UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Decaimento Assintótico de Escoamentos Viscosos Incompressíveis

Dissertação de Mestrado

Joyce Cristina Rigelo

Porto Alegre, Abril de 2007.

Dissertação submetida por Joyce Cristina Rigelo[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de pesquisa:
Equações Diferenciais Parciais

Professor Orientador:
Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zíngano
Coordenadora:
Prof. Dr. Maria Cristina Varriale

Banca Examinadora:
Prof. Dr. José A. Barrionuevo (PPGMAp-UFRGS)
Prof. Dr. Eduardo H. Brietzke (PPGMAT-UFRGS)
Prof. Dr. Augusto V. Cardona (Famat-PUCRS)

Dissertação apresentada e aprovada em 05 de Abril de 2007.

[1]Apoiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rigelo, Joyce Cristina

DECAIMENTO ASSINTÓTICO DE ESCOAMENTOS VISCOSOS INCOMPRESSÍVEIS / Joyce Cristina Rigelo — Porto Alegre: PPGMAp, UFRGS, 2007.

33 p. + *ix*: s/il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2007.
Orientador: Zingano, Paulo R.

Dissertação: Matemática Aplicada
comportamento assintótico, decaimento, escoamentos viscosos incompressíveis

..."Jesus Cristo é o supremo modelo da Humanidade"...
Mahatma Gandhi

Ao meu amor,
Guili

Agradecimentos

Aos meus pais, Ademir Rigelo, Jurema Heitling, e a Manoela Mayer, pois sem a ajuda deles eu, decididamente, não teria chegado até aqui, obrigada por mais uma vez estarem presentes em minha vida e motivando meus sonhos. Obrigada, família!

Ao Paulo Zingano, meu orientador e amigo, por oferecer o apoio necessário para a realização deste projeto, por acreditar no meu trabalho e por me mostrar essa fascinante área da matemática e com tanto entusiasmo. Obrigada por tudo!

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro desde minha graduação e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp) por ter me dado esta oportunidade.

A Deus, que está sempre presente em todos os momentos de minha vida, me guiando com sua luz.

Aos meus amigos, em especial a Marcelo Danesi, Bárbara Pogorelsky, Patricia Cunha, Gonzalo Brito, Leandro Merlo, Claire Sieber e a Pitucha Rigelo pela inestimável colaboração, de diversas formas, durante o desenvolvimento deste trabalho. Obrigada, amigos!

Ao meu querido companheiro, Guilherme Zavaschi, que me apoiou, incentivou e está sempre junto comigo, mesmo quando longe. Obrigada, meu amor!

Resumo

Neste trabalho, vamos apresentar uma prova elementar de um resultado obtido originalmente por M. Wiegner em 1986 sobre o decaimento na norma L^2 de soluções das equações de Navier-Stokes incompressíveis em dimensão 2 ou 3, desenvolvendo em detalhe uma derivação alternativa proposta por T. Hagstrom, H. Kreiss, J. Lorenz e P. Zingano recentemente em 2002.

Abstract

In this work, we will present an elementary derivation of an important result originally obtained by M. Wiegner in 1986 concerning the L^2 decay of solutions to the incompressible Navier-Stokes equations in space dimension 2 or 3. Here, we give a detailed derivation of an alternative approach recently developed by T. Hagstrom, H. Kreiss, J. Lorenz and P. Zingano in 2002.

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS

p	pressão
t	tempo
$\mathbf{u}$	velocidade de escoamento
$\mathbf{u}(\cdot, t)$	velocidade de escoamento no instante t
$\mathbf{u}_0$	velocidade inicial
$\operatorname{div} \mathbf{u}$	divergente de $\mathbf{u}$
$\Delta\mathbf{u}$	Laplaciano de $\mathbf{u}$
Dg	referência coletiva para as derivadas espaciais de primeira ordem de g
$D^\ell g$	referência coletiva para as derivadas espaciais de ordem ℓ de g
$\boldsymbol{i}$	unidade imaginária
$e^{\Delta t}$	operador-solução da equação do calor
$\widehat{q}$	transformada de Fourier da função q
ν	coeficiente de viscosidade dinâmica
$:=$	igualdade válida por definição
C^k	conjunto das funções k-vezes diferenciáveis
C^∞	conjunto das funções infinitamente diferenciáveis
$\\| \cdot \\|_{L^p}$	norma L^p
$\\| \cdot \\|_{L^\infty}$	norma do supremo
$\vert \cdot \vert$	valor absoluto ou norma euclidiana
$\vert \cdot \vert_2$	norma euclidiana
$\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, etc.	símbolos em negrito denotam grandezas vetoriais
C, C_1, $\hat{C}$, etc.	constantes (i.e., não dependem de t) que dependem de $\mathbf{u}_0$
$K, K_1, \hat{K}$, etc.	constantes que não dependem de $\mathbf{u}_0$

Observação: ocorrências distintas de um mesmo símbolo denotando constante (C, K, etc.) *não* implicam um mesmo valor numérico nas diversas ocorrências.

Introdução

Neste trabalho, apresentamos detalhadamente a análise de decaimento desenvolvido em [6] referente à solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis em $\mathbb{R}^n$ para $n = 2$ ou $n = 3$. Mais precisamente, examinamos o comportamento das normas L^2 das soluções do sistema de equações

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p \;=\; \nu\, \Delta \mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

com a condição inicial

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

para $\mathbf{u}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dado satisfazendo $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ e

$$D^\ell \mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\, \ell \geqslant 0. \tag{4}$$

Aqui, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \ldots, u_n(\mathbf{x}, t))$ representa a velocidade de escoamento do fluido (de densidade constante) no ponto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e instante t, e $p = p(\mathbf{x}, t)$ representa a pressão em $(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{u} \cdot \nabla$ denota o operador advectivo $u_1(\mathbf{x}, t)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + u_n(\mathbf{x}, t)\frac{\partial}{\partial x_n}$; $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}, t)$ é o divergente do campo de velocidade; ∇p é o gradiente de $p = p(\mathbf{x}, t)$ com respeito à variável espacial $\mathbf{x}$; ν é uma constante positiva (viscosidade dinâmica), e $\Delta \mathbf{u}$ é o Laplaciano de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ na variáveis espaciais, $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_n^2}$. Em (4), $D^\ell \mathbf{u}_0$ refere-se coletivamente a todas as derivadas de ordem l (com respeito às variáveis $x_1, \ldots, x_n$) de $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, com $D^\ell \mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ significando que todas estas derivadas são de quadrado integrável em $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$||D^\ell \mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{5}$$

onde $||D^\ell \mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é dada por

$$||D^\ell \mathbf{u}_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1, \ldots, j_\ell = 1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^\ell u_{0,i}}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\ell}}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}, \tag{6}$$

sendo $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}_{0,1}(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{u}_{0,n}(\mathbf{x}))$. Mais geralmente, dada $w \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$, denotamos por $||D^\ell w||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ a quantidade dada por

$$||D^\ell w||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j_1, \ldots, j_\ell = 1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^\ell w}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\ell}}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}, \tag{7}$$

e, no caso de um campo vetorial $\mathbf{w} \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$,

$$||D^\ell \mathbf{w}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1,\ldots,j_\ell=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^\ell w_i}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_\ell}}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x}, \tag{8}$$

onde $w_1, w_2, \ldots, w_n \in C^\ell(\mathbb{R}^n)$ são as componentes de $\mathbf{w}$, ou seja, $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (w_1(\mathbf{x}), \ldots, w_n(\mathbf{x}))$.

No caso $n = 2$, o problema $(1) - (4)$ acima possui uma única solução $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$, $p \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$ definida para todo $t \geq 0$ e satisfazendo

$$||D^\ell \mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \qquad \forall \;\; \ell \geq 0 \tag{9}$$

para cada $t \geq 0$, ver e.g. [2], [8]. Para $n = 3$, é sabido existir solução (única) $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty[)$, $p \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[)$ satisfazendo (9) para todo $t \geq 0$ se o produto $\|\mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot \|D\mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ for pequeno (por exemplo menor que ν^2); nos demais casos, a existência (no sentido clássico) é conhecida apenas localmente, tendo-se $\mathbf{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T[)$, $p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T[)$ verificando (9) para $0 \leq t < T$ para algum $T > 0$ (que depende de $\mathbf{u}_0$), cf. [2], [8]. Ademais, para qualquer n, segue da teoria do potencial (Calderon-Zygmund) [5], [7], [8] que

$$||D^\ell p(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\ell,n} \, ||D^{\ell-1}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \;\; \ell \geq 1 \tag{10}$$

para $C_{\ell,n} > 0$ constante dependendo de ℓ, n apenas, de modo que, em particular, $D^\ell p(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $\ell \geq 1$.

Neste trabalho, vamos supor (no caso $n = 3$) que a solução $\mathbf{u}(\cdot, t)$ de $(1) - (4)$ existe para todo $t > 0$, sendo nosso objetivo examinar, então, o comportamento da norma $||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ ao $t \to +\infty$. Em dimensão $n = 2$, a existência de tal solução clássica para todo $t > 0$ é garantida, enquanto, para $n = 3$, constitui um importante problema em aberto há várias décadas, recentemente incluído pelo Instituto Clay, por tempo indeterminado, como um dos sete problemas a terem sua solução premiada com um milhão de dólares, [3].

Nas condições acima, o presente trabalho tem por objetivo a obtenção do seguinte resultado fundamental, originalmente obtido por M. Wiegner [9], [10]:

Teorema A: *Supondo que a solução da Equação do Calor satisfaz a estimativa*

$$||e^{\Delta t} \mathbf{u}_0(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 (1 + t)^{-\kappa} \qquad \forall \;\; t \geq 0 \tag{11}$$

para certa constante $C_1 > 0$ (dependendo de $\mathbf{u}_0$) e $0 < \kappa \leq n/4 + 1/2$, então a solução $\mathbf{u}(\cdot, t)$ do problema $(1) - (4)$ satisfaz

$$||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C (1 + t)^{-\kappa} \qquad \forall \;\; t \geq 0 \tag{12}$$

para certa constante $C > 0$ (dependendo de ν e $\mathbf{u}_0$).

Em [8], este resultado foi reobtido de modo mais simples, fazendo uso de técnicas conhecidas como transformadas de Fourier, desigualdades de energia, e lemas tipo Gronwall. O argumento destes autores será apresentado em detalhe a seguir.

Capítulo 1

Decaimento no tempo de soluções das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

Seção 1: Introdução

Neste capítulo, vamos derivar diversas propriedades das soluções (suaves) $\mathbf{u}(\cdot,t)$ das equações de Navier-Stokes incompressíveis em $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu\Delta\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, t>0 \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, t>0 \tag{1.2}$$

onde $n = 2$ ou 3.

As equações (1.1),(1.2) determinam as incógnitas $\mathbf{u}(\cdot,t), p(\cdot,t)$ uma vez dado o estado inicial do campo de velocidade,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

onde supomos $\mathbf{u}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = 0$ e

$$D^\ell\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \forall\,\ell \geqslant 0 \tag{1.4}$$

sendo que $D^\ell\mathbf{u}_0$ denota genericamente as derivadas de ordem ℓ com respeito à variável $\mathbf{x}$, onde

$$||D^\ell\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_\ell=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial^l u_i}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_\ell}}(\mathbf{x},t)\right|^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2}, \tag{1.5}$$

para $\ell = 0,1,2,\ldots$, sendo

$$||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}|u_i(\mathbf{x},t)|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

simplesmente a norma L^2 de $\mathbf{u}(\cdot,t)$.

Seção 2: Desigualdades de energia

Começamos observando a seguinte estimativa fundamental sobre $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Teorema 2.1. *Sendo $\mathbf{u}(\cdot,t)$ solução de (1.1) - (1.3) acima, tem-se*

$$\frac{d}{dt}||\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = -2\nu||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, t>0 \tag{1.7}$$

Prova: Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, temos, pela equação (1.1),

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i$$

multiplicando por $2u_i(\mathbf{x},t)$ e integrando em $\mathbb{R}^n$, resulta

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^n} u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathbf{x} + 2\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \\ +2\int_{\mathbb{R}^n} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} d\mathbf{x} = 2\nu \int_{\mathbb{R}^n} u_i \Delta u_i d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

E, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} u_i(\mathbf{x},t)^2 d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^2) d\mathbf{x} \\ -2\int_{\mathbb{R}^n} p \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = -2\nu \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Como por (1.2) temos

$$\sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^2) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i^2) \tag{1.8}$$

resulta

$$\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^2) d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i^2) d\mathbf{x} = 0,$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} u_i(\mathbf{x},t)^2 d\mathbf{x} - 2\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = -2\nu \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 d\mathbf{x};$$

somando em $1 \leq i \leq n$, resulta

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{u}(\mathbf{x},t))^2 d\mathbf{x} = -2\nu \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 d\mathbf{x}$$

visto que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ pela equação (1.2), o que conclui a prova do teorema acima. $\square$

Integrando em $[0,t]$ a equação (1.7), resulta

$$||\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\nu \int_0^t ||D\mathbf{u}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau = ||\mathbf{u}_0(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.9}$$

para todo $t > 0$.

Em particular, obtém-se

$$||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||\mathbf{u}_0(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

com $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ monotonicamente decrescente como função de t. Mais adiante (ver Teoremas 2.2 e 2.4), vamos obter que $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ também decresce com t eventualmente, i.e., para t_0 suficientemente grande, tem-se

$$||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||D\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \;\; t_0 \leq s \leq t. \tag{1.10}$$

Teorema 2.2. *Sendo* $\mathbf{u}(\cdot,t)$ *a solução de (1.1) - (1.3) acima, tem-se*

$$\frac{d}{dt}||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = -2\nu ||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.11}$$

$\forall \;\; t > 0.$

Prova: Da equação (1.1), temos, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i,$$

de modo que, derivando com relação a x_l, multiplicando por $2\partial u_i/\partial x_l$ e integrando em $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right) d\mathbf{x} + 2\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) d\mathbf{x} \\ +2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_l} d\mathbf{x} = 2\nu \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial^3 u_i}{\partial {x_j}^2 \partial x_l} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

E, usando (1.2),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{x} + 2\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \\ +2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2 p}{\partial {x_l}^2} d\mathbf{x} = -2\nu \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l}\right)^2 d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

para cada $i, l \in \{1, \ldots, n\}$ visto que

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} + \mathrm{I}(t)$$

onde por (1.2),

$$\mathrm{I}(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} u_j(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_j} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} u_j(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)^2 \right) d\mathbf{x} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)^2 \right) d\mathbf{x} = 0$$

Somando (1.12) em i, l de 1 a n, obtemos (1.11), pois

$$\sum_{i,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial^2 p}{\partial {x_l}^2} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \Delta p d\mathbf{x} = 0,$$

como queriamos provar. $\square$

Observando que, por (1.2), temos

$$\sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) d\mathbf{x} =$$

$$- \sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_l} d\mathbf{x},$$

resulta, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j,l=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} \right| \cdot |u_i| \cdot \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right| d\mathbf{x} \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i,j,l=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} \right|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i,j,l=1}^{n} |u_i|^2 \cdot \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right|^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x} \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j,l=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j,l=1}^{n} |u_i|^2 \cdot \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} =$$

$$||D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \cdot \sum_{j,l=1}^{n} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq$$

$$||D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot ||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,l=1}^{n} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

ou seja,

$$\left| \sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \right| \leq ||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot ||D^2 \mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (1.13)$$

para cada $t > 0$, onde $||\cdot||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ denota a norma do supremo, ou seja,

$$||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|, \tag{1.14}$$

sendo $|\cdot|$ a norma Euclidiana, ou seja, $|\mathbf{u}| = (|u_1|^2 + \ldots + |u_n|^2)^{1/2}$.

Em particular, obtemos do Teorema 2.2 a seguinte estimativa para $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$:

Teorema 2.3. *Sendo $\mathbf{u}(\cdot,t)$ solução de (1.1) - (1.3), tem-se*

$$\frac{d}{dt}||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq -2\nu||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \\ 2||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.15}$$

$\forall\ \ t > 0$.

No caso $n = 2$ (ou seja, escoamento no plano), resulta

$$\sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = 0 \quad \forall\ \ t > 0, \tag{1.16}$$

visto que, escrevendo $\mathrm{I}_{ijl} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x}$, tem-se

$$\sum_{i,j,l=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \sum_{i,j,l=1}^{n} \mathrm{I}_{ijl} = (\mathrm{I}_{112} + \mathrm{I}_{122}) + (\mathrm{I}_{121} + \mathrm{I}_{212}) + \\ (\mathrm{I}_{211} + \mathrm{I}_{221}) + (\mathrm{I}_{111} + \mathrm{I}_{222}) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

pois $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ por (1.2). Assim, no caso de se ter $n = 2$ dimensões, o Teorema 2.2 produz o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Sendo $n = 2$, a solução $\mathbf{u}(\cdot,t)$ de (1.1) - (1.3) satisfaz*

$$\frac{d}{dt}||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -2\nu||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \forall\ \ t > 0. \tag{1.17}$$

Em particular, para $n = 2$, temos $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ decrescente em t desde $t = 0$, ou seja

$$||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq ||D\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \forall\ \ 0 \leq s \leq t \tag{1.18}$$

no caso $n = 2$.

Seção 3: Decaimento de $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$: resultados preliminares

Nesta seção, vamos mostrar que $t \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ ao $t \to \infty$, o que será importante para a análise do decaimento de $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2}$ desenvolvido mais adiante na Seção 5.

Começamos examinando a monotonicidade de $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ no caso $n=3$. Pela desigualdade de Nirenberg-Gagliardo (ver Apêndice A), existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le K_1 ||\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^{3/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{1.19}$$

$$||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le K_2 ||\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{1.20}$$

para todo $t > 0$. Em particular, de (1.20), obtém-se

$$||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^{-1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \sqrt{K_2} ||\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^{-1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{1.21}$$

e o seguinte resultado pode ser obtido.

Teorema 3.5. *Sendo K_1, K_2 as constantes dadas em (1.19),(1.20) acima, se*

$$||\mathbf{u}(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \frac{\nu^2}{K_1^2 \cdot K_2} \tag{1.22}$$

para algum $t_0 \ge 0$, então $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ decresce monotonicamente para $t \ge t_0$, tendo-se

$$\frac{d}{dt}||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \;\le\; 0 \qquad \forall \;\; t \ge t_0. \tag{1.23}$$

Prova: Do Teorema 2.3, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le 2||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ -2\nu||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, de modo que, por (1.19)-(1.21) acima,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\le 2K_1||\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^{7/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\qquad -2\nu||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &= 2||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot (K_1||\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^{-1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \nu) \\ &\le 2||D^2\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot (K_1K_2^{1/2}||\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \nu),\end{aligned}$$

de onde segue que, supondo $||D^2\mathbf{u}(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} > 0$, $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $[\,t_0, t_0+\delta\,]$ para algum $\delta > 0$. Como $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ decresce para todo t, resulta que

$$||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \frac{\nu^2}{K_1^2 \cdot K_2}$$

para todo $t \in [\,t_0, t_0+\delta\,]$, de modo que o argumento pode ser repetido em $t_0+\delta$, e assim sucessivamente. Disso segue (1.23) para todo $t \ge t_0$: de fato, se não valesse, teria de existir $t_* > t_0$ com $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ decrescente em $[\,t_0, t_*]$ e $d/dt||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$ para $t = t_*$; neste caso, pela expressão acima, teríamos de ter $||D^2\mathbf{u}(\cdot,t_*)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$. Como $\mathbf{u}(\cdot,t_*) \in H^2(\mathbb{R}^3)$, resultaria $\mathbf{u}(\cdot,t_*) = \mathbf{0}$, tendo-se então $\mathbf{u}(\cdot,t) = \mathbf{0}$, $D\mathbf{u}(\cdot,t) = \mathbf{0}$ para todo $t \ge t_*$, implicando (1.23).

Pela mesma razão, obteríamos (1.23) caso valesse $||D^2\mathbf{u}(\cdot,t_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0$, o que completa o argumento. $\square$

Uma conseqüência do Teorema 3.5 é que $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $[T_0,+\infty[$ para T_0 dado por

$$T_0 = \frac{K_1^4 \cdot K_2^2}{2\nu^5} \cdot ||\mathbf{u}_0||^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.24}$$

onde $K_1, K_2 > 0$ são as constantes dadas em (1.19),(1.20) acima.

De fato, dado $t_0 > T_0$, temos (por (1.9))

$$2\nu \int_0^{t_0} ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} dt \leq ||\mathbf{u}_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

de modo que existe $\tau_0 \in [0,t_0]$ tal que

$$2\nu t_0 ||D\mathbf{u}(\cdot,\tau_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq ||\mathbf{u}_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Multiplicando por $||\mathbf{u}(\cdot,\tau_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, resulta

$$\begin{aligned} 2\nu t_0 ||\mathbf{u}(\cdot,\tau_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,\tau_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ \leq ||\mathbf{u}(\cdot,\tau_0)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||\mathbf{u}_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ \leq ||\mathbf{u}_0||^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

de modo que, por (1.24), temos

$$||\mathbf{u}(\cdot,\tau_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,\tau_0)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \frac{\nu^2}{K_1^2 \cdot K_2}.$$

Pelo Teorema 3.5, resulta que $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $[\tau_0,+\infty[$, e, em particular, no subintervalo $[t_0,+\infty[$. Como $t_0 > T_0$ é arbitrário, segue que $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ é decrescente em $[T_0,+\infty[$, o que reescrevemos a seguir.

Teorema 3.6. *Sendo $K_1, K_2 > 0$ as constantes dadas em (1.19),(1.20), tem-se que $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ decresce monotonicamente (como função de t) no intervalo $[T_0,+\infty[$, onde T_0 é dado em (1.24) acima.*

No caso 2-D, foi mostrado na Seção 2 que $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ é monotonicamente decrescente para todo $t > 0$. Estamos agora em condições de mostrar o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Sendo $n = 2$ ou 3, tem-se*

$$t \cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad ao \quad t \to \infty.$$

Prova: Supondo o resultado falso, existiria $\delta > 0$ e uma seqüência $t_j \nearrow +\infty$ com $t_{j+1} \geq 2\,t_j$ e

$$t_j ||D\mathbf{u}(\cdot,t_j)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq \delta$$

para todo j. Para j suficientemente grande, $||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente em $[\,t_j, t_{j+1}]$, e então

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt &\geq (t_{j+1}-t_j)\cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t_{j+1})||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= (1-t_j/t_{j+1})\cdot t_{j+1}\cdot ||D\mathbf{u}(\cdot,t_{j+1})||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq (1-t_j/t_{j+1})\delta \geq \frac{\delta}{2},\end{aligned}$$

contradizendo o fato de se ter $\int_0^{+\infty} ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$ finito, visto que, por (1.9), temos

$$\int_0^{+\infty} ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt \leq \frac{||\mathbf{u}_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{2\nu}.$$

Isso conclui a prova do teorema acima. □

Em particular, podemos escrever

$$||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (1+t)^{-1/2}\phi(t) \tag{1.25}$$

para $\phi(t)$ função suave satisfazendo

$$\phi(t) \to 0 \quad ao \quad t \to \infty. \tag{1.26}$$

Seção 4: Relação entre normas L^2 do campo de velocidade e vorticidade (e suas derivadas)

Nesta seção, vamos mostrar uma relação simples (e importante) entre as normas L^2 dos campos de velocidade ($\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t)$) e vorticidade ($\mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{u}$), e suas derivadas espaciais de ordem mais elevada [1]. Em $3-D$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ é dada por

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = (\nabla \wedge \mathbf{u})(\mathbf{x},t) = \sum_{i,j,\kappa=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)\,\vec{e}_k \tag{1.27}$$

onde $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^3$, e ε_{ijk} é o tensor (densidade) de Levi-Civita definido por

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & se\ (i,j,k)\ é\ permutação\ par\ de\ (1,2,3) \\ -1, & se\ (i,j,k)\ é\ permutação\ ímpar\ de\ (1,2,3) \\ 0, & se\ i=j,\ i=k\ ou\ j=k, \end{cases} \tag{1.28}$$

que satisfaz, em particular, a propriedade

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\,\delta_{jq} - \delta_{iq} - \delta_{jp} \tag{1.29}$$

para cada $i, j, p, q \in \{1, 2, 3\}$ dados, onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$).

Em $2 - D$, temos $\mathbf{w} = \nabla \wedge (u_1, u_2, 0) = w(\mathbf{x}, t) \cdot (0, 0, 1)$, com $w(\mathbf{x}, t)$ dado por

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \tag{1.30}$$

ou, equivalentemente,

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t), \tag{1.31}$$

sendo útil observar a identidade

$$\varepsilon_{ij3}\varepsilon_{pq3} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \tag{1.32}$$

para cada $i, j, p, q \in \{1, 2\}$.

Teorema 4.8. *($n = 2$) Sendo* $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$*, então* $||w(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} = ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ *para todo $t > 0$.*

Prova: Temos, usando (1.31) e (1.32) acima,

$$\begin{aligned}
||w(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{x}, t)^2 d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{p,q=1}^{2} \varepsilon_{pq3} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i,j,p,q=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{pq3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i,j,p,q=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{ip}\delta_{jq} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} d\mathbf{x} - \sum_{i,j,p,q=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{iq}\delta_{jp} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} - \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \\
&= ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\
&= ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i,=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_{i,=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \\
&= ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

visto que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. $\square$

Teorema 4.9. *($n = 2$) Sendo* $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$*, então* $||D^\ell w(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} = ||D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ *para todo $\ell \geq 0$.*

Prova: O caso $\ell = 0$ foi mostrado acima; para $\ell \geq 1$, temos, de modo análogo,

$$||D^\ell w(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial^\ell w}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \right)^2 d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \right) \cdot \left(\sum_{p,q=1}^{2} \varepsilon_{pq3} \cdot \frac{\partial^{\ell+1}}{\partial x_p \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \right) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^{2} \sum_{i,j,p,q=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon_{ij3}\varepsilon_{pq3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^{2} \sum_{i,j,p,q=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} \right)^2 d\mathbf{x} - \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_j \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}$$

$$= ||D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_j \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_i \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} d\mathbf{x}$$

$$= ||D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

visto que

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_j \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_i \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^\ell}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial^\ell}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}} \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} = 0$$

para cada $i_1, i_2, \dots, i_\ell \in \{1, 2\}$, concluindo o argumento. □

Analogamente, em $3 - D$, temos os seguintes resultados.

Teorema 4.10. *($n = 3$) Sendo* $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$*, então* $||\mathbf{w}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ *para todo* $t > 0$*.*

Prova: Temos, usando (1.27) e (1.29) acima,

$$||\mathbf{w}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} w_k(\mathbf{x},t)^2 d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial u_q}{\partial x_p}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk}) \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial u_q}{\partial x_p}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} \tag{1.33}$$

$$= \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \delta_{ip}\delta_{jq} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_q}{\partial x_p}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} - \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \delta_{iq}\delta_{jp} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)^2 d\mathbf{x} - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

$$= ||D\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

visto que, integrando por partes, temos

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x},t))^2 d\mathbf{x} = 0,$$

o que prova o teorema acima. □

Teorema 4.11. *($n = 3$) Sendo* $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$*, então* $||D^\ell \mathbf{w}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} = ||D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ *para todo* $t > 0$ *e todo* $\ell > 0$.

Prova: O caso $\ell = 0$ foi considerado na prova anterior; para $\ell \geq 1$, tem-se, de modo análogo,

$$||D^\ell \mathbf{w}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^\ell w_k}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)^2 d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{3} \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{3} \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk}) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{3} \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \delta_{ip}\delta_{jq} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

$$- \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{3} \sum_{i,j,p,q=1}^{3} \delta_{iq}\delta_{jp} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_q}{\partial x_p \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)^2 d\mathbf{x}$$

$$- \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_\ell=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \cdot \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_j \partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x}$$

$$= ||D^{\ell+1}\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

visto que, integrando por partes, temos

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_i \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_j \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^{\ell+1} u_j}{\partial x_j \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) \frac{\partial^{\ell+1} u_i}{\partial x_i \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\ell}}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^{\ell}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\ell}} (\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \right)^2 d\mathbf{x} = 0$$

para cada $i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in \{1,2,3\}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Seção 5: Decaimento de $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Nesta seção, vamos obter o Teorema A, ou seja, vamos mostrar que a solução $\mathbf{u}(\cdot,t)$ do problema de Navier-Stokes (1.1)-(1.4) satisfaz a estimativa

$$||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot (1+t)^{-\kappa} \qquad \forall\ t\ \geq\ 0 \tag{1.34}$$

para $C > 0$ constante dependendo de n, ν, $\mathbf{u}_0$, desde que

$$\kappa \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \tag{1.35}$$

e a solução correspondente $e^{\Delta t}\mathbf{u}_0$ da equação do calor satisfaça a estimativa análoga

$$||e^{\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \cdot (1+t)^{-\kappa} \qquad \forall\ t\ \geq\ 0 \tag{1.36}$$

para $C_1 > 0$ constante apropriada.

Para mostrar este resultado fundamental, começamos escrevendo $\mathbf{u}(\cdot,t)$ na forma

$$\mathbf{u}(\cdot,t) = e^{\Delta t}\mathbf{u}_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} \mathbf{Q}(\cdot,s) ds, \qquad t > 0 \tag{1.37}$$

onde $\mathbf{Q}(\cdot,\tau)$ é dado por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x},\tau) = -\nabla p(\mathbf{x},\tau) - (\mathbf{u}(\mathbf{x},\tau) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x},\tau). \tag{1.38}$$

Como se trata se estimar a norma L^2, vamos fazer uso da transformada de Fourier de várias funções envolvidas, definida aqui por

$$\widehat{V}(\kappa,t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}\, V(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} \tag{1.39}$$

para $V(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ qualquer. Em particular resulta de (1.39) a estimativa elementar

$$||\widehat{V}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2} ||V(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.40}$$

que será usada em várias ocasiões a seguir.

Lema 5.1. *A transformada de Fourier da pressão $p(\mathbf{x},t)$ satisfaz*

$$||\widehat{p}(\cdot,t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2}||\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.41}$$

para todo $t > 0$

Prova: Tomando o divergente na equação (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} -\Delta p = \operatorname{div}((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}) &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) = \sum_{l,j=1}^{n} \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

de modo que, como $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} -\widehat{\Delta p}(\kappa,t) &= (2\pi)^{-n/2}\sum_{l,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_l}(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\ &= (2\pi)^{-n/2}\sum_{l,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} u_j\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\cdot \boldsymbol{i}\kappa_l e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\ &= (2\pi)^{-n/2}\sum_{l,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} u_j u_l\cdot(\boldsymbol{i}\kappa_l)(\boldsymbol{i}\kappa_j)e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\ &= -(2\pi)^{-n/2}\sum_{l,j=1}^{n}\kappa_j\kappa_l\int_{\mathbb{R}^n} u_j(\mathbf{x},t)u_l(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\widehat{\Delta p}(\kappa,t) = \sum_{l,j=1}^{n}\kappa_j\kappa_l\widehat{u_j u_l}(\kappa,t) \tag{1.42}$$

para cada $\kappa \in (\mathbb{R}^n)$, $t > 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta p}(\kappa,t) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta p(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\ &= \sum_{l=1}^{n}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2 p}{\partial x_l^2}(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\ &= \sum_{l=1}^{n}(2\pi)^{-n/2}(\boldsymbol{i}\kappa_l)^2\int_{\mathbb{R}^n}p(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\widehat{\Delta p}(\kappa,t) = -|\kappa|^2\widehat{p}(\kappa,t). \tag{1.43}$$

Portanto, de (1.42) e (1.43) acima, obtemos (para $\kappa \neq \mathbf{0}$)

$$\widehat{p}(\kappa,t) = -\frac{1}{|\boldsymbol{\kappa}|^2}\sum_{l,j=1}^{n} \kappa_j\kappa_l\widehat{u_ju_l}(\kappa,t), \tag{1.44}$$

de modo que, para cada $\kappa \neq \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{p}(\kappa,t)| &\leq \frac{1}{|\boldsymbol{\kappa}|^2}\sum_{l,j=1}^{n} |\kappa_j|\cdot|\kappa_l|\cdot|\widehat{u_ju_l}(\kappa,t)| \\
&\leq \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\boldsymbol{\kappa}|^2}\sum_{l,j=1}^{n} |\kappa_j|\cdot|\kappa_l|\cdot||u_ju_l(\cdot,t)||_{L_1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\boldsymbol{\kappa}|^2}\sum_{l,j=1}^{n} |\kappa_j|\cdot|\kappa_l|\cdot||u_j(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cdot||u_l(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{(2\pi)^{-n/2}}{|\boldsymbol{\kappa}|^2}\left(\sum_{l,j=1}^{n} |\kappa_j|^2\cdot||u_l(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{l,j=1}^{n} |\kappa_l|^2\cdot||u_j(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2} \\
&= (2\pi)^{-n/2}||\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 5.2. *Tem-se, para a norma euclidiana de* $\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa},t)$,

$$|\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2 \leq (2\pi)^{-n/2}||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}||D\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.45}$$

Prova: Tem-se, para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}}(\boldsymbol{\kappa},t) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i\kappa}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \\
&= (2\pi)^{-n/2}(\boldsymbol{i}\kappa_i)\cdot\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i\kappa}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} = \boldsymbol{i}\kappa_i\widehat{p}(\boldsymbol{\kappa},t),
\end{aligned}$$

de modo que, de (1.44) acima,

$$\widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}}(\boldsymbol{\kappa},t) = -\boldsymbol{i}\frac{\kappa_i}{|\boldsymbol{\kappa}|}\sum_{l,j=1}^{n}\frac{\kappa_l}{|\boldsymbol{\kappa}|}\kappa_j\widehat{u_ju_l}(\boldsymbol{\kappa},t). \tag{1.46}$$

Por outro lado, como $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\widehat{u_j\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa},t) &= \widehat{\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_l}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa},t) \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)e^{-\boldsymbol{i\kappa}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_l) e^{-\boldsymbol{i\kappa}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{i}\kappa_j u_j(\mathbf{x},t) \cdot u_l(\mathbf{x},t) \cdot e^{-\boldsymbol{i\kappa}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

$$= \boldsymbol{i} \sum_{j=1}^{n} \kappa_j \widehat{u_j u_l}(\boldsymbol{\kappa},t)$$

para cada $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, de modo que, usando (1.46) acima, obtemos

$$\widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}}(\boldsymbol{\kappa},t) = -\frac{\kappa_i}{|\boldsymbol{\kappa}|} \sum_{l=1}^{n} \frac{\kappa_l}{|\boldsymbol{\kappa}|} \left(\boldsymbol{i} \sum_{j=1}^{n} \kappa_j \widehat{u_j u_l}(\boldsymbol{\kappa},t) \right),$$

ou seja,

$$\widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}}(\boldsymbol{\kappa},t) = -\frac{\kappa_i}{|\boldsymbol{\kappa}|} \sum_{l=1}^{n} \frac{\kappa_l}{|\boldsymbol{\kappa}|} \left(\sum_{j=1}^{n} \widehat{u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa},t) \right). \tag{1.48}$$

Portanto, por (1.40),

$$\left| \widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}}(\boldsymbol{\kappa},t) \right| \leq \frac{|\kappa_i|}{|\boldsymbol{\kappa}|} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{|\kappa_l|}{|\boldsymbol{\kappa}|} \left| \widehat{u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa},t) \right|$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \frac{|\kappa_i|}{|\boldsymbol{\kappa}|} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{|\kappa_l|}{|\boldsymbol{\kappa}|} || u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(\cdot,t) ||_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \frac{|\kappa_i|}{|\boldsymbol{\kappa}|} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{|\kappa_l|}{|\boldsymbol{\kappa}|} || u_j(\cdot,t) ||_{L^2(\mathbb{R}^n)} || \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(\cdot,t) ||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2} \frac{|\kappa_i|}{|\boldsymbol{\kappa}|} \left(\sum_{j,l=1}^{n} \frac{|\kappa_l|^2}{|\boldsymbol{\kappa}|^2} || u_j(\cdot,t) ||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2} \cdot \left(\left|\left| \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(\cdot,t) \right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2}$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \frac{|\kappa_i|}{|\boldsymbol{\kappa}|} || \mathbf{u}(\cdot,t) ||_{L^2(\mathbb{R}^n)} || D\mathbf{u}(\cdot,t) ||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ou seja,

$$\left| \widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}}(\boldsymbol{\kappa},t) \right| \leq (2\pi)^{-n/2} \frac{|\kappa_i|}{|\boldsymbol{\kappa}|} || \mathbf{u}(\cdot,t) ||_{L^2(\mathbb{R}^n)} || D\mathbf{u}(\cdot,t) ||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.49}$$

para cada $\boldsymbol{\kappa} \neq \mathbf{0}$ e $t > 0$, e cada $1 \leq i \leq n$, de onde segue (1.45), como afirmado.
□

Lema 5.3.

$$|\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2 \leq (2\pi)^{-n/2} \cdot |\boldsymbol{\kappa}|_2 \cdot || \mathbf{u}(\cdot,t) ||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.50}$$

para todo $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Prova: Como, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tem-se

$$\widehat{\frac{\partial p}{\partial x_i}}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \boldsymbol{i}\kappa_i \widehat{p}(\boldsymbol{\kappa}, t),$$

segue que $\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \boldsymbol{i}\widehat{p}(\boldsymbol{\kappa}, t)\boldsymbol{\kappa}$ para cada $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, de modo que

$$|\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa}, t)|_2 = |\boldsymbol{\kappa}|_2 \cdot |\widehat{p}(\boldsymbol{\kappa}, t)| \leq (2\pi)^{-n/2} \cdot |\boldsymbol{\kappa}|_2 \cdot ||\mathbf{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

provando (1.50). □

Consideremos, agora, $\mathbf{Q}(\cdot, t)$ introduzido em (1.38) acima.

Lema 5.4. *Sendo*

$$\mathbf{Q}(\cdot, t) = -\nabla p(\cdot, t) - (\mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\cdot, t),$$

tem-se

$$|\widehat{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\kappa}, t)|_2 \leq 2 \cdot (2\pi)^{-n/2} \cdot ||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.51}$$

para todo $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Prova: Tem-se, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por (1.40),

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} \widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa}, t) \right| &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} |u_j(\mathbf{x}, t)| \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \right| d\mathbf{x} \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x} \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} \cdot ||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{n} \widehat{u_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa}, t) \right|_2^2 &\leq (2\pi)^{-n} \cdot ||\mathbf{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t)^2 d\mathbf{x} \\
&\leq (2\pi)^{-n} \cdot ||\mathbf{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\widehat{(\mathbf{u} \cdot \nabla)}\mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa}, t)|_2 \leq (2\pi)^{-n/2} ||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.52}$$

Logo, de (1.38), resulta

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\kappa}, t)|_2 &\leq |\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa}, t)|_2 + |\widehat{(\mathbf{u} \cdot \nabla)}\mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa}, t)|_2 \\
&\leq 2 \cdot (2\pi)^{-n/2} ||\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D\mathbf{u}(\cdot, t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

em vista de (1.45) e (1.52), como se queria mostrar. □

Lema 5.5. *Sendo*

$$\mathbf{Q}(\cdot,t) = -\nabla p(\cdot,t) - (\mathbf{u}(\cdot,t)\cdot\nabla)\mathbf{u}(\cdot,t)$$

dado acima, tem-se

$$|\widehat{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2 \leq 2\cdot(2\pi)^{-n/2}\cdot|\boldsymbol{\kappa}|_2\cdot||\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.53}$$

para todo $\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^n$, $t>0$.

Prova: Tem-se, para cada $i\in\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\sum_{j=1}^n u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(u_iu_j),$$

visto que $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$, de modo que

$$\sum_{j=1}^n \widehat{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa},t) = \sum_{j=1}^n \widehat{\frac{\partial}{\partial x_j}(u_iu_j)}(\boldsymbol{\kappa},t) = \boldsymbol{i}\sum_{j=1}^n \kappa_j\widehat{u_iu_j}(\boldsymbol{\kappa},t).$$

Portanto, para cada i, por (1.40),

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n \widehat{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa},t)\right| &\leq \sum_{j=1}^n |\kappa_j||\widehat{u_iu_j}(\boldsymbol{\kappa},t)|\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\sum_{j=1}^n|\kappa_j|\cdot||u_iu_j(\cdot,t)||_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\sum_{j=1}^n|\kappa_j|\cdot||u_i(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cdot||u_j(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq (2\pi)^{-n/2}\left(\sum_{j=1}^n|\kappa_j|^2\right)^{1/2}\cdot||u_i(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left(\sum_{j=1}^n||u_j(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}|\widehat{(\mathbf{u}\cdot\nabla)}\mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2^2 &= \sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n \widehat{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}(\boldsymbol{\kappa},t)\right|^2\\ &\leq (2\pi)^{-n}|\boldsymbol{\kappa}|_2^2\sum_{i,j=1}^n||u_i(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}||u_j(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &= (2\pi)^{-n}|\boldsymbol{\kappa}|_2^2||\mathbf{u}(\cdot,t)||^4_{L^2(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\widehat{(\mathbf{u}\cdot\nabla)}\mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2 \leq (2\pi)^{-n/2}|\boldsymbol{\kappa}|_2||\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.54}$$

para cada $\boldsymbol{\kappa}\in\mathbb{R}^n$, $t>0$. Em particular, por (1.38), (1.50) e (1.54),

$$\begin{aligned}|\widehat{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2 &= |\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa},t) + \widehat{(\mathbf{u}\cdot\nabla)}\mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2\\ &\leq |\widehat{\nabla p}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2 + |\widehat{(\mathbf{u}\cdot\nabla)}\mathbf{u}(\boldsymbol{\kappa},t)|_2\\ &\leq 2\cdot(2\pi)^{-n/2}\cdot|\boldsymbol{\kappa}|_2\cdot||\mathbf{u}(\cdot,t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

como afirmado. □

Lema 5.6. *(Equação do Calor) Sendo $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a solução $e^{\nu\Delta t}v_0$ do problema $v_t = \nu\Delta v$, $v(\cdot,0) = v_0$ satisfaz*

$$||e^{\nu\Delta t}v_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/4} \cdot (\nu\, t)^{-n/4} \cdot ||\widehat{v_0}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \tag{1.55}$$

para todo $t > 0$.
Ademais, se $|\widehat{v_0}(\boldsymbol{\kappa})| \leq M \cdot |\boldsymbol{\kappa}|_2 \cdot |\widehat{w_0}(\boldsymbol{\kappa})|$ para todo $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$ (e certo $\widehat{w_0} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $M > 0$), então

$$||e^{\nu\Delta t}v_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/4} \cdot ||\widehat{w_0}||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot (\nu t)^{\frac{-n}{4}-\frac{1}{2}} \tag{1.56}$$

para todo $t > 0$.

Prova: Começando por (1.55), observamos que $v(\cdot,t) = e^{\nu\Delta t}v_0$ satisfaz $v_t(\mathbf{x},t) = \nu\Delta v(\mathbf{x},t)$, de modo que sua transformada de Fourier $\widehat{v}(\cdot,t)$ satisfaz

$$\widehat{v}_t(\boldsymbol{\kappa},t) = -\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2\widehat{v}(\boldsymbol{\kappa},t), \qquad \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

$$\widehat{v}(\boldsymbol{\kappa},0) = \widehat{v_0}(\boldsymbol{\kappa}), \qquad \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$$

ou seja,

$$\widehat{v}(\boldsymbol{\kappa},t) = e^{-\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t}\widehat{v_0}(\boldsymbol{\kappa}),$$

i.e.,

$$\widehat{e^{\nu\Delta t}v_0}(\boldsymbol{\kappa},t) = e^{-\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t}\widehat{v_0}(\boldsymbol{\kappa},t). \tag{1.57}$$

Como $||e^{\nu\Delta t}v_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\widehat{e^{\nu\Delta t}v_0}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ por Parseval-Plancherel, temos

$$||e^{\nu\Delta t}v_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\widehat{e^{\nu\Delta t}v_0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t}|\widehat{v_0}(\boldsymbol{\kappa})|^2 d\boldsymbol{\kappa} \leq ||\widehat{v_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t}d\boldsymbol{\kappa}$$

para todo $t > 0$. Observando que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t}d\boldsymbol{\kappa} &= \int_{|\mathbf{w}|=1}\int_0^{+\infty} e^{-2\nu r^2 t}r^{n-1}dr\,d\sigma(\mathbf{w})\\ &= w_n \cdot \int_0^{+\infty} e^{-2\nu r^2 t}r^{n-1}dr\\ &= \frac{1}{2}w_n(2\nu t)^{-n/2}\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{\frac{n}{2}-1}ds\\ &= \frac{1}{2}w_n(2\nu t)^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),\end{aligned}$$

onde $w_n = \int_{|\mathbf{w}|_2=1} d\sigma(\mathbf{w}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ é a área da (hiper) superfície unitária $\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{w}|_2 = 1\}$, ver e.g. [4], obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t}d\boldsymbol{\kappa} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2}(\nu t)^{-n/2}, \tag{1.58}$$

e daí

$$||e^{\nu\Delta t}v_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq ||\widehat{v_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t} d\boldsymbol{\kappa}$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \cdot (\nu t)^{-n/2} ||\widehat{v_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

o que mostra (1.55).

De modo análogo, podemos obter (1.56): Tendo-se $|\widehat{v_0}(\boldsymbol{\kappa})| \leq M \cdot |\boldsymbol{\kappa}|_2 \cdot |\widehat{w_0}(\boldsymbol{\kappa})|$ $\forall\, \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^n$ para certa constante $M \geq 0$ e $\widehat{w_0} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então

$$||e^{\nu\Delta t}v_0||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\widehat{e^{\nu\Delta t}v_0}||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t} |\widehat{v_0}(\boldsymbol{\kappa})|^2 d\boldsymbol{\kappa}$$
$$\leq M^2 \cdot ||\widehat{w_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\nu|\boldsymbol{\kappa}|_2^2 t} |\boldsymbol{\kappa}|_2^2 d\boldsymbol{\kappa}$$
$$= M^2 \cdot ||\widehat{w_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot w_n \int_0^{+\infty} e^{-2\nu r^2 t} r^{n-1+2} dr$$
$$= M^2 \cdot ||\widehat{w_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot w_n \cdot \frac{1}{2}(2\nu t)^{\frac{-n}{2}-1} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}} ds$$
$$= M^2 \cdot ||\widehat{w_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot w_n \cdot \frac{1}{2}(2\nu t)^{\frac{-n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2}+1)$$
$$= M^2 \cdot ||\widehat{w_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot w_n \cdot (\nu t)^{\frac{-n}{2}-1} \cdot 2^{\frac{-n}{2}-2} \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})$$
$$= M^2 \cdot ||\widehat{w_0}||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/2} \cdot \frac{n}{4},$$

visto que $w_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$, ver [4], p. 12, o que mostra (1.56). □

Em particular, dos lemas acima obtém-se, para cada $0 \leq s < t$,

$$||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/4} \cdot (\nu t)^{-n/4} ||\widehat{\mathbf{Q}}(\cdot,s)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq 2 \cdot 2^{-3n/4} \pi^{-n/4} (\nu(s))^{-n/4} ||\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ou seja,

$$||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq K_n \nu^{-n/4} (t-s)^{-n/4} ||\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} ||D\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.59}$$

onde $K_n = 2 \cdot 2^{-3n/4} \cdot \pi^{-n/4}$. Análogamente, por (1.53)e (1.55) acima, tem-se

$$||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2(2\pi)^{-n/2} \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n/4} (\nu(t-s))^{-n/4-1/2} ||\mathbf{u}(\cdot,s)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

ou seja,

$$||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{K}_n \nu^{\frac{-n}{4}-\frac{1}{2}} (s)^{\frac{-n}{4}-\frac{1}{2}} ||\mathbf{u}(\cdot,s)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.60}$$

para todo $0 \leq s \leq t$, onde $\widetilde{K}_n = \sqrt{n} \cdot 2^{-3n/4} \cdot \pi^{-n/4}$.

Com estes resultados podemos finalmente estimar $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ para a solução $\mathbf{u}(\cdot,t)$ do problema (1.1) - (1.4), como mostramos a seguir.

Teorema 5.12. *($n=3$) Sendo $||e^{\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C_1(1+t)^{-\kappa}$ para todo $t>0$ e algum $0<\kappa\le 5/4$, então $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C(1+t)^{-\kappa}$para todo $t>0$ (e $C>0$ constante dependendo de ν e $\mathbf{u}_0$).*

Prova: Sendo $H_0(t) := ||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, devemos mostrar que $H_0(t) \le C(1+t)^{-\kappa}$, supondo $||e^{\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(1+t)^{-\kappa}$ com $0<\kappa\le 5/4$. De (1.36), obtemos, por (1.59) e Teorema 3.7,

$$H_0(t) \le ||e^{\nu\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t ||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds$$
$$\le C_1(1+\nu t)^{-\kappa} + K_3\nu^{-3/4}\int_0^t (t-s)^{-3/4}||D\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}||\mathbf{u}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds$$
$$\le C_2(\nu)(1+t)^{-\kappa} + C_3(\nu)\int_0^t (t-s)^{-3/4}(1+s)^{-1/2}H_0(s)ds$$

para cada $t>0$, onde C_2, C_3 dependem de ν e $\mathbf{u}_0$. Em particular, usando o apêndice B, no caso $0<\kappa\le 3/4$, obtemos $H_0(t)\le C(1+t)^{-\kappa}$ para todo $t>0$ e $C>0$ dependendo apenas de ν e $\mathbf{u}_0$.

Consideremos agora o caso $\kappa \in]3/4, 5/4]$. Pela análise acima, sabemos que $H_0(t) \le C(1+t)^{-3/4}$; por (1.36), (1.59) e (1.60),

$$H_0(t) \le C(1+t)^{-\kappa} + \int_0^{t/2} ||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds + \int_{t/2}^t ||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds$$
$$\le C(1+t)^{-\kappa} + \kappa\int_0^{t/2}(t-s)^{-5/4}H_0(s)^2ds + \kappa\int_{t/2}^t (t-s)^{-3/4}(1+s)^{-1/2}H_0(s)ds$$

onde κ, C dependem de ν e $\mathbf{u}_0$, mas não de t. Como

$$\int_0^{t/2}(t-s)^{-5/4}H_0(s)^2ds \le C\int_0^{t/2}(t-s)^{-5/4}(1+s)^{-3/2}ds$$
$$\le \widetilde{C}t^{-5/4}\int_0^t (1+s)^{-3/2}ds \le Ct^{-5/4} \le \widetilde{C}(1+t)^{-\kappa},$$

obtemos

$$H_0(t) \le C(1+t)^{-\kappa} + C\int_{t/2}^t (t-s)^{-3/4}(1+s)^{-1/2}H_0(s)ds$$

para todo $t>0$, ou seja,

$$E(t) \le C + C(1+t)^{\kappa}\int_{t/2}^t (t-s)^{-3/4}(1+s)^{-1/2-\kappa}E(s)ds,$$

sendo $E(t) := (1+t)^{\kappa}H_0(t)$. Definindo $E_{max}(t) := max_{0\le s\le t}E(s)$, resulta

$$(*) \qquad E_{max}(t) \le C + C(1+t)^{\kappa}E_{max}(t)\int_{t/2}^t (t-s)^{-3/4}(1+s)^{-1/2-\kappa}ds$$

para todo $t>0$, e como

$$\int_{t/2}^t (t-s)^{-3/4}(1+s)^{-1/2-\kappa}ds \le K(1+t)^{-1/2-\kappa}\int_0^t (t-s)^{-3/4}ds \le K_1(1+t)^{-1/2-\kappa}t^{1/4},$$

existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$C(1+t)^{\kappa}\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-3/4}(1+s)^{-1/2-\kappa}ds \leq \frac{1}{2} \qquad \forall t \geq t_0,$$

de modo que obtemos $E_{max}(t) \leq 2C, \;\; \forall\, t \geq t_0$ por $(*)$ acima. Assim, $H_0(t) \leq 2C(1+t)^{-\kappa}, \;\; \forall\, t \geq t_0$, onde resulta que $H_0(t) \leq \widetilde{C}(1+t)^{-\kappa}, \;\; \forall\, t > 0$, e uma constante $\widetilde{C}$ apropriada (independente de t), estabelecendo o resultado no caso $\kappa \in\;]3/4, 5/4]$, como se queria mostrar. $\square$

Teorema 5.13. *($n = 2$) Sendo $||e^{\nu\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_1(1+t)^{-\kappa}$ para todo $t > 0$ e certo $0 < \kappa \leq 1$, então $||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C(1+t)^{-\kappa}$para todo $t > 0$, onde $C > 0$ é constante dependendo apenas de ν e $\mathbf{u}_0$.*

Prova: Introduzindo $H_0(t) := ||\mathbf{u}(\cdot,t)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, devemos mostrar que $H_0(t) \leq C(1+t)^{-\kappa}$, assumindo que se tenha $||e^{\nu\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_1(1+t)^{-\kappa}$. Consideremos, inicialmente, o caso $0 < \kappa < 1/2$. De (1.36), (1.59) e Teorema 3.7, temos

$$\begin{aligned} H_0(t) &\leq ||e^{\nu\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_0^t ||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds \\ &\leq C_2(1+t)^{-\kappa} + C_3\int_0^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}\Phi(s)H_0(s)ds, \end{aligned}$$

onde $C_2, C_3 > 0$ dependem de $\nu, \mathbf{u}_0$ e $\Phi(s) \to 0$ ao $s \to +\infty$.

Definindo

$$E(t) := H_0(t)(1+t)^{\kappa}, \qquad E_{max}(t) := max_{0\leq s\leq t}E(s),$$

temos

$$E(t) \leq C_2 + C_3\mathcal{J}(t)E_{max}(t),$$

onde

$$\mathcal{J}(t) := (1+t)^{\kappa}\int_0^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s)ds,$$

tendo-se $E \in L^{\infty}(0,\infty)$ se mostrarmos que $\mathcal{J}(t) \to 0$ ao $t \to +\infty$. Escrevendo

$$\int_0^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s)ds = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t),$$

onde

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^{t_0}(t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s)ds, \\ I_1(t) &= \int_{t_0}^{t/2}(t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s)ds, \\ I_1(t) &= \int_{t/2}^{t}(t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s)ds, \end{aligned}$$

para $t_0 > 0$ a ser escolhido abaixo (ver $(*)$, $(**)$), $t \geq 2t_0$, obtemos $I_1 \leq \kappa(t_0)\,(t-t_0)^{-1/2}$ para todo $t \geq 2t_0$, de modo que (qualquer que seja a escolha de t_0) temos

$$(1+t)^{\kappa} I_1(t) \to 0 \qquad ao \qquad t \to +\infty,$$

visto que $\kappa < 1/2$. Por outro lado, tem-se

$$I_2(t) \leq K||\Phi||_{L^{\infty}(t_0,+\infty)} t^{-1/2} \left(1+\frac{t}{2}\right)^{1/2-\kappa} \tag{1.61}$$

para todo $t \geq 2t_0$, de modo que (como $\Phi(t) \to 0$ ao $t \to \infty$), dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $t_0 > 0$ suficientemente grande de modo a se ter

$$(*) \qquad\qquad (1+t)^{\kappa} I_2(t) \leq \varepsilon$$

para todo $t \geq 2t_0$.

Finalmente, considerando $I_3(t)$, temos

$$I_3(t) \leq K\,||\Phi||_{L^{\infty}(t_0,+\infty)}\, t^{1/2} \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-1/2-\kappa}$$

para todo $t \geq 2t_0$, de modo que, aumentando t_0 se necessário, resulta

$$(**) \qquad\qquad (1+t)^{\kappa} I_3(t) \leq \varepsilon$$

para todo $t \geq 2t_0$.

Portanto temos $\mathcal{J}(t) \to 0$ ao $t \to +\infty$, de modo que, para $t > 0$ suficientemente grande, temos $E(t) \leq 2C_2$, ou seja, $H_0(t) \leq 2C_2(1+t)^{-\kappa}$, o que conclui a prova no caso $\kappa \in \,]0, 1/2[$.

Consideramos agora, $\kappa \in \,]1/2, 1[$, tomemos $\gamma \in \,]0, 1/2[$ com $\gamma + \kappa < 1$; pelo caso acima, já sabemos que $H_0(t) \leq C(1+t)^{-\gamma}$. De (1.36), (1.59), (1.60) e o Teorema 3.7, temos

$$\begin{aligned}
H_0(t) \leq ||e^{\nu\Delta t}\mathbf{u}_0||_{L^2(\mathbb{R}^2)} &+ \int_0^{t/2} ||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \\
&+ \int_{t/2}^{t} ||e^{\nu\Delta(t-s)}\mathbf{Q}(\cdot,s)||_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \\
&\leq C_2(1+t)^{-\kappa} + C_3 \int_0^t (t-s)^{-1} H_0(s)^2 ds \\
&+C_4 \int_{t/2}^{t} (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}\Phi(s) H_0(s) ds,
\end{aligned}$$

onde $\Phi(t) \to 0$ ao $t \to \infty$ e $C_2, C_3, C_4 > 0$ dependem de $\nu, \mathbf{u}_0$(mas não de t). Como $H_0(s) \leq C(1+s)^{-\gamma}$, resulta

$$\begin{aligned}
H_0(t) \leq C(1+t)^{-\kappa} + C\int_0^t (t-s)^{-1}(1+s)^{-\gamma} H_0(s) ds \,+ \\
+C \int_{t/2}^{t} (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}\Phi(s) H_0(s) ds
\end{aligned}$$

e então, introduzindo $E(t) := H_0(t)(1+t)^\kappa$, e $E_{max}(t) := max_{0\leq s\leq t} E(s)$,

$$E(t) \leq C + C(1+t)^\kappa E_{max}(t) \int_0^{t/2} (t-s)^{-1}(1+s)^{-\gamma-\kappa} ds$$
$$+C(1+t)^\kappa E_{max}(t) \int_{t/2}^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s) ds,$$

ou seja,

$$E(t) \leq C + C\mathcal{J}_4(t)E_{max}(t) + C\mathcal{J}_5(t)E_{max}(t),$$

onde

$$J_4(t) = (1+t)^\kappa \int_0^{t/2} (t-s)^{-1}(1+s)^{-\gamma-\kappa} ds,$$
$$J_5(t) = (1+t)^\kappa \int_{t/2}^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s) ds.$$

Como

$$\int_0^{t/2} (t-s)^{-1}(1+s)^{-\gamma-\kappa} ds \leq Kt^{-1}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1-\gamma-\kappa},$$

resulta $\mathcal{J}_4(t) \to 0$ ao $t \to +\infty$, visto que $\gamma > 0$. Finalmente,

$$\int_{t/2}^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa}\Phi(s) ds$$
$$\leq ||\Phi||_{L^\infty(t/2,+\infty)} \int_{t/2}^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2-\kappa} ds$$
$$\leq K||\Phi||_{\infty(t/2,+\infty)} t^{1/2}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-1/2-\kappa},$$

de modo que $\mathcal{J}_5(t) \to 0$ ao $t \to +\infty$, visto que $\Phi(t) \to 0$ ao $t \to +\infty$. Assim, para todo $t > 0$ suficientemente grande, obtemos $E(t) \leq C + \frac{1}{2}E_{max}(t)$, de modo que $E(t) \leq 2C$ para todo $t >> 1$, ou seja, $H_0(t) \leq 2C(1+t)^{-\kappa}$ para todo t grande.

Para concluir, resta o caso $\kappa = 1$. Tomando $\gamma \in]1/2, 1[$, sabemos da análise acima que $H_0(t) \leq C(1+t)^{-\gamma}$ para todo $t > 0$ (e certa constante $C > 0$ dependendo apenas de $\nu, \mathbf{u}_0$). Então, de (1.36), (1.59), (1.60) e o Teorema 3.7, temos

$$H_0(t) \leq C(1+t)^{-1} + C\int_0^{t/2} (t-s)^{-1}(1+s)^{-2\gamma} ds$$
$$+C\int_{t/2}^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}\Phi(s)H_0(s) ds,$$

onde $\Phi(s) \to 0$ ao $s \to +\infty$. Como

$$\int_0^{t/2} (t-s)^{-1}(1+s)^{-2\gamma} ds \leq 2t^{-1}\int_0^t (1+s)^{-2\gamma} ds \leq \kappa(1+t)^{-1},$$

obtemos

$$H_0(t) \leq C(1+t)^{-1} + C\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-1/2}(1+s)^{-1/2}\Phi(s)H_0(s)ds$$

para todo $t > 0$, onde $C > 0$ depende apenas de $\nu, \mathbf{u}_0$.

Introduzindo $E(t) := (1+t)H_0(t)$, $E_{max}(t) := \max_{t/2\leq s\leq t} E(s)$, temos

$$E(t) \leq C + C\mathcal{J}_6(t)E_{max}(t),$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_6 &= (1+t)\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-1/2}(1+s)^{-3/2}\Phi(s)ds \\ &\leq K(1+t)\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-3/2}||\Phi||_{L^\infty(t/2,+\infty)}t^{1/2},\end{aligned}$$

de modo que $\mathcal{J}_6 \to 0$ ao $t \to +\infty$. Logo, para $t > 0$ suficientemente grande, resulta $E(t) \leq 2C$, ou seja, $H_0(t) \leq 2C(1+t)^{-1}$, como era para ser mostrado.

□

Apêndice A: Desigualdades de Sobolev

Neste apêndice, derivaremos as desigualdades de Sobolev utilizadas no texto. Por um argumento padrão de densidade, é suficiente estabelecer as desigualdades em questão para funções u suaves de suporte compacto, i.e., $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Teorema A1: *Tem-se*

$$||Du||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq N^{1/4}||u||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1/2}\cdot||D^2u||_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1/2} \qquad (A1)$$

para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Dado $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$\begin{aligned}||Du||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} u_{x_j}u_{x_j}d\mathbf{x} = -\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} uu_{x_jx_j}d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left(\sum_{j=1}^{N}u^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{N}u^2_{x_jx_j}\right)^{1/2}d\mathbf{x} \\ &\leq \sqrt{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}u^2d\mathbf{x}\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{j=1}^{N}u^2_{x_jx_j}d\mathbf{x}\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{N}||u||_{L^2(\mathbb{R}^N)}\cdot||D^2u||_{L^2(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

de modo que

$$||Du||_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq N^{1/4}||u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^N)}\cdot||D^2u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

como afirmado. $\square$

Teorema A2: *Tem-se para $n = 2$,*

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{2}||u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot ||D^2u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^2)} \qquad (A2)$$

para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Prova: Tem-se, para cada $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(\hat{x}, \hat{y})^2 = \int_{-\infty}^{\hat{x}} \int_{-\infty}^{\hat{y}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y)^2 dxdy = \int_{-\infty}^{\hat{x}} \int_{-\infty}^{\hat{y}} 2(u_x u_y + u u_{xy}) dxdy,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
||u||^2_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u_x||u_y| dxdy + 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u||u_{xy}| dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} (u_x^2 + u_y^2) dxdy + 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u||u_{xy}| dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |u|(|u_{xx}| + |u_{yy}|) dxdy + 2 \int_{\mathbb{R}^2} |u||u_{xy}| dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |u|(|u_{xx}| + |u_{yy}| + 2|u_{xy}|) dxdy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dxdy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|u_{xx}| + |u_{yy}| + 2|u_{xy}|)^2 dxdy \right)^{1/2} \\
&\leq ||u||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot \left(4 \int_{\mathbb{R}^2} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xy}^2) dxdy \right)^{1/2} \\
&= 2||u||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot ||D^2u||_{L^2(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}$$

como afirmado. $\square$

De modo similar, observando que

$$\begin{aligned}
u(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^2 &= \int_{-\infty}^{\hat{x}} \int_{-\infty}^{\hat{y}} \int_{-\infty}^{\hat{z}} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} u(x,y,z)^2 dxdydz \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\hat{x}} \int_{-\infty}^{\hat{y}} \int_{-\infty}^{\hat{z}} (u_x u_{yz} + u_y u_{xz} + u_z u_{xy} + u u_{xyz}) dxdydz,
\end{aligned}$$

pode-se obter

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \cdot ||u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D^3u||^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \qquad (A2b)$$

para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, e $C = 5^{1/4}$. No que segue, vamos mostrar (por um argumento mais envolvente) que é possível estimar $||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$ em termos de $||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ e $||D^2u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ apenas, ou mais exatamente,

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \cdot \|u\|^{1/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot ||D^2u||^{3/4}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \qquad (A3)$$

para $C > 0$ constante apropriada. A derivação de (A3) utiliza os dois lemas a seguir.

Lema A1: *Suponha que, para dados ℓ, m inteiros não negativos e $1 \leq p, q \leq \infty$ quaisquer satisfazendo*

$$(i) \qquad \ell - N/p < 0 < m - N/q,$$

seja válida a desigualdade

$$(ii) \qquad ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq A \cdot ||D^\ell u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + B \cdot ||D^m u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, e constantes $A, B > 0$ (independentes de u). Então, tem-se

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (A+B) \cdot ||D^\ell u||^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \cdot ||D^m u||^{\theta}_{L^q(\mathbb{R}^N)} \qquad (A4)$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, onde $\theta \in]0,1[$ é dado por

$$\theta = \frac{-(\ell - N/p)}{(m - N/q) - (\ell - N/p)}. \qquad (A5)$$

Prova: Sendo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ não nula, defina (para cada $\lambda > 0$) $u_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ via $u_\lambda(\mathbf{x}) := u(\lambda \mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in (\mathbb{R}^N)$. Como, por hipótese, (ii) é válida para cada u_λ, temos

$$||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq A \cdot ||D^\ell u_\lambda||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + B \cdot ||D^m u_\lambda||_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

ou seja, em termos de u,

$$(*) \qquad ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq A \cdot \lambda^{\ell - N/p} ||D^\ell u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} + B \cdot \lambda^{m - N/q} ||D^m u||_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

para todo $\lambda > 0$. Tomando

$$\lambda := ||D^\ell u||^{1/L}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \cdot ||D^m u||^{-1/L}_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

para $L := (m - N/q) - (\ell - N/p)$, obtemos, para θ definido em $(A5)$ acima,

$$\lambda^{\ell - N/p} ||D^\ell u||_{L^p(\mathbb{R}^N)} = ||D^\ell u||^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \cdot ||D^m u||^{\theta}_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

e também

$$\lambda^{m - N/q} ||D^m u||_{L^q(\mathbb{R}^N)} = ||D^\ell u||^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \cdot ||D^m u||^{\theta}_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

de modo que, para esta escolha de λ, $(*)$ produz

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (A+B) \cdot ||D^\ell u||^{1-\theta}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \cdot ||D^m u||^{\theta}_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

como afirmado. □

Lema A2: *Sendo $g \in C^2([0,1])$ tal que $g(0)=1$ e $g(1)=0$, tem-se*

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{A+B\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4\pi}}||D^2u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}+\frac{C+B\sqrt[4]{3}}{\sqrt{4\pi}}||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \qquad (A6)$$

para toda $u \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$, onde

$$A=\left(\int_0^1 g(r)^2dr\right)^{1/2}, B=\left(\int_0^1 g'(r)^2dr\right)^{1/2}, C=\left(\int_0^1 g''(r)^2dr\right)^{1/2}. \quad (A7)$$

Prova: Dado $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^N$, temos

$$u(\hat{\mathbf{x}}) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}[\,g(r)u(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)\,]dr$$

para todo $\mathbf{w} \in S_2 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y}|=1\}$; integrando por partes, resulta

$$u(\hat{\mathbf{x}}) = \int_0^1 r\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}[\,g(r)u(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)\,]dr =$$

$$\int_0^1 r\cdot[\,g(r)\sum_{i,j=1}^3 w_iw_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)+2g'(r)\sum_{j=1}^3 w_j\frac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)$$
$$+g''(r)\cdot u(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)\,]dr$$

para cada $\mathbf{w} \in S_2$ dado, de modo que

$$|u(\hat{\mathbf{x}})| \leq \int_0^1 r\cdot\ [\,|g(r)|\left(\sum_{i,j=1}^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)\right|^2\right)^{1/2}$$
$$+2\,|g'(r)|\cdot\left(\sum_{i=1}^3\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)\right|^2\right)^{1/2}+\ |g''(r)|\,|u(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)|\,]\,dr$$
$$\leq A\left(\int_0^1 r^2\cdot\sum_{i,j=1}^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)\right|^2dr\right)^{1/2}$$
$$+\,2\,B\left(\int_0^1 r^2\cdot\sum_{j=1}^3\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)\right|^2dr\right)^{1/2}$$
$$+\,C\left(\int_0^1|u(\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{w}r)|^2dr\right)^{1/2}$$

para cada $\mathbf{w} \in S_2$. Integrando em S_2, resulta

$$(**)\qquad \omega_2\,|u(\hat{\mathbf{x}})| \leq A\sqrt{\omega_2}\left(\int_{B_1(\hat{\mathbf{x}})}\sum_{i,j=1}^3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\mathbf{x}\right)^2d\mathbf{x}\right)^{1/2}+$$
$$+\,2\,B\sqrt{\omega_2}\left(\int_{B_1(\hat{\mathbf{x}})}\sum_{j=1}^3\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathbf{x}\right)^2d\mathbf{x}\right)^{1/2}+\ C\sqrt{\omega_2}\,||u||_{L^2(B_1(\hat{\mathbf{x}}))}$$

onde $\omega_2 = \int_{\mathbf{w}\in S_2} d\sigma(\mathbf{w}) = 4\pi$, e $B_1(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}| \leq 1\}$.

Pelo Teorema $A1$,

$$||Du||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 3^{1/4} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} ||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2},$$

de modo que $(**)$ produz

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq \frac{A}{\sqrt{\omega_2}} ||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{2B\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\omega_2}} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} ||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/2} + \frac{C}{\sqrt{\omega_2}} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \frac{A + B\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\omega_2}} ||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{C + B\sqrt[4]{3}}{\sqrt{\omega_2}} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

como afirmado. $\square$

Tomando, por exemplo, g dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(x-1)^2, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

obtém-se

$$A = \left(\int_0^1 g(x)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{23}{60}} \qquad (A8a)$$

$$B = \left(\int_0^1 g'(x)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{4}{3}} \qquad (A8b)$$

$$C = \left(\int_0^1 g''(x)^2 dx \right)^{1/2} = 4, \qquad (A8c)$$

de modo que, por $(A6)$, obtemos

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 0.604 ||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 1.558 ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \qquad (A8d)$$

Teorema A3: *Sendo A, B, C dados no Lema $A2$ acima, tem-se*

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{A + 2B\sqrt[4]{3} + C}{\sqrt{4\pi}} \, ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \cdot ||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4}. \qquad (A9)$$

Prova: Imediata dos Lemas $A1$ e $A2$ acima. $\square$

Em particular, de $(A8)$, segue que

$$||u||_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 3 \, ||u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1/4} \cdot ||D^2 u||_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{3/4}. \qquad (A10)$$

Apêndice B: Lema tipo Gronwall

Neste apêndice, vamos demonstrar um resultado tipo lema de Gronwall que foi utilizado no texto (seção 5):

Lema B1: *Seja $y \in C^0([0,+\infty[)$ função real não negativa satisfazendo*

$$y(t) \leq C(1+t)^{-\kappa} + C\int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}y(s)ds \qquad (B1)$$

para todo $t > 0$, onde C é constante positiva e $\alpha, \beta, \kappa > 0$ satisfazem

$$0 < \kappa \leq \alpha < 1 < \alpha+\beta. \qquad (B2)$$

Então, $y(t)(1+t)^\kappa$ é limitada.

Prova: Sendo

$$E(t) := y(1+t)^\kappa, \qquad E_{max}(t) := \max_{0\leq s\leq t} E(s) \qquad (B3)$$

e multiplicando $(B1)$ por $(1+t)^\kappa$, obtém-se

$$E(t) \leq C + C\cdot E_{max}(t)(1+t)^\kappa \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta-\kappa}ds.$$

Primeiro caso: Assuma $\kappa < \alpha$. Nós vamos mostrar abaixo que o fator multiplicando $E_{max}(t)$ tende para 0 ao $t \to \infty$. Logo, existe t_1 suficientemente grande tal que

$$E(t) \leq C + \frac{1}{2}E_{max}(t), \qquad \forall\, t \geq t_1.$$

Como $E(t)$ é limitada para $0 \leq t \leq t_1$, obtém-se

$$E(t) \leq C_1 + \frac{1}{2}E_{max}(t), \qquad \forall\, t \geq 0,$$

para $C_1 > 0$ apropriada, de modo que

$$E_{max}(t) \leq C_1 + \frac{1}{2}E_{max}(t), \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Em particular, $E(t) \leq E_{max}(t) \leq 2C_1$, ou seja, $E(t)$ é limitada. Resta apenas mostrar que

$$(1+t)^\kappa \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta-\kappa}ds$$

tende para 0 ao $t \to \infty$. Dividindo esta integral em duas, I_1 e I_2, onde

$$\begin{aligned} I_1 := \int_0^{t/2} (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta-\kappa}ds &\leq Kt^{-\alpha}\int_0^t (1+s)^{-\beta-\kappa}ds \\ &\leq Kt^{-\alpha}\cdot \begin{cases} 1, & se\ \ \beta+\kappa > 1 \\ \ln(e+t), & se\ \ \beta+\kappa = 1 \\ (1+t)^{1-\beta-\kappa}, & se\ \ \beta+\kappa < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

resulta $(1+t)^{\kappa} I_1 \to 0$ ao $t \to \infty$, visto que

$$\kappa - \alpha < 0 \qquad e \qquad 1 - \alpha - \beta < 0.$$

Por outro lado,

$$I_2 := \int_{t/2}^{t} (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta-\kappa} ds \leq K(1+t)^{-\beta-\kappa}\, t^{1-\alpha},$$

de modo que $(1+t)^{\kappa} I_2 \to 0$ ao $t \to \infty$ já que

$$1 - \alpha - \beta < 0.$$

Segundo caso: Assuma $\kappa = \alpha$. Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta - \alpha - \beta < -1$, e substituindo, em (B1) acima, κ por $\alpha - \delta$, obtém-se do primeiro caso acima

$$y(t) \;\leq\; C\,(1+t)^{-\alpha+\delta}, \qquad C = C_{\delta}.$$

Usando essa estimativa na integral em (B1), obtém-se

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta} y(s) ds \;\leq\; C \int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta} ds.$$

Como $\delta - \alpha - \beta < -1$, tem-se

$$\int_0^{t/2} (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta} ds \;\leq\; K\, t^{-\alpha}$$

e

$$\int_{t/2}^{t} (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{\delta-\alpha-\beta} ds \;\leq\; K\,(1+t)^{\delta-\alpha-\beta}\, t^{1-\alpha} \;\leq\; K\, t^{-\alpha}.$$

Logo, por (B1), resulta $y(t) \;\leq\; C\,(1+t)^{-\alpha}$, completando a prova. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* (3rd ed.), Springer, New York, 2004.

[2] C. R. Doering and J. D. Gibbon, *Applied analysis of the Navier-Stokes equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[3] C. L. Fefferman, *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*, in: J. Carlson, A. Jaffe and A. Wiles (Eds.), *The Millenium Prize Problems*, American Mathematical Society, 2006, pp. 56-67 [disponível em www.claymath.org/millenium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf].

[4] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1976.

[5] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (2nd ed.), Springer, New York, 1983.

[6] T. Hagstrom, H.-O. Kreiss, J. Lorenz and P. Zingano, *Decay in time of incompressible flows*, J. Math. Fluid Mech., **5** (2003), 231-244.

[7] T. Kato, *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z., **187** (1984), 471-480.

[8] H.-O. Kreiss and J. Lorenz, *Initial Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*, Academic Press, New York, 1989.

[9] M. Schonbek, *Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations in H^m spaces*, Comm. Partial Diff. Equations, **20** (1995), 103-117.

[10] M. Wiegner, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^n$*, J. London Math. Soc., **35** (1987), 303-313.