

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA ANÁLISE CRÍTICA DO ENSAIO DE TRAÇÃO BIAxIAL POR INFLAÇÃO PARA
CARACTERIZAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS EM BORRACHAS

por

Leandro Conte da Silva

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Março de 2014.

UMA ANÁLISE CRÍTICA DO ENSAIO DE TRAÇÃO BIAxIAL POR INFLAÇÃO PARA
CARACTERIZAÇÃO DE PROPRIEDADES MECÂNICAS EM BORRACHAS

por

Leandro Conte da Silva

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler,..... PROMEC / UFRGS

Prof. Ms. Jordão Gheller Junior,..... SENAI-RS

Prof. Dra. Maria Madalena de Camargo Forte,..... PPGEM / UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 24 de Março de 2014

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, o professor Dr. Rogério José Marczak, pelo incentivo, ensinamentos, disponibilidade e compreensão;

Ao professor Dr. Jakson Vassoler, pelas dicas que auxiliaram na definição do caminho a seguir na determinação do desenvolvimento dos testes de laboratório e no código computacional;

Aos meus pais Gari Bertelli e Lúcia Luiza Conte e minha irmã Sheila Conte, de quem sempre tive incentivo para estudar muito, bem como para buscar o meu desenvolvimento não apenas profissional, mas como pessoa;

À minha esposa Ana Laura, pelo seu amor, paciência, auxílio e carinho durante todo o período do mestrado;

A instituição SENAI-RS por ter cedido cordialmente a base de fixação da amostra para a realização dos ensaios de laboratório;

RESUMO

A determinação das propriedades mecânicas em materiais hiperelásticos constitui uma atividade complexa, a qual requer a realização de ensaios mecânicos em laboratório, seleção de modelos matemáticos adequados a cada tipo de comportamento e ajuste de curva sobre os dados experimentais. O ensaio biaxial por inflação se caracteriza pela inflação de uma membrana fina após a aplicação de uma pressão uniforme agindo na direção normal a superfície e tem sido utilizado para obter a curva tensão *versus* deformação. O objetivo do presente trabalho é estudá-lo como um teste para a caracterização mecânicas de borrachas incompressíveis. É proposta uma metodologia e aspectos como a aplicabilidade da teoria de cascas finas, geometria esférica no topo da amostra, instabilidade e processo de deformação são investigados. Um código computacional foi desenvolvido para identificação de parâmetros da amostra deformada através de aquisição de imagem. A validação da metodologia foi realizada tanto através de análises numéricas por elementos finitos como através de ensaios experimentais realizados em laboratório. Um novo método analítico para a determinação da deformação no topo membrana inflada (ou bolha) foi proposto e testado.

Palavras-chave: hiperelasticidade; borracha; propriedades mecânicas; ensaio de tração biaxial por inflação; membrana; aquisição de dados por imagem; instabilidade.

ABSTRACT

The determination of mechanical properties of hyperelastic materials is a complex activity, which requires mechanical laboratory tests to obtain the stress-strain curve, selection of the appropriate mathematical model and curve fitting of the experimental data. The biaxial inflation test is characterized by the inflation of a thin membrane by applying uniform pressure acting on the normal direction of the surface. The purpose of this paper is to study it as a test for characterization of incompressible rubberlike materials. A methodology is proposed and aspects such as the applicability of the theory of thin shell, spherical geometry on top of the sample, instability and kinematic deformation process are investigated. A computer code was developed for identification of parameters of the deformed specimen by image acquisition. The validation of the methodology was carried out through both numerical analysis by finite elements and through experimental testing performed in laboratory. A new analytic method to determine the deformation of the apex of the inflated membrane (or bubble) is proposed and tested.

Keywords: hyperelasticity; rubberlike materials; mechanical properties; biaxial inflation test; image data acquisition; membrane, instability.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1.	APRESENTAÇÃO	1
1.2.	OBJETIVOS DO TRABALHO	3
1.3.	ESTRUTURA	4
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1.	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EM HIPERELASTICIDADE	19
2.2.	MODELOS HIPERELÁSTICOS	23
2.3.	ENSAIOS MECÂNICOS PARA BORRACHA	24
2.3.1.	ENSAIO DE TRAÇÃO UNIAXIAL	25
2.3.2.	ENSAIO DE COMPRESSÃO SIMPLES	26
2.3.3.	ENSAIO DE CISALHAMENTO PURO	26
2.3.4.	ENSAIO DE CISALHAMENTO SIMPLES	26
2.3.5.	ENSAIO DE COMPRESSÃO VOLUMÉTRICA	27
2.3.6.	ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL	27
2.4.	AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS	28
2.5.	IDENTIFICAÇÃO DE CONTORNOS EM IMAGENS	29
3	METODOLOGIA PARA ENSAIO BIAXIAL POR INFLAÇÃO	31
3.1.	DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES HIPERELÁSTICAS	36
3.2.	ANÁLISE NUMÉRICA DO ENSAIO BIAXIAL POR INFLAÇÃO	37
4	DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE ALGORITMO DE PROCESSAMENTO	41
4.1.	AVALIAÇÃO DO ALGORITMO E MÉTODO POR ANÁLISE NUMÉRICA	48
5	ENSAIOS EXPERIMENTAIS	55

5.1. ENSAIO DE TRAÇÃO UNIAXIAL.....	55
5.2. ENSAIO DE TRAÇÃO BIAIXIAL.....	60
5.3. CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA	69
6 MÉTODO TEÓRICO PARA DETERMINAÇÃO DO ALONGAMENTO	77
7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES	89
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
APÊNDICE A - CÓDIGO FONTE DO ALGORITMO DE PROCESSAMENTO.....	99
A.1. CÓDIGO FONTE DA ROTINA “ENSAIO BIAIXIAL.M”	99
A.2. ROTINA “LE IMAGEM ENCONTRA RAI0”	106
A.3. ROTINA “IDENTIFICA BASE DISPOSITIVO”.....	116
A.4. ARQUIVO DE PARÂMETROS	123
APÊNDICE B - RESULTADOS DE ANÁLISES NUMÉRICAS.....	124
APÊNDICE C - RESULTADOS DE ENSAIOS FÍSICOS.....	126
APÊNDICE D - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS DE MEDIÇÃO	134
ANEXO A - REVISÃO DE MECÂNICA DO CONTÍNUO NÃO-LINEAR.....	138
A.1 - DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO	138
A.2 - MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO	139
A.3 - MEDIDAS DE TENSÃO	141
ANEXO B - SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO POLINOMIAL CÚBICA	144
ANEXO C - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS	145

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – CLASSIFICAÇÃO PARA ALGUNS DOS MODELOS HIPERELÁSTICOS MAIS CONHECIDOS.....	6
FIGURA 2.2 – COMPARAÇÃO DOS MODELOS HIPERELÁSTICOS QUANTO À FAIXA DE APLICAÇÃO.	7
FIGURA 2.3 – AJUSTE MÚLTIPLO DE CURVAS EXPERIMENTAIS PARA MODELO OGDEN DE DOIS TERMOS.....	8
FIGURA 2.4 – PERDA DE RIGIDEZ DO ELASTÔMERO DE ACORDO COM O LIMITE DE ALONGAMENTO E O NÚMERO DE CICLOS.....	9
FIGURA 2.5 – EXEMPLOS DE BOLHAS MAL GERADAS DURANTE O PROCESSO DE INFLAÇÃO.	10
FIGURA 2.6 – PERFIS DE DEFORMAÇÃO PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA, ONDE OS MODELOS HIPERELÁSTICOS SÃO: (A) NEO-HOOKEANO, (B) <i>CHAIN</i> 3 E (C) <i>CHAIN</i> 8 DIREÇÕES PRINCIPAIS.....	14
FIGURA 2.7 – DISTRIBUIÇÃO DA ESPESSURA DA AMOSTRA DEFORMADA AO LONGO DO RAIO INICIAL (r_0) PARA OS CASOS DA FIGURA 2.6 ONDE (A), (B) E (C) AINDA SÃO OS MESMOS MODELOS HIPERELÁSTICOS.	14
FIGURA 2.8 – A) PERFIS DE DEFORMAÇÃO PARA OS DADOS EXPERIMENTAIS DE TRELOAR COMPARADOS COM A TEORIA PROPOSTA POR HART-SMITH E CRISP; B) PERFIS DE DEFORMAÇÃO PARA ENSAIO EXPERIMENTAL COMPARADOS COM A MESMA TEORIA.	15
FIGURA 2.9 – PROCESSO PARA DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DA LINHA APÓS DEFORMAÇÃO DA BOLHA CONFORME REUGE <i>ET AL.</i> , 2001.....	16
FIGURA 2.10 – COMPARAÇÃO DA ESTIMATIVA DA DEFORMAÇÃO PARA O MÉTODO TEÓRICO E PARA O SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE IMAGEM.....	18
FIGURA 2.11 – TRAÇÃO BIAXIAL DE UMA LÂMINA FINA.	21
FIGURA 2.12 – TRAÇÃO UNIAXIAL DE UMA LÂMINA FINAL	22
FIGURA 2.13 – DESENHO DA GEOMETRIA PARA CORPO DE PROVA (ASTM-D412 TIPO C).....	25
FIGURA 2.14 – A) DISPOSITIVO TRADICIONAL PARA ENSAIO BIAXIAL PARA ENSAIO EM AMOSTRAS PLANAS; B) DISPOSITIVO PARA ENSAIO BIAXIAL DE AMOSTRAS EM FORMA DE ROSETA.	27
FIGURA 2.15: CONECTIVIDADE PADRÃO RETANGULAR ONDE O PIXEL A É 4-CONECTADO OU 8-CONECTADO.....	30
FIGURA 3.1: VISTA EXPLODIDA ESQUEMÁTICA DO ARRANJO DOS PRINCIPAIS COMPONENTES DO DISPOSITIVO DE FIXAÇÃO DA AMOSTRA PROPOSTO.	32
FIGURA 3.2: ESQUEMA BÁSICO DE INFLAÇÃO DE UMA BOLHA.....	35
FIGURA 3.3: DIAGRAMA PRESSÃO-EXPANSÃO DE UM BALÃO.	38
FIGURA 4.1: SEQUÊNCIA DE FUNCIONAMENTO DO ALGORÍTIMO.....	41
FIGURA 4.2: A) IMAGEM COM RETAS VERTICAIS E HORIZONTAIS INTERPOLADAS SOBRE O CONTORNO DA BASE DO DISPOSITIVO DE MEDIÇÃO; B) CONTORNO ADQUIRIDO EM VERDE SOBRE IMAGEM CONVERTIDA EM PRETO E BRANCO.....	43
FIGURA 4.3: VARIÁVEIS E PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO PROCESSO DE INFLAÇÃO.....	45
FIGURA 4.4: ILUSTRAÇÃO DO CENTRO DO CÍRCULO EM RELAÇÃO A BASE DO DISPOSITIVO (HORIZONTAL E VERTICALMENTE) PARA DIFERENTES VALORES DE RAIOS.....	46
FIGURA 4.5: IMAGEM DE BOLHA GERADA DURANTE ENSAIO DE INFLAÇÃO E MARCAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE INTERPOLAÇÃO SOBRE A SUPERFÍCIE DE CONTORNO.....	47
FIGURA 4.6: IMAGENS DE CIRCUNFERÊNCIAS; A) RAIOS REAL 500 MM E RAIOS INTERPOLADO 510 MM; B) RAIOS REAL DE 100 MM E INTERPOLADO DE 102 MM; C) RAIOS REAL DE 130 MM E INTERPOLADO DE 133 MM.....	48
FIGURA 4.7: A) RAIOS APROXIMADO 46,5 MM E INTERPOLADO 48,6 MM; B) RAIOS APROXIMADO DE 25,5 MM E INTERPOLADO DE 26,5 MM; C) RAIOS APROXIMADO DE 65,5 MM E INTERPOLADO DE 66,4MM.....	48
FIGURA 4.8: ESQUEMA REPRESENTATIVO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO NA AMOSTRA	50
FIGURA 4.9: SOBREPOSIÇÃO DE DIVERSAS CONFIGURAÇÕES DA BOLHA AO LONGO DO PROCESSO DE INFLAÇÃO. ..	50
FIGURA 4.10: ESTÁGIO INICIAL DE INFLAÇÃO.	51
FIGURA 4.11: VARIAÇÃO DO RAIOS NO TOPO DA BOLHA AO INCREMENTAR A PRESSÃO INTERNA NA AMOSTRA.....	51
FIGURA 4.12: VARIAÇÃO DO RAIOS COM O ALONGAMENTO.	52

FIGURA 4.13: VARIAÇÃO DO CENTRO DA ESFERA PERFEITA E CENTRO DA ESFERA DA AMOSTRA ANALISADA AO VARIAR O ALONGAMENTO.	52
FIGURA 4.14: DIFERENÇA ENTRE O RAIOS OBTIDOS PELA EQUAÇÃO 4.7 E O RAIOS OBTIDOS PELA EQUAÇÃO 3.6 APLICADA PARA AS IMAGENS GERADAS POR ANÁLISE NUMÉRICA.....	53
FIGURA 5.1 – IMAGEM DA MÁQUINA DE ENSAIO DE TRAÇÃO SIMPLES REALIZANDO EXPERIMENTO.....	56
FIGURA 5.2 - FORÇA DE TRAÇÃO <i>VERSUS</i> DESLOCAMENTO PARA AMOSTRAS DE SBR	56
FIGURA 5.3 - TENSÃO DE TRAÇÃO <i>VERSUS</i> DEFORMAÇÃO PARA CORPOS DE PROVA DE SBR.....	57
FIGURA 5.4 – ENSAIOS DE TENSÃO <i>VERSUS</i> DEFORMAÇÃO APÓS PRÉ-CONDICIONAMENTO DAS AMOSTRAS.	58
FIGURA 5.5 – ENSAIO DE TRAÇÃO UNIAXIAL DA AMOSTRA DE SILICONE	59
FIGURA 5.6 – CURVA TENSÃO <i>VERSUS</i> DEFORMAÇÃO PARA AMOSTRAS DE SILICONE APÓS PRÉ-CONDICIONAMENTO.	59
FIGURA 5.7 – DISPOSITIVO DE ENSAIO DE TRAÇÃO BIAIXIAL POR INFLAÇÃO ENSAIANDO PROVA DE SBR.....	61
FIGURA 5.8 – SEQUÊNCIA DE PASSOS PARA EXECUÇÃO DO ENSAIO BIAIXIAL POR INFLAÇÃO	63
FIGURA 5.9 – TRÊS DIFERENTES POSICIONAMENTOS VERTICAIS DO SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE IMAGEM E INTERPOLAÇÃO DE RAIOS SOBRE A ESFERA COM SEUS RESPECTIVOS CALIBRADORES PADRÃO (A, B E C).....	64
FIGURA 5.10 – EXPANSÃO NÃO CONTROLADA PARA AMOSTRA DE SBR.....	65
FIGURA 5.11 – IMAGENS DA EXPANSÃO NÃO CONTROLADA DE AMOSTRA DE SILICONE EM DIVERSOS INSTANTES.	66
FIGURA 5.12 – ENSAIO DE TRAÇÃO BIAIXIAL POR INFLAÇÃO DE AMOSTRAS DE SBR (SEM PRÉ-CONDICIONAMENTO)	66
FIGURA 5.13 – ENSAIO DE TRAÇÃO BIAIXIAL AMOSTRAS DE SBR APÓS PRÉ-CONDICIONAMENTO.	67
FIGURA 5.14 – ENSAIO DE TRAÇÃO BIAIXIAL PARA SILICONE (SEM PRÉ-CONDICIONAMENTO).....	68
FIGURA 5.15 – ENSAIO DE TRAÇÃO BIAIXIAL AMOSTRAS DE SILICONE APÓS PRÉ-CONDICIONAMENTO.	68
FIGURA 5.16 – CURVAS ILUSTRATIVAS DE ENSAIO BIAIXIAL POR INFLAÇÃO.	69
FIGURA 5.17 – MELHOR AJUSTE OBTIDO PARA ENSAIO COM SBR SEM AMOLECIMENTO.	70
FIGURA 5.18 – AJUSTE DE CURVA MULTI-CRITÉRIO PARA AMOSTRA APÓS AMOLECIMENTO.	71
FIGURA 5.19 – AJUSTE DE CURVA UTILIZANDO APENAS OS DADOS DO ENSAIO BIAIXIAL.....	71
FIGURA 5.20 – AJUSTE DE CURVA UTILIZANDO APENAS OS DADOS DO ENSAIO UNIAXIAL.	72
FIGURA 5.21 – A) AJUSTE DE CURVA APENAS PARA ENSAIO UNIAXIAL E PREDIÇÃO PARA OS ENSAIOS BIAIXIAL E CISALHAMENTO PARA AMOSTRA DE SILICONE; B) AJUSTE APENAS PARA OS DADOS DO ENSAIO BIAIXIAL E PREDIÇÃO PARA OS DEMAIS DADOS.	73
FIGURA 5.22 – AJUSTE DE CURVA MULTI-CRITÉRIO PARA AMOSTRA DE SILICONE: A) SOBREPOSIÇÃO DAS PREDIÇÕES E DADOS EXPERIMENTAIS; B) COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO.....	73
FIGURA 5.23 – AJUSTE DE CURVA MULTI-CRITÉRIO COM PONTOS HIPOTÉTICOS ADICIONAIS: A) SOBREPOSIÇÃO DA CURVA AJUSTADA SOBRE OS DADOS EXPERIMENTAIS; B) COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO PARA A CURVA AJUSTADA.....	75
FIGURA 6.1: DESENHO E IMAGEM DO DISCO DE REFERÊNCIA PARA O CÁLCULO DO VOLUME INICIAL.....	77
FIGURA 6.2: DESENHO E IMAGEM DE CALOTA ESFÉRICA PARA O CÁLCULO DO VOLUME DEFORMADO.	77
FIGURA 6.3: ESQUEMA PARA CÁLCULO DO CENTRO DO CÍRCULO DE UMA ESFERA PERFEITA.....	79
FIGURA 6.4: DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE O ALONGAMENTO OBTIDO PELA ANÁLISE NUMÉRICA E O TEÓRICO A PARTIR DAS EQUAÇÕES 6.5 E 6.7.....	80
FIGURA 6.5: DIFERENÇA ENTRE A TENSÃO VERDADEIRA OBTIDA PELA ANÁLISE NUMÉRICA E A TENSÃO VERDADEIRA OBTIDA UTILIZANDO O ALGORITMO DE TRATAMENTO DOS DADOS.	81
FIGURA 6.6: A) VARIAÇÃO DO FATOR DE CORREÇÃO f_k AO VARIAR O CENTRO VERTICAL DA BOLHA; B) AO VARIAR O RAIOS E C) INTERPOLAÇÃO DE RETAS SOBRE CADA UMA DAS CURVAS.	82
FIGURA 6.7: DIFERENÇA ENTRE O ALONGAMENTO OBTIDO PELO CÁLCULO TEÓRICO ACRESCENTANDO-SE O FATOR DE CORREÇÃO (f_k) EM RELAÇÃO ÀQUELE OBTIDO PELA ANÁLISE NUMÉRICA.	84

FIGURA 6.8: DIFERENÇA ENTRE A TENSÃO VERDADEIRA OBTIDA PELA ANÁLISE NUMÉRICA E A TENSÃO VERDADEIRA OBTIDA UTILIZANDO O ALGORITMO DE INTERPOLAÇÃO COM FATOR DE CORREÇÃO ($f\kappa$).	84
FIGURA 6.9: VARIAÇÃO DO ALONGAMENTO (λ) COM A COORDENADA DO TOPO DA BOLHA (Y_{MAX}) E CURVAS DE INTERPOLAÇÃO DE POLINÔMIOS DE QUARTA ORDEM SOBRE OS PONTOS DA ANÁLISE NUMÉRICA.....	85
FIGURA 6.10: DIFERENÇA PERCENTUAL ENTRE O ALONGAMENTO TEÓRICO E O NUMÉRICO A PARTIR DO MÉTODO DA ALTURA DA BOLHA.	86
FIGURA 6.11: DIFERENÇA ENTRE O ALONGAMENTO OBTIDO PELA ANÁLISE NUMÉRICA EM RELAÇÃO ÀQUELES PELO MÉTODO DO VOLUME CONSTANTE, DA ALTURA DA BOLHA E O PROPOSTO POR REUGE <i>ET AL.</i> , 2001.	87
FIGURA 6.12 – COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO TEÓRICO DE CÁLCULO DO ALONGAMENTO E VALORES OBTIDOS POR ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL (SEM AMOLECIMENTO).	88
FIGURA D.1 - VARIAÇÃO DA DERIVADA DOS TERMOS DA EQUAÇÃO D.2 AO VARIAR A PRESSÃO PARA UM ENSAIO BIAXIAL TEÓRICO, ONDE A DIFERENÇA ENTRE OS GRÁFICOS A) E B) É A ESCALA DO EIXO VERTICAL, ENQUANTO EM.....	135
FIGURA D.2 - COMPORTAMENTO DO ALONGAMENTO AO AUMENTAR A PRESSÃO.....	136
FIGURA A.1– CONFIGURAÇÕES INICIAL E FINAL DO PROCESSO DE DEFORMAÇÃO	139
FIGURA A.2 – ESQUEMA DE SEÇÃO DE UM CORPO EM EQUILÍBRIO	142
FIGURA A.3 – ESQUEMA IDENTIFICANDO VETORES DE FORÇA SOBRE O CORPO NA CONFIGURAÇÃO INDEFORMADA (C0) E DEFORMADA RESPECTIVAMENTE (C).	142

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 - COMPARAÇÃO ENTRE ANÁLISE NUMÉRICA: A – ANÁLISE COM NÓ ENGASTADO E MÉTODO <i>ARC-LENGTH</i> HABILITADO; B – ANÁLISE COM NÓ DE FIXAÇÃO COM ROTAÇÃO LIVRE E MÉTODO <i>ARC-LENGTH</i> DESABILITADO.....	39
TABELA A.3.1 – RESULTADOS DAS ANÁLISES NUMÉRICAS REALIZADAS POR ANÁLISE NUMÉRICA SIMULANDO O ENSAIO BIAXIAL COM AMOSTRA DE ESPESSURA DE 2 MM.....	124
TABELA A.3.2 – RESULTADOS DAS ANÁLISES NUMÉRICAS REALIZADAS POR ANÁLISE NUMÉRICA SIMULANDO O ENSAIO BIAXIAL COM AMOSTRA DE ESPESSURA DE 1 MM.....	125
TABELA A.3.3 – RESULTADOS DAS ANÁLISES NUMÉRICAS REALIZADAS POR ANÁLISE NUMÉRICA SIMULANDO O ENSAIO BIAXIAL COM AMOSTRA DE ESPESSURA DE 0,5 MM.....	125
TABELA A.3.1 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 1 DE SBR ESPESSURA 1 MM SEM AMOLECIMENTO	126
TABELA A.3.2 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 2 DE SBR ESPESSURA 1 MM SEM AMOLECIMENTO	126
TABELA A.3.3 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 1 DE SBR ESPESSURA 2 MM SEM AMOLECIMENTO	127
TABELA A.3.4 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 2 DE SBR ESPESSURA 2 MM SEM AMOLECIMENTO	127
TABELA A.3.5 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 1 DE SBR ESPESSURA 1 MM COM AMOLECIMENTO (EFEITO MULINS).....	128
TABELA A.3.6 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 2 DE SBR ESPESSURA 1 MM COM AMOLECIMENTO (EFEITO MULINS).....	129
TABELA A.3.7 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 1 DE SBR ESPESSURA 2 MM COM AMOLECIMENTO (EFEITO MULINS).....	130
TABELA A.3.8 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 2 DE SBR ESPESSURA 2 MM COM AMOLECIMENTO (EFEITO MULINS).....	131
TABELA A.3.9 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 1 SILICONE ESPESSURA 0,5 MM SEM AMOLECIMENTO	132
TABELA A.3.10 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 2 SILICONE ESPESSURA 0,5 MM SEM AMOLECIMENTO	132
TABELA A.3.11 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 1 SILICONE ESPESSURA 0,5 MM COM AMOLECIMENTO (EFEITO MULINS).....	132
TABELA A.3.12 – RESULTADOS PARA O ENSAIO DE TRAÇÃO BIAXIAL POR INFLAÇÃO PARA AMOSTRA 2 SILICONE ESPESSURA 0,5 MM COM AMOLECIMENTO (EFEITO MULINS).....	133
TABELA D.1 - AVALIAÇÃO DA INCERTEZA DO ERRO AO VARIAR AS INCERTEZAS DE MEDIÇÃO DAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES, UMA DE CADA VEZ.	136

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ASTM	American Society for Testing and Materials / Sociedade Americana para Testes e Materiais
BS	British Standards / Normas Britânicas
DEMEC	Departamento de Engenharia Mecânica
LASER	Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation / Amplificação da Luz por Emissão Estimulada de Radiação
NBR	Denominação de norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT)
PPGEM	Programa de Pós Graduação em Engenharia de Materiais
PROMECC	Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
SAE	Society for Automotive Engineers / Sociedade para Engenheiros Automotivos
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres Romanos:

- a Funções escalares
- a_i Funções escalares
- b_i Funções escalares
- \mathbf{b} Vetor forças de corpo, [N]
- A Área, [m²]
- \mathbf{B} Tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda, [m]
- C Região fechada arbitrária no espaço euclidiano tridimensional na configuração instantânea
- C^0 Região fechada arbitrária no espaço euclidiano tridimensional na configuração inicial
- \mathbf{C} Tensor tensão de Cauchy [Pa]
- I_i Invariantes de deformação ($i = 1, 2$ ou 3)
- \mathbf{I} Matriz identidade
- C_i, C_{ii} Constantes hiperelástica dos modelos hiperelásticos Polinomial ou Mooney-Rivlin, [N/mm²]
- $d\mathbf{f}$ Vetor infinitesimal de força, [N]
- dA Área infinitesimal, [m²]
- \mathbf{E} Tensor de deformação de Green-Lagrange
- E_e Altura do topo da calota, superfície externa [m]
- E_i Altura do topo da calota, superfície interna [m]
- \mathbf{G} Tensor de deformação de Almansi

h	Espessura, [mm]
h_0	Espessura inicial, [mm]
L	Comprimento, [mm]
L_0	Comprimento inicial, [mm]
p	Pressão, [Pa]
p_0	Pressão hidrostática, [Pa]
P	Primeiro tensor tensão de Piola-Kirchoff, [Pa]
R	Raio, [m]
R_0	Raio inicial, [m]
R_e	Raio externo, [m]
R_i	Raio interno, [m]
R_ζ	Raio interpolado a partir de imagem obtida por análise numérica, [m]
S	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchoff, [Pa]
t	Componente de tensão uniaxial, [Pa]
t_{verd}	Componente de tensão verdadeira uniaxial, [Pa]
t_{eng}	Componente de tensão de engenharia uniaxial, [Pa]
t_ζ	Componente de tensão verdadeira uniaxial de tensão por análise numérica, [Pa]
t	Vetor tração, [N]
V	Volume, [m ³]
V_0	Volume inicial, [m ³]
u	Vetor deslocamento, [m]

x_{circ}	Distância entre os extremos de um quadrado sobre uma esfera deformada, [m]
x_0	Distância entre os extremos de um quadrado sobre a amostra indeformada, [m]
Y_{max}	Máxima distância vertical entre a base e o topo da bolha, [m]
W	Função densidade de energia de deformação, [Pa]

Caracteres Gregos:

α	Constante hiperelástica do modelo hiperelástico Ogden
β	Constante hiperelástica
μ	Constante hiperelástica
ρ	Constante hiperelástica
δ_{ij}	Delta de Kronecker
k_b	Constante de Boltzman
σ	Tensor tensão de Cauchy, [Pa]
σ_{ij}	Componentes do tensor tensão de Cauchy, [Pa]
\emptyset_{base}	Diâmetro de abertura por onde a bolha é inflada, [m]
λ	Alongamento, [adimensional]
λ_i	Alongamento nas direções principais, [adimensional]
λ_ζ	Alongamento obtido por análise numérica, [adimensional]
λ_L	Alongamento máximo que uma cadeia carbônica atinge, [adimensional]
τ	Tempo, [s]
Ψ^2	Coefficiente de correlação

1 Introdução

1.1. Apresentação

A origem da borracha remete à época dos primeiros colonizadores europeus, quando estes encontraram indígenas utilizando o látex desidratado de certas árvores para recobrir botas rudimentares e, com isso, torná-las impermeáveis. Nos séculos XVIII e XXI progressos no processo de fabricação, principalmente a descoberta da vulcanização em 1839, fizeram com que o material ficasse ainda mais elástico e tornasse, conseqüentemente, o seu uso prático. Borrachas sintéticas passaram a ser pesquisadas no mesmo período, porém, foi apenas com a chegada da primeira guerra mundial, no início do século XX, que passaram a ser produzidas em larga escala. A segunda guerra mundial foi, contudo, a grande responsável pelo investimento em compostos alternativos, aplicações inovadoras e novos processos produtivos de borracha [Ciullo e Hewitt, 1999].

Desde então, uma ampla gama de opções de materiais elastoméricos (designação que engloba as borrachas naturais e sintéticas) tem sido continuamente colocada à disposição dos projetistas. As aplicações têm aumentado na mesma proporção, pois esta matéria-prima tem propriedades únicas, como a capacidade de atingir grandes deformações elásticas sem dano permanente (variando de 5 a 700% de alongamento), impermeabilidade, dissipação de energia, etc.

Por outro lado, cada um destes compostos ainda apresenta um processo de deformação complexo, no qual a tensão não aumenta linearmente com a deformação (também conhecido como comportamento hiperelástico). Como uma das informações obrigatórias no projeto de qualquer componente é justamente o conhecimento deste comportamento, diversas pesquisas têm sido feitas para obter modelos matemáticos capazes de representar diferentes propriedades mecânicas, uma vez que a não linearidade torna tal atividade mais complexa do que para os casos de aplicações mais comuns, como materiais metálicos em regime de pequenas deformações. Hoss e Marczak, 2009, citam a existência de 33 modelos matemáticos básicos e distintos na literatura.

Infelizmente, ainda não é possível prever o comportamento do material apenas a partir da sua composição química e o projetista deve recorrer a métodos matemáticos e ensaios mecânicos para poder identificar o modelo constitutivo que mais se aproxime do seu material. Na prática, diferentes ensaios realizados em laboratório são usados para determinar

este comportamento, podendo-se citar: compressão uniaxial, compressão volumétrica, tração uniaxial, tração biaxial, cisalhamento simples e cisalhamento puro.

Sasso *et al.*, 2008 mencionam que deveria ser sempre utilizados pelo menos dois tipos de ensaios para uma boa caracterização de propriedades, porém autores como Selvadurai e Shi, 2012 utilizam apenas o ensaio uniaxial em seu trabalho. Muitos autores, entretanto, não mencionam se os dados de dois ou mais ensaios foram utilizados.

No caso específico do ensaio de tração biaxial, existem dois métodos mais difundidos, um no qual uma amostra plana é presa ao dispositivo de medição por uma série de grampos e esticada em duas direções ortogonais e outro, também conhecido como ensaio de inflação, no qual a amostra é presa ao longo de toda a sua borda e pressurizada em uma das faces transversais, permitindo que uma bolha, cujo ápice possua forma esférica, se forme na medida em que a pressão é aumentada. Através da identificação do perfil deformado e da hipótese de teoria de cascas finas (ou de membranas) pode-se obter a curva tensão *versus* deformação. No primeiro caso, o dispositivo utilizado normalmente apresenta um custo elevado, além de uma característica pouco desejada: o escorregamento da amostra dos grampos. Isto é menos verificado no ensaio de inflação, além de seu custo de aquisição ou fabricação ser inferior.

Cabe ressaltar que este tipo de ensaio pode ser utilizado não apenas em elastômeros, mas de forma muito similar também para tecidos biológicos como pele, tendões, musculatura entre outros. Isto porque a amostra também pode ser caracterizada como membrana e uma forma esférica na parte superior da bolha também é observada [Haile *et al.*, 2009, Selby e Shannon, 2009a e Slifka *et al.*, 2006].

Conforme Gonçalves *et al.*, 2009, os problemas membranares deste tipo têm recebido atenção nos últimos anos devido ao emprego em diversas áreas da engenharia, incluindo aplicações espaciais, atuadores, sensores, robótica, dispositivos de bioengenharia, estruturas de engenharia civil e assim por diante. Adicionalmente Gonçalves *et al.*, 2009, citam que membranas têm um papel fundamental na natureza e muitas pesquisas têm sido realizadas em áreas como polímeros com memória de forma geométrica e elastômeros com capacidades dielétricas, para as quais o uso prático pode ser aplicado em sensores, controle de vibração, bioengenharia e filmes finos para microdispositivos.

Esta dissertação aborda ensaios mecânicos biaxiais por inflação para determinação das propriedades mecânicas (constantes constitutivas) de materiais hiperelásticos, especialmente

elastômeros. São abordados os fenômenos que cercam o processo de formação da bolha e fatores que influenciam o ensaio e sua precisão.

Pode-se dizer que estudos aprofundados de hiperelasticidade em elastômeros iniciaram com Mooney por volta de 1940. Concomitantemente os ensaios mecânicos de materiais hiperelásticos também tiveram estudos aprofundados iniciando no mesmo período, pois os assuntos são interdependentes. Embora o ensaio de tração biaxial por inflação tenha sido primeiramente documentado por Treloar [Treloar, 1944], o método nunca teve uma norma para a sua realização criada, diferentemente do que aconteceu para os demais métodos, para os quais existem normas de organismos internacionais como ASTM, SAE, BS e outros. No trabalho desenvolvido por Reuge *et al.*, 2001, menciona-se, inclusive, que a validação completa do ensaio biaxial por inflação nunca foi totalmente documentada, muito embora tenha sido utilizada por alguns pesquisadores nas duas últimas décadas. Consequentemente, toda a vez em que se deseja iniciar o trabalho de caracterização de elastômero ou construir um novo dispositivo de medição usando esta técnica é necessário aprender como fazê-lo. Em casos extremos, nos quais algum fator importante não foi considerado, o resultado do ensaio poderá conter erros que tornarão incorreta a predição do comportamento do elastômero.

Além de não haver norma técnica referenciando ao ensaio biaxial por inflação, publicações recentes relacionadas à determinação de modelos de comportamentos hiperelásticos não indicam detalhadamente como os testes foram conduzidos, apenas informando características básicas como aquisição por imagem da forma da bolha e tratamento de dados via computador. Como descrito por Batra *et al.*, 2005, existe uma dificuldade em se reproduzir dados experimentais em borrachas, além de uma baixa confiabilidade da exatidão dos dados informados por diferentes autores. Dentre os poucos autores que se preocuparam em detalhar com alguma acuracidade o ensaio, pode-se citar Reuge *et al.*, 2001, Selvadurai e Shi, 2012, Galliot e Luchsinger, 2011.

1.2. Objetivos do Trabalho

O principal objetivo do trabalho é o de propor e verificar um método para realizar ensaios biaxiais por inflação. Para tanto, uma bancada de fixação da amostra, sistema de aquisição de imagens e instrumentos de medição são arrançados de forma a permitir a realização de ensaios de caracterização de alguns tipos de borracha. Além disso, para o processamento dos dados uma rotina computacional é desenvolvida, apresentada e validada.

Uma vez realizado o ensaio por inflação um ajuste de curva teórica sobre os dados experimentais é realizado para a obtenção das constantes constitutivas, as quais são confrontadas com aquelas oriundas unicamente da predição por um ensaio de tração simples. A finalidade é verificar se é possível, com um único tipo de ensaio, estimar a curva tensão *versus* deformação do outro método ou ainda, se o conjunto de constantes constitutivas tem que ser obtido apenas por ajuste de curva sobre os dados de dois ensaios simultaneamente. A reprodução do ensaio de inflação através de análise numérica por elementos finitos será utilizada para a validação final do conjunto de constantes constitutivas.

Utilizando a análise numérica pretende-se avaliar as hipóteses de que a teoria de membrana e da forma esférica no topo da bolha são representativas e suficientes para simplificação do problema.

Uma proposta de método para determinar a deformação no topo da bolha apenas a partir do perfil deformado e sem necessidade de preparação da amostra ou instrumentos que necessitem contato físico é outro objetivo almejado. Deseja-se também identificar fatores que podem afetar a obtenção da curva tensão *versus* deformação, bem como quais as características dos instrumentos de medição seriam indicadas.

Espera-se que os resultados apresentados por diferentes autores possam ser comparados a partir deste trabalho, sem ressalvas de como foram executados, além de fornecer subsídios para que uma norma seja criada preenchendo uma lacuna existente na literatura. Finalmente, conclusões a respeito da possibilidade de substituir ensaios de tração biaxial convencionais pelo ensaio de tração biaxial por inflação serão apresentadas.

Serão considerados apenas elastômeros incompressíveis e isotrópicos, o que, felizmente, representa uma boa parcela dos materiais disponíveis no mercado dentro de uma região de interesse [Marckzak *et al*, 2006].

1.3. Estrutura

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: introdução, revisão bibliográfica e dos conceitos básicos de modelos constitutivos em hiperelasticidade. Também são elencados alguns tópicos referentes à aquisição e tratamento de imagens e ajuste de curvas. O objetivo desta primeira parte é o de fornecer conteúdo para facilitar o entendimento dos fenômenos observados e mencionados nos capítulos seguintes.

Segue-se então o detalhamento de uma metodologia proposta para realização do ensaio biaxial por inflação, rotina computacional para tratamentos dos dados provenientes da aquisição de imagens (conversão em dados numéricos) e da medição da pressão de inflação, descrição geral do funcionamento do equipamento e do equacionamento matemático envolvido.

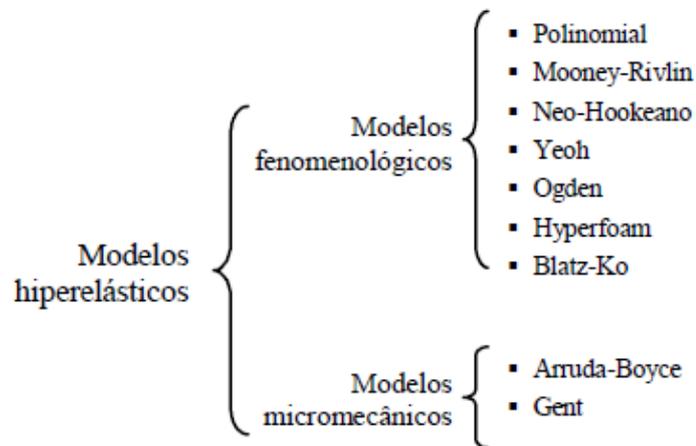
Posteriormente, os resultados de ensaios experimentais de tração simples e biaxial por inflação para dois compostos elastoméricos são apresentados e discutidos, bem como a especificação dos equipamentos para criação da bancada de teste. Estimativas de constantes constitutivas são realizadas e o resultado é inserido em uma análise por elementos finitos para comparação com a bolha formada durante o ensaio. Ainda, uma proposta de método analítico para o cálculo do alongamento é apresentada e testada.

Para finalizar o texto, serão retomados os principais resultados obtidos, considerações, conclusões e as possíveis contribuições desta dissertação para pesquisas futuras.

2 Revisão Bibliográfica

A modelagem de materiais elastoméricos requer a seleção do modelo constitutivo adequado. Existe um número razoável de modelos hiperelásticos disponíveis na literatura, mas de modo geral todos podem ser agrupados em duas categorias principais, sendo elas: modelos fenomenológicos e modelos micromecânicos [Hoss e Marczak, 2009]. A figura 2.1 agrupa alguns destes modelos.

Tradicionalmente, os modelos mais conhecidos são o de Mooney-Rivlin, que se baseia sobre o primeiro e o segundo invariantes de deformação, Yeoh (baseado apenas no primeiro invariante), Ogden (baseado nas deformações principais) e os modelos Neo-Hookeano, Blatz-Ko, Gent, e Arruda-Boyce que podem ser vistos como casos especiais dos modelos anteriores. Pode-se ressaltar ainda, o modelo polinomial, do qual o modelo de Mooney-Rivlin acaba por ser também um caso particular. Parte do trabalho apresentado por Hoss e Marczak, 2009 foi o de classificar e comparar estes e outros modelos quanto à capacidade de representar corretamente o comportamento para alguns materiais característicos como borracha natural e silicone.

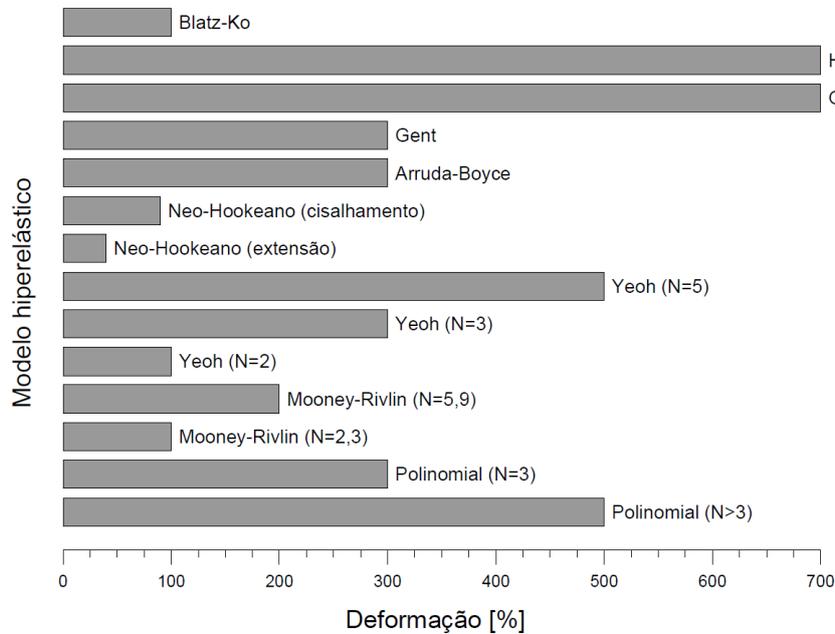


Fonte: adaptado de Marczak, 2006.

Figura 2.1 – Classificação para alguns dos modelos hiperelásticos mais conhecidos

Uma das conclusões obtidas por Hoss e Marczak, 2009 é que o mesmo modelo que se comporta bem para resultados de tração pode não se sair tão bem quando o problema for dominado por compressão. Já um modelo que represente fielmente o fenômeno real ao longo de toda a faixa de deformações de interesse pode ser complexo matematicamente, o que se

tornará caro em tempo computacional para simulações numéricas. A figura 2.2 resume a faixa ideal de aplicação de alguns modelos matemáticos, onde a barra indica a deformação máxima até a qual espera-se que o modelo consiga aderir aos dados de ensaios mecânicos.

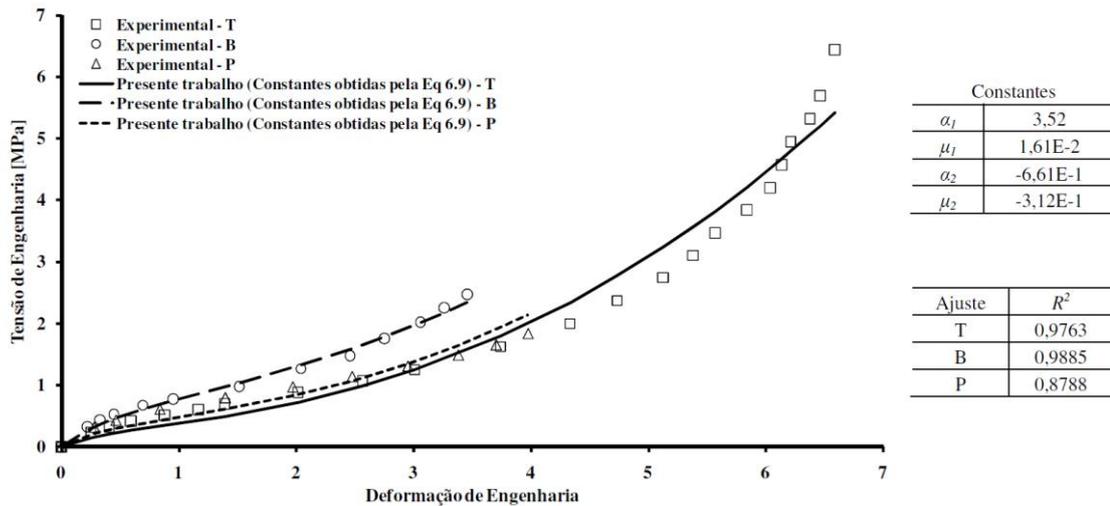


Fonte: adaptado de Marczak, 2006.

Figura 2.2 – Comparação dos modelos hiperelásticos quanto à faixa de aplicação.

O trabalho apresentado por Stumpf, 2009, apresenta uma metodologia que visa encontrar uma única combinação de constantes constitutivas que gerem um erro residual mínimo (usando algoritmo de otimização) para dados experimentais de diferentes ensaios simultaneamente. A título de ilustração, a Figura 2.3 ajuda a perceber que é complexo o trabalho de encontrar um modelo matemático que se adeque bem a diversos ensaios como tração simples (T), tração biaxial (B) e cisalhamento puro (B) e a diversas faixas de deformação simultaneamente. Ou seja, com uma única equação constitutiva, várias curvas tensão-deformação devem ser atendidas.

Sasso *et al.*, 2008 mencionam em seu trabalho que, com exceção da compressão, dados de dois ensaios físicos deveriam ser utilizados para caracterização do material, sendo comumente, mas não necessariamente, o de tração simples e de tração biaxial empregados.



Fonte: adaptada de Stumpf, 2009.

Figura 2.3 – Ajuste múltiplo de curvas experimentais para modelo Ogden de dois termos.

Adicionalmente, o comportamento complexo dos elastômeros ainda pode apresentar um fenômeno de perda de rigidez onde apenas após o primeiro ciclo de deformação a resposta de carregamento coincide com a resposta de descarregamento [Mulins, 1949], conhecido como efeito Mulins. Diani *et al.*, 2009, realizaram uma revisão da literatura deste tema, além de terem realizado ensaios tentando descrever melhor este fenômeno. Tentativas de explicação vão desde ruptura das cadeias de ligação na interface da borracha com as cargas, escorregamento molecular, ruptura dos aglomerados de cargas, desalinhamento das fibras até composições estruturais mais complexas.

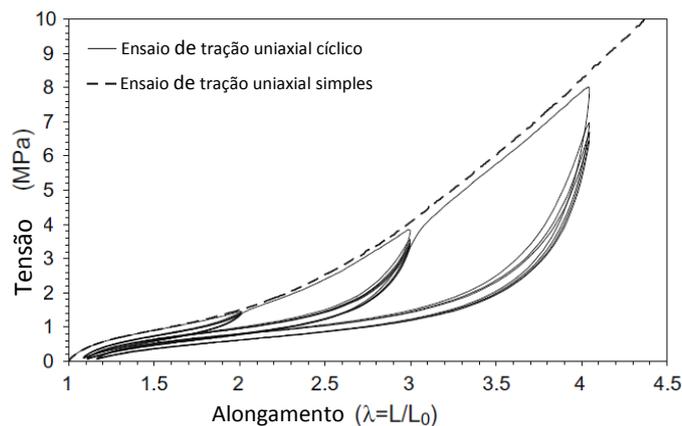
Ainda segundo Diani *et al.*, 2009, “as características básicas do efeito Mulins são:

- A maior parte da perda de rigidez (ou amolecimento), que é caracterizada por uma menor tensão para a mesma deformação aplicada, aparece depois do primeiro carregamento;
- Após alguns ciclos (5 a 10 são relatados na literatura dependendo da natureza do material), as respostas passam a coincidir para os ciclos seguintes, descartando-se o efeito da fadiga;
- O amolecimento acontece sempre para alongamentos menores ou iguais ao máximo já aplicado;
- Quando a extensão excede a máxima previamente aplicada, a resposta tensão-deformação do material retorna sobre o mesmo caminho que a tração uniaxial

monotônica após uma transição. Esta transição aumenta com o aumento da diferença entre o alongamento máximo anteriormente aplicado e o atual.

- A perda de rigidez aumenta progressivamente com o aumento do alongamento máximo.”

A Figura 2.4 ajuda a compreender o efeito das características anteriormente citadas sobre um ensaio de tração simples em uma amostra de borracha.



Fonte: adaptado de *Diani et al.*, 2009.

Figura 2.4 – Perda de rigidez do elastômero de acordo com o limite de alongamento e o número de ciclos.

No campo dos ensaios mecânicos para obter curvas tensão *versus* deformação, os ensaios por inflação são usados para obtenção da curva para tração biaxial. Marczak *et al.*, 2006, indicam que a forma mais tradicional de realização do ensaio de inflação consiste em utilizar uma amostra fina e circular do elastômero, que é fixada sob um flange de seção circular ou elíptica e inflada para produzir uma bolha. Se corretamente realizado, deformará uma pequena região no centro da amostra e através da medição do raio de curvatura no ápice da bolha e da pressão correspondente é possível calcular a tensão nessa região, considerando que a mesma se comporta como um segmento de esfera pressurizada.

Tentativas de correlacionar propriedades mecânicas e reológicas fundamentais a partir da forma de uma bolha são alvos de estudo desde Treloar [Treloar, 1944]. Bloksma, 1957, desenvolveu uma solução analítica que relaciona o estado tensão *versus* deformação com medições de pressão e volume. Já Reuge *et al.*, 2001, enunciam que é necessário mensurar a

geometria da bolha experimentalmente e não indiretamente, utilizando apenas a pressão e o volume de fluido como parâmetros de entrada.

Heuillet *et al.*, 2006, utilizaram ensaios biaxiais por inflação para determinar um critério de ruptura para elastômeros. Ao variarem a forma da abertura da bancada de circular para elíptica (com várias razões de aspecto), puderam observar a variação do comportamento com diferentes razões de estado de tensão biaxial. Uma limitação encontrada no trabalho foi a de que, para um estado próximo ao de cisalhamento puro, defeitos começam a surgir na amostra e tornam impossível a avaliação. Para os outros estados de tensão, a metodologia associada à inflação da membrana se mostrou fácil de trabalhar, muito embora os autores tenham se deparado com um problema tradicional no trabalho com borracha: imperfeições da amostra que levam a uma deformação desuniforme e um estado de tensão não plano. Tal situação normalmente leva a um ensaio cujos dados são descartados (vide Figura 2.5).



Fonte: adaptado de Heuillet *et al.*, 2006.

Figura 2.5 – Exemplos de bolhas mal geradas durante o processo de inflação.

Muito embora a presente dissertação esteja focada na análise de materiais cujo comportamento seja comum ao da borracha, é importante salientar trabalhos como os de Haile *et al.*, 2009, que utilizaram o ensaio de uma amostra de tecido biológico. Para aquisição da forma e dimensão da bolha, foram utilizadas duas câmeras ligeiramente afastadas, o que permitiu gerar uma superfície tridimensional (muito embora com grande ruído de imagem), enquanto a maioria dos trabalhos limita-se a um único dispositivo de aquisição de imagem.

Diferentemente do que é necessário para análise de polímeros, trabalhar com tecidos biológicos requer cuidado especial com a amostra [Wilchez, 2012], onde é exigido armazenamento à temperatura específica (congelamento a $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$), recobrimento por gaze, soro e papel alumínio; banho salino durante o teste e outros requisitos de acordo com as necessidades de cada tipo de material. No caso de Haile *et al.*, 2009, foi necessário adicionar uma membrana para servir de base para o tecido biológico, sendo a mesma fina o suficiente de forma que não interferisse na avaliação do material hiperelástico. Em outros estudos, como os realizados por Selby e Shannon, 2009a e 2009b, uma amostra de tecido epitelial foi submersa em uma solução líquida para que não deteriorasse, porém também apoiada a um substrato de elastômero (Etileno Propileno Dieno no caso) para que pudesse ser pressurizada por esta face. Ainda, segundo Haile, 2009, o ensaio biaxial por inflação reproduz o estado de tensões ao qual o tecido é submetido na prática, pois não há direção principal.

Slifka *et al.*, 2006 também utilizaram o ensaio de inflação para determinar as propriedades mecânicas de músculo cardíaco bovino, validando o ensaio inicialmente utilizando amostras de látex e politetrafluoroetileno expandido. Diferentemente do que para outros métodos empregados anteriormente, dada a natureza não isotrópica do músculo, foram utilizadas três câmeras fotográficas e uma base giratória para, assim, obter seis imagens praticamente simultâneas do perfil de deformação elipsoidal. Segundo estes autores, para o caso de materiais isotrópicos, apenas uma imagem e o ponto no topo da bolha seriam suficientes para determinar todos os parâmetros necessários para caracterizar as propriedades mecânicas. Todavia, citam que utilizaram um método matemático para interpolar uma spline para obter o perfil deformado.

Salienta-se ainda, que Slifka *et al.*, 2006 foram os únicos a relatar as incertezas de medição na tensão e no alongamento máximos ($\pm 4\%$), muito embora não tenham detalhado matematicamente como chegaram a este valor. Adicionalmente são uns dos poucos a mencionarem as pressões de trabalho (máxima de 69 KPa para amostras de 75 μm de espessura de látex).

Müller e Struchtrup, 2002, realizaram uma análise matemática do comportamento mecânico de um balão elastomérico na medida em que é inflado pelo pulmão de uma pessoa e identificaram uma relação não monotônica pressão-raio, ou seja, quando aumenta a pressão, não necessariamente o raio aumenta. O trabalho guarda alguma semelhança com aquele realizado por Bloksma, 1957.

Uma variação típica no tratamento dos dados para o ensaio de inflação consiste no método inverso, que parte da geometria da bolha completa, não apenas da sua parte superior e não tendo como requisito a forma esférica. Conforme Goh, 2011, “com o avanço das tecnologias computacionais, métodos inversos têm sido cada vez mais usados para identificar as propriedades dos materiais a partir de dados experimentais não padrão, onde o campo de deformações não é homogêneo e não há soluções analíticas. No método inverso, a relação tensão *versus* deformação é alterada em um processo iterativo até que a resposta mecânica prevista esteja próxima dos resultados experimentais”. Segundo o autor, o método não garante unicidade da solução, mesmo para os casos em que os resultados obtidos por elementos finitos estejam próximos daqueles experimentais, além de não ter conseguido sucesso para todos os dados coletados.

Em um trabalho anterior e similar, Rachik *et al.*, 2001, confrontaram o método direto com o método indireto, utilizando dados de ensaios biaxiais por inflação, e concluíram que a margem de erro de ambos os métodos é semelhante. Todavia, tal conclusão aparenta ser precipitada, uma vez que ora os resultados são melhores utilizando um método e ora utilizando o outro, sem que alguma razão seja apresentada. Entretanto, têm razão ao afirmar que o método inverso é uma boa ferramenta, já que não apresenta o limitante de um estado plano de tensões como no método direto e que pode ser melhorado ou calibrado para ensaios uniaxiais ou biaxiais.

Hallett, 1997, também utilizou métodos inversos para determinar propriedades mecânicas e estudar o processo de fadiga de alguns tipos de borracha a partir de ensaios de tração biaxiais. Todavia, ao invés de aquisição de imagem, o trabalho consistiu em avaliar o ápice da bolha como dado de entrada a partir de medição feita com um sensor de distância do tipo LASER. Conforme o autor, o ensaio por inflação apresenta benefícios quando da análise de fadiga, uma vez que o modo de falha que acontece em um estado biaxial de tensão é diferente daquele uniaxial e é mais próximo do que normalmente se encontra em aplicações práticas (triaxial).

Hallett, 1997 salienta ainda que se deve ter certo cuidado ao realizar ensaios com relação à temperatura do fluido de pressurização ou até mesmo a temperatura ambiente, pois os elastômeros têm suas propriedades mecânicas alteradas quando submetidos a altas temperaturas. Todavia, na grande maioria dos casos, as variações térmicas dos ambientes são

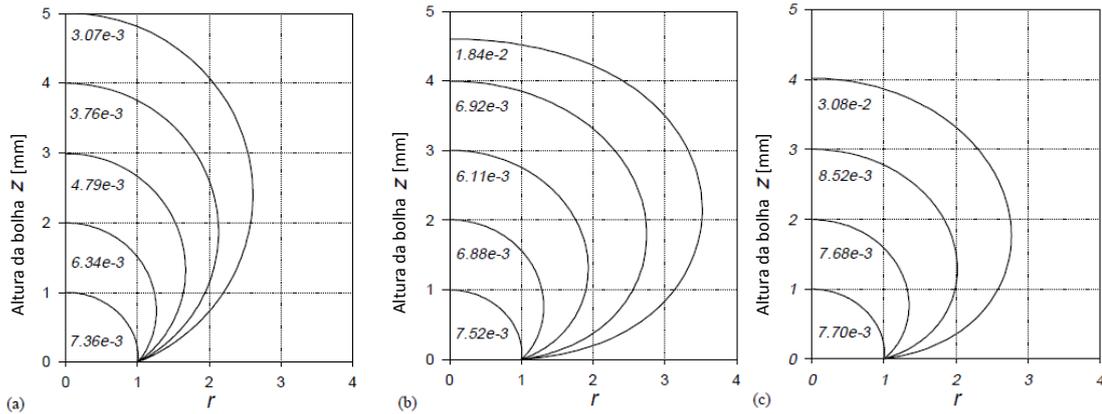
pequenas e a vazão é baixa (processo de deformação quase estático) sem aquecimento do fluido e consequente mudança de temperatura da amostra.

Hassager *et al.*, 1999, realizaram uma análise puramente numérica a partir de alguns modelos hiperelásticos com a finalidade de encontrar uma região de instabilidade na solução de simulação de ensaios biaxiais por inflação. Segundo os autores, a variação de espessura ao longo da amostra é um fator fundamental e em casos cuja variação é intensa, a instabilidade foi atingida com deformações muito inferiores àquelas cuja espessura era praticamente constante. Em todos os casos, entretanto, quando a espessura no topo da amostra era muito pequena frente à espessura inicial não se obtinha convergência e, conseqüentemente, solução.

É interessante comentar que, embora não fosse o objetivo do trabalho de Hassager *et al.*, 1999, os mesmos demonstraram numericamente que diferentes modelos hiperelásticos podem levar a processos cinemáticos diferentes, isto é, para uma mesma altura máxima no topo da amostra, diferentes perfis de deformação ao longo da amostra foram obtidos.

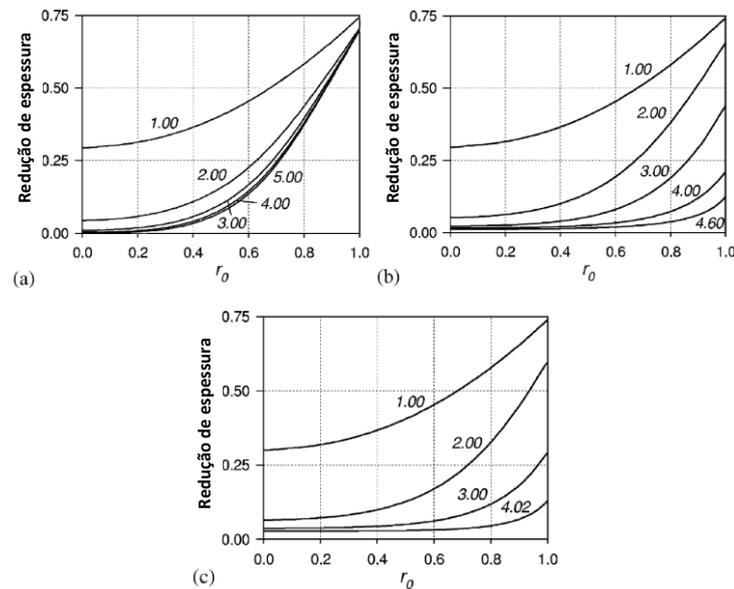
De forma similar, o estudo realizado por Verron e Marckmann, 2003, utilizou apenas análise numérica por elementos finitos simulando o ensaio biaxial por inflação em dois tipos de amostra de elastômeros de mesma espessura inicial, um que obedecesse (Neo-Hookeano) e outro que não obedecesse um modelo de ligação da rede polimérica com distribuição estatística Gaussiana (*p-chains* de 3 e 8 direções). A variação do perfil deformado, bem como a variação de espessura ao longo do perfil foram estudadas e verificou-se que os resultados podem ser bastante diferentes dependendo do modelo hiperelástico adotado. As Figuras 2.6 e 2.7 mostram alguns dos resultados obtidos por Verron e Marckmann, 2003, nos quais isto fica visível e ressaltam que a variação de espessura não homogênea e do perfil não esférico aparentam estar associados à variação de rigidez do modelo hiperelástico, especialmente no ponto de fixação da amostra junto à base de fixação (cabe lembrar que o estado de tensões é diferente daquele do topo da bolha).

Verron e Marckmann, 2003 indicaram, por fim, que apenas a verificação da altura do topo da bolha em relação a base de fixação não é um parâmetro único a ser monitorado (como relatado em trabalhos similares), mas que todo o perfil completamente deformado deve ser levado em consideração na caracterização mecânica de elastômeros. Não mencionam, todavia que apenas a medição do raio seria suficiente.



Fonte: adaptado de Verron e Marckmann, 2003.

Figura 2.6 – Perfis de deformação para simulação numérica, onde os modelos hiperelásticos são: (a) Neo-Hookeano, (b) *chain 3* e (c) *chain 8* direções principais.

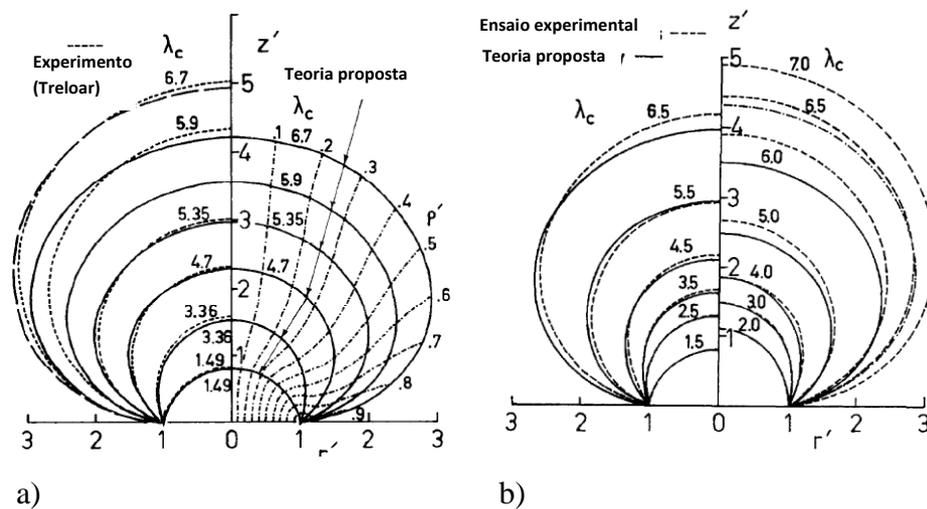


Fonte: adaptado de Verron e Marckmann, 2003.

Figura 2.7 – Distribuição da espessura da amostra deformada ao longo do raio inicial (r_0) para os casos da Figura 2.6 onde (a), (b) e (c) ainda são os mesmos modelos hiperelásticos.

Muito embora praticamente todas as citações anteriores façam uso ou menção do ensaio por inflação, Hart-Smith e Crisp, 1967, Reuge *et al.*, 2001, Sasso *et al.*, 2008, Galliot e Luchsinger, 2011 e Selvadurai e Shi, 2012, efetivamente se preocuparam em analisar mais profundamente as possíveis variáveis que afetam os resultados, tanto do ponto de vista físico quanto numérico.

Hart-Smith e Crisp, 1967, realizaram uma análise comparativa de processos cinemáticos e modelos hiperelásticos de diversos autores contemporâneos ao seu tempo para a inflação da bolha partindo de equacionamento analítico exato e em um dado momento aproximado numericamente (salienta-se que não utilizaram métodos de elementos finitos). Partiram dos dados obtidos do ensaio publicado por Treloar em 1944, e, posteriormente, realizaram um ensaio físico de inflação com material próprio (Figura 2.8). Os autores demonstraram boa correlação do método de solução para o primeiro caso, porém para o segundo foi encontrada alguma divergência, que passava a se tornar significativa a partir de um determinado valor de alongamento. Este trabalho buscava, também, validar o modelo hiperelástico proposto pelo próprio Hart-Smith através de ajuste de curvas.

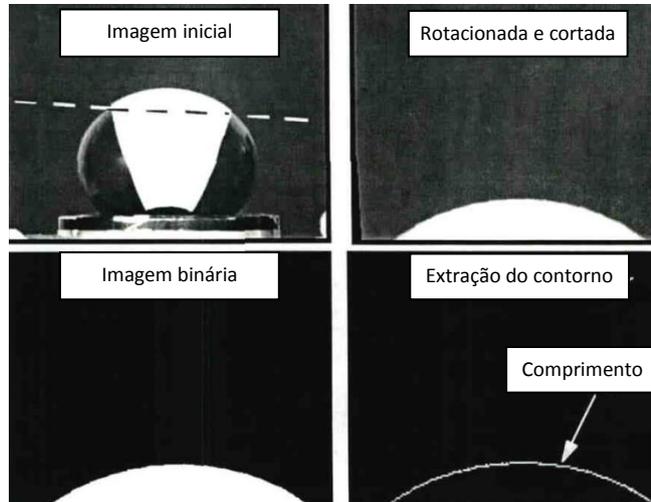


Fonte: adaptado de Hart-Smith *et al.*, 1967.

Figura 2.8 – a) Perfis de deformação para os dados experimentais de Treloar comparados com a teoria proposta por Hart-Smith e Crisp; b) Perfis de deformação para ensaio experimental comparados com a mesma teoria.

No trabalho de Reuge *et al.*, 2001, pode-se destacar a análise da variação de espessura no topo da bolha e o alongamento ao qual o material é submetido no mesmo ponto. A marcação de uma área quadrada de dimensões conhecidas próxima ao centro da bolha foi feita com pasta de silicone viscoso. Depois de deformada, a área se torna triangular, a partir da qual é utilizado tratamento de imagem para extrair o contorno apenas da área marcada e posterior cálculo do comprimento (Figura 2.9). O alongamento foi determinado dividindo-se o

comprimento inicial pelo comprimento final, enquanto o raio de curvatura foi determinado utilizando-se o método de mínimos quadrados para interpolação.



Fonte: adaptado de Reuge *et al.*, 2001.

Figura 2.9 – Processo para determinação do comprimento da linha após deformação da bolha conforme Reuge *et al.*, 2001.

Para a análise de variação da espessura, foram feitos dois experimentos: um ensaio biaxial sem nenhuma obstrução visual para captação da imagem e outro, sem aquisição de imagem, porém, com apalpadores magnéticos dispostos um de cada lado e que permitiram o contato constante com a amostra no topo da bolha e a mediação da espessura. Reuge *et al.*, 2001 utilizaram duas formulações matemáticas para tentar prever o comportamento cinemático da espessura, porém, sem sucesso:

- Utilizando a premissa de volume constante em toda a esfera:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{R^2}{R^2 + Y_{max}^2} \quad (2.1)$$

onde h é a espessura atual da amostra, h_0 a espessura inicial, R o raio e Y_{max} , a distância do ápice da bolha até a base de fixação da amostra.

- O volume é constante apenas no topo da esfera:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{R^2}{\left(\frac{R^2 + Y_{max}^2}{2Y_{max}}\right)^2 \arccos^2\left(1 - \frac{2Y_{max}^2}{R^2 + Y_{max}^2}\right)} \quad (2.2)$$

Em ambos os casos a premissa de que o material era incompressível foi considerada. Embora a segundo modelo tenha obtido melhores resultados, ainda assim o erro superou

100% para quase toda a faixa de alongamento, indicando que o método não deveria ser utilizado.

Reuge *et al.*, 2001 fazem, ainda, uma comparação de curvas tensão verdadeira *versus* deformação verdadeira obtidas entre o ensaio por inflação e o ensaio de tração simples para mostrar que para um mesmo alongamento o primeiro ensaio leva a tensões superiores.

Por fim, durante os experimentos Reuge *et al.*, 2001 verificaram que para amostras de borracha natural e borracha de butadieno estireno (também conhecida como SBR), a partir de uma determinada deformação a bolha sofre um processo de cristalização¹ no qual a pressão permanece constante e a bolha continua a expandir. Este processo (ou instabilidade) propaga a partir do topo da amostra, onde os maiores esforços e deformações estão presentes até a base.

Jerrams *et al.*, 2008, propuseram uma forma diferente e mais simples para calcular o alongamento partindo da identificação da deformação de um quadrado marcado sobre a amostra:

$$\lambda = \frac{(x_{circ}-x_0)}{x_0} + 1 \quad (2.3)$$

onde x_{circ} corresponde à distância entre os extremos do quadrado deformado horizontalmente enquanto que x_0 a mesma medida no estado indeformado. Neste caso, não é calculado o comprimento de arco a partir do contorno da imagem como no caso de Reuge *et al.*, 2001.

A metodologia de validação do ensaio biaxial empregada por Selvadurai e Shi, 2012, foi diferente daquela empregada por Reuge *et al.*, 2001, especialmente pelo fato de não tentarem estimar o raio no topo da bolha. Ao invés disto, determinaram as propriedades do material, a partir dos dados coletados em ensaio de tração simples (uniaxial), e compararam visualmente o resultado do ensaio mecânico biaxial por inflação com uma simulação por elementos finitos, na qual o mesmo carregamento (pressão hidrostática) foi utilizado a partir do ensaio mecânico.

Galliot e Luchsinger, 2011, realizaram três experimentos comparativos: ensaio de tração uniaxial, biaxial com amostra em cruz e biaxial por inflação. Para a validação do ensaio de inflação realizaram um mapeamento tridimensional com duas câmeras (assim como Sasso *et al.*, 2008), interpolando o raio da esfera, e utilizaram a teoria de vasos de pressão para estimar o raio apenas a partir da altura do topo da bolha em relação à base. Assim como para todos os outros trabalhos que realizaram o cálculo da tensão no ápice da bolha apresentaram, a fórmula para a tensão é assumida como:

¹ Segundo Ticona, 2000, o processo de cristalização é caracterizado pelo empacotamento organizado das cadeias carbônicas entre si mesmas, resultando em uma região de comportamento mecânico de cristais.

$$t = \frac{pR}{2h} \quad (2.4)$$

Para a qual t representa a tensão no ápice, p a pressão, R o raio e h a espessura da amostra.

Já o cálculo do raio estimado apenas a partir da altura da bolha pode ser feito pela relação:

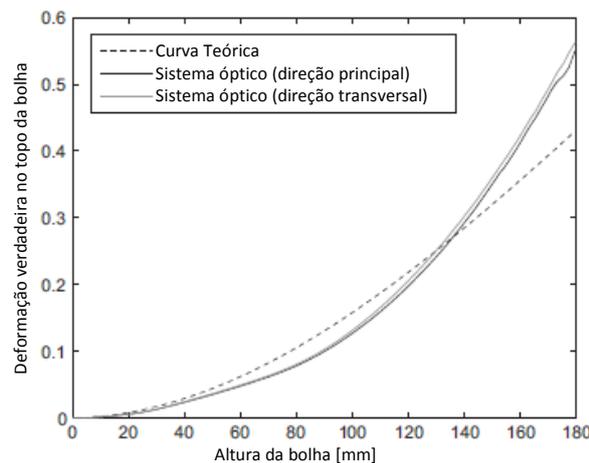
$$R = \frac{\left(\frac{\phi_{base}}{2}\right)^2 + Y_{max}^2}{2Y_{max}} \quad (2.5)$$

onde ϕ_{base} corresponde a abertura no flange de fixação da amostra do dispositivo de inflação. Utilizando a mesma teoria e a premissa de estado plano de tensão, obtém-se a estimativa da espessura da amostra no ponto analisado:

$$h = h_0 \left(1 + \frac{Y_{max}^2}{\left(\frac{\phi_{base}}{2}\right)^2} \right)^{-2} \quad (2.6)$$

onde h_0 é a espessura inicial da amostra.

Uma constatação do trabalho foi a de que estimar a deformação apenas pelo ápice é válido até certo limite de altura da bolha. Como visto na Figura 2.10, os resultados dos ensaios apresentaram diferença significativa durante a maior parte do ensaio para aqueles esperados pela metodologia.



Fonte: adaptado de Galliot e Luchsinger, 2011.

Figura 2.10 – Comparação da estimativa da deformação para o método teórico e para o sistema de aquisição de imagem.

De uma forma geral, todos os ensaios por inflação citados anteriormente tinham pequenas diferenças, seja pela utilização de câmeras duplas ou únicas para obtenção de coordenadas tridimensionais ou bidimensionais, seja pelo uso de água, nitrogênio ou ar como fluido, pela interpolação do raio ou simplesmente pela medição da distância do ápice até a base. Em todos os casos, os respectivos autores entenderam que as curvas tensão *versus* deformação oriundas do ensaio por inflação eram capazes de representar a realidade.

Dentre as possíveis formas alternativas de realização pode-se citar ainda uma abordagem um pouco diferente utilizada por Varenko e Treloar, 1973, que propuseram a realização do ensaio biaxial através de um longo tubo de borracha que é pressurizado internamente. Segundo os autores, o ensaio biaxial por inflação, partindo de uma amostra circular plana, teria uma limitação quanto ao alongamento máximo, que ficaria em torno de 350% vezes. Sendo assim, para materiais que tenham deformação até a ruptura de 750%, mais de 50% da propriedade mecânica não pode ser caracterizada.

2.1. Relações Constitutivas em Hiperelasticidade

Na análise estrutural, as relações constitutivas compreendem as equações que relacionam tensão com deformação. No presente texto, serão enfatizados os materiais elásticos não-lineares, em especial aqueles que podem ser classificados como hiperelásticos, os quais incluem tanto cinemática não-linear, quanto comportamento tensão *versus* deformação não-linear. Sua principal aplicação está na construção de modelos para borrachas, espumas e tecidos biológicos. Por definição, um material elástico segue duas regras (Atkin e Fox, 1980): a deformação é perfeitamente reversível, ou seja, para um corpo submetido a um ciclo de deformação fechado e a temperatura constante, o trabalho realizado pelo corpo é nulo; o estado de tensões em um ponto do corpo depende apenas de uma medida de deformação naquele ponto.

Generalizando uma equação constitutiva para elasticidade de Cauchy (anexo A.3) tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{B}) \quad (2.7)$$

onde f é uma função isotrópica do tensor deformação de Cauchy-Green (\mathbf{B}) à esquerda (anexo A.3). Pode-se demonstrar que o caso tridimensional mais geral é representado por uma função do tipo (Atkin e Fox, 1980):

$$\boldsymbol{\sigma} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{B}^2 \quad (2.8)$$

onde a_i são funções escalares dos invariantes de \mathbf{B} , cuja equação característica do tensor pode ser escrita como:

$$\mathbf{B}^3 - I_1 \mathbf{B}^2 + I_2 \mathbf{B} - I_3 \mathbf{I} = 0 \quad (2.9)$$

Que pode ser reescrita isolando o termo em \mathbf{B}^2 e então substituindo-o na equação 2.8, dando origem à equação para a tensão na forma mais geral para um material isotrópico elástico em grandes deformações:

$$\boldsymbol{\sigma} = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{B} + b_2 \mathbf{B}^{-1} \quad (2.10)$$

Levando-se em conta o aparecimento de uma pressão hidrostática indeterminada, a equação 2.10 pode ser particularizada para materiais incompressíveis (Atkin e Fox, 1980):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + b_1 \mathbf{B} + b_2 \mathbf{B}^{-1} \quad (2.11)$$

Embora não seja abordado, ainda assim, é possível considerar algum grau de compressibilidade em (2.11) desde que o módulo de compressibilidade seja comparável ao dos metais ou sólidos de ligação covalente. Assumindo-se que as funções b_i podem ser derivadas de uma função potencial W dos invariantes I_1 e I_2 do tensor \mathbf{B} (Atkin e Fox, 1980) tal que:

$$b_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad \text{e} \quad b_2 = -2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (2.12)$$

Substituindo-se na equação 2.11:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \quad (2.13)$$

A equação 2.13 é, portanto, uma relação constitutiva para um material sólido hiperelástico isotrópico. O problema agora passa a ser o estabelecimento de uma função W apropriada para cada material.

No caso de deformações homogêneas, típicas de ensaios mecânicos para caracterização de propriedades constitutivas, ou seja, necessárias para a caracterização da função W , tem-se:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Assim, os invariantes de \mathbf{B} podem ser calculados como sendo:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.15)$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} \quad (2.16)$$

Da condição de incompressibilidade (associada a I_3):

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad \therefore \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (2.17)$$

Para que a equação 2.13 respeite a equação de equilíbrio estática (Bonnet e Wood, 1997) dada por:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (2.18)$$

É necessário que a pressão instantânea (p) seja constante e igual à pressão inicial (p_0), ou seja:

$$p = \text{constante} = p_0 \quad (2.19)$$

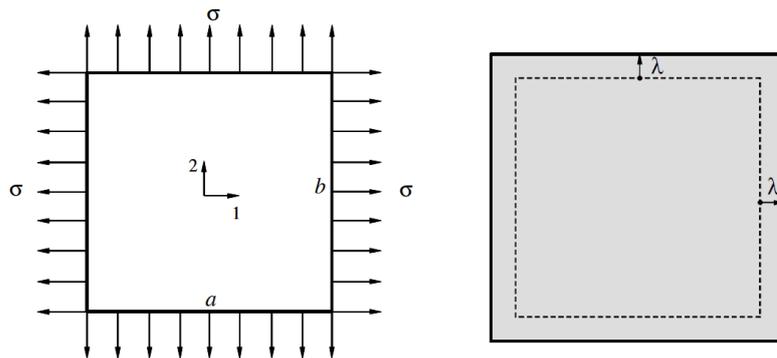
Expandindo a equação 2.13 e evidenciando apenas os termos de tensão não nulos do tensor de Cauchy, fica-se com:

$$\sigma_{11} = -p_0 + 2\lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{2}{\lambda_1^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (2.20)$$

$$\sigma_{22} = -p_0 + 2\lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{2}{\lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (2.21)$$

$$\sigma_{33} = -p_0 + \frac{2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (2.22)$$

É de interesse utilizar as soluções analíticas para os casos de tração simples e tração biaxial a partir das equações 2.20 a 2.22. Para o primeiro caso, como ilustrado na Figura 2.11, uma fina amostra de espessura inicial $2h_0$ é tracionada igualmente nas direções transversais 1 e 2.



Fonte: adaptado de Stumpf, 2009.

Figura 2.11 – Tração biaxial de uma lâmina fina.

Utilizando a equação 2.17 para remover do problema a dependência do alongamento λ_3 , o tensor de Cauchy-Green à esquerda pode ser simplificado:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Da mesma forma para os invariantes:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (2.24)$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \quad (2.25)$$

Como as superfícies superior e inferior (na direção normal ou 3) estão livre de tensões, σ_{33} é nulo, a equação 2.22 fornece:

$$p_0 = \frac{2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} - 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (2.26)$$

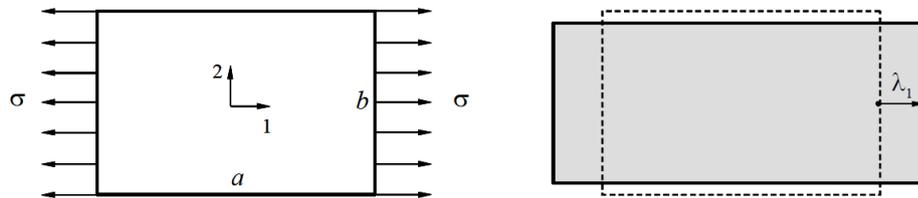
Substituindo o termo da pressão nas tensões não nulas:

$$\sigma_{11} = 2 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_2^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.27)$$

$$\sigma_{22} = 2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.28)$$

Já para o caso de tração simples (ou tração uniaxial) de uma lâmina fina, como visto na Figura 2.12, as tensões σ_{22} e σ_{33} são nulas. Os alongamentos são definidos como:

$$\lambda_1 = \lambda \quad \therefore \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (2.29)$$



Fonte: adaptado de Marczak *et al.*, 2006.

Figura 2.12 – Tração uniaxial de uma lâmina fina

Os invariantes podem ser calculados:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (2.30)$$

$$I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.31)$$

É possível, portanto, obter a pressão hidrostática:

$$p_0 = 2 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_1} - \lambda \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.32)$$

Consequentemente, a única tensão não nula vale:

$$\sigma_{11} = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.33)$$

Toda a formulação anteriormente citada refere-se a tensão de engenharia verdadeira (Cauchy) e alongamento, mas comumente os dados relatados para ensaios experimentais são tensão de engenharia *versus* deformação.

2.2. Modelos Hiperelásticos

Como citado no capítulo 2.1, existem diversos modelos matemáticos que tentam representar o comportamento dos materiais de comportamento hiperelástico. A seguir serão mostrados os equacionamentos, ou formas matemáticas, da função densidade de energia de deformação (W) de alguns dos principais modelos. Os mesmos estão disponíveis para análises numéricas no Ansys 14.0 e para interpolação no programa Hyperfit a ser descrito mais adiante e, portanto, são de interesse para o presente trabalho. As referências foram obtidas de Marczak *et al.*, 2006, e Ansys 14.0, porém particularizadas para os casos de incompressibilidade:

- Polinomial:

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.34)$$

- Mooney-Rivlin 2, 3 e 5 termos:

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (2.35)$$

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{11} (I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (2.36)$$

$$W = \sum_{i+j=1}^2 C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.37)$$

- Yeoh:

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i \quad (2.38)$$

- Neo-Hookeano:

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) \quad (2.39)$$

- Arruda-Boyce:

$$W = \mu \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{\lambda_L^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) \quad (2.40)$$

Para a versão mais conhecida onde $N=5$ tem-se:

$$C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{1}{20} \quad C_3 = \frac{11}{1050} \quad C_4 = \frac{19}{7050} \quad C_5 = \frac{11}{1050} \quad (2.41)$$

Pode-se salientar ainda que a constante λ_L (alongamento máximo que uma molécula permite) tem origem em análise micromecânica e que o módulo de cisalhamento (μ) é oriundo de uma equação química:

$$\mu = nk_B T \quad (2.42)$$

Para a qual n é uma função da densidade de cadeias elastoméricas, k_B é a constante de Boltzman e T é a temperatura.

- Gent:

$$W = -\frac{\mu}{2}(I_L - 3)\ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3}\right) \quad (2.43)$$

onde o módulo de cisalhamento é obtido pela equação 2.42, I_L é o valor limite (máximo possível) de I_1 e tipicamente vale 100; análogo de λ_L para Arruda-Boyce.

- Ogden:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (2.44)$$

2.3. Ensaios Mecânicos para Borracha

As curvas tensão *versus* deformação obtidas a partir dos ensaios descritos a seguir são usadas para estimar as constantes constitutivas dos modelos matemáticos. No desenvolvimento de um novo tipo de borracha, o critério para a escolha do modelo matemático não é preciso ou predefinido. O projetista necessita escolher um ou mais modelos matemáticos que se aproximariam dos seus dados experimentais, identificando aqueles que melhor aproximam as curvas teóricas com aquelas obtidas nos ensaios.

Conforme descrito por Marczak *et al.*, 2006, deseja-se realizar um ajuste de curva sobre os dados experimentais de um ensaio específico e que as constantes obtidas forneçam uma predição satisfatória para os demais modos de deformação, ou seja, não é necessário realizar todos os tipos de ensaios mecânicos. Todavia, para cada um dos ensaios realizados, uma combinação de diferentes constantes para um mesmo modelo matemático é obtida, Hoss e Marczak, 2009, e especialmente Stumpf, 2006, tentaram utilizar técnicas de otimização que encontram os valores das constantes ótimas simultaneamente para todos os ensaios com relativo sucesso.

Ainda conforme Marczak *et al.*, 2006, algumas informações gerais referentes a execução dos testes devem ser seguidas como: o período de tempo mínimo entre a vulcanização e os testes deve ser de 16 horas; e, as amostras a serem ensaiadas devem ser

protegidas da luz, desde o momento em que foram recebidas ou obtidas até o momento do ensaio. A temperatura de ensaio deve ser entre $23^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$, sendo que os corpos de prova devem ser pré-condicionados durante o mínimo de 3 horas neste ambiente antes do ensaio. Caso o material seja sensível à umidade, deve ser mantido em um ambiente com umidade relativa de $50 \pm 5\%$ por pelo menos 24 horas. Recomenda-se também que os resultados sejam expressos como a média de um mínimo de três ensaios.

2.3.1. Ensaio de tração uniaxial

Consiste em tracionar em uma única direção um corpo de prova, registrando a força (F) e o deslocamento (ΔL), porém, gerando uma curva tensão de engenharia (t_{eng}) versus deformação (e), onde A_0 corresponde à área da seção transversal do corpo indeformado, assim como L_0 corresponde ao comprimento indeformado.

$$t_{eng} = \frac{F}{A_0} \quad (2.45)$$

$$e = \frac{L-L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.46)$$

A norma ASTM-D412 define as condições de execução, bem como a forma do corpo de prova (exemplo na Figura 2.13). A velocidade de separação das garras deve ser de 500 ± 50 mm/s e a fixação deve ser simétrica para garantir a distribuição uniforme da carga na seção transversal. A espessura do corpo de prova é definida como a média de três medições na seção central nas extremidades do segmento mais estreito.

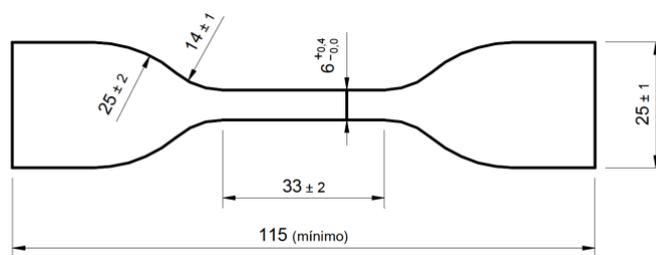


Figura 2.13 – Desenho da geometria para corpo de prova (ASTM-D412 tipo C)

Os equipamentos necessários normalmente são: um medidor de espessura, extensômetro para medida do alongamento dotado de sensor eletrônico de contato ou óptico e uma máquina de ensaio de tração.

2.3.2. Ensaio de compressão simples

Infelizmente, o ensaio de compressão não é alternativo ao ensaio de tração, uma vez que o comportamento dos elastômeros apresenta diferença significativa e a utilização de um para a predição do outro pode levar facilmente a dados não confiáveis.

O ensaio pode ser realizado de acordo com as normas ASTM D575 e BS 903. Os corpos de prova são preparados em forma de disco ou pequenos cilindros e a força compressiva é aplicada em faces circulares, que devem ter diâmetro de aproximadamente 28,8 mm e espessura de 12,5 mm.

Os equipamentos necessários são: uma máquina de ensaio de compressão capaz de atingir velocidade constante (5 mm/min), transdutor de deslocamento, relógio comparador para medir espessura e paquímetro para verificar o diâmetro externo do corpo de prova.

2.3.3. Ensaio de cisalhamento puro

Este ensaio não possui norma de referência e é muito similar ao ensaio de tração uniaxial, mas emprega um corpo de prova de dimensões muito distintas daquelas previstas pela norma ASTM D412. Recomenda-se que o corpo de prova seja simplesmente uma lâmina retangular de material, com largura mínima de dez vezes maior que a altura. O objetivo é produzir alongamento significativo na direção longitudinal, com o mínimo possível de deformações na direção lateral. Também é importante que a razão comprimento/altura seja suficientemente grande para evitar efeitos de borda significativos.

Aplicam-se os mesmos procedimentos do ensaio de tração, todavia, como a área resistente do corpo de prova é bem maior que o corpo de prova do ensaio de tração uniaxial, é esperada a ocorrência de cargas bem maiores. Os equipamentos necessários são os mesmos que para o ensaio de tração uniaxial.

2.3.4. Ensaio de cisalhamento simples

Existem algumas variações deste ensaio sendo a versão a seguir descrita indicada pela ISO 1827. Há alguma dificuldade na preparação da amostra, pois é necessário colar o corpo de prova em um suporte rígido (ou bloco) para a aplicação da força de cisalhamento. É muito comum a ocorrência de descolamento da amostra, particularmente em borrachas mais rígidas. O objetivo é produzir cisalhamento em um bloco do material pela aplicação de forças em

sentidos opostos (transversais ao corpo de prova), sendo habitual adotar uma configuração com dois ou quatro blocos para manter a simetria da deformação. Os equipamentos necessários são: uma máquina de ensaio capaz de atingir velocidade de deslocamento de 5 mm/min e um transdutor de deslocamentos.

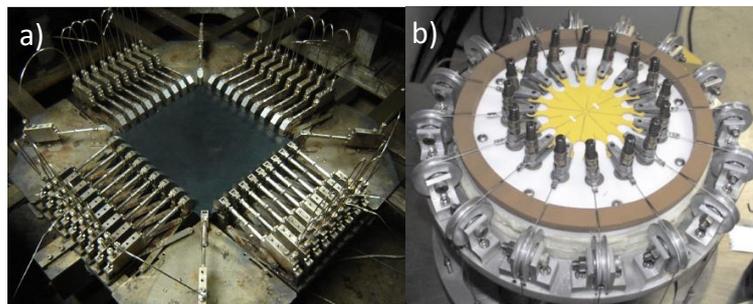
2.3.5. Ensaio de compressão volumétrica

O ensaio de compressão volumétrica visa determinar a compressibilidade do material, ou seja, do módulo de compressibilidade e, ainda ratificar a hipótese de compressibilidade, quando pertinente. Este ensaio não possui norma de referência.

O método mais simples para a determinação do módulo de compressibilidade consiste em, com o uso de um pistão, comprimir uma amostra de elastômero completamente confinado em um suporte metálico utilizando-se uma máquina de ensaios de tração/compressão uniaxial. Os corpos de prova são essencialmente os mesmos do ensaio de compressão simples, porém neste caso as paredes do dispositivo não permitem deformação na direção radial.

2.3.6. Ensaio de tração biaxial

A forma mais tradicional de realização deste ensaio consiste em prender uma amostra plana por uma série de grampos, como ilustrado na Figura 2.14a e 2.14b (nota-se a geometria complexa do corpo de prova). As equações 2.45 e 2.46 permanecem válidas para a criação da curva tensão *versus* deformação, devendo ser aplicadas nas relativas direções perpendiculares.



Fonte: adaptado de Marczak *et al.*, 2006.

Figura 2.14 – a) Dispositivo tradicional para ensaio biaxial para ensaio em amostras planas; b) Dispositivo para ensaio biaxial de amostras em forma de roseta.

Conforme mencionado por Marckzak *et al.*, 2006, este ensaio requer dispositivos complexos e caros, além de não poder ser realizado em máquinas de ensaios mecânicos convencionais para materiais como aço. O ensaio de tração biaxial por inflação tem se popularizado como alternativa aos ensaios de amostras planas e será abordado especificamente a partir do capítulo 3.

2.4. Ajuste de curvas pelo método de Mínimos Quadrados

Uma das formas mais utilizadas para interpolação de curvas sobre pontos oriundos de ensaios experimentais é o método de mínimos quadrados. Assumindo-se, inicialmente, para um sistema linear [Lay, 1999]:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (2.47)$$

onde a matriz \mathbf{A} e o vetor \mathbf{y} representam os pontos adquiridos no experimento enquanto o vetor \mathbf{x} solução é composto pelas constantes incógnitas.

Conforme Lay, 1999, quando existe um sistema que, a princípio, seja impossível, o melhor que pode ser feito é encontrar um vetor solução que faça com que o termo \mathbf{Ax} seja o mais próximo possível do vetor \mathbf{y} , cujo erro pode ser mensurado por $\|\mathbf{b}-\mathbf{Ax}\|$. Para um vetor solução aproximado $\hat{\mathbf{x}}$ que minimiza o erro, fica evidente que:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\| \quad (2.48)$$

Segundo Datta, 1995, a solução de mínimos quadrados é aquela que minimiza o erro $|r|$ quando aplicada a norma euclidiana sobre $\|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_2$, ou:

$$\|r(x)\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_2 \quad (2.49)$$

Ainda, se o problema apresenta mais de uma solução, aquela que apresentar o menor resíduo é dita de menor comprimento de solução ou de menor norma de solução. Tal solução deve, ainda, satisfazer o sistema conhecido como equações normais:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (2.50)$$

Dentre os métodos que podem ser utilizados para resolver o problema de mínimos se pode salientar: fatoração QR, método das equações normais, decomposição por valor singular, pseudo-inversa entre outros. Para este último, Lay, 1999, mostra que:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y} \quad (2.51)$$

O método pode ser utilizado contanto que as colunas de \mathbf{A} sejam linearmente independentes, garantindo que $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ possa ser invertido.

Talvez a forma mais comum de avaliar o ajuste da curva teórica àquela experimental obtida pelo método dos mínimos quadrados seja o coeficiente de regressão, também conhecido simplesmente por Ψ^2 , o qual, tem uma das suas possíveis formas para ajustes lineares dado por (Devore, 2007):

$$\Psi^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N_{pt}} (\hat{x}_i - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^{N_{pt}} (x_j - \bar{x})^2} \quad (2.52)$$

onde \bar{x} , \hat{x}_i e x_i correspondem à média dos valores do ensaio, o valor teórico para o instante i e o valor do ensaio avaliado no instante i , respectivamente. O coeficiente pode variar de 0 a 1, sendo que a unidade indica que o erro da teoria é nulo em relação aos dados experimentais.

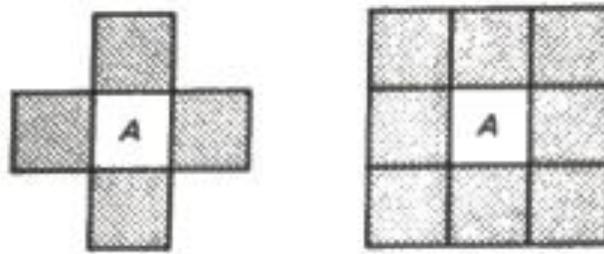
Para os casos em que o ajuste de curva deve ser feito para sistemas de equações algébricas não lineares, Marquardt, 1963, desenvolveu um algoritmo de otimização de mínimos quadrados não-lineares que ficou conhecido como Levenberg-Marquardt. O algoritmo compartilha com os métodos de gradientes a possibilidade de convergir mesmo quando os valores de estimativas iniciais estão fora da região de convergência e, por outro lado, compartilha a rápida convergência quando próximo do ponto ótimo, da mesma forma que os métodos baseados em séries de Taylor como Newton ou Gauss-Newton.

2.5. Identificação de Contornos em Imagens

O uso de sistemas de aquisição de imagem e identificação de características geométricas e medições por imagem é largamente utilizado nos ensaios biaxiais por inflação.

Para Nevatia, 1982, assume-se a existência de uma aresta em uma imagem quando um de seus atributos muda de valor de forma descontínua. Na prática, as imagens podem conter ruídos causados pelo sensor de aquisição de imagem, por variações de luminosidade, sombra, imperfeições ou textura superficiais do objeto entre outros fatores. O algoritmo de identificação ideal é aquele que consegue maximizar a identificação dos pontos que estão sobre a aresta e minimizar o impacto do ruído.

A identificação da aresta corresponde, todavia, ao primeiro estágio na identificação do contorno [Vernon, 1991]. Segundo Jain, 1989, os pontos definidos como pertencentes à fronteira podem ser caracterizados através de arestas conectadas, sendo que um pixel é quatro ou oito-conectado quando tiver as mesmas propriedades que qualquer um dos quatro ou oito pixel que o circundam (Figura 2.15).



Fonte: adaptado de Jain, 1989.

Figura 2.15: Conectividade padrão retangular onde o pixel A é 4-conectado ou 8-conectado

Ainda conforme Jain, 1989, pode-se citar ainda alguns métodos para a determinação do contorno: conexão de arestas, programação dinâmica, transformação de Hough e seguimento do contorno. Neste último, o algoritmo busca contornos ordenando pontos de arestas sucessivas cuja direção de busca é aquela onde as propriedades estão mudando. Uma das limitações é que o mesmo pixel pode ser contabilizado mais de uma vez, além de necessariamente ter de fechar o mapeamento, pois a busca não termina enquanto o pixel inicial não é encontrado novamente.

Por fim, Nevatia, 1982, pondera a respeito da qualidade final do contorno: “em imagens complexas, a resposta esperada para o processo de detecção da fronteira é difícil de especificar, pois arestas podem ocorrer facilmente em várias posições além das desejadas, devido a presença de textura superficial. A análise matemática para as mais simples imagens é difícil devido a não linearidade dos algoritmos de detecção. Resultados razoáveis podem ser obtidos em casos onde a localização da aresta é conhecida e o ruído segue o comportamento de uma distribuição Gaussiana. O processo de detecção está longe da perfeição se comparado à visão humana”.

3 Metodologia para Ensaio Biaxial por Inflação

A forma atual mais comumente empregada (Reuge *et al.*, 2001 e Marczak *et al.*, 2006) para a realização deste ensaio consiste em prender a amostra em uma base ou berço de secção tubular (normalmente metálica) que permita entrada de um fluido e que ao mesmo tempo evite queda de pressão entre a amostra e a base do dispositivo, ou seja, o conjunto base e amostra deve ser estanque. O fluido mais empregado é o ar e a alimentação provém de um compressor de ar, cujo monitoramento é feito por um manômetro e o controle por válvulas reguladoras de pressão e em alguns casos de vazão. A deformação é capturada por câmera fotográfica digital, um computador é utilizado para a interpretação dos valores numéricos e consequente criação das curvas pressão *versus* deformação e, principalmente, tensão *versus* deformação. O sistema proposto no presente trabalho é bastante similar ao descrito acima.

A Figura 3.1 ilustra o arranjo dos componentes que compõem o dispositivo de fixação da amostra conforme proposto para uso nos ensaios e, de uma forma geral, é bastante similar àqueles vistos na literatura. O fluido entra por canais existentes no disco de fixação inferior e infla a amostra por um furo existente na sua face superior. O disco superior pressiona a amostra para baixo, porém, permite a sua deformação no centro. Para a realização do ensaio o conjunto montado pode ser colocado sobre uma base plana qualquer como numa mesa, por exemplo.

Diferentemente dos ensaios de tração realizados em equipamentos tradicionais nos quais se aplica uma deformação à velocidade controlada sobre a amostra e monitora-se a força através de célula de carga, no ensaio por inflação controla-se indiretamente a força, através da pressão e monitora-se a deformação através de métodos ópticos. Sendo assim, a válvula reguladora de pressão deve ser capaz de permitir pequenos incrementos, garantindo também a sua estabilidade.

A princípio não haveria limitante para o diâmetro de abertura da base de fixação por onde a bolha é gerada. Na literatura mencionam-se valores relativamente pequenos, da ordem 20 mm [Slifka *et al.*, 2006], 50 mm [Hallett, 1997, Reuge *et al.*, 2001 e Rachik *et al.*, 2001], apenas Selvadurai e Shi, 2012 utilizaram um valor maior, da ordem de 150 mm. A vantagem de utilizar amostras menores reside no fato de que menos material é descartado durante o ensaio, bem como a probabilidade de encontrar uma imperfeição superficial é menor.

A característica fundamental que permite utilizar o ensaio de inflação para ensaios biaxiais reside no fato de que a parte superior da bolha tem o formato de uma esfera em cujo

topo existe um estado plano de tensões como aquele visto na Figura 2.11 e representado pelas equações 2.27 e 2.28. Cabe lembrar que a tensão na direção normal é nula (ao longo da espessura). É necessário, contudo, que o ensaio seja realizado em uma amostra que possa ser caracterizada pelo menos como casca ou membrana (uma dimensão suficientemente menor que as outras duas).

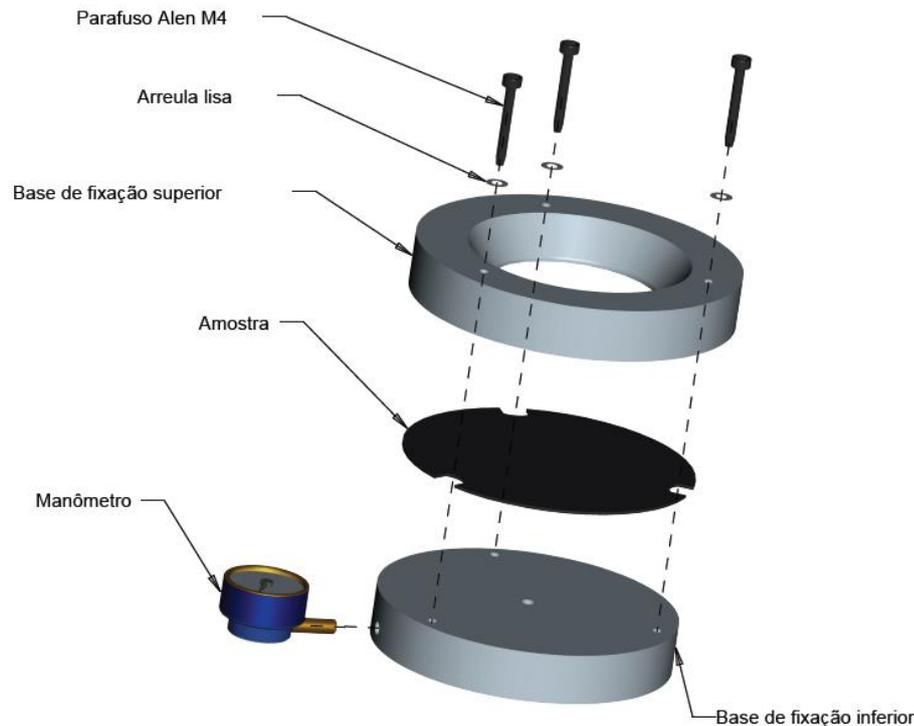


Figura 3.1: Vista explodida esquemática do arranjo dos principais componentes do dispositivo de fixação da amostra proposto.

De acordo com Kraus H., 1967, uma casca fina corresponde a um corpo restringido por duas superfícies curvas muito próximas, podendo ser considerada como a materialização de uma superfície curva, assim como uma viga e uma placa plana são a materialização de uma linha e superfície plana respectivamente. Normalmente, quando a casca é composta de um único material homogêneo, a superfície média (equidistante das superfícies de fronteira) é adotada como referência, enquanto a espessura é tida como a distância entre as superfícies de fronteira ao longo da normal no ponto de análise. O esforço associado à direção normal pode ser ignorado em função de sua magnitude pequena quando em comparação aos esforços nas outras duas direções.

Como regra empírica, Kraus H., 1967, cita que a teoria seja aplicada apenas nos casos em que a espessura é pelo menos 10 vezes menor do que o menor raio de curvatura da superfície de referência.

Todos estes requisitos correspondem àqueles originalmente estipulados na primeiras referências da teoria e citados por Love, [Love, 1944], que ainda incluía a simplificação de que as normais à superfície média permanecem normais e inextensíveis após a deformação. Já Reissner [Reissner, 1945] e Mindlin [Mindlin, 1951], apresentaram teorias que levavam em consideração as tensões normais transversais e as normais à superfície média deixavam de ser normais.

A teoria de membranas trata de um caso especial da teoria de cascas, na qual a resistência à flexão pode ser desconsiderada. Poderia ser interpretada como cascas que transmitem apenas forças na direção do plano tangente. Desta forma têm-se momentos (M) e esforços cortantes (Q) também são desconsiderados ao longo das direções 1-2 [Dym, 1974]:

$$M_{12} = M_{21} = Q_1 = Q_2 = 0 \quad (3.1)$$

É necessário, contudo, que a espessura seja tão fina que as tensões σ_{11} e σ_{22} possam ser assumidas como constantes ao longo da direção normal. Esforços de membrana (N_{ij}) são mensurados em unidade de força por unidade de comprimento (como N/m, por exemplo) e podem ser equacionados através da relação:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} d\xi = \sigma_{ij} \int_{-h/2}^{h/2} d\xi \quad (3.2)$$

onde ξ corresponde a direção normal a superfície.

Ainda, na teoria de membranas as tensões cisalhantes são iguais sempre, ou seja, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$. Assim, o tensor tensão é simétrico, o que é uma característica que facilita cálculos matriciais.

A teoria de cascas é mais ampla, onde os efeitos de membrana e flexão estão sempre acoplados. Existem algumas variações das teorias básicas, como a de Flugge [Kraus H., 1967], na qual assume que a casca pode ter a relação espessura por menor raio de curvatura inferior a dez vezes. Todos os modelos de casca guardam aproximações em relação ao modelo tridimensional da teoria de elasticidade geral, mas têm a vantagem de utilizar um menor número de grandezas e isto facilita a obtenção da solução dos problemas. Todavia, para Dym, 1974, a solução para problemas de casca, nos quais a resistência à flexão não pode ser ignorada, está longe de ser trivial, mesmo no caso de deformações axisimétricas de uma esfera.

Desta forma, é comum encontrar na literatura soluções para os problemas utilizando análises numéricas por elementos finitos. Souza, 2003, apresenta uma pesquisa bibliográfica da evolução histórica dos elementos de casca e menciona que os primeiros foram baseados na teoria de Love, porém, se mostraram limitados (aplicáveis apenas para casca fina com cisalhamento desprezível). Uma classe de elementos conhecida como elementos discretos de Kirchoff foi desenvolvida com o objetivo de reduzir o custo computacional, todavia, foi apenas com o uso de integração reduzida no cisalhamento transversal que aumentou a quantidade de aplicações de elementos de casca, explorando aspectos como não-linearidade geométrica e de material, travamento de cisalhamento e travamento de membrana.

A esfera corresponde a uma das superfícies que permite maiores simplificações aos problemas de cascas ou de membranas, uma vez que os raios de curvatura nas direções ortogonais são constantes e iguais, além de espessura constante. Como a pressão interna é igual em todos os pontos, novamente o problema pode ser simplificado, assumindo-se finalmente, que o problema seja axissimétrico igual tanto no carregamento quanto na geometria.

Como visto no capítulo 2, na medida em que se avaliam pontos cada vez mais próximos da aresta de fixação da amostra ao disco de fixação superior, verifica-se que a geometria oriunda do processo de deformação cada vez menos pode ser aproximada por uma esfera e o estado de tensões não pode ser assumido como plano, bem como a premissa de espessura constante é violada. Estas características podem, todavia, ser ignoradas localmente, pois não apresentam influência sobre o ponto de interesse no centro da amostra.

Para determinar a tensão na parte esférica do topo da bolha utiliza-se a teoria de membranas de revolução axisimétricas [Dym, 1974], onde se considera o eixo vertical (y) como eixo de revolução (Figura 3.2), sendo a membrana submetida a pressão interna p constante, com espessura h e raio R .

Nesta teoria, devido à espessura reduzida, o material não tem resistência à flexão, resistindo apenas à tração. No caso de uma esfera, são consideradas as tensões radiais e tangenciais, $t(\theta_1)$ e $t(\theta_2)$ respectivamente.

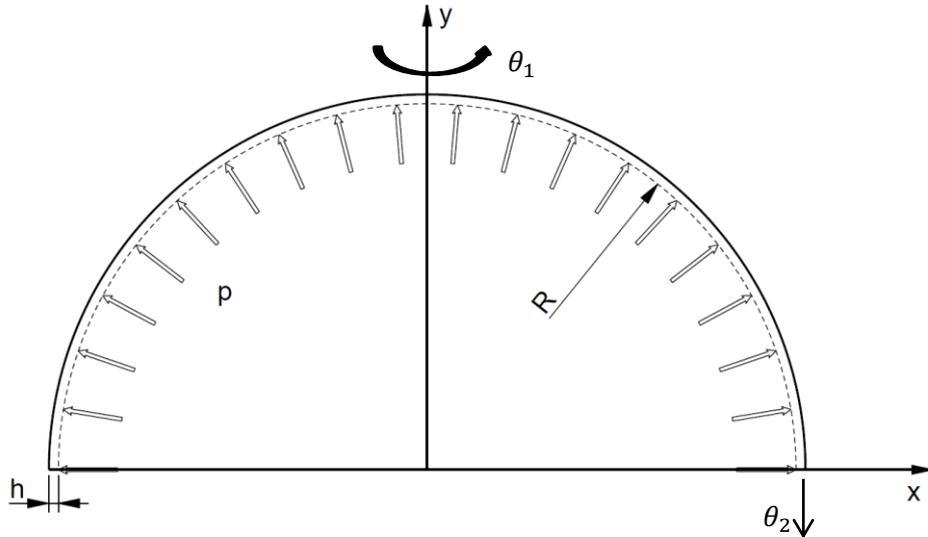


Figura 3.2: Esquema básico de inflação de uma bolha.

A força por unidade de comprimento aplicada sobre a superfície da membrana é dada por [Kraus, 1967]:

$$F(\theta) = \frac{-pR}{2} \quad (3.3)$$

Consequentemente o esforço de membrana para equilibrar esta pressão vale:

$$N(\theta_1) = N(\theta_2) = \frac{pR}{2} \quad (3.4)$$

Lembrando-se, que se está sob um estado plano de tensões, pois o esforço tangencial $N(\theta_1)$ é igual ao esforço radial $N(\theta_2)$. A passagem de esforço de membrana (normalmente dado por N/mm em ensaios biaxiais por inflação) para tensão de engenharia acontece dividindo-se a equação 3.4 pela espessura, o que leva a:

$$t_{eng} = \frac{pR}{2h_0} \quad (3.5)$$

É importante lembrar que a tensão acima é a tensão de engenharia e a passagem para a tensão verdadeira acontece pela divisão da espessura instantânea e não a espessura inicial. No caso de borrachas incompressíveis, aplicando-se a correlação existente entre o alongamento da direção tangencial ou radial com a direção normal (equação 2.17) e sabendo que h_0 é a espessura inicial da amostra chega-se a:

$$t_{verd} = \frac{pR}{2h_0} = \frac{pR\lambda^2}{2h_0} \quad (3.6)$$

Conforme Marckzak *et al.*, 2006, notadamente neste ensaio não se consegue atingir valores de deformação tão altos quanto nos ensaios de tração uniaxial ou cisalhamento puro.

Para determinar o alongamento, uma pequena linha marcada sobre a amostra ainda no estado indeformado (L_0) tem seu comprimento medido e é medida linearmente depois de deformada (L). Esta última medição, na verdade, corresponde à corda de um círculo e o comprimento real da linha deformada ao longo da superfície é calculado por [Spiegel, 1969]:

$$L = \phi R \quad (3.7)$$

onde ϕ corresponde ao ângulo de abertura formado a partir do centro do sistema de coordenadas do círculo até os dois extremos onde a corda encontra o círculo. A obtenção deste ângulo a partir da corda é dada por:

$$\phi = 2 \operatorname{asen} \left(\frac{L}{2R} \right) \quad (3.8)$$

Finalmente, obtém-se o alongamento, aplicando a equação A.14 (anexo A):

$$\lambda = \frac{L}{L_0} \quad (3.9)$$

E a deformação:

$$e = \lambda - 1 = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{2 \operatorname{asen} \left(\frac{L}{2R} \right) R - L_0}{L_0} \quad (3.10)$$

3.1. Determinação das Constantes Hiperelásticas

Uma vez realizado o ensaio biaxial, obtém-se três variáveis independentes que são o alongamento (λ), o raio da esfera interpolada (R) e a pressão (p). A partir das equações 2.27 e 2.28 para a tensão biaxial teórica, do modelo matemático escolhido ($T_{B\text{Teorico}}$) e 3.6 para o cálculo da tensão verdadeira experimental a (ou $T_{B\text{Experimental}}$), é possível montar o problema de mínimos quadrados:

$$\text{Erro}^2 = \sum_{i=1}^{N\text{Pts}} (T_{B\text{Experimental}} - T_{B\text{Teorico}})^2 \quad (3.11)$$

Ou ainda, substituindo os termos:

$$\text{Erro}^2 = \sum_{i=1}^{N\text{Pts}} \left[\frac{p_i R_i \lambda_i^2}{2h_0} - 2 \left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i^4} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_i^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \right]^2 \quad (3.12)$$

onde $N\text{Pts}$ é o número de pontos da curva tensão verdadeira *versus* alongamento adquiridos no ensaio.

Geralmente um código computacional que utiliza métodos de minimização não-lineares, como o de Levenberg-Marquardt é empregado para auxiliar no ajuste de curva. Como já mencionado no capítulo 1, apesar de existir um grande número de publicações com sugestões de modelos constitutivos, a maior parte desses modelos se adapta apenas a um grupo específico de materiais. Assim, é necessário testar diversos deles até selecionar um modelo adequado, tornando-se útil a comparação simultânea dos dados teóricos com os experimentais para todos os modelos. Tal funcionalidade está disponível no programa Hyperfit 2.12 [Hyperfit Manual do Usuário, 2011] e que foi empregado para os dados experimentais obtidos em laboratório no presente trabalho.

Alternativamente, programas comerciais de elementos finitos como Ansys 14.0 oferecem ao usuário a possibilidade de interpolar os dados experimentais para obter as constantes constitutivas, porém, a análise simultânea de todos os modelos matemáticos disponíveis em seu banco de dados não é possível de ser realizada.

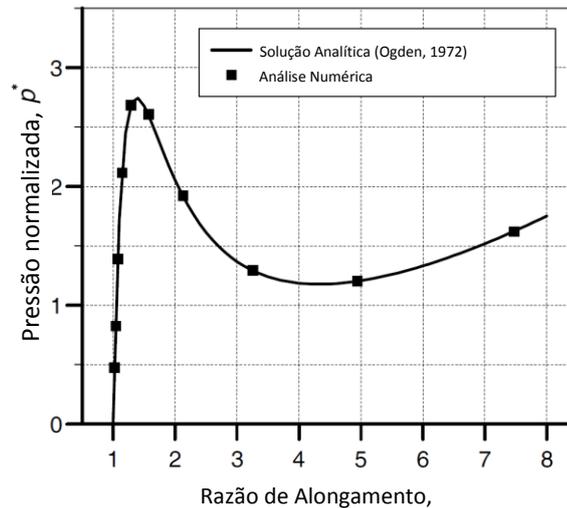
3.2. Análise Numérica do Ensaio Biaxial por Inflação

Nos casos em que se deseja proceder a verificação do ensaio biaxial por inflação através de análise numérica, tanto para o método direto quanto para o método indireto, Neto *et al.*, 2008, citam que a estabilidade do problema é conhecidamente dependente da função de energia de deformação e que uma instabilidade com a pressão pode ser detectada facilmente. De acordo com os autores, o método conhecido como *arc-length*, em conjunto com o algoritmo Newton-Raphson, possibilitam encontrar o equilíbrio neste ponto de instabilidade.

O ponto de instabilidade está associado a uma relação não-monotônica da pressão com o aumento do alongamento (Müller e Struchtrup, 2002), a qual pode ser visualizada na Figura 3.3, quando a partir de um alongamento próximo de 1,5 vezes existe uma queda de tensão. Tal situação não acontece na realidade, tratando-se de um problema numérico, também conhecido como *snap-through*.

Verron e Marckmann, 2003, mencionam que utilizaram um algoritmo de solução baseado na combinação dos métodos *arc-length* e Newton-Raphson no processo de simulação de um ensaio biaxial em borracha, uma vez que também verificaram que a curva pressão-deformação apresenta limites. Consequentemente, um método compensatório (*arc-length*) teve de ser utilizado para encontrar o equilíbrio, que consiste em adicionar equações de relação entre a carga e os incrementos de pressão ao sistema de equações do problema. Os

autores relataram que mesmo utilizando tal método, numericamente conseguiram obter convergência limitada, fortemente dependente do modelo hiperelástico selecionado para representar as propriedades mecânicas do polímero.



Fonte: adaptado de Neto *et al.*, 2008.

Figura 3.3: Diagrama pressão-expansão de um balão.

A análise pode ser realizada tanto com elementos sólidos (tridimensionais com 6 graus de liberdade) quanto com elementos de casca, também tridimensionais, mas com 5 graus de liberdade, ou ainda com elementos de casca axissimétricos (bidimensionais com 3 graus de liberdade). No exemplo “VM218” [Ansys 14.0 User’s Manual, 2012], uma comparação entre os resultados utilizando diversos elementos não sólidos é feita para a inflação de uma bolha similar ao ensaio biaxial. Para espessuras finas frente ao tamanho da amostra, os resultados apresentam erro de menos de 2% em relação a um valor de referência (de acordo com premissa básica para utilização de elementos de casca). Uma ressalva é necessária, pois, diferentemente do que acontece em um ensaio físico, o nó associado ao ponto onde a amostra é presa à base de fixação, não está engastado em todos os graus de liberdade, estando livre o grau de rotação sobre o eixo radial. Além disso, a método *arc-length* não foi habilitado para uso em conjunto com o Newton-Raphson.

Os resultados apresentados por Neto *et al.*, 2008 para o processo de inflação da bolha, utilizando elementos de membrana e utilizando elementos sólidos (tridimensionais) foram muito similares, levando a conclusão que ambos poderiam ser utilizados sem restrições.

Utilizando-se o modelo matemático Mooney-Rivlin de 2 termos, o mesmo usado por Selvadurai e Shi, 2012, em seu trabalho cujas constantes são $C_1 = 1,56$ e $C_2 = 2,21 \text{ kgf/cm}^2$, foi feita uma análise para verificar a importância da restrição de rotação do nó relativo ao ponto de fixação da amostra na base. A geometria e demais detalhes da análise podem ser verificados adiante, no capítulo 4.3.

A tabela 3.1 apresenta os resultados comparativos com nó engastado e método de solução por *arc-length* (A) e uma análise equivalente àquela apresentada no exemplo “VM218” mencionado anteriormente (B). Espera-se que o caso A, por ser mais próximo da realidade apresente o resultado mais acurado (a restrição de todos os graus de liberdade). A comparação foi conduzida até encontrar dificuldade em obter a convergência no caso A, enquanto para o caso B, obteve-se convergência para alongamentos próximos de 2,5 vezes, porém sem necessidade de apresentar na tabela.

Tabela 3.1 - Comparação entre análise numérica: A – análise com nó engastado e método *arc-length* habilitado; B – análise com nó de fixação com rotação livre e método *arc-length* desabilitado.

pressão [MPa]	Deslocamento vertical do topo da bolha		Alongamento (λ)		Tensão [MPa]		Raio [mm]		Diferença no raio [%]
	A	B	A	B	A	B	A	B	
0,0025	11,89	11,81	1,04	1,04	0,18	0,18	110,56	108,28	2,1%
0,005	15,44	15,34	1,07	1,07	0,29	0,29	89,05	87,50	1,7%
0,01	20,52	20,44	1,11	1,11	0,50	0,49	72,05	71,06	1,4%
0,015	24,67	24,79	1,16	1,16	0,71	0,71	64,03	63,58	0,7%
0,02	28,57	28,68	1,21	1,21	0,95	0,94	59,27	58,93	0,6%
0,025	32,36	32,43	1,27	1,27	1,22	1,21	56,17	55,92	0,4%

Percebe-se que a diferença para o alongamento, o deslocamento vertical e a tensão no topo não são significativas para toda a faixa de pressão. Todavia, o mesmo não pode ser dito para a análise do raio, onde para as pressões mais baixas apresenta uma diferença crescente.

Muito embora os diversos autores que trabalharam com a validação do ensaio biaxial por inflação utilizaram análises numéricas como referência para validação dos ensaios e das propriedades mecânicas, nenhum detalhou profundamente as dificuldades em obter convergência ou a utilização de métodos como o *arc-length*. Conforme Neto *et al.*, 2008,

além do problema associado ao *snap-through*, dependendo da combinação de constantes constitutivas da função de energia de deformação, a análise numérica pode se tornar instável.

Nota-se que, apesar de a geometria inicial seja muito simples, composta de um disco engastado nas suas extremidades, cujo carregamento é igualmente simples (apenas pressão constante na direção perpendicular à superfície), o processo cinemático e restrições na função energia de deformação tornam a obtenção da solução relativamente complexa.

4 Desenvolvimento e Implementação de Algoritmo de Processamento

O objetivo principal do programa que foi desenvolvido para a realização dos ensaios do presente trabalho é a determinação do raio no topo da bolha para o cálculo da tensão e consequente determinação da curva tensão *versus* deformação, a qual é necessária para determinação das constantes matemáticas do modelo matemático a ser escolhido. A linguagem de programação escolhida foi Matlab 2010b, a qual apresenta algumas funções que facilitam o processo de aquisição e tratamento de imagem, que serão comentadas a seguir.

A rotina principal “Biaxial.m” faz a leitura dos parâmetros geométricos da amostra e da bancada através do arquivo texto “parametros.txt”, das pressões de inflação da bolha correspondente a cada imagem (ordem cronológica) informadas no arquivo “pressoes.txt”, do tempo de cada aquisição (em segundos) constantes no arquivo “tempo.txt” e para chamar as sub-rotinas “Le_imagem_encontra_raio.m” e “Identifica_Base.m”. Além disso, faz o pós-processamento para o cálculo da tensão, deformação, criação das tabelas e gráficos de tensão *versus* deslocamento e tensão *versus* tempo. A Figura 4.1 ilustra as etapas principais do algoritmo para análise dos dados obtidos durante o ensaio. As imagens devem ter nomes cuja ordem deve corresponder a mesma sequência na qual os dados de pressão são fornecidos.

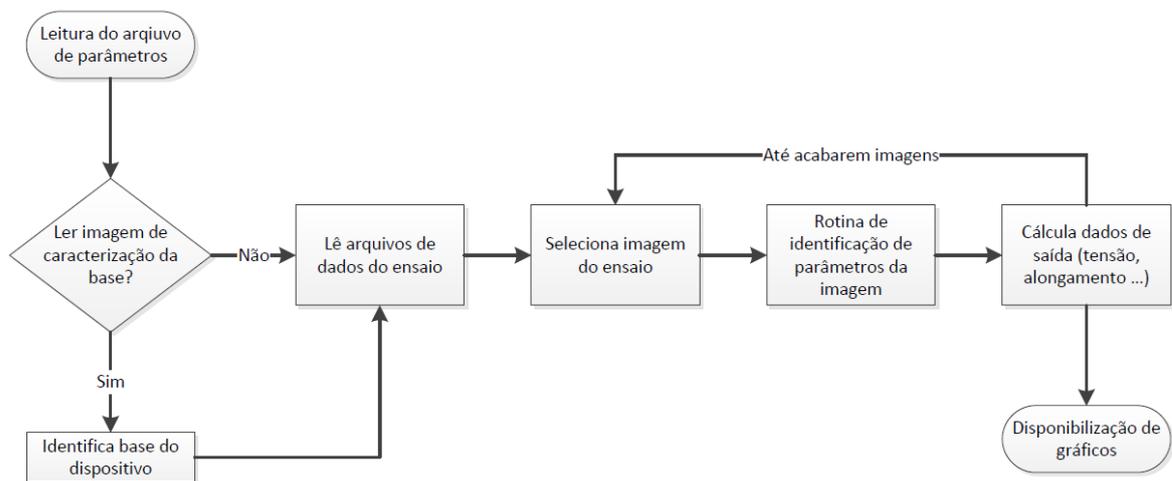


Figura 4.1: Sequência de funcionamento do algoritmo

Em ambas as sub-rotinas, as funções “*boundary*” e “*bw*” [Matlab 2010 b User’s Manual, 2010] são utilizadas, sendo que a primeira função serve para identificar o contorno de uma imagem onde cada pixel possui propriedades de cor 0 ou 1, enquanto a segunda

converte a imagem em cores para preto e branco, ou seja, transforma a propriedade cor para apenas 0 (preto) ou 1 (branco) conforme requisito da função “*boundary*”. Se a imagem original tiver um fundo mais claro que a base do dispositivo e a amostra, a função irá determinar o fundo como 1 e a amostra em 0. Isto fará com que a função “*boundary*” não seja capaz de identificar o contorno, sendo necessário neste caso proceder a uma inversão da escala de cor imediatamente após a passagem para preto e branco. A informação das tonalidades de fundo, amostra e base devem ser fornecidas no arquivo de parâmetros (como lógica de programação 0 indica que não deve ser feita a inversão e 1 indica sim).

A função “*fit*” também é utilizada em ambas as rotinas e serve para interpolação de uma equação sobre pontos definidos pelo usuário através de um vetor de coordenadas vertical e horizontal, além de valores estimados iniciais para as constantes que se deseja obter [Matlab 2010 b User’s Manual, 2010]. Dentre outros parâmetros opcionais, pode-se informar as restrições de valores máximos e mínimos para as constantes.

Quando for escolhido a rotina de caracterização da base, é importante salientar que a primeira imagem (em ordem alfabética) deve ser a da base do dispositivo. Deve estar na mesma posição em que as imagens da bolha serão adquiridas. Isto porque a rotina “*Identifica_Base*” determina pontos fixos de referência para identificar onde está o contorno da amostra em relação ao fundo e ao próprio dispositivo de fixação.

Ao ler a imagem, o algoritmo fixa a origem do sistema de coordenadas da imagem (identificada por linha e coluna) no canto superior esquerdo, tendo orientação crescente de cima para baixo e da esquerda para a direita. Quando da plotagem de gráficos e pontos sobre a imagem, é necessário ter em mente que o eixo vertical do sistema de coordenadas da imagem estará invertido em relação ao que normalmente é visto em gráficos (crescente de baixo para cima).

Para a identificação do contorno, utiliza-se a interpolação de quatro equações lineares:

$$y = mx + n \quad (4.1)$$

onde m e n são constantes que determinam a inclinação da reta e o deslocamento da curva em relação ao sistema de coordenadas, respectivamente.

O programa inicialmente identifica quatro pontos localizados nos extremos do contorno (lado esquerdo, lado direito, aresta superior e aresta inferior) e utiliza-os para montar quatro vetores que correspondam às coordenadas x e y do contorno da imagem para cada uma das arestas (para determinação das retas verticais as coordenadas dos pontos são apenas

invertidas de ordem para y e x). Assume-se que a imagem gerada a partir da base do dispositivo irá corresponder sempre a um retângulo ou a um quadrado.

A função “*fit*” é, então, utilizada para encontrar o valor da constante n , forçando-se o primeiro termo da equação a ter valor nulo. Por uma questão de simplicidade, assume-se que as retas serão apenas verticais ou horizontais como vista na Figura 4.2, que ilustra a interpolação das retas sobre a imagem original. Fica evidente que a base deve estar alinhada com o dispositivo de captura de imagem neste caso. A obtenção da largura e da altura da base em pixel é obtida por uma simples conta de subtração entre os extremos laterais ou superior e inferior.

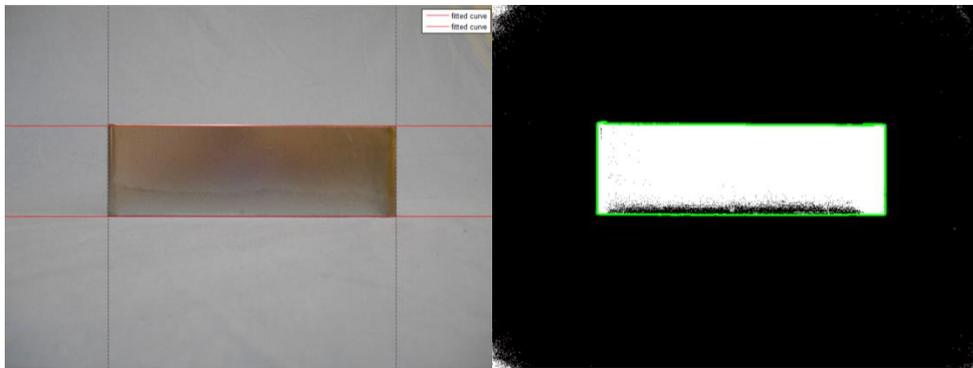


Figura 4.2: a) Imagem com retas verticais e horizontais interpoladas sobre o contorno da base do dispositivo de medição; b) Contorno adquirido em verde sobre imagem convertida em preto e branco.

A rotina determina, ainda, o valor da variável “escala”, a qual serve para converter a dimensão lida em pixel para a unidade de comprimento necessária do ensaio (mm, cm e assim por diante) de acordo com os parâmetros que foram lidos no programa principal “Biaxial.m”. Procedimento semelhante foi utilizado por Selvadurai e Shi, 2012, para determinar a deflexão máxima da bolha a partir de imagens adquiridas por fotografia.

Como a dimensões real da base foi previamente mensurada antes do ensaio e informadas no arquivo de parâmetros, para obter a variável escala basta dividir a grandeza avaliada na imagem (em pixel) por aquela na unidade desejada (usualmente mm).

$$escala = \frac{dimensão_{pixel}}{dimensão_{real}} \quad (4.2)$$

No caso do algoritmo foi escolhida a largura para realizar este cálculo. A partir desta relação é possível converter qualquer dimensão da imagem para uma unidade de dimensão conhecida requer apenas a inversão dos termos *escala* e *dimensão_{real}*.

Alternativamente pode-se entrar com todos os dados que a rotina “Identifica_Base” obtém diretamente no arquivo de parâmetros e com isto não é necessário utilizá-la. Para desabilitá-la basta alterar o valor da linha correspondente ao campo “Le base dispositivo” de 1 para 0. Neste caso, a interface *Imtool* [Matlab 2010 b User’s Manual, 2010] pode ser utilizada para obter os parâmetros necessários.

A seguir a rotina “Le_Imagem_Encontra_Raio.m” é executada. Como a base do dispositivo de medição já é conhecida e sua posição nas imagens geradas durante o ensaio nunca irá mudar, a geração de pontos a partir do contorno será feita apenas para a bolha eliminando os pontos desnecessários. De forma bastante similar àquilo que já foi mencionado para a rotina que identifica a base, um vetor com as coordenadas x e y dos pontos deste contorno é montado.

A equação que se deseja interpolar sobre este contorno é a equação de uma circunferência [Spiegel, 1969]:

$$R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \quad (4.3)$$

onde R , a e b são constantes a serem determinadas e representam o raio e o deslocamento horizontal e vertical do centro da circunferência (Figura 4.3). Altura máxima da bolha corresponde a variável Y_{max} e diâmetro da base do dispositivo a \emptyset_{base} . O parâmetro a normalmente não é informado ou verificado em trabalhos similares e a intenção aqui ao deixá-lo explícito como um dado de saída é a de permitir que o usuário certifique-se de que a amostra não possui nenhuma imperfeição que possa tê-la levado a deslocar o centro da bolha e ocasionar um erro na curva tensão *versus* deformação. Como a equação algébrica 4.3 não dá origem a um sistema linear, utilizou-se o método de Levenberg-Marquardt da função “*fit*” do Matlab para sua interpolação [Matlab 2010 b User’s Manual, 2010].

O valor inicial para a constante de deslocamento horizontal a é estimado como sendo sempre o centro do dispositivo, ou seja, pressupõe-se que a amostra não tenha defeito nem anisotropia. Já para estimativa inicial da constante b , foi utilizado como referência inicial o ponto com maior coordenada vertical na imagem adquirida no ensaio (supostamente o topo da bolha). Considerando-se hipoteticamente que a deformação da amostra corresponda a uma

circunferência perfeita até a base do dispositivo e sabendo-se que três pontos têm suas coordenadas conhecidas:

- $x = 0 \rightarrow y = Y_{max}$
- $y = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\phi_{base}}{2}$

Com dois pontos dos três pontos é possível escrever o sistema:

$$R^2 = (0 - a)^2 + (Y_{max} - b)^2 \quad (4.4)$$

$$R^2 = (\phi_{base} - a)^2 + (0 - b)^2 \quad (4.5)$$

Cuja solução para a variável b é:

$$b_{inicial} = \frac{(4Y_{max}^2 - \phi_{base}^2)}{8Y_{max}} \quad (4.6)$$

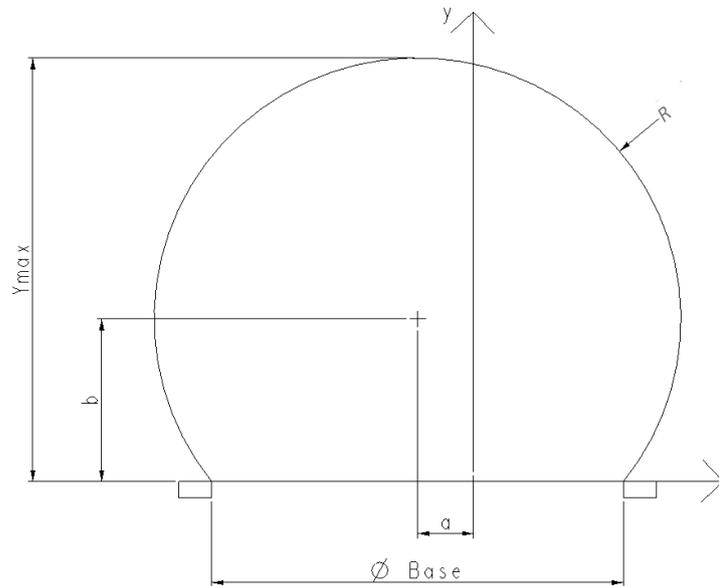


Figura 4.3: Variáveis e parâmetros geométricos do processo de inflação.

Nos primeiros estágios de deformação a bolha possui raio infinito, ou seja, uma superfície plana, o qual vai diminuindo até um raio crítico, que é o menor valor que será atingido no processo de inflação e não podendo ser menor que o diâmetro da abertura da base do dispositivo. A partir de então passa a aumentar até a ruptura da amostra ou término do ensaio. Isto pode ser visto na Figura 4.4, para a qual o raio crítico é de 125 mm, e corresponde ao momento no qual o centro da esfera está no centro da base do dispositivo de fixação da amostra, coincidindo com o centro do sistema de coordenadas de referência. Ao longo de todo este processo o comportamento da variável b , que representa o centro da forma esférica em

relação à origem do centro de coordenadas é monotônico, aumentando sempre de valor, assim como o alongamento.

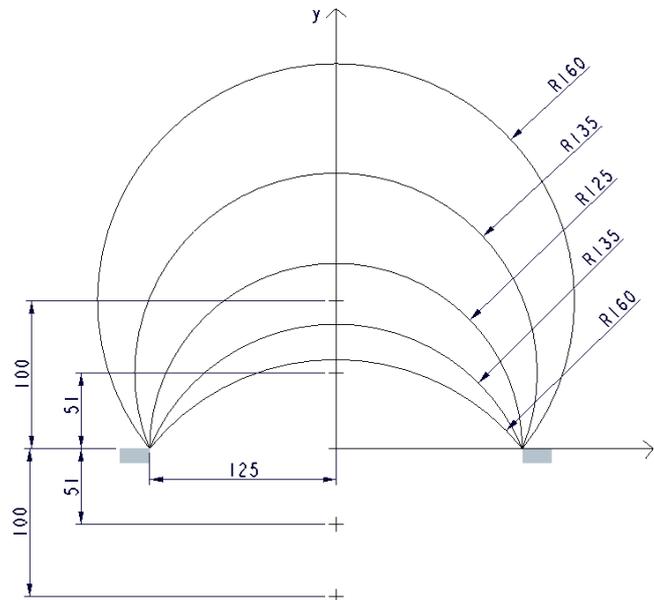


Figura 4.4: Ilustração do centro do círculo em relação a base do dispositivo (horizontal e verticalmente) para diferentes valores de raio.

A estimativa inicial do raio (R) é fruto da observação de testes da convergência da função “fit” para a equação da circunferência (4.3): para garantir que a solução não será composta por duas retas que se cruzam no centro, o valor inicial do raio deve ser sempre maior do que o raio real. Sendo assim, um valor de raio inicial de valor 99999 é normalmente suficiente.

A norma BS 903-5 sugere que se limitem as medições a uma calota de $\pm 10^\circ$ em torno do ápice. Este processo para limitar os pontos de aquisição é feito pela variável “FatorEsfera”, que define qual o percentual de todos os pontos disponíveis serão utilizados (mensurado a partir do centro da base do dispositivo de medição).

Para cada imagem são obtidas as constantes a , b e R , além do fator de correlação (ou Ψ^2). Este último é uma importante informação no julgamento da correlação da forma da bolha a uma esfera perfeita e conseqüentemente a premissa de que há um estado plano de tensões localmente no topo da bolha.

Adicionalmente, o programa monitora e armazena o ponto limite na superfície até o qual o raio estimado ainda tem uma correlação significativa. Como um único ponto na

imagem pode ter sido identificado pela função “*boundary*” com alguma margem de erro, optou-se por utilizar uma sequência de vários pontos (a quantidade pode ser ajustada, bem como o erro aceitável a partir do qual o contorno deixa de ter a forma esférica). Na Figura 4.5, obtida em ensaio preliminar de testes com amostra de silicone (ver capítulo 5), o ponto em verde marca o limite de aderência da deformação a forma de uma esfera (1% de discrepância numa sequência de 10% do total de pontos do contorno), em vermelho a interpolação da esfera sobre a bolha e em azul estão marcados os pontos que foram utilizados na interpolação.

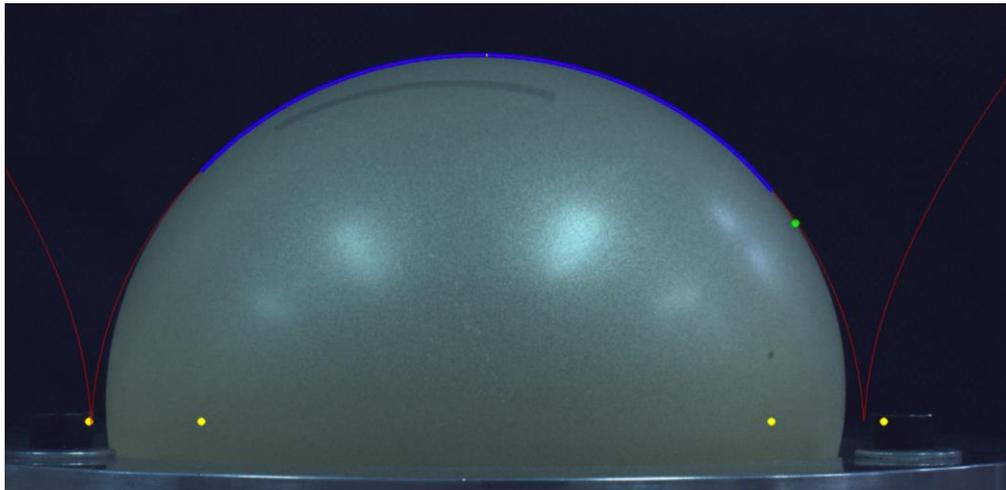


Figura 4.5: Imagem de bolha gerada durante ensaio de inflação e marcação das variáveis de interpolação sobre a superfície de contorno.

Para validação desta parte da rotina, algumas imagens de formas esféricas cujos raios são pré-determinados foram geradas através de um software de desenho técnico (Figuras 4.6 a, b e c) e os raios interpolados. Obviamente o erro na estimativa do raio é dependente da qualidade da imagem, principalmente da quantidade de pontos adquiridos no contorno. Neste teste a resolução da imagem gerada foi propositadamente baixa (relação de 3 pixel/mm em imagens com 1550 por 870 pixel) e o erro máximo foi próximo de 2%.

Algumas fotografias de objetos, cuja forma é aproximadamente redonda, também foram utilizadas para verificação preliminar da rotina (Figuras 4.7a, 4.7b e 4.7c). A resolução das imagens é de 14.1 megapixel e relação de aproximadamente 10,5 pixel/mm.

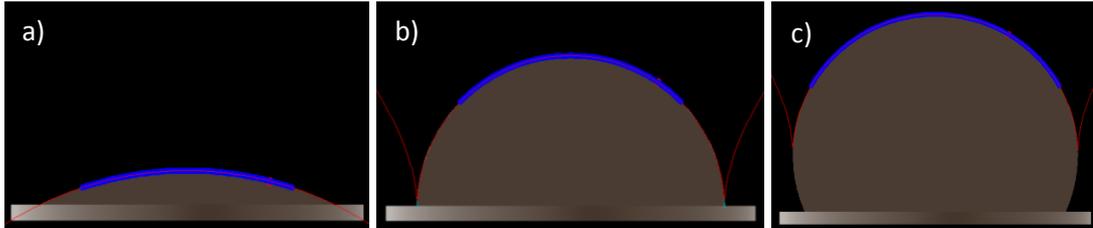


Figura 4.6: Imagens de circunferências; a) raio real 500 mm e raio interpolado 510 mm; b) raio real de 100 mm e interpolado de 102 mm; c) raio real de 130 mm e interpolado de 133 mm

Como se pode perceber, o programa tem uma boa capacidade de interpolar equação de uma circunferência sobre o contorno da imagem e mesmo um objeto cuja superfície é bastante irregular como no caso da Figura 4.7a foi possível interpolar os pontos do contorno.

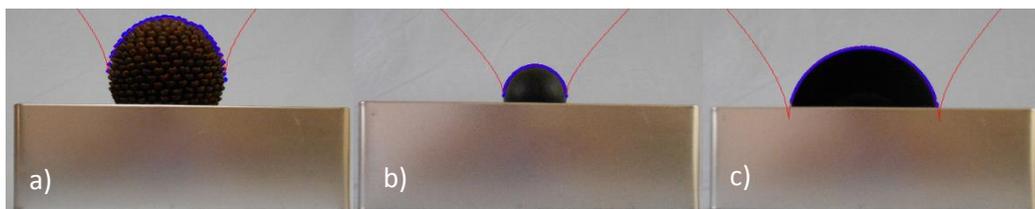


Figura 4.7: a) Raio aproximado 46,5 mm e interpolado 48,6 mm; b) Raio aproximado de 25,5 mm e interpolado de 26,5 mm; c) Raio aproximado de 65,5 mm e interpolado de 66,4mm.

Cabe salientar que, como as rotinas utilizam o contorno da superfície, o fundo da imagem adquirida deve ser homogêneo, sem gradiente de cores, sombra, traços ou linhas e arestas que não sejam oriundos do dispositivo de medição ou da própria bolha.

O trecho final da rotina “Biaxial.m” tem por objetivo armazenar os dados obtidos para cada imagem, bem como o de calcular as informações efetivamente desejadas: tensão e deformação. Visto que as variáveis para o raio e a pressão estão disponíveis o cálculo da tensão se dá pelas equações 3.5 e 3.6.

4.1. Avaliação do Algoritmo e Método por Análise Numérica

Utilizando uma análise numérica por elementos finitos foram geradas imagens do processo cinemático de inflação da bolha para validação preliminar da metodologia e do algoritmo. O modelo matemático escolhido foi Mooney-Rivlin de 2 termos, o mesmo

utilizado por Selvadurai e Shi, 2012, e cujas constantes constitutivas já foram mencionadas anteriormente no capítulo 3.

Para reduzir o tempo de cálculo, foi escolhida a utilização do elemento de casca axissimétrico *Shell209* [Ansys 14.0 User's Manual, 2012], o qual tem 3 graus de liberdade (dois deslocamentos e um de rotação), e 3 nós. O elemento permite ao usuário escolher entre realizar a análise apenas utilizando a teoria de membrana, ou incluir a rigidez à flexão (modelo de casca), sendo esta última a opção utilizada para todas as análises a seguir. Como o custo computacional era baixo, pôde-se utilizar uma quantidade grande de elementos frente a simplicidade inicial da geometria, gerando um total de aproximadamente 3.000 nós.

Como já analisado no capítulo 3, inicialmente, habilitou-se o método *arc-length* e o nó equivalente à parte da amostra presa no dispositivo de fixação foi engastado (restrição de deslocamento em x e y e restrição de rotação no eixo z), enquanto o nó pertencente ao centro pôde deslocar verticalmente e rotacionar, conforme pode ser visualizado na Figura 4.8. Os parâmetros utilizados foram:

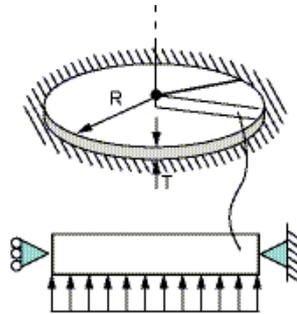
- Limite de equações de equilíbrio: 4×10^3
- Passo máximo: 1×10^6
- Passo mínimo: 1×10^{-3}
- Discretização do carregamento: 9×10^9

A partir do momento em que a análise passou a apresentar dificuldade em obter convergência (geralmente para alongamentos próximos de 150%), desabilitou-se o método *arc-length*, e retirou-se a restrição de rotação do nó de fixação na base. Conforme mencionado no capítulo 3.2, tal mudança permite possível obter convergência para maiores deformações. Como visto na tabela 3.1, a diferença entre os resultados dos dois métodos de análise pode ser desconsiderada para deformações superiores a 10%. Os parâmetros utilizados foram:

- Limite de equações de equilíbrio: 4×10^3
- Incremento máximo: $1,5 \times 10^3$
- Incremento mínimo: $2,5 \times 10^2$
- Discretização do carregamento: 9×10^9

A geometria inicial era equivalente a um disco de diâmetro de 100 mm. As análises foram conduzidas para espessuras de 0,5 mm, 1 mm e 2 mm (encontráveis em mantas de borracha comercial). Foram feitas diversas análises com incrementos de pressão de tal forma

a obter uma variação de alongamento similar entre as análises e atingindo um máximo próximo a 2,3 vezes.



Fonte: adaptado de Ansys 14.0 User's Manual, 2012.

Figura 4.8: Esquema representativo das condições de contorno na amostra

Para cada resultado obtido, foram geradas imagens da bolha, as quais foram usadas como parâmetro de entrada para o algoritmo. Adicionalmente foram registrados os dados de tensão, alongamento e deslocamento vertical máximo no nó correspondente ao centro da amostra (equivalente ao centro da bolha).

A Figura 4.9 ilustra diversos estágios do processo de inflação da bolha, onde é possível perceber que, gradualmente, a curvatura inicial que acompanha a restrição de rotação do nó onde a amostra é presa vai reduzindo até se tornar praticamente uma rotação pura. A Figura 4.10 mostra em detalhe o efeito da restrição de rotação para pequenas deformações.

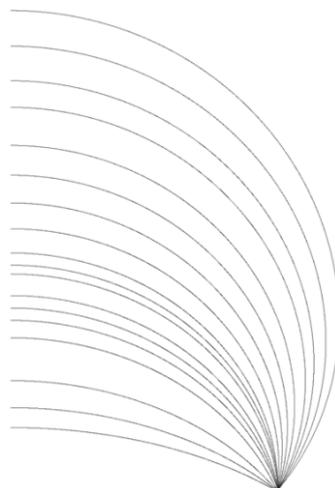


Figura 4.9: Sobreposição de diversas configurações da bolha ao longo do processo de inflação.

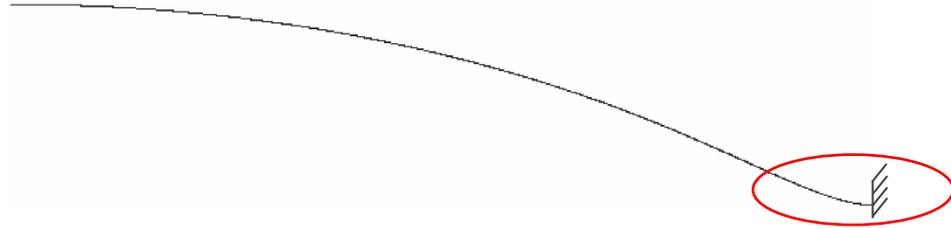


Figura 4.10: Estágio inicial de inflação.

As Figuras 4.11 e 4.12 apresentam o resultado obtido para o raio ao aumentar a pressão sobre a amostra e ao aumentar o alongamento. Em todos os casos, o raio crítico ficou ligeiramente acima do raio de abertura do disco superior de fixação, o que condiz com a Figura 4.4, na qual o raio crítico deve ser maior ou igual ao raio de abertura do disco superior. Pode-se perceber que a variação de geometria é mais sensível à variação de pressão à medida que a espessura diminui. Ainda na Figura 4.12, percebe-se que as curvas se sobrepõem, ou seja, o processo cinemático é independente da espessura para um mesmo elastômero.

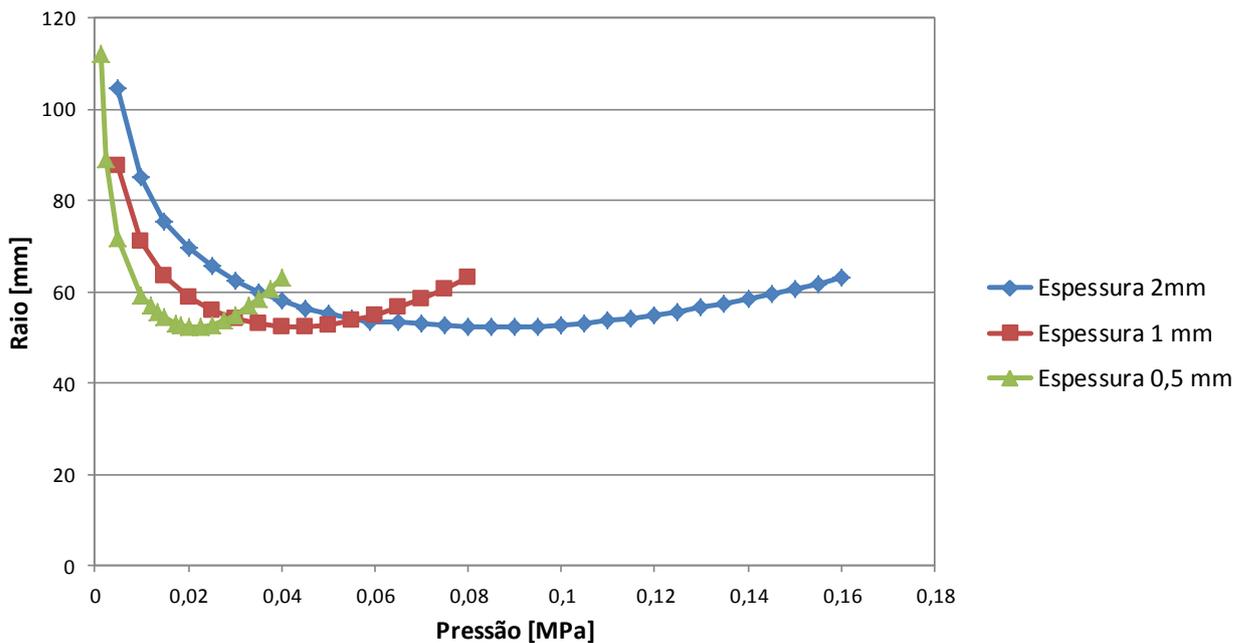


Figura 4.11: Variação do raio no topo da bolha ao incrementar a pressão interna na amostra.

A partir da Figura 4.13 pode-se verificar que inicialmente o centro real da calota esférica da amostra apresenta uma diferença muito pequena em relação àquele que seria esperado para uma deformação correspondente a uma esfera completamente perfeita, todavia, a medida em que o alongamento aumenta, passa a existir uma diferença cada vez maior entre

ambos. Esta característica é justamente a responsável por provocar erros no cálculo como aquele proposto por Reuge *et al.*, 2001, que associam o deslocamento vertical do topo e o raio ao de uma esfera perfeita.

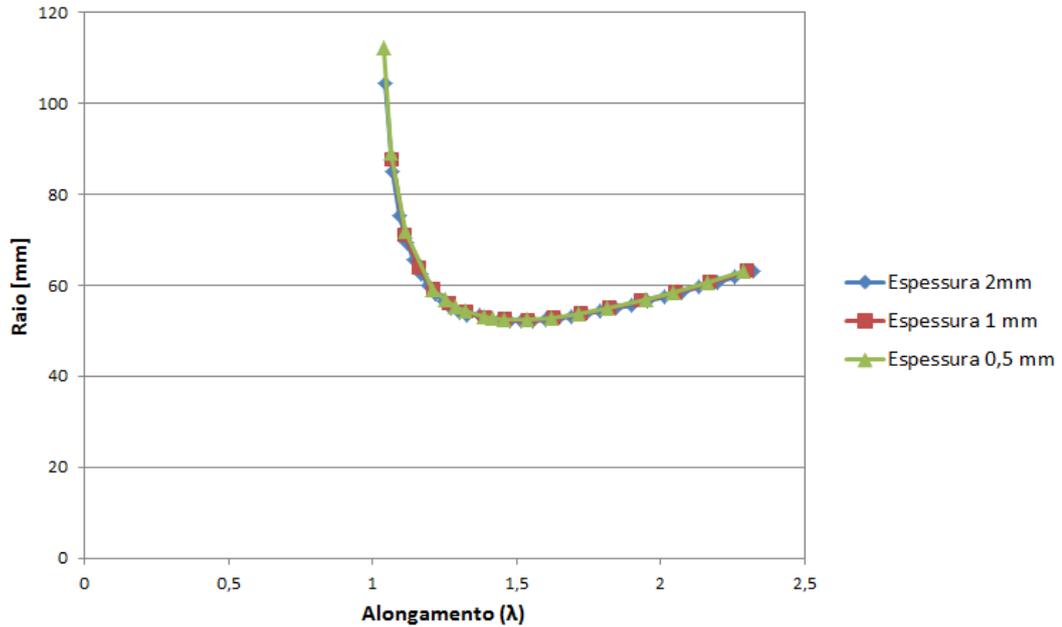


Figura 4.12: Variação do raio com o alongamento.

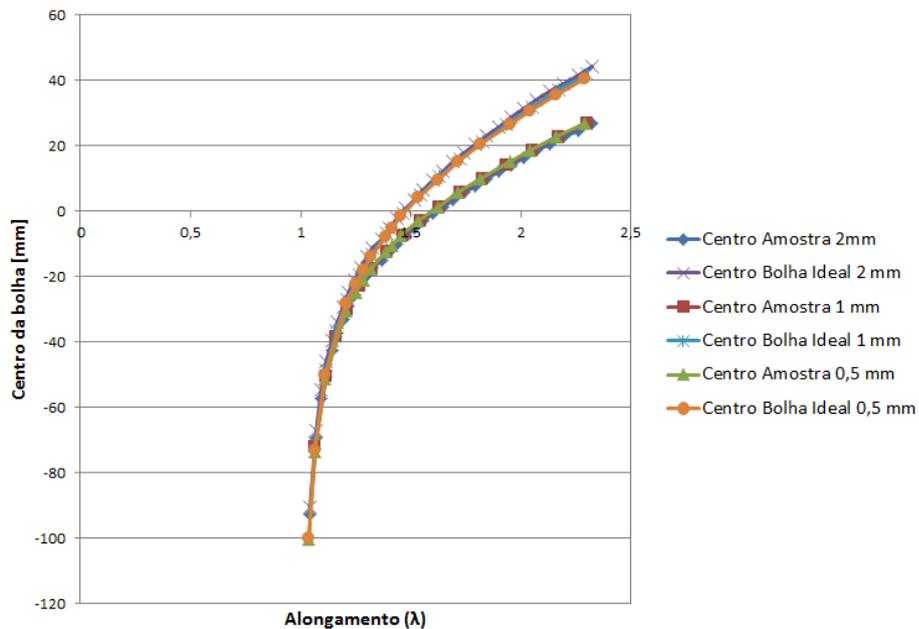


Figura 4.13: Variação do centro da esfera perfeita e centro da esfera da amostra analisada ao variar o alongamento.

A partir da análise numérica a espessura inicial, a pressão (p_ζ), a tensão verdadeira (t_ζ) e o alongamento (λ_ζ) são conhecidos, pode-se isolar o raio na equação 3.6:

$$R_\zeta = \frac{2t_\zeta h_0}{p_\zeta \lambda_\zeta^2} \quad (4.7)$$

Neste caso, R_ζ representa o raio esperado para a bolha a partir da análise numérica. Diferentemente do que seria esperado, para faixas de deformação mais baixas existe uma diferença considerável entre R_ζ e o raio obtido pela interpolação para uma mesma pressão. A Figura 4.14 mostra que quanto maior a espessura, maior é a diferença, sendo mais pronunciada quanto menor for o alongamento. Valores positivos indicam a que o raio obtido pelo cálculo da equação 3.10 é superior.

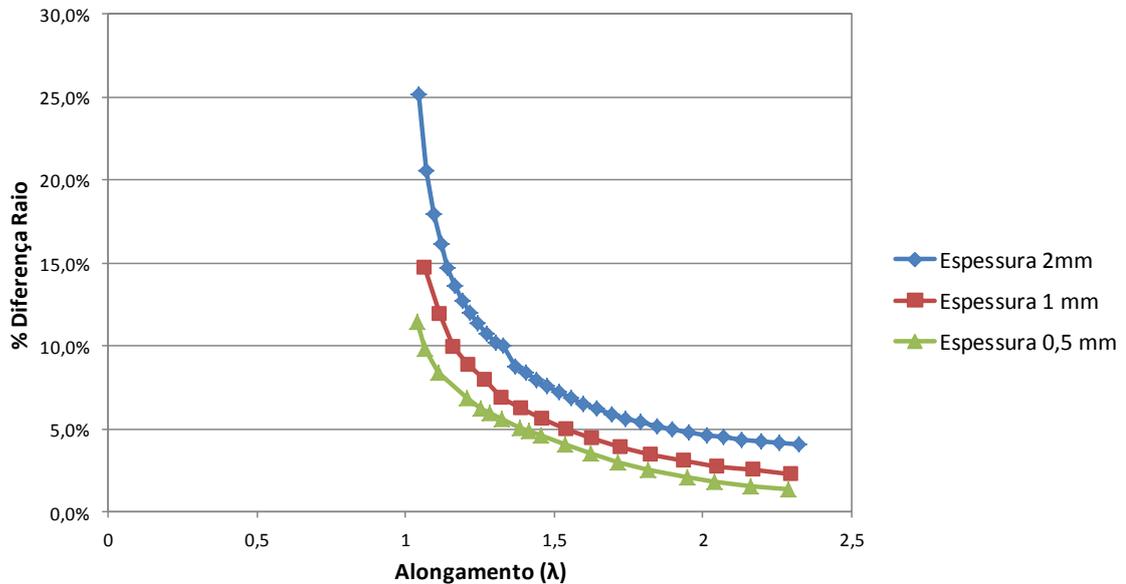


Figura 4.14: Diferença entre o raio obtido pela equação 4.7 e o raio obtido pela equação 3.6 aplicada para as imagens geradas por análise numérica.

A equação 3.6 é oriunda da teoria de membranas de revolução e não é capaz de capturar a influência da rigidez à flexão, que está presente no elemento de casca utilizado na simulação por elementos finitos [Ansys 14.0 User's Manual, 2012]. Sabe-se que a resistência à flexão diminui com a redução da espessura, o que fica claro ao analisar o comportamento tanto para as diferenças entre as espessuras iniciais, quanto ao aumentar os alongamentos tangencial e radial, ou seja, ao diminuir a espessura instantânea.

Visto que a análise numérica é uma aproximação do fenômeno físico, os resultados obtidos não podem ser considerados nem exatos, nem incorretos, a menos que exista uma validação através de um ensaio físico. Por isto, nas análises anteriores sempre foi mencionada uma diferença entre a teoria proposta e a análise numérica, mas nunca um erro relativo entre ambas.

5 Ensaaios experimentais

Para os ensaios experimentais foram utilizadas amostras de SBR nas espessuras nominais de 1 mm, 1,7 mm e 2,2 mm, além de silicone com 0,5 mm de espessura. Foram realizados ensaios de tração simples e tração biaxial por inflação para obtenção de curvas tensão de engenharia *versus* deformação, sendo as equações utilizadas 2.45 e 2.46 e 3.5 e 3.10, respectivamente. Estes dados foram então utilizados como parâmetros de entrada em um programa de ajustes de curva não linear que utiliza o método dos mínimos quadrados [Manual do Usuário Hyperfit, 2011] para obtenção das constantes constitutivas e posterior análise numérica por elementos finitos para reproduzir a forma da bolha e validação final de todo o método.

O composto de SBR (curado) foi produzida pela empresa Vipal, sendo caracterizada pela norma ASTM D2000 como: M2 AA 703 A12. Já o composto de silicone, MS 9147 na designação do fabricante da manta (empresa Orion): M6 GE 703 A19 EA14 EO16 EO36 F19 Z1.

5.1. Ensaio de tração uniaxial

Os ensaios de tração simples foram realizados seguindo as indicações da norma ASTM D412 (geometria do corpo de prova tipo C). O equipamento utilizado foi uma máquina de tração EMiC (Figura 5.1), modelo DL2000, equipada com uma célula de carga de 1KN com precisão de 0,1 % (classe 1) e sensor deslocamento do tipo óptico (*encoder*), com resolução de 0,01 mm. Para este ensaio os corpos de prova foram cortados em dois grupos cuja orientação diferia em 90°, com o objetivo de identificar se o material apresentaria alguma variação de propriedade mecânica oriunda do processo de fabricação. A temperatura ambiente dos dias em que os ensaios foram realizados variou de 17 a 25°C aproximadamente.

Antes de cada ensaio a espessura da amostra foi verificada em três pontos espaçados em torno de 10 mm na região útil de extensão com um micrômetro da marca Mitutoyo com display digital, precisão 0,001 mm e faixa de leitura de 0 a 25 mm. A média dos três pontos foi utilizada como parâmetro para o cálculo da área da seção transversal e conseqüentemente da tensão.

Inicialmente foram realizados dois ensaios, um para cada direção de corte de amostra de SBR (Figura 5.2). Verificou-se claramente uma diferença na força máxima de rompimento,

sendo que as amostras cortadas longitudinalmente apresentaram rigidez superior àquelas cortadas perpendicularmente. Percebe-se ainda, um comportamento quase linear da força em relação ao deslocamento ao longo de grande parte da deformação.



Figura 5.1 – Imagem da máquina de ensaio de tração simples realizando experimento

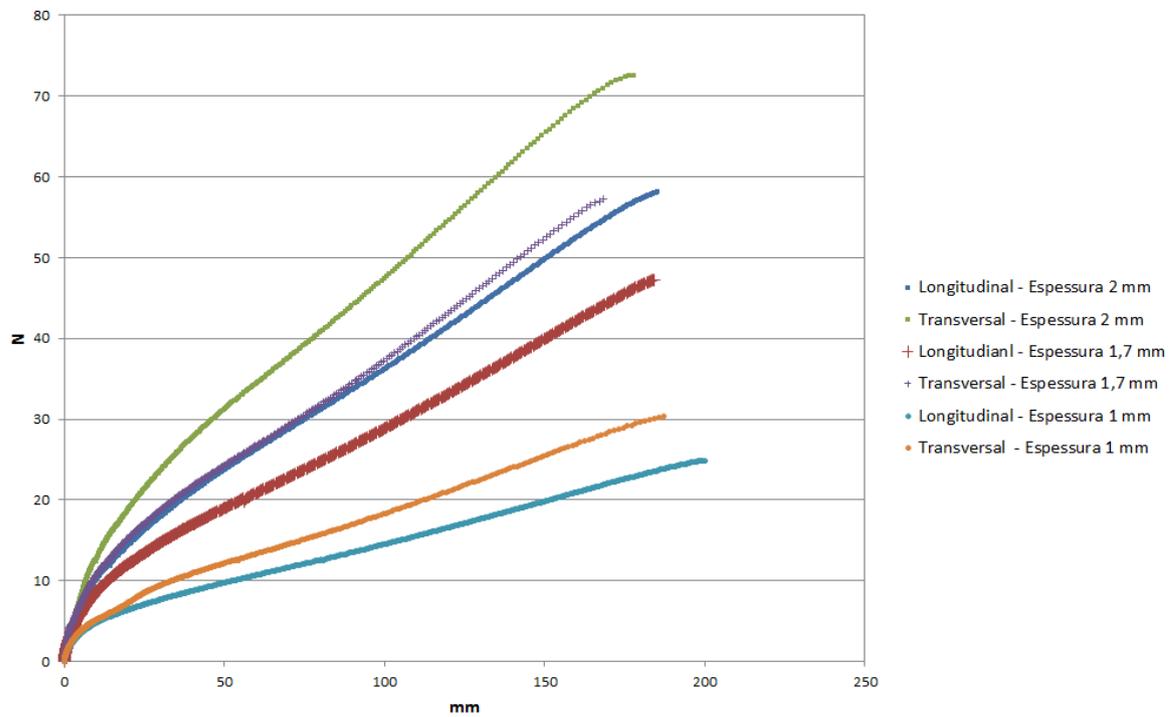


Figura 5.2 - Força de tração *versus* deslocamento para amostras de SBR

Na Figura 5.3 é vista a curva tensão *versus* deformação para corpos de prova de SBR na direção de corte transversal e com diferentes espessuras. Percebe-se que mesmo com diferentes espessuras, o composto analisado tem praticamente o mesmo comportamento mecânico, ou seja, deveria dar origem ao mesmo conjunto de constantes constitutivas.

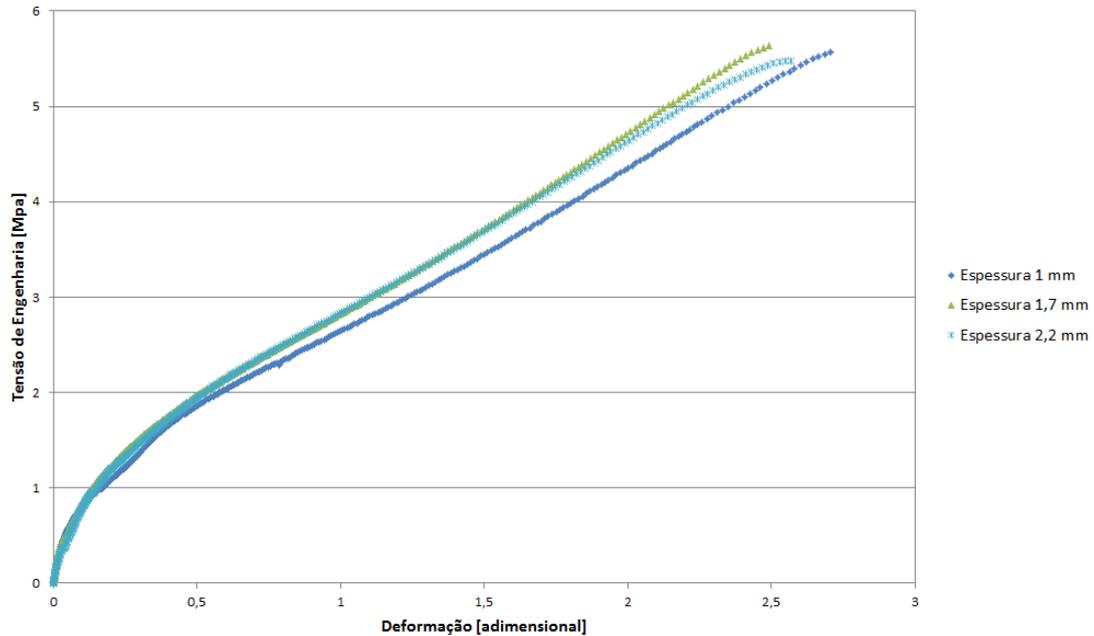


Figura 5.3 - Tensão de tração *versus* deformação para corpos de prova de SBR

Sabendo-se que os elastômeros mudam seu comportamento cinemático após alguns ciclos de carga e descarga e que, na prática, os componentes mecânicos feitos com este tipo de material quase nunca são solicitados apenas uma vez, mas sim milhares de vezes dentro de uma mesma faixa de deformação, realizou-se, uma série de cinco ciclos de carga e descarga nas amostras deste mesmo material para poder encontrar um novo comportamento mecânico. Este processo seguiu as indicações daquele realizado por Diani *et al.*, 2009 considerando-se a existência do efeito Mulins. Um exemplo de emprego para tal caracterização seria a entrega pelo fabricante da manta de material já com perda de rigidez (homogênea ao longo da manta) para o uso ou aplicação no produto final.

Na Figura 5.4 são apresentadas curvas características tensão *versus* deformação após 5 ciclos de amolecimento. Como característica do pré-condicionamento, a perda de rigidez acontece até o alongamento máximo já atingido, o que é facilmente perceptível quando comparando os pontos de inflexão das curvas. A amostra 1 foi alongada até 75% do alongamento máximo, a amostra 2 em 150% e a amostra 3 foi alongada até 175%. Foram

utilizados valores de deformação máxima distintos para posterior correlação com os ensaios de tração biaxial cujos alongamentos máximos foram equivalentes.

Como característica dos ciclos de amolecimento, após a remoção da carga verifica-se dano residual ao longo da amostra, ou seja, a mesma não retorna até o estado inicial indeformado original (L_0) [Diani *et al.*, 2009]. Para fins de caracterização mecânica, um novo cálculo da deformação (e_{dano}) foi considerado levando em consideração este fato:

$$e_{dano} = \frac{L - (L_0 + dano)}{L_0 + dano} \quad (5.1)$$

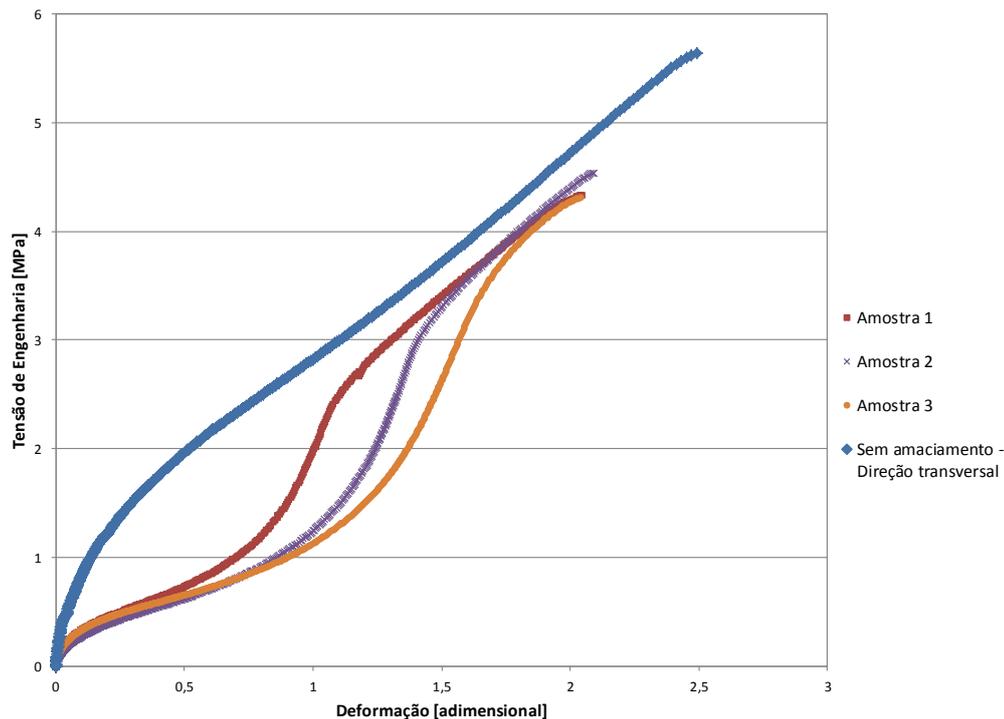


Figura 5.4 – Ensaio de tensão *versus* deformação após pré-condicionamento das amostras.

A Figura 5.5 mostra a curva tensão *versus* deformação das amostras de silicone. A deformação máxima do material é bastante elevada (superior a 750%). Diferentemente do que visto para as amostras de SBR as diferenças na tensão de ruptura foram menos significativas, sendo que em alguns casos os valores foram praticamente idênticos (amostra 1 transversal e amostra 2 transversal). Nota-se pequena dependência da orientação da resistência mecânica com a orientação da confecção da amostra.

Já o amolecimento para as amostras de silicone foi muito menos acentuado, o que pode ser visto nas Figura 5.6. Para a amostra 1 o alongamento máximo a qual foi submetida durante os 5 ciclos de perda de rigidez foi de 350%, enquanto para a amostra 2 foi de 550 %.

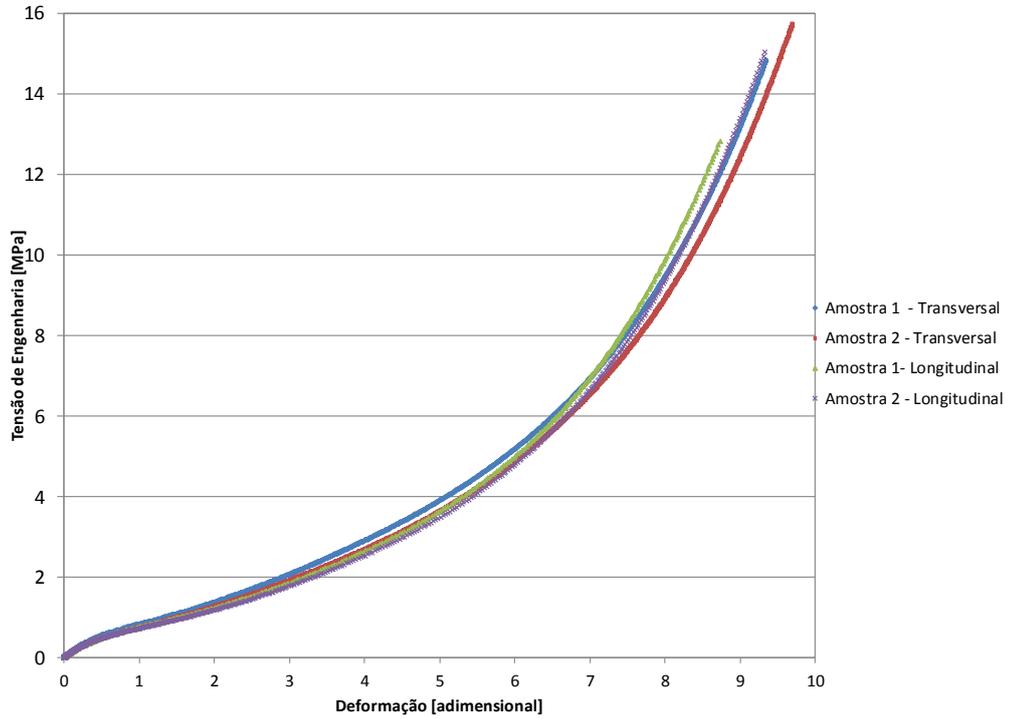


Figura 5.5 – Ensaio de tração uniaxial da amostra de silicone

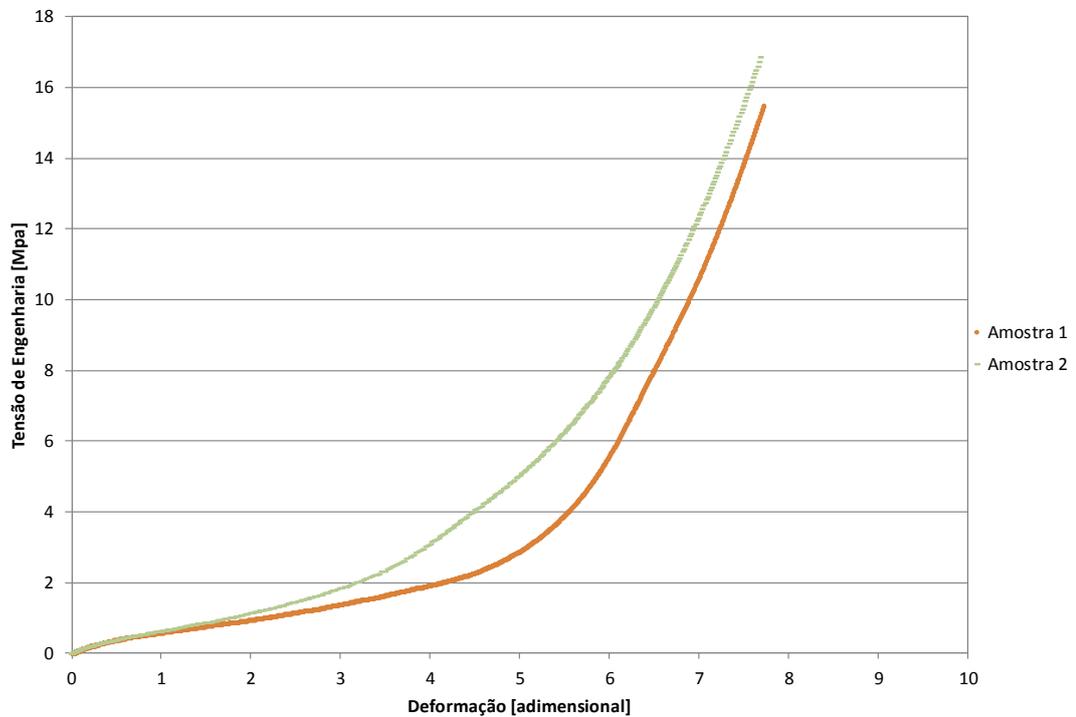


Figura 5.6 – Curva tensão *versus* deformação para amostras de silicone após pré-condicionamento.

5.2. Ensaio de tração Biaxial

As amostras de SBR e silicone foram então submetidas ao ensaio de tração biaxial por inflação. A composição do sistema de testes foi:

- Base de fixação da amostra composta de duas partes, uma superior e uma inferior. O diâmetro de abertura para formação da bolha era de 99,75 mm e o diâmetro externo de 199,75 mm. Esta grande diferença de diâmetros forneceu uma boa área de contato pressionada, evitando passagem de ar do lado pressurizado para o ambiente externo. A união dos componentes era feita por 3 parafusos rosca M6;
- Paquímetro digital marca GeneralTools modelo 147, fundo de escala 150 mm e precisão de 0,01 mm
- Dispositivo de aquisição de imagem fabricante PointGrey, modelo Flea3 (FL3-U3-88S2C) conectada em tempo real com um computador por cabo;
- Montada na câmera uma lente de aumento marca Computar de 25 mm (1:1.8 – 2/3°);
- Tripé com ajuste de altura da base e dos ângulos de orientação nas três direções perpendiculares;
- Alvo de calibração para imagem produzido pela Edmund Industrial Optics modelo 59211 (área de calibração de 50,8 x 50,8 mm);
- Manômetro de leitura digital modelo AP-32K do fabricante Keyence, com fundo de escala de 1 bar, resolução de 0,001 bar e repetibilidade de 0,2% do fundo de escala.
- Conjunto filtro de ar e regulador de pressão marca Parker modelo DTB3011, fundo de escala 10 bar;
- Válvula reguladora de vazão de precisão para ajuste da taxa de inflação com precisão;
- Mangueira para linha pneumática diâmetro interno 8 mm;
- Caneta de cor prata (para marcação da superfície e cálculo da deformação);
- Panos de cor escura ou clara;
- Conexões pneumáticas do tipo engate rápido;
- Talco em pó.

Os componentes foram arranjados da mesma forma como descrito no capítulo 3, visível na esquematicamente na Figura 3.1 ou no durante a realização do ensaio na Figura 5.7.

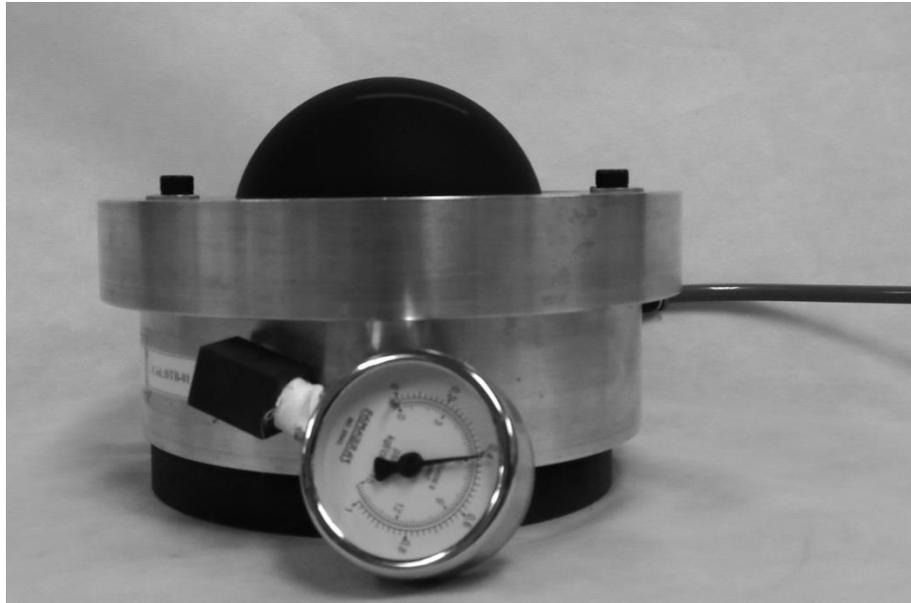


Figura 5.7 – Dispositivo de ensaio de tração biaxial por inflação ensaiando prova de SBR

Nos ensaios preliminares verificou-se que ao aplicar torque nos parafusos de fixação do disco superior ocorria a aderência da amostra tanto no disco inferior quanto no superior e, após a inflação tornava-se necessário o uso de macete para separação de todos os componentes. A solução adotada foi a aplicação de talco em pó na face superior da amostra, apenas na parte que fica em contato com o disco, de forma a não prejudicar o contraste com plano de fundo e consequentemente o tratamento da imagem para obtenção do contorno.

As etapas de realização do ensaio foram (Figura 5.8):

1. Preparação da amostra:

- a. Corte do material em formato circular. Não havia preocupação com relação ao acabamento, bem como pequenas falhas no extremo não afetariam o resultado em função da grande distância entre os diâmetros internos e externos do disco de fixação superior;
- b. Limpeza superficial para remoção de impurezas que poderiam prejudicar a estanqueidade do conjunto ou que poderiam entrar no circuito pneumático, vindo a danificar o manômetro;

- c. Aplicação de talco na face superior, apenas na região que entra em contato com o disco superior.
2. Fixação do disco superior na amostra, apertando os três parafusos com ferramenta manual, sem necessidade de controle do torque;
3. Posicionamento do tripé na frente do conjunto base de fixação e amostra;
4. Escolha da cor de pano de fundo, a qual depende da cor da amostra, pois deseja-se o maior contraste possível no contorno e posicionamento para garantir ausência de saliências ou imperfeições como dobras ou sombras;
5. Fixação das conexões pneumáticas;
6. Marcação de uma reta com caneta sobre a amostra (próximo ao centro);
7. Medição do comprimento da reta com o uso de paquímetro;
8. Início do ciclo de incremento da pressão
 - a. Inflação da amostra e monitoramento do topo até que o mesmo fosse visível na câmera fotográfica;
 - b. Registro fotográfico da amostra, registro da pressão e medição do comprimento da linha marcada na amostra com paquímetro;
 - c. Incremento da pressão;
 - d. Aguardar estabilizar a pressão monitorando constante o manômetro até atingir passo de 0,02 bar (menor divisão do manômetro);
 - e. Repetição dos passos b, c e d até rompimento da amostra ou atingimento do alongamento desejado.

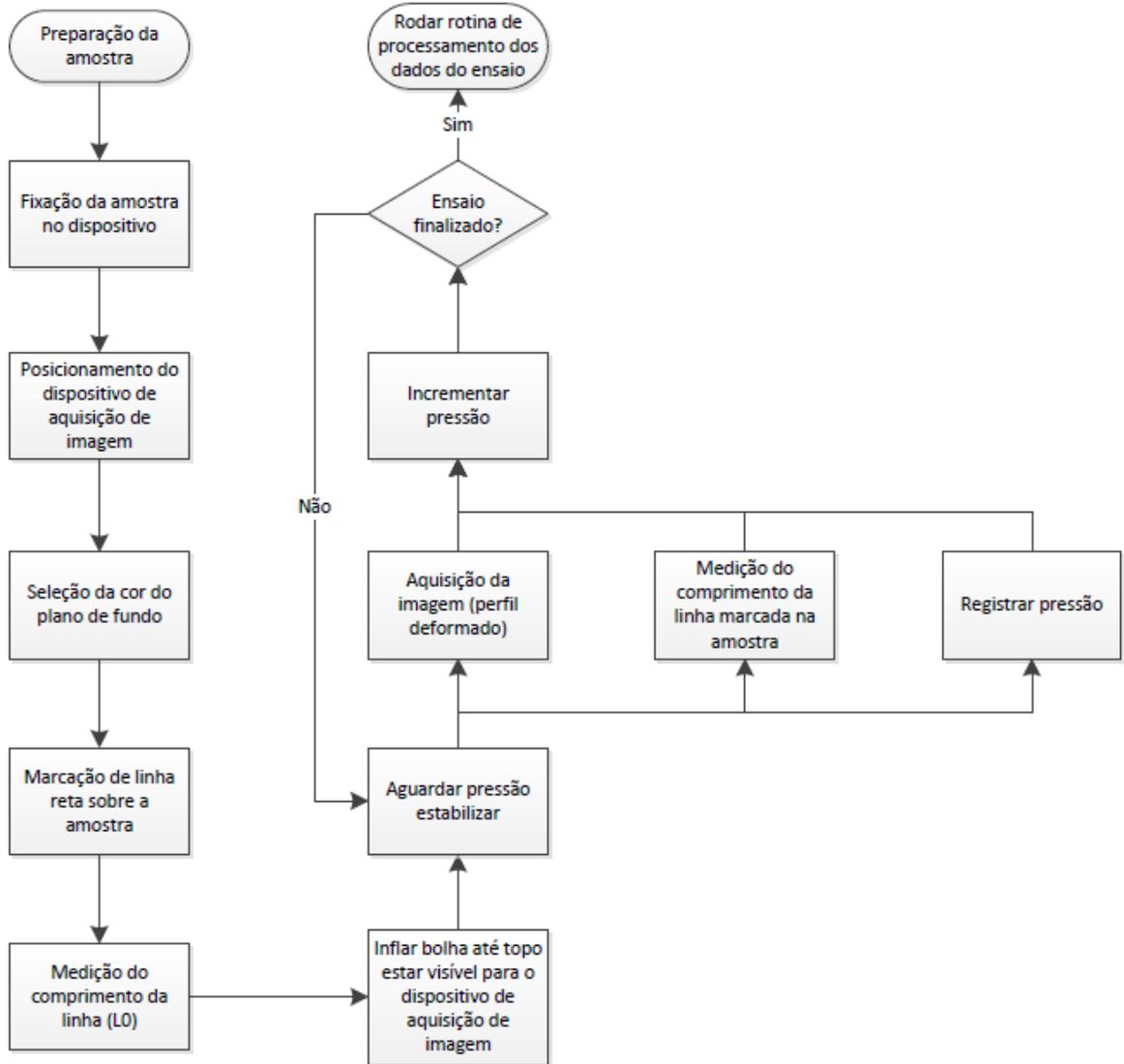


Figura 5.8 – Sequência de passos para execução do ensaio biaxial por inflação

Com o objetivo de avaliar qual a influência que o posicionamento e orientação que a câmera teria sobre a interpolação do raio, um objeto esférico de diâmetro 75 mm \pm 0.5 mm foi utilizado em conjunto com o sistema óptico descrito anteriormente. Os resultados interpolados para as Figuras 5.9a (raio interpolado de 37,5 mm), 5.9b (raio interpolado 37,7 mm) e 5.9c (raio interpolado 37,7mm) mostram que a variação é praticamente independente do posicionamento e da orientação angular da câmera (deslocamentos de aproximadamente 150 mm da base de fixação da câmera entre as imagens). A relação pixel/mm verificada durante os ensaios era da ordem de 28,5. Os dados para parametrização do posicionamento da base e definição da variável escala foram informados no arquivo de parâmetros.

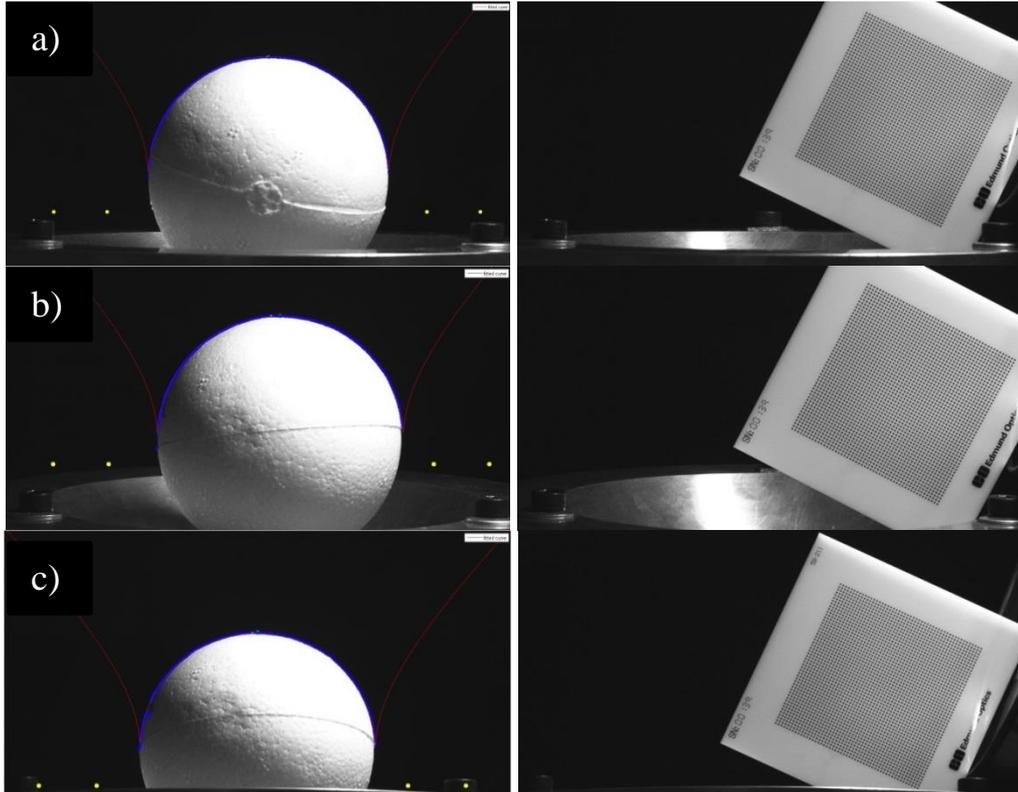


Figura 5.9 – Três diferentes posicionamentos verticais do sistema de aquisição de imagem e interpolação de raio sobre a esfera com seus respectivos calibradores padrão (a, b e c).

Sabendo-se que as amostras de SBR eram sensíveis ao pré-condicionamento, também procedeu-se nos ensaios de inflação a verificação do comportamento antes e após a realização de 5 ciclos de amolecimento. Diferentemente do ensaio de tração simples, no caso do ensaio por inflação o processo de diminuição de rigidez é mais difícil de ser realizado, uma vez que o parâmetro de entrada que é controlado não é a deformação, mas a pressão.

Assim como relatado por Reuge *et al.*, 2001, em todos os ensaios realizados verificou-se uma instabilidade da amostra na qual a partir de um determinado alongamento, um pequeno incremento de pressão inicia um processo de deformação a pressão e velocidade de deformação constantes até a ruptura. As Figuras 5.10b até 5.10e mostram imagens de ensaio com composto de SBR que foram registradas em alguns instantes durante este processo (pressão de 0,74 bar). Ao tentar aumentar a pressão permitindo maior vazão de ar apenas a taxa de deformação aumenta, porém a pressão se mantém sempre constante.

No último registro estável (5.10a) o alongamento era de 200%, pressão de 0,72 bar, a altura da bolha 72,2 mm e o raio interpolado 54,5 mm. A última imagem (5.10e), tirada 4 minutos após, corresponde a instantes antes da ruptura na qual o alongamento foi de

aproximadamente 230% a altura da bolha estava em 85,6 mm e o raio interpolado em 62,5 mm. Verifica-se que aproximadamente 13% do alongamento total da curva tensão *versus* deformação não pode ser utilizado para estimar as propriedades mecânicas.

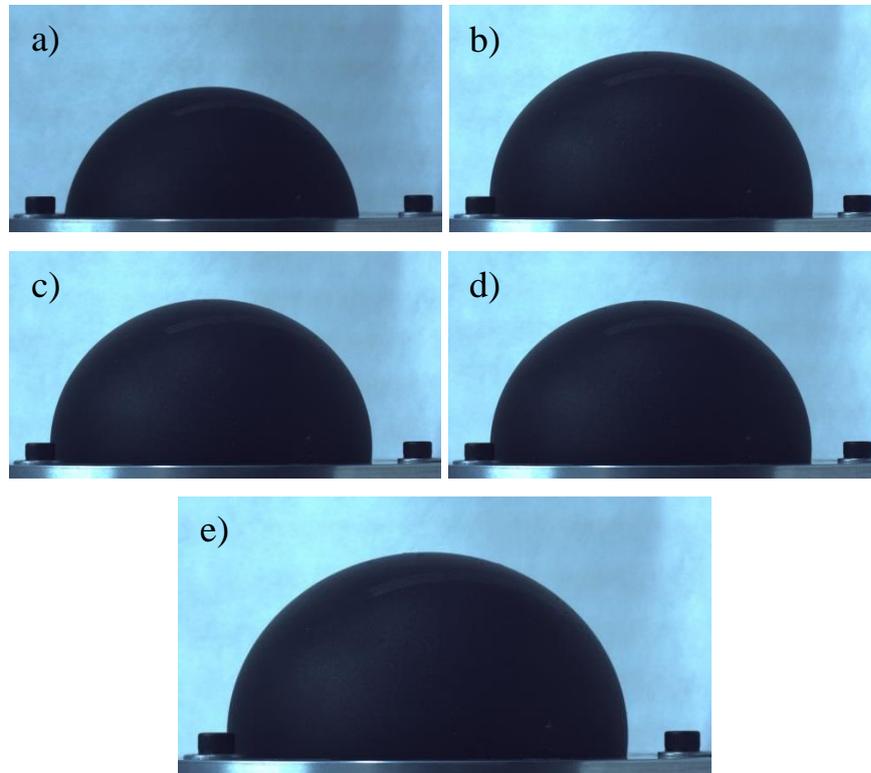


Figura 5.10 – Expansão não controlada para amostra de SBR.

Nas Figuras 5.11b a 5.11d, pode-se visualizar o mesmo processo de expansão para uma amostra de silicone (pressão de 0,93 bar). Neste caso, a diferença no alongamento entre a primeira imagem registrando o início da instabilidade (alongamento de 218%) e o momento da ruptura (303%) representa 28% da faixa de deformação total. A Figura 5.11a corresponde a última imagem adquirida com expansão controlada (pressão de 0,091 bar).

As velocidades de deformação foram de aproximadamente 0,004 mm/s (taxa de alongamento de 0,2%/s) e 0,07 mm/s (taxa de alongamento de 0,3%/s) para SBR e silicone, respectivamente.

O resultado do ensaio de tração biaxial por inflação para SBR considerando apenas os dados úteis pode ser visto na Figura 5.12 no qual, assim como para o ensaio uniaxial, independentemente da espessura, as amostras apresentam propriedade mecânica similares. As amostras foram deformadas até que a instabilidade fosse atingida e não até a ruptura. Não

foram identificados visualmente nem nos parâmetros monitorados na rotina de tratamento das imagens, efeitos oriundos da ligeira anisotropia detectada nos ensaios uniaxiais (direções ortogonais de corte dos corpos de prova) nos ensaios biaxiais.

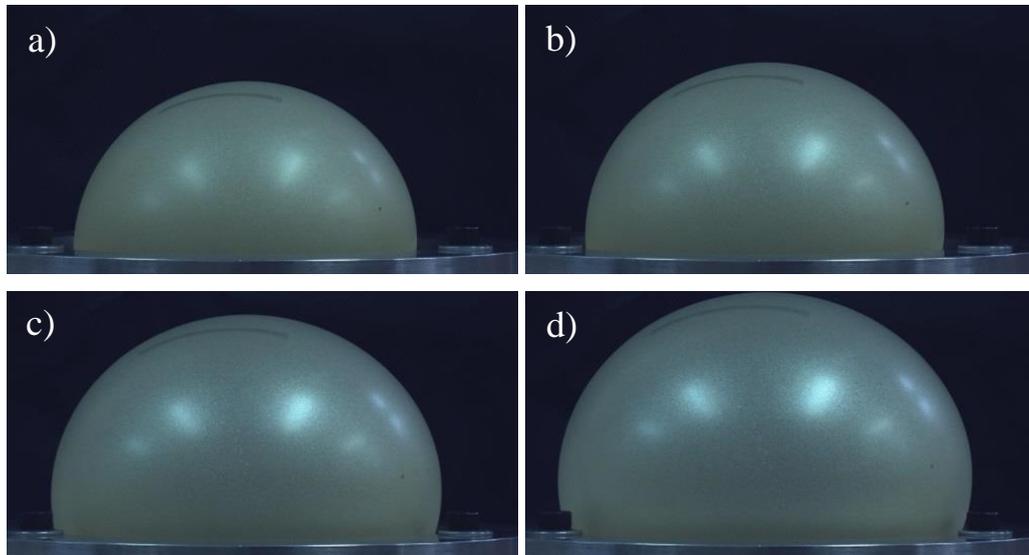


Figura 5.11 – Imagens da expansão não controlada de amostra de silicone em diversos instantes.

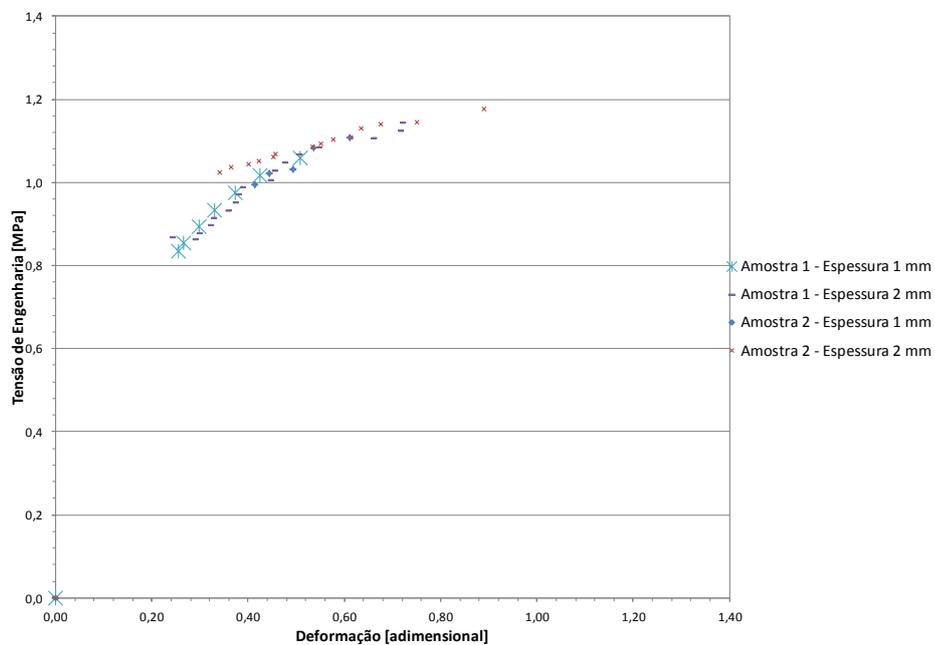


Figura 5.12 – Ensaio de tração biaxial por inflação de amostras de SBR (sem pré-condicionamento)

Finalmente, um último ensaio de inflação foi realizado, porém, levando as amostras até a ruptura. O resultado dos ensaios é visto na Figuras 5.13 onde o dano foi diminuído da deformação e um novo comprimento inicial (L_0) foi considerado para o cálculo da deformação da mesma forma como realizado para o ensaio uniaxial de tração. Percebe-se uma diferença na rigidez entre as curvas, o que é explicado pela dificuldade em garantir ciclos de amolecimento com deformações máximas idênticas. A amostra 1 de espessura 1 mm foi alongada até 140%, já a amostra 1 de espessura 2,2 mm foi alongada até 100% nos ciclos de amolecimento.

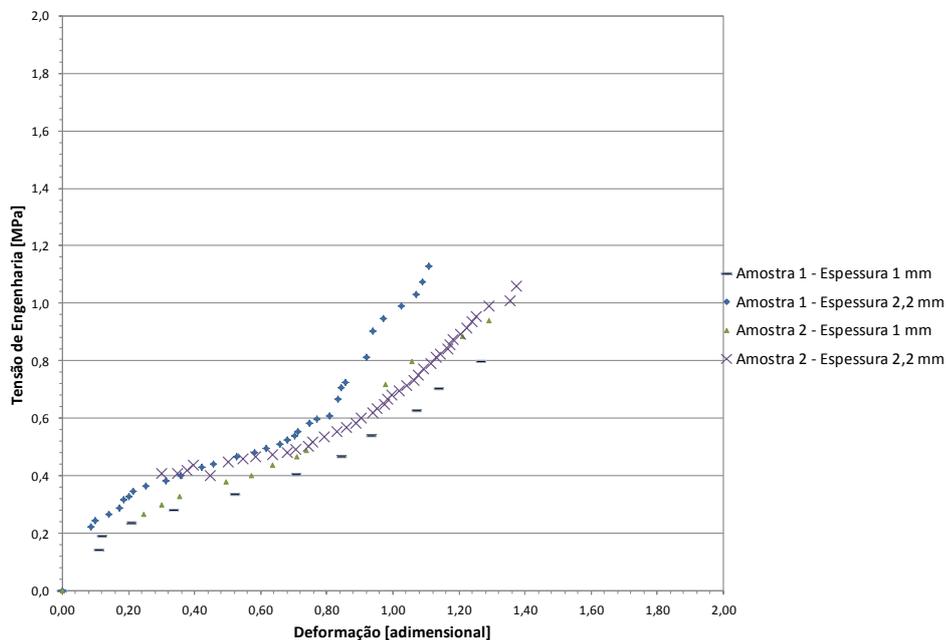


Figura 5.13 – Ensaio de tração biaxial amostras de SBR após pré-condicionamento.

Na Figura 5.14 pode ser visto o comportamento mecânico de duas amostras de silicone quando submetidas ao ensaio de tração biaxial por inflação. As mesmas amostras foram então submetidas a 5 ciclos para perda de rigidez e então realizado um último ensaio para obtenção de dados experimentais (Figura 5.15). Como o alongamento máximo obtido com as amostras de silicone antes de a instabilidade ser atingida era muito baixo quando comparado ao alongamento máximo possível no ensaio de tração uniaxial, a perda de rigidez foi praticamente insignificante, bem como o dano residual.

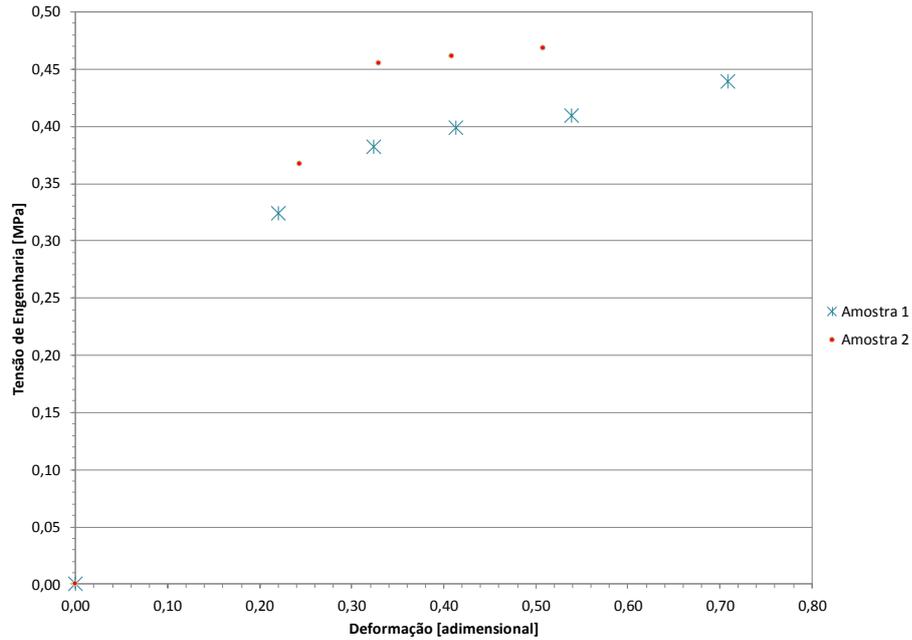


Figura 5.14 – Ensaio de tração biaxial para silicone (sem pré-condicionamento)

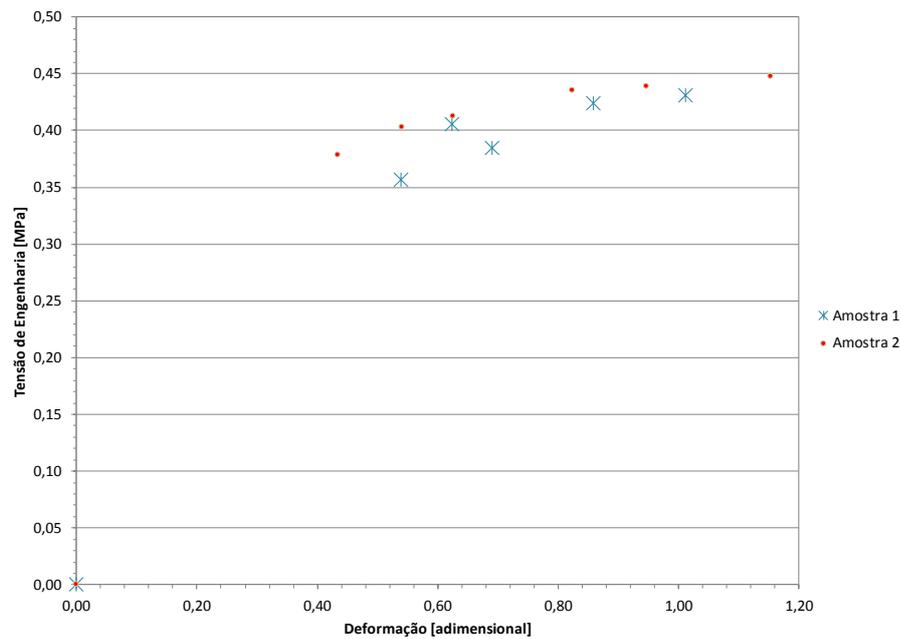


Figura 5.15 – Ensaio de tração biaxial amostras de silicone após pré-condicionamento.

A Figura 5.16 tem o objetivo de ilustrar que a faixa útil de dados obtidos com o ensaio biaxial por inflação é limitada a uma parte de toda a faixa de deformação disponível do material. Destaca-se que para o material não pré-condicionado a instabilidade iniciou em deformações próximas do atingimento do raio crítico, ou seja, para deformações relativamente

pequenas. Com isto, poucos pontos de tensão e deformação puderam ser obtidos. Já para o material após amolecido, pôde-se obter mais dados experimentais, uma vez que a instabilidade surge para deformações mais elevadas. Em ambos os casos uma fração inicial da deformação não é obtida em função da espessura do flange de fixação superior da amostra, a qual impede que imagens sejam geradas até que o alongamento da bolha seja suficiente para que pontos no topo da bolha estejam acima da face superior do flange.

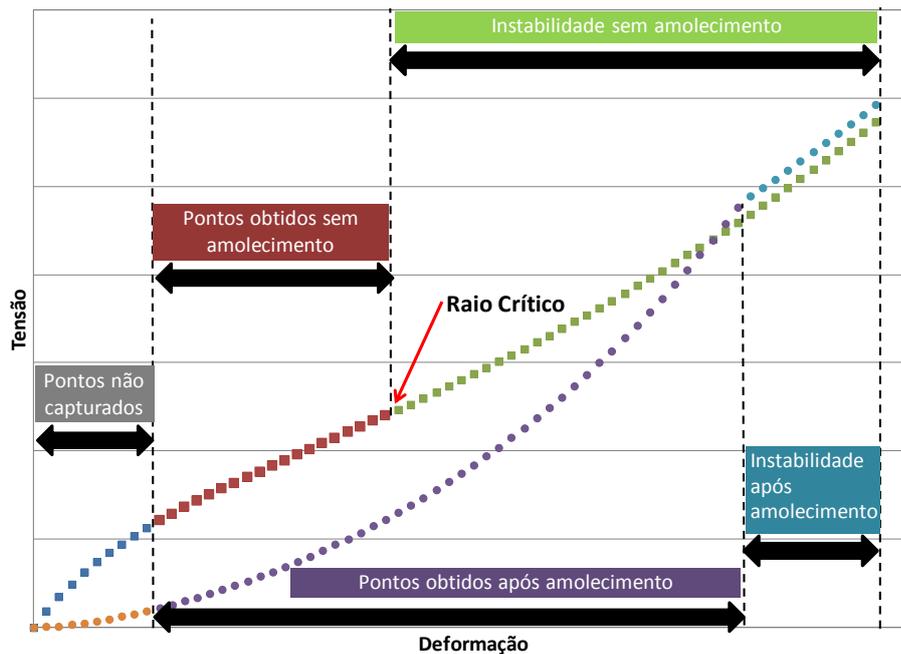


Figura 5.16 – Curvas ilustrativas de ensaio biaxial por inflação.

5.3. Caracterização Mecânica

Os modelos hiperelásticos selecionados para serem avaliados no programa de ajuste de curvas foram os mesmos que estavam disponíveis no programa de análise numérica por elementos finitos: Mooney-Rivlin (2, 3, 5 e 9 termos), Neo-Hookeano, Yeoh (2 e 3 termos), Polinomial, Arruda-Boyce (5 termos), Gent e Ogden (2 e 3 termos) de modo a permitir a reprodução do ensaio biaxial numericamente.

Mesmo o melhor ajuste encontrado pelo programa de ajuste de curvas (Figura 5.17) não forneceu um conjunto de constantes teóricas que apresentasse correlação satisfatória com os dados experimentais e, ao utilizá-las para tentar reproduzir o processo de deformação da bolha, o resultado obtido não representou a realidade. A linha pontilhada corresponde ao

ensaio físico enquanto a linha cheia corresponde a curva ajustada ou teórica (Mooney-Rivlin de 3 termos) segundo o método proposto por Stumpf, 2006.

Para uma pressão de 0,054 MPa de inflação, a bolha gerada no ensaio experimental tinha aproximadamente 33,2 mm de distância do topo para a base, enquanto o resultado numérico foi de 55,3 mm. Percebe-se que, embora o ajuste encontrado tenha obtido boa correlação com os dados do ensaio biaxial, o mesmo não se pode dizer para o ensaio uniaxial, no qual a rigidez inicial estava muito baixa. Justamente este aspecto fez com que a bolha tivesse deformação total por análise numérica extremamente superior àquela esperada.

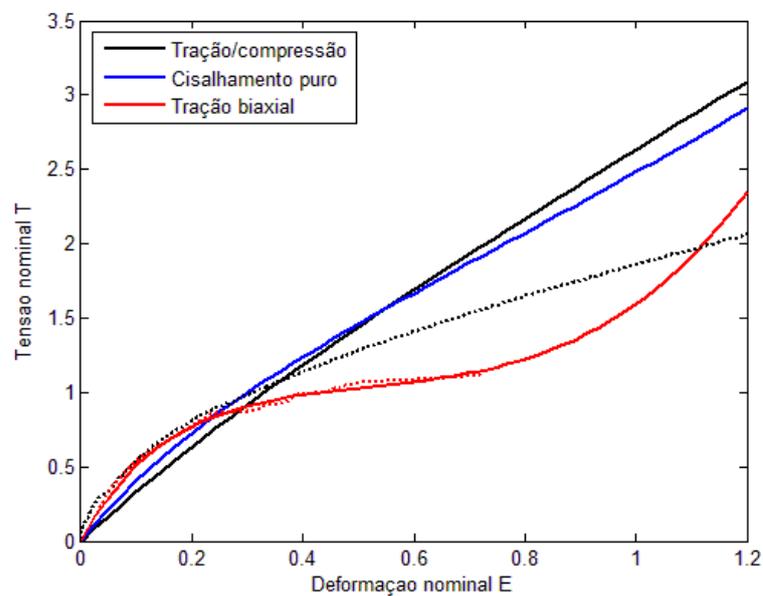


Figura 5.17 – Melhor ajuste obtido para ensaio com SBR sem amolecimento.

Nas Figuras 5.18, 5.19 e 5.20, são vistos os ajustes para o caso em que as amostras foram submetidas a ciclos de pré-condicionamento. Neste caso, os modelos matemáticos mencionados no capítulo 2 do presente trabalho ainda podem, potencialmente, interpolar corretamente toda a faixa de deformação. Dentre os modelos hiperelásticos tradicionais, aquele que apresentou melhor resultado foi o Mooney-Rivlin de 3 termos. Todavia, da mesma forma que para os ensaios sem amolecimento, a correlação entre os dados experimentais e as curvas ajustadas não é satisfatória e as constantes constitutivas não poderiam ser utilizadas como representativas desta matéria-prima.

Para reproduzir com exatidão o processo cinemático de formação da bolha para a amostra após os ciclos de amolecimento em um programa de análise numérica, seria

necessário utilizar modelos hiperelásticos que permitissem a inclusão de dano, o que não foi objetivo do presente trabalho como já mencionado anteriormente. Assim sendo, não é apresentada uma avaliação das constantes hiperelásticas obtidas anteriormente a partir de uma análise numérica por elementos finitos.

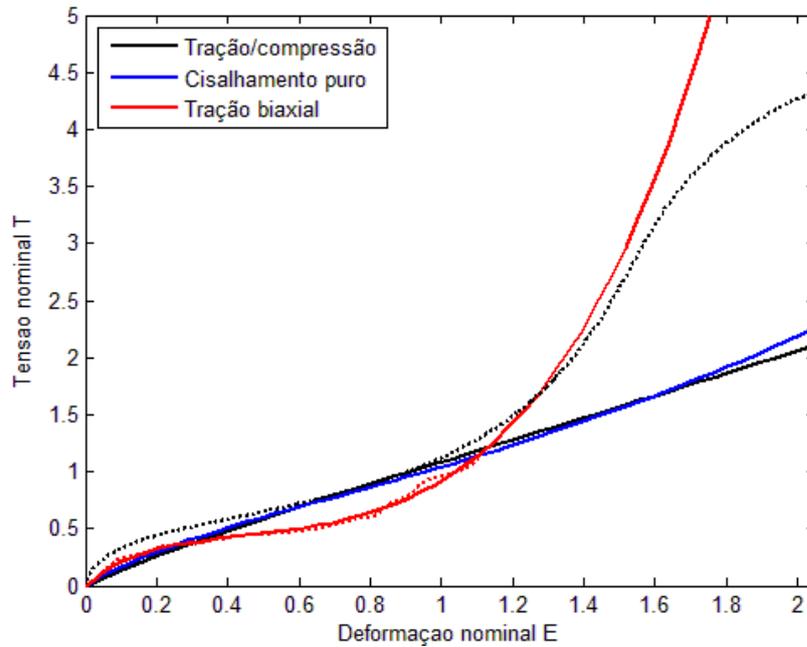


Figura 5.18 – Ajuste de curva multicritério para amostra após amolecimento.

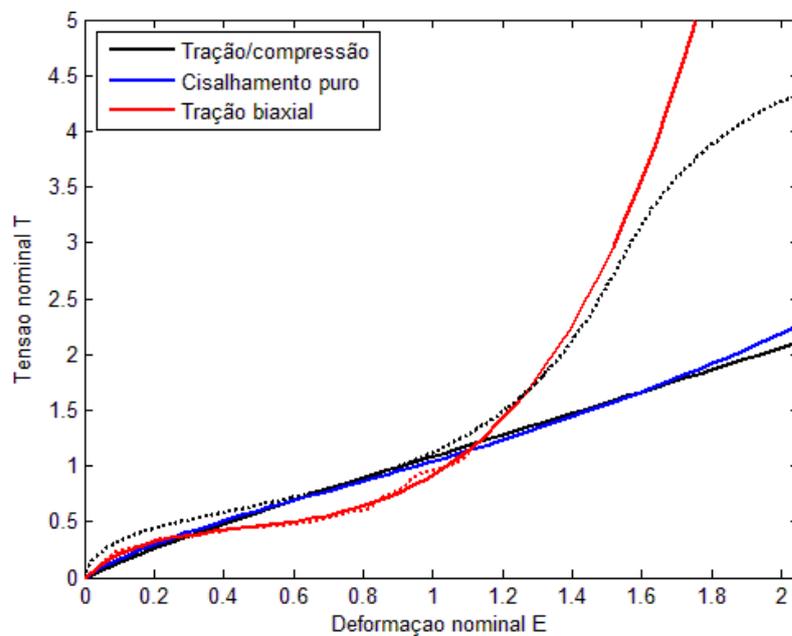


Figura 5.19 – Ajuste de curva utilizando apenas os dados do ensaio biaxial.

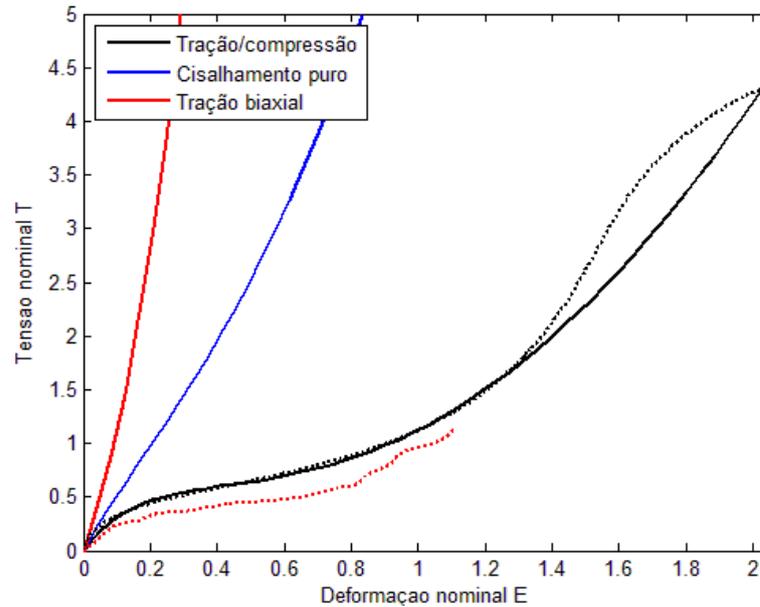


Figura 5.20 – Ajuste de curva utilizando apenas os dados do ensaio uniaxial.

Ao carregar as curvas tensão *versus* deformação no programa de ajuste de curvas para a amostra de silicone sem amolecimento, verificou-se que o modelo hiperelástico que melhor se ajustava aos dados experimentais era o de Mooney Rivlin de 3 termos.

Diversamente ao que verificado para a amostra de SBR, a correlação entre os dados experimentais e a curva ajustada para a amostra de silicone tem uma correlação melhor, muito embora ainda não satisfatória para baixas deformações. Percebe-se que utilizando tanto o ajuste multicritério quanto ajuste apenas pelo ensaio biaxial as constantes constitutivas são relativamente próximas, porém utilizando apenas o ensaio de tração simples, a predição para o biaxial não apresenta bom resultado (Figura 5.21a, 5.21b e 5.22a e 5.22b).

É necessário mencionar, todavia, que foi possível obter mais de um modelo hiperelástico com boa correlação entre a curva teórica e os dados experimentais para o ensaio por inflação. Entretanto, apenas com o modelo mencionado anteriormente (Mooney-Rivlin de 3 termos) a predição usando apenas o ensaio biaxial para o ajuste de curva forneceu boa correlação para o ensaio uniaxial.

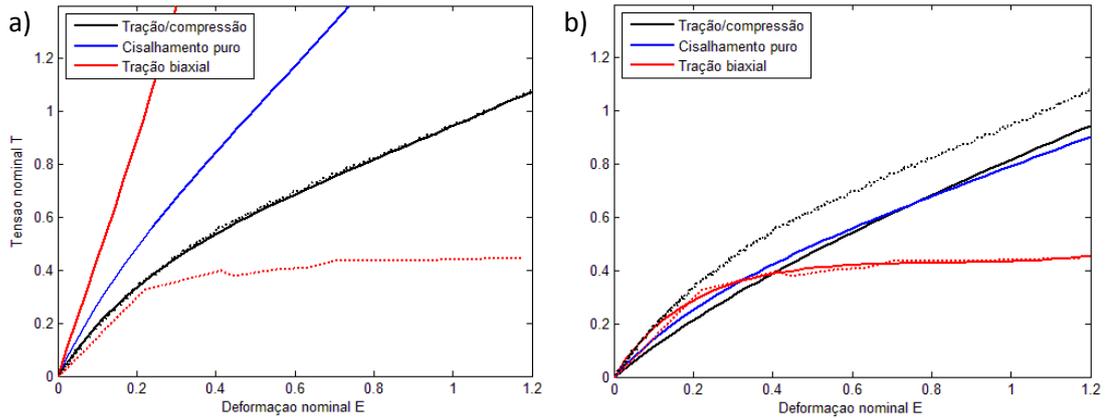


Figura 5.21 – a) Ajuste de curva apenas para ensaio uniaxial e predição para os ensaios biaxial e cisalhamento para amostra de silicone; b) Ajuste apenas para os dados do ensaio biaxial e predição para os demais dados.

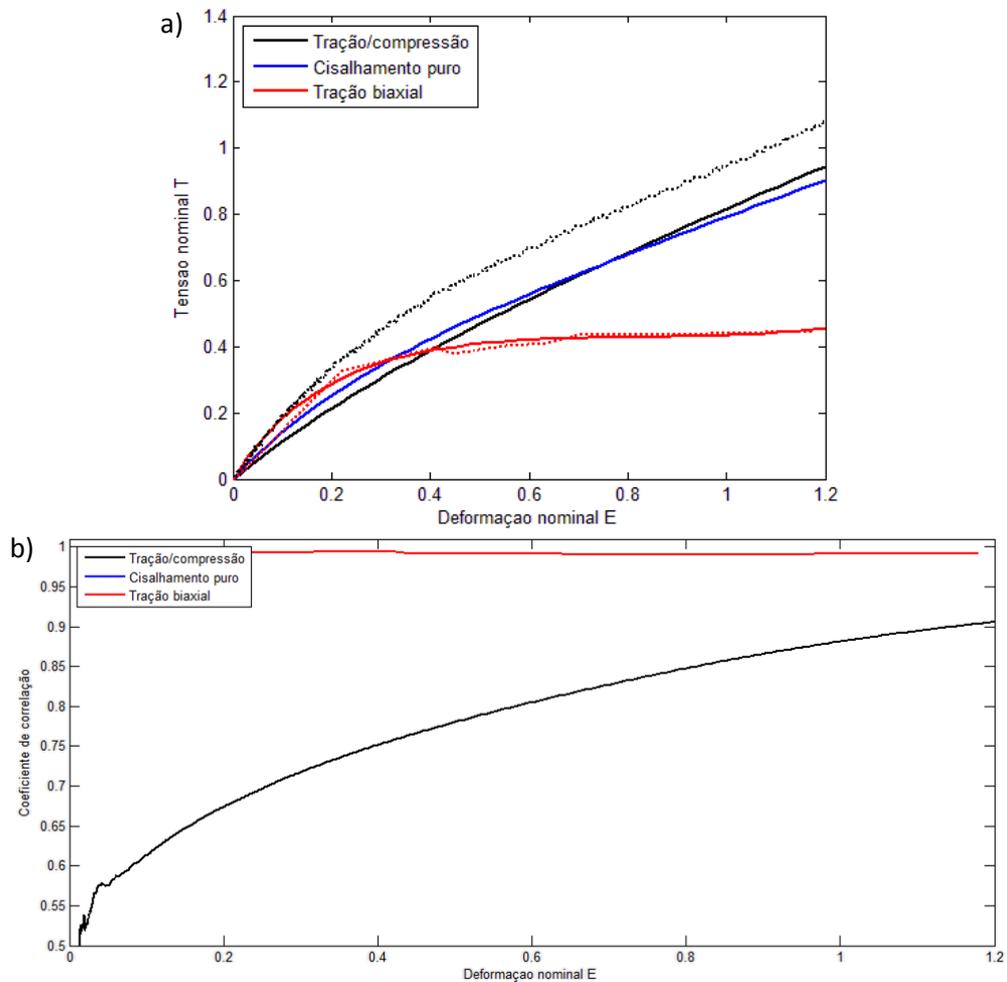


Figura 5.22 – Ajuste de curva multicritério para amostra de silicone: a) sobreposição das predições e dados experimentais; b) Coeficiente de correlação

A partir das constantes constitutivas obtidas a partir do ajuste multicritério, realizou-se uma análise numérica por elementos finitos com o objetivo de reproduzir o ensaio biaxial virtualmente (pressão de entrada de 0,0055 MPa). Os demais parâmetros utilizados foram os mesmos utilizados como visto no capítulo 4.1 (condições de contorno, tipo de elemento, discretização e etc.). A tensão no topo da bolha apresentou diferença de aproximadamente 40% para o dado experimental e o deslocamento vertical (Y_{max}) foi de 37,9 mm, quando que o correspondente ensaio físico apresentou 29,2 mm. Analisando mais detalhadamente as curvas, percebe-se que, como o ensaio biaxial apenas fornece dados a partir de 20% de deformação, a primeira parte das curvas obtidas pelo ajuste multicritério correspondem a um material muito pouco rígido. Isto fica evidente ao analisar o coeficiente de correlação para a curva de tração-compressão, que atinge valores bons apenas próximo a 100% de deformação. Como o alongamento máximo acontece no topo da bolha, a medida em que se monitoram pontos cada vez mais afastados do centro, percebe-se que estes últimos estão sob efeito de alongamentos menores do que 20%, o que poderia explicar a diferença entre o ensaio físico e análise virtual.

A fim de verificar se a falta destes pontos poderia estar influenciando a estimativa do ensaio foram adicionados alguns poucos pontos hipotéticos para deformação abaixo de 20%, porém, que corresponderiam a uma rigidez maior do que aquela inicialmente prevista pelo ajuste de curvas. O resultado pode ser visto na Figura 5.23a, para o qual o ajuste do ensaio biaxial ainda é bom, mas o de tração simples passa a apresentar correlação muito melhor ao ensaio físico (Figura 5.23b).

As constantes constitutivas do modelo Mooney-Rivlin obtidas neste caso foram:

$$C10 = 3.269795e-001$$

$$C01 = -8.818647e-002$$

$$C11 = 3.914081e-003$$

Após alterar os dados do modelo constitutivo para a análise por elementos finitos, verificou-se que o resultado estava muito mais próximo do ensaio físico, cujo topo da bolha agora estava a 31.9 mm da base da amostra e a diferença na tensão verdadeira caiu para 15% (0,55 MPa no ensaio virtual contra 0,48 MPa do ensaio físico). Infelizmente não foi possível obter convergência na análise numérica para avaliar pontos correspondentes pressões de inflação mais elevadas.

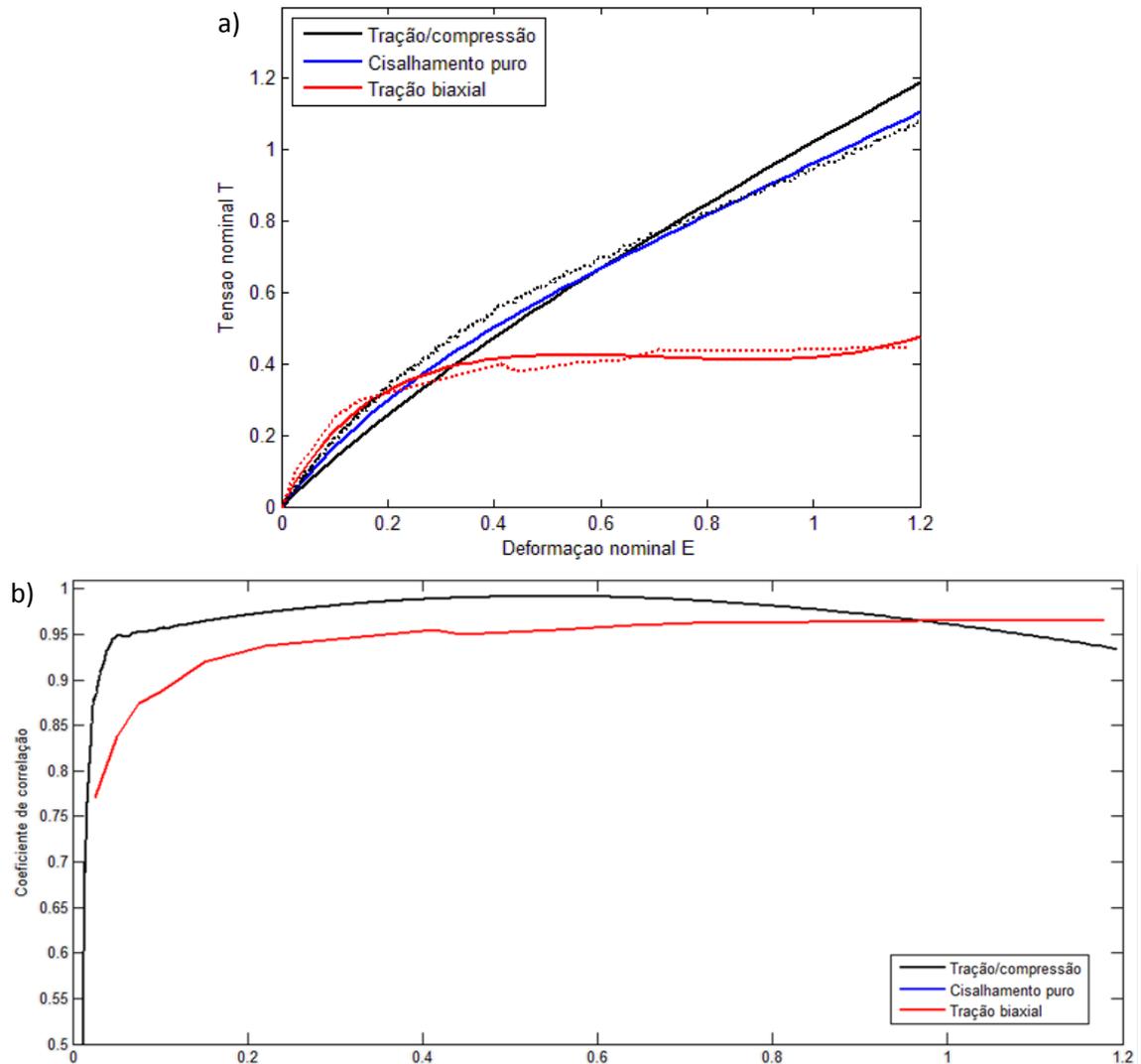


Figura 5.23 – Ajuste de curva multicritério com pontos hipotéticos adicionais: a) sobreposição da curva ajustada sobre os dados experimentais; b) coeficiente de correlação para a curva ajustada

Visto que após a realização de 5 ciclos de carga para amolecimento do material não foi percebida diferença significativa de rigidez e que a deformação máxima obtida até atingida instabilidade era muito pequena quando comparada ao alongamento máximo até a ruptura do material para o ensaio por inflação, não foram realizadas tentativas de ajuste de curva sobre estes dados experimentais. Para o caso em que se deseja realizar tal análise, deveria ser realizado um terceiro ensaio, como o de cisalhamento, para obter deformações suficientemente significativas para os ciclos de perda de rigidez.

É importante mencionar, que tanto para as amostras de SBR quanto silicone sempre foi possível obter mais de um modelo hiperelástico com boa correlação entre a curva teórica (ou ajustada) e os dados experimentais para o ensaio por inflação. Todavia, apenas com os modelos mencionados anteriormente a predição usando apenas o ensaio biaxial para o ajuste forneceu melhor correlação para o ensaio uniaxial.

6 Método Teórico para Determinação do Alongamento

Para o cálculo da espessura instantânea e do alongamento no topo da bolha propõe-se um novo método que não requer marcação da superfície da amostra, utilizando-se o fato de que o material é incompressível, ou seja, não há variação do volume ao longo do processo de deformação.

Sabe-se que a amostra inicial tem a forma de um disco (Figura 6.1) cujo volume é dado por:

$$V_0 = \pi R_0^2 h_0 \quad (6.1)$$

onde o raio útil inicial da amostra plana (R_0) está limitado fisicamente pela abertura na parte superior do dispositivo de fixação, ou seja, este é o volume disponível para a deformação da amostra, muito embora a mesma seja maior, em virtude da sua amarração entre a flange do disco superior e o disco inferior.

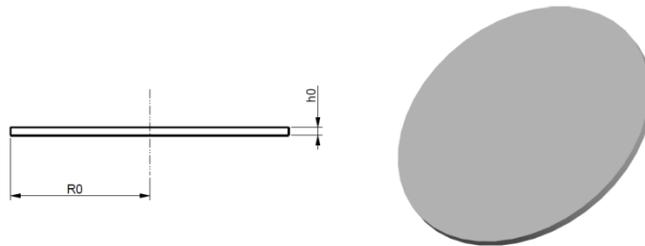


Figura 6.1: desenho e imagem do disco de referência para o cálculo do volume inicial.

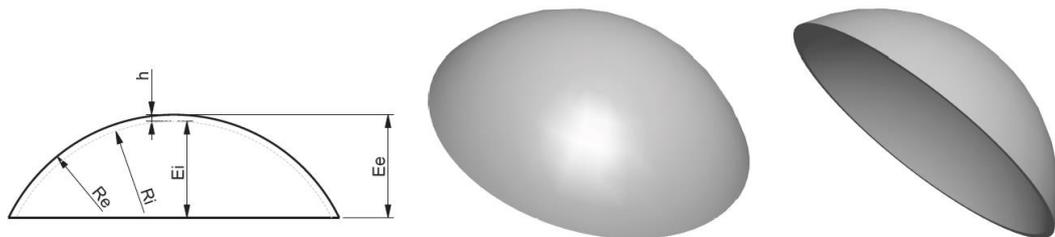


Figura 6.2: Desenho e imagem de calota esférica para o cálculo do volume deformado.

Depois de deformada (Figura 6.2), a forma corresponde a uma calota esférica cujo volume (V_f) é oco internamente e pode ser calculada pela diferença entre os volumes externo (V_e) e interno (V_i):

$$V_f = V_e - V_i = \frac{\pi}{3} E_e^2 (3R_e - E_e) - \frac{\pi}{3} E_i^2 (3R_i - E_i) \quad (6.2)$$

As variáveis associadas ao volume interno podem ser reescritas, deixando explícita a espessura (variável que se deseja encontrar):

$$R_i = R_e - h \quad (6.3)$$

$$E_i = E_e - h \quad (6.4)$$

Utilizando-se o fato de que os volumes finais e iniciais são iguais, expandindo as multiplicações da equação 6.2 e aplicando as substituições das equações 6.3 e 6.4, chega-se a uma equação cúbica na espessura:

$$h^3 - \frac{3}{2}h^2(R_e + E_e) + 3hR_eE_e - \frac{3}{2}R_eE_e^2 + \frac{1}{2}E_e^3 + \frac{1}{2}E_e^2(3R_e - E_e) - \frac{1}{2}(R_0^2h_0) = 0 \quad (6.5)$$

No anexo B pode-se verificar as equações para obtenção da solução exata da equação 6.5. De acordo com Spiegel, 1969, sendo todos os termos da equação reais e, de acordo com o discriminante da função (equação B.9), as raízes podem ser:

- Duas raízes complexas e conjugadas e uma raiz real ($D>0$);
- Todas raízes reais e pelo menos duas iguais ($D=0$);
- Todas as raízes reais e diferentes entre si ($D<0$).

É de se esperar que o discriminante seja sempre maior do que zero, uma vez que para uma determinada combinação de termos E_e e R_e exista apenas uma única configuração física, pois a deformação não é instável, como ocorre nos casos de flambagem.

Uma vez conhecida a espessura, é possível correlacionar o alongamento na direção normal à superfície da calota (λ_3):

$$\lambda_3 = \frac{h}{h_0} \quad (6.6)$$

E invertendo a relação 2.37 obtém-se, ainda, o alongamento nas direções radial e tangencial:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \quad (6.7)$$

O cálculo do alongamento, todavia, não pode ser feito diretamente a partir das equações 6.5 a 6.7, pois durante o processo de deformação apenas a parte superior da bolha tem forma esférica perfeita, como pode ser visto na Figura 2.6, por exemplo. Assim, para determinar a geometria hipotética de uma amostra que corresponda a uma calota completa (Figura 6.3), cujo raio é aquele interpolado (R), porém limitada na sua parte inferior pela abertura do disco de fixação superior (\emptyset_{base}), resta apenas uma variável a ser determinada, que é a posição vertical do centro da bolha em relação ao sistema de coordenadas ($b_{esfera_perfeita}$):

$$b_{esfera_perfeita} = \sqrt{R^2 + (R_0)^2} \quad (6.8)$$

Conforme visto na Figura 4.4, para um mesmo raio podem existir duas posições possíveis para o centro do círculo (b), uma na qual o centro está acima da base de fixação e outra na qual está abaixo. Para resolver este problema, verifica-se o centro interpolado da esfera, se o mesmo for maior do que zero, significa que o centro da esfera perfeita também o será.

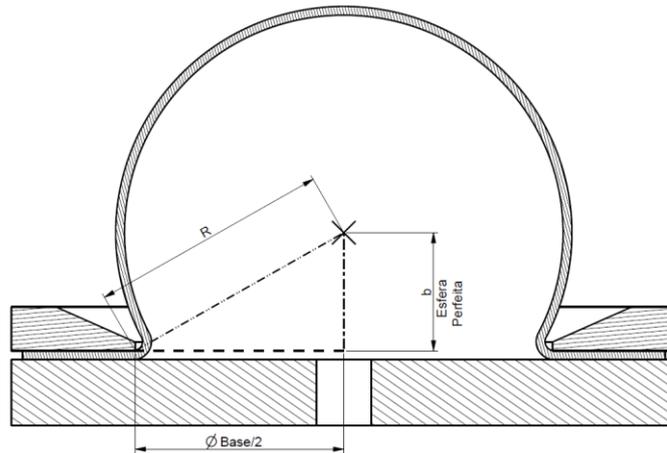


Figura 6.3: Esquema para cálculo do centro do círculo de uma esfera perfeita

Na rotina “Biaxial.m” o cálculo das raízes da equação 3.13 utilizou a função “roots” [Matlab 2010 b User’s Manual, 2010], a qual tem como requisito que os coeficientes multiplicativos sejam utilizados na forma de um vetor. Como já visto no capítulo 3, este problema tem apenas uma raiz real, a qual corresponderá à espessura da amostra no instante em que a imagem foi capturada. As equações 3.14 e 3.15 são então utilizadas para o cálculo do alongamento.

Tal procedimento de cálculo é possível apenas porque não é de interesse saber o que está acontecendo com a amostra fora da região na qual a mesma se deforma conforme uma esfera. Ao determinar um centro hipotético, está assumindo-se que toda amostra deformaria de forma igual a uma esfera, com o mesmo alongamento e mesma espessura que aquela vista no topo da imagem capturada.

A partir dos dados coletados da análise numérica vista no capítulo 4.1 e dado que são conhecidos o raio real e o centro da esfera perfeita, aplicaram-se as equações 6.5 e 6.7 para obter o alongamento. A Figura 6.4 apresenta a diferença percentual entre o alongamento teórico e aquele informado pela análise numérica onde valores positivos indicam que o raio interpolado é superior àquele esperado (R_{ζ}). A região cujo alongamento é próximo de 1,5

vezes corresponde à transição onde o raio crítico é atingido e o centro da esfera (parâmetro “ b ”) muda de sinal (negativo para positivo). Valores positivos indicam que o resultado numérico é superior ao teórico.

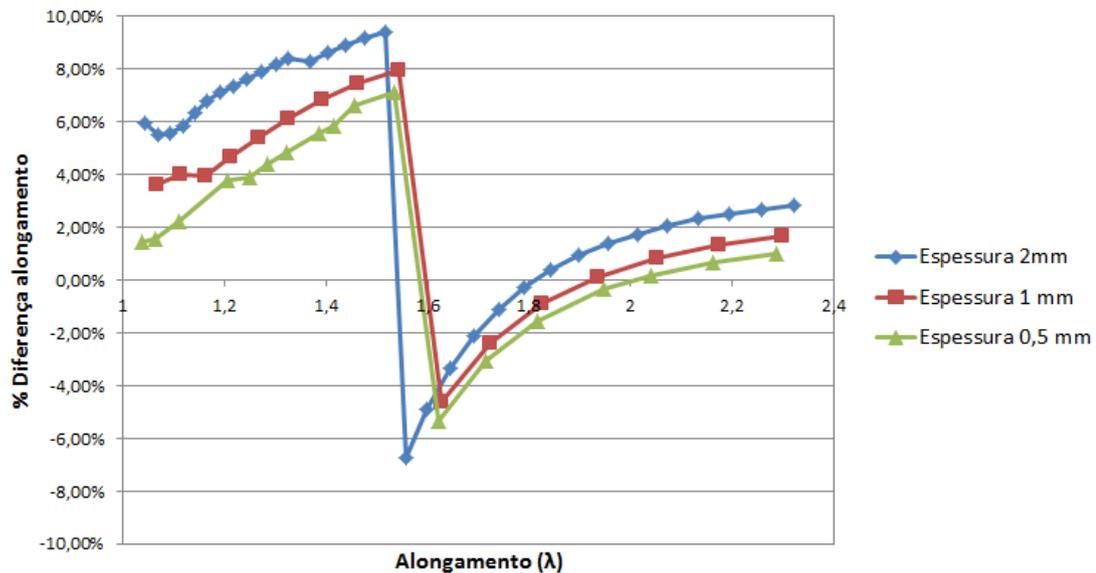


Figura 6.4: Diferença percentual entre o alongamento obtido pela análise numérica e o teórico a partir das equações 6.5 e 6.7.

Tal transição não é suave, uma vez que o menor raio atingido é de 52,2 mm, ligeiramente maior que o raio de abertura do disco de fixação (50 mm), fazendo com que o centro da esfera (parâmetro b) tenha um rápido incremento para que a taxa de aumento do alongamento não mude de forma irregular neste intervalo de deformação. Deve-se considerar ainda que há uma mudança de sinal em b ao passar pelo raio crítico. Trata-se puramente de um problema matemático em função das equações utilizadas e da programação.

A Figura 4.14 apresenta a diferença entre o alongamento da tensão teórica pela equação 3.6 e aquele obtido pela análise numérica. Neste caso, a combinação de diferenças já mostradas nas Figuras 4.14 e 6.4 faz com que as diferenças na curva tensão verdadeira *versus* alongamento (Figura 6.5) atinjam valores significativos. Cabe lembrar que para o cálculo da tensão verdadeira é necessário calcular a espessura instantânea, a qual está associada pela equação 6.5 ao alongamento. Valores positivos indicam que o alongamento numérico é superior ao teórico.

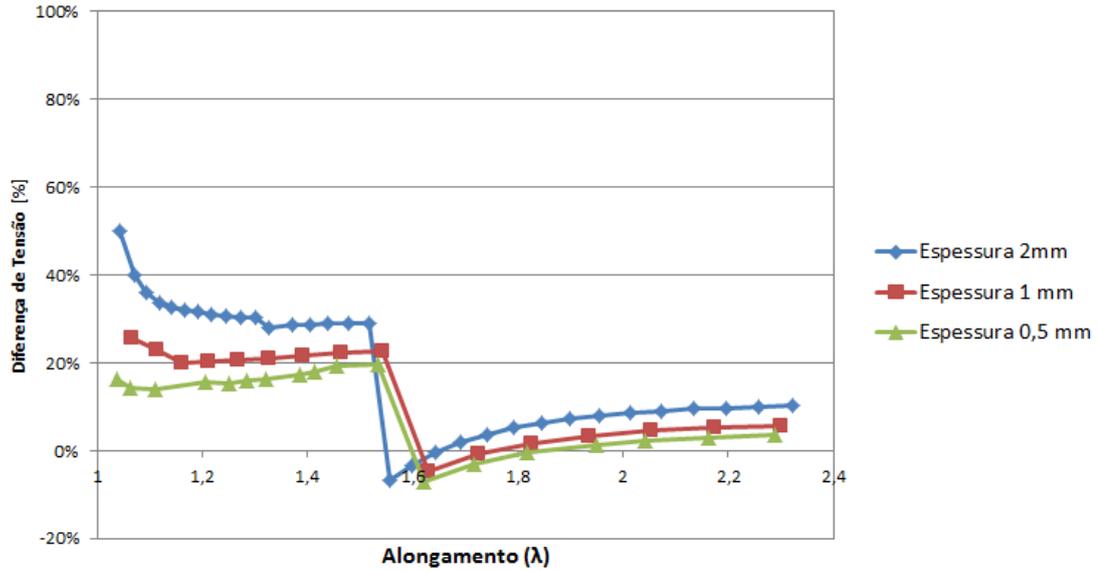


Figura 6.5: Diferença entre a tensão verdadeira obtida pela análise numérica e a tensão verdadeira obtida utilizando o algoritmo de tratamento dos dados.

Visto que no cálculo da equação 6.8, que identifica o parâmetro b que corresponderia a uma deformação cujo todos os pontos correspondessem a uma esfera, o raio é um dado de entrada e não poderia ser ajustado, indagou-se qual seria o valor que seria necessário adicionar ao raio de abertura da flange de fixação superior (R_0) para que a diferença encontrada na Figura 6.4 fosse minimizada, ou seja, de forma que a diferença entre o volume inicial e o volume instantâneo também sejam minimizadas.

A espessura instantânea neste caso deixou de ser uma incógnita e foi calculada a partir do alongamento obtido pela análise numérica. A variável a ser encontrada na equação 6.5 passa a ser E_e , que pode ser escrita como função do raio e da distância do centro da bolha ao sistema de coordenadas (permanece um polinômio de ordem cúbica). Assumindo que exista uma distância $b_{correção}$ diferente daquela obtida pela equação 6.7, fica-se com:

$$E_{e_{correção}} = R + b_{correção} \quad (6.9)$$

Assim, surge o fator de correção (f_k) para ser adicionado ao raio de abertura da flange:

$$f_k = \sqrt{R^2 - b_{correção}^2} - R_0 \quad (6.10)$$

As Figuras 6.6a e 6.6b mostram qual deveria ser o fator de correção para que o alongamento calculado pela equação 6.8 coincidissem com aquele obtido pela análise numérica, tanto ao variar o parâmetro b quanto ao variar o raio. Verifica-se que o parâmetro tem um comportamento antes do raio crítico e uma após o raio crítico.

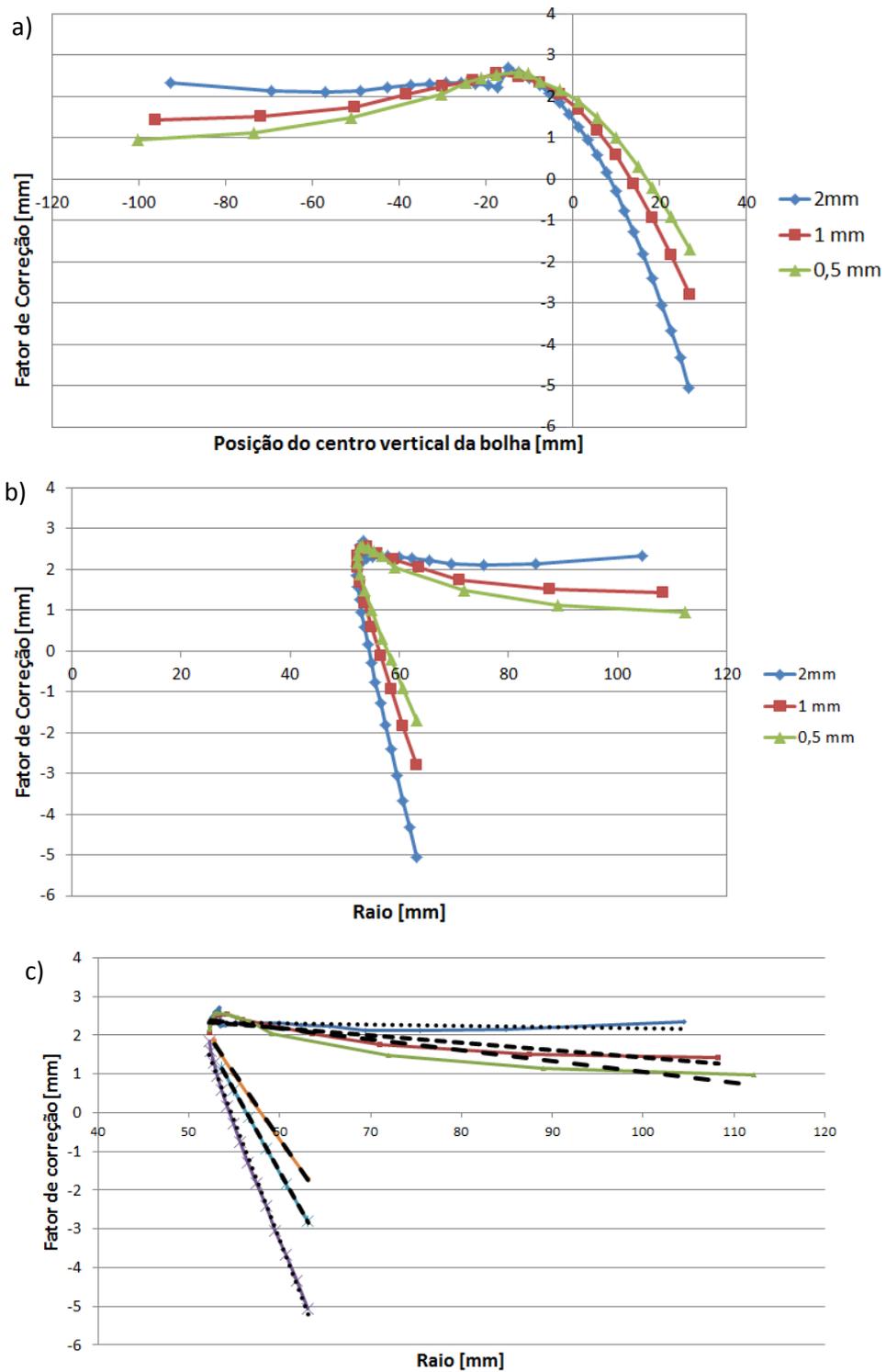


Figura 6.6: a) Variação do fator de correção f_k ao variar o centro vertical da bolha; b) ao variar o raio e c) interpolação de retas sobre cada uma das curvas.

Dado que o raio é um parâmetro físico mensurado e um dado de entrada, optou-se por encontrar dois conjuntos de interpolação linear com base nos parâmetros físicos (geométricos) conhecidos. Na Figura 6.6c percebe-se que a interpolação linear adere bem às curvas teóricas, principalmente no trecho que representa a expansão da bolha após ter atingido o raio crítico (quando o fator de correção passa de positivo para negativo ao expandir o raio). No algoritmo foi inserida uma verificação para distinguir entre as duas curvas a partir do momento em $b > 0$, ou seja, quando o raio crítico é atingido.

Assim:

- $b \leq 0$:

$$f_k = m_1 R + n_1 \quad (6.11)$$

$$m_1 = -\frac{2R_0}{1 \times 10^4 h_0} \quad (6.12)$$

$$n_1 = \frac{5}{2} - m_1 R_0 \quad (6.13)$$

- $b > 0$:

$$f_k = m_2 R + n_2 \quad (6.14)$$

$$m_2 = -2 \left(\frac{h_0}{R_0} + \frac{1}{10} \right) \quad (6.15)$$

$$n_2 = \frac{5}{2} - m_2 R_0 \quad (6.16)$$

Finalmente, a equação 6.8 pode ser reescrita para acrescentar o fator de correção, levando a:

$$b_{f_k} = \sqrt{R^2 + (R_0 + f_k)^2} \quad (6.17)$$

onde b_{f_k} corresponde a uma distância vertical fictícia do centro da bolha até o sistema de coordenadas, equivalente ao processo de deformação em que todos os pontos da amostra deformariam de acordo com uma esfera e cujo volume é constante, não varia ao aumentar o alongamento.

A Figura 6.7 mostra a diferença entre o alongamento obtido pela análise numérica e por aquele teórico calculado pelas equações 6.5, 6.7, 6.9 e 6.17. Nota-se que os valores estão menos dispersos, porém ainda existe alguma instabilidade próxima ao raio crítico. Para grandes valores de alongamento a diferença pode ser ignorada.

Na Figura 6.8 percebe-se que a diferença entre a tensão obtida pela análise numérica com aquela teórica utilizando o alongamento calculado com o fator de correção f_k diminui significativamente quando comparado com o resultado anterior obtido na Figura 6.5. Todavia,

tanto para pequenas deformações quanto para alongamento próximo ao raio crítico a diferença fica maior ou próxima de 10%.

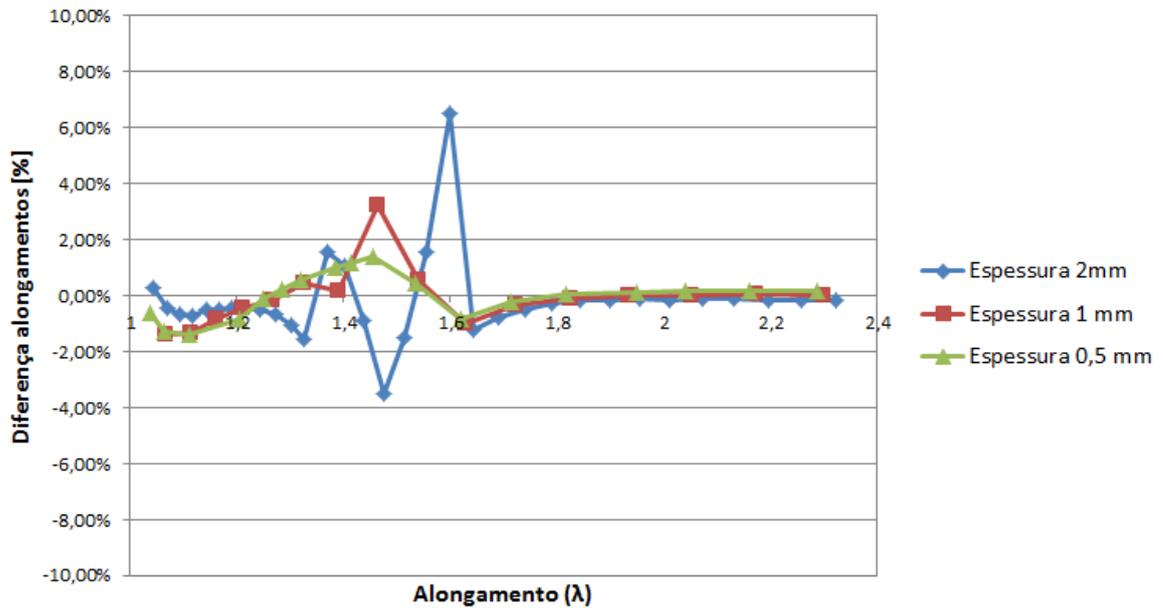


Figura 6.7: Diferença entre o alongamento obtido pelo cálculo teórico acrescentando-se o fator de correção (f_{κ}) em relação àquele obtido pela análise numérica.

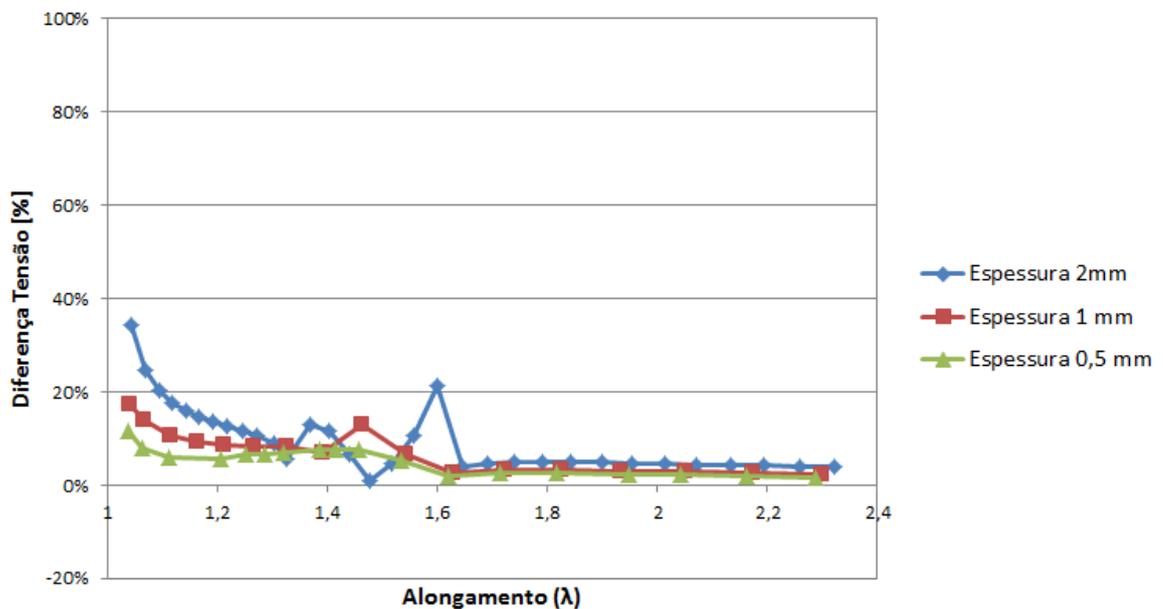


Figura 6.8: Diferença entre a tensão verdadeira obtida pela análise numérica e a tensão verdadeira obtida utilizando o algoritmo de interpolação com fator de correção (f_{κ}).

Visto que a instabilidade numérica próxima do raio crítico não pôde ser eliminada, outra abordagem foi analisada a partir da verificação da altura da bolha, uma vez que esta não apresenta o inconveniente de uma troca de sinal. A Figura 6.9 permite identificar que o alongamento praticamente é independente da espessura (diferença máxima menor do que 2% para uma altura de 90 mm).

Outra característica interessante é a de que um polinômio de quarta ordem permite obter um coeficiente de correlação R^2 de praticamente 1, o que está graficamente visível na Figura 6.9. Usando o método de mínimos quadrados [Maple 16.0, 2012] para realizar a interpolação obteve-se as seguintes constantes multiplicativas do polinômio para a curva de 2 mm:

$$a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0 \quad (6.18)$$

Onde

$$a_1 = 1.16326818910288E-8$$

$$a_2 = -0.00000351439708010733$$

$$a_3 = 0.000397852961730708$$

$$a_4 = -0.00113040479411371$$

$$a_5 = 1$$

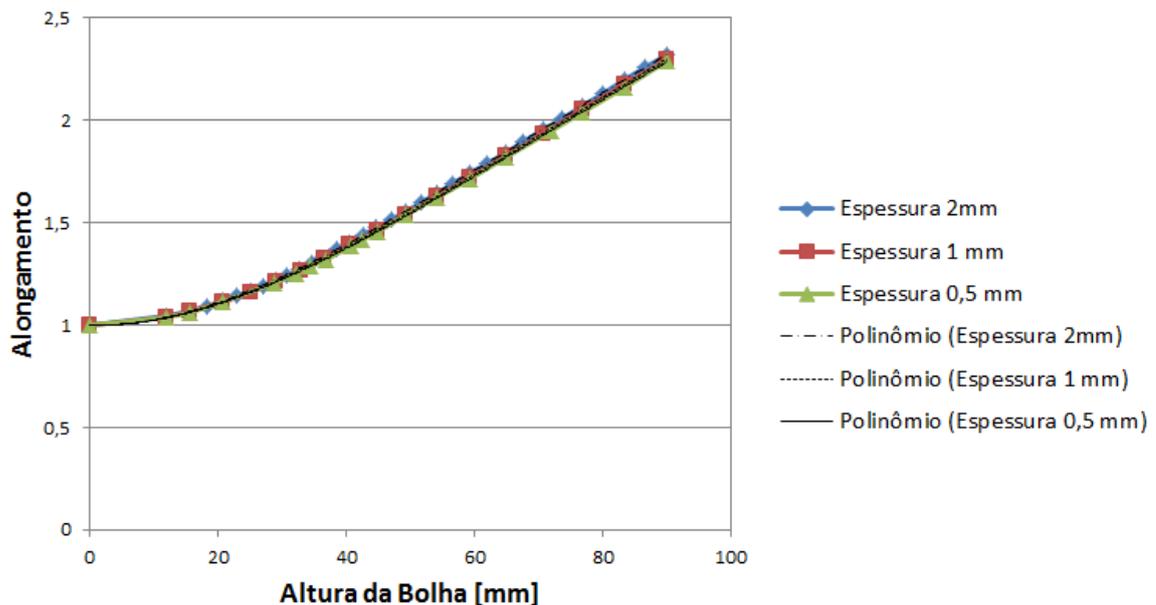


Figura 6.9: Variação do alongamento (λ) com a coordenada do topo da bolha (Y_{max}) e curvas de interpolação de polinômios de quarta ordem sobre os pontos da análise numérica.

Muito embora a partir do momento em que o alongamento supera o raio crítico exista um achatamento da bolha, ou seja, nem todos os pontos da amostra deformada podem ser interpolados por uma esfera perfeita (Figura 4.13), neste equacionamento, tal efeito não interfere no cálculo do alongamento. Isto porque nenhuma hipótese está sendo feita quanto à geometria deformada.

Na Figura 6.10 pode-se visualizar a diferença no alongamento entre o método da altura e aquele obtido numericamente. Como se desejava, não há mais instabilidade próxima ao raio crítico, embora exista uma pequena dependência da espessura, a qual diminui ao reduzir a própria espessura. Para valores muito baixos de alongamento esta dependência deixa de existir.

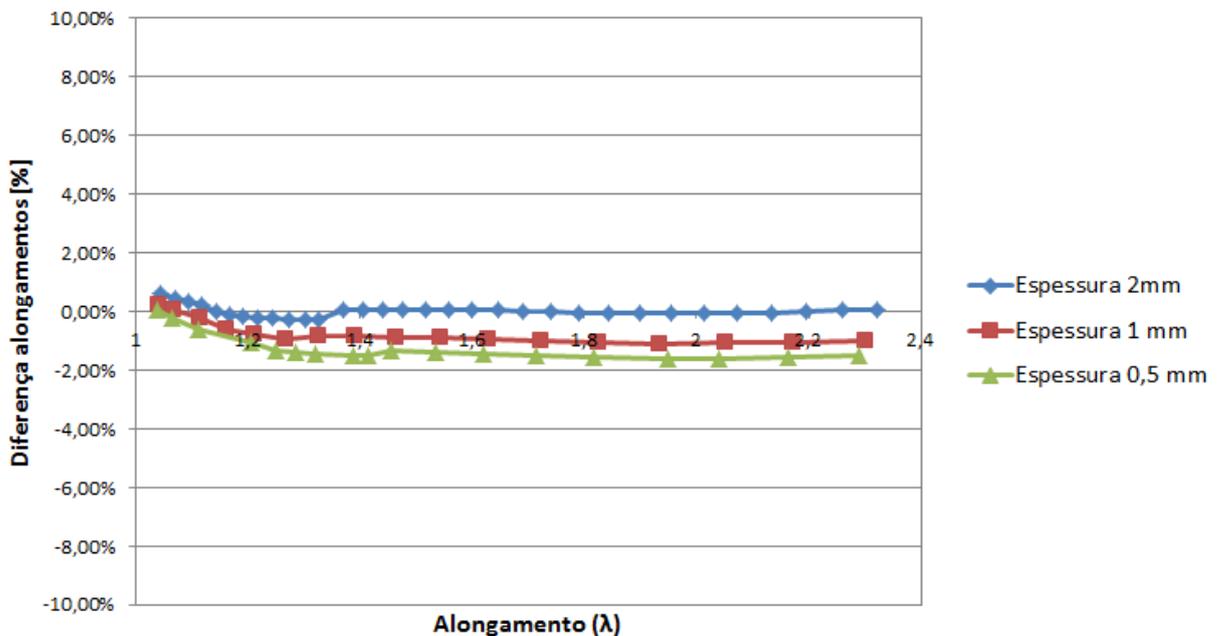


Figura 6.10: Diferença percentual entre o alongamento teórico e o numérico a partir do método da altura da bolha.

Este método proposto serve apenas para o material que está sendo analisado, uma vez que, para uma mesma altura da bolha Hart-Smith e Crisp, 1967, e Verron e Marckmann, 2003, já mostraram que podem existir diferentes perfis de deformação, ou seja, diferentes valores de alongamento. Sendo assim, o método é apenas apresentado neste texto para referência como uma potencial solução do problema, necessitando de uma maior análise para

propor um modelo e uma formulação matemática capazes de correlacionar as constantes a_i com os parâmetros físicos do ensaio.

Na Figura 6.11 é feita uma comparação entre a diferença entre o alongamento calculado pelo melhor método proposto por Reuge *et al.*, 2001 (o qual apresenta rápida divergência próximo ao raio crítico) e pelos dois presentes métodos (altura da bolha e volume constante com fator de correção).

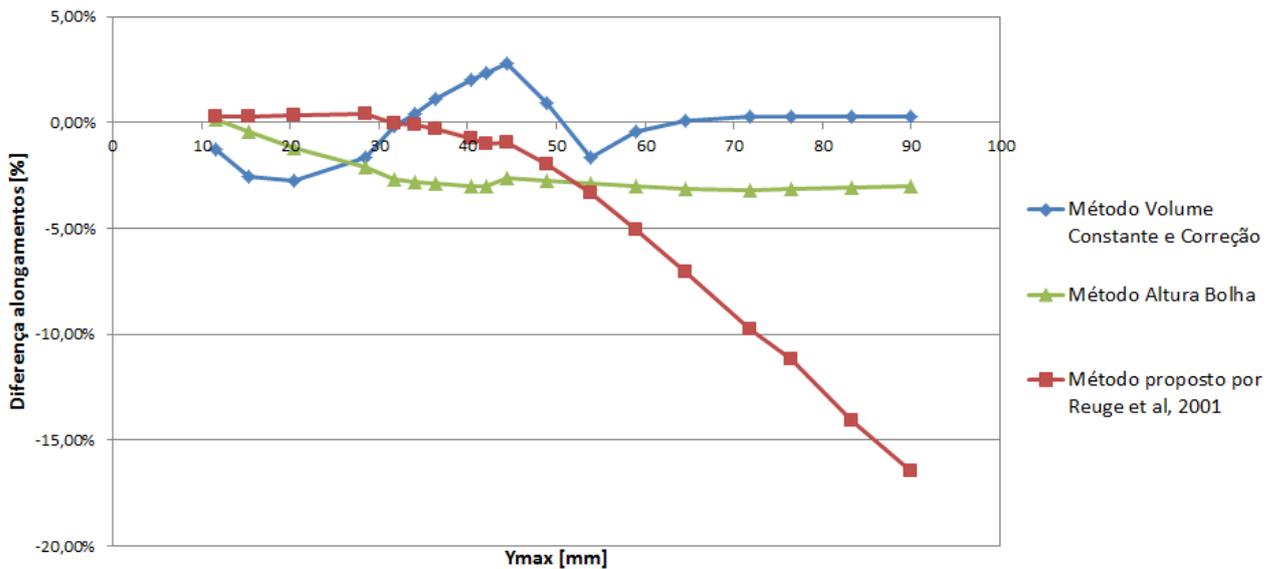


Figura 6.11: Diferença entre o alongamento obtido pela análise numérica em relação àqueles pelo método do volume constante, da altura da bolha e o proposto por Reuge *et al.*, 2001.

A comparação entre o alongamento calculado pela equação 6.10 (deformação real ou medida) e o método teórico (volume constante com fator de correção) para os dados coletados sem ciclos de amolecimento com as amostras de silicone e SBR mostradas no capítulo 5 é apresentada na Figura 6.12. Assim como na verificação por análise numérica apresentada anteriormente, o maior erro foi encontrado quando próximo ao raio crítico. Para as amostras após os ciclos de amolecimento o erro encontrado foi superior aquele visto na Figura 6.12.

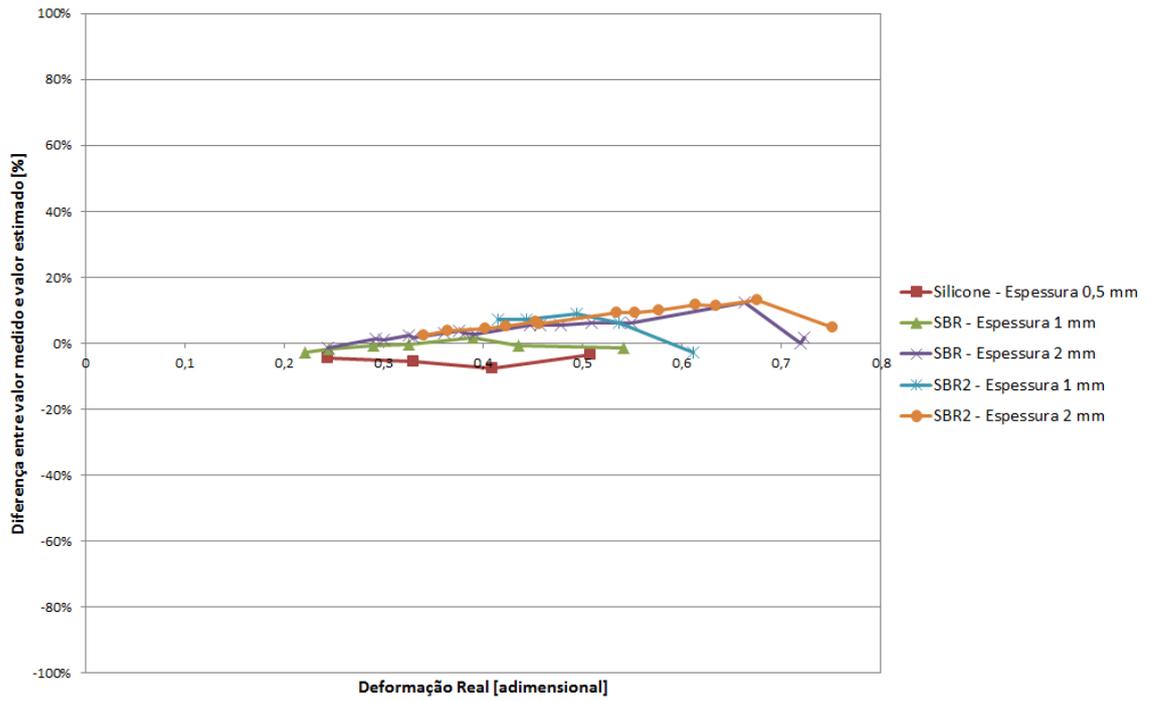


Figura 6.12 – Comparação entre o método teórico de cálculo do alongamento e valores obtidos por ensaio de tração biaxial (sem amolecimento).

7 Discussão dos Resultados e Conclusões

Em alguns tipos de ensaio biaxial é comum ser necessária a fabricação de matrizes de corte que respeitem a geometria com tolerâncias pequenas (até 10 vezes menores do que a menor dimensão) para a confecção da amostra. Este não é o caso do ensaio por inflação e pode-se afirmar que a preparação do ensaio é relativamente simples, não havendo requisitos como geometria complexa, tanto do dispositivo, quanto da amostra. Prova disto é que em todos os experimentos realizados e apresentados não foi verificada influência no resultado advinda do processo de preparação. A mesma afirmação pode ser feita quanto à fixação do disco superior no inferior, onde não foram verificados escorregamentos ou danos que pudessem comprometer o ensaio.

A princípio, não existe um requisito mínimo de diâmetro de abertura da base fixação para geração da bolha e a literatura relata diversos valores diferentes utilizados. Muito embora este tema não tenha sido estudado detalhadamente, poder-se-ia aconselhar que a abertura seja a menor possível e um valor sugerido seria padronizar o ensaio com diâmetros da ordem 50 mm. A razão para isto é a de que, como se sabe, imperfeições superficiais podem acontecer em materiais elastoméricos e quanto maior a área, maior a probabilidade de encontrar uma imperfeição que leve a uma ruptura prematura da amostra. Outro argumento é que menos material se faz necessário para confecção da amostra, o que é útil no caso de materiais caros ou cuja obtenção e conservação é difícil, como no caso de tecidos biológicos.

Dentre os requisitos dos equipamentos de medição a serem utilizados, pode-se concluir que o sistema de pressurização deve ser capaz de incrementar e mensurar a pressão em passos relativamente pequenos, de pelo menos 0,001 MPa ou ainda menos. Isto pôde ser percebido nos ensaios realizados com a amostra silicone. Amostras de borracha ou até de tecido biológico, frequentemente têm rigidez muito baixa, sendo inclusive inferior à da amostra menos rígida usada no presente trabalho.

A espessura elevada do disco superior de fixação do corpo de prova acabou por prejudicar a análise dos resultados, sendo a mesma desproporcional às pressões envolvidas no processo de inflação. Assim, deformações inferiores a 25% foram perdidas, uma vez que o topo da bolha ficou abaixo da face superior do dispositivo, não sendo capturado pela câmera. A importância destes pontos ficou evidente ao tentar determinar as constantes constitutivas para as amostras de silicone e reproduzir o ensaio de inflação por análise numérica, tendo sido

necessário adicionar alguns pontos estimados na faixa de deformação mencionada para melhorar o resultado.

É importante lembrar a comparação feita entre o valor da tensão verdadeira obtido pela simulação de um ensaio de inflação por análise numérica e aquele estimado pela teoria de membrana (validação da rotina de aquisição de imagem do capítulo 4) na qual há uma divergência da ordem de pelo menos 5% a 10% para deformações próximas do raio crítico e que são ainda maiores para deformações cada vez menores (podendo superar 25% dependendo da espessura da amostra). Curiosamente, não foi encontrada na literatura nenhuma análise seguindo a mesma abordagem para validação do uso de teoria de membrana.

O método teórico para obtenção da deformação apresentado no presente trabalho (volume constante), que pressupõe esfericidade e espessura constante na amostra, apresentou os melhores resultados já registrados em relação aos trabalhos que abordaram este tema na literatura (Figura 6.11). Mesmo assim ainda é aconselhado utilizar métodos mais complexos que requeiram ou contato com a amostra (com o uso de apalpadores ou paquímetros) ou uso de marcação sobre a superfície e tratamento de dados por aquisição de imagem, como feito por Reuge *et al.*, 2001 ou Shi e Selvadurai, 2012. Isto porque, em configurações deformadas próximas ao raio crítico verificou-se um erro significativo, o qual tende a diminuir quanto mais afastada a deformação do raio crítico. Os trabalhos anteriormente publicados, como Hart-Smith *et al.*, 1967 ou Verron e Marckmann, 2003, nos quais análises acerca da variação do perfil da bolha e a variação da espessura (especialmente este último) foram feitas podem indicar um caminho para obter um fator de correção para o método aqui proposto. Todavia, nos casos em que não for possível realizar marcações sobre a amostra em virtude de ataque químico ou situações de elevada temperatura que degradariam o material aditivo, além de outros exemplos, o presente método pode ser uma alternativa para aproximar a deformação dentro de uma faixa de erro conhecida e que pode ser levada em consideração quando se está determinando as propriedades mecânicas.

O método utilizado para obtenção do raio no topo da bolha se mostrou confiável em todos os testes realizados, bem como a determinação da tensão no ponto central da superfície esférica quando analisando dados tanto provenientes de imagens oriundas de análises numéricas quanto para imagens oriundas de ensaios físicos. Obviamente este mapeamento por uma única imagem gera dados bidimensionais e, a princípio, pode ser aplicado apenas para materiais que são conhecidamente isotrópicos. Sistemas com aquisição de imagens múltiplas

e simultâneas para a geração do mapeamento superficial tridimensional são certamente mais complexos de processar e, como citado acima, adicionariam um custo maior do que o benefício gerado para os experimentos aqui analisados.

Os métodos que utilizam apenas um ponto no ápice da bolha e supõe forma esférica perfeita em todos os seus pontos para cálculos da tensão e do alongamento podem levar a erros e são desaconselhados (muito embora frequentemente relatados na literatura para fim de comparação de resultados numéricos com ensaios experimentais). Isto porque durante o processo de deformação, o perfil pode não corresponder a uma bolha perfeita, especialmente para grandes deformações nos quais a coordenada do centro da esfera pode estar muito abaixo do que o esperado para uma esfera perfeita. Tem-se a percepção de que a bolha estivesse sendo pressionada para baixo no seu topo, achatando-a, mas mantendo o perfil superior esférico apenas numa faixa cada vez mais limitada.

Sabendo que o ensaio uniaxial tem apenas o primeiro invariante de deformação não nulo, seria de esperar que o mesmo não seria capaz de fornecer uma boa predição da deformação do estado biaxial, uma vez que neste o primeiro e segundo invariantes não são nulos. Já a situação contrária seria plausível e foi verificada ao realizar os ajustes de curva, sendo a diferença entre as constantes hiperelásticas obtidas a partir do ajuste multicritério ou apenas a partir dos dados do ensaio biaxial relativamente pequenas para um mesmo modelo hiperelástico. Mesmo assim sempre será necessário um ensaio adicional, uma vez que mais de um modelo hiperelástico apresenta boa correlação apenas para o ensaio biaxial ou apenas para o ensaio uniaxial, sendo que apenas um destes modelos forneceu boa aproximação para as ambas as curvas simultaneamente como visto no capítulo 5.

Para o conjunto de amostras utilizado, o ensaio biaxial por inflação proposto apresentou restrições tanto para as faixas de deformação baixas (menores ou próximas do raio crítico) quanto para aquelas próximas da ruptura (expansão não controlável). Muito embora ainda poderiam ser realizados ensaios com alguns outros tipos de material para avaliar outros possíveis comportamentos mecânicos e configurações deformadas, aconselha-se que sejam utilizados os dados da curva tensão *versus* deformação apenas para deformações que excedam o raio crítico, para os casos em que grande precisão na obtenção das propriedades mecânicas seja necessária. Considerando-se, ainda, a expansão instável que pode ocorrer próximo a ruptura e dependendo da capacidade de alongamento do polímero, isto pode fazer com que, nos piores casos, nenhum dado do ensaio possa ser aproveitado.

Muito embora os métodos inversos mencionados na revisão bibliográfica não tenham sido objetivo de análise no presente trabalho, não é difícil perceber que a teoria por trás dos mesmos tende a evitar os problemas encontrados para obter o alongamento e a tensão, pois se pode abrir mão das hipóteses simplificativas, mantendo-se a necessidade de poucos dados de entrada: pressão, configuração deformada (através de aquisição por imagem) e a configuração indeformada. Outro fator a ser considerado é que, como a análise numérica leva em consideração o perfil completo da amostra deformada, está sendo levando em consideração outros estados de tensão além do estado biaxial no topo da bolha. Assim, deixa de ser necessária a realização de um ensaio adicional, como o de tração uniaxial, por exemplo. O presente trabalho, entretanto, não comprovou isto.

O custo computacional, entretanto, tende a ser elevado, uma vez que são necessárias iterações numéricas até atingir o equilíbrio para cada um dos diversos estados de pressão e deformação obtidos com os ensaios (uma análise para cada imagem). Ainda, nenhum dos trabalhos vistos na revisão bibliográfica faz menção ao tempo dispendido em análise numérica. Outra ressalva diz respeito à variação de espessura ao longo da amostra deformada, uma vez que a análise numérica pode apresentar boa correlação com o perfil externo da amostra, porém, sem necessariamente representar corretamente o que acontece no seu interior. Este último comentário aplica-se também ao método utilizado no presente trabalho.

Mesmo com as ressalvas relativas as espessura da amostra e à faixa de deformação útil, o ajuste de curva e posterior simulação numérica para validação das constantes constitutivas mostrou que o ensaio biaxial por inflação consegue fornecer dados representativos das propriedades mecânicas das amostras testadas em laboratório (verificado com a amostra de silicone).

Ressalta-se que a simplicidade, o baixo custo e a flexibilidade na forma construtiva são fatores que estimulam escolher este método àqueles biaxiais por deformação sobre o plano cartesiano. Em alguns casos específicos, o processo de inflação pode representar o próprio processo de deformação da aplicação a qual o material é solicitado na prática (caso de sensores e algumas situações de tecidos biológicos). Caberá, então, ao analista que estiver executando-o, ponderar se as limitações encontradas na presente dissertação poderão prejudicar o seu trabalho e encontrar formas de contornar esta situação.

Finalmente, o presente trabalho aponta para algumas considerações evidentes:

- O processo de inflação de amostra plana pode ser dividido em dois momentos: antes e depois de o perfil deformado ter passado pelo raio crítico. No primeiro caso, o raio inicialmente grande diminui rapidamente, enquanto no segundo caso passa a aumentar de forma lenta com o alongamento;
- O ensaio na forma como apresentado não serve para obter dados experimentais de alongamentos muito pequenos (erro no cálculo das tensões e dimensão do flange que esconde parte da amostra deformada), nem muito elevados (instabilidade do processo cinemático);
- A anisotropia identificada no ensaio de tração uniaxial oriunda do processo de fabricação não se manifesta no ensaio de tração biaxial por inflação, ou seja, existe um fenômeno que homogeneiza as propriedades mecânicas;
- O fator de correção (f_k) melhora os resultados do cálculo teórico do alongamento (Figuras 6.4 e 6.7), porém viola a hipótese de que a amostra tem uma deformação que corresponde a uma esfera de espessura constante;
- O ensaio apresenta menor erro quanto menor for a espessura, pois fenômenos indesejáveis como a instabilidade tem menor volume de material para se manifestar e menor o erro no cálculo da tensão (hipótese de membrana não é plenamente satisfeita para espessuras da ordem de 1 mm para geometria do dispositivo de fixação usado no presente trabalho).

Como sugestão de tema para trabalhos futuros poder-se-ia citar:

- Utilizar duas câmeras para aquisição do perfil espacial deformado. Dependendo do posicionamento e do algoritmo de interpolação é possível obter pontos da curva tensão *versus* deformação quando a amostra ainda se encontra abaixo da face superior do flange de fixação;
- Adaptar o procedimento experimental descrito neste trabalho de forma totalmente automática e sem interferência humana;
- Estudar de forma detalhada a variação da espessura ao longo da amostra em diversos estágios de inflação através de ensaios experimentais (monitoramento em mais de um ponto e não apenas no centro da amostra);
- Melhorar o método de cálculo teórico da espessura e do alongamento proposto no presente trabalho, uma vez que verificou-se instabilidade nos resultados

próximos ao raio crítico, encontrando uma formulação para o fator de ajuste (f_k) não linear para deformações baixas;

- Estudar a instabilidade (efeito parasita) que ocorre na bolha quando se atinge uma deformação contínua e não controlada a pressão constante. Identificar com precisão o momento em que o processo tem início (se associado a uma determinada configuração deformada ou a uma condição de tensão) e a variação de espessura ao longo de toda a superfície, propondo um modelo que possa explicar o fenômeno físico;
- Analisar o efeito Mullins e suas consequências quando em estado plano de tensão. Há vasto material na literatura para tração simples, porém, menos referências para ensaio biaxial, especialmente para o ensaio por inflação. Em função de a amostra ter diferente dano residual ao longo do seu perfil pode acarretar em erro ao avaliar as propriedades mecânicas no ensaio por inflação.
- Propor uma nova fórmula de cálculo analítico ou semi-analítico das tensões em condições não lineares e que leve em consideração maior rigidez para alongamentos inferiores àqueles atingidos no raio crítico (Figura 4.14).

8 Referências Bibliográficas

ANSYS 14.0 Ansys, **Anslys 14.0 User's Manual**, 2012

ASTM D412, **Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers - Tension**, American Society for Testing and Materials, 2013

ASTM D2000, **Standard Classification System for Rubber Products in Automotive Applications**, American Society for Testing and Materials, 2012

Atkin, R. e Fox, N., 1980, **An Introduction to the Theory of Elasticity**, Longman, 1980.

Batra, R. C.; Mueller, I.; Strehlow, P. Treloar's Biaxial Tests and Kearsley's Bifurcation in Rubber Sheets, **Mathematics and Mechanics of Solids**, v. 10, p. 705-713, 2005.

Bloksma, A. H., **A Calculation of the Shape of the Alveograms of Some Rheological Model Substances**, Cereal Chemistry Journal, vol. 34, p. 126–136, 1957

Bonnet, J., Wood, R., **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**, Cambridge University Press, New York, 1997.

BS 903-5, **Physical Testing of Rubber - Part 5 - Guide to the Application of Rubber Testing to Finite Element Analysis**, British Standard, 2004.

Ciullo, P. A. e Hewitt, N., **The Rubber Formulary**, Noyes Publications, Nova Iorque, 1999

Datta, B. N., **Numerical Linear Algebra**, Brooks/Cole Publishing Company, 1995.

Devore, J. L., **Probability and Statistics for Engineering and the Sciences**, Thompson, 2007

Diani, J., Fayolle B., Gilormini P., A review on the Mullins effect, **European Polymer Journal**, vol. 45, p. 601–612, 2009

Dym, C., **Introduction to the Theory of Shells**, Pittsburg, Pergamon Press, 1974

Galliot, C., Luchsinger, R.H., Uniaxial and biaxial mechanical properties of ETFE foils, **Polymer Testing**, vol. 30, p 356–365, 2011

Goh, G. M., Converting Empirical Tests into Fundamental Tests: A Case Study Using the Biaxial Bubble Inflation Test, **The 12th ASEAN FOOD CONFERENCE 2011**, OH-85,BITEC Bangna, Bangkok, Thailand, 16 -18 June, 2011

Gonçalves, P., Soares, R., Pamplona D., Nonlinear vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane, **Journal of Sound and Vibrations**, vol 327, p 231-248, 2009

Hack, P. S., **Influência da Incerteza de Medição no Uso de Cartas de Controle**, Dissertação (Mestrado em Engenharia), Programa de Pós-graduação em Engenharia da Produção, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012

Haile A. M., Faleris, J., Ifju, P. G., Determining Multiaxial Properties of Porous Viscoelastic Membrane using Bubble-inflation Test, **SEM Annual Conference**, Albuquerque, New Mexico, USA, 01/Jun a 04/Jun, 2009

Hallett, J. F., **Multiaxial Fatigue and Strength of Rubber Compounds**, Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Loughborough University, Leicestershire, 1997

Hart-Smith, L. J., Crisp, C. D. J., Large Elastic Deformation of Thin Rubber Membranes, **International Journal of Engineering Science**, vol. 5, p 1-24, 1967

Hassager, O., Kristensen S., Larsen J., Neergaard J., Inflation and instability of a polymeric membrane, **Journal of Non Newtonian Fluid Mechanics**, vol 88, p 185-204, 1999

Heuillet , P. , Roumagnac, P. , Soufflet, L. , Meyer , P., Fracture properties of elastomers loaded under quasi-static plane stress, **Polymer Testing**, v. 25, p. 994-1005, 2006

Hoss, L. e Marczak, R., **Hyperelastic Constitutive Models for Incompressible Elastomers and Soft Tissues: Fitting and Performance Comparison**, 20th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, Gramado, 2009.

Hyperfit, **Hyperfit 2.12 Manual do Usuário**, 2011

IEC-ISO, **Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement – GUM**, ISO Publishing, 2008

Jain, A. K., **Fundamentals of Digital Image Processing**, New Jersey, Prentice Hall, 1989.

Jerrams, S., Hanley, J. e Murphy, N., Equi-biaxial Fatigue of Elastomers: The Effect of Oil Swelling on Fatigue Life, **Rubber Chemistry and Technology**, vol. 81,p. 638-649 , 2008

Kraus, H., **Thin Elastic Shells**, Hartford, John Wiley & Sons, 1967

Lay, C. D., **Álgebra linear e suas aplicações**, Livros Técnicos e Científicos Editora, 1999

Love, A.E., **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**, 4th Edition, Dover, New York, 1944

Maple, **Maple 16 User's Manual**, 2012

Marczak, R. J., Gheller, J.J., Hoss, L., **Caracterização de Elastômeros para Simulação Numérica**, Centro Tecnológico de Polímeros SENAI, São Leopoldo, 2006.

Marquardt, D.W., 1963, An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters, **Journal of Applied Mathematics**, vol.11, pp.431-441.

Matlab, **Matlab 2010 b User's Manual**, 2010

Mindlin, R. D., The Influence of Rotary Inertia and Shear in Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 18, p. 31-38, 1951

Müller, I. e Struchtrup, H., Inflating a balloon, **Mathematics and Mechanics of Solids**, vol 7, p. 569-579, 2002

Mulins, L., Permanent Set in Vulcanized Rubber, **India Rubber World**, vol. 120, p. 63-66, 1949

Neto, E. A. S., Péric, D., Owen, D. R. J., **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**, Wiley, Chichester, Inglaterra, 2008

Nevatia, R., **Machine Perception**, Prentice-Hall, New Jersey, 1982

Rachik, M., Schmidt, F., Reuge, N., Maout, Y. e Abbé, F., **Elastomer Biaxial Characterization Using Bubble Infaltion Technique II: Numerical Investigation of Some Constitutive Models**, **Polyme Engineering and Science**, v. 41, No.3, p 532-541, 2001.

Reissner, E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 12, p. 69-76, 1945

Reuge, N., Schmidt, F. M., Maout Y. L., Rachik, M., Abbé, F., Elastomer Biaxial Characterization Using Bubble Infaltion Technique, **Polyme Engineering and Science**, v. 41, No.3, p 522-531, 2001.

Sasso M., Palmieri G., Chiappini, G. e AmodioD., Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial, **Polymer Testing**, vol. 27, p. 995–1004, 2008

Selby, J. C., Shannon, M. A., Inflation of a circular elastomeric membrane into a horizontally semi-infinite liquid reservoir of finite vertical depth: Quasi-static deformation model, **International Journal of Engineering Science**, vol 47, p. 700–717, 2009

Selby, J. C., Shannon, M. A., Inflation of a circular elastomeric membrane into a horizontally semi-infinite liquid reservoir of finite vertical depth: Estimation of material parameters from volume–pressure data, **International Journal of Engineering Science**, vol 47, p. 718–734, 2009

Selvadurai, A.P.S. , Shi, M., Fluid pressure loading of a hyperelastic membrane, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol 47, p. 228–239, 2012

Slifka, A. J., Drexler, E. S., Wright, J. E. e Shandas R., Bubble-test method for synthetic and bovine vascular material, **Journal of Biomechanics**, vol. 39, p 1939-1942, 2006

Souza, C. E., **Otimização em Dois Níveis da Orientação e da Topologia de Cascas Laminadas**, Dissertação (Mestrado em Engenharia), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003

Spiegel, M. R., **Mathematical Handbook**, McGraw-Hill, 1969

Stumpf, **Avaliação de um Modelo Hiperelástico Incompressível: Análise de Restrições, Implementação e Otimização de Parâmetros Constitutivos**, Dissertação (Mestrado em Engenharia), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009

Taylor J. R., **Introdução a Análise de Erros O Estudo de Incertezas em Medições Físicas**, Bookman, California, 2012

Ticona, **Designing with Plastics: The fundamentals**, Manual de Projeto, Estados Unidos, 2000

Treloar, L.R.G., **Trans. Inst. Rubber**, 19, 201, 1944

Varenko H., Treloar, L.R.G., The inflation and extension of rubber tube for biaxial strain studies, **Journal of Physics and Applied Physics**, vol. 11 p. 1969-1978, 1978

Vernon, D., **Machine Vision : Automated Visual Inspection and Robot Vision**, Prentice Hall, 1991

Verron E. e Marckmann G., Inflation of elastomeric circular membranes using network constitutive equations, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, vol. 38, p. 1221-1235, 2003

Wilchez, D. F. T., **Estudo do Comportamento Mecânico de Ligamentos e Tendões Utilizando Medição Ótica**, Dissertação (Mestrado em Engenharia), Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012

APÊNDICE A - CÓDIGO FONTE DO ALGORITMO DE PROCESSAMENTO

A seguir estão disponíveis os códigos fonte das três rotinas de processamento dos dados do ensaio biaxial por inflação para realizar a interpolação do raio no topo da bolha, bem como realizar os cálculos de alongamento e tensão para serem utilizados na determinação das propriedades mecânicas do polímero em análise. A descrição do processo de interpolação e lógica do programa estão descritas no capítulo 4 desta dissertação.

A.1. Código fonte da rotina “Ensaio Biaxial.m”

```

%% Programa Principal Ensaio Biaxial por Insuflação
clc
clear all
close all
global NomeArquivoAtual;
%% Solicita nome da série de dados a ser lida:
%Deve conter um arquivo com os dados de entrada de pressão
(relativo a
%cada imagem) e um arquivo com os parâmetros dentro do
diretório
%selecionado, além das imagens.
%O diretório onde os arquivos estão salvos deve ser um nível
acima do
%diretório onde estão os arquivos em matlab.
nome_diretorio = uigetdir;
cd (nome_diretorio);
%Abre e lê o arquivo com os dados de entrada
fid = fopen('PARAMETROS.txt');
PARAMETROS = textscan(fid, '%s %n');
fclose(fid);
%Lê a espessura da amostra:
espessura=PARAMETROS{2}(1);
%Configuração geométrica da bancada:
diametroAberturaBancada=PARAMETROS{2}(2);
diametroExternoBancada=PARAMETROS{2}(3);

```

```
AlturaBaseBancada=PARAMETROS{2}(4);
DistAmostraPlanaTopoDisp=PARAMETROS{2}(5); %distância entre
a face superior
%da amostra e a face superior do dispositivo de fixação da
amostra (será
%o quanto da amostra que ficará escondido até que a bolha
infle)

%Identifica a distância da face da base até o centro da
bolha na
%profundidade para acrescentar no cálculo da escala, caso a
base seja
%circular esta distância é zero, pois a identificação da
escala acontecerá
%no centro.
distFaceBaseCentro=PARAMETROS{2}(6);
distDispositivoLenteCamera=PARAMETROS{2}(7);
%Usado quando distFaceBaseCentro é diferente de zero.

%Identifica se o fundo é escuro e a amostra da bolha é
clara, pois o que é
%preto o BW identifica como 0 e o que é branco é 1, ou seja,
o mapa
%BWtraceboundary será feito "dentro da imagem". Se o fundo
for branco e a
%bolha preta, terá dificuldade com o BWTRACEBOUNDARY e será
necessário
%inverter os zeros e uns na matriz BW (imagem apenas em
preto e branco).
FundoEscuroBaseClara=PARAMETROS{2}(8);
FundoEscuroAmostraClara=PARAMETROS{2}(9);

%%Laço principal para determinar raio no tempo:

%Leitura das imagens no diretório selecionado (o formato da
imagem deve ser
```

```

%informado/alterado neste passo).
ArquivosImagens=dir ('*.jpg'); %('*.tif');
%ArquivosImagens2=ls ('*.jpg');%('*.tif');
[TamVetorArquivos,Colunadesnecessaria]=size(ArquivosImagens)
;
global quiQuadradoAtual;
%% Verificar o tamanho e a posição da base do dispositivo
%feito na primeira imagem:
NomeArquivoAtual=ArquivosImagens(1).name;
% primeira imagem deve corresponder apenas ao dispositivo de
medição na
% configuração do ensaio, sem deformação da amostra
if PARAMETROS{2}(10)==true
    %caso o usuário deseja utilizar a rotina para
identificar a escala e
    %calibrar a imagem
    cd ..

[X1Base,YTopoBase,Largura,altura,escala]=Identifica_Base_Dis
positivo...

(NomeArquivoAtual,diametroExternoBancada,distFaceBaseCentro,
...

distDispositivoLenteCamera,FundoEscuroBaseClara,nome_diretor
io);
    cd (nome_diretorio);
else
    %caso o usuário tenha inserido os parâmetros no arquivo
calibracao_mm=PARAMETROS{2}(11);
calibracao_pixel=PARAMETROS{2}(12);
escala=calibracao_mm*(calibracao_pixel^-1);
X1Base=PARAMETROS{2}(13);
Largura=PARAMETROS{2}(14);
YTopoBase=PARAMETROS{2}(15);
end

```

```

%A variável escala dada em mm/pixel

CompensAltDisp=(DistAmostraPlanaTopoDisp+espessura)*(escala^
-1);

%Inicializa variáveis
%Na ausência de pressão não há deformação e esforços.
raioPassoAtual=0;
aAtual=0;
bAtual=0;
quiQuadradoAtual=9e99;
numeroImagem=1;
pressao(1)=0;
raio(1)=0;
a(1)=0;
b(1)=0;
b_esfera_perfeita(numeroImagem)=-999999999999999999999999;
bcopia(1)=b_esfera_perfeita(numeroImagem);
Ee(1)=0;
quiQuadrado(1)=0;

tensaoEng(1)=0;
tensaoVerdadeira(1)=0;
tensaoVerdadeira2(1)=0;
LAMBDA(1)=1;
LAMBDA2(1)=1;
MaxDesloc(1)=0;
tempo(1)=0;

h0=espessura;
R0=diametroAberturaBancada*0.5;
%Lê o arquivo com as pressões correspondentes a cada imagem
(o primeiro
%valor deve ser zero, pois o ciclo inicial deve corresponder
apenas ao
%ciclo de calibração.

```

```

pressao = importdata('pressao.txt', ' ');
tempo = importdata('tempo.txt', ' ');

for numeroImagem=2:TamVetorArquivos
    cd ..
    NomeArquivoAtual=ArquivosImagens(numeroImagem).name;

    [raioPassoAtual,aAtual,bAtual,quiQuadradoAtual,PtLimiteRaio,
    ...

    comprimentoFibraAtual,MaxAbertura,YMaxfuncao6aCentro]=...
        Le_imagem_encontra_raio(numeroImagem,...
        diametroAberturaBancada*escala^-1,X1Base,...

    YTopoBase,Largura,FundoEscuroAmostraClara,CompensAltDisp,...
        nome_diretorio);

    raio(numeroImagem)= raioPassoAtual*escala;
    a(numeroImagem)= aAtual*escala;
    b(numeroImagem)=(-(bAtual-YTopoBase)*escala)+...
        DistAmostraPlanaTopoDisp+espessura;
    quiQuadrado(numeroImagem)=quiQuadradoAtual;
    LimiteAderenciaRaio(numeroImagem)=PtLimiteRaio*escala;
    CompArco(numeroImagem)=comprimentoFibraAtual*escala;
    MaxAberturaBolha(numeroImagem)=(MaxAbertura-
aAtual)*escala;

    MaxDesloc(numeroImagem)=raio(numeroImagem)+b(numeroImagem);
    YmaxFX6a(numeroImagem)=(YMaxfuncao6aCentro*escala)+...
        DistAmostraPlanaTopoDisp+espessura;

    %Determinação da espessura e alongamento pela manutenção
do volume
    if b(numeroImagem)<=0
        AA=-(2*R0/(10000*espessura));
        BB=2.5-AA*(R0);

```

```

        Fator_correcao=AA*raio(numeroImagem)+BB;
    else
        AA=-((10*espessura/R0)+0.2);
        BB=2.5-AA*(R0);
        Fator_correcao=AA*raio(numeroImagem)+BB;
    end
    ArmazenaFator(numeroImagem)=Fator_correcao;
    b_esfera_perfeita(numeroImagem)=-
sqrt(abs((raio(numeroImagem)^2)-...
        ((R0+Fator_correcao)^2)));
    if pressao(numeroImagem)>pressao(numeroImagem-1)
        if
b_esfera_perfeita(numeroImagem)<b_esfera_perfeita(numeroImag
em-1)
            b_esfera_perfeita(numeroImagem)=...
                +sqrt(abs((raio(numeroImagem)^2)-
((R0+Fator_correcao)^2)));
        end
    end
    if b(numeroImagem)>b_esfera_perfeita(numeroImagem)
        Ee(numeroImagem)=raio(numeroImagem)+b(numeroImagem);
    else

Ee(numeroImagem)=raio(numeroImagem)+b_esfera_perfeita(numero
Imagem);
    end

    if b(numeroImagem)>0
        b_esfera_perfeita(numeroImagem)=...
            +sqrt(abs((raio(numeroImagem)^2)-
((R0+Fator_correcao)^2)));
        Ee(numeroImagem)=raio(numeroImagem)+...
            b_esfera_perfeita(numeroImagem);
    end

Re=raio(numeroImagem);

```

```

Ve=(3*Re*Ee(numeroImagem)^2-Ee(numeroImagem)^3);
V0=(R0^2)*h0;

coefD=(-
1*(3/2)*Re*Ee(numeroImagem)^2+(1/2)*Ee(numeroImagem)^3+...
(Ve)/(2)-(3*V0)/(2));
coefC=(3*Re*Ee(numeroImagem))
coefB=(-(3/2)*Re-(3/2)*Ee(numeroImagem))
coefA=(1)
polinomio=[coefA coefB coefC coefD];
raizes=roots(polinomio);
for contagem=1:3
    if imag(raizes(contagem))==0
        % certifica-se de que a raiz é aquela sem a
parte imaginária
        h_atual(numeroImagem)=raizes(contagem);

LAMBDA3(numeroImagem)=(h_atual(numeroImagem)/h0);

LAMBDA(numeroImagem)=sqrt(1/(LAMBDA3(numeroImagem)));
    end
end

Q1=(3*coefC-coefB^2)/9;
R1=(9*coefB*coefC-27*coefD-2*coefB^3)/54;
D(numeroImagem)=Q1^3+R1^2;

%Determinação do volume pelo equação quártica
Ax4=1.16326818910288E-8;
Bx4=-0.00000351439708010733;
Cx4=0.000397852961730708;
Dx4=-0.00113040479411371;
Ex4=1;
LAMBDA2(numeroImagem)=Ax4*YmaxFX6a(numeroImagem)^4+...
Bx4*YmaxFX6a(numeroImagem)^3+...

```

```

Cx4*YmaxFX6a (numeroImagem) ^2+Dx4*YmaxFX6a (numeroImagem) +Ex4;

    Deformacao (numeroImagem) =LAMBDA (numeroImagem) -1;
    tensaoEng (numeroImagem) = (pressao (numeroImagem) *...
        raio (numeroImagem) ) / (2*h0) ;

tensaoVerdadeira (numeroImagem) = (pressao (numeroImagem) *...
    raio (numeroImagem) ) / (2*h_atual (numeroImagem) ) ;

tensaoVerdadeira2 (numeroImagem) = (pressao (numeroImagem) *...

raio (numeroImagem) * (LAMBDA2 (numeroImagem) ^2) ) / (2*h0) ;
    Matriz (numeroImagem, 1) =pressao (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 2) =raio (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 3) =b (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 4) =b_esfera_perfeita (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 5) =tensaoEng (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 6) =Deformacao (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 7) =tensaoVerdadeira (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 8) =LAMBDA (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 9) =tensaoVerdadeira2 (numeroImagem) ;
    Matriz (numeroImagem, 10) =LAMBDA2 (numeroImagem) ;
end
cd ..

close all
figure (1) ;
set (1, 'Name', 'Gráfico Tensão X tempo') ;
plot (tempo, tensaoEng) ;

figure (2) ;
set (2, 'Name', 'Gráfico Tensão X deformação') ;
plot (LAMBDA, tensaoEng) ;

```

A.2. Rotina “Le Imagem Encontra Raio”

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Le Imagem Encontra Raio
% Leandro C. Silva
%
% Descrição: Procura pela linha/borda superior de um corpo
de prova e faz
%um ajuste de curva para determinar o seu alinhamento
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function                                                                 [
raioPassoAtual,aAtual,bAtual,quiQuadradoAtual,PtLimiteRaio,.
..
    comprimentoFibra,MaxAbertura,YMaxfuncao6aCentro] = ...

Le_imagem_encontra_raio(numeroImagem,diametroAberturaBancada
,XlBase,...

YTopoBase,Largura,FundoEscuroAmostraClara,CompensAltDisp,...
    nome_diretorio);
global NomeArquivoAtual;
cd (nome_diretorio);
I = imread(NomeArquivoAtual);
infoImagem = imfinfo(NomeArquivoAtual);
%% Selecionar região de interesse para determinar o nível de
cinza que será
% usado na criação da imagem preto e branco.
figure(1000); clf;
scrsz = get(0,'ScreenSize');
figure('OuterPosition',[1          scrsz(4)/2          scrsz(3)/2
scrsz(4)/2]);
hold on;
imshow(I);
colormap(gray);

```

```

axis image;
scnsize = get(0,'ScreenSize');
%(1)canto sup em x, (2)canto sup em y, (3) canto inf em x,
(4) canto inf y
set(1000,'OuterPosition',[scnsize(3)          ,          scnsize(4)
,scnsize(3), scnsize(4)]);
set(1000,'color',[1 1 1]);
set(1000,...
    'Name','Escolher área superior p/ determinar nível de
cinza (level)');
title({'Superior';...
    'Selecionar dois pontos de interesse (1o canto =
esquerdo-acima)..';...
    '1          ';'\Downarrow          ';'\Rightarrow 2'});
disp(' ');
disp('Selecionar dois pontos interesse (2o canto = esquerdo-
acima)');
disp(' ');
%faz um "crop" na imagem se aplicavel (para o futuro seria
interessante p/
%manter apenas a parte desejável da imagem, eliminando a
base do
%dispositivo de medição
xcorner1=X1Base;
ycorner1=0;
xcorner2=xcorner1+Largura;
ycorner2=YTopoBase;
hold on;
imshow(I);
[xcorner10,ycorner10] = ginput(1);
[xcorner20,ycorner20] = ginput(1);
level = graythresh(imcrop(uint8(mean(double(I),3)),...
    [xcorner10 ycorner10 xcorner20-xcorner10 ycorner20-
ycorner10]));
% define o tom de cinza com o crop
close(1000);

```

```

%% Cria a imagem preto e branco a partir do valor de cinza
(level)
bw = im2bw(I,level);
if FundoEscuroAmostraClara ~= true
    bw=1-bw;
end

%% Encontra pontos sobre o contorno
figure(1000), imshow(bw);

%col1 é em x e row1 é em y:
col1=(infoImagem.Width)*0.5; %Centro em x
col1=round(col1);
row1 = min(find(bw(:,col1)));
%primeiro valor do contor para a posição centra em x
boundary = bwtraceboundary(bw,[row1 col1],'SE');
% A direção SE faz com que a curva fique de ponta cabeça
hold on;
plot(boundary(:,2),boundary(:,1),'g','LineWidth',3);
%x é a segunda coluna e y é a primeira (ponto esta y,x e nao
x,y)
pause;
%Procurar pelo ponto de minimo (que na verdade será o de
máximo) entao:
minBoundary=min(boundary(:,1));
%localiza o menor valor da funcao em x ou linha/row
sRow=size(boundary(:,1));
%tamanho do vetor vertical (em x para cima e abixo)
sCol=size(boundary(:,2));
%tamanho do vetor vertical (em y para de um lado para outro)
for contador=1:sRow
    if boundary(contador,1)==minBoundary
        minXBoundary=boundary(contador,2);
        posVetorBoundaryMin=contador;
    end
end
end

```

```

%marca o ponto mais a esquerda da curva e o mais a direita:
minBoundary2=min(boundary(:,2));
maxBoundary2=max(boundary(:,2));
sRow2=size(boundary(:,1));           %tamanho do vetor
sCol2=size(boundary(:,2));           %tamanho do vetor

%%
plot(col1, row1, '.r', 'markersize',20); %ponto central

%%
colIni=minBoundary2;%col(1);
colFim=maxBoundary2;%col(2);
PtMedioBolhaX=(colFim+colIni)*0.5;
CentroDispositivo=X1Base+(Largura*0.5);

%monta um vetor começando em colIni e terminando em colFim,
passo 1
col = colIni:1:colFim;
col=round(col);
col=sort(col); %ordena os pontos para "x" crescente

for i=1:length(col)
    row(i)= min(boundary(find(boundary(:,2)==col(i)),1));
    %Monta y para o vetor de "X" crescente
end

col_sup=col;
row_sup=row;
row_sup2=ycorner2-row;
close(1000)
%%
figure(3);
plot(boundary(:,2),boundary(:,1));
figure(4);
plot(col_sup,row_sup2);
figure(5);

```

```

plot(col_sup,row_sup);
%% Fronteiras para o máximo e mínimo da interpolação da
equação do círculo
Raio_Abertura_Bancada=(diámetroAberturaBancada*0.5);
QTD_Bolha_Acima_base_dispositivo=abs(YTopoBase-
minBoundary)+CompensAltDisp;
RazadoBolhaXAbertura=QTD_Bolha_Acima_base_dispositivo*...
    (Raio_Abertura_Bancada^-1);

if
QTD_Bolha_Acima_base_dispositivo>QTD_Bolha_Acima_base_dispos
itivo
    fatorEsfera=.5;%É o quanto da abertura do bocal do
dispositivo que será
        %proveitado em pontos para determinar o
raio. Sabe-se que
            %próximo da fronteira a deformação não
adere a um
                %circulo, esta parte deve ser
desconsiderada
    else
        fatorEsfera=1;
    end

upper_bound_a=infoImagem.Width;
% "a" tem que estar dentro do quadrado da imagem,
%se estiver fora a bolha está distorcida demais
lower_bound_a=0; %Lembrando que a é o offset em x e b é o
offset em y
Inicial_a=CentroDispositivo; %Sempre
Inicial_b=((1/8)*((4*(QTD_Bolha_Acima_base_dispositivo^2)-
...

(diametroAberturaBancada^2))^2/QTD_Bolha_Acima_base_disposit
ivo^2)^0.5)*.95;
Inicial_r=999999;

```

```

lower_bound_b=0;
lower_bound_r=0;
upper_bound_b=inf;
upper_bound_r=inf;
%%
%% Ajusta uma curva com os pontos sobre o contorno

limiteLE=CentroDispositivo-
(Raio_Abertura_Bancada)*fatorEsfera;
limiteLD=CentroDispositivo+(Raio_Abertura_Bancada)*fatorEsfe
ra;
limiteInternoLE=CentroDispositivo-(Raio_Abertura_Bancada)*0;
%Apenas para caso específico de análise
limiteInternoLD=CentroDispositivo+(Raio_Abertura_Bancada)*0;
%Apenas para caso específico de análise

contador=1;
for i=1:length(col_sup)
    if col_sup(i)>limiteLE
        if col_sup(i)<limiteLD
            if row_sup(i)<YTopoBase
                if col_sup(i)<limiteInternoLE
                    col_supReduzido(contador)= col_sup(i);
                    row_supReduzido(contador)= row_sup(i);
                    contador=contador+1;
                elseif col_sup(i)>limiteInternoLD
                    col_supReduzido(contador)= col_sup(i);
                    row_supReduzido(contador)= row_sup(i);
                    contador=contador+1;
                end
            end
        end
    end
end

setopcoes = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares',...

```

```

        'Lower',[lower_bound_a          lower_bound_b
lower_bound_r],...
        'Upper',[upper_bound_a          upper_bound_b
upper_bound_r],...
        'Startpoint',[Inicial_a          Inicial_b
Inicial_r],...
        'MaxIter',1000000);
f_Reduzido          =          fittype('b_Red-(abs((r_Red^2-(x-
a_Red)^2)^2)^0.5)^0.5','options',setopcoes);
disp(' ');
disp('Resultado do Ajuste:');
disp(' ');
[c_superiorReduzido,gof_superiorReduzido]          =
fit(col_supReduzido',row_supReduzido',f_Reduzido)
coeficientes=coeffvalues(c_superiorReduzido);
%% Passa valores
aAtual=coeficientes(1);
bAtual=coeficientes(2);
raioPassoAtual=coeficientes(3);
quiQuadradoAtual=gof_superiorReduzido.rsquare;
%% Encontra o ponto limite a partir do qual o a curva se
afasta do
%círculo perfeito, partindo do centro
PtLimiteRaio=diametroAberturaBancada*0.75;
for i=round(length(col_sup)*0.05)+1:length(col_sup)
    if col_sup(i)>=aAtual
        centro_amostra=i; %registra o contador do centro da
amostra
        break;
    end
end

end

CompArco=round(length(col_sup)*.05);
%usa 5% dos pontos da curva para verificar aderência,
%apenas um ponto na imagem não é suficiente
ErroAdmissivel=0.02

```

```

%Erro máximo admissível entre raio interpolado e imagem (2%)
for i=centro_amostra:length(col_sup)
    if row_sup(i)<YTopoBase
        Raioacima=0;
        Raioabaixo=0;
        for l=2:CompArco
            RaioPtImagem=((col_sup(i-1)-
aAtual)^2+(row_sup(i-1)-...
            bAtual)^2)^0.5;
            DifRaio=RaioPtImagem/raioPassoAtual;
            if DifRaio>(1+ErroAdmissivel)
                Raioacima=Raioacima+1;
                Raioabaixo=0;
            elseif DifRaio<(1-ErroAdmissivel)
                Raioabaixo=Raioabaixo+1;
                Raioacima=0;
            end
        end
    end
    if Raioabaixo==l-1
        PtLimiteRaio=col_sup(i-1)-aAtual;
        %distancia do centro da bolha a até o ponto de
aderencia
        break;
    elseif Raioacima==l-1
        PtLimiteRaio=col_sup(i-1)-aAtual;
        break;
    end
else
    PtLimiteRaio=col_sup(i-1)-aAtual;
    break;
end
end
end
%%
figure(30);imshow(I)
%hold on;
%plot(coll, rowl, '.r', 'markersize', 30);

```

```

hold on;
plot(col_sup(i-1), row_sup(i-1),'.g','markersize',30);
hold on;
plot(col_supReduzido, row_supReduzido, '.b', 'markersize',15);
hold on;
plot(limiteLE, YTopoBase, '.y', 'markersize',30)
hold on;
plot(limiteLD, YTopoBase, '.y', 'markersize',30)
hold on;
plot(X1Base, YTopoBase, '.y', 'markersize',30)
hold on;
plot(X1Base+Largura, YTopoBase, '.y', 'markersize',30)
hold on;
plot(CentroDispositivo, (minBoundary), '.y', 'markersize',10)
hold on;
plot(c_superiorReduzido)
%% Para cálculo do Alongamento a partir do topo da bolha
interpolado
%por polinômio de 6a ordem
col_supReduzido2(1)= col_supReduzido(1);%-aAtual;
contador2=1;
for kk=2:length(col_supReduzido)
    if col_supReduzido(kk)~=col_supReduzido(kk-1)
        col_supReduzido2(contador2)= col_supReduzido(kk);%-
aAtual;
        row_supReduzido2(contador2)=row_supReduzido(kk);
        contador2=contador2+1;
    end
end
coeficientes=polyfit(col_supReduzido2',row_supReduzido2',6)
a6Atual=coeficientes(1);
b6Atual=coeficientes(2);
c6Atual=coeficientes(3);
d6Atual=coeficientes(4);
e6Atual=coeficientes(5);
f6Atual=coeficientes(6);

```



```

%% Identifica a base do dispositivo de medição e ajusta a
escala.
% A indentificação da base é necessária para saber o ponto a
partir do qual
% será feito o "crop" dos pontos para permanecer apenas com
a bolha
% Leandro C. Silva
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [ XlBase,YTopoBase,Largura,altura,escala ] = ...

Identifica_Base_Dispositivo(NomeArquivoAtual,diametroExterno
Bancada,...

distFaceBaseCentro,distDispositivoLenteCamera,FundoEscuroBas
eClara,...

    nome_diretorio);
global NomeArquivoAtual;
cd (nome_diretorio);
I = imread(NomeArquivoAtual);
infoImagem = imfinfo(NomeArquivoAtual);
%% Selecionar região de interesse para determinar o nível de
cinza que será
% usado na criação da imagem preto e branco.
figure(1000); clf;
imshow(I);
colormap(gray);
set(1000,'color',[1 1 1]);
set(1000,'Name','Escolher ponto de corte inferior da
imagem');
title({'Superior';...
    'Selecionar ponto vertical que delimita base (cima para
baixo)..';...
    '1          ';\Downarrow          ';\Rightarrow 2'});

```

```

%faz um crop na imagem se aplicavel (para o futuro seria
interessante para
%manter apenas a parte desejável da imagem, eliminando a
base do
%dispositivo de medição
xcorner1=0;
ycorner1=0;
xcorner2=infoImagem.Width;
%Coordenada vertical para aquisição da base
ycorner2=infoImagem.Height;
% define o tom de cinza com o crop
[xcorner3,ycorner3] = ginput(1);
level = graythresh(imcrop(uint8(mean(double(I),3)),...
    [xcorner1    ycorner1    xcorner2-xcorner1    ycorner2-
ycorner1]));
%% Cria a imagem preto e branco a partir do valor de cinza
(level)
close(1000)
bw      =      im2bw(imcrop(uint8(mean(double(I),3)), [xcorner1
ycorner1 xcorner3-xcorner1 ycorner3-ycorner1]),level);
if FundoEscuroBaseClara ~= true
    bw=1-bw;
end

%% Encontra pontos sobre o contorno
figure(1000), imshow(bw);
title('Binary Original Image');
%col1 é em x e row1 é em y:
col1=(infoImagem.Width)*0.5; %começa no meio - em x
col1=round(col1); %Arredondamento para evitar números não
inteiros
row1 =min(find(bw(:,col1))); %Acha o primeiro y que contem
valores dentro
%da matriz de coordenadas que define os pontos da fronteira
no meio da imagem
boundary = bwtraceboundary(bw,[row1 col1],'SE');

```

```

hold on;
plot(boundary(:,2),boundary(:,1),'g','LineWidth',3);%x é a
segunda coluna
%e y é a primeira (ponto esta y,x e nao x,y)
%%
%marca o ponto mais acima e o mais abaixo:
colIni=min(boundary(:,2));
colFim=max(boundary(:,2));
%Marca o ponto mais a esquerda da curva e o mais a direita:
colIniLateralLE=min(boundary(:,1));
colFimLateralLD=max(boundary(:,1));
%%
plot(col1, row1, '.r', 'markersize', 20); %ponto central
NumeroPontosImagem=colFim-colIni;
col = colIni:abs(colFim-colIni)/NumeroPontosImagem :colFim;
col=round(col);
col=sort(col);%ordena em x crescente os valores de x dentro
do vetor col
for i=1:length(col)
    row(i)= min(boundary(find(boundary(:,2)==col(i)),1));
    %monta o primeiro y correspondente a cada x
    rowMax(i)=max(boundary(find(boundary(:,2)==col(i)),1));
    %monta o primeiro y correspondente a cada x
end
col_sup=col;
row_sup=row;
%%
NumeroPontosImagem=colFimLateralLD-colIniLateralLE;
colLateral = colIniLateralLE:abs(colFimLateralLD-...
    colIniLateralLE)/NumeroPontosImagem :colFimLateralLD;
colLateral=round(colLateral);
colLateral=sort(colLateral);
%ordena em x crescente os valores de x dentro do vetor col
for i=1:length(colLateral)
    rowLateral(i)=
min(boundary(find(boundary(:,1)==colLateral(i)),2));

```

```

    %monta o primeiro y correspondente a cada x

rowMaxLateral(i)=max(boundary(find(boundary(:,1)==colLateral
(i)),2));

    %monta o primeiro y correspondente a cada x
end
%%
figure(3);
plot(boundary(:,2),boundary(:,1));
figure(4);
plot(col_sup,row_sup);
%% Ajusta uma curva com os pontos sobre o contorno
%Base superiores e inferiores do dispositivo
setopcoes = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares',...
    'Lower',[-inf,0],...
    'Startpoint',[inf,row(1)],...
    'MaxIter',10000);
f = fittype('a*0*x+b','options',setopcoes);
disp(' ');
disp('Resultado do Ajuste:');
disp(' ');
[c_superior_BaseSuperior,gof_superior_BaseSuperior] =
fit(col_sup',...
    row_sup',f)
[c_superior_BaseInferior,gof_superior_BaseInferior] =
fit(col_sup',...
    rowMax',f)
[c_superior_LateralLE,gof_superior_LateralLE] =
fit(colLateral',...
    rowLateral',f)
[c_superior_LateralLD,gof_superior_LateralLD] =
fit(colLateral',...
    rowMaxLateral',f)
figure(2);imshow(I)
hold on;
%plot(boundary(:,2),boundary(:,1),'g','LineWidth',2);

```

```

plot(col1, row1, '.r', 'markersize', 30);
plot(col_sup, row_sup, '.b', 'markersize', 20);
plot(c_superior_BaseSuperior)
plot(c_superior_BaseInferior)
x1=0:infoImagem.Height;
y1=c_superior_LateralLE(1);%x1+c_superior_LateralLE(2);
y2=c_superior_LateralLD(1);
plot(y1,x1, 'MarkerFaceColor', 'g', 'MarkerSize', 10);
plot(y2,x1, 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 10);

%% Passa valores
pause
%Caso a predição dos pontos não tenha ficado boa, faz-se a
seleção dos
%pontos manualmente:
ask=0;
while ask==0
    disp(' ');
    reply = input('Selecionar pontos manualmente? Y/N [Y]:
', 's');
    disp(' ');
    if isempty(reply)
        ask = 2;
    elseif reply=='Y'
        ask = 1;
    elseif reply=='y'
        ask = 1;
    elseif reply=='N'
        ask = 2;
    elseif reply=='n'
        ask = 2;
    end
end

end
if ask==1
    close all

```

```

imshow(I);
[X1Base,YTopoBase] = ginput(1);
[X2Base,Y2TopoBase] = ginput(1);
Largura=X2Base-X1Base;
altura=Y2TopoBase-YTopoBase;
else
X1Base=c_superior_LateralLE(1);
YTopoBase=c_superior_BaseSuperior(1);
Largura=c_superior_LateralLD(1)-X1Base;
altura=c_superior_BaseInferior(1)-YTopoBase;
end;

%escala para passagem de pixels para mm
escala=diametroExternoBancada*(Largura)^-1;
%compensação da escala da distância da amostra até a lente
da máquina em
%[pixel/mm] quando o centro da amostra está afastado da face
de referência
%se a base do dispositivo é circular e o centro da amostra
está no centro
%da base, não é necessário calcular a compensação
if distFaceBaseCentro>0
    catop=escala*infoImagem.Width;
    catadj=distDispositivoLenteCamera;
    %Ângulo de abertura da lente da câmera
    AngAberturaLente=atan(catop*catadj^-1);
    AngGrausAbertLente=AngAberturaLente*180*(pi^-1);
    escala=tan(AngAberturaLente)*...

(distFaceBaseCentro+distDispositivoLenteCamera)*infoImagem.W
idth^-1;
end
close all

```

A.4. Arquivo de Parâmetros

Espessura_AMOSTRA 0.98
diametroAberturaBancada 99.75
diametroExternoBancada 135
AlturaBaseBancada 5.0
DistAmostraPlanaTopoDisp 29.99
distFaceBaseCentro 0.0
distDispositivoLenteCamera 0.0
FundoEscuroBaseClara 0
FundoEscuroAmostraClara 0
LER_BASE 0
Padrao_calibrador_mm 50.8
Padrao_calibrador_pixel 1003.25
X1Base 592
largura 2926
YTopoBase 1705

APÊNDICE B - RESULTADOS DE ANÁLISES NUMÉRICAS

Tabela A.4.1 – Resultados das análises numéricas realizadas por análise numérica simulando o ensaio biaxial com amostra de espessura de 2 mm

Pressão [Mpa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Verdadeira [Mpa]	Alongamento	Raio interpolado da bolha [mm]
0,000	0,000	0,000	1,000	∞
0,005	11,702	0,190	1,043	104,534
0,010	15,272	0,306	1,070	84,964
0,015	17,990	0,413	1,094	75,418
0,020	20,347	0,518	1,118	69,458
0,025	22,649	0,627	1,143	65,522
0,030	24,679	0,738	1,167	62,373
0,035	26,634	0,854	1,192	59,917
0,040	28,546	0,977	1,218	57,962
0,045	30,437	1,109	1,245	56,381
0,050	32,330	1,250	1,273	55,115
0,055	34,235	1,404	1,302	54,083
0,060	35,780	1,537	1,327	53,419
0,065	38,171	1,785	1,370	53,387
0,070	40,195	1,990	1,404	52,858
0,075	42,276	2,216	1,439	52,505
0,080	44,422	2,468	1,477	52,290
0,085	46,640	2,748	1,516	52,216
0,090	48,936	3,061	1,557	52,264
0,095	51,316	3,410	1,600	52,440
0,100	53,784	3,801	1,645	52,718
0,105	56,341	4,240	1,692	53,115
0,110	58,990	4,732	1,740	53,612
0,115	61,731	5,284	1,791	54,199
0,120	64,560	5,903	1,844	54,882
0,125	67,476	6,596	1,898	55,660
0,130	70,474	7,371	1,955	56,518
0,135	73,548	8,235	2,013	57,457
0,140	76,692	9,198	2,072	58,459
0,145	79,901	10,267	2,133	59,528
0,150	83,168	11,451	2,195	60,670
0,155	86,487	12,760	2,259	61,866
0,160	89,853	14,202	2,323	63,104

Tabela A.4.2 – Resultados das análises numéricas realizadas por análise numérica simulando o ensaio biaxial com amostra de espessura de 1 mm

Pressão [Mpa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Verdadeira [Mpa]	Alongamento	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	1,000	∞
0,0025	11,807	0,175	1,040	108,277
0,005	15,443	0,292	1,067	87,501
0,010	20,524	0,501	1,114	71,059
0,015	24,669	0,715	1,162	63,583
0,020	28,565	0,950	1,212	58,935
0,025	32,356	1,219	1,267	55,923
0,030	36,207	1,534	1,326	54,148
0,035	40,210	1,912	1,391	52,916
0,040	44,442	2,374	1,463	52,335
0,045	48,961	2,946	1,542	52,298
0,050	53,812	3,660	1,629	52,745
0,055	59,024	4,558	1,723	53,627
0,060	64,598	5,685	1,826	54,907
0,065	70,515	7,098	1,935	56,539
0,070	76,736	8,857	2,052	58,476
0,075	83,216	11,025	2,173	60,675
0,080	89,900	13,671	2,300	63,119

Tabela A.4.3 – Resultados das análises numéricas realizadas por análise numérica simulando o ensaio biaxial com amostra de espessura de 0,5 mm

Pressão [Mpa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Verdadeira [Mpa]	Alongamento	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	1,000	∞
0,0012	11,671	0,164	1,037	112,248
0,0025	15,405	0,279	1,064	89,057
0,005	20,486	0,484	1,110	71,942
0,010	28,520	0,925	1,207	59,140
0,012	31,794	1,139	1,251	56,843
0,014	34,101	1,314	1,285	55,430
0,015	36,450	1,507	1,321	54,360
0,018	40,477	1,883	1,386	53,133
0,019	42,152	2,055	1,414	52,822
0,020	44,449	2,329	1,456	52,374
0,023	48,970	2,891	1,535	52,324
0,025	53,823	3,592	1,621	52,772
0,028	59,036	4,473	1,715	53,649
0,030	64,601	5,579	1,817	54,923
0,033	71,750	7,280	1,948	56,919
0,035	76,500	8,688	2,041	58,494
0,038	83,230	10,813	2,162	60,706
0,040	89,917	13,406	2,288	63,135

APÊNDICE C - RESULTADOS DE ENSAIOS FÍSICOS

Tabela A.4.1 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 1 de SBR espessura 1 mm sem amolecimento

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,029	56,416	0,835	0,221	56,416
0,030	55,880	0,855	0,245	55,880
0,032	54,669	0,893	0,289	54,669
0,034	53,808	0,933	0,325	53,808
0,036	53,087	0,975	0,389	53,087
0,038	52,393	1,016	0,436	52,393
0,040	51,831	1,058	0,541	51,831

Tabela A.4.2 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 2 de SBR espessura 1 mm sem amolecimento

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,035	38,982	0,995	0,415	56,364
0,036	41,197	1,022	0,443	55,468
0,037	43,199	1,032	0,494	54,823
0,040	48,906	1,082	0,536	53,699
0,041	57,059	1,108	0,611	52,727

Tabela A.4.3 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 1 de SBR espessura 2 mm sem amolecimento

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,065	0,244	0,870	34,471	59,162
0,066	0,292	0,865	35,893	57,919
0,068	0,300	0,879	37,142	57,160
0,070	0,325	0,901	37,679	56,863
0,072	0,330	0,917	38,849	56,294
0,074	0,360	0,935	39,926	55,827
0,076	0,376	0,954	40,579	55,512
0,078	0,381	0,974	41,495	55,207
0,080	0,391	0,992	42,741	54,816
0,082	0,447	1,010	44,112	54,422
0,084	0,457	1,031	44,935	54,235
0,086	0,478	1,050	46,298	53,983
0,088	0,509	1,070	47,714	53,752
0,090	0,550	1,088	50,727	53,416
0,092	0,662	1,110	51,895	53,314
0,094	0,719	1,129	56,274	53,080
0,096	0,722	1,148	58,406	52,852

Tabela A.4.4 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 2 de SBR espessura 2 mm sem amolecimento

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,079	38,209	1,023	0,340	57,187
0,081	38,752	1,037	0,364	56,916
0,083	41,459	1,042	0,402	55,507
0,084	42,490	1,050	0,422	55,052
0,085	43,123	1,060	0,452	54,860
0,087	44,134	1,067	0,456	54,537
0,089	46,679	1,086	0,534	53,825
0,090	47,915	1,093	0,552	53,539
0,091	48,828	1,102	0,576	53,392
0,092	49,776	1,109	0,614	53,260
0,094	51,579	1,129	0,635	52,992
0,095	52,707	1,139	0,676	52,874
0,096	54,712	1,144	0,751	52,597
0,100	58,098	1,178	0,890	52,101

Tabela A.4.5 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 1 de SBR espessura 1 mm com amolecimento (efeito Mulins)

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,006	35,557	0,142	0,367	46,365
0,008	37,346	0,189	0,377	46,390
0,010	41,297	0,236	0,489	46,226
0,012	45,913	0,281	0,647	45,941
0,014	53,457	0,333	0,874	46,683
0,016	61,154	0,403	1,100	49,308
0,018	65,430	0,466	1,269	50,696
0,020	69,814	0,537	1,380	52,640
0,022	73,283	0,624	1,548	55,607
0,024	76,169	0,704	1,632	57,482
0,026	80,152	0,798	1,786	60,171

Tabela A.4.6 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 2 de SBR espessura 1 mm com amolecimento (efeito Mullins)

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,038	40,165	0,399	0,543	46,310
0,039	40,370	0,407	0,584	46,167
0,040	42,352	0,409	0,640	45,540
0,041	43,599	0,420	0,677	45,247
0,043	46,007	0,438	0,793	44,879
0,044	47,766	0,446	0,828	44,782
0,045	47,975	0,457	0,882	44,787
0,046	49,377	0,465	0,929	44,792
0,047	50,585	0,472	0,990	44,853
0,047	51,812	0,480	1,046	44,982
0,048	52,991	0,492	1,074	45,154
0,049	54,151	0,503	1,123	45,389
0,050	55,230	0,516	1,137	45,655
0,051	56,439	0,534	1,179	45,974
0,053	57,594	0,551	1,228	46,332
0,054	58,925	0,568	1,263	46,774
0,055	60,035	0,584	1,297	47,174
0,056	60,996	0,600	1,318	47,532
0,057	61,984	0,617	1,360	47,918
0,058	62,915	0,632	1,373	48,303
0,059	64,031	0,649	1,401	48,768
0,060	64,918	0,666	1,414	49,146
0,061	65,658	0,679	1,428	49,452
0,062	66,191	0,694	1,456	49,699
0,063	66,909	0,713	1,484	50,001
0,064	67,972	0,733	1,511	50,439
0,066	68,295	0,751	1,525	50,579
0,067	69,640	0,772	1,545	51,143
0,068	70,078	0,790	1,574	51,336
0,069	70,820	0,811	1,594	51,649
0,070	71,640	0,824	1,608	51,998
0,071	72,017	0,840	1,636	52,166
0,072	72,760	0,857	1,642	52,481
0,073	73,442	0,874	1,656	52,752
0,074	74,150	0,893	1,684	53,079
0,076	74,589	0,914	1,705	53,299
0,077	75,933	0,935	1,725	53,894
0,078	76,146	0,952	1,739	54,031
0,080	77,311	0,991	1,788	54,604
0,081	77,888	1,010	1,866	54,900
0,083	81,943	1,059	1,890	56,677

Tabela A.4.7 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 1 de SBR espessura 2 mm com amolecimento (efeito Mulins)

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,020	33,642	0,222	0,284	49,131
0,022	34,668	0,243	0,299	48,754
0,024	36,009	0,265	0,347	48,749
0,026	36,843	0,286	0,385	48,601
0,029	38,267	0,316	0,401	48,219
0,030	38,988	0,325	0,417	47,935
0,032	40,337	0,344	0,432	47,539
0,034	42,443	0,362	0,479	47,026
0,036	44,035	0,380	0,552	46,664
0,038	46,360	0,399	0,604	46,360
0,041	49,124	0,429	0,677	46,260
0,042	51,078	0,441	0,719	46,373
0,044	54,058	0,466	0,803	46,794
0,045	55,622	0,480	0,865	47,149
0,046	57,132	0,495	0,907	47,548
0,047	58,376	0,510	0,959	47,928
0,048	59,332	0,524	0,985	48,227
0,049	60,453	0,539	1,011	48,579
0,050	60,984	0,552	1,021	48,791
0,052	62,508	0,581	1,062	49,376
0,053	63,429	0,596	1,088	49,675
0,054	63,963	0,609	1,136	49,886
0,058	66,241	0,667	1,166	50,796
0,061	67,272	0,706	1,175	51,190
0,062	68,476	0,724	1,190	51,594
0,068	71,655	0,813	1,268	52,835
0,074	74,200	0,903	1,291	53,940
0,076	76,542	0,946	1,328	55,045
0,078	78,707	0,990	1,392	56,126
0,080	80,230	1,030	1,444	56,934
0,082	81,943	1,074	1,468	57,896
0,084	84,457	1,127	1,491	59,324

Tabela A.4.8 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 2 de SBR espessura 2 mm com amolecimento (efeito Mulins)

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,000	0,000	0,000	0,000	∞
0,038	40,165	0,399	0,543	46,310
0,039	40,370	0,407	0,584	46,167
0,040	42,352	0,409	0,640	45,540
0,041	43,599	0,420	0,677	45,247
0,043	46,007	0,438	0,793	44,879
0,044	47,766	0,446	0,828	44,782
0,045	47,975	0,457	0,882	44,787
0,046	49,377	0,465	0,929	44,792
0,047	50,585	0,472	0,990	44,853
0,047	51,812	0,480	1,046	44,982
0,048	52,991	0,492	1,074	45,154
0,049	54,151	0,503	1,123	45,389
0,050	55,230	0,516	1,137	45,655
0,051	56,439	0,534	1,179	45,974
0,053	57,594	0,551	1,228	46,332
0,054	58,925	0,568	1,263	46,774
0,055	60,035	0,584	1,297	47,174
0,056	60,996	0,600	1,318	47,532
0,057	61,984	0,617	1,360	47,918
0,058	62,915	0,632	1,373	48,303
0,059	64,031	0,649	1,401	48,768
0,060	64,918	0,666	1,414	49,146
0,061	65,658	0,679	1,428	49,452
0,062	66,191	0,694	1,456	49,699
0,063	66,909	0,713	1,484	50,001
0,064	67,972	0,733	1,511	50,439
0,066	68,295	0,751	1,525	50,579
0,067	69,640	0,772	1,545	51,143
0,068	70,078	0,790	1,574	51,336
0,069	70,820	0,811	1,594	51,649
0,070	71,640	0,824	1,608	51,998
0,071	72,017	0,840	1,636	52,166
0,072	72,760	0,857	1,642	52,481
0,073	73,442	0,874	1,656	52,752
0,074	74,150	0,893	1,684	53,079
0,076	74,589	0,914	1,705	53,299
0,077	75,933	0,935	1,725	53,894
0,078	76,146	0,952	1,739	54,031
0,080	77,311	0,991	1,788	54,604
0,081	77,888	1,010	1,866	54,900
0,083	81,943	1,059	1,890	56,677

Tabela A.4.9 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 1
silicone espessura 0,5 mm sem amolecimento

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,0000	0,000	0,000	0,000	∞
0,0056	29,190	0,324	0,220	61,272
0,0077	39,913	0,398	0,414	54,855
0,0089	48,521	0,439	0,709	52,237
0,0095	71,262	0,491	1,533	54,832

Tabela A.4.10 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 2
silicone espessura 0,5 mm sem amolecimento

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,0000	0,000	0,000	0,000	∞
0,0062	33,843	0,367	0,244	62,710
0,0083	42,658	0,455	0,330	58,133
0,0088	52,101	0,461	0,409	55,562
0,0090	55,058	0,469	0,508	55,208

Tabela A.4.11 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 1
silicone espessura 0,5 mm com amolecimento (efeito Mullins)

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,0000	0,000	0,000	0,000	∞
0,0072	0,444	0,379	34,758	55,787
0,0080	0,553	0,403	40,575	53,363
0,0083	0,639	0,412	43,078	52,657
0,0089	0,842	0,435	49,318	51,815
0,0090	0,967	0,439	51,528	51,717
0,0091	1,179	0,448	57,872	52,189

Tabela A.4.12 – Resultados para o ensaio de tração biaxial por inflação para amostra 2 silicone espessura 0,5 mm com amolecimento (efeito Mulins)

Pressão [MPa]	Deslocamento máximo [mm]	Tensão Engenharia [MPa]	Deformação	Raio interpolado [mm]
0,0000	0,000	0,000	0,000	∞
0,0060	33,283	0,356	0,550	62,950
0,0070	40,892	0,384	0,706	58,215
0,0076	45,358	0,406	0,637	56,566
0,0081	50,445	0,424	0,879	55,441
0,0083	53,262	0,431	1,035	55,094
0,0091	57,872	0,448	1,140	52,189

APÊNDICE D - Propagação de incertezas de medição

Neste capítulo será feita uma rápida análise, considerando-se a hipótese de que uma interpolação linear sobre os dados experimentais em uma determinada faixa de deformação seria representativa para um material hiperelástico, com o intuito de averiguar a propagação das principais incertezas de medição.

Até o momento não existe um método direto capaz de identificar as constantes constitutivas do modelo matemático de um determinado material sendo ensaiado, ou seja, não há uma equação que as correlacione diretamente aos pontos do ensaio. Normalmente é empregado um método de mínimos quadrados para contornar tal limitação. Consequentemente, não é possível correlacionar diretamente a incerteza das constantes constitutivas às variáveis independentes (raio, pressão e alongamento), todavia, é possível identificar a incerteza de medição final no resíduo da soma do método de mínimos quadrados.

Substituindo-se inicialmente na equação C.1 a equação 3.11 e suas respectivas incertezas:

$$\Delta Erro = \sqrt{\left(\frac{\partial Erro}{\partial T_{BExperimental}} \Delta T_{BExperimental}\right)^2 + \left(\frac{\partial Erro}{\partial T_{BCalculado}} \Delta T_{BCalculado}\right)^2} \quad (D.1)$$

Lembrando-se que $T_{BExperimental}$ é função do raio, da pressão e do alongamento (para o caso de tensão verdadeira e não de engenharia) e que $T_{BCalculado}$ é função apenas do alongamento pode-se reescrever a partir da equação 3.12:

$$\Delta Erro = \sqrt{\left(\frac{\partial Erro^2}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial Erro^2}{\partial p} \Delta p\right)^2 + \left(\frac{\partial Erro^2}{\partial \lambda} \Delta \lambda\right)^2} \quad (D.2)$$

Aplicando-se as derivadas:

$$\Delta Erro = \sqrt{\left[\left(\sum_1^{NPts} \frac{p \lambda^2}{h_0}\right) \Delta R\right]^2 + \left[\left(\sum_1^{NPts} \frac{R \lambda^2}{h_0}\right) \Delta p\right]^2 + \left[\left(\sum_1^{NPts} C \lambda_1 C \lambda_2 \Delta \lambda\right)^2\right]} \quad (D.3)$$

Onde:

$$C \lambda_1 = 2 \left[\frac{p R \lambda^2}{2 h_0} - 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial I_2} \right) \right] \quad (D.4)$$

E:

$$C \lambda_2 = 2 \left\{ \frac{p R \lambda}{h_0} - 2 \left[\frac{\partial w}{\partial I_1} \left(1 - \frac{4}{\lambda^5} \right) + \frac{\partial w}{\partial I_2} \left(3 \lambda^2 - \frac{2}{\lambda^3} \right) + \frac{\partial w}{\partial I_1 \partial \lambda} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^4} \right) + \frac{\partial w}{\partial I_2 \partial \lambda} \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right] \right\} \quad (D.5)$$

Para avaliação da importância relativa de cada uma das incertezas, utilizou-se uma simulação por elementos finitos para gerar imagens de um ensaio biaxial virtual para o mesmo material utilizado por Selvadurai e Shi, 2012: Mooney-Rivlin de 2 termos, com $C_1 = 1.56$ e $C_2 = 2,21$ kgf/cm², porém, com diâmetro da amostra de 20 cm, espessura de 3 mm e pressão variando de 0 a 1,3 kgf/cm². O alongamento no ponto central da bolha foi obtido a partir do próprio programa de análise numérica [Ansys 14.0, 2012], o qual também foi utilizado para gerar as imagens que foram utilizadas na rotina para a interpolação do raio.

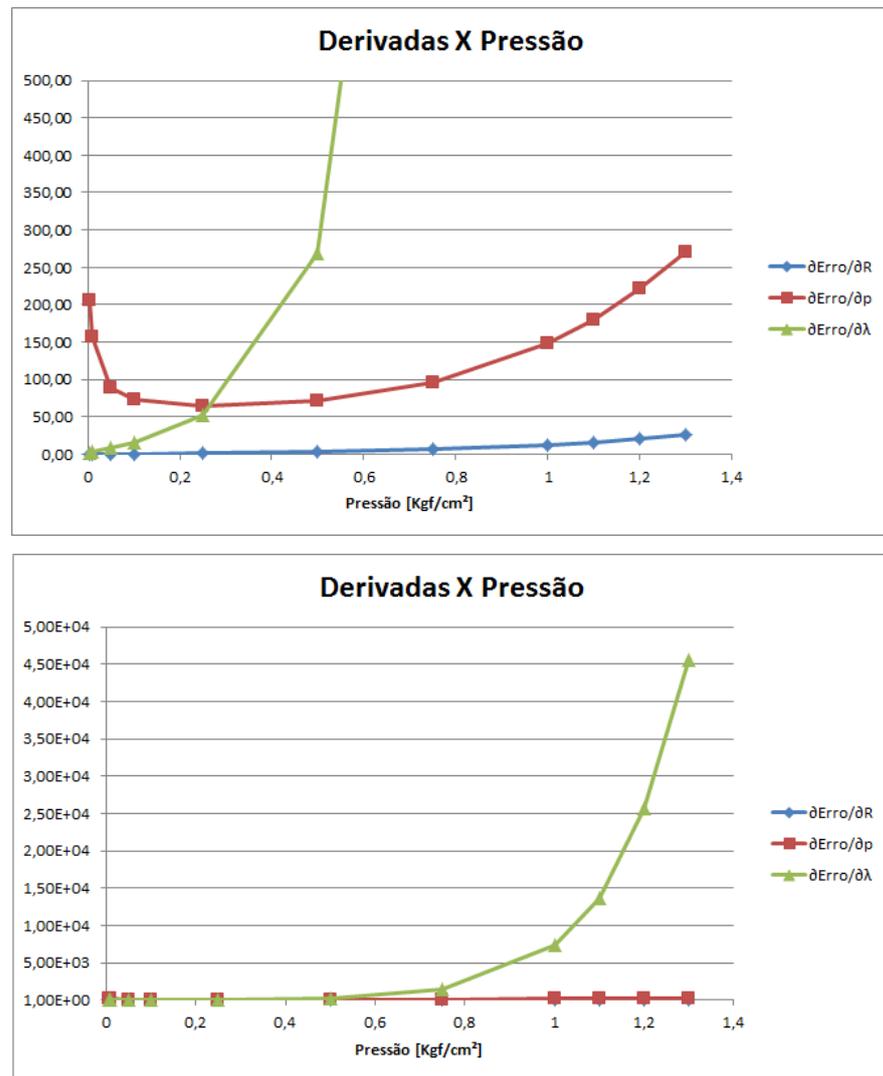


Figura D.1 - Variação da derivada dos termos da equação D.2 ao variar a pressão para um ensaio biaxial teórico, onde a diferença entre os gráficos a) e b) é a escala do eixo vertical, enquanto em

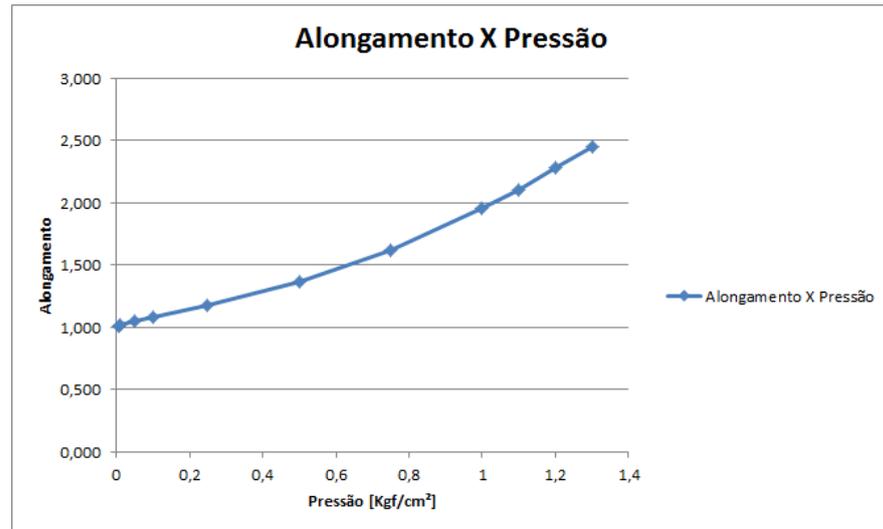


Figura D.2 - Comportamento do alongamento ao aumentar a pressão.

Inicialmente, o termo associado à variação na incerteza de medição da pressão apresenta um impacto maior sobre a incerteza total do erro (Figura D.1), caindo rapidamente até um determinado patamar. Não se trata de um efeito de interpretação física, mas sim de uma consequência do equacionamento, uma vez que o raio inicial na amostra plana tem valor infinito e diminui até o raio crítico, para então voltar a aumentar. Na medida em que a pressão aumenta, a incerteza sobre alongamento passa a ter uma influência cada vez maior.

Tabela D.1 - Avaliação da incerteza do erro ao variar as incertezas de medição das variáveis independentes, uma de cada vez.

ΔR	Δp	$\Delta \lambda$	Δerro
0,05	0,05	0,05	4696
0,25	0,05	0,05	4696
0,05	0,25	0,05	4712
0,05	0,05	0,25	23477

Finalmente, na tabela D.1 é apresentado o impacto na equação D.3 da modificação das incertezas de cada uma das variáveis independentes sobre o ensaio hipotético para o qual os gráficos da Figura D.1 foram construídos. Cabe lembrar que nesta análise está sendo considerado um ajuste de curva para a curva alongamento *versus* tensão verdadeira e que, para o caso de deformação por tensão de engenharia, a incerteza sobre o erro provavelmente apresentaria uma sensibilidade menor ao alongamento.

A incerteza de medição da pressão é uma característica inerente ao instrumento utilizado, todavia as incertezas no valor do raio e do alongamento dependem da aquisição da imagem e não são facilmente identificáveis. Como já mencionado anteriormente, fontes de ruído como sombra, textura e variações de luminosidade prejudicam o algoritmo que mapeia quais pontos pertencem ao contorno, além do erro inerente ao próprio processo de mapeamento. Fatores adicionais devem ser lembrados, como: relação de resolução da imagem pelo tamanho da amostra (medida em pixel/mm), a sensibilidade do sensor em detectar a variação das cores e luminosidade, o ajuste do foco, distância da amostra até o equipamento de aquisição, etc.

Finalmente, deve-se levar em conta o erro da interpolação do raio sobre o contorno, que no presente caso utiliza o método de mínimos quadrados, no qual o resíduo indica que alguns pontos não estão sobre a curva interpolada.

ANEXO A - REVISÃO DE MECÂNICA DO CONTÍNUO NÃO-LINEAR

Conforme foi mencionado anteriormente no Capítulo 1, o comportamento de peças e componentes manufaturados a partir de materiais poliméricos como a borracha não segue uma relação linear entre tensão e deformação ainda dentro do regime elástico, fato que está associado à relação constitutiva. O estudo destes problemas gera a necessidade de uma base teórica um pouco mais ampla do que aquela para entendimento dos problemas puramente lineares. Assim, serão introduzidos conceitos de diferentes medidas de deformação e tensão aplicáveis a problemas com grandes deslocamentos. Será utilizada uma função energia de deformação particularizada para hiperelasticidade, a qual é geralmente escrita em termos dos principais invariantes ou dos principais alongamentos da deformação.

A.1 - Descrição do movimento

Idealizando um corpo composto de um conjunto de partículas de tal modo que em qualquer instante de tempo (τ), cada partícula ocupa um ponto de uma região fechada C em um espaço euclidiano tridimensional e que, reciprocamente, cada ponto desta região seja ocupado por somente uma partícula. A configuração C é definida no tempo t , ou configuração instantânea. Para descrever o movimento do corpo ao longo do processo de deformação, torna-se necessária uma forma conveniente de se especificar a posição de cada partícula ao longo do tempo. Normalmente isto é feito selecionando-se uma configuração de referência inicial C^0 . As coordenadas (X_1, X_2, X_3) determinam o vetor posição X de um ponto de C , sendo usadas para identificá-lo em qualquer instante (Figura A.1).

O movimento do corpo pode ser descrito, então, como sendo a posição x (em C) da partícula X (em C^0) no instante t , através de uma equação:

$$x = \chi(X, \tau) \quad (\text{A.1})$$

Com e_i sendo os vetores de base do sistema de coordenadas:

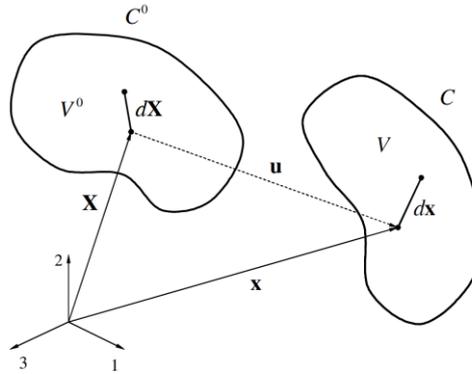
$$x = x_i e_i \quad (\text{A.2})$$

É importante salientar que pela equação A.1 a configuração instantânea é obtida a partir do conhecimento da configuração inicial. Este tipo de mapeamento é chamado de descrição lagrangiana do movimento. Uma outra forma de descrever o mesmo processo cinemático é através de uma descrição euleriana (ou instantânea ou, ainda, espacial), onde a configuração atual é utilizada para descrever as variáveis:

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, \tau) \quad (\text{A.3})$$

Onde:

$$\mathbf{X} = X_i e_i \quad (\text{A.4})$$



Fonte: adaptado de Marczak *et al.*, 2006.

Figura A.1– Configurações inicial e final do processo de deformação

O mapeamento das formas inicial e final se dá pela transformação matemática conhecida como Jacobiano (J):

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (\text{A.5})$$

De acordo com Marczak *et al.*, 2006, como não pode haver superposição ou desaparecimento de matéria, a condição para que o processo cinemático exista é dada por $J > 0$, o que implica em uma deformação contínua.

Uma medida mais interessante para o analista de um problema de mecânica dos sólidos é o deslocamento espacial (\mathbf{u}) de um ponto do corpo C no instante τ , dado pela subtração das coordenadas espaciais entre as configurações instantânea e inicial.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, \tau) - \mathbf{X} \quad (\text{A.6})$$

A.2 - Medidas de Deformação

A deformação de um corpo está ligada a efeitos de mudança na sua forma ou volume e é esta medida que torna possível a mensuração dos esforços internos ao corpo (também conhecidas como tensões). Existem diferentes meios de medir a deformação de um corpo sob ação de carregamentos, tanto através de medidas lagrangeanas como eulerianas.

A primeira forma a ser analisada é conhecida como gradiente de deformação (\mathbf{F}) e trata-se de um tensor que é diretamente a matriz jacobiana da mudança de coordenadas e pode ser escrito em função dos vetores posição ou das componentes do vetor deslocamento e do operador delta de kronecker (δ_{ij}) para os termos não nulos da matriz de identidade conforme:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (\text{A.7})$$

Ainda

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (\text{A.8})$$

Ou seja, é uma maneira de quantificar as mudanças de forma e tamanho do corpo, pois define a transformação de um vetor infinitesimal $d\mathbf{X}$ (posição indeformada) no vetor $d\mathbf{x}$ da configuração instantânea deformada. A relação entre volume instantâneo (V) e volume inicial (V_0) também é obtida por operação sobre o gradiente:

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{dV}{dV_0} \quad (\text{A.9})$$

Para os casos em que o volume não se altera ao longo do processo cinemático (isocóricas) o determinante do gradiente de deformações vale a unidade ($J = 1$).

Outra forma de mensurar a deformação é através do tensor Deformação de Cauchy-Green à direita (\mathbf{C}), o qual apresenta a vantagem de ser simétrico e invariante aos processos de corpo rígido quando comparado ao tensor Gradiente de Deformações. O tensor pode ser escrito em notação tensorial ou indicial como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (\text{A.10})$$

Adicionalmente, pode-se utilizar o tensor de Green-Lagrange (\mathbf{E}), o qual todos os seus termos nulos na ausência de deformações, enquanto o tensor de Cauchy-Green assume a forma da matriz identidade (\mathbf{I}). Seu equacionamento nas formas tensorial ou indicial é respectivamente dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad (\text{A.11})$$

Todas estas formas de mensurar a deformação apresentadas anteriormente seguem a descrição lagrangeana, porém os mesmos tensores possuem formas equivalentes na descrição euleriana, as quais serão mostradas a seguir:

- Tensor de Cauchy-Green a direita (\mathbf{C}) \rightarrow Tensor de Cauchy-Green esquerda (\mathbf{B})

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (\text{A.12})$$

- Tensor de Green-Lagrange (\mathbf{E}) \rightarrow Tensor de Almansi (\mathbf{G})

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) \quad (\text{A.13})$$

O alongamento, ou *stretch*, (λ) corresponde a razão entre os comprimentos inicial e final de uma fibra de material:

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} \right\| = \lambda = \mathbf{E} + \mathbf{I} \quad (\text{A.14})$$

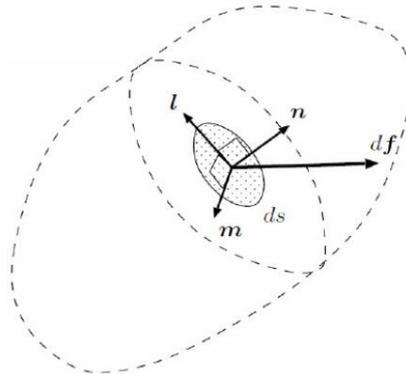
Podendo ser obtido a partir dos valores principais do gradiente de deformações:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A.3 - Medidas de Tensão

Tensão expressa uma densidade de forças por unidade de área, entretanto, também deve-se levar em conta tanto a orientação da força quanto a orientação da superfície sobre a qual ela atua. Sua importância é evidente, pois permite comparar o nível de sollicitação do material com valores de referência obtidos em testes de laboratório. Por ser uma definição matemática, existe mais de uma forma de definir e calcular o seu valor, assim, no presente texto serão apresentados os tensores de Cauchy, de Piola-Kirchoff de Primeira Ordem e de Piola-Kirchoff de Segunda Ordem.

A tensão de Cauchy é também conhecida como tensão verdadeira, pois mede os esforços internos em relação à forma deformada do corpo (instantânea) caracterizando, então, uma medida euleriana. O tensor é sempre simétrico e se anula na ausência de deformações.



Fonte: adaptado de Stumpf, 2009.

Figura A.2 – Esquema de seção de um corpo em equilíbrio

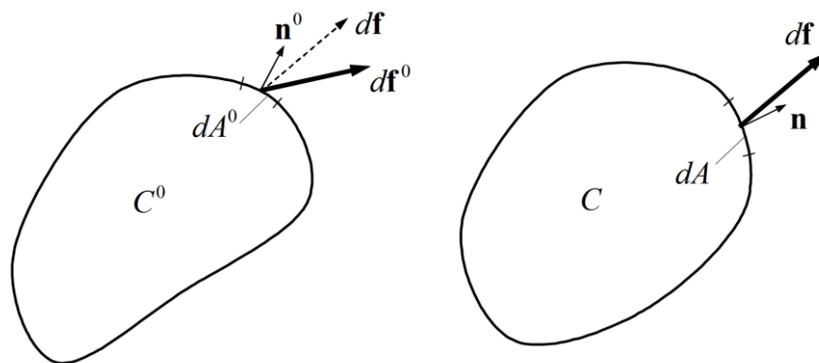
Considerando que a força df atua na área infinitesimal dA em uma superfície virtual interior ao corpo em deformação conforme Figura A.2, o vetor tração (\mathbf{t}) é definido pela Equação A.16.

$$\mathbf{t} = \lim_{dA \rightarrow 0} \left(\frac{df}{dA} \right) \quad (\text{A.16})$$

A decomposição deste vetor nas coordenadas normal e tangenciais, gera os componentes de tensão σ_n , σ_m e σ_l respectivamente. De maneira generalizada, para um ponto qualquer do corpo com vetor normal \mathbf{n} , as trações (t_i) se relacionam com os componentes de tensão através de:

$$t_i = \sigma_{ij} n_{ij} \quad (\text{A.17})$$

Conforme Marczak *et al.*, 2006, as relações constitutivas são geralmente escritas em termos de tensões eulerianas e o uso de \mathbf{t} como medida de tensão torna-se a escolha natural. No entanto, em problemas de engenharia é mais fácil trabalhar com a configuração de referência C^0 do que com a configuração instantânea C , já que a última não é normalmente conhecida *a priori*. Duas outras medidas de tensão conhecidas são o primeiro e o segundo tensores de Piola-Kirchhoff, os quais empregam a definição lagrangeana para o cálculo das tensões, portanto, usando as informações da configuração indeformada do corpo.



Fonte: adaptado de Marczak *et al.*, 2006.

Figura A.3 – Esquema identificando vetores de força sobre o corpo na configuração indeformada (C^0) e deformada respectivamente (C).

O Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff (\mathbf{P}) relaciona a força instantânea na área instantânea, mas é calculado por unidade da área indeformada e expresso em termos da normal indeformada. Pode ser obtido a partir do inverso da transposta do tensor gradiente de deformação \mathbf{F} , do tensor de tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ e do jacobiano da deformação (J):

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.18})$$

A vantagem do Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff (\mathbf{S}) sobre o primeiro é a de ser simétrico, o que geralmente simplifica operações matriciais ou a interpretação das solicitações mecânicas. Relaciona a força na configuração indeformada com área também na configuração indeformada. Pode ser obtido pela relação:

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.19})$$

Ou ainda:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \quad (\text{A.20})$$

ANEXO B - SOLUÇÃO EXATA DA EQUAÇÃO POLINOMIAL CÚBICA

De acordo com Spiegel, 1969, as raízes de um polinômio de ordem cúbica podem ser obtidas a partir das equações abaixo:

Dada a equação cúbica na forma:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (\text{B.1})$$

Sejam:

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9} \quad (\text{B.2})$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54} \quad (\text{B.3})$$

$$S = \sqrt{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad (\text{B.4})$$

$$T = \sqrt{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} \quad (\text{B.5})$$

As raízes são:

$$x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \quad (\text{B.6})$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \quad (\text{B.7})$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \quad (\text{B.8})$$

Dado o discriminante (D):

$$D = Q^3 + R^2 \quad (\text{B.9})$$

Se a_1 , a_2 e a_3 são reais e:

1. $D > 0$: uma raiz é real e duas são complexas conjugadas;
2. $D = 0$: todas as raízes são reais e pelo menos duas são iguais;
3. $D < 0$: todas as raízes s

Caso $D < 0$ ainda é possível simplificar o cálculo das raízes com o uso de trigonometria:

$$x_1 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) \quad (\text{B.10})$$

$$x_2 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 120^\circ\right) \quad (\text{B.11})$$

$$x_3 = 2\sqrt{-Q}\cos\left(\frac{1}{3}\theta + 240^\circ\right) \quad (\text{B.12})$$

$$\cos(\theta) = -\frac{R}{\sqrt{-Q^3}} \quad (\text{B.13})$$

ANEXO C - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Para Hack, 2012, tem havido um crescente reconhecimento de que a incerteza de medição não é menos crítica do que o valor da própria medição e, além de utilizada em ensaios, tem sido aproveitada como parâmetro para comparar diferentes métodos ou validar novas metodologias.

O anexo da norma IEC-ISO/GUM, 2008, determina algumas classificações importantes:

- Erro: diferença entre o valor medido e o verdadeiro (associado a uma ou a várias medidas utilizando-se a média). Os erros podem ser:
 - Determinados ou sistêmicos, de natureza conhecida e que podem ser eliminados como: má calibração, instrumento defeituoso, etc;
 - Indeterminados ou aleatórios, de natureza flutuante e precisam ser estimados. Exemplos: dispersão devido ao ruído elétrico, decaimento radioativo, etc.
- Incerteza: caracteriza a dispersão máxima que é obtida na leitura de uma grandeza (normalmente predeterminado pelo instrumento de leitura). São flutuações de uma medida que não pode ser precisada, somente estimada por uma distribuição definida da qual o desvio padrão é conhecido. Está associado a fenômenos erráticos.
 - Absoluta: É a incerteza associada à medida (mesma unidade) expressa por $Re \pm x$ (onde Re corresponde ao resultado nominal);
 - Relativa: É a incerteza da relação x/Re , sendo adimensional.
- Precisão e exatidão: a precisão é característica da reprodutividade do instrumento e a exatidão é a característica da aproximação da medida do valor real.

De acordo com Taylor, 2012, para o cálculo da propagação do erro de medição pode-se utilizar o método de Kleine e McClintock:

$$\Delta Re = \sqrt{\left(\frac{\partial Re}{\partial x_1} \Delta 1\right)^2 + \left(\frac{\partial Re}{\partial x_2} \Delta 2\right)^2 + \dots} \quad (C.1)$$

onde ΔRe corresponde ao erro do resultado (Re) e $\Delta 1, \Delta 2, \dots, \Delta n$ são os erros absolutos das variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n .