} - D_{t-2}) + D_{t-1}. \quad (3)$$

Tabela 1 – Notação utilizada nos modelos do referencial teórico.

Símbolo	Descrição
t	Subscrito que denota o momento de observação da variável no tempo
D_t	Demanda estocástica em t
μ	Constante não negativa, utilizada no modelo autorregressivo do processo de formação da demanda
ρ	Parâmetro de correlação do processo de formação da demanda
ε_t	Erro aleatório em t , normalmente distribuído, com média 0 e desvio-padrão σ
A_t	Estoque-alvo (<i>order-up-to</i>) em t
$\hat{D}_{L,t}$	Estimativa da demanda média durante o <i>lead time</i> , em t
$\hat{\sigma}_{e,t}^L$	Estimativa do desvio-padrão do erro de previsão de demanda durante o <i>lead time</i> , em t
z	Constante correspondente ao nível de serviço desejado
$C_{L,p}$	Função constante de L , ρ e p
e_t	Erro de previsão da demanda em t
Q_t	Tamanho ótimo do pedido em t
L	<i>Lead time</i>
p	Número de períodos utilizados no cálculo da média móvel da demanda
k	Nível hierárquico da estrutura em análise
T	Ajuste temporal
$\theta_{D,L,k}^{in}$	Coefficiente de variação da demanda recebida durante o <i>lead time</i> , no nível k
$\theta_{D,L,k}^{out}$	Coefficiente de variação da demanda gerada durante o <i>lead time</i> , no nível k

A variância dos pedidos é resultante da soma de duas parcelas: uma diretamente dependente da variância da demanda e a outra conjuntamente dependente da estrutura da demanda e da magnitude do *lead time*.

$$Var(Q_t) = Var(D_{t-1}) + \frac{2\rho(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{L+2})}{(1+\rho)(1-\rho)^2} > Var(D_{t-1}) \quad (4)$$

Desta forma, de acordo com Lee *et al.* (1997), o EC tem a seguinte modelagem:

$$EC_{t,t-1} = \frac{Var(Q_t)}{Var(D_{t-1})} = 1 + \frac{2\rho(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{L+2})}{(1+\rho)(1-\rho)^2} \left(\frac{1}{Var(D_{t-1})} \right) \quad (5)$$

O segundo modelo abordado nesta seção é devido a Chen, Drezner, Ryan & Simchi-Levi (2000). Nele, o EC também é calculado através da relação entre a variância dos pedidos e a variância da demanda. Nesta modelagem os autores consideram uma CA em que, a cada período t , um varejista observa seu nível de estoque e coloca um pedido Q_t para um

fabricante. Após o pedido ter sido colocado, o varejista observa e atende a demanda D_t relativa ao período. Demandas não atendidas ficam pendentes. Há um *lead time* L , fixo, entre o momento em que o pedido é colocado pelo varejista e o momento em que o pedido é recebido por ele, de modo que um pedido colocado no fim de um período t é recebido no início do período $t + L$.

A demanda vista pelo varejista é uma variável estocástica, cujo processo de formação é representado por um modelo autorregressivo de primeira ordem, conforme eq. (1). O varejista segue uma política *order-up-to* em que o estoque-alvo é estimado a partir da demanda observada e assim definido:

$$A_t = \hat{D}_{L,t} + z\hat{\sigma}_{e,t}^L \quad (6)$$

onde $\hat{D}_{L,t} = L\left(\sum_{i=1}^p D_{t-i}/p\right)$ e $\hat{\sigma}_{e,t}^L = C_{L,p}\sqrt{\sum_{i=1}^p (e_{t-i})^2/p}$. O pedido é calculado em função do estoque-alvo e da demanda [eq. (7)]. Eventuais valores negativos são assumidos como excesso de estoque que podem ser devolvidos sem custo, conforme proposto por Kahn (1987) e Lee *et al.* (1997).

$$Q_t = A_t - A_{t-1} + D_{t-1} \quad (7)$$

O cálculo do pedido pode ser apresentado em função das estimativas da demanda durante o *lead time*, da constante vinculada ao nível de serviço desejado, do desvio-padrão dos erros de previsão relativos ao mesmo período e da demanda observada no período anterior.

$$Q_t = \hat{D}_{L,t} - \hat{D}_{L,t-1} + z\left(\hat{\sigma}_{e,t}^L - \hat{\sigma}_{e,t-1}^L\right) + D_{t-1} \quad (8)$$

$$Q_t = L\left(\frac{D_{t-1} - D_{t-p-1}}{p}\right) + D_{t-1} + z\left(\hat{\sigma}_{e,t}^L - \hat{\sigma}_{e,t-1}^L\right) \quad (9)$$

$$Q_t = \left(1 + \frac{L}{p}\right)D_{t-1} - \left(\frac{L}{p}\right)D_{t-p-1} + z\left(\hat{\sigma}_{e,t}^L - \hat{\sigma}_{e,t-1}^L\right) \quad (10)$$

Pela definição do EC, segue-se que:

$$EC = \frac{Var(Q)}{Var(D)} \geq 1 + \left(\frac{2L}{p} + \frac{2L^2}{p^2}\right)(1 - \rho^p) \quad (11)$$

No caso específico de não existir correlação entre as demandas período a período, ou seja, quando $\rho = 0$:

$$EC = \frac{Var(Q)}{Var(D)} \geq 1 + \frac{2L}{p} + \frac{2L^2}{p^2}. \quad (12)$$

Os modelos de Warburton (2004) e de Fransoo & Wouters (2000), na sequência, são apenas apresentados quanto à sua forma final. A notação utilizada nesses modelos também encontra-se disponível na Tabela 1.

Fransoo & Wouters (2000) quantificam a amplificação da variabilidade da demanda como sendo o quociente entre o coeficiente de variação da demanda gerada em um nível da

estrutura e o coeficiente de variação da demanda recebida por este nível, ambos definidos no período correspondente ao *lead time*.

$$EC = \theta_{D,L}^{out} / \theta_{D,L}^{in} \quad (13)$$

A expressão pode ser generalizada para uma CA com k níveis, da seguinte forma:

$$EC_{1,k} = (\theta_{D,L,1}^{out} \times \theta_{D,L,2}^{out} \times \dots \times \theta_{D,L,k}^{out}) / (\theta_{D,L,1}^{in} \times \theta_{D,L,2}^{in} \times \dots \times \theta_{D,L,k}^{in}) = \theta_{D,L,k}^{out} / \theta_{D,L,1}^{in} \quad (14)$$

No modelo de Warburton (2004), o EC é determinado pela razão entre a taxa de pedidos que são enviados por um determinado nível da estrutura e a taxa de pedidos que chegam a este nível. A taxa de pedidos atinge o seu pico logo após L períodos; deste modo, este é o momento adequado para comparar as taxas:

$$EC = L/T \quad (15)$$

O ajuste temporal (T) que faz o estoque retornar ao seu valor desejado (estoque-alvo) pode ser obtido calculando-se o quociente entre o dobro da defasagem temporal L (*lead time*) e π (3,1415...). Isto significa que um EC em torno de 1,5 é praticamente inevitável, sob pena de se incorrer em frequentes rupturas de estoque.

Outras abordagens para a quantificação do EC incluem os trabalhos de Chen & Disney (2003) e Hosoda & Disney (2004), os quais podem ser vistos como desdobramentos não independentes dos modelos referidos nesta seção, não sendo aqui detalhados. Segue-se uma análise crítica dos modelos apresentados nas eqs. (5), (12), (14) e (15), com base na sua capacidade de dimensionar plenamente o fenômeno estudado (EC), no grau de complexidade de sua operacionalização e no seu nível de precisão.

Conforme pode ser constatado analisando a eq. (5), o modelo de Lee *et al.* (1997) é simples. Construído a partir de um modelo autorregressivo de formação de demanda, incorpora o fator de correlação da demanda no tempo, o *lead time* e a variabilidade da demanda de entrada. Na prática, a identificação desse fator de correlação é imprecisa, o que enfraquece o modelo. Além disso, não considera a variabilidade do *lead time* e a natureza da demanda (quando o fator de correlação da demanda no tempo é zero). Apresenta, ainda, um erro de formulação referente ao fator de correlação, pois se este for negativo (caso de correlação negativa próxima a -1) o EC pode resultar negativo. Dado que o EC é a razão entre duas variâncias, este resultado seria incorreto, por definição.

O modelo de Chen *et al.* (2000) é um dos mais citados na literatura. Foi construído a partir de um modelo autorregressivo que representa o processo de formação da demanda. Analisando-se a eq. (12), torna-se evidente a importância da escolha de um número adequado de períodos para o cálculo da média móvel a ser utilizada nas estimativas da demanda, com vistas à redução do EC. Este modelo incorpora o *lead time*, mas não considera a sua variabilidade. A eq. (12) permite um dimensionamento parcial do EC e pode, em muitos casos, apenas considerar uma parcela pequena de sua real intensidade. Nessas situações, em que os efeitos gerados pela variabilidade do *lead time* não são contabilizados, pode ocorrer uma forte distorção do peso atribuído ao *lead time* médio na amplificação da demanda e uma supervalorização do impacto que o número de períodos (utilizados no cálculo da média móvel da demanda) exerce sobre a intensidade do fenômeno.

O modelo de Fransoo & Wouters (2000) apresentado na eq. (14) foi construído diretamente sobre a definição do EC. Seu ponto positivo é a incorporação dos coeficientes de variação da

demanda de entrada e da demanda de saída, para cada nível da estrutura. O aspecto negativo reside no fato de que o modelo não mostra como são calculados o desvio-padrão e a média da demanda de saída, e não incorpora a variabilidade do *lead time* no cálculo do EC.

A formulação final do modelo de Warburton (2004), conforme apresentado na eq. (15), é bastante simples, apesar da complexidade de seu desenvolvimento. O aspecto positivo consiste na incorporação, ao *lead time*, de uma variável de ajuste temporal para controlar a taxa de pedido, o que é compatível com a natureza estocástica do EC. Sua fragilidade reside na linearização do fenômeno em relação ao *lead time* e na desconsideração da variabilidade do *lead time* e da natureza da demanda (através de seu coeficiente de variação).

Observa-se que os principais modelos de quantificação do EC disponíveis na literatura são insuficientes para um dimensionamento mais preciso do EC. O principal problema detectado nesses modelos é a ausência de um termo relativo à variabilidade do *lead time* de entrega de pedidos. Outra deficiência importante é a ausência de elementos que caracterizem a demanda, tal como o seu coeficiente de variação.

Por sua consistência e representatividade, o modelo de Chen *et al.* (2000) foi escolhido como ponto de partida para o desenvolvimento da proposta apresentada na seção 3 deste artigo.

3. Modelo proposto

Conforme apresentado na seção 2, o modelo de quantificação do EC desenvolvido por Chen *et al.* (2000) trabalha com cenários com *lead time* constante e, ao não incluir em sua formulação o coeficiente de variação da demanda, indica que este fenômeno independe dessa variável. Estas simplificações podem levar à quantificação parcial da intensidade do EC em estruturas multi-hierárquicas e, por isso, constituem deficiências importantes na modelagem do fenômeno estudado.

A principal contribuição do modelo aqui apresentado, capaz de suprir as deficiências identificadas, consiste (i) em sua independência em relação ao processo de formação da demanda, (ii) na incorporação da variabilidade do *lead time* e (iii) na determinação do impacto que o coeficiente de variação da demanda produz sobre o EC, ao longo da CA. Tais medidas são detalhadas na sequência.

Na representação da demanda, a maioria dos autores trabalha com modelos autorregressivos de primeira ordem. Lee *et al.* (1997), Chen *et al.* (2000) e Warburton (2004) utilizam o mesmo modelo de formação da demanda apresentado na eq. (1). Rajaram & Robotis (2004) utilizam um modelo linear de primeira ordem para capturar a propagação da variabilidade da demanda. Os autores mostram que os resultados da aplicação desse modelo podem ser utilizados para projetar estruturas que contribuam para reduzir a variabilidade da demanda ao longo da CA.

De acordo com Kuncová (2002), é possível modelar o EC trabalhando com o pressuposto de que a demanda é uma variável aleatória que pode ser aproximada por uma distribuição normal, sem a necessidade de modelos preliminares que descrevam a sua formação. Neste artigo, trabalha-se com o pressuposto de que a demanda segue uma distribuição normal com média e desvio-padrão conhecidos, a exemplo de Kuncová (2002) e de grande parte dos compêndios sobre gestão de estoques, e mostra-se que, independentemente do seu processo de formação, é possível desenvolver um modelo efetivo de quantificação do EC.

A incorporação da variabilidade do *lead time* na quantificação do EC permite a geração de modelos mais precisos, porém aumenta consideravelmente a dificuldade de sua construção. Os modelos que trabalham com *lead time* constante, a exemplo daqueles apresentados na seção 2, são relativamente simples e de fácil operacionalização, porém pouco precisos. Tal incorporação, além de qualificar a modelagem da quantificação do EC, facilita o entendimento da dinâmica deste fenômeno. Um estudo realizado por Chatfield *et al.* (2004) utilizando simulação mostra que a variabilidade do *lead time* pode aumentar o EC e, em determinadas situações, é o fator predominante na amplificação da demanda ao longo das CAs. Os autores, entretanto, não formalizaram a inclusão desse fator na expressão que quantifica o EC.

Os modelos apresentados na seção 2, em regra, não explicitam o impacto do coeficiente de variação da demanda sobre o EC, basicamente por não associarem esses dois elementos matematicamente. Entre os principais modelos, apenas Fransoo & Wouters (2000) utilizam uma função que contém esta variável; sua inclusão decorre diretamente da definição utilizada pelos autores. A incorporação do coeficiente de variação da demanda proposta neste trabalho é de outra natureza, pois se origina da derivação do modelo e não da definição preliminar do EC.

Na formalização do novo modelo, considera-se uma CA em que, a cada período t , um varejista avalia seu nível de estoque e envia um pedido Q_t para um fabricante, a exemplo do trabalho de Chen *et al.* (2000). Após o pedido ter sido encaminhado, o varejista observa e atende (caso o estoque seja suficiente) a demanda D_t relativa ao período em curso. Eventuais demandas não atendidas ficam pendentes. Considera-se a ocorrência de um *lead time* variável L_t entre o momento em que o pedido é encaminhado pelo varejista e o momento em que o pedido é recebido por ele. Um pedido colocado no fim do período t é recebido no início do período $t + L_t$. A Tabela 2 traz a notação, suplementar àquela apresentada na Tabela 1, utilizada no novo modelo. A Figura 4 apresenta esquematicamente o desenvolvimento do modelo proposto.

A demanda vista pelo varejista e o *lead time* de entrega dos pedidos são variáveis aleatórias, normalmente distribuídas, com média e desvio-padrão conhecidos ou estimáveis a partir de dados históricos; isto é $D \rightarrow N(\mu_D, \sigma_D)$ e $L \rightarrow N(\mu_L, \sigma_L)$. A estimativa da demanda em t é calculada a partir de uma média móvel que utiliza os dados relativos à demanda observada nos últimos p períodos:

$$\hat{D}_t = \sum_{i=1}^p D_{t-i} / p \quad (16)$$

De acordo com Mood *et al.* (1974, p. 231), o valor esperado e o desvio-padrão de uma amostra de tamanho n , extraída aleatoriamente de uma população com média μ e variância finita σ^2 , são μ e σ/\sqrt{n} , respectivamente. Desta forma, a demanda estimada através da eq. (16) pode ser representada por uma distribuição normal, tal que $\hat{D} \rightarrow N(\mu_D, \sigma_D/\sqrt{p})$. A estimativa da demanda durante o *lead time* é obtida utilizando a média móvel referida na eq. (16) e o *lead time* em t , a partir do pressuposto que L_t e \hat{D}_t utilizam a mesma unidade de tempo.

$$\hat{D}_{L,t} = L_t \hat{D}_t = L_t \left(\sum_{i=1}^p D_{t-i} / p \right) \quad (17)$$

A variância do produto de duas variáveis aleatórias independentes, tais como demanda e *lead time*, é expressa como uma soma de três parcelas, de acordo com Mood *et al.* (1974, p.180): (i) o produto da variância da primeira variável com o quadrado da média da segunda variável; (ii) o produto da variância da segunda variável com o quadrado da média da primeira variável; e (iii) o produto das variâncias das duas variáveis. Segundo esses mesmos autores, o valor esperado do produto de duas variáveis independentes é igual ao produto das médias das variáveis. Com base nestas definições e nas suposições acima apresentadas, a estimativa da demanda no *lead time* pode ser representada por uma distribuição normal, com média e desvio-padrão assim expressos:

$$\hat{D}_L \rightarrow N \left(\mu_L \mu_D, \sqrt{\sigma_L^2 \mu_D^2 + (\sigma_D^2 / p)(\mu_L^2 + \sigma_L^2)} \right). \quad (18)$$

Tabela 2 – Notação suplementar utilizada no desenvolvimento do modelo proposto.

Símbolo	Descrição
μ_D	Média da demanda
σ_D^2, σ_D	Variância e desvio-padrão da demanda
θ_D	Coefficiente de variação da demanda
μ_L	Média do <i>lead time</i>
σ_L^2, σ_L	Variância e desvio-padrão do <i>lead time</i>
L_t	<i>Lead time</i> em t
\hat{D}_t	Estimativa da demanda em t
$\hat{\sigma}_{DL,t}$	Estimativa do desvio-padrão da demanda durante o <i>lead time</i> , em t
$EC_{k,t}$	Efeito chicote em t , observado no nível k

O varejista segue uma política *order-up-to* em que o estoque-alvo é calculado a partir da estimativa da demanda durante o *lead time*, do nível de segurança desejado e do desvio-padrão da demanda estimada para o *lead time*:

$$A_t = \hat{D}_{L,t} + z \hat{\sigma}_{DL,t} \quad (19)$$

com $\hat{D}_{L,t} = L_t \left(\sum_{i=1}^p D_{t-i} / p \right)$ e $\hat{\sigma}_{DL}$ conforme definido na eq. (18).

O pedido é calculado em função do estoque-alvo e da demanda. Eventuais valores negativos são assumidos como excesso de estoque que podem ser devolvidos sem custo, de acordo com Kahn (1987), Lee *et al.* (1997) e Chen *et al.* (2000).

$$Q_t = A_t - A_{t-1} + D_{t-1} = \left(\hat{D}_{L,t} + z \hat{\sigma}_{DL,t} \right) - \left(\hat{D}_{L,t-1} + z \hat{\sigma}_{DL,t-1} \right) + D_{t-1} \quad (20)$$

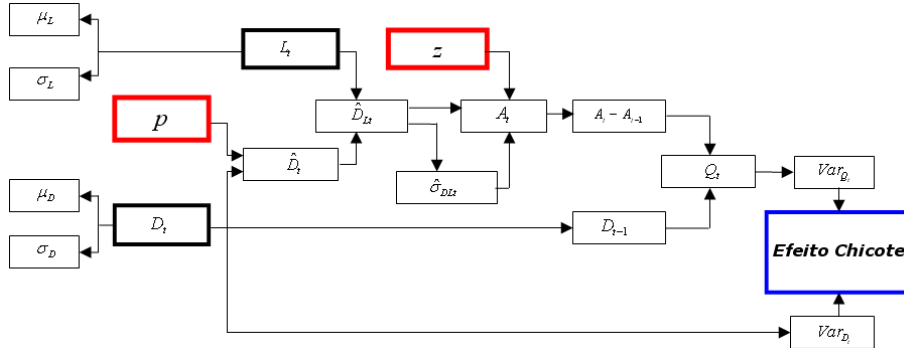


Figura 4 – Desenvolvimento do novo modelo de quantificação do EC.

O cálculo do pedido pode ser apresentado em função da diferença entre as estimativas da demanda durante o lead time (períodos t e $t-1$), da constante vinculada ao nível de serviço desejado, da diferença entre as estimativas do desvio-padrão da demanda estimada para o lead time (períodos t e $t-1$) e da demanda observada no período $t-1$.

$$Q_t = (\hat{D}_{L,t} - \hat{D}_{L,t-1}) + z(\hat{\sigma}_{DL,t} - \hat{\sigma}_{DL,t-1}) + D_{t-1} \quad (21a)$$

$$Q_t = L_t \left(\sum_{i=1}^p D_{t-i} / p \right) - L_{t-1} \left(\sum_{i=1}^p D_{t-i-1} / p \right) + z(\hat{\sigma}_{DL,t} - \hat{\sigma}_{DL,t-1}) + D_{t-1} \quad (21b)$$

A Tabela 3 traz definições adicionais, a serem utilizadas nos desenvolvimentos que se seguem.

Tabela 3 – Definições adicionais.

$E_1 = L_t \left[\left(\sum_{i=1}^p D_{t-i} \right) / p \right]$ (22)	$F = z(\hat{\sigma}_{DL,t} - \hat{\sigma}_{DL,t-1})$ (25)
$E_2 = L_{t-1} \left[\left(\sum_{i=1}^p D_{t-i-1} \right) / p \right]$ (23)	$G = D_{t-1}$ (26)
$E = E_1 - E_2$ (24)	$Q_t = E + F + G$ (27)

Conforme Mood *et al.* (1974, p. 178), ao calcular a variância de uma soma de variáveis aleatórias correlacionadas, deve-se somar as variâncias de cada uma das variáveis e adicionar, a este subtotal, o dobro das covariâncias relativas a cada par de variáveis. Portanto, a variância do tamanho dos pedidos deve ser calculada da seguinte forma:

$$Var_{Q_t} = Var_E + Var_F + Var_G + 2(Cov_{EF} + Cov_{EG} + Cov_{FG}) \quad (28)$$

Dado que $E = E_1 - E_2$, torna-se necessário calcular a variância desta diferença. Como as variáveis E_1 e E_2 estão correlacionadas, de acordo com Mood *et al.* (1974, p. 179), tem-se:

$$Var_E = Var_{E_1} + Var_{E_2} - 2Cov_{E_1E_2}, \quad (29)$$

$$Var_{E_1} = Var_{E_2} = \sigma_L^2 \mu_D^2 + \frac{\sigma_D^2}{p} (\mu_L^2 + \sigma_L^2). \quad (30)$$

A covariância entre E_1 e E_2 foi modelada matematicamente a partir de um conjunto de simulações computacionais, resumidas na Tabela 4. Essas simulações, assim como todas as demais apresentadas neste artigo, estão disponíveis no endereço <http://www.savefile.com/files/1949159> (arquivo EFEITO_CHICOTE.zip). As simulações foram desenvolvidas utilizando planilhas de cálculo geradas em Excel® (com *add-in* da Crystal Ball®, disponível no endereço <http://portals.crystalball.com/Downloads>). Trabalhou-se com diversos cenários, combinando três valores de coeficiente de variação da demanda (0,1; 1 e 2), três valores de coeficiente de variação do *lead time* (0,1; 1 e 2) e três valores de p (2; 10 e 30).

Para cada um dos 27 cenários, foram realizadas 5000 rodadas da rotina de cálculo da covariância entre E_1 e E_2 , conforme as eqs. (22) e (23). Utilizou-se, em cada rodada, uma série de 2000 valores de demanda e *lead time*, gerados aleatoriamente. A covariância entre E_1 e E_2 foi determinada como:

$$Cov_{E_1, E_2} = \sigma_D^2 \left(\frac{p-1}{p^2} \right) \mu_L^2 \quad (31)$$

O grau de convergência dos resultados (valores simulados e valores modelados) é estabelecido através do índice de convergência (IC), expresso como o quociente entre a covariância simulada e a covariância calculada a partir da eq. (31). O índice de convergência corrigido (IC_{cor}) é obtido através do quociente de dois intervalos: (i) diferença absoluta entre a covariância em $t=3$ e a covariância em $t=2000$; e (ii) diferença absoluta entre a covariância calculada através do modelo e a covariância em $t=3$. Esta correção torna-se necessária quando o valor para o qual a covariância converge é próximo de zero (Cenários 1, 10 e 19) e quando a diferença entre os valores da covariância em $t=3$ e $t=2000$ é muito maior que seu valor final (em $t=2000$, neste caso), a exemplo dos Cenários 11 e 20. Para diferentes valores de entrada (valores intermediários, ou até mesmo fora dos intervalos utilizados) a equação (31) proposta apresentou o mesmo desempenho observado na Tabela 4.

Utilizando-se a eq. (31), é possível determinar a variância da diferença entre as estimativas da demanda durante o *lead time*:

$$Var_E = 2\sigma_L^2 \mu_D^2 + \left(\frac{2\sigma_D^2}{p} \right) (\mu_L^2 + \sigma_L^2) - 2\sigma_D^2 \left(\frac{p-1}{p^2} \right) \mu_L^2 \quad (32a)$$

$$Var_E = 2 \left(\sigma_L^2 \mu_D^2 + \sigma_D^2 \left(\frac{\mu_L^2}{p^2} + \frac{\sigma_L^2}{p} \right) \right) \quad (32b)$$

Na sequência, de acordo com a eq. (28), deve-se calcular a variância da diferença entre as estimativas do desvio-padrão da demanda durante o *lead time*, a variância da demanda em $t-1$ e as covariâncias entre (i) E e F , (ii) E e G e (iii) F e G .

A variância da diferença entre as estimativas do desvio-padrão (em t e $t-1$) foi modelada matematicamente a partir de uma série de simulações computacionais. Trabalhou-se com diversos cenários, combinando quatro valores de coeficiente de variação da demanda (0,1; 0,5; 1 e 2) e três valores de z (1; 2 e 3). Para cada um dos 12 cenários, foram realizadas

1000 rodadas da rotina de cálculo da variância, dada na eq. (25). Utilizou-se, em cada rodada, uma série de 2000 valores de demanda gerados aleatoriamente. A excelente aproximação dos resultados obtidos (isto é, entre os valores das simulações e os valores modelados), apresentada na Tabela 5, foi condição suficiente para validar a expressão proposta na eq. (33).

Tabela 4 – Simulação computacional da covariância entre E_1 e E_2 .

Cenário	μ_D	σ_D	μ_L	σ_L	p	$Cov_{E_1E_2}$ $t=3$	$Cov_{E_1E_2}$ $t=2000$	$\sigma_D^2 \left(\frac{p-1}{p^2} \right) \mu_L^2$	IC	IC _{cor}
01	100	10	1	2	2	-9077	20,288	25	0,8115	0,9995
02	100	10	15	15	2	-490185	5395	5625	0,9591	0,9995
03	100	10	30	3	2	-18293	22456	22500	0,9980	0,9989
04	50	50	1	2	2	-3154	613	625	0,9810	0,9969
05	50	50	15	15	2	-167566	139696	140625	0,9934	0,9970
06	50	50	30	3	2	49223	561173	562500	0,9976	0,9974
07	50	100	1	2	2	-6414	2477	2500	0,9910	0,9975
08	50	100	15	15	2	-322212	559939	562500	0,9954	0,9971
09	50	100	30	3	2	234526	2241195	2250000	0,9961	0,9956
10	100	10	1	2	10	-8787	6,330	9	0,7033	0,9997
11	100	10	15	15	10	-520042	76,06	2025	0,0376	0,9963
12	100	10	30	3	10	-20207	8020	8100	0,9902	0,9972
13	50	50	1	2	10	-2486	216	225	0,9586	0,9966
14	50	50	15	15	10	-139683	50007	50625	0,9878	0,9968
15	50	50	30	3	10	-128	200812	202500	0,9917	0,9917
16	50	100	1	2	10	-3050	878	900	0,9751	0,9943
17	50	100	15	15	10	-167794	200312	202500	0,9892	0,9941
18	50	100	30	3	10	13575	805912	810000	0,9950	0,9949
19	100	10	1	2	30	-8740	-15,25	3	-4,731	0,9979
20	100	10	15	15	30	-521946	-1084	725	-1,494	0,9965
21	100	10	30	3	30	-20371	2810	2900	0,9690	0,9961
22	50	50	1	2	30	-2304	76,81	81	0,9535	0,9984
23	50	50	15	15	30	-135276	17418	18125	0,9610	0,9954
24	50	50	30	3	30	-4722	71713	72500	0,9891	0,9898
25	50	100	1	2	30	-2527	306	322	0,9497	0,9943
26	50	100	15	15	30	-141020	70238	72500	0,9688	0,9894
27	50	100	30	3	30	-3297	284858	290000	0,9823	0,9825

Fonte: elaborada pelos autores

Tabela 5 – Simulação computacional da variância de *F*.

Cenário	μ_{DL}	σ_{DL}	z	Var_F $t=2000$	$2z^2 \left(\frac{(t-1)}{3(t+1)^2} \right) \hat{\sigma}_{DL}^2$	Diferença
01	100	10	1	0,03	0,03	0,00
02	100	10	2	0,14	0,13	0,01
03	100	10	3	0,31	0,30	0,01
04	100	50	1	0,88	0,83	0,05
05	100	50	2	3,64	3,32	0,32
06	100	50	3	8,02	7,49	0,53
07	100	100	1	3,57	3,32	0,25
08	100	100	2	13,76	13,31	0,45
09	100	100	3	30,51	29,96	0,55
10	100	200	1	13,97	13,31	0,66
11	100	200	2	53,46	53,25	0,21
12	100	200	3	120,98	119,82	1,16

Fonte: elaborada pelos autores

$$Var_F = 2z^2 \left(\frac{(t-1)}{3(t+1)^2} \right) \sigma_{DL}^2 \quad (33)$$

Representando o fator dependente do tempo por:

$$T = \frac{(t-1)}{3(t+1)^2} \quad (34)$$

e utilizando a representação para σ_{DL}^2 na eq. (18), tem-se:

$$Var_F = 2z^2 T \left(\sigma_L^2 \mu_D^2 + (\sigma_D^2 / p) (\mu_L^2 + \sigma_L^2) \right). \quad (35)$$

Na seqüência, calcula-se a variância de *G*, conforme a eq. (26):

$$Var_G = \sigma_D^2 \quad (36)$$

Obtidas as variâncias de *E*, *F* e *G* [eqs. (32b), (35) e (36), respectivamente], calculam-se as covariâncias dessas variáveis. Conforme verificado por simulação, as covariâncias entre *E* e *F* e entre *F* e *G* convergem rapidamente para zero.

A covariância entre *E* e *G* foi modelada matematicamente a partir de um conjunto de simulações computacionais, resumidas na Tabela 6. Trabalhou-se com diversos cenários, combinando três valores de coeficiente de variação da demanda (0,1; 1 e 2), três valores de coeficiente de variação do *lead time* (0,1; 1 e 2) e três valores de *p* (2; 10 e 30).

Tabela 6 – Simulação computacional da covariância entre *E* e *G*.

Cenário	μ_D	σ_D	μ_L	σ_L	p	Cov_{EG} $t=2$	Cov_{EG} $t=2000$	$\frac{\sigma_D^2 \mu_L}{p}$	IC	IC _{cor}
01	100	10	1	2	2	22	49	50	0,9851	0,9732
02	100	10	15	15	2	367	756	750	1,0081	1,0159
03	100	10	30	3	2	701	1500	1500	1,0001	1,0002
04	50	50	1	2	2	844	1251	1250	1,0011	1,0034
05	50	50	15	15	2	8917	18777	18750	1,0014	1,0027
06	50	50	30	3	2	18827	37501	37500	1,0000	1,0000
07	50	100	1	2	2	2231	5002	5000	1,0003	1,0006
08	50	100	15	15	2	35341	74963	75000	0,9995	0,9991
09	50	100	30	3	2	77343	149965	150000	0,9998	0,9995
10	100	10	1	2	10	-32	10,5	10	1,0486	1,0117
11	100	10	15	15	10	-60	160	150	1,0649	1,0462
12	100	10	30	3	10	112	302	300	1,0078	1,0124
13	50	50	1	2	10	-67	247	250	0,9867	0,9895
14	50	50	15	15	10	992	3757	3750	1,0019	1,0026
15	50	50	30	3	10	3801	7507	7500	1,0009	1,0019
16	50	100	1	2	10	519	992	1000	0,9923	0,9841
17	50	100	15	15	10	7910	15040	15000	1,0027	1,0057
18	50	100	30	3	10	15409	30010	30000	1,0003	1,0007
19	100	10	1	2	30	-19,5	3,2	3	0,9550	0,9934
20	100	10	15	15	30	-292	49	50	0,9755	0,9964
21	100	10	30	3	30	25	98	100	0,9774	0,9699
22	50	50	1	2	30	188	86	83	1,0263	0,9791
23	50	50	15	15	30	899	1250	1250	1,0002	1,0009
24	50	50	30	3	30	1271	2498	2500	0,9992	0,9984
25	50	100	1	2	30	220	329	333	0,9861	0,9590
26	50	100	15	15	30	2260	4990	5000	0,9980	0,9964
27	50	100	30	3	30	5182	9993	10000	0,9993	0,9986

Fonte: elaborada pelos autores

Para cada um dos 27 cenários, foram realizadas 5000 rodadas da rotina de cálculo da covariância entre *E* e *G*, conforme as eqs. (24) e (26). Utilizou-se, em cada rodada, uma série de 2000 valores aleatórios de demanda e *lead time*. A expressão ajustada para Cov_{EG} é dada pela seguinte equação:

$$Cov_{EG} = \sigma_D^2 \mu_L / p \tag{37}$$

A convergência dos resultados (valores obtidos nas simulações e valores modelados) é estabelecida através do índice de convergência (IC), definido como o quociente entre a covariância simulada e a covariância calculada através da eq. (37). O índice de convergência corrigido (IC_{cor}) é obtido através do quociente de dois intervalos: (i) diferença absoluta entre a covariância em $t=2$ e a covariância em $t=2000$; e (ii) diferença absoluta entre a covariância calculada através do modelo e a covariância em $t=2$. Para diferentes valores de entrada (valores intermediários, ou até mesmo fora dos intervalos utilizados) a equação (37) proposta apresentou o mesmo desempenho observado na Tabela 6.

Substituindo as parcelas da eq. (28) pelas respectivas expressões [eqs. (32b), (35), (36), (37)], tem-se:

$$\begin{aligned} Var_{Q_i} = & 2 \left(\sigma_L^2 \mu_D^2 + \sigma_D^2 \left(\frac{\mu_L^2}{p^2} + \frac{\sigma_L^2}{p} \right) \right) + \\ & 2z^2 T \left(\sigma_L^2 \mu_D^2 + \frac{\sigma_D^2}{p} (\mu_L^2 + \sigma_L^2) \right) + \sigma_D^2 + 2 \left(0 + \frac{\sigma_D^2 \mu_L}{p} + 0 \right) \end{aligned} \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} Var_{Q_i} = & 2\sigma_L^2 \mu_D^2 + 2z^2 T \sigma_L^2 \mu_D^2 + \\ & 2\sigma_D^2 \left(\frac{\mu_L^2}{p^2} + \frac{\sigma_L^2}{p} \right) + 2z^2 T \frac{\sigma_D^2}{p} (\mu_L^2 + \sigma_L^2) + \sigma_D^2 + 2\sigma_D^2 \frac{\mu_L}{p} \end{aligned} \quad (38b)$$

$$\begin{aligned} Var_{Q_i} = & 2\sigma_L^2 \left(\mu_D^2 + z^2 T \mu_D^2 + z^2 T \frac{\sigma_D^2}{p} + \frac{\sigma_D^2}{p} \right) + \\ & \sigma_D^2 \left[1 + \frac{2\mu_L}{p} \left(1 + \frac{\mu_L}{p} \right) + \frac{2\mu_L^2}{p} z^2 T \right] \end{aligned} \quad (38c)$$

$$\begin{aligned} Var_{Q_i} = & 2\sigma_L^2 \sigma_D^2 \left(\frac{\mu_D^2}{\sigma_D^2} + \frac{\mu_D^2 z^2 T}{\sigma_D^2} + \frac{\sigma_D^2}{p \sigma_D^2} (1 + z^2 T) \right) + \\ & \sigma_D^2 \left[1 + \frac{2\mu_L}{p} \left(1 + \frac{\mu_L}{p} \right) + \frac{2\mu_L^2}{p} z^2 T \right] \end{aligned} \quad (38d)$$

$$\begin{aligned} Var_{Q_i} = & 2\sigma_L^2 \sigma_D^2 \left(\frac{1}{\theta_D^2} + \frac{z^2 T}{\theta_D^2} + \frac{1}{p} (1 + z^2 T) \right) + \\ & \sigma_D^2 \left[1 + \frac{2\mu_L}{p} \left(1 + \frac{\mu_L}{p} \right) + \frac{2\mu_L^2}{p} z^2 T \right] \end{aligned} \quad (38e)$$

$$Var_{Q_i} = 2\sigma_L^2 \sigma_D^2 \left[\left(\frac{1}{\theta_D^2} + \frac{1}{p} \right) (1 + z^2 T) \right] + \sigma_D^2 \left[1 + \frac{2\mu_L}{p} \left(1 + \frac{\mu_L}{p} \right) + \frac{2\mu_L^2}{p} z^2 T \right] \quad (38f)$$

$$Var_{Q_i} = \sigma_D^2 \left[1 + \frac{2\mu_L}{p} \left(1 + \frac{\mu_L}{p} \right) + \frac{2\mu_L^2 z^2 T}{p} + 2\sigma_L^2 \left(\frac{1}{\theta_D^2} + \frac{1}{p} \right) (1 + z^2 T) \right] \quad (38g)$$

Pela definição do EC ($EC = Var(Q)/Var(D)$), segue que:

$$EC_t = 1 + \frac{2\mu_L}{p} \left(1 + \frac{\mu_L}{p}\right) + \frac{2\mu_L^2 z^2 T}{p} + 2\sigma_L^2 \left(\frac{1}{\theta_D^2} + \frac{1}{p}\right) (1 + z^2 T) \quad (39)$$

Observa-se que o EC depende das seguintes variáveis: (i) demanda, (ii) *lead time*, (iii) número de períodos utilizados no cálculo da média móvel da demanda, (iv) constante z , correspondente ao nível de serviço desejado, (v) quadrado do coeficiente de variação da demanda: θ_D^2 , (vi) variância do *lead time* e (vii) tempo (momento da aferição).

Considerando a existência de k níveis na CA, a quantificação proposta para o EC é a seguinte:

$$EC_k = \frac{Var(Q_k)}{Var(D_1)} = \prod_{j=1}^k EC_j \quad \forall k \quad (40)$$

$$EC_{kt} = \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{2\mu_{Lj}}{p_j} \left(1 + \frac{\mu_{Lj}}{p_j}\right) + \frac{2\mu_{Lj}^2 z_j^2 T}{p_j} + 2\sigma_{Lj}^2 \left(\frac{1}{\theta_{Dj}^2} + \frac{1}{p_j}\right) (1 + z_j^2 T) \right) \quad \forall k \quad (41)$$

O novo modelo, proposto neste artigo, permite quantificar o EC de uma forma mais efetiva. Os modelos apresentados na seção anterior, por trabalharem com *lead time* constante, dimensionam o EC de modo impreciso. Ao aplicar o novo modelo à situação simplificada de *lead time* constante, tem-se:

$$EC_t = 1 + \frac{2L}{p} \left(1 + \frac{L}{p}\right) + \frac{2L^2 z^2 T}{p} \quad (42)$$

Simplificando ainda mais, isto é, considerando o valor de z igual a zero (caso em que não se utiliza estoque de segurança), o modelo adquire a forma proposta por Chen *et al.* (2000), conforme representado na eq. (12).

$$EC_t = 1 + \frac{2L}{p} \left(1 + \frac{L}{p}\right) \quad (43)$$

$$EC_t = 1 + \frac{2L}{p} + \frac{2L^2}{p^2} \quad (44)$$

4. Desempenho dos modelos

Na avaliação de desempenho dos modelos são utilizados: (i) os resultados das simulações do EC [realizadas de acordo com o pressuposto de Kahn (1987), Lee *et al.* (1997) e Chen *et al.* (2000), onde valores negativos obtidos no cálculo do tamanho do pedido são assumidos como excessos de estoque que podem ser devolvidos sem custo]; (ii) os resultados obtidos através da aplicação do modelo de Chen *et al.* (2000); e (iii) os resultados obtidos através da aplicação do modelo proposto nesta pesquisa. Inicialmente, trabalhou-se na identificação das variáveis (média e desvio-padrão da demanda e do *lead time* e número de períodos) e dos

parâmetros a serem utilizados nas simulações. Diversos cenários foram considerados, de acordo com as combinações obtidas a partir dos valores da Tabela 7.

Para cada um dos 243 cenários, foram realizadas 2000 rodadas da rotina de simulação e cálculo do EC. Utilizou-se, em cada rodada, uma série de 1200 valores de demanda, gerados aleatoriamente. Os resultados obtidos indicam que há expressivas diferenças de desempenho entre os dois modelos analisados.

Tabela 7 – Variáveis e valores utilizados nas simulações.

μ_D	σ_D	μ_L	σ_L	p
100	60	4	0	16
200	80	6	1	18
300	100	8	2	20

O Gráfico 1 apresenta: (i) valores obtidos por simulação; (ii) valores do EC obtidos através do modelo de Chen *et al.* (2000); e (iii) valores do EC obtidos através do modelo proposto neste artigo. Considera-se, para fins de análise, um conjunto de 212 cenários (os 31 cenários restantes, apresentando as maiores diferenças, não foram utilizados por razões de ordem prática, para facilitar a visualização e a interpretação dos resultados). Observa-se que nos primeiros 81 cenários (onde a variância do *lead time* é zero) não há diferenças entre os valores do EC simulados e os valores calculados através de ambos os modelos. Entretanto, quando a variância do *lead time* é maior do que zero, observa-se que o modelo de Chen *et al.* (2000) tende a subestimar o EC, ao passo que o modelo proposto consegue dimensioná-lo adequadamente. Essas diferenças, geradas primariamente em função da não incorporação da variância do *lead time* [modelo de Chen *et al.* (2000)], tornam-se maiores na medida em que a variância do *lead time* aumenta.

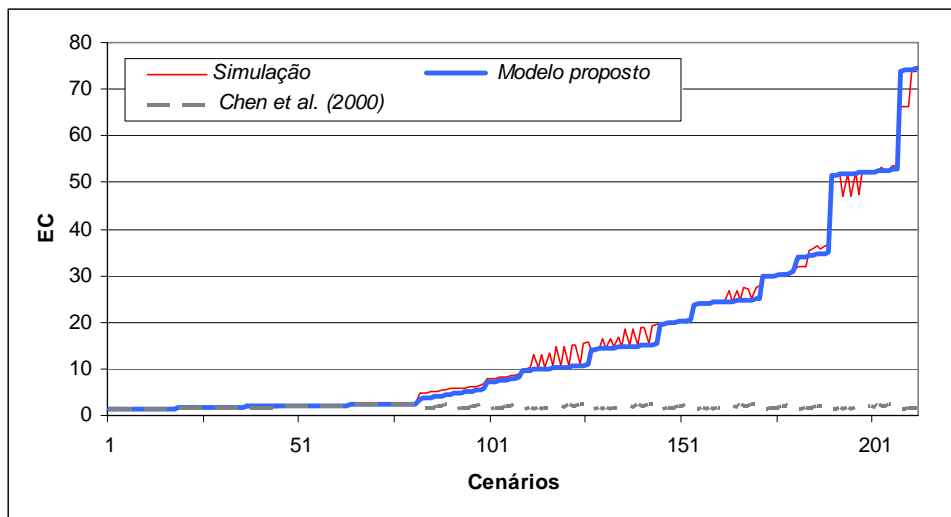


Gráfico 1 – Dimensionamento do EC – simulação e modelos.

O modelo de Chen *et al.* (2000) comporta-se bem em situações onde o *lead time* é constante. Quando o *lead time* apresenta variabilidade, o que ocorre na maior parte das situações reais, há um subdimensionamento do EC. Nestes casos, os valores podem ser de 2 a 50 vezes menores em relação aos valores de EC simulados, conforme o Gráfico 2.

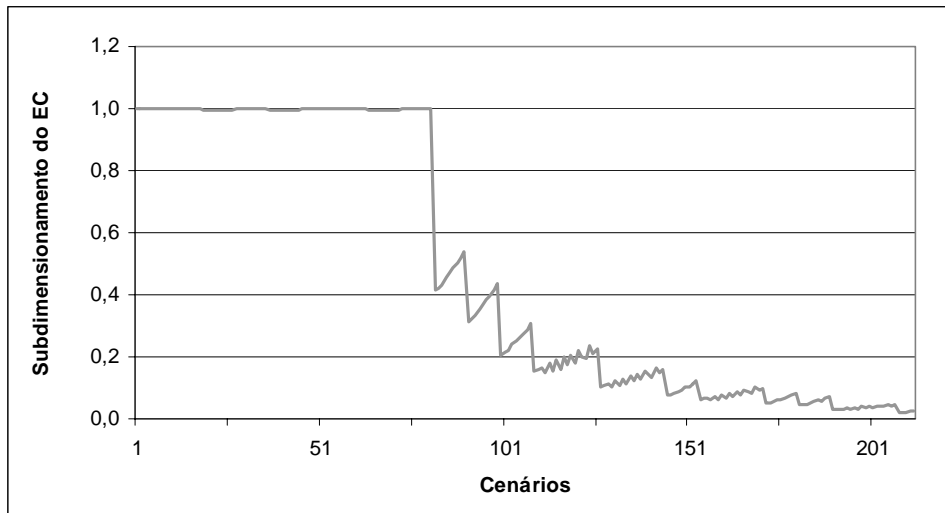


Gráfico 2 – Subdimensionamento do EC – modelo de Chen *et al.* (2000).

Além disso, as simulações comprovam a importância de considerar o coeficiente de variação da demanda na quantificação do EC. Quanto menor for este coeficiente, maior será o EC (em razão do aumento do impacto da variabilidade do *lead time*), conforme observa-se no Gráfico 3. Estes resultados estão plenamente de acordo com as relações expressas na eq. (39).

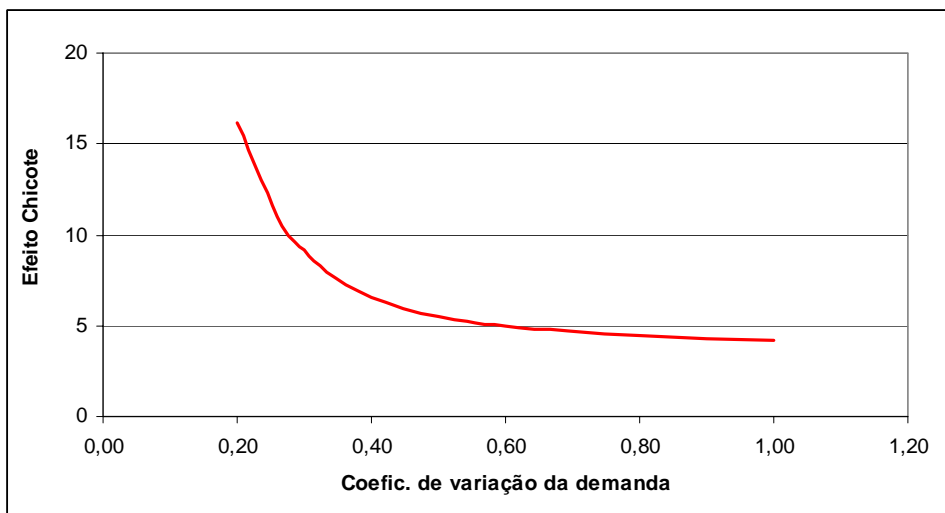


Gráfico 3 – Impacto do coeficiente de variação da demanda sobre o EC.

Para obtenção do Gráfico 3 foram realizadas 2000 rodadas da rotina de simulação para cada um dos cenários obtidos a partir dos valores da Tabela 8. Em cada rodada, utilizou-se uma série de 1200 valores de demanda, gerados aleatoriamente.

Outras combinações de valores de μ_L , σ_L e p foram testadas e apresentaram resultados semelhantes. A incorporação do coeficiente de variação da demanda à modelagem do EC contribui para tornar mais preciso o dimensionamento deste fenômeno e, por esta razão, pode ser muito importante para orientar ações gerenciais voltadas à sua minimização.

Tabela 8 – Valores utilizados na identificação do impacto do θ_D sobre o EC.

μ_D	σ_D	μ_L	σ_L	p
100	60	14	0,5	20
200	80			
300	100			

5. Conclusão

A análise dos principais modelos disponíveis na literatura apontou para a existência de três lacunas importantes no processo de quantificação do EC: (i) dependência do processo de formação da demanda (ii) desconsideração da variabilidade do *lead time* de entrega de pedidos; e (iii) ausência de elementos caracterizadores da demanda (tal como seu coeficiente de variação). Entre estas lacunas, a desconsideração da variabilidade do *lead time* é a mais comprometedora, pois leva a quantificações imprecisas desse fenômeno.

De acordo com o desenvolvimento apresentado na seção 3, o modelo proposto: (i) independe do processo de formação da demanda; (ii) incorpora a variabilidade do *lead time*, conforme expresso na sequência de equações de (18) a (40); e (iii) identifica o grau de influência que o coeficiente de variação da demanda exerce sobre o EC, conforme apresentado na eq. (38e).

A análise de desempenho da modelagem de Chen *et al.* (2000) mostra a tendência deste modelo no sentido de subdimensionar o EC, parte pela não incorporação da variabilidade do *lead time* e parte pela desconsideração do papel que o coeficiente de variação da demanda pode desempenhar na intensificação do fenômeno (aumentando o impacto da variabilidade do *lead time* sobre o EC). O modelo proposto nesta pesquisa supre estas deficiências, respondendo adequadamente às diferentes combinações de valores das variáveis de entrada do sistema estudado.

Os resultados obtidos através da comparação entre modelos evidenciam a importância das medidas propostas neste artigo, com vistas a um dimensionamento mais preciso do EC. A intensidade e o comportamento estocástico e serial do EC só podem ser adequadamente modelados se a variabilidade do *lead time* for incorporada ao processo de modelagem. Ratificando os resultados obtidos por Chatfield *et al.* (2004), o modelo proposto neste artigo comprova que a variabilidade do *lead time* pode aumentar o EC e, em determinadas situações, pode se constituir no fator predominante na amplificação da demanda ao longo das CAs.

Uma das consequências diretas do uso de *lead times* constantes nos modelos de quantificação do EC é o seu subdimensionamento (em alguns casos, menos de 5% do fenômeno é

quantificado). Em razão da natureza deste fenômeno, as simplificações presentes nos modelos analisados geram distorções que, em função de sua magnitude, não podem ser desprezadas.

O presente estudo baseou-se no pressuposto de Kahn (1987), Lee *et al.* (1997) e Chen *et al.* (2000), onde valores negativos obtidos no cálculo do tamanho do pedido são assumidos como excessos de estoque que podem ser devolvidos sem custo. Tal suposição, apesar de aceita na literatura, encontra limitado respaldo prático. Desta forma, como extensão futura das pesquisas aqui apresentadas, propõe-se analisar o impacto, sobre a quantificação do EC, de diferentes políticas de tratamento de excessos de estoques.

Notas

Uma versão preliminar do artigo foi apresentada na 2008 International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), em Cingapura, onde recebeu o Conference Best Paper Award. A pesquisa do Prof. Fogliatto é financiada pelo CNPq (PQ – Processo 301380/2008-2) e pela CAPES (PRO-ENG – Processo 23038.030044/2008-06).

Referências Bibliográficas

- (1) Anderson Jr., E.G. & Fine, C.H. (2003). Business cycles and productivity in capital equipment supply chains. **In:** *Quantitative models for supply chain management*, 6. ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, 885 p.
- (2) Carlsson, C. & Fullér, R. (2000). A fuzzy approach to the bullwhip effect. **In:** *Cybernetics and Systems '2000*, Proceedings of the Fifteenth European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Vienna, April 25-28, 228-233.
- (3) Carlsson, C. & Fullér, R. (2001). Reducing the bullwhip effect by means of intelligent, soft computing methods. *Proceedings of the 34th Hawaii International Conference on System Sciences*, 10 p.
- (4) Chatfield, D.C.; Kim, J.G.; Harrison, T.P. & Hayya, J.C. (2004). The Bullwhip Effect – Impact of Stochastic Lead Time, Information Quality, and Information Sharing: A Simulation Study. *Production and Operations Management*, **13**(4), 340-353.
- (5) Chen, F.; Drezner, Z.; Ryan, J.K. & Simchi-Levi, D. (2000). Quantifying the Bullwhip Effect in a Simple Supply Chain: The Impact of Forecasting, Lead Times, and Information. *Management Science*, **46**(3), 436-443.
- (6) Chen, F.; Drezner, Z.; Ryan, J.K. & Simchi-Levi, D. (2003). The Bullwhip Effect: managerial insights on the impact of forecasting and information on variability in a supply chain. **In:** *Quantitative models for supply chain management*, 6. ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, 885 p.
- (7) Chen, F.Y. & Disney, S.M. (2003). The Order-up-to Policy Sweet Spot – Using Proportional Controllers to Eliminate the Bullwhip Problem. *EUROMA POMS Conference*, Lago di Como, Itália, 16-18 June, 551-560.
- (8) Clark, A.J. & Scarf, H. (1960). Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem. *Management Science*, **6**(4), 475-490.

- (9) Delfmann, W. (2000). Working Paper N. 102. University of Cologne.
- (10) Fransoo, J.C. & Wouters, M.J.F. (2000). Measuring the Bullwhip Effect in the Supply Chain. *Supply Chain Management*, **5**(2), 78-89.
- (11) Hosoda, T. & Disney, S.M. (2004). An analysis of a Three Echelon Supply Chain Model with Minimum Mean Squared Error Forecasting. *Second World Conference on POM and 15th Annual POM Conference*, Cancún, México, p.1-24.
- (12) Johnson, M.E. & Pyke, D.F. (1999). Supply chain management. Working Paper, The Tuck School of Business.
- (13) Kahn, J. (1987). Inventories and the volatility of production. *American Economic Review*, **77**, 667-679.
- (14) Kuncová, M. (2002). Optimization Methods and Bullwhip Effect. Disponível em <<http://www.fhi.sk/files/katedry/kove/ssov/VKOXI/.%5CKuncova.pdf>>, último acesso em 14 de dezembro de 2006.
- (15) Lee, H.; Padmanabhan, V. & Whang, S. (1997). Information Distortion in a Supply Chain: The Bullwhip Effect. *Management Science*, **43**(4), 546-558.
- (16) Mood, A.M.; Graybill, F.A. & Boes, D.C. (1974). *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill, New York, 564 p.
- (17) Muckstadt, J.A. (2005). *Analysis and algorithms for service parts supply chains*. Springer Science+Business Media Inc., New York, 277 p.
- (18) Muharremoglu, A. & Tsitsiklis, J.N. (2001). Echelon base stock policies in uncapacited serial inventory systems. Disponível em <<http://web.mit.edu/jnt/www/publ.html>>, último acesso em 12 de novembro de 2004.
- (19) Rajaram, K. & Robotis, A. (2004). Analyzing Variability in Continuous Process. *European Journal of Operational Research*, **156**(2), 312-325.
- (20) Warburton, R.D.H. (2004). An analytical Investigation of the Bullwhip Effect. *Production and Operations Management*, **13**(2), 150-160.