

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTIMATIVA DA VIDA EM FADIGA DE COMPONENTES SUBMETIDOS A
SOLICITAÇÕES ALEATÓRIAS

por

Cesar Gonçalves dos Reis

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Setembro de 2013

ESTIMATIVA DA VIDA EM FADIGA DE COMPONENTES SUBMETIDOS A
SOLICITAÇÕES ALEATÓRIAS

por

Cesar Gonçalves dos Reis
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Aprovada por:

Prof. Dr. Anderson Geraldo Marena Pukasiewicz
DAMEC/UTFPR-PG

Prof. Dr. Thomas Gabriel Rosauo Clarke
PPG3M/UFRGS

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz
PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Rogério José Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de Setembro de 2013

*Dedico este trabalho a toda minha família,
a minha namorada e aos meus amigos.*

AGRADECIMENTOS

À família pelo carinho, atenção, apoio e esforço desde o início pela minha educação.

À namorada Juline pelo incentivo e compreensão, sem os quais não seria possível a conclusão deste trabalho.

Ao colega e amigo André Alaniz Cesário, pela ajuda com o trabalho, desde a definição dos objetivos, às horas de aulas de teoria e de simulação computacional.

Ao colega e amigo Ricardo Frederico Leuck Filho, pela troca de conhecimentos desde o início do trabalho.

Ao orientador Prof. Walter Jesus Paucar Casas, pela disponibilidade e assistência prestada durante o desenvolvimento deste trabalho. Bem como ao PROMEC e à UFRGS pela qualidade do ensino oferecido.

RESUMO

Em componentes mecânicos submetidos a carregamentos cíclicos, o modo de falha predominante é a fadiga do material. Para dimensionar tais componentes, uma entrada do projeto é a vida útil, ou seja, a quantidade de ciclos que tal componente deverá resistir. Quando este carregamento cíclico é constante e invariável, a estimativa de vida pode ser encontrada por meio de equações consolidadas, porém em diversas aplicações da engenharia o componente está submetido a solicitações aleatórias e variáveis no tempo, como por exemplo, turbulências em uma asa de avião, uma estrutura sob ação de ondas e marés ou uma estrutura de transporte rodoviário. Nestes casos a estimativa de vida destes componentes torna-se complexa, sendo que, em alguns casos, o cálculo torna-se probabilístico e estatístico. Esta estimativa de vida pode ser realizada no domínio do tempo ou no domínio da frequência. No domínio do tempo, a estimativa é baseada na contagem de ciclos do sinal da tensão em função do tempo, existindo diversos métodos para a contagem destes ciclos, sendo que o mais utilizado é o método *Rainflow*. No domínio da frequência diversos autores desenvolvem métodos baseando-se no tipo de carregamento aleatório (banda estreita, gaussiano, etc). Os métodos mais utilizados baseiam-se na função densidade espectral de potência- PSD (*Power Spectral Density*), bem como os parâmetros oriundos desta, os momentos da PSD e a PDF (*Probabilistic Density Function*). Este trabalho estuda a estimativa de vida em um componente submetido a um carregamento aleatório, utilizando métodos sob o domínio da frequência, por meio dos parâmetros espectrais extraídos da PSD de tensão. Ao longo do trabalho comparou-se a estimativa de dano, ou vida, utilizando um software comercial, com cálculos baseados na literatura. Os resultados foram comparados e algumas fontes de erro, ou variação nos resultados foram destacados.

Palavras-chave: Fadiga; domínio da frequência; estimativa de dano.

ABSTRACT

In mechanical components under cyclic loading, the predominant failure mode is the fatigue of material. To design these components, a necessary project input is the life, or the number of cycles that this component should work. When this cyclic loading is constant and invariable, the estimated life can be found by well-known engineering equations, but in many engineering applications the component was under random loading, e.g. airplane wing turbulence, a structure under the action of waves and tides, or a road transport components. In these cases the calculation becomes probabilistic and statistical. The life estimation can be accomplished under time or frequency domain. Under time domain, the estimation is based on counting cycles of stress signal in the time, there are several methods for this account, which is the most widely used is the Rainflow method. Under frequency domain several authors developed methods based on the sort of random loading (narrow band, gaussian, etc.) The most commonly used methods are based on the power spectral density, or PSD, and the parameters resulting from this, commonly the moments of PSD and the PDF (Probabilistic Density Function). This work studies the damage estimation of a component under random loading using some models of life estimation under frequency domain by spectral parameters extracted from PSD of stress. Throughout the study the damage, or life, estimation has been evaluated using a commercial software, and scripts based on the literature. The results were faced and some sources of error or variation in the results were posted.

Keywords: Fatigue; frequency domain; numerical simulation; damage estimation

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Objetivos da Pesquisa	2
1.3 Organização do Trabalho	3
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS	7
3.1 Descrição de Variáveis Aleatórias	7
3.1.1 Transformada de Fourier	8
3.1.2 Transformada Rápida de Fourier - <i>Fast Fourier Transform - FFT</i>	10
3.1.3 Densidade Espectral de Potência - <i>Power Spectral Density Function - PSD</i>	12
3.1.4 PSD Estimada Via FFT	13
3.1.5 Momentos e Propriedades da PSD	13
3.1.6 Função Densidade de Probabilidade - <i>Probability Density Function - PDF</i>	16
3.1.7 Distribuições de Probabilidade	17
3.1.7.1 Distribuição normal ou Gaussiana	17
3.1.7.2 Distribuição de Rayleigh	18
3.1.7.3 Distribuição de Dirlik	19
3.1.8 Função <i>Gamma</i> Γ	20
3.2 Função Resposta em Frequência	20
3.2.1 Função Resposta em Frequência para Sistemas com 1 GDL	21
3.2.2 Função Resposta em Frequência para Sistemas com N GDL	22
3.2.3 Resposta em PSD	26
4. ANÁLISE DE VIDA EM FADIGA	28
4.1 Generalidades	28
4.1.1 Modos de Falha	28
4.1.2 Mecanismo de Nucleação e Propagação de Trincas	29
4.1.3 Estimativa de Vida por Meio da Tensão ($\sigma-N$)	31
4.1.4 Estimativa de Vida Por Meio da Deformação ($\varepsilon-N$)	34

4.1.5	Efeito das Tensões Médias	36
4.1.6	Estimativa de Vida para Tensões Multiaxiais	37
4.2	Fadiga Sob Solicitações Aleatórias	40
4.2.1	Critérios de Acúmulo de Dano	40
4.2.1.1	A Regra de Palmgren-Miner	41
4.2.1.2	Variações na Regra de Acúmulo de Dano: Linear e Não Linear	42
4.2.1.3	Hipótese de Acúmulo de Dano de Serensen-Kogaev	43
4.2.2	Influência da Sequência do Carregamento	44
4.2.3	Análise no Domínio do Tempo	46
4.2.4	Análise no Domínio da Frequência	46
4.2.4.1	Solução no Domínio da Frequência - Caso Geral	48
4.2.4.2	Solução de Banda Estreita - <i>Narrow Band</i>	49
4.2.4.3	Extensão da Solução de Banda Estreita	51
4.2.4.4	Solução de Dirlik	52
4.2.4.5	Tensões Médias no Domínio da Frequência	52
5.	ESTUDO DE CASO	53
5.1	Generalidades	53
5.2	Aproximações Analíticas	55
5.3	Simulações Numéricas	56
5.3.1	Generalidades	56
5.3.2	Geração do Modelo de Elementos Finitos	56
5.3.3	Análise Modal	58
5.3.4	Função Resposta em Frequência - Função Transferência	61
5.4	Tipos de Carregamentos Utilizados	62
5.4.1	Banda Estreita (Baixa e Média Frequência)	62
5.4.2	Ruído Branco	65
5.4.3	Banda Larga	66
5.5	Estimativa da Vida em Fadiga	67
5.5.1	Carregamento Banda Estreita Baixa Frequência	68
5.5.2	Carregamento Banda Estreita Média Frequência	73
5.5.3	Carregamento Ruído Branco	77
5.5.4	Carregamento Banda Larga	79

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	83
6.1 Conclusões	83
6.1.1 Erros e Variações na Estimativa de Dano/Vida	83
6.1.2 Comparação dos Resultados Obtidos	86
6.2 Sugestões	88
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
APÊNDICE A – MODELO EM ANÁLISE	94
APÊNDICE B – SCRIPTS MATLAB®	95

LISTA DE SÍMBOLOS

A_0	: coeficiente da série de Fourier	
A_k	: coeficiente da série de Fourier	
a_n	: coeficientes das janelas	
b	: expoente de Basquin ou expoente de resistência à fadiga	
B_k	: coeficiente da série de Fourier	
c	: expoente de ductilidade à fadiga, amortecimento do sistema	
C	: matriz de amortecimento global do sistema	
c_i	: amortecimento generalizado para o modo i	
C_k	: coeficiente da série de Fourier na forma complexa	
D	: dano por fadiga	
D_n	: constante do modelo de Dirlik	
E	: módulo de elasticidade	(N/mm ²)
$E[0]$: expectativa de zeros com cruzamento positivo por unidade de tempo	
$E[D]$: expectativa de dano	
$E[P]$: expectativa de picos com cruzamento positivo por unidade de tempo	
$f(t)$: vetor de carregamentos do sistema	
f_i	: força generalizada para o modo i	(N)
f_k	: frequências discretas da FFT	(Hz)
g	: aceleração da gravidade	(m/s ²)
$G_x(f)$: densidade espectral de potência unilateral	
h	: espaçamento entre pontos da variável aleatória	(s)
$H(j\omega)$: Função Resposta em Frequência - FRF	
k	: constante do material, rigidez da mola do sistema	(N/m)
K	: matriz de rigidez global do sistema	
k_i	: rigidez generalizada para o modo i	
m	: fator de inclinação Wöhler, massa	(kg)
M	: matriz de massa global do sistema	
m_i	: massa generalizada para o modo i	
m_n	: momento espectral ou momento de área da PSD	
n	: ponto de dado	
N	: pontos de dados da janela, pontos da variável aleatória	
N_f	: número de repetições de determinada tensão para falha	
P	: probabilidade	
$p(S)$: PDF de tensões	
$p(t)$: excitação senoidal da FRF, excitação do sistema	
$p(x)$: Função Densidade de Probabilidade - PDF	
$P(\omega)$: excitação da FRF	
Q	: constante do modelo de Dirlik	
R	: constante do modelo de Dirlik	
R_x	: função de autocorrelação	
R_{xy}	: função de correlação cruzada	
$S_x(f)$: densidade espectral de potência bilateral	
$S_{xy}(f)$: espectro cruzado de potência bilateral	
S_y	: resistência ao escoamento do material	(N/mm ²)
T	: período de avaliação da PDF	(s)
t	: tempo	(s)
t_l	: tempo do processo aleatório	(s)
u_0	: vetor das amplitudes de oscilação	

\mathbf{u}	: vetor de deslocamentos do sistema	
$X(\omega)$: resposta da FRF	
$X(f, T)$: FFT de dados aleatórios	
$x(t)$: resposta senoidal da FRF, transformada inversa de Fourier de $X(\omega)$	
$X(\omega)$: transformada de Fourier de $x(t)$	
X_k	: FFT discreta	
x_m	: constante do modelo de Dirlik	
y_n	: fatores de participação modais	
Z	: constante do modelo de Dirlik	
Γ	: função Gamma	
γ	: fator de irregularidade	
Δf	: intervalo de frequências do espectro	
$\Delta \varepsilon / 2$: amplitude de deformação total	
$\Delta \varepsilon_e / 2$: amplitude de deformação elástica	
$\Delta \varepsilon_p / 2$: amplitude de deformação plástica	
$\Delta \omega$: espaçamento entre funções periódicas adjacentes	
$\Delta \sigma$: variação de tensão	(N/mm ²)
ε'_f	: coeficiente de ductilidade à fadiga	
λ	: autovalores do sistema	
μ_x	: média do processo aleatório no instante de tempo t_1	
σ_a	: tensão alternada ou tensão de amplitude	(N/mm ²)
σ_{ar}	: tensão de amplitude para um carregamento alternado	(N/mm ²)
σ_f	: limite de fadiga, tensão efetiva em fadiga multiaxial	(N/mm ²)
σ'_f	: coeficiente de resistência a fadiga	(N/mm ²)
σ_m	: tensão média	(N/mm ²)
σ_U	: tensão de ruptura do material (tensão última de engenharia)	(N/mm ²)
σ_X	: desvio padrão do processo aleatório	
ϕ_i	: autovetores	
Ψ_x^2	: média quadrática do processo aleatório	
ω	: frequência angular	(rad/s)
ω_k	: frequência do K -ésimo harmônico da série de Fourier	(rad/s)
$\tilde{G}_x(f)$: PSD estimada pela FFT	
$\tilde{G}_x(f_k)$: PSD estimada pela FFT nas frequências discretas	
$ H(f) $: fator ganho	
$2N_f$: número de reversões de carga até a falha	

ABREVIACÕES

CAD	Computer Aided Design
CSD	Cross Spectral Density
FFT	Transformada Rápida de Fourier
FRF	Função Resposta em Frequência
GDL	Grau de Liberdade

MEF	Método dos Elementos Finitos
PDF	Probability Density Function
PSD	Power Spectral Density

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Para o carregamento em distribuição gaussiana, a distribuição de picos para sinal de banda estreita segue uma PDF de Rayleigh.	4
Figura 3.1 – Amostragem de um sinal contínuo.	10
Figura 3.2 – Exemplo de <i>aliasing</i> das funções senoidais ($\sin(\pi t)$ e $\sin(9\pi t)$) para a taxa de amostragem de 4Hz.	11
Figura 3.3 – PSD bilateral e unilateral.	12
Figura 3.4 – Cálculo dos momentos da PSD.	14
Figura 3.5 – Expectativa de zeros com cruzamento positivo e expectativa de picos.	15
Figura 3.6 – Amostra temporal de um sinal aleatório.	16
Figura 3.7 – Distribuição normal de probabilidade (ou de Gauss) de x .	18
Figura 3.8 – Distribuição de probabilidade de Rayleigh.	19
Figura 3.9 – Sistema massa, mola e amortecedor de 1 GDL.	21
Figura 3.10 – Frequências naturais e modos de vibração de vigas engastadas.	23
Figura 4.1 – Comportamento das bandas de cisalhamento.	29
Figura 4.2 – Estágios de formação de uma trinca.	30
Figura 4.3 – Crescimento de uma trinca por fadiga.	30
Figura 4.4 – Representação do processo envolvendo a fadiga: nucleação, crescimento da trinca e ruptura final.	31
Figura 4.5 – Nomenclatura das tensões presentes em sollicitações alternantes.	31
Figura 4.6 – Curva S-N típica.	33
Figura 4.7 – Correção da Curva S-N, para baixo e alto ciclo, e das tensões além do limite de resistência à fadiga.	34
Figura 4.8 – Representação da curva deformação-vida, representando a deformação plástica, elástica e total.	35
Figura 4.9 – Critério de correção das tensões médias. Comparação entre as relações.	37
Figura 4.10 – Blocos de carregamento com amplitude constante e curva S - N.	42
Figura 4.11 – Representação da relação entre dano e a razão de ciclos.	43
Figura 4.12 – Quatro diferentes tipos de sobrecarga: (a) tração, (b) compressão - tração, (c) tração - compressão, (d) compressão.	45
Figura 4.13 – Propagação de trinca para diferentes tipos de sobrecarga: (a) tração,	45
Figura 4.14 – PSD.	47
Figura 4.15 – Sinais diversos no domínio do tempo e respectivas PSDs.	47

Figura 4.16 – PDF de tensão.	48
Figura 4.17 – Limitação no método de Bendat.	51
Figura 5.1 – Geometria de estudo.	53
Figura 5.2 – Fluxograma do estudo.	54
Figura 5.3 – Tela do nCode®.	55
Figura 5.4 – Convergência da tensão no ponto de interesse. A linha vermelha mostra a resposta analítica e a linha azul demarcada mostra os resultados numéricos.	57
Figura 5.5 – Malha final adotada.	57
Figura 5.6 – Carregamento para verificar convergência da malha.	58
Figura 5.7 – Coeficiente de concentrador de tensões.	58
Figura 5.8 – Convergência dos modos de vibração.	59
Figura 5.9 – Representação da FRF da tensão normal do ponto de maior tensão no contorno do furo.	61
Figura 5.10 – Sinal de banda estreita gerado, em função do tempo.	63
Figura 5.11 – PSD do sinal de banda estreita gerado, baixa frequência.	63
Figura 5.12 – Sinal de banda estreita média frequência gerado, em função do tempo.	64
Figura 5.13 – PSD do sinal de banda estreita gerado, média frequência.	64
Figura 5.14 – Sinal de ruído branco gerado em função do tempo.	65
Figura 5.15 – PSD do sinal ruído branco gerado.	65
Figura 5.16 – Sinal de banda larga gerado, em função do tempo.	66
Figura 5.17 – PSD do sinal de banda larga gerado.	66
Figura 5.18 – Curva SN utilizada.	68
Figura 5.19 – Dano utilizando Dirlik para o carregamento de banda estreita baixa frequência.	69
Figura 5.20 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento de banda estreita, baixa frequência.	69
Figura 5.21 – Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de baixa frequência.	70
Figura 5.22 –PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de baixa frequência.	71
Figura 5.23 – Dano utilizando <i>Narrow Band</i> para o carregamento de banda estreita baixa frequência.	72
Figura 5.24 – Representação da PDF segundo modelo de Rayleigh para o carregamento banda estreita de baixa frequência.	72

Figura 5.25 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento banda estreita média frequência.	73
Figura 5.26 – Dano segundo Dirlik para carregamento banda estreita média frequência.	74
Figura 5.27 – Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de média frequência.	74
Figura 5.28 – PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de média frequência.	75
Figura 5.29 – Dano utilizando <i>Narrow Band</i> para o carregamento de banda estreita média frequência.	76
Figura 5.30 – Representação da PDF segundo modelo de Rayleigh para o carregamento banda estreita de média frequência.	76
Figura 5.31 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento ruído branco.	77
Figura 5.32 – Dano segundo Dirlik para carregamento ruído branco.	78
Figura 5.33 – Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento ruído banco.	78
Figura 5.34 – PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento ruído branco.	79
Figura 5.35 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento banda larga.	80
Figura 5.36 – Dano segundo Dirlik para carregamento banda larga.	80
Figura 5.37 – Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda larga.	81
Figura 5.38 – PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda larga	81
Figura 6.1 – Comparações de diferentes PSDs do sinal de banda larga.	84
Figura 6.2 – Alteração da PSD conforme seu refinamento. (a) Maior passo (b) Menor passo.	84
Figura 6.3 – Comparação da resposta harmônica: (a) com, e (b) sem a opção de mapeamento de frequências naturais.	85

Índice de Tabelas

Tabela 5.1 - Propriedades do material	54
Tabela 5.2 - Modos e frequências naturais de vibração da estrutura.	60
Tabela 6.1 - Comparação entre os métodos de integração dos momentos, bem como a variação causada no dano.	86
Tabela 6.2 - Comparação entre os danos calculados no nCode® e Matlab®.	87
Tabela 6.3 - Comparação entre os danos calculados com o métodos de Dirlik e o método de Banda Estreita.	87

1. INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

Com os constantes avanços e atualizações das tecnologias, as indústrias estão cada vez mais buscando soluções e melhorias para os seus produtos em um rápido intervalo de tempo, visando produtos mais competitivos, com menores custos, menor volume de material, assim como uso de materiais que não agridam o meio ambiente. Estas exigências intensificam a busca da melhor relação entre o custo e o benefício para o cliente, sempre tendo como objetivo produtos com qualidade.

Muitos critérios tradicionais de dimensionamento são baseados em limitar a tensão máxima na seção crítica do componente ou estrutura ao valor da tensão de segurança. Porém, em uma diversidade de aplicações as cargas envolvidas não são uniformes, podendo ser estáticas ou cíclicas, aplicadas brusca ou lentamente, em um ambiente corrosivo e ainda com temperatura constante ou variável. Além disso, existem processos de fabricação envolvidos, que podem alterar propriedades dos materiais e gerar tensões residuais. O sucesso no dimensionamento tradicional de componentes nestas condições depende do uso de um fator de segurança suficientemente alto para evitar que algum aspecto não considerado em cálculo leve-o a falha. Normalmente a escolha deste fator de segurança é um processo empírico, baseado principalmente na experiência acumulada.

Projetos sofisticados e razões econômicas criam a necessidade da melhor compreensão do comportamento dos materiais na condição de trabalho, como por exemplo, os frequentes problemas de fadiga e fratura os quais são a principal causa da falha de diversos componentes.

Muitos métodos de cálculo de vida à fadiga foram desenvolvidos e estudados nos últimos anos (Fatemi e Yang, 1998). Um dos clássicos critérios de estimativa de vida baseia-se na curva de fadiga do material $\sigma_a \times N$, que relaciona à tensão cíclica com o número de ciclos até a falha. Quando a solitação cíclica é constante e invariável, o cálculo de degradação do material (dano) baseia-se no somatório do número de ciclos atuantes a uma determinada tensão, e o seu respectivo tempo ou número de ciclos até a ruptura do material. Ocorre que, em diversas situações, o componente está sujeito a solitações aleatórias e variáveis no tempo, como por exemplo, a estrutura veicular ao trafegar numa rodovia, uma asa de avião em uma turbulência, pontes e estruturas metálicas sob solitação pela ação de vento ou terremotos, etc.

Para a estimativa do dano em fadiga nessas ocasiões de solicitação aleatória, o simples cálculo de número de ciclos em determinado nível de tensão não é um procedimento simples e determinístico, mas sim probabilístico e estatístico, e depende do histórico de carregamento presente na estrutura. Esta estimativa pode ser realizada no domínio do tempo, baseada na contagem de ciclos em cada nível de tensão determinado a partir da análise de um sinal gravado no tempo (*Rainflow*, *Range-Pair*, *Race track*, *Level-Crossing*, *Peak Counting*), ou então no domínio da frequência, onde um tratamento estatístico baseado na resposta dinâmica da estrutura àquela solicitação atuante é considerado para a estimativa de vida.

Esta análise de fadiga no domínio da frequência se baseia na resposta dinâmica em frequência da estrutura, a partir da Função Resposta em Frequência, da Densidade Espectral de Potência (PSD - *Power Spectral Density*) e de parâmetros espectrais (momentos da PSD e PDF – *Probability Density Function*). Os métodos de cálculo de vida no domínio da frequência tornam o processo de avaliação de vida à fadiga estrutural muito mais rápido quando comparado ao cálculo de vida no domínio do tempo.

Porém, a análise de fadiga no domínio da frequência possui restrições para obtermos uma estimativa de vida aproximada da real, visto que deve ser garantida a aleatoriedade do sinal e um baixo ou nulo nível de tensões médias.

Além destas restrições, existem inúmeros métodos de estimativa de vida, o que dificulta sua aplicação como uma ferramenta de uso geral.

Muitos métodos usam como dado de entrada a PSD da tensão, que pode ser obtida por meio experimental a partir do sinal de deformação medido experimentalmente ao longo do tempo. Porém nem sempre é possível, pois além da dificuldade em produzir uma amostra significativa da estrutura, o ponto de máxima tensão pode ser relativamente pequeno, ou em contato com outro componente, ou ainda sem acesso para uso de sensores, dificultando sua experimentação.

Nestes casos é amplamente empregado o método de elementos finitos (MEF) para a obtenção da PSD de tensões no ponto de interesse, bem como os momentos da PSD que se relacionam com a probabilidade de ciclos em função da amplitude de tensão.

1.2 Objetivos da Pesquisa

O objetivo deste trabalho é estimar o dano/vida de um componente submetido a uma aceleração aleatória pela base, para alguns tipos de carregamento específicos e diversos

métodos de cálculo de vida no domínio da frequência. Paralelamente, avalia-se o uso de *software* comercial, confrontando suas soluções com os métodos disponíveis na literatura programados via roteiros de cálculos.

1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho encontra-se dividido em seis capítulos.

No *Capítulo 1* são comentadas metodologias e aplicações onde a estimativa da vida em fadiga de componentes e estruturas mecânicas é utilizada. Por fim, os objetivos do trabalho são apresentados.

O *Capítulo 2* disponibiliza a revisão bibliográfica, mostrando o histórico de desenvolvimento da metodologia utilizada neste trabalho.

O *Capítulo 3* apresenta a teoria em variáveis aleatórias, necessária para a compreensão dos dados no domínio da frequência, bem como o estudo da probabilidade de dados aleatórios e a análise da resposta em frequência do sistema dinâmico.

O *Capítulo 4* apresenta a segunda etapa de embasamento teórico deste trabalho, referente à estimativa da vida em fadiga de estruturas mecânicas, com ênfase em métodos no domínio da frequência.

O *Capítulo 5* apresenta o estudo de caso realizado em componente sob diversos carregamentos aleatórios. Neste estudo, boa parte da teoria analisada foi aplicada.

No *Capítulo 6* são apresentadas as conclusões do presente trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Desde 1871, quando August Wöhler desenvolveu a teoria relacionando a amplitude de tensão totalmente reversa com a durabilidade em eixos, o estudo da falha por fadiga dos materiais começou a ter maior formalismo analítico, porém estimativas de falha por fadiga no domínio da frequência começaram a se desenvolver somente a partir dos anos de 1950.

Um dos primeiros trabalhos voltados a fadiga no domínio da frequência é um artigo de Miles e data de 1954. Bendat, 1964, desenvolve o primeiro modelo de estimativa de falha por fadiga no domínio da frequência para um carregamento de banda estreita ou *narrow band*, que possui uma distribuição gaussiana. É deduzido matematicamente que para um carregamento com uma distribuição gaussiana, a distribuição de probabilidade, também chamada de Função Densidade de Probabilidade (PDF - *Probability Density Function*) de picos tende para uma distribuição de Rayleigh. Utilizando então a PDF de Rayleigh é possível determinar a probabilidade de uma determinada amplitude de tensão ocorrer, conforme ilustrado pela Figura 2.1. Estima-se assim a vida para carregamentos que possuem a banda estreita, como será visto no desenvolvimento do trabalho. [Bishop e Sherratt, 2000; Nieslony e Macha, 2007].

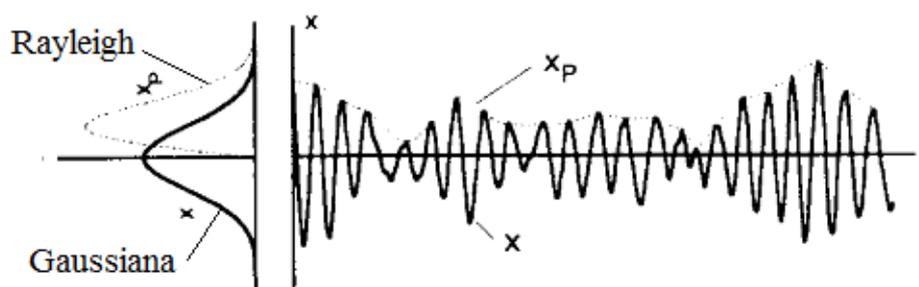


Figura 2.1 – Para o carregamento em distribuição gaussiana, a distribuição de picos para sinal de banda estreita segue uma PDF de Rayleigh.

Fonte: Cesário, 2012.

Para utilizar o método de *Narrow Band* (banda estreita) para carregamentos tipo banda larga como por exemplo, em projetos de plataformas *offshore*, diversos autores, por exemplo Wirsching e Light em 1980, Chaudhury e Dover em 1985, Tunna em 1986, dentre outros, sugeriam fatores de correção para, a partir da solução de banda estreita, estimar a vida em fadiga para a banda larga. De modo geral, estes modelos são baseados na geração de históricos temporais do sinal, a partir dos dados em PSD, utilizando-se a transformada inversa

de Fourier e, de posse do sinal no domínio do tempo, efetua-se a contagem de ciclos utilizando o método de *rainflow*, [Bishop e Sherratt, 2000].

Dirlik, 1985, desenvolveu uma distribuição de probabilidades baseada nas propriedades da PSD, partindo de um somatório ponderado de diversas distribuições de probabilidades, gerando um método que é utilizado com resultados expressivos. [Ariduru, 2004], [Bosco Jr., 2007], [Cesário, 2012], [Nieslony e Macha, 2007], [Halfpenny, 1999], [Bishop e Sherratt, 2000].

Bishop et al., 1995, compararam métodos espectrais na estimativa da vida em fadiga com métodos tradicionais no domínio do tempo. Utilizando o modelo de Dirlik, os resultados apresentaram vida em fadiga no domínio da frequência 8% superior a análise no domínio do tempo. Por outro lado, a análise no domínio do tempo demandou 6 horas na solução do problema, pela análise no domínio da frequência esta análise demandou 2 horas. Os autores, como outros, salientam que o método é válido para modelos estruturais lineares e carregamentos aleatórios, estacionários e Gaussianos.

Halfpenny, 1999, utilizou o método de banda estreita e Dirlik, para estimar a vida em um suporte, indicando que o modelo proposto por Dirlik fornece resultados semelhantes aos tradicionais métodos no domínio do tempo. Além da comparativa para o método, o autor sugere a utilização de métodos sob domínio da frequência a fim de encontrar pontos onde irão ocorrer a falha por fadiga, pois a análise é significativamente mais rápida.

Bosco Junior, 2007, avaliou numérica e experimentalmente modelos de uma viga em balanço com massa adicional. As análises numéricas foram realizadas no domínio do tempo, utilizando o método de contagem de ciclos de *Rainflow* e, no domínio da frequência, utilizando diversos modelos. O autor conclui que um dos modelos que mais convergem para os resultados experimentais é o proposto por Dirlik.

Nieslony, 2010, apresenta uma estimativa de vida em fadiga sob carregamentos aleatórios multiaxiais utilizando métodos espectrais. O procedimento consiste em utilizar o modelo de Miles ou Dirlik, desenvolvidos a partir de variações ou amplitudes de tensão, com uma tensão equivalente. São propostos dois métodos para abordagem de fadiga multiaxial: o critério baseado na abordagem do plano crítico e o critério baseado nos invariantes do tensor de tensões. Foram utilizados dados experimentais para comparar os resultados numéricos. O autor conclui que, se o critério de fadiga multiaxial for determinado de maneira correta, os resultados obtidos numericamente apresentam adequada correlação com os modelos experimentais.

Cesário, 2012, aplicou o método de estimativa de vida sob o domínio da frequência, utilizando do software nCode®, avaliando diferentes métodos de cálculo da tensão multiaxial, bem como a consideração de tensões médias.

O embasamento deste tra

Este trabalho utiliza prioritariamente o embasamento dos trabalhos de Bosco Júnior, 2007 e Nieslony, 2010.

3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

3.1 Descrição de Variáveis Aleatórias

Nieslony e Macha, 2007, propuseram um processo estocástico (conjunto de variáveis aleatórias que dependem do tempo) tal que, parte da notação geral de carregamento mas variável no tempo:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) & \sigma_{xz}(t) \\ \sigma_{yx}(t) & \sigma_{yy}(t) & \sigma_{yz}(t) \\ \sigma_{zx}(t) & \sigma_{zy}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Este carregamento pode ser síncrono, com todas as componentes de tensão em mesma frequência e fase para determinado valor de tempo, ou assíncrono, com diferentes frequências e fases para cada componente de tensão. Considerando material isotrópico, o tensor tensão passa a ser simétrico e reduzido em 6 (seis) componentes que podem ser escritos como variáveis de um vetor de um processo estocástico de seis dimensões:

$$X_k(t) = \sigma_{ij}(t), \quad (k = 1, \dots, 6; i, j = x, y, z) \quad (3.2)$$

Segundo Nieslony e Macha, 2007, inúmeras aplicações de processos aleatórios apresentam características probabilísticas que podem ser encontradas. Tais fenômenos são modelados como processos estocásticos estacionários. Um processo estocástico $\mathbf{X}(t), t \in T$, é estacionário no sentido estrito ou estritamente estacionário se todas as possíveis distribuições estatísticas dos componentes do processo são independentes para qualquer intervalo de tempo, conforme a equação a seguir:

$$p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n, \tau) \quad (3.3)$$

Na prática é difícil verificar se o processo físico é estritamente estacionário, pois a relação da equação acima deve ser satisfeita para cada vetor que compõe o processo em qualquer intervalo de tempo. A fim de simplificar é introduzida uma classe mais ampla de processos estacionários. Um processo estocástico $\mathbf{X}(t), t \in T$, é dito como estacionário em

sentido amplo cuja média de valores esperados é constante ao longo do tempo e se a função de autocorrelação $R(\tau)$ é função apenas do intervalo de tempo considerado, τ .

Se um processo aleatório $X(t)$ é estacionário e a média de valores \hat{X}_k e as funções de autocorrelação $R_{X_k}(\tau)$ do componente do processo X_k possuir propriedades estatísticas iguais, este processo será chamado ergódico. Sendo o processo ergódico, os valores citados acima são constantes independente do intervalo de tempo analisado, portanto: $\hat{X}_k = \hat{X}$ e $R_{X_k}(\tau) = R_X(\tau)$

A média temporal e a função de autocorrelação podem ser calculadas conforme as fórmulas [Peebles Jr., 2001]:

$$\hat{X}_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_k(t) dt \quad (3.4)$$

$$R_{X_k}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_k(t + \tau) X_k(t) dt \quad (3.5)$$

Peebles, 2001, indica que, para processo ergódico, a variância das funções acima deve ser nula para os intervalos de tempos considerados.

3.1.1 Transformada de Fourier

Considerando $x(t)$, uma função periódica com período de tempo T e frequência fundamental $f_1 = \frac{1}{T}$, $x(t)$ pode ser expandido em uma série de Fourier, conforme a equação (3.6), [Bendat e Piersol, 1971; Cesário, 2012]:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t) \quad (3.6)$$

onde:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^t x(t) \cos 2\pi n f_1 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^t x(t) \sin 2\pi n f_1 t dt; \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^t x(t) dt = \mu_x$$

Alternativamente, a série de Fourier pode ser expressa como:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_1 t - \theta_n) \quad (3.7)$$

onde:

$$X_0 = \frac{a_0}{2}; \quad X_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right);$$

Ou seja, a função periódica $x(t)$, consiste em um componente estático X_0 e infinitos componentes senoidais, ou harmônicos de amplitude X_n , em fase θ_n . Para tal as frequências harmônicas são múltiplas de f_1 . Para um processo aleatório e estacionário, e utilizando a fórmula de Euler, que relaciona funções trigonométricas e funções exponenciais é possível modificar a série acima em uma função, relacionando as amplitudes e frequências, chamada de série de Fourier.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} \quad (3.8)$$

onde os coeficientes complexos C_k são dados por:

$$C_k = f_1 \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \quad (3.9)$$

A transformada de Fourier pode ser considerada como o limite da série de Fourier $x(t)$ quando T tende a infinito, conforme mostrado na equação (3.10), oriunda da equação (3.8)

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_1 \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \right) e^{j2\pi k f_1 t} \quad (3.10)$$

Como T tende a infinito e f_1 é infinitesimal, o somatório torna-se uma integral. Obtemos então o par de transformadas de Fourier, conforme as equações (3.11) e (3.12):

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.11)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.12)$$

A função $y(\omega)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$, e $x(t)$ é a transformada inversa de Fourier de $y(\omega)$.

3.1.2 Transformada Rápida de Fourier - *Fast Fourier Transform* - *FFT*

Para processos aleatórios, estacionários e ergódicos, como comentado anteriormente, é possível avaliá-los através de apenas uma amostra da variável aleatória. Ou seja, as amostras são compostas de registros temporais discretos ao invés de contínuos. A FFT é um algoritmo eficiente em termos computacionais para a obtenção da transformada discreta de Fourier [Cesário, 2012].

$$y(f, T) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.13)$$

Assume-se que a variável aleatória $x(t)$ é amostrada em N pontos igualmente espaçados de h , conforme a Figura 3.1. Lembrando que o inverso de h , ($1/h$), é a chamada taxa ou frequência de amostragem.

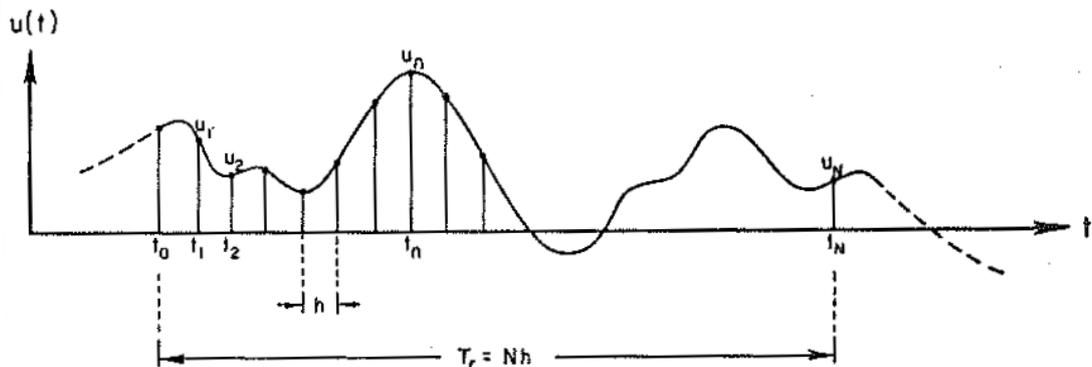


Figura 3.1 – Amostragem de um sinal contínuo.

A forma discreta da equação (3.13) é dada por:

$$y(f, T) = h \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f_k h} \quad (3.14)$$

onde: $x_n = x(nh)$, $(n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

Os valores discretos das frequências são dados por:

$$f_k = kf_0 = \frac{k}{T} = \frac{k}{Nh}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (3.15)$$

Nessas frequências, a FFT é dada por:

$$y_k = \frac{y(f, T)}{h} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{j2\pi k n}{N}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (3.16)$$

Deve-se salientar que os resultados possuem valores únicos somente até $N/2$, a fim de evitar o *aliasing*.

Aliasing, também conhecido por teorema de *Nyquist*, é o erro que pode ocorrer quando é desejado mapear altas frequências com uma baixa taxa de amostragem (grande h). [Trefethen, 2000]

A Figura 3.2 mostra o *aliasing* de duas funções, $\text{sen}(\pi t)$ e $\text{sen}(9\pi t)$. Para uma taxa de amostragem de 4 Hz, representado pelos pontos, os sinais lidos serão idênticos.

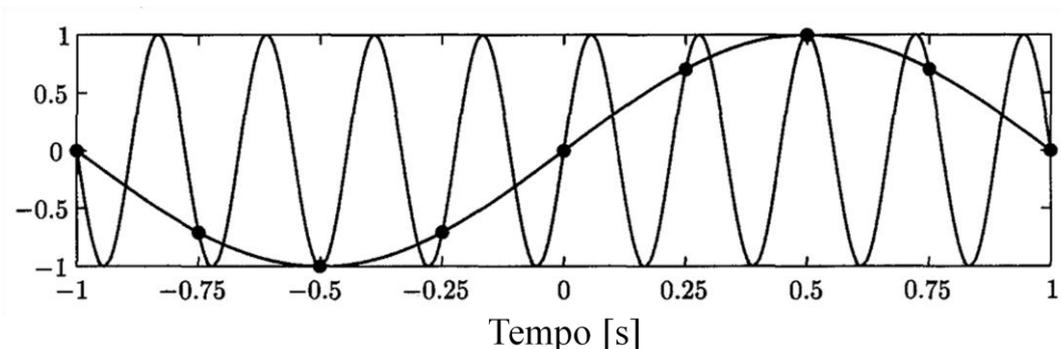


Figura 3.2 – Exemplo de *aliasing* das funções senoidais ($\text{sen}(\pi t)$ e $\text{sen}(9\pi t)$) para a taxa de amostragem de 4Hz.

3.1.3 Densidade Espectral de Potência - *Power Spectral Density Function* - PSD

Segundo Nieslony e Macha, 2007, a PSD (*Power Spectral Density*) é um instrumento de análise espectral paralela às análises harmônicas em processos determinísticos, pois oferece a possibilidade de ganhar informações adicionais sobre como as frequências estão estruturadas no processo estocástico.

Para um processo estocástico unidimensional X , a densidade espectral de potência bilateral (PSD *two-sided*) é definida como a transformada de Fourier da função de autocorrelação:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.17)$$

Devido à dificuldade de interpretação das frequências negativas, a função de densidade espectral de potência unilateral (PSD *one-sided*) é definida nos limites $(0, +\infty)$.

$$G_X(f) = \begin{cases} 2 S_X(f) & \text{para } 0 \leq f < \infty \\ 0 & \text{para } f < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

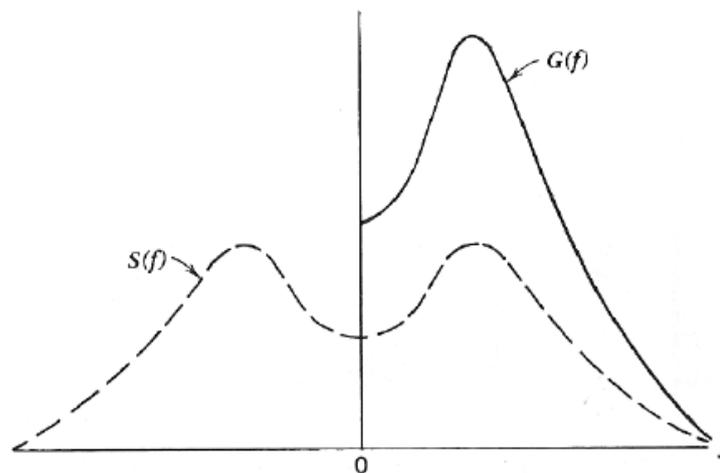


Figura 3.3 – PSD bilateral e unilateral.

Fonte: Nieslony e Macha, 2007.

3.1.4 PSD Estimada Via FFT

Existem dois métodos mais comumente empregados para estimar a PSD para sinais aleatórios, estacionários e discretos. Um dos métodos, chamado de *standard* ou *Blackman-Tukey* estima a PSD baseado na transformada da Fourier da função de autocorrelação, enquanto o outro método, chamado de *Cooley-Tukey* estima a PSD através da transformada rápida de Fourier - FFT em uma faixa finita, diretamente através dos dados originais. Este método é superior ao anterior, por ser mais eficiente em termos computacionais. Qualquer tamanho de amostra pode ser considerado, mas é indicado utilizar amostras com tamanho dado pela equação (3.19), [Bendat e Piersol, 1971] e [Cesário, 2012]:

$$N = 2^l \quad (3.19)$$

onde l representa o passo da PSD.

A estimativa de PSD fica da forma:

$$\tilde{G}_X(f) = \frac{2}{T} |y(f, T)|^2 \quad (3.20)$$

Desta forma a PSD pode ser estimada pela equação:

$$\tilde{G}_k(f) = \tilde{G}_X(f_k) = \frac{2}{Nh} |y(f_k, T)|^2 = \frac{2h}{N} |y_k|^2 \quad (3.21)$$

3.1.5 Momentos e Propriedades da PSD

Momentos são valores retirados diretamente da função PSD, possibilitam a análise do sistema dinâmico sob o processo aleatório no domínio da frequência, sem a necessidade de geração de amostra no domínio do tempo.

A equação (3.22) é utilizada para encontrar o k -ésimo momento, [Nieslony e Macha, 2007].

$$m_n = \int_0^{\infty} G_X(f) f^n df \quad (3.22)$$

Ou por meios numéricos, conforme ilustrado na Figura 3.4, [Bishop e Sherratt, 2000]:

$$m_n = \int_0^{\infty} G_X(f) f^n df = \sum_k G_{X,k}(f) f_k^n \delta f \quad (3.23)$$

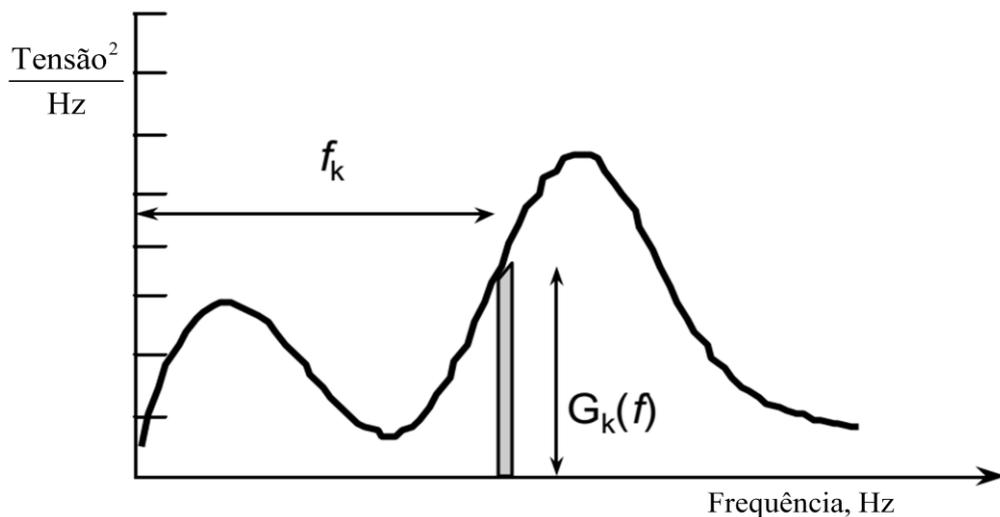


Figura 3.4 – Cálculo dos momentos da PSD.

Fonte: Bishop e Sherratt, 2000.

Em tese, todos os momentos possíveis são necessários para caracterizar o sinal. Entretanto, os primeiros quatro momentos são suficientes para se obter as informações relevantes a serem utilizadas no cálculo da vida em fadiga, [Bishop e Sherratt, 2000].

Por meio dos quatro primeiros momentos da PSD obtêm-se informações sobre o sinal, tal como a variância, desvio padrão, estimativa de picos e de zeros com cruzamento positivo (ilustrado na Figura 3.5), frequência central e outros, conforme as equações descritas na sequência.

$$\text{Variância} \quad \mu_x = m_0 \quad (3.24 .a)$$

$$\text{Derivada da Variância} \quad \mu_{\dot{x}} = m_2 \quad (3.24 .b)$$

$$\text{Segunda derivada da Variância} \quad \mu_{\ddot{x}} = m_4 \quad (3.24 .c)$$

Área sobre a PSD	$A_{PSD} = m_0$	(3.24 .d)
Desvio Padrão	$\sigma = \sqrt{m_0}$	(3.24 .e)
Frequência Central	$f_c = \frac{m_1}{m_0}$	(3.24 .f)
Frequência média esperada	$f_m = \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}}$	(3.24 .g)
Expectativa de Zeros	$E[0] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$	(3.24. h)
Expectativa de Zeros com Cruzamento-Positivo	$E[0^+] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$	(3.24 .i)
Expectativa de Picos	$E[p] = M^+ = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$	(3.24 .j)
Fator de Irregularidade	$\gamma = \frac{E[0^+]}{E[P]} = \sqrt{\frac{m_2^2}{m_0 m_4}}$	(3.24 .k)

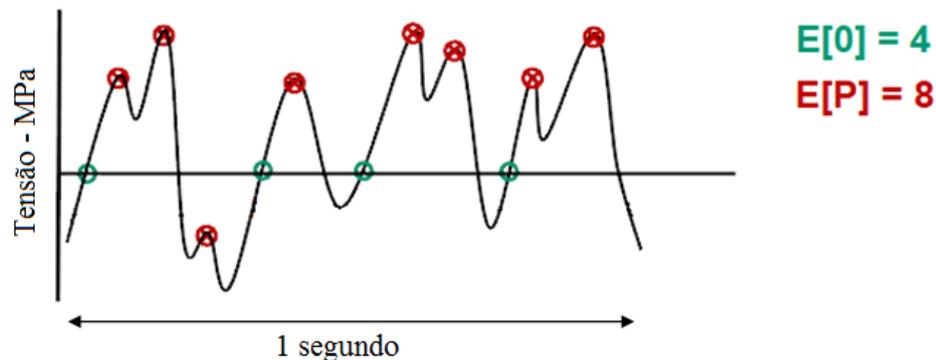


Figura 3.5 – Expectativa de zeros com cruzamento positivo e expectativa de picos.

Fonte: Adaptado de Bishop e Sherratt, 2000.

O fator de irregularidade (3.24 .k) indica a largura de banda do sinal. Um fator de irregularidade próximo da unidade, indica que o processo é de banda estreita. Já o processo de banda larga é caracterizado por um fator de irregularidade próximo de zero. Nos processos de banda estreita, o número de picos por segundo, é similar ao número de cruzamento de zeros.

3.1.6 Função Densidade de Probabilidade - *Probability Density Function* - PDF

A Função Densidade de Probabilidade ou *Probability Density Function* (PDF) para variáveis contínuas descreve a probabilidade de um dado aleatório assumir um valor dentro de uma determinada faixa em um instante de tempo t conforme ilustrado na Figura 3.6. Descreve a distribuição geral de magnitude de um sinal aleatório.

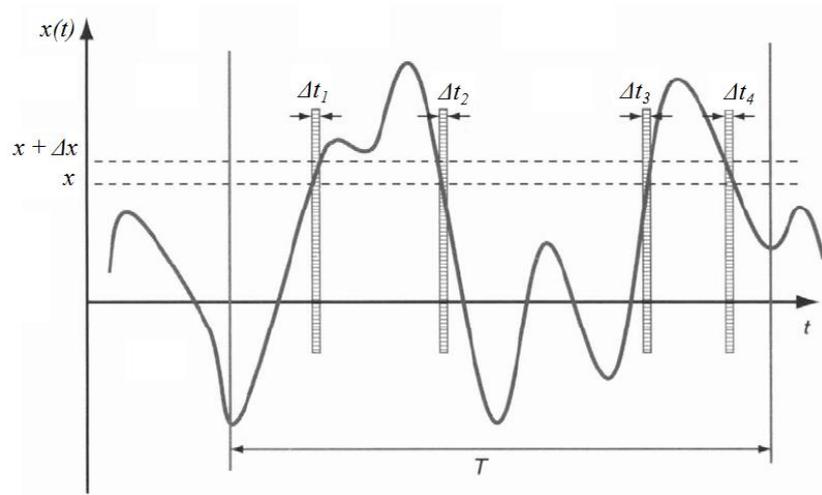


Figura 3.6 – Amostra temporal de um sinal aleatório.

Fonte: Cesário, 2012.

A probabilidade P de $x(t)$ assumir um valor entre x e $(x + \Delta x)$ é:

$$P[x \leq x(t) \leq x + \Delta x] = \frac{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4}{T} \quad (3.25)$$

Para o valor de T suficientemente longo, e para pequenos valores de Δx , a função densidade de probabilidade (PDF) pode ser definida como:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x \leq x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t^*}{T} \right] \quad (3.26)$$

onde Δt^* é o somatório de Δt_1 a Δt_n .

Sendo assim, a probabilidade da variável ocorrer nos intervalos x_1 e x_2 pode ser calculada pela equação abaixo:

$$p(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (3.27)$$

Sendo que para o intervalo $(-\infty, +\infty)$ a probabilidade é 100%:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (3.28)$$

A partir da PDF retiramos algumas propriedades estatísticas do processo aleatório como a média (μ_x) e a média quadrática (Ψ_x^2), que podem ser calculadas de acordo com as equações abaixo:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \quad (3.29)$$

$$\Psi_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \quad (3.30)$$

3.1.7 Distribuições de Probabilidade

Distribuições de probabilidade são definidas em termos das funções de densidade de probabilidade, portanto, existem inúmeras funções definidas a serem aplicadas a cada caso em particular.

3.1.7.1 Distribuição normal ou Gaussiana

A função densidade de probabilidade normal é definida como:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.31)$$

sendo: μ = média ou parâmetro de localização,

σ = desvio padrão ou parâmetro de escala.

Segundo Nieslony e Macha, 2007, sob uma hipótese de que o carregamento aleatório possua uma distribuição normal nos valores instantâneos, a distribuição do número médio de alternância de valores por segundo pode ser definida por uma função densidade de probabilidade do tipo:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.32)$$

onde: σ = desvio padrão do carregamento, conforme equação (3.24 .a)

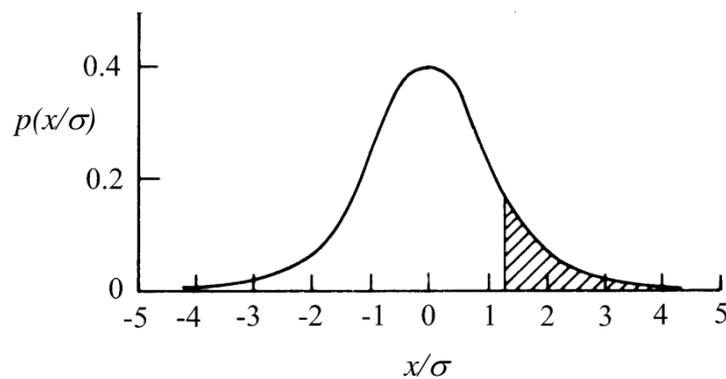


Figura 3.7 – Distribuição normal de probabilidade (ou de Gauss) de x .

Fonte: Adaptado de Pook, 2007

3.1.7.2 Distribuição de Rayleigh

Conforme Nieslony e Macha, 2007, partindo da ideia de que o ciclo que gera dano deve ser contado quando o mesmo é positivo e com uma inclinação positiva, é utilizando a multiplicação da probabilidade gaussiana para as duas condições, é possível encontrar uma função de densidade de probabilidade similar a função de Rayleigh.

$$p(x) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (3.33)$$

onde a = determinado valor positivo de x

Ainda segundo os autores, esta é uma distribuição simples que pode ser facilmente implantada numericamente. Porém possui uma aplicação limitada, pois durante a dedução da PDF é assumido que o carregamento é do tipo banda estreita.

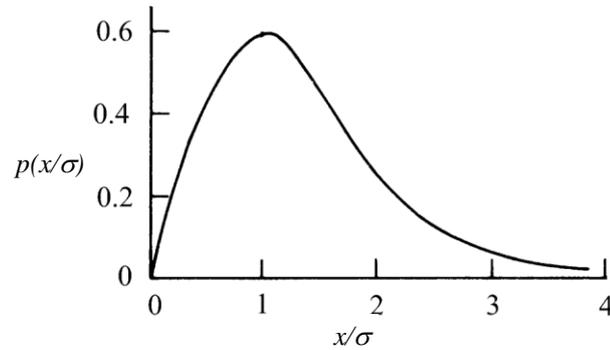


Figura 3.8 – Distribuição de probabilidade de Rayleigh.

Fonte: Adaptado de Pook, 2007

3.1.7.3 Distribuição de Dirlik

Dirlik, 1985, propôs uma PDF para as tensões de amplitude da contagem de ciclos *Rainflow*. Trata-se de uma função empírica fechada obtida por meio de uma aproximação de simulações numéricas do sinal, via Monte Carlo. Foi amplamente citada e empregada em diversos trabalhos: [Ariduru, 2004], [Bosco Jr., 2007], [Nieslony e Macha, 2007].

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left[\frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}} \right] \quad (3.34)$$

onde:

$$Z = \frac{\Delta\sigma}{2\sqrt{m_0}} \quad (3.35.a)$$

$$D_1 = \frac{2(f_m - I^2)}{1 + I^2} \quad (3.35.b)$$

$$D_2 = \frac{1 - I - D_1 + D_1^2}{1 + R} \quad (3.35.c)$$

$$D_3 = 1 - D_1 - D_2 \quad (3.35.d)$$

$$R = \frac{I - f_m - D_1^2}{1 - I - D_1 + D_1^2} \quad (3.35.e)$$

$$Q = \frac{1.25(I - D_3 - D_2 R)}{D_1} \quad (3.35.f)$$

$$\gamma = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \quad (3.35g)$$

Lembrando que f_m provém da equação (3.24.g).

3.1.8 Função Gamma Γ

A função *gamma* é utilizada com frequência a fim de simplificar distribuições de probabilidade e em muitas teorias de estimativa de vida. A função *gamma*, também conhecida como integral Euleriana de segunda ordem, segue a forma:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (3.36)$$

3.2 Função Resposta em Frequência

A função transferência é definida como a resposta por unidade de entrada para cada frequência de interesse. Desta forma é possível prever uma amplitude de deslocamento de uma estrutura relacionando a amplitude do carregamento e a função transferência para cada frequência do carregamento. [Bishop e Sherratt, 2000]

Segundo Bishop e Sherratt, 2000, uma maneira intuitiva de obter a função transferência seria aplicar uma série de excitações senoidais experimentalmente em um modelo de FEA. Obtendo assim a amplitude da resposta para cada frequência, sendo que a resposta poderia ser dada, além da forma de deslocamentos, como na forma de tensão ou deformação.

Em um sistema submetido a uma excitação senoidal que varie em relação ao tempo, a resposta do sistema também irá variar de forma senoidal. As equações (3.37) e (3.38) apresentam excitação e resposta senoidais em forma exponencial, respectivamente:

$$F(t) = P e^{j\omega t} \quad (3.37)$$

$$x(t) = X e^{j\omega t} \quad (3.38)$$

A FRF complexa pode ser dada por:

$$H(j\omega) = \frac{X}{P} \quad (3.39)$$

3.2.1 Função Resposta em Frequência para Sistemas com 1 GDL

Considerando um sistema de 1 Grau de Liberdade (GDL), como o sistema massa, mola e amortecedor como ilustrado na Figura 3.9, assumindo que o sistema esteja sujeito a uma força $F(t)$, ou a um deslocamento prescrito pela base $z(t)$, a equação diferencial do movimento no domínio do tempo é:

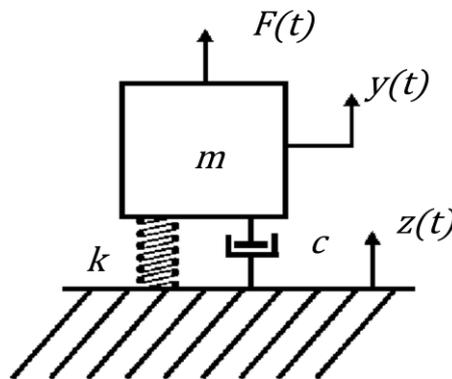


Figura 3.9 – Sistema massa, mola e amortecedor de 1 GDL.

$$x(t) = y(t) - z(t)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (3.40)$$

onde:

m é a massa do sistema,

c é o amortecimento do sistema,

k é a rigidez da mola do sistema,
 $F(t)$ é a excitação do sistema.

Representando a equação acima de forma matricial temos:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (3.41)$$

onde \mathbf{x} é o vetor deslocamento do sistema com suas respectivas derivadas, \mathbf{M} a matriz massa, \mathbf{C} a matriz amortecimento, \mathbf{K} a matriz rigidez e $\mathbf{f}(t)$ o vetor carregamento.

A função resposta em frequência pode ser obtida tomando-se a entrada $F(t) = P e^{j\omega t}$, e calculando a transformada de Fourier para a equação acima temos:

$$[-\omega^2 m + j\omega c + k]X(\omega) = P \quad (3.42)$$

Utilizando-se a definição da FRF, dada pela equação (3.39), a FRF para um sistema com 1 GDL fica:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(-\omega^2 m + j\omega c + k)} \quad (3.43)$$

E a equação (3.42) pode ser reescrita como:

$$X(\omega) = H(j\omega) P(\omega) \quad (3.44)$$

3.2.2 Função Resposta em Frequência para Sistemas com N GDL

Para um sistema contínuo podem existir inúmeros modos de vibração, cada um com uma determinada frequência de vibração (natural), se excitarmos o sistema com inúmeras frequências, o sistema responderá em maior amplitude nas determinadas frequências naturais. Para estrutura simples e contínuas, como por exemplo vigas, as frequências e os modos de vibração podem ser determinados matematicamente. À medida que as estruturas ficam mais complexas, é necessário o uso de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos.

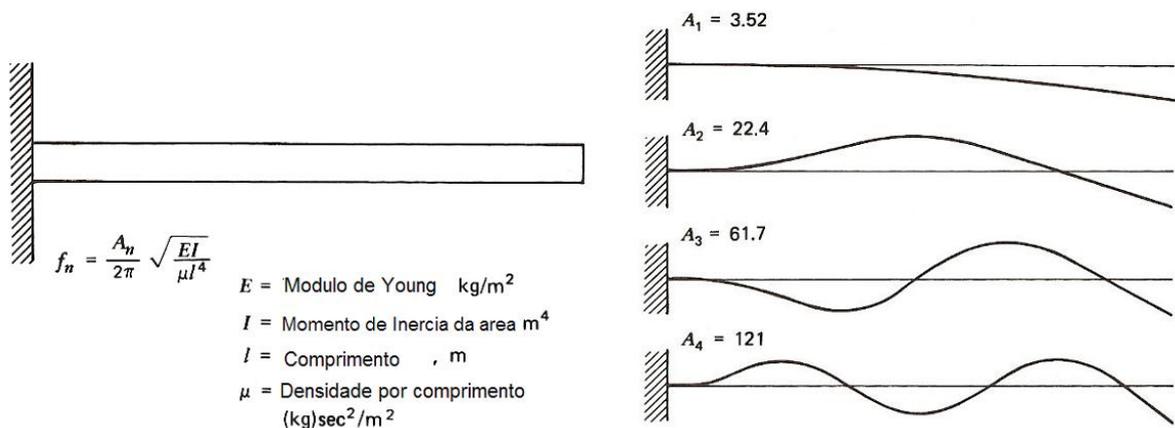


Figura 3.10 – Frequências naturais e modos de vibração de vigas engastadas.

Fonte: Bosco Júnior, 2007.

A equação (3.41) que descreve o comportamento dinâmico de estruturas com N GDL pode ser vista como um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem. Para resolvê-la existem dois métodos comumente utilizados: Método da Integração Direta e Método da Superposição Modal, [Alves Filho, 2005].

O Método da Integração Direta, como sugere o nome, diz que a solução do sistema deve ser realizada através da integração do sistema de equações diferenciais, respeitando o acoplamento entre elas.

O Método da Superposição Modal pode ser aplicado em sistemas lineares e consiste, basicamente, em uma mudança de base, passando-se das coordenadas nodais para as coordenadas generalizadas [Bathe, 1996]. Desta forma, as equações passam a ser desacopladas, permitindo que sejam resolvidas de forma independente e a resposta é dada pela superposição das respostas de cada equação. É realizada uma análise modal e após é determinado os fatores de participação modal.

Na análise modal, a equação (3.41) pode ser resolvida ignorando-se o amortecimento e assumindo que $f(t)$ é nulo, ou seja, considerando a estrutura sob vibração livre sem amortecimento. O amortecimento não é considerado, pois seu valor é pequeno nas aplicações de vibrações estruturais fazendo com que os modos de vibrar e frequências naturais praticamente não sofram influência deste.

Admitindo que durante a vibração livre cada grau de liberdade da estrutura executa um movimento harmônico, tem-se que:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_o(t) \text{sen}(\omega t) \quad (3.45)$$

Onde $\mathbf{u}_o(t)$ é o vetor das amplitudes de oscilação. A segunda derivada da equação anterior é dada por:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{u}_o(t) \omega^2 \text{sen}(\omega t) \quad (3.46)$$

Substituindo-se as equações acima na equação (3.41), desconsiderando o amortecimento e simplificando, encontra-se:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

A solução trivial da equação (3.47) é dada para $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, o que não representa vibrações na estrutura. A solução não trivial é obtida para $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \mathbf{0}$, tendo como incógnita ω^2 , que são os quadrados das frequências naturais dos n possíveis modos de vibrar da estrutura, sendo resolvida por:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3.48)$$

Por simplicidade, pode-se substituir ω^2 por λ , resultando em um problema de autovalores, que pode ser resolvido por:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \quad (3.49)$$

Uma vez que cada autovalor corresponde a um modo de vibrar (autovetor), pode-se escrever:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

Onde $\boldsymbol{\phi}_i$ são os autovetores, que indicam o modo de vibração. A partir do conhecimento dos modos de vibração e das frequências naturais, o próximo passo passa a ser a definição do fator de participação de cada um dos modos na resposta dinâmica.

A propriedade de ortogonalidade dos autovetores tem papel fundamental, pois uma vez que os autovetores são ortogonais entre si, é possível que se encontre a resposta dinâmica da estrutura a partir da combinação linear de cada um dos n modos, ou seja, a resposta é dada

pelo somatório dos modos de vibrar da estrutura, multiplicados pelo seu respectivo fator de participação. A hipótese da superposição modal é mencionada como [Alves Filho, 2005]:

$$\mathbf{u}(t) = y_1 \boldsymbol{\phi}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{\phi}_n = \sum_{i=1}^n y_i(t) \boldsymbol{\phi}_i \quad (3.51)$$

Onde y_i são os fatores de participação associados aos modos $\boldsymbol{\phi}_i$, de acordo com a propriedade de ortogonalidade, pode-se escrever, para $i \neq j$:

$$\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

$$\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (3.54)$$

Pode-se escrever ainda que:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i = k_i \quad (3.55)$$

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = m_i \quad (3.56)$$

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_i = c_i \quad (3.57)$$

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{f}(t) \boldsymbol{\phi}_i = f_i \quad (3.58)$$

onde,

k_i : rigidez generalizada para o modo i ;

m_i : massa generalizada para o modo i ;

c_i : amortecimento generalizado para o modo i ;

f_i : força generalizada para o modo i ;

Um sistema com N GDL apresentará n massas, rigidezes e amortecimentos generalizados [Alves Filho, 2005]. Substituindo-se a equação (3.51) na equação (3.41), após a correspondente mudança para variáveis generalizadas e utilizando-se as propriedades de ortogonalidade, dadas pelas equações (3.52) a (3.54), bem como os conceitos de rigidez, massa, amortecimento e força generalizados, a resposta dinâmica da estrutura é dada, em coordenadas generalizadas, por:

$$m_i \ddot{y}_i(t) + c_i \dot{y}_i(t) + k_i y_i(t) = f_i(t) \quad (3.59)$$

Aplicando a transformada de Fourier para ambos os lados da equação encontramos:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C}) \mathbf{y}(j\omega) = \mathbf{f}(j\omega) \quad (3.60)$$

Sendo:

$\mathbf{f}(j\omega)$: transformada de Fourier do vetor $\mathbf{f}_i(t)$;

$\mathbf{y}(j\omega)$: transformada de Fourier do vetor $\mathbf{y}_i(t)$;

\mathbf{K} : matriz de rigidez generalizada;

\mathbf{C} : matriz de amortecimento generalizado;

\mathbf{M} : matriz de massa generalizada;

A equação acima pode ser escrita como segue:

$$\mathbf{y}(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{f}(j\omega) \quad (3.61)$$

E é encontrada a função de resposta em frequência (FRF):

$$\mathbf{H}(j\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C})^{-1} \quad (3.62)$$

A função resposta pode ser simplificada em termos quantitativos, sendo que a resposta pode ser dada em termos de deformação ou tensão e a entrada pode ser dada em termos de força ou aceleração. [Halfpenny, 1999; Bishop e Sherratt, 2000].

3.2.3 Resposta em PSD

A partir das densidades espectrais de excitação do sistema dinâmico e das funções transferência, é possível calcular a resposta do sistema, desde que seja respeitada a hipótese de linearidade. Para um sistema com única entrada, a resposta em termos de densidade

espectral de potência e espectro de potência cruzado, ambos unilaterais, é dada por [Bendat e Piersol, 1971]:

$$\mathbf{G}_y(f) = |\mathbf{H}(f)|^2 \mathbf{G}_x(f) \quad (3.63)$$

$$\mathbf{G}_{xy}(f) = \mathbf{H}(f) \mathbf{G}_x(f) \quad (3.64)$$

Sendo que $|\mathbf{H}(f)|$ é também conhecido como fator ganho.

4. ANÁLISE DE VIDA EM FADIGA

4.1 Generalidades

Muitos componentes de máquinas, veículos e estruturas são submetidos a carregamentos cíclicos. Mesmo que este carregamento não gere tensões acima da tensão de escoamento do material, o carregamento cíclico poderá acumular danos no material, levando a falha do componente. Este processo de dano e falha do material é chamado de fadiga.

Falhas devido à fadiga são motivos de estudo na engenharia há mais de 150 anos. Entre as primeiras motivações para o estudo deste fenômeno está a ruptura de eixos de locomotivas, identificado e estudado por August Wöhler [Dowling, 1999].

Neste século e meio de pesquisas vários modelos para o cálculo foram criados e testados. Atualmente recursos computacionais auxiliam no cálculo de fadiga, ao mesmo tempo em que avançados laboratórios conseguem reproduzir as solicitações da aplicação de forma acelerada, facilitando a análise de componentes sob solicitações cíclicas.

4.1.1 Modos de Falha

A fadiga pode ser definida como uma falha progressiva em um componente sob solicitações repetitivas, cíclicas ou oscilantes. O fenômeno de fadiga mecânica é caracterizado por três aspectos mandatórios: tensões cíclicas, tensões trativas e deformações plásticas. Se algum destes aspectos for eliminado, a fadiga não ocorrerá [Bosco Junior, 2007].

Ao observar uma microestrutura de qualquer material, em escala suficientemente pequena, todos os materiais são anisotrópicos e heterogêneos. Tomando como exemplo um aço ao carbono, observa-se uma microestrutura em forma de grãos cristalinos onde cada grão possui comportamento anisotrópico, cada um orientado a uma diferente direção. Existem ainda inclusões no interior da estrutura cristalina e no contorno do grão.

Devido a esta estrutura não uniforme, a tensão, a qual o material está submetido, irá se distribuir de uma maneira não uniforme, gerando pontos onde a tensão poderá ser suficientemente alta para causar a falha do material, iniciando uma trinca, ou um dano na estrutura onde a falha por fadiga poderá começar. Este comportamento varia conforme o material, microestrutura e propriedades mecânicas. O processo de nucleação de trincas se

desenvolve a partir de uma microdeformação plástica localizada, gerada pelos mecanismos citados acima. [Dowling, 1999].

4.1.2 Mecanismo de Nucleação e Propagação de Trincas

Uma amostra sob cargas alternadas, conforme mostrado na Figura 4.1, pode desenvolver intrusões e extrusões, as chamadas bandas de cisalhamento, que ocorre nos planos cristalinos, ou seja, de forma intergranular. Neste estágio, a propagação ocorre a 45° do carregamento uniaxial, como mostrado na Figura 4.2. [Dowling, 1999], [Hosford, 2005].

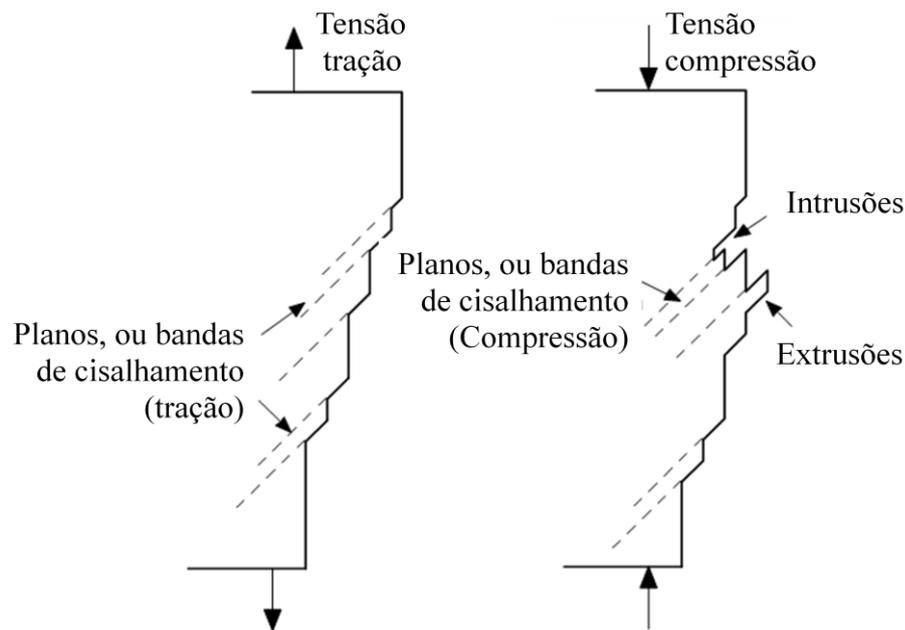


Figura 4.1 – Comportamento das bandas de cisalhamento.

Fonte: Adaptada de Hosford, 2005.

No segundo estágio a propagação da trinca ocorre perpendicularmente à tensão máxima principal até a ruptura do componente, e se dá de forma intragranular, conforme mostrado na Figura 4.2. [Dowling, 1999].

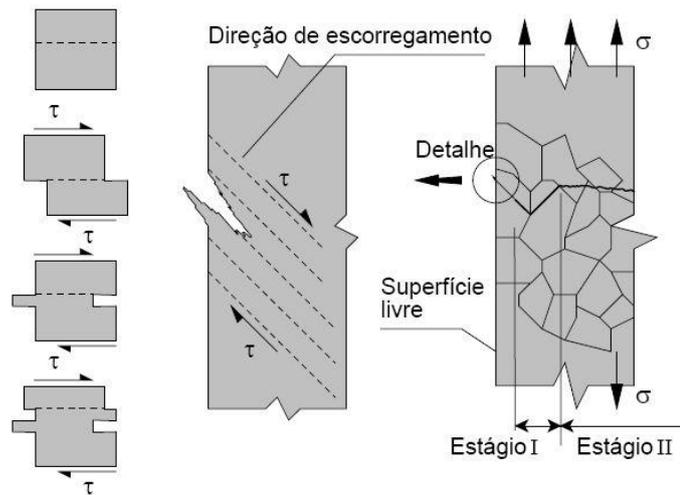


Figura 4.2 – Estágios de formação de uma trinca.

Fonte: Bosco Júnior, 2007.

Nas etapas de nucleação e propagação macroscópica das trincas, conforme mostrado na Figura 4.3, não são percebidas mudanças no comportamento da estrutura e, em geral, não há qualquer sinal de falha iminente. O dano costuma ser localizado apenas na região crítica da estrutura. Pode-se afirmar que os estágios de nucleação e propagação de uma trinca por fadiga são um processo lento, gradual, contínuo e irreversível. [Dowling, 1999].

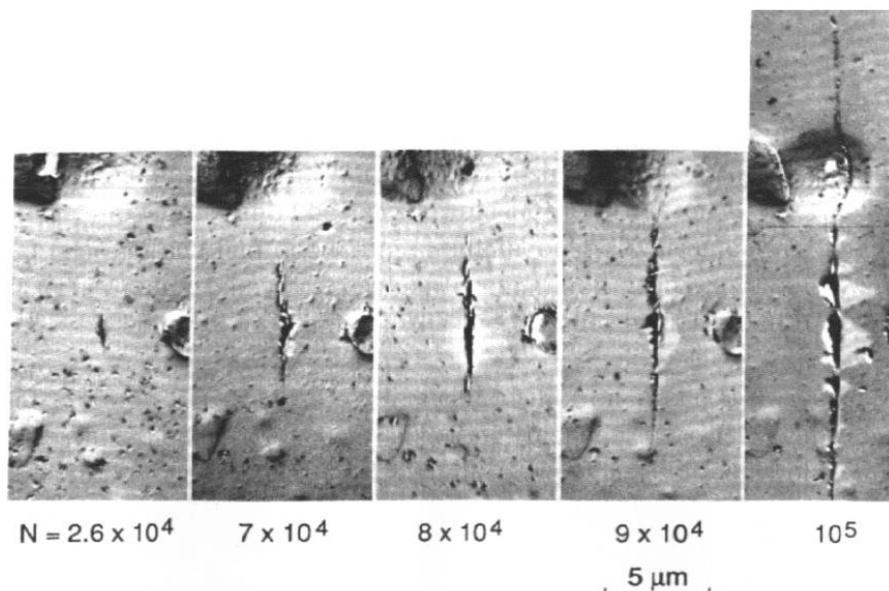


Figura 4.3 – Crescimento de uma trinca por fadiga.

Fonte: Dowling, 1999.

A Figura 4.4 representa a parcela de vida quanto à nucleação e propagação da trinca por fadiga para regiões de baixo e de alto ciclo. Nota-se que para fadiga de alto ciclo (baixa

tensão), a nucleação é responsável por mais de 90% da vida de fadiga, sendo que apenas os ciclos finais são responsáveis pela propagação. Porém em muitos casos a trinca, que leva à falha, não passa pelo período de nucleação, pois o componente pode possuir trincas previamente existentes, na forma de defeitos oriundos de processos de fabricação, ou mesmo pelo uso do equipamento. Estes defeitos podem ser, por exemplo, provenientes de processos de fabricação como: soldagem, fundição, forjamento, retífica, devido a um tratamento térmico muito severo, ou ainda devido a um ataque do meio ambiente agressivo, que leva a uma corrosão na superfície do material.

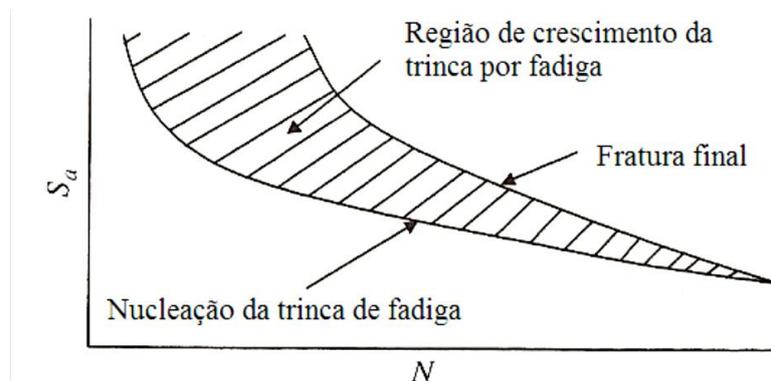


Figura 4.4 – Representação do processo envolvendo a fadiga: nucleação, crescimento da trinca e ruptura final.

Fonte: Adaptada de Stephens et al., 2001.

4.1.3 Estimativa de Vida por Meio da Tensão (σ - N)

Na Figura 4.5, está representada a nomenclatura e representação gráfica das tensões cíclicas, médias, etc., utilizados no cálculo de fadiga.

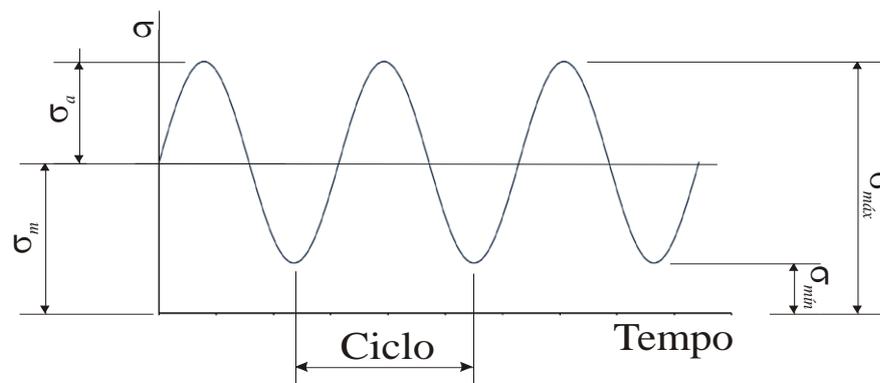


Figura 4.5 – Nomenclatura das tensões presentes em solicitações alternantes.

Fonte: Reis, 2009.

Sendo que dela se extrai:

$$\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{min} \quad (4.1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{min}}{2} \quad (4.2)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{min}}{2} \quad (4.3)$$

Outra importante característica é a razão entre tensões mínima e máxima, onde para carregamento alternado (tensão média nula) $R=-1$; Para carregamento pulsante (tensão mínima nula), $R=0$; Para carregamento estático $R=1$. [Hosford, 2005].

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{m\acute{a}x}} \quad (4.4)$$

Em sua maioria, os testes de fadiga são realizados com uma tensão média nula, ($R=-1$) controlando apenas a tensão alternada reversa, σ_{ar} . Estes testes geram curvas de tensão alternada em função do número de ciclos que o material sofreu. A vida, ou o número de ciclos até a falha, N_f , varia rapidamente quando se reduz a tensão alternada, a ponto que, ao traçar os pontos em uma escala logarítmica tanto na vida quanto na tensão, observa-se um comportamento linear, que pode ser aproximado com uma expressão do tipo mencionado na equação (4.5), [Stephens et al., 2001], [Hosford, 2005]:

$$\sigma_{ar} = A(N_f)^b \quad (4.5)$$

Onde A é o coeficiente que representa o valor de falha para um ciclo e b é o expoente ou a inclinação da reta. A Figura 4.6 representa o comportamento típico de uma curva S-N.

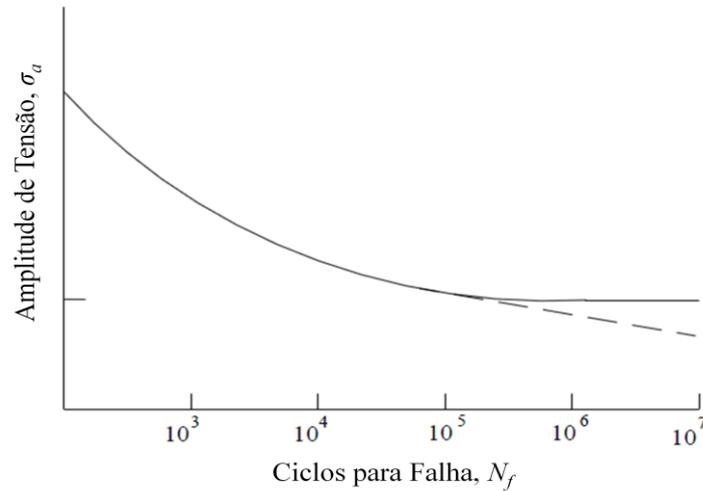


Figura 4.6 – Curva S-N típica.

Fonte: Adaptado de Suresh, 1998.

A equação (4.5) pode ser escrita modificando os coeficientes conforme a equação (4.6), [Nieslony e Macha, 2007], [Branco, 1999].

$$\sigma_{ar} = \left(\frac{C}{N_f} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.6)$$

Onde C é o coeficiente e m é o expoente para a vida em fadiga.

Conforme Bishop, 1999, temos uma curva com três regiões, sendo a primeira região com uma inclinação para fadiga de baixo ciclo com grandes níveis de tensões, outra inclinação para fadiga de alto ciclo e por último a região para vida infinita de fadiga, com tensões menores que o limite de resistência à fadiga, conforme ilustrado na Figura 4.7.

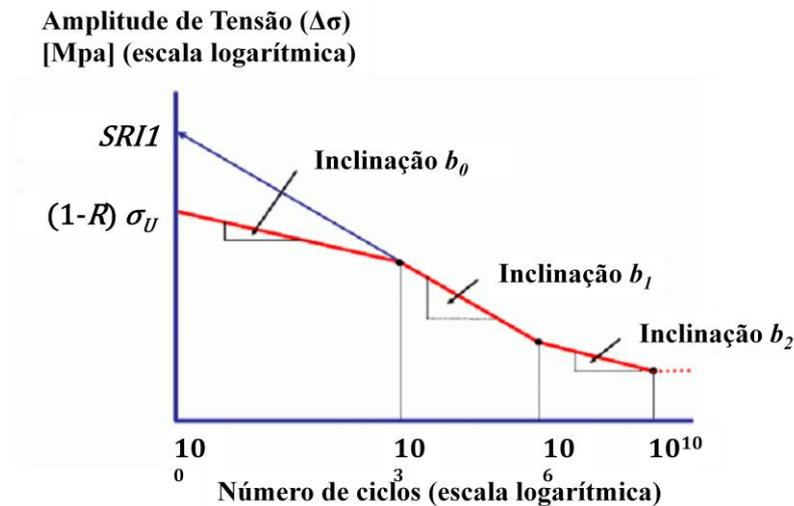


Figura 4.7 – Correção da Curva S-N, para baixo e alto ciclo, e das tensões além do limite de resistência à fadiga.

Fonte: Adaptado do manual do nCode.

Com base em testes na razão das variações de tensão, $\frac{\sigma_a}{\sigma_m}$, tem se mostrado que para aços e para algumas ligas de titânio a curva tende a tornar-se constante a partir de um determinado valor, chamado de tensão limite para a resistência a fadiga, σ_f , este valor pode ser relacionado com a tensão última da engenharia, σ_U . Segundo Stephens et al., 2001, para aços com resistência a tração inferior a 1400 Mpa, a tensão de resistência à fadiga uniaxial reversa (*fully reversed uniaxial stress*), σ_f , é aproximadamente igual a metade da tensão última de engenharia, σ_U . Para aços com resistência a tração superior a 1400 MPa, a tensão de resistência à fadiga uniaxial reversa é aproximadamente igual a 700 MPa.

4.1.4 Estimativa de Vida Por Meio da Deformação (\mathcal{E} - N)

Para problemas que envolvem fadiga de baixo ciclo, da ordem de mil ciclos, a estimativa de vida por meio da deformação é amplamente utilizada, principalmente em componentes entalhados [Stephens et al., 2001].

Na Figura 4.8, está representado o comportamento da curva deformação-vida, onde mostra que se pode separar a deformação total da falha em duas retas, deformação plástica e deformação elástica.

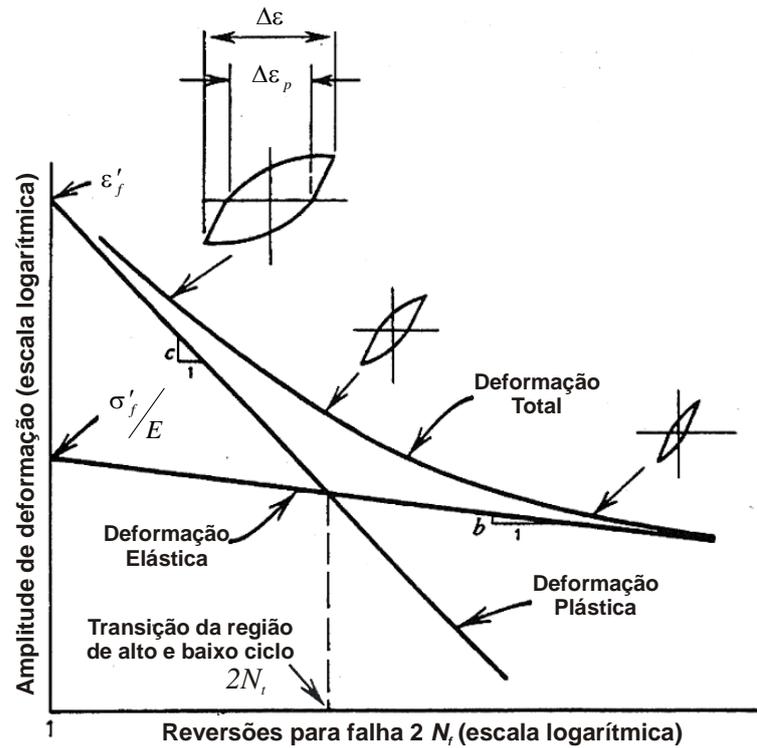


Figura 4.8 – Representação da curva deformação-vida, representando a deformação plástica, elástica e total.

Fonte: Adaptado de Stephens et al, 2001

Desta forma, pode-se modelar a curva acima por meio da equação:

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \epsilon_a = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \epsilon'_f (2N_f)^c \quad (4.7)$$

Onde $\Delta\epsilon/2$ é a amplitude de deformação total, ou ϵ_a , $\Delta\epsilon_e/2$ é a componente elástica da deformação e $\Delta\epsilon_p/2$ é a componente plástica da deformação. Por meio dos coeficientes e expoentes retirados da Figura 4.8, encontra-se a relação entre número de reversões $2N_f$, ou ciclos N_f , e as amplitudes de deformação elástica e plástica, [Stephens et al., 2001].

Resolvendo esta equação, o comportamento tensão-vida pode ser transformado em:

$$\sigma_{ar} = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (4.8)$$

Nesse caso σ'_f é o coeficiente de resistência à fadiga, que pode ser retirado da Figura 4.8 e representa a resistência de falha para fadiga em materiais dúcteis; esta tensão é superior e proporcional a tensão última de engenharia. O parâmetro b é o expoente de resistência à

fadiga, retirado da Figura 4.8, sendo a inclinação da linha de deformação elástica, [Stephens et al., 2001; Dowling, 1999].

4.1.5 Efeito das Tensões Médias

Para gerar as curvas de fadiga são realizados experimentos em laboratório, submetendo as amostras a uma tensão uniaxial reversa, ou seja, σ_m igual a zero. Para este caso em particular a tensão de amplitude reversa será chamada de σ_{ar} .

Observa-se que as curvas de resistência à fadiga comportam-se diferentemente dependendo dos níveis de tensões médias as quais o material estava sujeito para o levantamento das mesmas. Desta forma, visando à utilização destas curvas já pesquisadas e estudadas com aquela solicitação real na estrutura na prática, uma correlação torna-se necessária. Vários autores citam os critérios para correlação de uma amplitude reversa para uma carga com tensão média e amplitude de tensão, [Dowling, 1999; Stephens et al., 2001; Frost, 1999]. Para uma aplicação qualquer, σ_m e σ_a , ao dividir a amplitude σ_a pela amplitude reversa, σ_{ar} , encontra-se um diagrama conforme mostrado na Figura 4.9. Observa-se que existem várias aproximações para relacionar a tensão média com a amplitude de tensão, sendo que o mais conservativo, chamado de critério de *Goodman*, é mostrado na equação (4.9):

$$\text{Critério de Goodman:} \quad \frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} = 1 \quad (4.9)$$

Várias equações tem sido propostas para aproximar a curva aos dados obtidos, na equação (4.10) é mostrada a chamada parábola de *Gerber*.

$$\text{Critério de Gerber:} \quad \frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \left[\frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right]^2 = 1 \quad (4.10)$$

É mostrada na Figura 4.9, a tensão $\tilde{\sigma}_{fB}$, que significa a verdadeira tensão de fratura, ou seja, a tensão real que ocorre na fratura do material, considerando a redução da área da amostra (materiais dúcteis). Segundo Dowling, 1999, $\tilde{\sigma}_{fB}$ é aproximadamente igual a σ'_f , e ambos estes valores maiores que a tensão última, σ_u . Desta forma tem-se o critério de *Goodman* modificado:

Critério de

Goodman modificado:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma'_f} = 1 \quad (4.11)$$

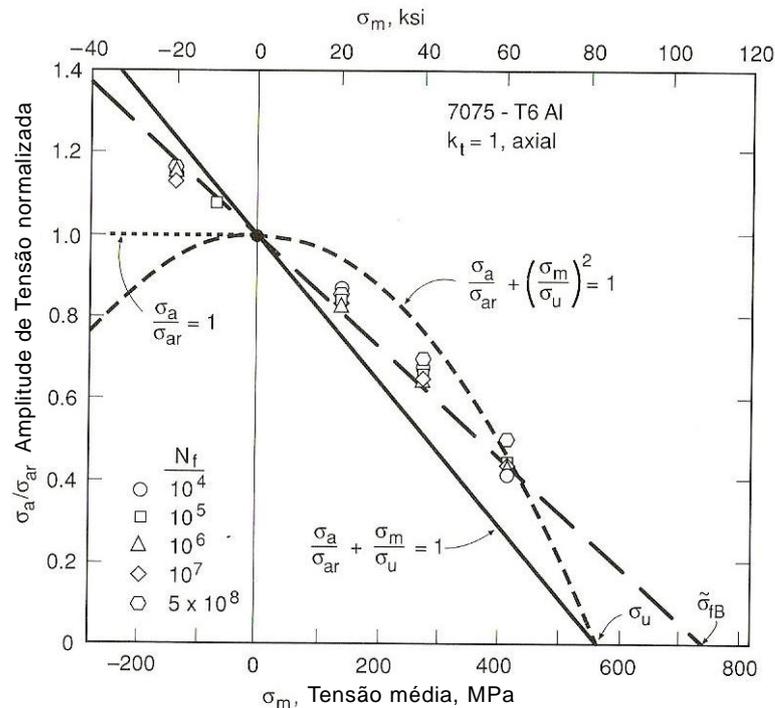


Figura 4.9 – Critério de correção das tensões médias. Comparação entre as relações.

Adaptado de: Dowling, 1999)

4.1.6 Estimativa de Vida para Tensões Multiaxiais

As equações de estimativa de vida citadas nos itens anteriores abordaram apenas componentes sujeitos a carregamentos uniaxiais, porém na engenharia tensões multiaxiais são muito comuns. Conforme Bishop e Sherratt, 2000, existem técnicas para tratar um carregamento multiaxial que têm sido aplicados com sucesso na fase de projeto, embora sua precisão e faixa de aplicação não estão bem determinadas. É importante distinguir entre tensões multiaxiais e carregamento multiaxial. É muito comum ter mais de um ponto de aplicação de carga.

Ao avaliarmos carregamentos aleatórios e tensões multiaxiais, é necessário classificar os carregamentos como uniaxiais, multiaxiais proporcionais e multiaxiais não proporcionais. Para cada tipo de carregamento existem métodos a serem utilizados, sendo que a precisão do cálculo e a dificuldade para estimativa de vida aumenta para cada classificação.

Para materiais dúcteis, considerando carregamentos síncronos, ou seja, completamente reversos, atuando na mesma frequência e em fase ou a 180° fora da fase, a vida em fadiga é controlada pela amplitude cíclica da tensão de *von Mises*, definida pela equação (4.12), [Dowling, 1999; Bishop e Sherratt, 2000; Stephens et al., 2001]:

$$\bar{\sigma}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{3a} - \sigma_{1a})^2} \quad (4.12)$$

onde:

$\bar{\sigma}_a$ é a amplitude de tensão efetiva em fadiga multiaxial;

σ_{1a} , σ_{2a} , σ_{3a} são as amplitudes das tensões principais.

Usando as equações de transformação de tensão, podem-se alterar as variáveis das equações acima para as componentes de um sistema de coordenadas cartesianas, obtendo a equação:

$$\bar{\sigma}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 + 6(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2)} \quad (4.13)$$

Sendo que a amplitude em fase é positiva e 180° fora de fase é negativa. Se o sistema possuir carregamentos estáticos, ou a carga cíclica possuir uma média, esta tensão alterará o comportamento da curva de maneira análoga aos carregamentos uniaxiais. Uma aproximação é assumir que a tensão média é o valor estático da tensão hidrostática. Baseado nisto, uma tensão média efetiva pode ser calculada por meio das tensões médias das três direções principais [Dowling, 1999]:

$$\bar{\sigma}_m = \sigma_{1m} + \sigma_{2m} + \sigma_{3m} \quad (4.14)$$

onde:

$\bar{\sigma}_m$ é a tensão média efetiva em fadiga multiaxial;

σ_{1m} , σ_{2m} , σ_{3m} são as tensões médias principais.

Uma vez calculada a tensão efetiva para as tensões multiaxiais, da mesma forma que com as tensões uniaxiais, a vida, para tensão média nula, pode ser calculada pela equação:

$$\bar{\sigma}_{ar} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (4.15)$$

Da mesma forma podem ser relacionadas a tensão média efetiva com os critérios para correção de tensões médias. No exemplo que segue, o critério de *Goodman* modificado foi reescrito isolando a amplitude de tensão:

$$\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_{ar} \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_f'} \right) \quad (4.16)$$

Substituindo a equação (4.15) na equação (4.16) é possível obter uma equação mais generalizada para aplicações onde a tensão média é diferente de zero.

$$\bar{\sigma}_a = (\sigma_f' - \bar{\sigma}_m) (2N_f)^b \quad (4.17)$$

Stephens et al., 2001, cita o método de *Sines*, que faz uso da tensão de *von Mises*, conforme equação (4.18):

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 + 6(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2)} + \\ & + m(\sigma_{xm} + \sigma_{ym} + \sigma_{zm}) = \sqrt{2} \bar{\sigma}_{ar} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Neste caso m é coeficiente de influência da tensão média e $\bar{\sigma}_{ar}$ é a resistência uniaxial totalmente reversa, para uma vida N . O coeficiente m pode ser determinado experimentalmente, e é da ordem de 0,5. O método de *Sines* é muito similar ao de *von Mises*, com exceção de que este método considera uma menor resistência para um valor de tensão média trativa (positiva) e uma maior resistência para um valor de tensão média compressiva (negativa). Isto é desejado, pois leva em consideração o efeito do fechamento das microtrincas.

Conforme Bishop e Sherratt, 2000, em muitos casos onde a geometria é simples, é possível utilizar as equações de fadiga para tensão uniaxial. Embora os métodos conhecidos de fadiga multiaxial possam fornecer resultados relacionados a durabilidade real do

componente, estes métodos em muitas vezes não descobrem pontos de baixa durabilidade, que podem ser descobertos utilizando técnicas uniaxiais, que são mais simples e rápidas. Mesmo se uma situação multiaxial existir, análises de durabilidade uniaxiais podem ser utilizadas para análises de relação e de robustez.

4.2 Fadiga Sob Solicitações Aleatórias

Representações reais de carregamentos são fundamentais para o sucesso da análise de fadiga e para o projeto. Em muitos casos de engenharia o componente em análise está submetido a carregamentos aleatórios.

Especificamente para solicitações aleatórias, podem-se destacar, entre as mais difundidas, duas abordagens para a estimativa do dano de fadiga na estrutura. Uma utiliza algoritmos para a contagem de ciclos a partir da solicitação aleatória no tempo, e a outra utiliza metodologias, empíricas ou não, para a estimativa da probabilidade de ocorrência de determinado nível de tensão e, então, estimam o dano à fadiga causado por este nível. Em especial para este último utiliza-se amplamente a Densidade Espectral de Potência PSD (*Power Spectral Density*) do registro de tensão para a estimativa da Função de Probabilidade – PDF (*Probabilistic Density Function*) e, então, a estimativa do dano em fadiga.

Em uma análise de tensões em um componente, a função PSD de tensão é calculada para cada ponto de interesse da estrutura (pontos críticos de tensão) por meio de uma análise FEM (*Finite Element Method*) ou por meio de medições experimentais com a utilização de extensômetros.

De qualquer forma, ambas as abordagens utilizam um critério de acúmulo do dano para a estimativa do dano que um determinado nível ou probabilidade de tensão causa ao material. A escolha deste critério de acúmulo de dano é mandatória para a estimativa de vida e nível de confiabilidade da mesma dada à solicitação da estrutura.

4.2.1 Critérios de Acúmulo de Dano

Existem diversos critérios para a estimativa e cálculo do acúmulo de dano, ou degradação do material. Visam identificar o processo físico que causa o dano microestrutural ou simplesmente uma abordagem empírica que é comprovada com resultados experimentais.

Basicamente, envolvem o conceito de acúmulo gradual do dano durante o processo de solitação aleatória.

Em um artigo, Fatemi e Yang, 1998, listam mais de 50 modelos e critérios de acúmulos de danos, propostos desde o critério de acúmulo de dano de Palmgren-Miner. Estes modelos podem ser divididos em 6 subgrupos:

- Evolução do dano linear e somatório linear;
- Curva de dano não linear e abordagem de linearização em dois estágios;
- Modificação da curva de fadiga considerando-se a interdependência dos carregamentos;
- Abordagem baseada no crescimento de trinca e mecânica da fratura;
- Modelo baseado na mecânica do dano contínuo;
- Modelos baseados em energia.

Muitos modelos foram desenvolvidos, porém nenhum é aceito de maneira universal. Tantos modelos existem devido ao dano possuir muitas variáveis, tais como: sequência de carregamentos e efeitos de interação, efeitos de sobrecargas, amplitudes abaixo do limite de fadiga, tensão média, entre outros. A aplicação de cada modelo varia de caso a caso, conseqüentemente, a regra de Palmgren-Miner é a mais utilizada como primeira opção, principalmente nas análises de componentes em fase projeto.

4.2.1.1 A Regra de Palmgren-Miner

Desde o seu desenvolvimento, em 1924 por *Palmgren*, e posteriormente em 1945 por *Miner*, a regra linear de acúmulo do dano de *Palmgren-Miner*, vem sendo utilizada amplamente em métodos e critérios de análise de fadiga por solitações aleatórias. A regra linear de *Palmgren-Miner* tem extensa aplicação em função de sua facilidade de implementação numérica e analítica. [Dowling, 1999]

A regra determina que cada grupo de tensão senoidal contribui com uma certa quantidade de dano. O dano causado por cada subgrupo de tensão independe de sua posição ao longo do grupo total de tensão aplicada. O dano total, D , é o somatório dos danos causados por cada subgrupo de tensão senoidal. A falha por fadiga irá acontecer quando a soma das frações de cada dano representar 100% da vida esperada.

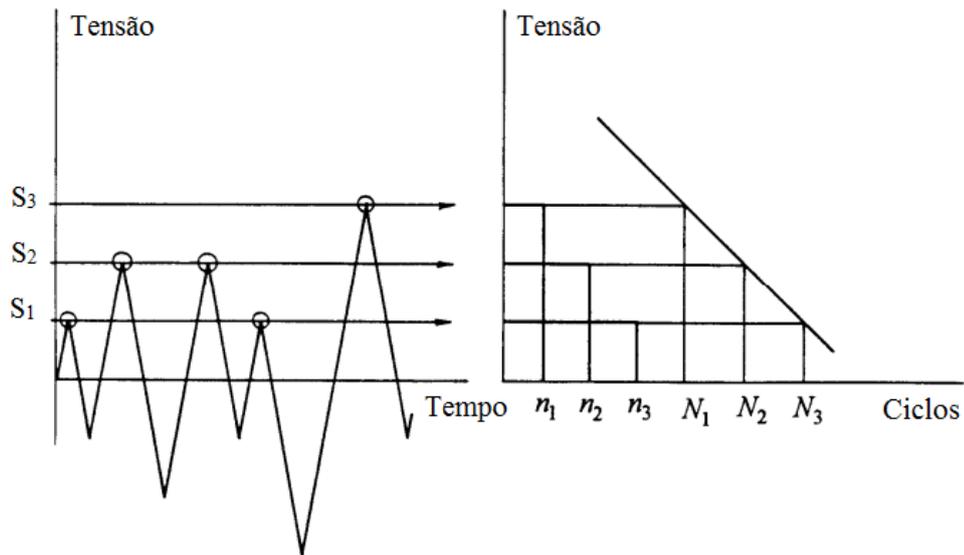


Figura 4.10 – Blocos de carregamento com amplitude constante e curva S - N.

Fonte: Adaptado de Stephens et al., 2001.

$$D = \frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} + \dots + \frac{n_n}{N_{fn}} = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} = 1 \quad (4.19)$$

Existem casos onde uma sequência de carregamentos variáveis se repete no tempo, neste caso pode-se calcular o dano causado por um ciclo e multiplicá-lo pelo número de repetições.

$$B_f \left[\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_{fi}} \right]_{\text{Um ciclo}} = 1 \quad (4.20)$$

Onde B_f é o número de repetições até a falha do componente.

4.2.1.2 Variações na Regra de Acúmulo de Dano: Linear e Não Linear

Observa-se que a regra de acúmulo de dano linear de *Palmgren-Miner*, para solicitações de carregamentos senoidais em diversos níveis de tensão não é confiável. Buscam-se, desta forma, modificações e variações da regra linear para o dano que estime vida de fadiga mais próximo da realidade [Fatemi e Yang, 1998]. Uma variação mais simples da equação de *Palmgren-Miner* é:

$$D = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{n_i}{N_{fi}} \right)^c \right] \quad (4.21)$$

Onde c é uma constante positiva obtida experimentalmente.

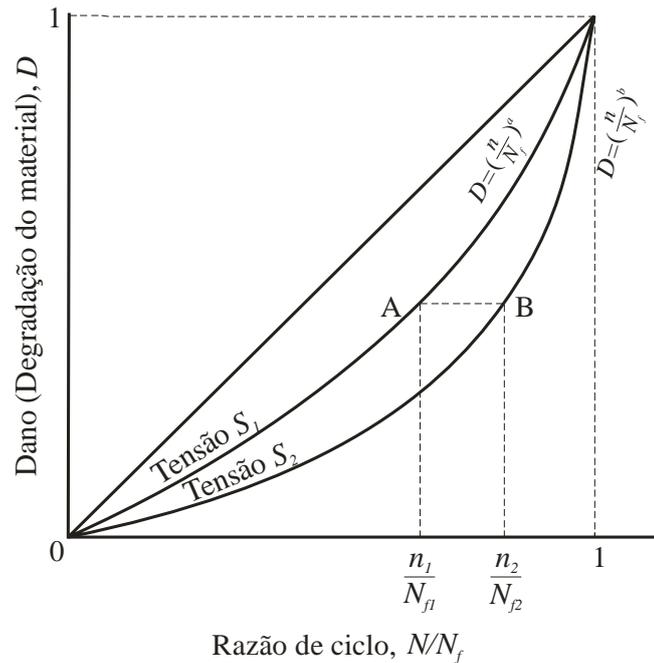


Figura 4.11 – Representação da relação entre dano e a razão de ciclos.

Adaptado de: Frost, 1999.

4.2.1.3 Hipótese de Acúmulo de Dano de Serensen-Kogaev

Em livro e em artigos [Nieslony e Macha, 2007; Marinković, 2004; Sedmak, 2006; Macha, 2006] utilizou-se de um critério de dano baseado na modificação da curva de Wöhler pelo coeficiente b_{SK} , considerando a hipótese *Serensen-Kogayev*; e o dano pode ser expresso de tal forma que:

$$D = \frac{1}{b_{SK}} \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{fi}} \quad (4.22)$$

onde o coeficiente b_{SK} é definido como:

$$b_{SK} = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_{ai} t_i - a_{SK} \sigma_{af}}{\sigma_{am\acute{a}x} - a_{SK} \sigma_{af}} \quad (4.23)$$

enquanto $\sigma_{am\acute{a}x}$ é a máxima amplitude obtida dos ciclos contados e $a_{SK} \in [0, \dots, 1]$ é o coeficiente que leva em conta as amplitudes abaixo do limite de fadiga, usualmente igual a 0,5; σ_{af} é o limite de fadiga por flexão e t_i é a fração do ciclo n_i definido por meio da equação seguinte:

$$t_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (4.24)$$

onde n_i é o número de ciclos com amplitude σ_{ai} ($i=1, 2, \dots, k$).

4.2.2 Influência da Sequência do Carregamento

O efeito da ordem dos carregamentos existe tanto nos estágios iniciais, nucleação de trinca e crescimento de uma microtrinca, quanto nos estágios finais de fadiga, crescimento da macrotrinca. Estudos [Stephens et al., 2001] mostram que a resistência a fadiga de corpos de prova lisos é menor do que a indicada pela regra linear de dano (Palmgren-Miner) quando são aplicados poucos ciclos de uma alta tensão em um carregamento totalmente reverso, antes do ensaio com uma amplitude menor. Este efeito pode ser melhor observado em componentes entalhados.

Existe ainda o efeito da tensão residual causada por sobrecargas iniciais, quando as sobrecargas iniciais terminam em um pico de tensão de tração os efeitos são benéficos a vida em fadiga, devido ao encruamento do corpo de prova, quando estes terminam em um pico de compressão, os efeitos não são desejáveis. Portanto são desejadas sobrecargas iniciais de tração, pois encruam o material e aumentam a vida em fadiga. A Figura 4.12 e a Figura 4.13 mostram que para a sobrecarga de tração (*a*, *b*) a propagação da trinca é menor que na sobrecarga de compressão (*c*, *d*). [Stephens et al., 2001]:

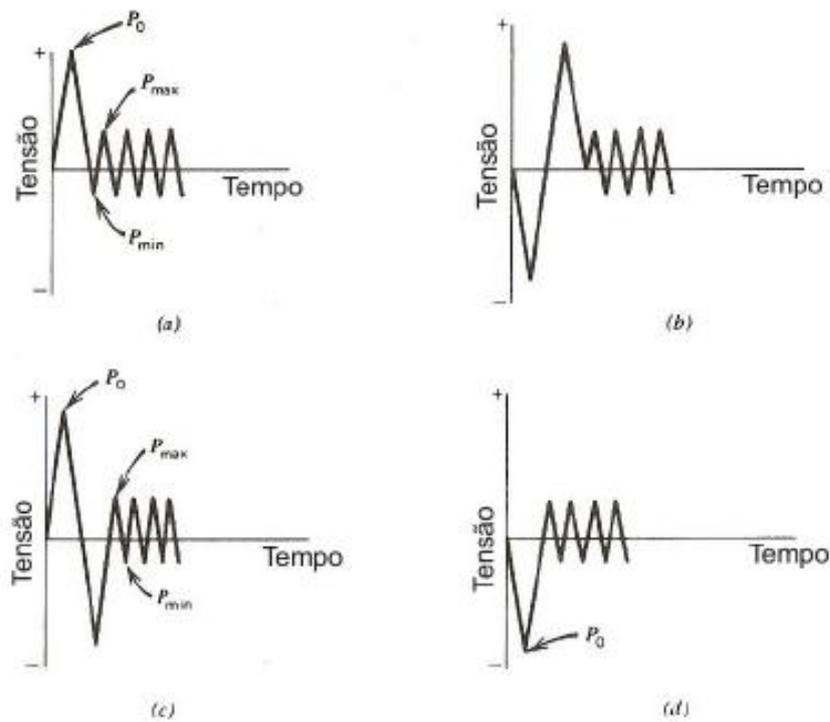


Figura 4.12 – Quatro diferentes tipos de sobrecarga: (a) tração, (b) compressão - tração, (c) tração - compressão, (d) compressão.

Fonte: Adaptado de Stephens, 2001.

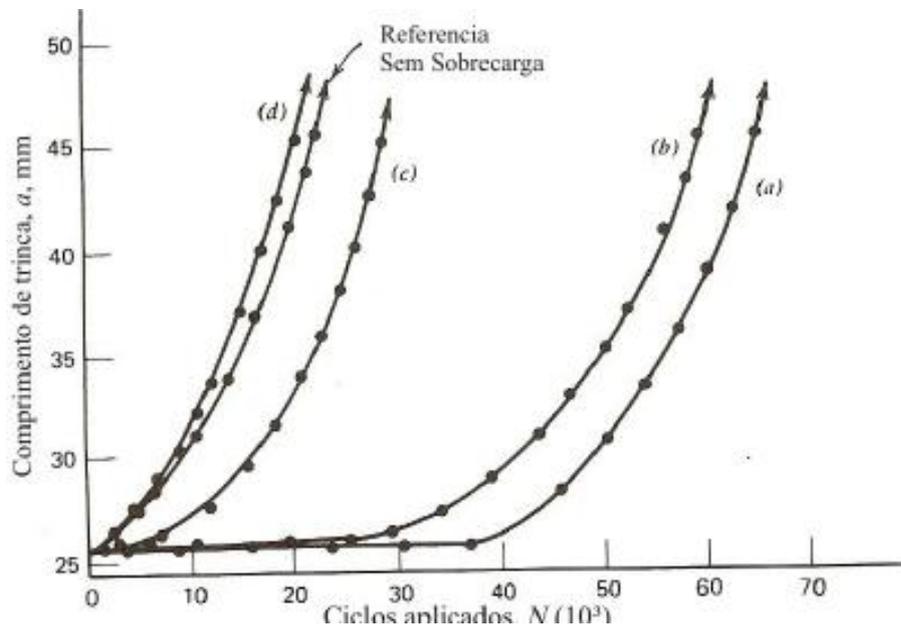


Figura 4.13 – Propagação de trinca para diferentes tipos de sobrecarga: (a) tração, (b) compressão - tração, (c) tração - compressão, (d) compressão.

Fonte: Adaptado de Stephens, 2001.

4.2.3 Análise no Domínio do Tempo

Para que se possa usar o critério de acúmulo de dano, o conhecimento do número de ciclos de tensão ou deformação média e alternada é fundamental. Existem diversos métodos de contagem de ciclos e todos estes têm a proposta de comparar o efeito do carregamento aleatório com dados e curvas de fadiga obtidos em ensaios de carregamentos de amplitudes constantes [Stephens et al., 2001].

O uso de um ou outro método de contagem de ciclos pode alterar sensivelmente os resultados de vida em fadiga, fazendo com que estes sejam mais ou menos próximos daqueles obtidos em experimentos [Stephens et al., 2001].

Um histórico de tensão aleatório consiste em uma série de picos e vales que são os pontos onde ocorre a mudança de direção do carregamento [Dowling, 1993]. Como regra, os métodos de contagem de ciclos que mais se aproximam dos resultados observados em ensaios realizam a contagem de um ciclo através da diferença de tensão entre estes picos e vales [Stephens et al., 2001].

Dentro os principais métodos de contagem de ciclos (Rainflow, Range-Pair, Racetrack, Level-Crossing, Peak Counting), o método Rainflow é o mais popular e, provavelmente, o que apresenta melhores resultados [Stephens et al., 2001].

De posse do resultado do número de ciclos de tensão ou deformação média e alternada, e com o uso do critério do acúmulo de dano, pode-se determinar o dano para um determinado período de avaliação do carregamento aleatório e, conseqüentemente, a vida em fadiga da estrutura. Esta é definida através do número de repetições do bloco avaliado, até que o dano total acumulado atinja o valor definido como critério, adotado comumente como sendo igual à unidade, conforme citado no item 4.2.1.

4.2.4 Análise no Domínio da Frequência

Uma análise no domínio da frequência pode ser utilizada de modo a modelar a sollicitação aleatória de tensão como um processo aleatório e estacionário. Estes métodos espectrais utilizam uma formulação empírica ou analítica objetivando estimar e simular a função densidade de probabilidade da distribuição dos ciclos alternantes, a partir de parâmetros da resposta espectral ou PSD do componente em análise.

A Figura 4.15 (a) mostra a PSD gerada para uma curva senoidal. Observa-se um único pico centrado na frequência da respectiva onda, onde a área abaixo deste pico representa a amplitude média quadrática da mesma. A Figura 4.15 (b) mostra um processo de banda estreita ou *Narrow band*, no qual há apenas uma pequena faixa dominante de frequências presente no sinal. A Figura 4.15 (c) mostra um processo do tempo banda larga ou *Broad band*, onde há uma ampla faixa de frequências contidas no sinal. Já a Figura 4.15 (d) apresenta um processo conhecido como ruído branco ou *white noise*, onde o processo cobre toda a faixa de frequências [Bishop e Sherratt, 2000].

4.2.4.1 Solução no Domínio da Frequência - Caso Geral

Conforme citado no item 4.2.3, no domínio do tempo, há diversos métodos para a contagem de ciclos de um sinal aleatório, sendo o método de o *Rainflow*, o mais popular. Com o sinal no domínio da frequência o princípio de contagem de ciclos é mantido, porém de uma forma probabilística, baseada nas propriedades da PSD do sinal de tensão.

No domínio da frequência, uma forma adequada, sob o ponto de vista matemático, de se armazenar os ciclos de amplitude de tensão, é através da PDF dos ciclos de *rainflow*. Conforme mostrado no item 3.1.7 existem várias distribuições de probabilidades, ou PDF. Uma curva típica de PDF pode ser vista na Figura 4.16 [Bishop e Sherratt, 2000].

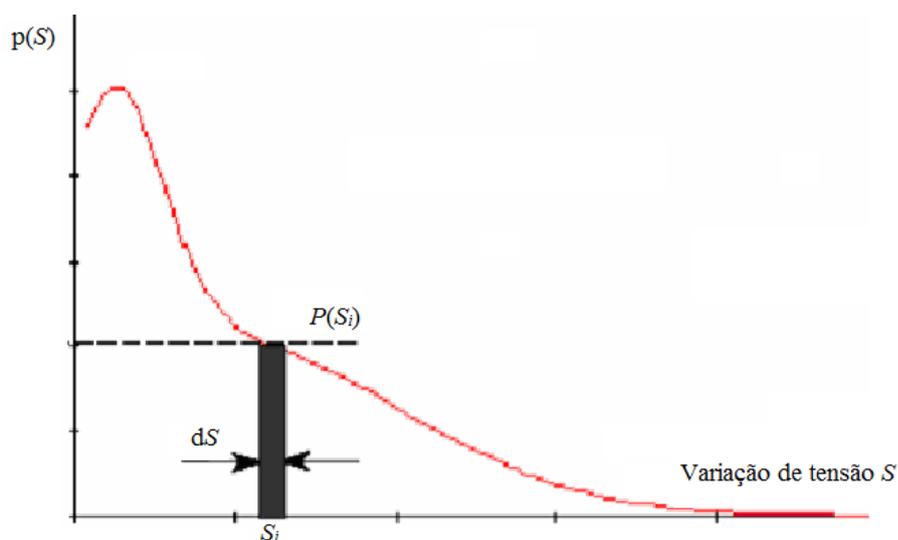


Figura 4.16 – PDF de tensão.

Fonte: Adaptado de Bishop e Sherratt, 2000.

A probabilidade de certa amplitude de tensão ocorrer é dada pela integral, conforme equação (3.27). Da mesma forma, o número de ciclos, n_i , em uma amplitude de tensão particular, é dado por, [Nieslony e Macha, 2007]:

$$n_i = n(\sigma_a) = M^+ T_0 p(\sigma_a) \quad (4.25)$$

Onde M^+ é a expectativa de picos em uma unidade de tempo $E[p]$, conforme a equação (3.24 .j). T_0 é o tempo de observação e $p(\sigma_a)$ é a probabilidade de ocorrência de picos da tensão σ_a .

Por meio da aplicação da fórmula acima, pode-se encontrar o dano segundo o critério de *Palmgreen-Miner* substituindo o número de ciclos, n_i , e com uma integral no intervalo de zero até ∞ , resultando na equação abaixo.

$$D(T_0) = \sum_{i=1}^k D_i = M^+ T_0 \int_0^{\infty} \frac{p(\sigma_a)}{N_f(\sigma_a)} d\sigma_a \quad (4.26)$$

Onde $N_f(\sigma_a)$ é o número de ciclos para a falha para a tensão σ_a .

Logo, se a vida em fadiga, T , corresponde ao tempo em segundos necessários para alcançar o dano $D(T) = 1$, a fórmula para a vida em fadiga fica:

$$T = \frac{T_0}{D(T_0)} = \frac{1}{M^+ \int_0^{\infty} \frac{p(\sigma_a)}{N_f(\sigma_a)} d\sigma_a} \quad (4.27)$$

4.2.4.2 Solução de Banda Estreita - *Narrow Band*

Em 1964, Bendat desenvolveu o primeiro modelo para estimativa de falha por fadiga no domínio da frequência através de PSD, considerando um carregamento de banda estreita, gaussiano, onde cada pico no histórico de tensão no tempo é seguido por um vale de mesma amplitude. Conforme comentado no item 3.1.7.2, se o sinal for gaussiano, como por exemplo em um sinal de banda estreita, a amplitude de tensões segue a distribuição de Rayleigh. [Bishop e Sherratt, 2000; Nieslony e Macha, 2007].

Utilizando a distribuição de *Rayleigh* para a função densidade de probabilidade de tensões, e sendo m_0 o primeiro momento da PSD de tensões:

$$p(\sigma_a) = \frac{\sigma_a}{m_0} \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{2m_0}\right) \quad (4.28)$$

Considerando a curva de *Wöhler* para fadiga do material:

$$\sigma_a = \left(\frac{C}{N_f}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.29)$$

A expressão (4.26) fica da forma:

$$\begin{aligned} D(T_0) &= M^+ T_0 \int_0^{\infty} \frac{\frac{\sigma_a}{m_0} \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{2m_0}\right)}{C \sigma_a^{-m}} d\sigma_a \\ &= \frac{M^+ T_0}{C} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_a}{m_0} \exp\left(-\frac{\sigma_a^2}{2m_0}\right) \sigma_a^m d\sigma_a \end{aligned} \quad (4.30)$$

Conforme Nieslony e Macha (2007), após uma substituição de variáveis e utilizar a função *gamma*, conforme item 3.1.8, a equação resultante é:

$$D(T_0) = \frac{M^+ T_0}{C} (2m_0)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) \quad (4.31)$$

Utilizando o critério de *Palmgren-Miner*, a vida, em segundos, pode ser escrita como:

$$T = \frac{C}{M^+ (2m_0)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \quad (4.32)$$

Apesar de partir de uma formulação teórica, a consideração que os picos são seguidos de vale, ou que a distribuição de probabilidade da tensões de amplitude segue a equação de

Rayleigh, a equação acima pode se tornar conservativa, ao ponto que o sinal passa de banda estreita para banda larga, ou um sinal com duas frequências principais, conforme mostrado na figura abaixo. Esta é a principal limitação deste modelo, uma vez que seus resultados mostram-se confiáveis apenas para aplicações específicas. [Bishop e Sherratt, 2000].

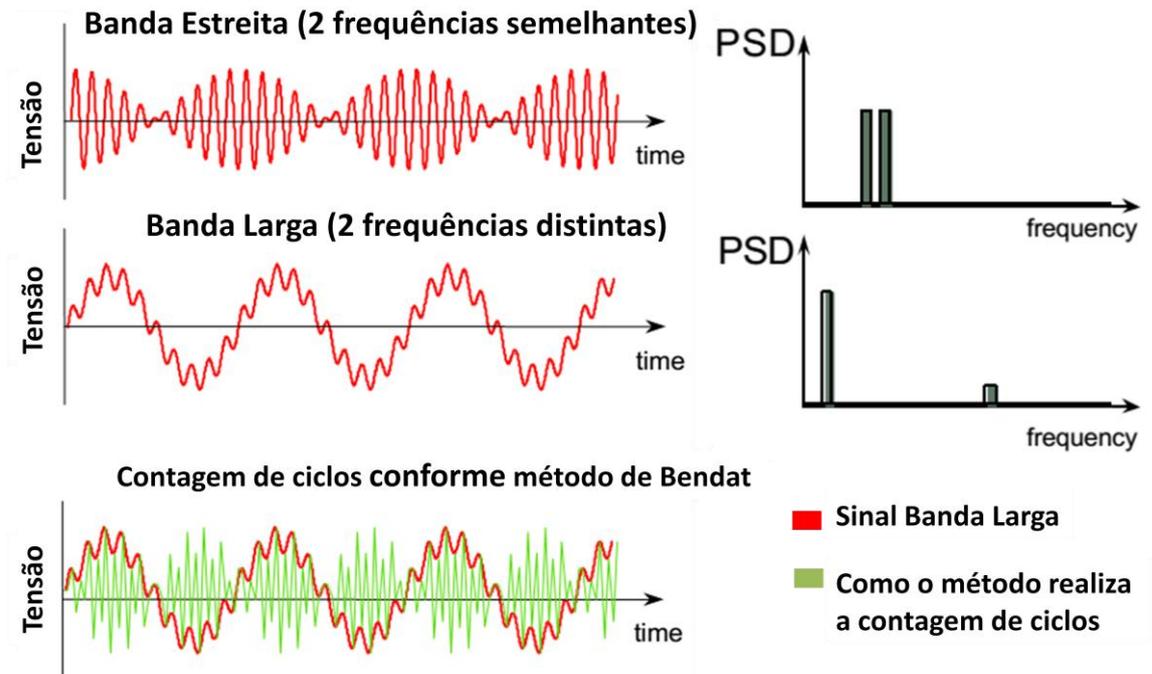


Figura 4.17 – Limitação no método de Bendat.

Adaptado de Bishop e Sherratt, 2000.

4.2.4.3 Extensão da Solução de Banda Estreita

Conforme Nieslony e Macha, 2007, uma solução para carregamentos com duas frequências dominantes é proposto por Sakai e Okamura. A solução para a estimativa de durabilidade baseia-se na soma do dano causado por cada frequência angular dominante.

$$T = \frac{2^{1-\frac{m}{2}} \pi C}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \left(\omega_1 \frac{m_{0,1}^{1-m}}{m_{2,1}} + \omega_2 \frac{m_{0,2}^{1-m}}{m_{2,2}} \right) \quad (4.33)$$

Onde $m_{0,1}$, $m_{2,1}$ são os respectivos primeiro e terceiro momentos da frequência angular dominante ω_1 ; e $m_{0,2}$, $m_{2,2}$ são os respectivos primeiro e terceiro momentos da frequência angular dominante ω_2 ;

Sakai e Okamura indicam que o modelo se aplica somente quando as frequências ω_1 e ω_2 , são suficientemente distantes, de modo que não ocorra o batimento (mostrado no sinal de banda estreita da Figura 4.17).

4.2.4.4 Solução de Dirlik

Conforme comentado no item 3.1.7.3; Dirlik (1985) sugeriu uma distribuição de probabilidade que é função apenas dos momentos espectrais até m_4 [Halfpenny, 1999].

A partir da PDF de Dirlik, é possível encontrar o dano ou a vida, aplicando a PDF nas equações (4.26) e (4.27), respectivamente.

O modelo de Dirlik mostra-se superior, em termos de precisão de resultados, quando comparado aos métodos anteriores [Halfpenny, 1999; Nieslony e Macha, 2007; Bishop e Sherratt, 2000].

Apesar de ser superior aos outros modelos, a solução fechada de Dirlik só passou a ser utilizada em larga escala após verificação teórica realizada por Bishop, em 1988. O modelo desenvolvido por Bishop é consideravelmente mais "caro" computacionalmente e seus resultados são pouco superiores ao modelo de Dirlik e, por este motivo, raramente é utilizado.

4.2.4.5 Tensões Médias no Domínio da Frequência

As soluções apresentadas no domínio da frequência são formuladas a partir do conhecimento de que as tensões oscilam em torno de uma tensão nula. Porém, para valores significativos de tensões médias, estas possuem um papel determinante na estimativa de vida em fadiga de estruturas e componentes mecânicos.

Em diversos artigos e trabalhos são utilizados o critério de *Goodman* ou *Gerber* sobrepondo o tensor de tensões de amplitude com o tensor de tensões médias, conforme equações do item 4.1.5, [Hougaz, 2005; Cesário, 2012; Rahman et al, 2008]

Neste caso, o tensor de tensões obtido em uma análise estática é utilizado para deslocar as tensões médias de cada ciclo previsto de acordo com o modelo de estimativa de vida em fadiga no domínio da frequência que se está utilizando.

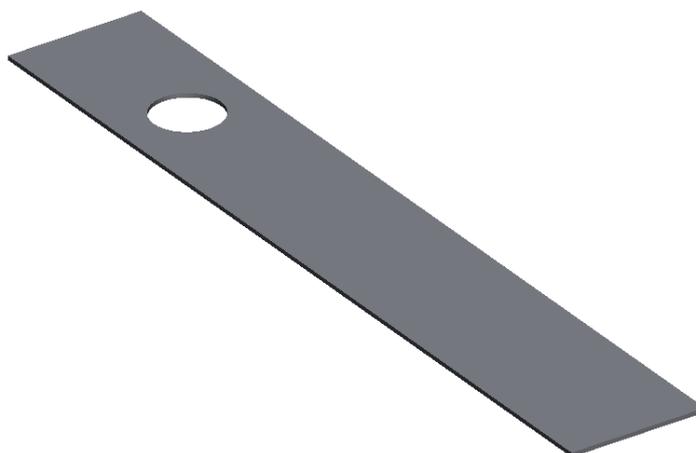
5. ESTUDO DE CASO

5.1 Generalidades

Devido à necessidade econômica e ambiental para reduzir custos e recursos, a engenharia tem desenvolvido e empregado conhecimento tanto na redução de massa dos componentes quanto no melhor conhecimento da durabilidade do componente. Na estimativa de durabilidade de qualquer componente, conhecer o tipo do carregamento, bem como a resposta do componente a este carregamento é de suma importância. Devido ao uso de computadores e seu desenvolvimento tecnológico, as soluções numéricas vem sendo empregadas em grande escala, pois é, em geral, econômica e tecnicamente mais viável do que o uso de testes experimentais. Embora a solução numérica não substitua os testes experimentais, é comum simular o comportamento do componente no virtual, para então validá-lo experimentalmente.

O uso de *softwares* comerciais possui grande parcela no crescente uso de soluções numéricas, neste caso calculando a durabilidade do componente com mínimas interações com o usuário. Porém tais soluções devem ser questionadas, pois ao tentar calcular a durabilidade com as teorias conhecidas, é possível verificar grande disparidade nos resultados.

Partindo da ideia de confrontar resultados de softwares comerciais com as teorias citadas anteriormente neste trabalho, utilizou-se uma geometria simples para comparação de resultados analíticos e numéricos de estimativas de durabilidade. O objeto de estudo considerado foi a viga com um furo como concentrador de tensões, conforme mostrado na Figura 5.1 e com maior detalhe no Apêndice A.



0

Figura 5.1 – Geometria de estudo.

Somente para fins de estudo, o material considerado é aço estrutural, cuja propriedades seguem na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Propriedades do material

Propriedade	Valor	Unidade
Densidade	7850	Kg/m ³
Módulo de Elasticidade	200	GPa
Coefficiente de Poisson	0,3	-
Tensão Última de Engenharia	540	MPa

A Figura 5.2 apresenta o fluxo necessário para o cálculo de estimativa de dano. Serão realizadas comparações entre os danos calculados com o nCode® e as rotinas de cálculo geradas no Matlab®.

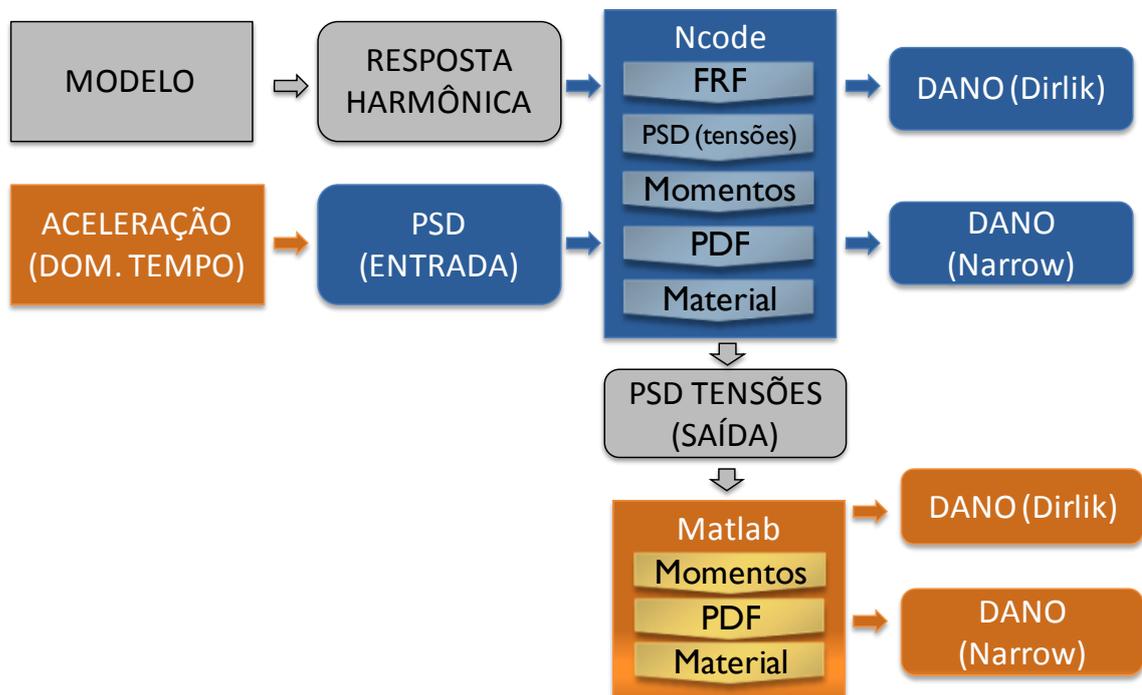


Figura 5.2 – Fluxograma do estudo.

O software utilizado, nCode®, que se encontra associado ao Ansys®, fornece um ambiente gráfico orientado para o processo através da criação de um fluxo de trabalho de análise por *glyphs* (blocos) , a fim de realizar cálculos após a análise de elementos finitos

(FEA), dentre elas análises dinâmicas e de estimativa de vida. O software possibilita a entrada de dados experimentais e possibilita dados de saída, Figura 5.3.

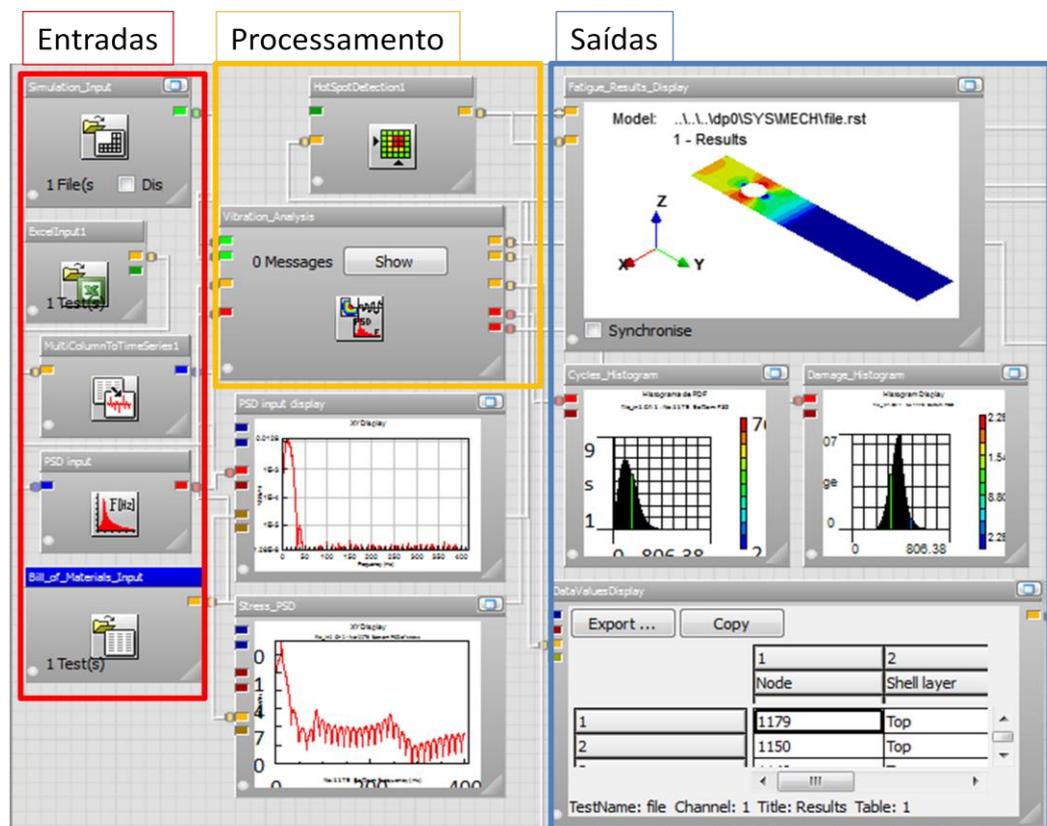


Figura 5.3 – Tela do nCode®.

5.2 Aproximações Analíticas

Utilizando a teoria de vigas de Euler, com o concentrador de tensão [Shigley, 2008], aplicou-se um momento de 10 N.mm na extremidade da viga em balanço e obteve-se a tensão na lateral do furo de 1.439 MPa. Esta tensão será utilizada posteriormente como comparação do refino de malha necessário.

Analiticamente, é possível calcular as frequências naturais de uma viga de Euler, utilizando a rigidez e massa da mesma, conforme Figura 3.10.

5.3 Simulações Numéricas

Embora pesquisado na década de 1820 o método de elementos finitos (*Finite Element Method-FEM*) tem sido empregado em grande escala para solucionar equações diferenciais parciais nos últimos anos, devido ao uso de computadores e ao constante desenvolvimento tecnológico, que torna viável o cálculo de equações de matrizes com milhões de graus de liberdade.

5.3.1 Generalidades

Utilizando o método de elementos finitos no *software Ansys®*, as simulações numéricas fornecem a FRF (Função Resposta em Frequência) da estrutura, obtida por meio de uma análise harmônica.

5.3.2 Geração do Modelo de Elementos Finitos

Devido as características da geometria e do carregamento, utilizou-se elementos de placa lineares (*Ansys-Shell181*). Foram construídas diversas malhas no componente, a fim de verificar a convergência do refino da malha. É aplicado um momento na aresta da extremidade da viga, e restritos os graus de liberdade (GDL) na base, conforme Figura 5.6. Utilizou-se uma aproximação com a solução analítica de vigas, $\sigma = \frac{My}{I}$, para verificar o resultado, acrescido do fator concentrador de tensões mostrado na Figura 5.7. A Figura 5.4 mostra a relação do número de nós com a tensão no ponto de interesse. É possível observar uma grande diferença entre o terceiro e quarto ponto, essa diferença ocorre devido ao mapeamento da malha, que no quarto ponto foi direcionada no sentido radial ao furo. A Figura 5.5 mostra a malha final, utilizada para os estudos.

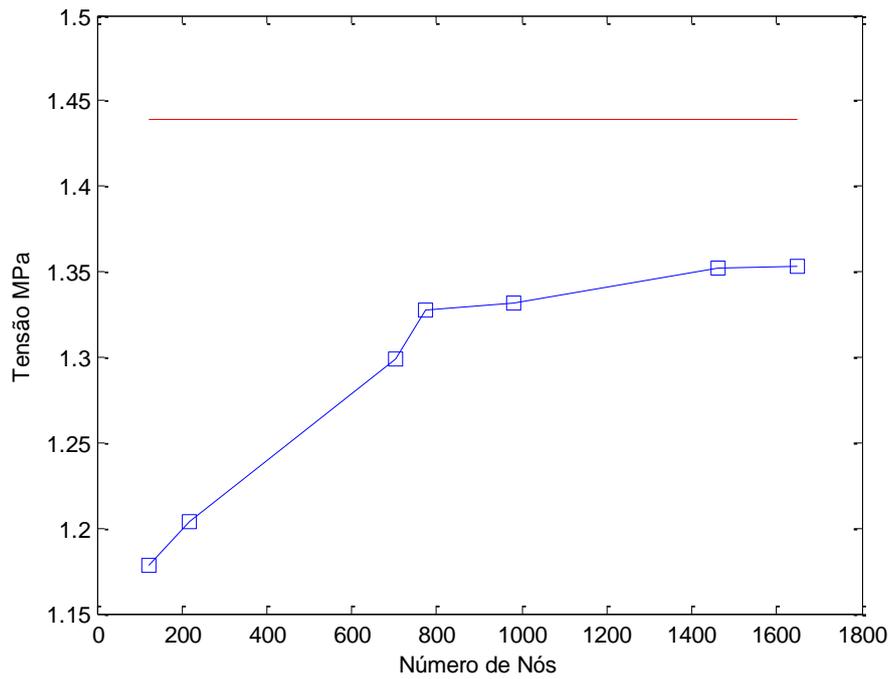


Figura 5.4 – Convergência da tensão no ponto de interesse. A linha vermelha mostra a resposta analítica e a linha azul demarcada mostra os resultados numéricos.

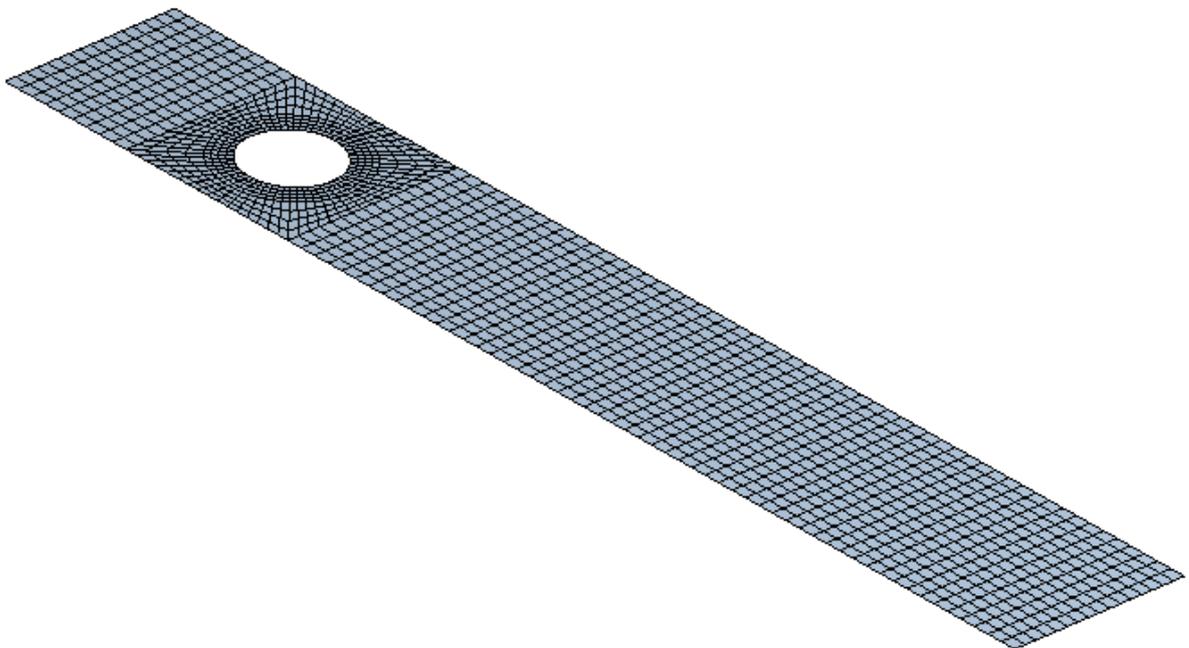


Figura 5.5 – Malha final adotada.

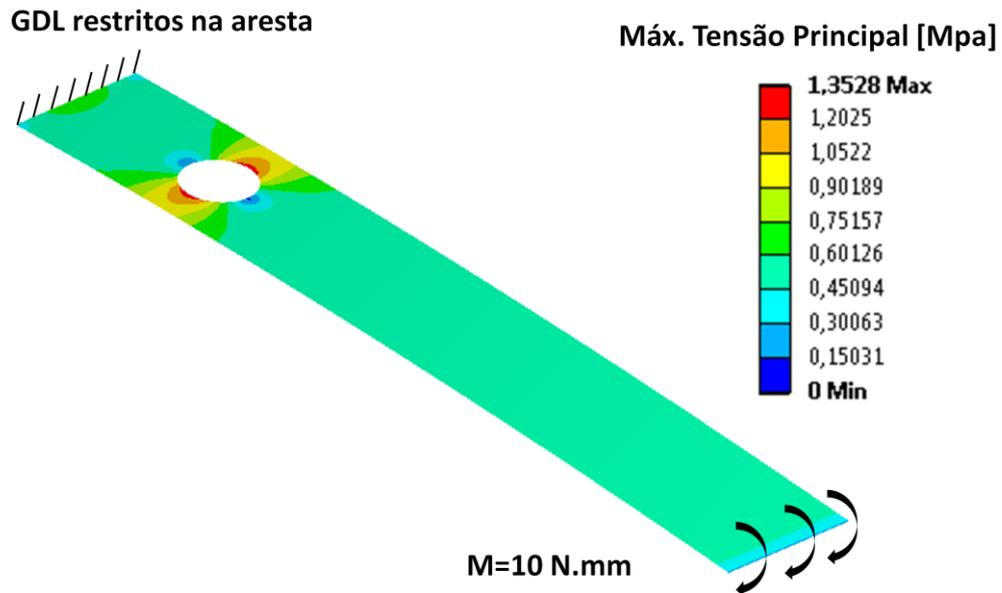


Figura 5.6 – Carregamento para verificar convergência da malha.

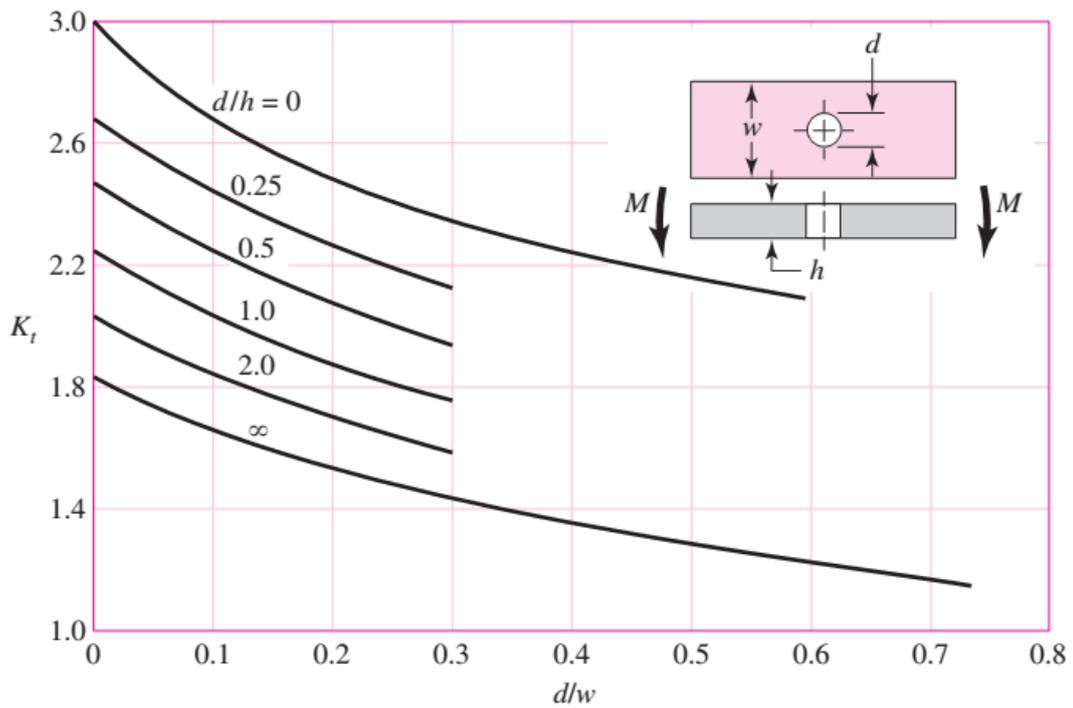


Figura 5.7 – Coeficiente de concentrador de tensões.

5.3.3 Análise Modal

A análise modal determina as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura. Uma vez que a análise de resposta em frequência utiliza-se do método de

superposição modal, o conhecimento dos modos de vibração e das suas respectivas frequências torna-se parte fundamental deste trabalho.

Como condição de contorno, foram restritos os graus de liberdade (GDL) da aresta que representa a base, tal como realizado na análise de convergência de malha.

A convergência da malha pode também ser avaliada pela estabilização dos modos de vibração do componente. A Figura 5.8 mostra a relação do número de nós com as frequências naturais do componente, onde a linha azul representa os resultados numéricos do modelo. Apesar das linhas contínuas vermelhas representarem a resposta analítica para uma viga sem o furo, com uma diferença significativa no resultado, é importante a comparação para a avaliação dos resultados. A Tabela 5.2 mostra os primeiros modos de vibração da estrutura.

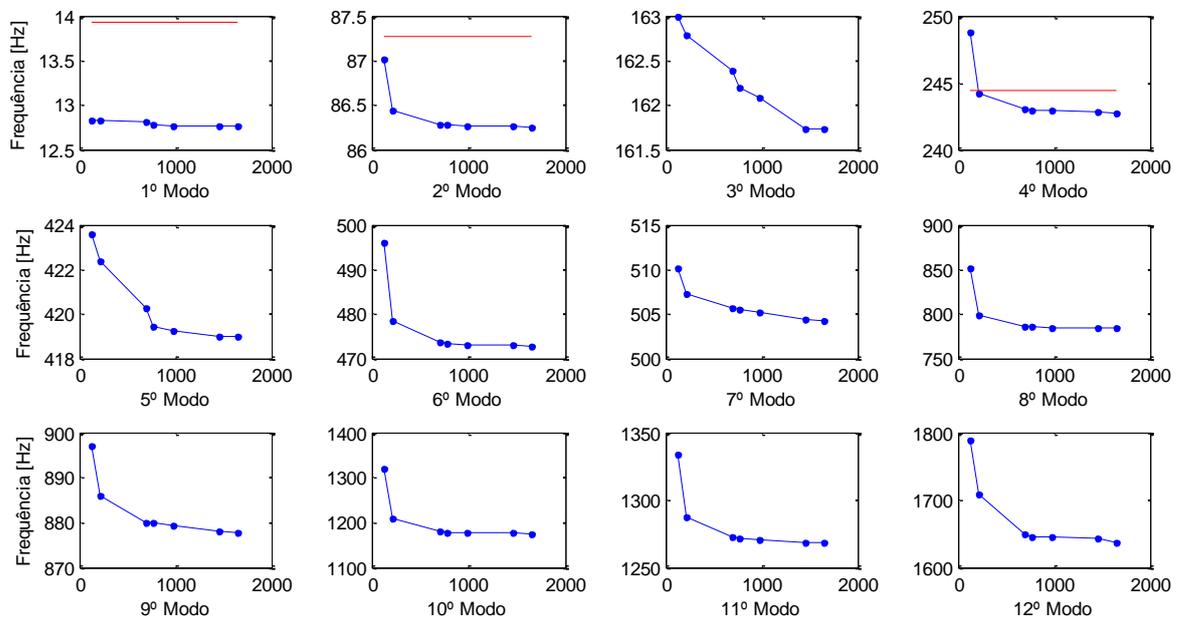
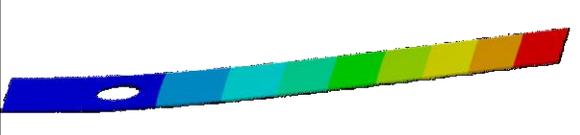
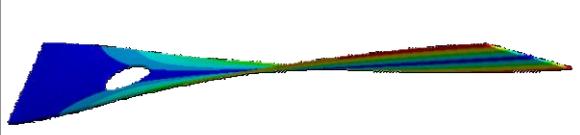
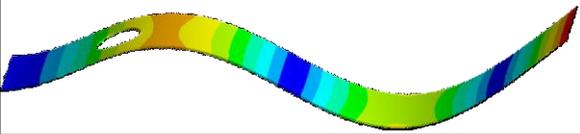
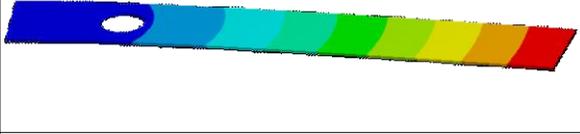
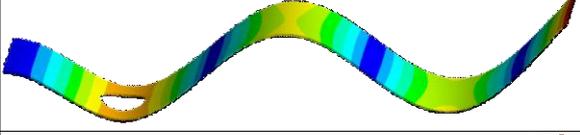
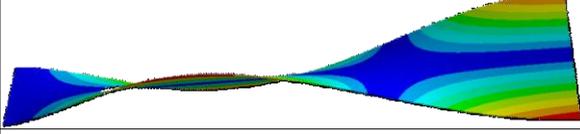
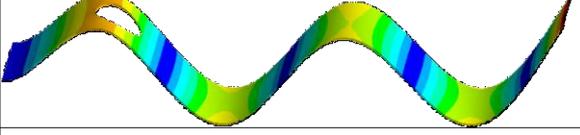
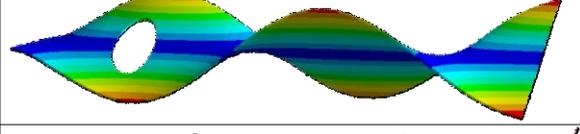
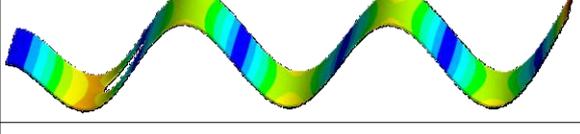
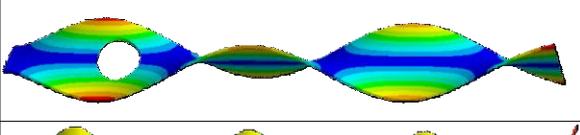
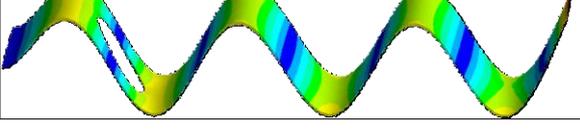


Figura 5.8 – Convergência dos modos de vibração.

Tabela 5.2 - Modos e frequências naturais de vibração da estrutura.

Modo de Vibração	Frequência [Hz]	Representação
1º	12,762	
2º	86,244	
3º	161,73	
4º	242,73	
5º	418,99	
6º	472,59	
7º	504,27	
8º	783,52	
9º	877,72	
10º	1173,5	
11º	1267,9	
12º	1637,2	

5.3.4 Função Resposta em Frequência - Função Transferência

Para a determinação da Função Resposta em Frequência (FRF) da estrutura, utilizou-se o método da superposição modal, com os modos previamente obtidos. A excitação consiste em uma aceleração de 1g aplicada em todos os pontos do componente, varrendo uma faixa de frequências de 0 até 400 Hz, correspondente à frequência de corte de *Nyquist*. A Figura 5.9 mostra o resultado da FRF de tensão normal para o nó de maior tensão, no contorno do furo do componente em estudo.

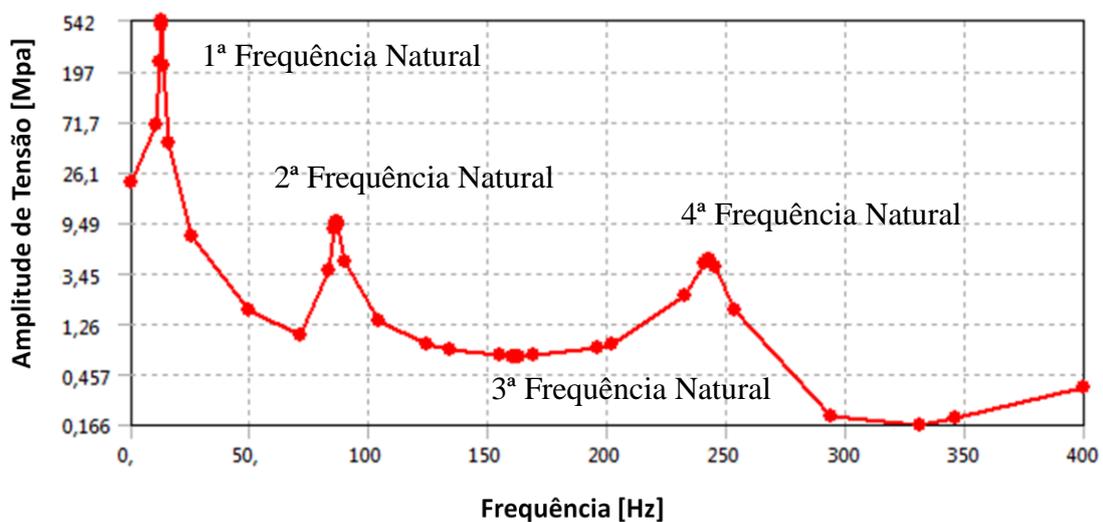


Figura 5.9 – Representação da FRF da tensão normal do ponto de maior tensão no contorno do furo.

É possível de observar os picos de tensão devido à ressonância nas frequências naturais de flexão do componente (1º, 2º e 4º modos). O modo de vibração de torção da viga (3º modo) não entra em ressonância com o carregamento vertical, portanto apesar de sua respectiva frequência natural estar na faixa de excitação, não resultam em picos de resposta. A fim de limitar o interesse do estudo, as frequências naturais acima dos 400 Hz não foram analisadas.

Também é observado que é necessário um determinado número de pontos para representar os picos de ressonância na estrutura. O *software* determina um maior número de análises nas proximidades das frequências naturais, possibilitando representar melhor o pico de tensões que ocorre nas ressonâncias, [nCode, 2011]. O número e as frequências analisadas variam conforme o amortecimento do material, para o componente foi utilizado 2% de amortecimento. A correta representação dos picos presentes na FRF é fundamental nos

cálculos do dano por fadiga. Deve-se ressaltar que, a partir do conhecimento das excitações e da FRF determinam-se as respostas da estrutura em termos de PSD de tensões e destas os momentos espectrais, que alimentam os modelos de estimativa de vida em fadiga.

5.4 Tipos de Carregamentos Utilizados

Para estudo da estimativa de vida em fadiga, serão comparados alguns tipos diferentes de carregamentos (sinais de entrada de aceleração da base). Grande parcela do erro na estimativa de dano, ou vida, vem da imprecisa geração da PSD do carregamento (conversão do carregamento no domínio do tempo para o domínio da frequência), esta etapa é de fundamental importância para o cálculo do dano. Todos os sinais foram gerados por um tempo de observação de 60 segundos, porém para facilitar sua representação é ilustrado um restrito número de pontos.

5.4.1 Banda Estreita (Baixa e Média Frequência)

O sinal de banda estreita baseia-se numa soma de senoides com pequena variação na frequência. Os sinais a seguir foram gerados numericamente para o cálculo de estimativa de vida. Foram gerados dois sinais de banda estreita em duas frequências centrais, um sinal com frequência central de 6 Hz, abaixo da primeira frequência natural, Figura 5.10 e Figura 5.11, e outro sinal com frequência central de 46 Hz, entre a primeira e a segunda frequência natural, Figura 5.12 e Figura 5.13.

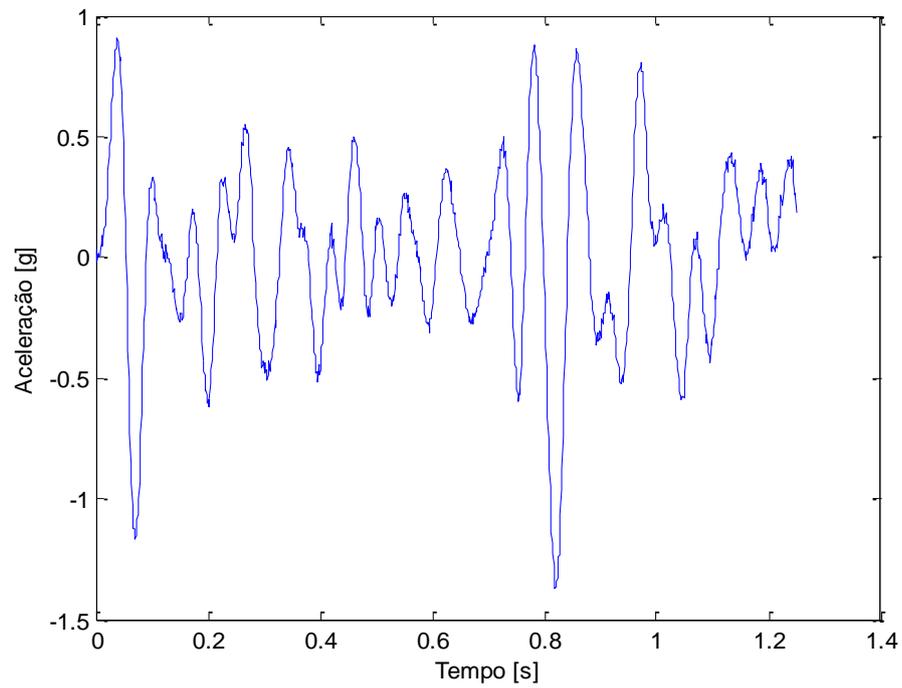


Figura 5.10 – Sinal de banda estreita gerado, em função do tempo.

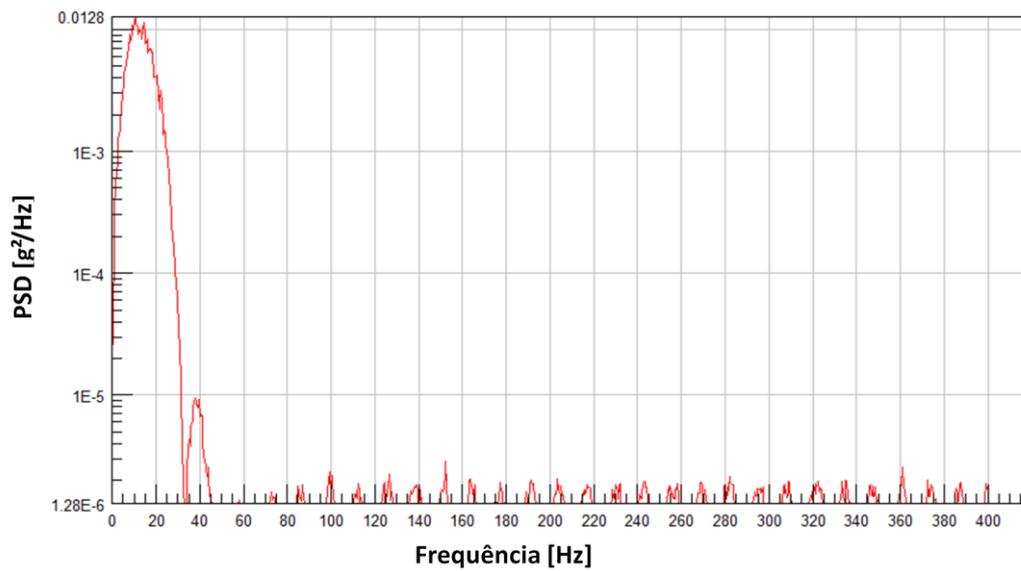


Figura 5.11 – PSD do sinal de banda estreita gerado, baixa frequência.

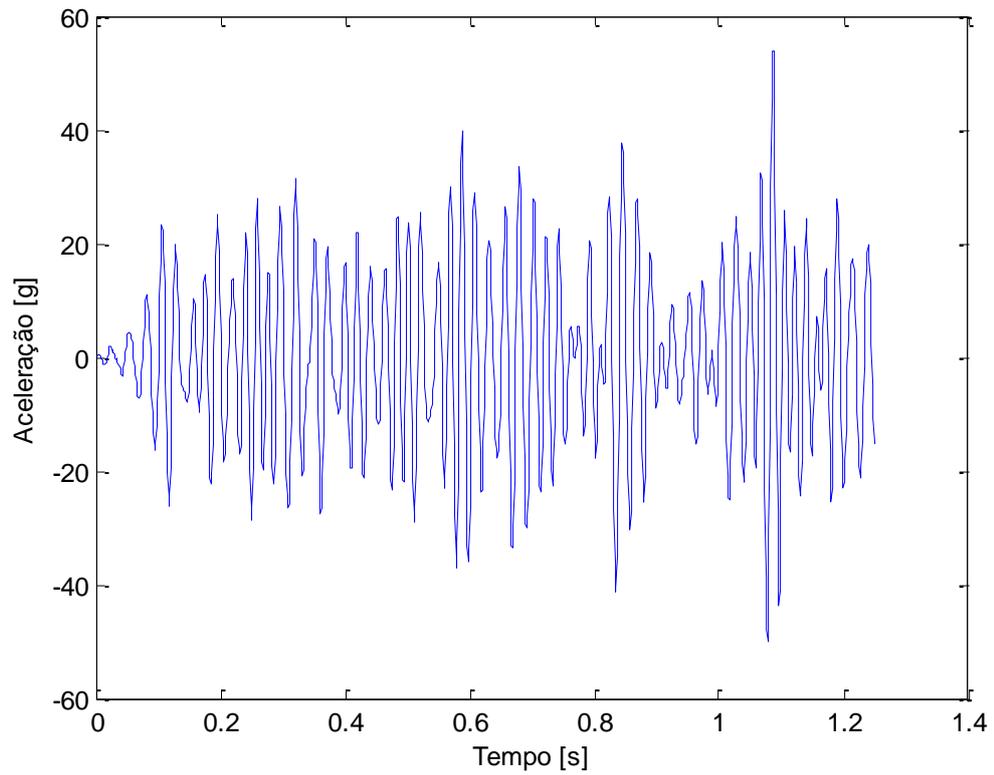


Figura 5.12 – Sinal de banda estreita média frequência gerado, em função do tempo.

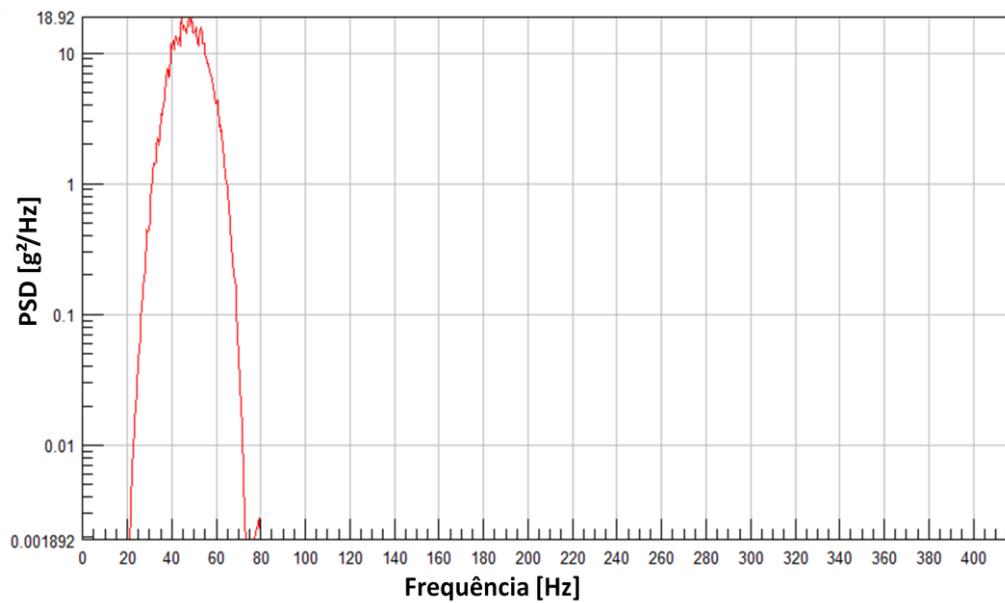


Figura 5.13 – PSD do sinal de banda estreita gerado, média frequência.

5.4.2 Ruído Branco

Ruído branco (*White noise*), é um sinal muito utilizado em análises ergódicas, possui como característica uma magnitude de PSD constante ao longo da faixa de frequência, conforme mostrado na Figura 5.14 e Figura 5.15.

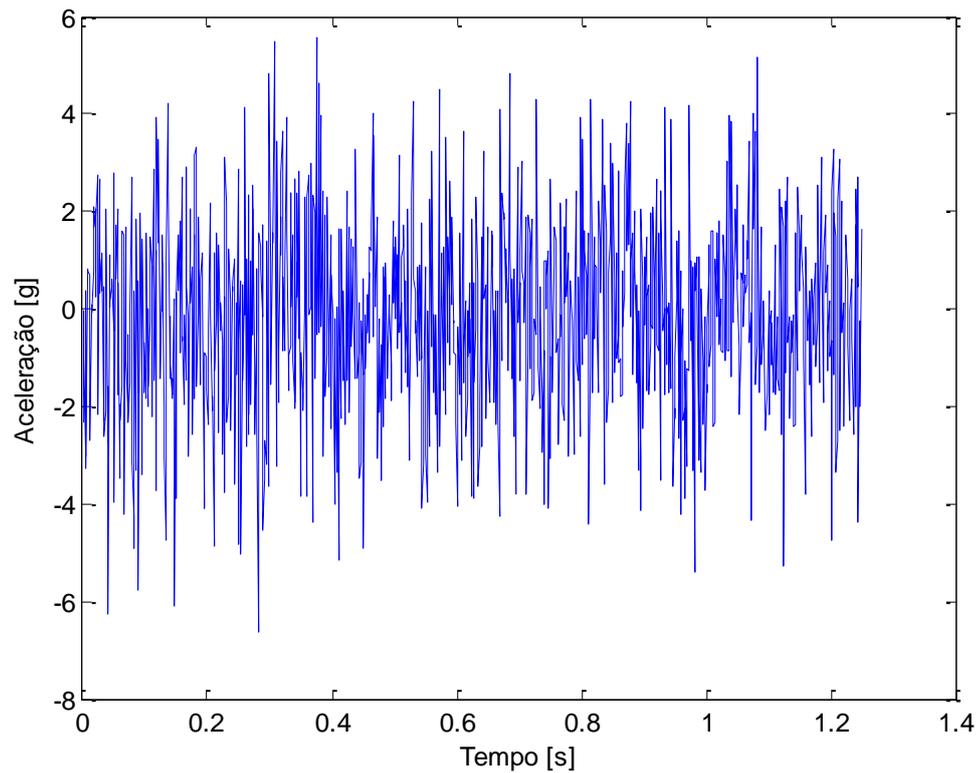


Figura 5.14 – Sinal de ruído branco gerado em função do tempo.

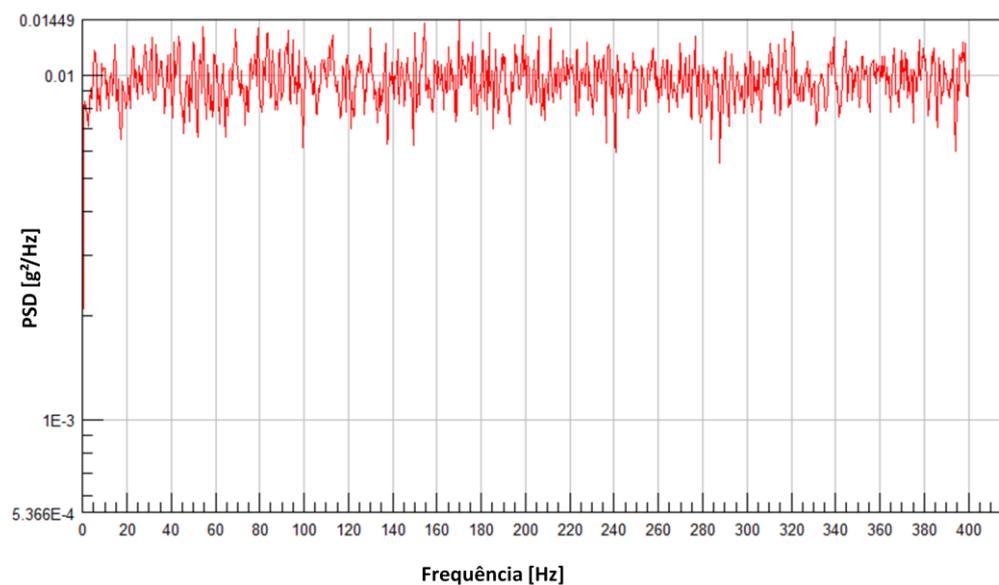


Figura 5.15 – PSD do sinal ruído branco gerado.

5.4.3 Banda Larga

Apesar do termo banda larga ser abrangente, será utilizado um sinal de banda larga baseada na soma de três sinais de banda estreita ao ruído branco, o que irá excitar todos os modos de vibração do componente. Foram utilizados sinais de banda estreita de frequências diferentes das frequências naturais do modelo (6 Hz, 46 Hz e 190 Hz), tentando simular o que ocorre numa aplicação de pista, por exemplo, onde a frequência da suspensão do veículo possui valores diferentes da frequência natural de seus componentes. Os sinais são mostrados na Figura 5.16 e na Figura 5.17.

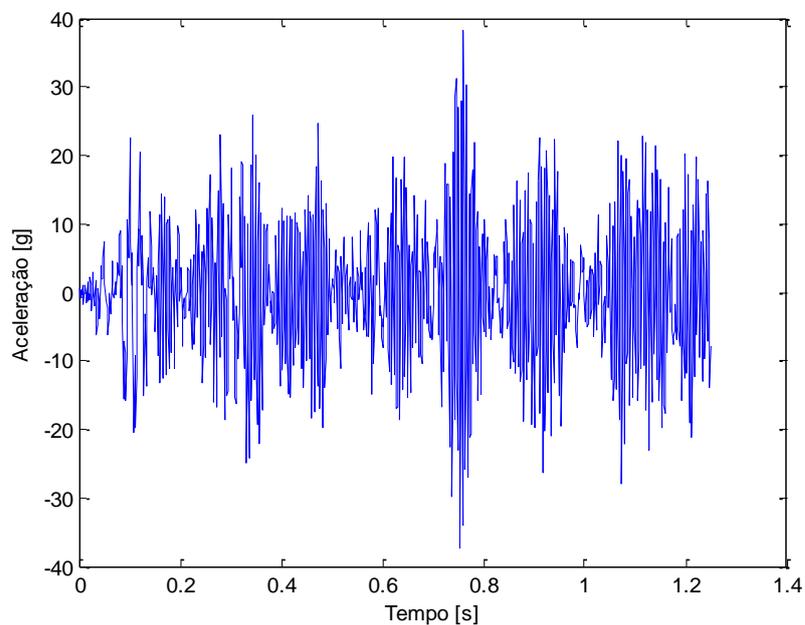


Figura 5.16 – Sinal de banda larga gerado, em função do tempo.

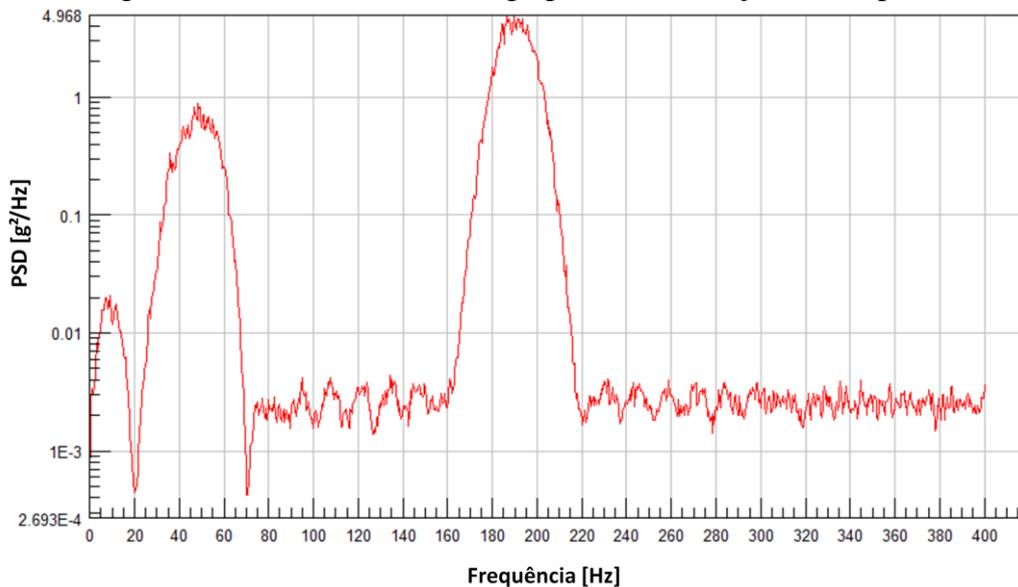


Figura 5.17 – PSD do sinal de banda larga gerado.

5.5 Estimativa da Vida em Fadiga

A partir do carregamento no domínio da frequência, descrito na seção 5.4, e da função resposta em frequência (FRF) do modelo, conforme descrito na seção 5.3.4, são calculadas as densidades espectrais de potência (PSD) para cada nó do modelo. O item 4.2.4 deste trabalho apresentou alguns métodos de estimativa de vida no domínio da frequência.

As propriedades de vida em fadiga do material foram geradas a partir da tensão última de engenharia. Conforme o item 4.1.3 pode-se estimar a curva S-N do material por meio do seu limite de resistência à tração, através de dois pontos da curva S-N, para 1000 (N_1) ciclos e para 1.000.000 (N_2) ciclos, conforme segue [nCode, 2011]:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0,9 S_U \\ S_2 &= 0,357 S_U \end{aligned} \quad (5.1)$$

E os coeficientes de inclinação, conforme Figura 4.7, podem ser determinados por meio das expressões da equação (5.2):

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{\log\left(0,9 \frac{2}{1-R}\right)}{\log N_1} \\ b_1 &= \frac{\log S_2 - \log S_1}{\log N_2 - \log N_1} \\ b_2 &= \frac{b_1}{2 + b_1} \end{aligned} \quad (5.2)$$

E a interseção da reta com o eixo da tensão.

$$SRI_1 = 2 \frac{S_2}{N_2^{b_1}} \quad (5.3)$$

A Figura 5.18 mostra como ficou definida a curva de fadiga do material. Vale ressaltar que os valores encontrados são referentes à variação de tensão ($\Delta\sigma$), que é o dobro da amplitude de tensão (σ_a).

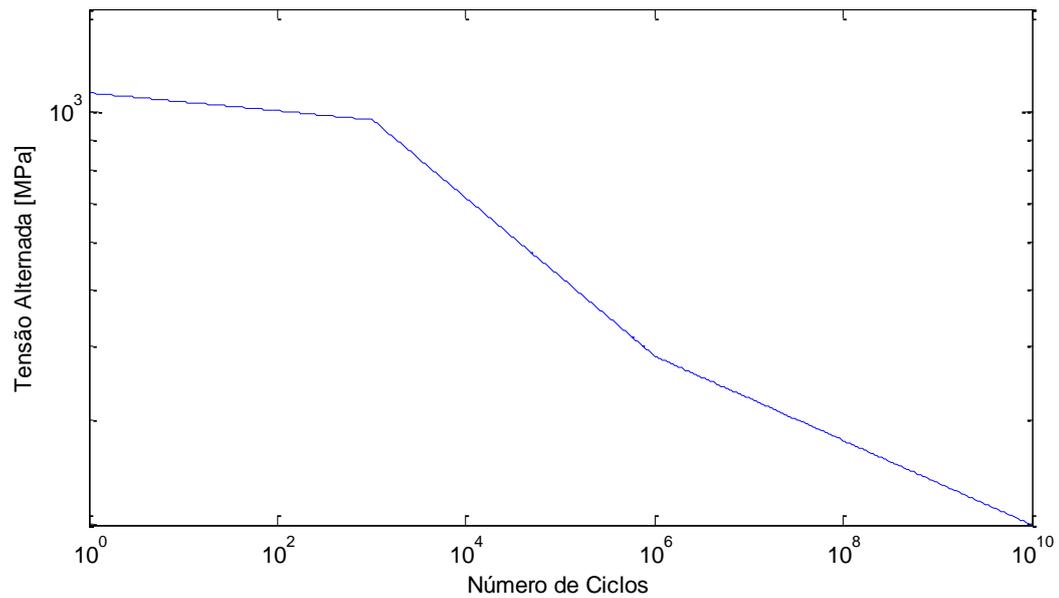


Figura 5.18 – Curva SN utilizada.

O software *nCode*[®] *Design Life* foi utilizado nas análises de vida em fadiga e os resultados obtidos serão mostrados a seguir. A partir da PSD de tensões do nó de maior dano (extraído no *nCode*), foram rodadas comparações com os scripts de cálculo do *Matlab*[®].

5.5.1 Carregamento Banda Estreita Baixa Frequência

Ao carregarmos alternativamente um componente com frequências distintas, é necessário avaliar o quanto o carregamento alternado irá ser transferido como tensão na estrutura. A variação da frequência do carregamento para próximo de alguma frequência natural, de mesmo modo, pode causar um significativo aumento de dano e conseqüentemente redução da vida. A partir da FRF do modelo e utilizando o carregamento do item 5.4.1, a análise tem como saídas a distribuição do dano para o componente e a PSD de tensão para o nó crítico, mostrado na Figura 5.19.

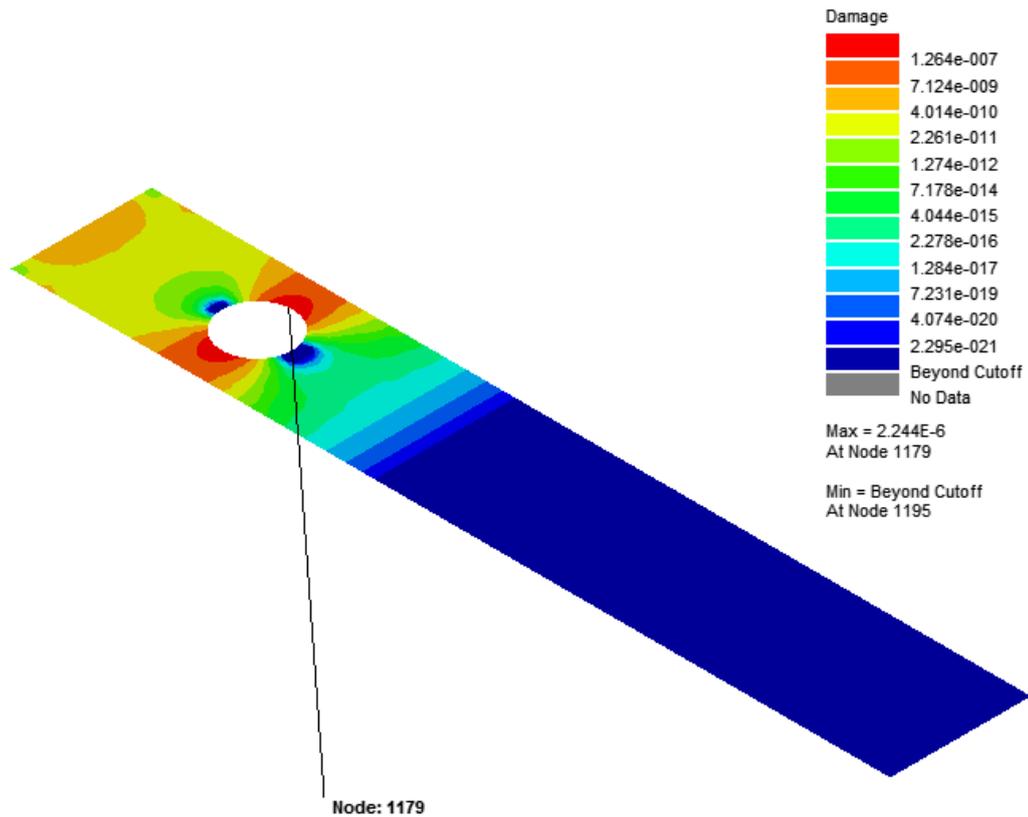


Figura 5.19 – Dano utilizando Dirlik para o carregamento de banda estreita baixa frequência.

Utilizando a solução de Dirlik, é encontrado o dano de $2,244 \times 10^{-6}$ para o nó crítico (1179). A figura Figura 5.20 mostra a densidade espectral de potência (PSD) das tensões, para este nó. É possível observar que o carregamento excita a primeira frequência natural.

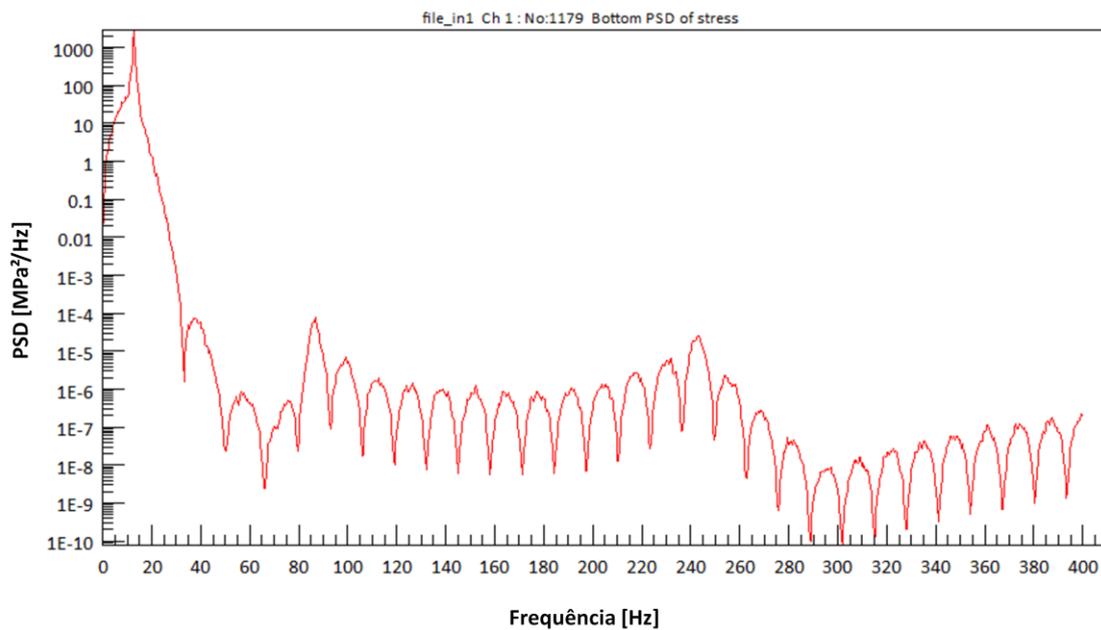


Figura 5.20 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento de banda estreita, baixa frequência.

Em componentes com baixa frequência natural, é necessária pouca energia para que esta frequência seja excitada, o que significa que uma pequena amplitude de carregamento irá causar um significativo dano no componente, mesmo que este esteja em frequência distinta da frequência natural. Na Figura 5.21 segue uma representação que o *software* disponibiliza, semelhante à PDF do sinal, porém no eixo das ordenadas (vertical) é indicado, ao invés da probabilidade, um respectivo número de ciclos no tempo de observação.

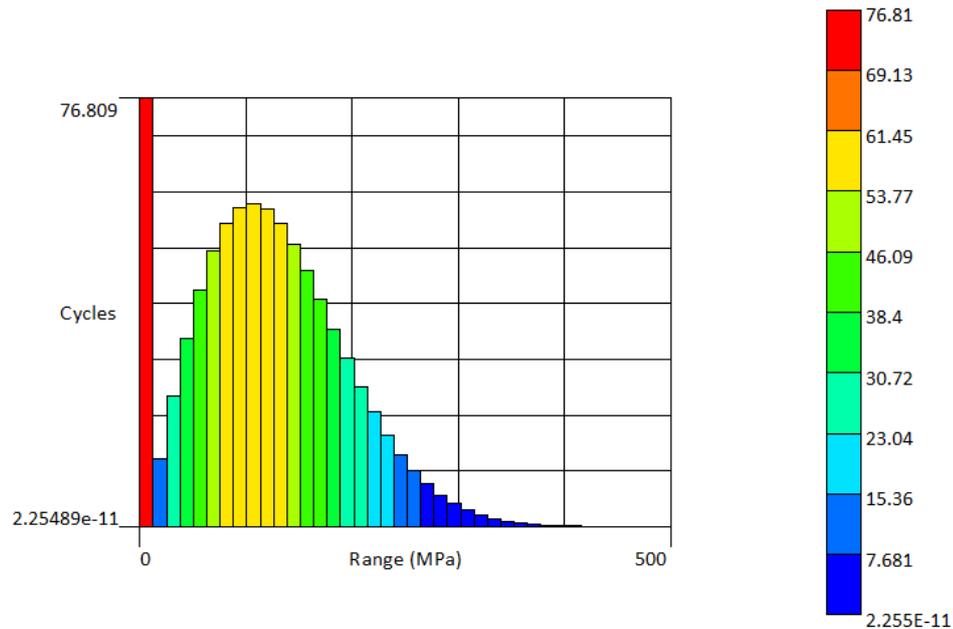


Figura 5.21 – Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de baixa frequência.

A PSD de tensões do nó crítico foi extraída da análise e exportada para o script do Matlab®, utilizando o método de Dirlik descrito no item 4.2.4.4, é calculado o dano para este nó.

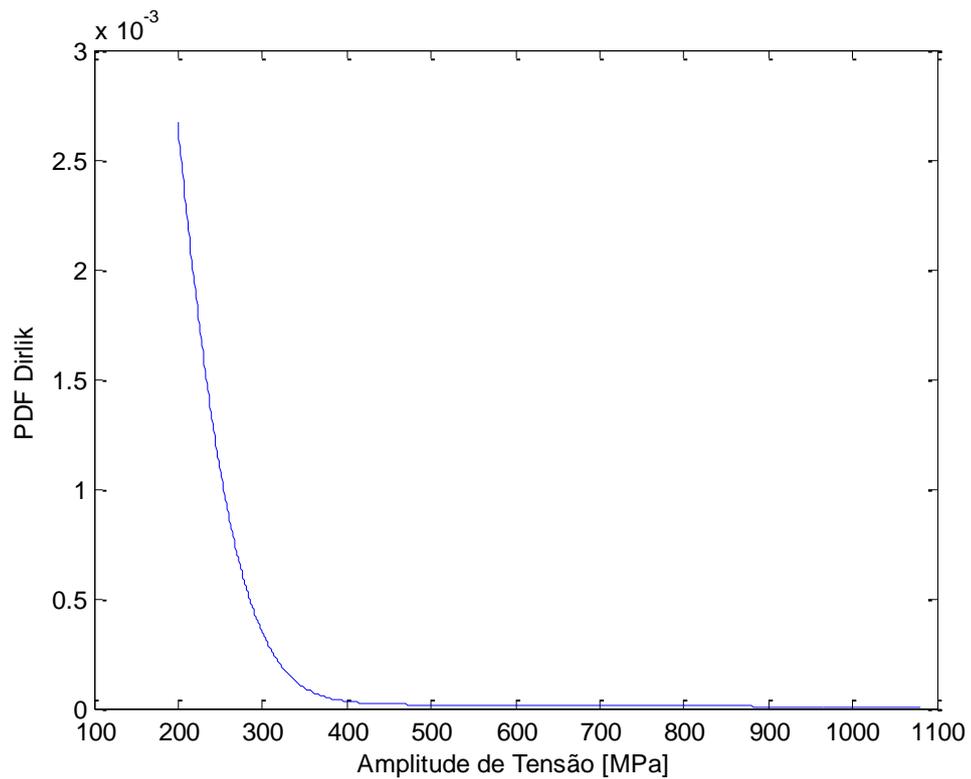


Figura 5.22 –PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de baixa frequência.

Utilizando o método de Dirlik, é encontrado um dano de $2,2023 \times 10^{-6}$, comparado ao dano encontrado na análise ($2,244 \times 10^{-6}$) o erro fica em 2%.

Comparativamente, será utilizado o método de banda estreita (*Narrow Band*), descrito no item 4.2.4.2, tanto no nCode® quanto no Matlab®.

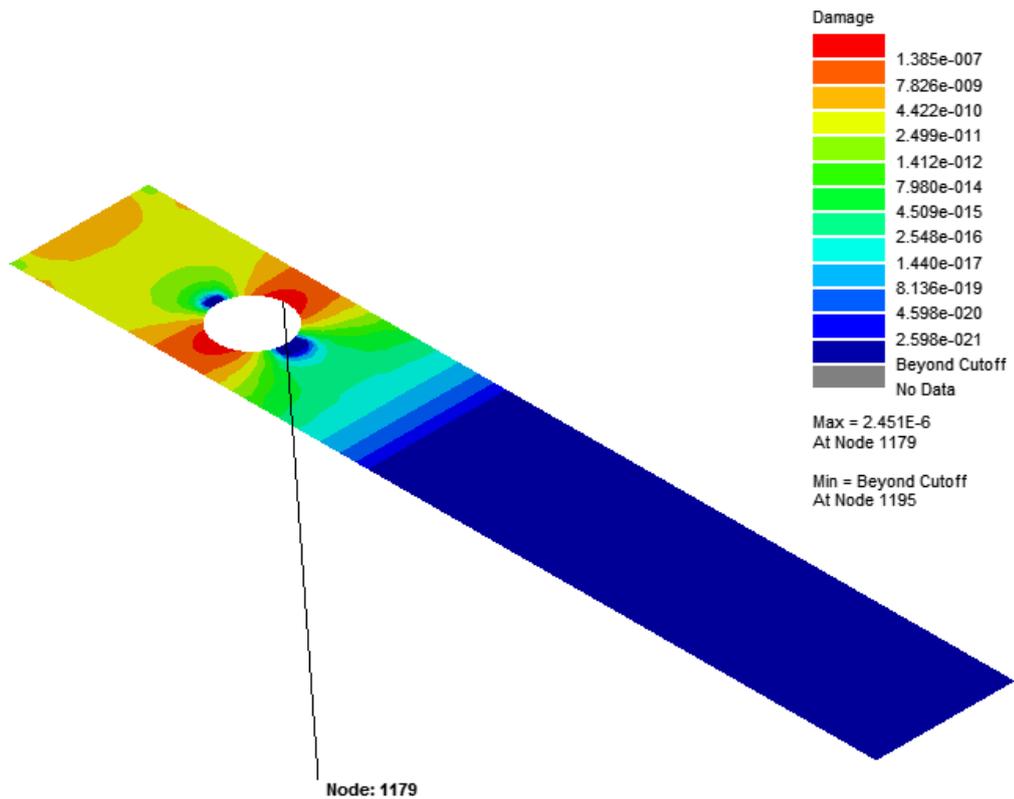


Figura 5.23 – Dano utilizando *Narrow Band* para o carregamento de banda estreita baixa frequência.

Utilizando a solução de *Narrow Band*, é encontrado o dano de $2,451 \times 10^{-6}$ para o nó crítico (1179), a figura abaixo mostra a probabilidade de distribuição das tensões de Rayleigh, utilizada no método de banda estreita, para este nó.

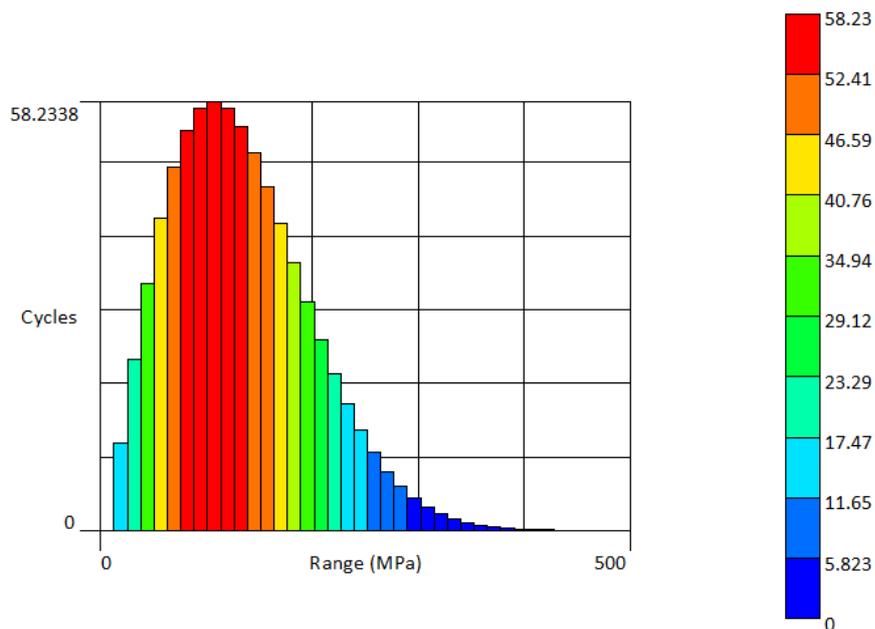


Figura 5.24 – Representação da PDF segundo modelo de Rayleigh para o carregamento banda estreita de baixa frequência.

Exportando o resultado para o Matlab®, encontra-se o dano de $2,3983 \times 10^{-6}$, que comparando com o dano encontrado na análise ($2,451 \times 10^{-6}$), o erro ficou em 2%.

5.5.2 Carregamento Banda Estreita Média Frequência

Utilizando o método de Dirlik, para o carregamento de média frequência, temos uma resposta diferente da PSD de tensões (Figura 5.25), com uma respectiva distribuição do dano (Figura 5.26).

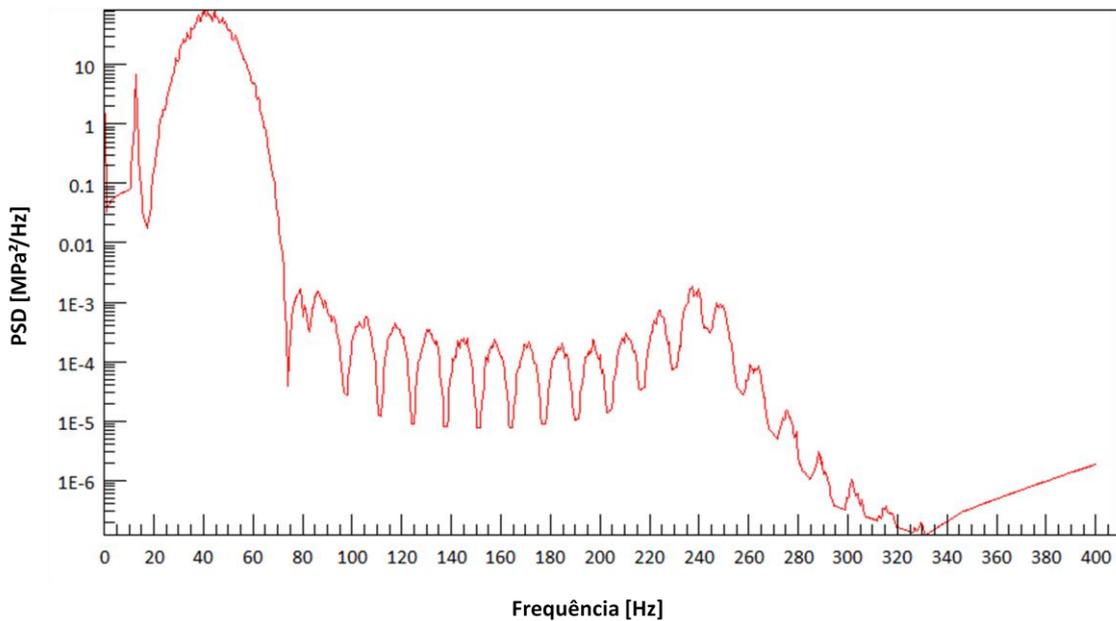


Figura 5.25 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento banda estreita média frequência.

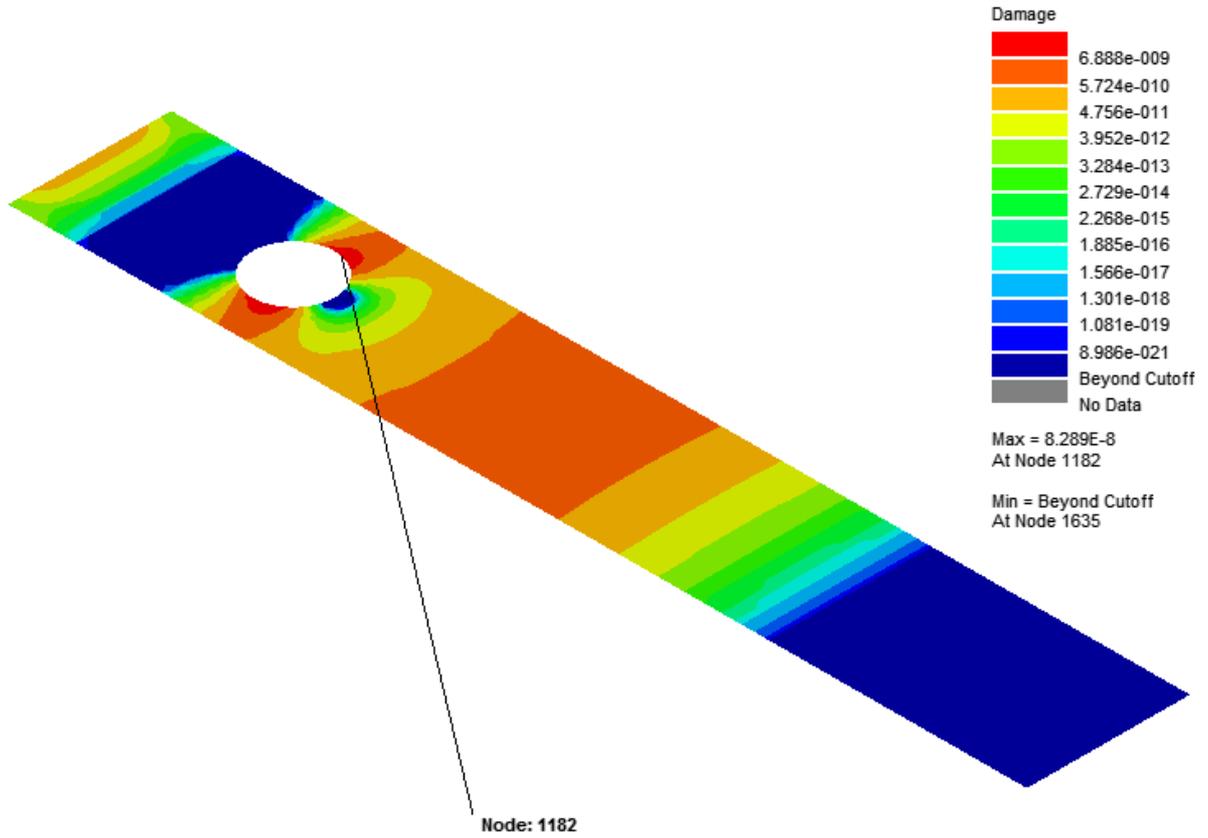


Figura 5.26 – Dano segundo Dirlik para carregamento banda estreita média frequência.

Observa-se o dano de $8,289 \times 10^{-8}$ para o nó crítico (1182). A Figura 5.27 mostra a PDF da distribuição das tensões, para este nó.

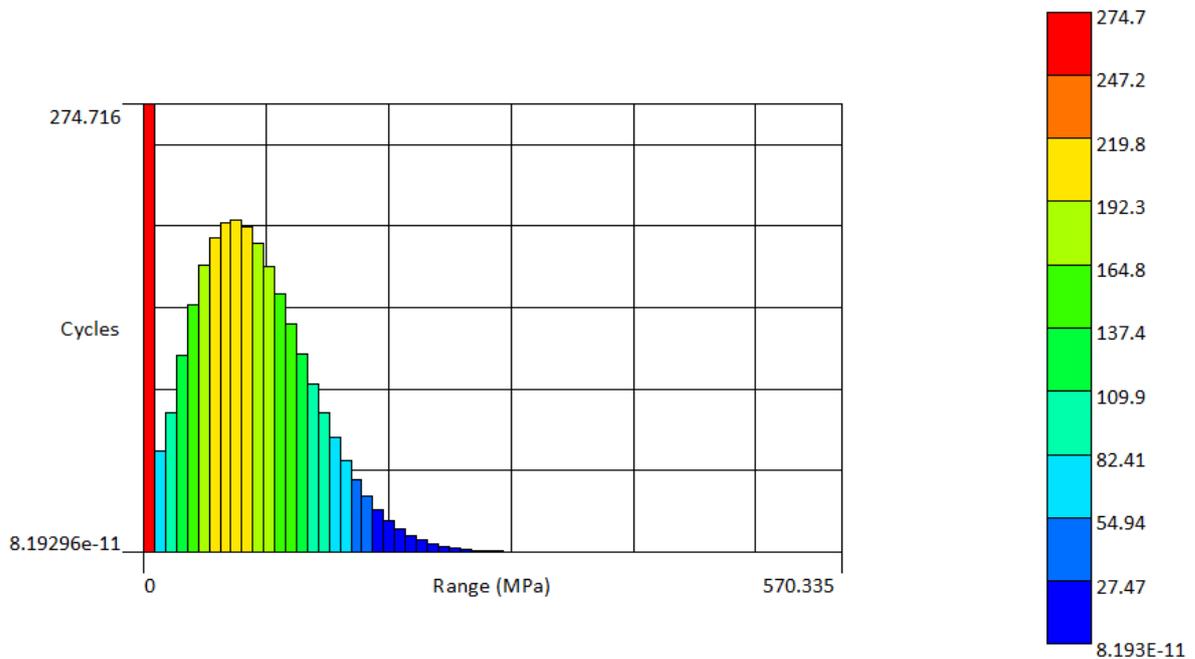


Figura 5.27 –Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de média frequência.

Exportando a PSD de tensões para o Matlab®, temos os resultados comparativos para o nó crítico.

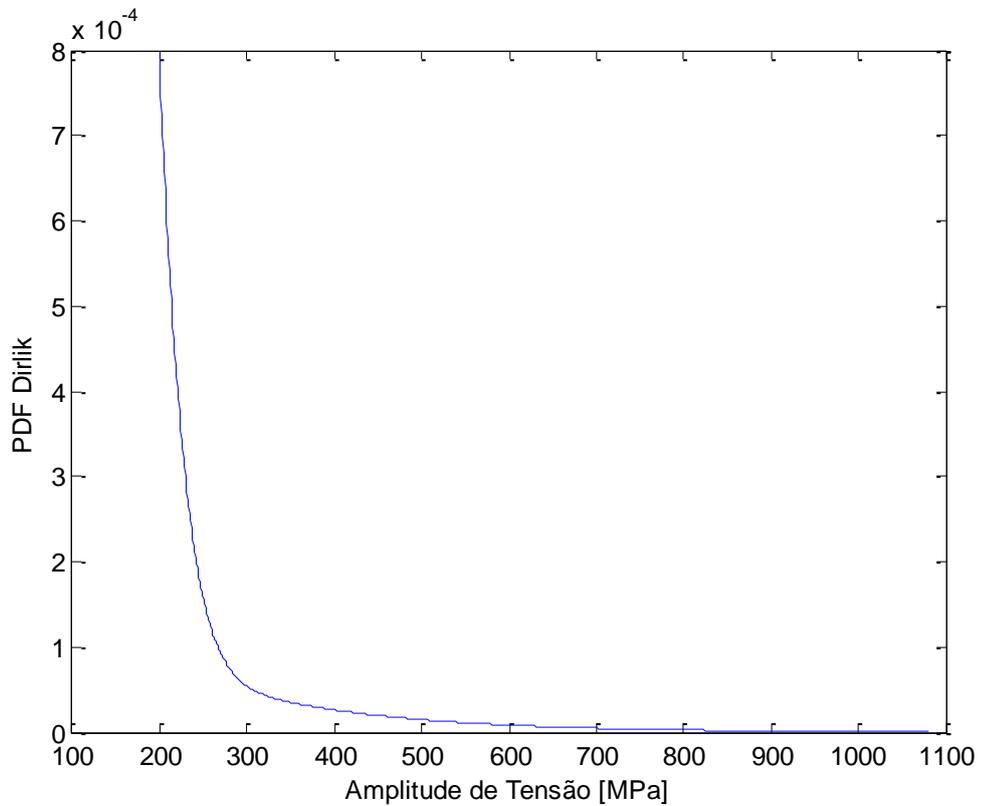


Figura 5.28 –PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda estreita de média frequência.

No script do Matlab® é encontrado um dano de $8,5947 \times 10^{-8}$, se comparado ao dano encontrado na análise do nCode® ($8,289 \times 10^{-8}$) o erro fica em 4%.

Da mesma forma como no item anterior, será utilizado o método de banda estreita (*Narrow Band*) para efeitos de comparação.

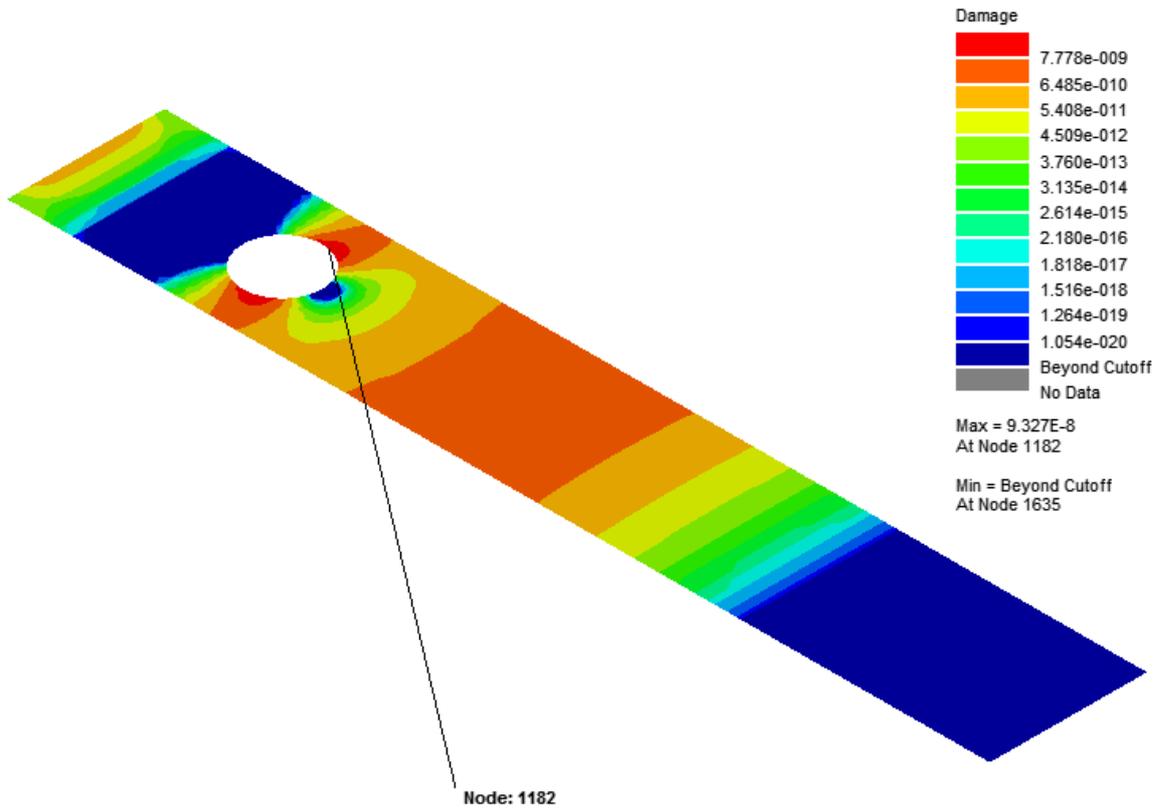


Figura 5.29 – Dano utilizando *Narrow Band* para o carregamento de banda estreita média frequência.

Utilizando a solução de *Narrow Band*, é encontrado o dano de $9,327 \times 10^{-8}$ no nCode® para o nó crítico (1182). A Figura 5.30 mostra a probabilidade de distribuição das tensões de Rayleigh, utilizada no método de banda estreita de média frequência, para este nó.

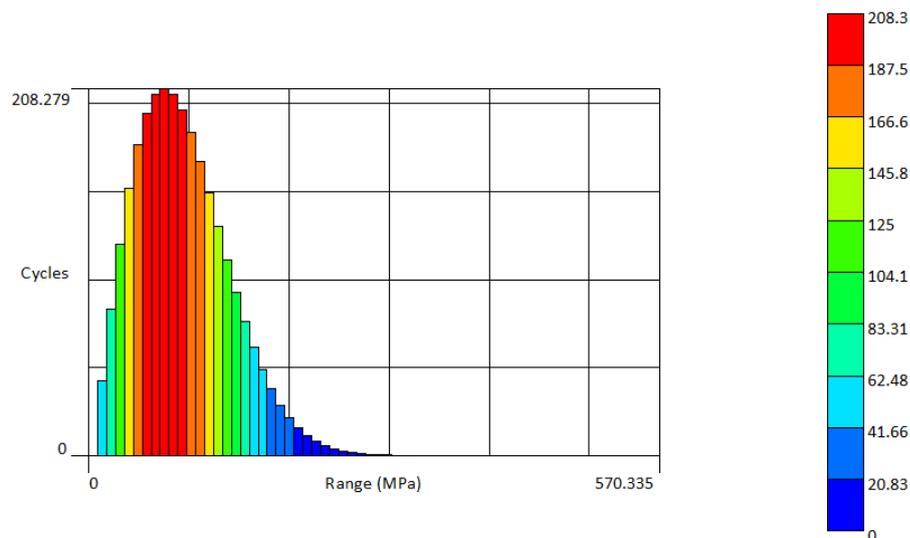


Figura 5.30 – Representação da PDF segundo modelo de Rayleigh para o carregamento banda estreita de média frequência.

Exportando o resultado para o Matlab®, encontra-se o dano de $9,6288 \times 10^{-8}$, que comparando com o dano encontrado na análise do nCode® ($9,327 \times 10^{-8}$), o erro ficou em 3%.

5.5.3 Carregamento Ruído Branco

O Ruído Branco possui uma característica diferente das bandas estreitas, pois excita todas as frequências do componente, sendo que a PSD de tensões possuirão valores mais significativos nas frequências de ressonância do modelo. Para um modelo com frequências naturais bem destacadas podem observar os picos de tensão bem definidos ao longo da frequência. Para este tipo de carregamento não o método de banda estreita (*narrow band*) pode conduzir a erros significativos, por este motivo somente foi utilizado o método de Dirlik, que fornece a seguinte PSD de tensões (Figura 5.31), com uma respectiva distribuição do dano (Figura 5.32).

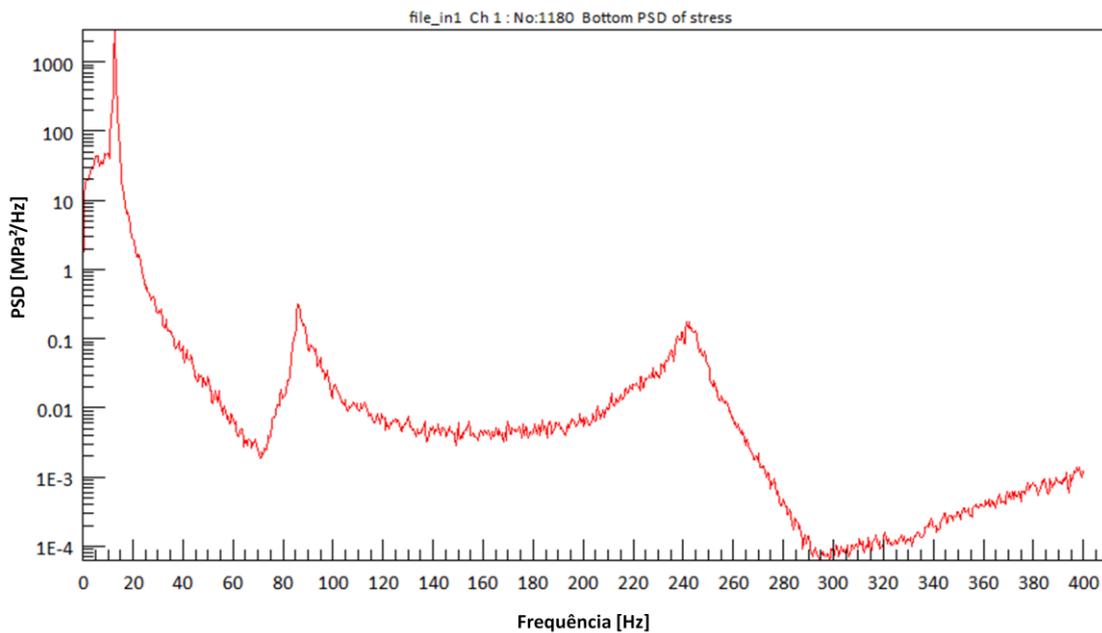


Figura 5.31 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento ruído branco.

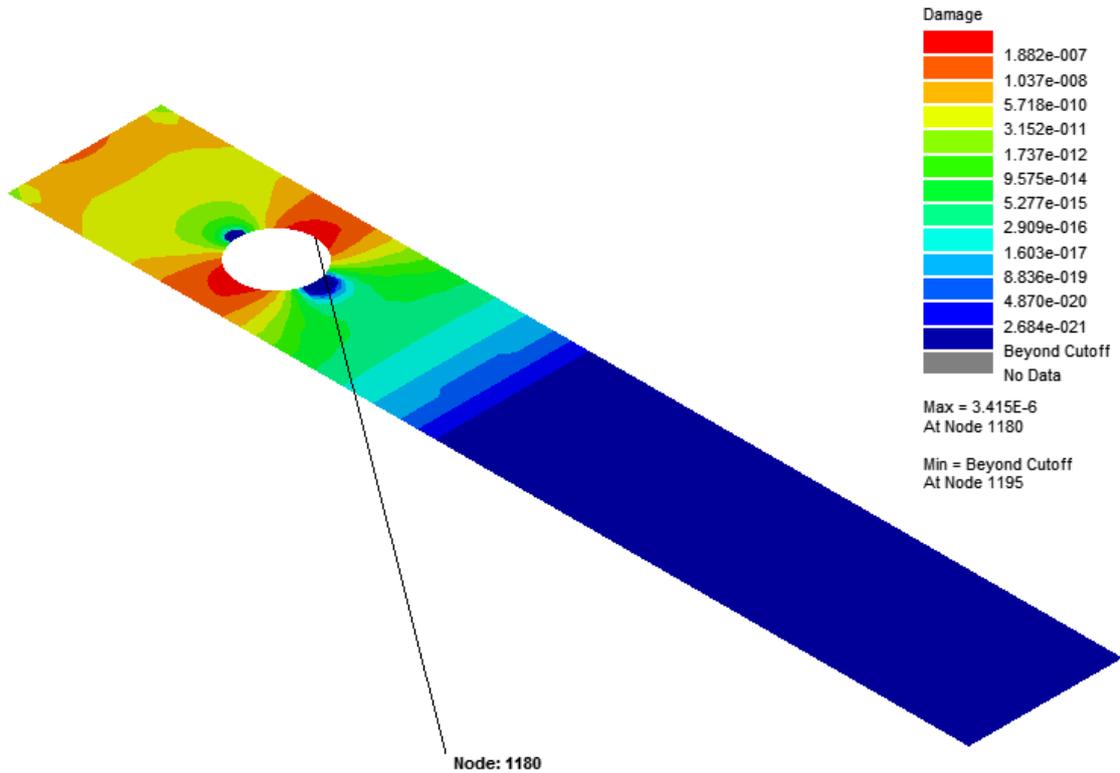


Figura 5.32 – Dano segundo Dirlik para carregamento ruído branco.

Segue o dano de $3,415 \times 10^{-6}$ usando o nCode® para o nó crítico (1180). A Figura 5.33 mostra a probabilidade de distribuição das tensões, para este nó.

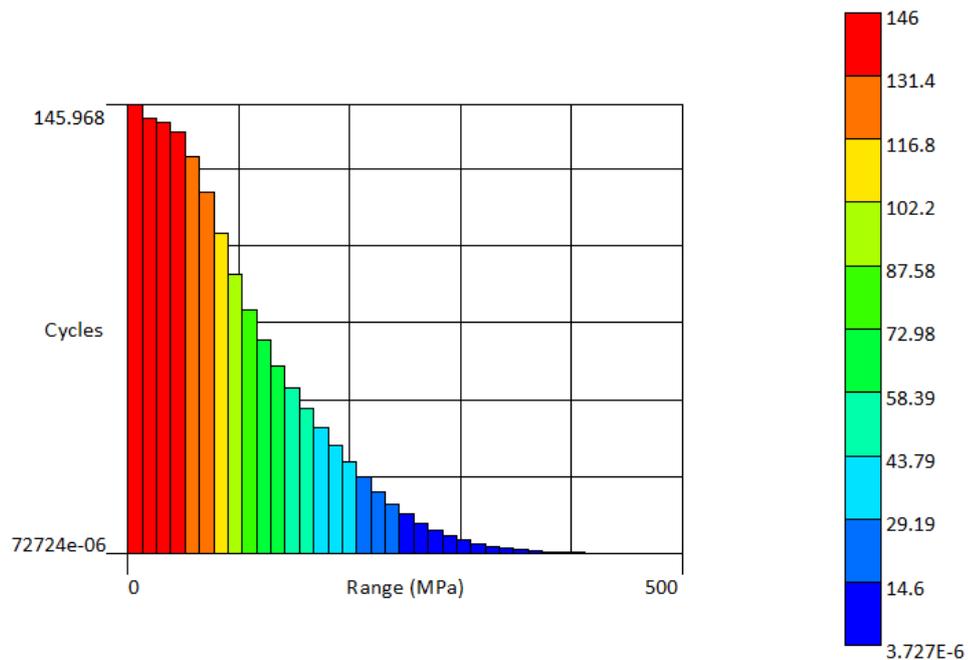


Figura 5.33 – Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento ruído branco.

Da mesma forma, exportando a PSD de tensões para o Matlab®, temos os resultados comparativos para o nó crítico.

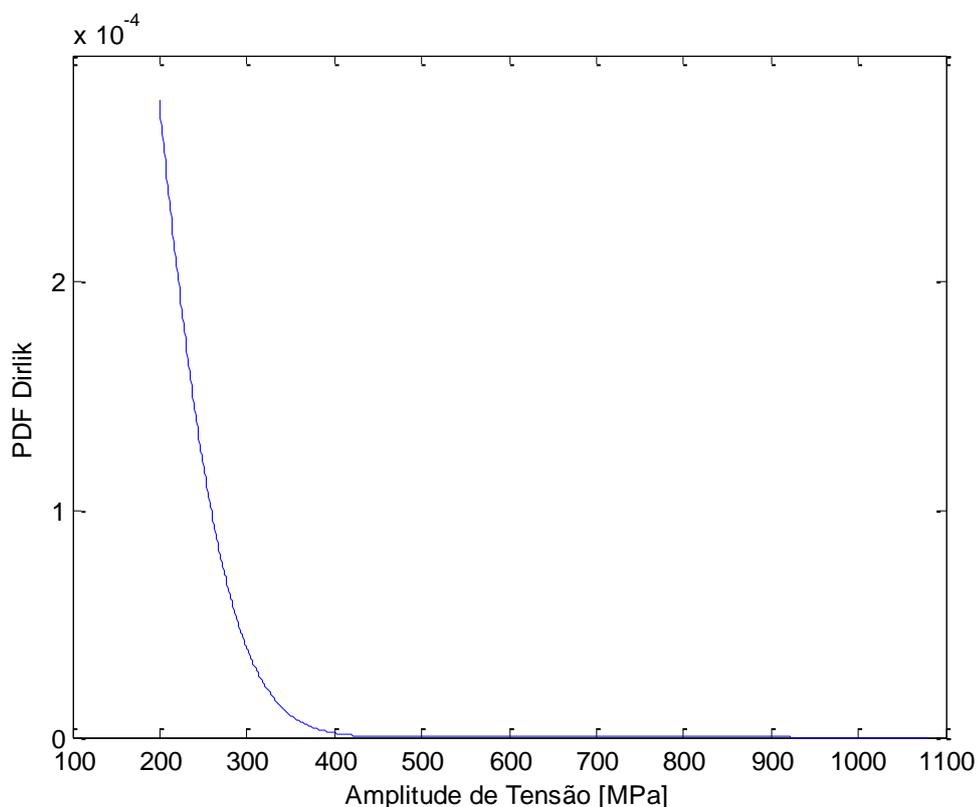


Figura 5.34 –PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento ruído branco.

É encontrado um dano de $2,9400 \times 10^{-6}$ no Matlab®, que comparado ao dano encontrado na análise do nCode® ($3,415 \times 10^{-6}$), o erro fica em 14%.

5.5.4 Carregamento Banda Larga

O carregamento banda larga pode ser encontrado em diversas aplicações na engenharia, consiste em um somatório de frequências de forma que excitam vários modos de vibração ao mesmo tempo. Aplicando um carregamento de banda larga em frequências longe das frequências naturais, de forma que as mesmas não possuam grande ressonância, é possível que uma estrutura simples resista a um carregamento relativamente elevado. Utilizando o método de Dirlik, A Figura 5.35 mostra a PSD de tensões, com uma respectiva distribuição do dano, mostrado na Figura 5.36. Da mesma forma que o ruído branco, não foi utilizado o método de banda estreita (*narrow band*)

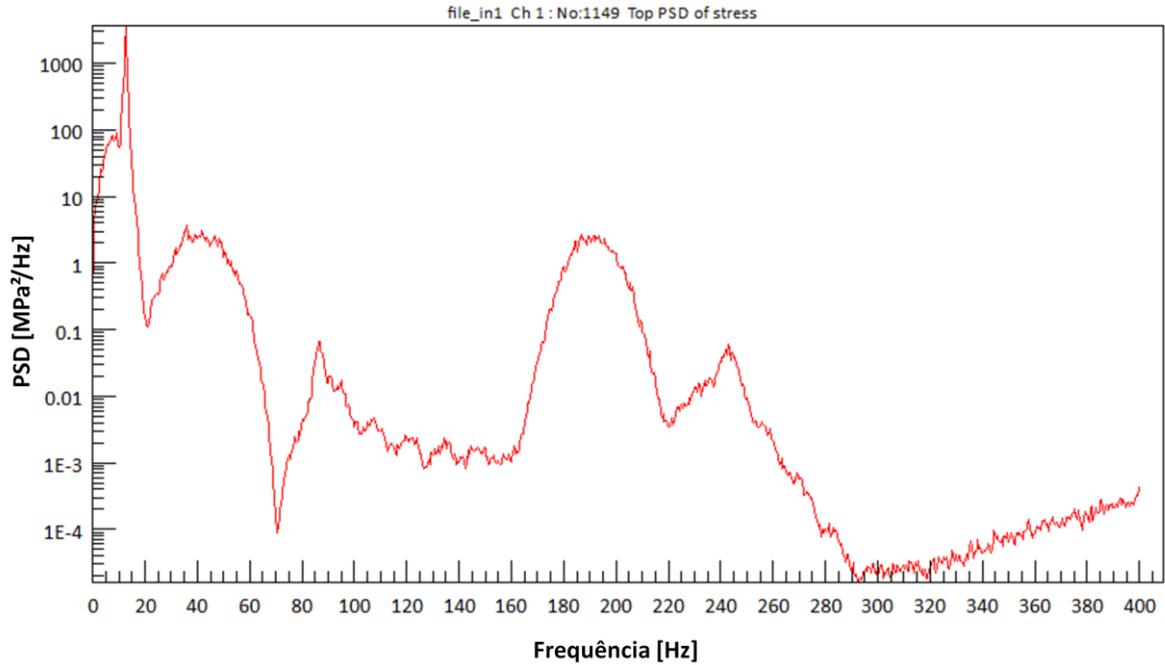


Figura 5.35 – PSD de tensões no nó crítico para carregamento banda larga.

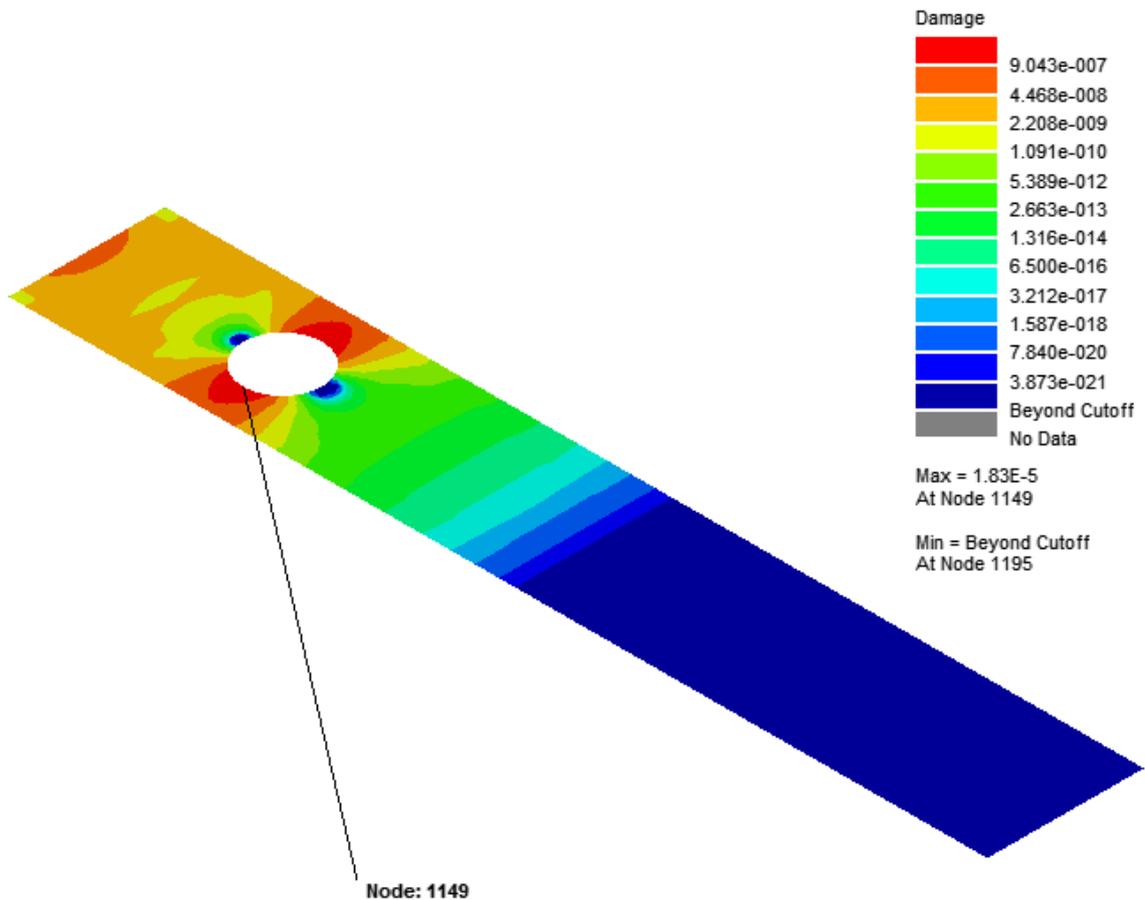


Figura 5.36 – Dano segundo Dirlik para carregamento banda larga.

Segue o dano de $1,83 \times 10^{-5}$ para o nó crítico (1149). A Figura 5.37 mostra a probabilidade de distribuição das tensões, para este nó.

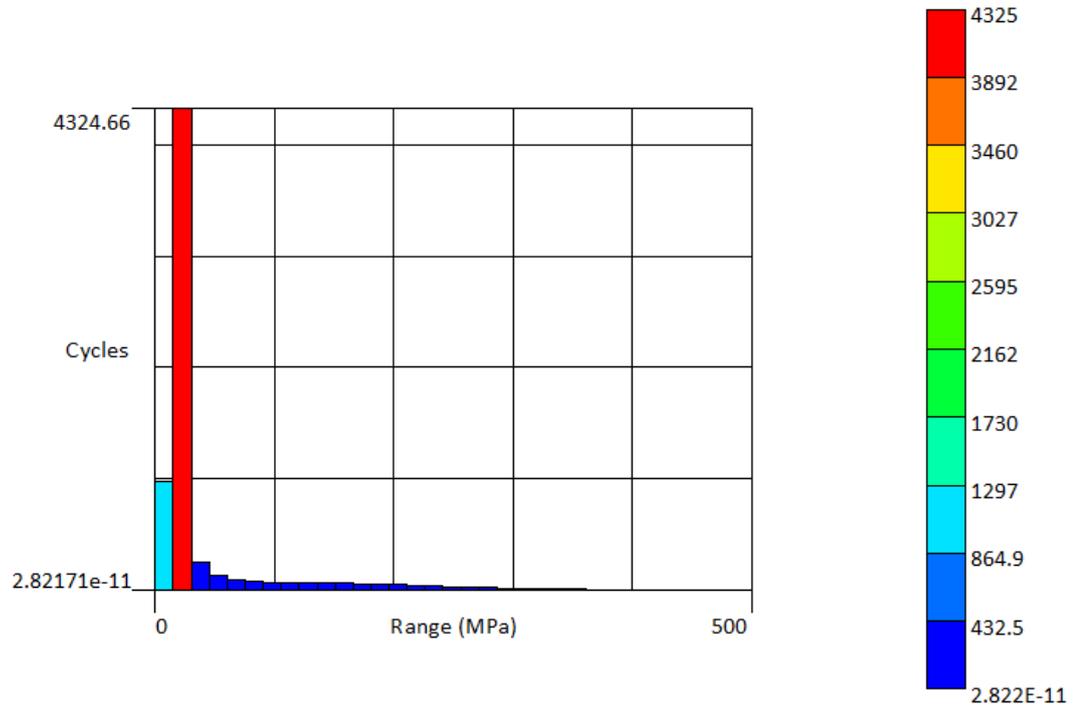


Figura 5.37 – Representação da PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda larga.

Da mesma forma, exportando a PSD de tensões para o Matlab®, temos os resultados comparativos para o nó crítico.

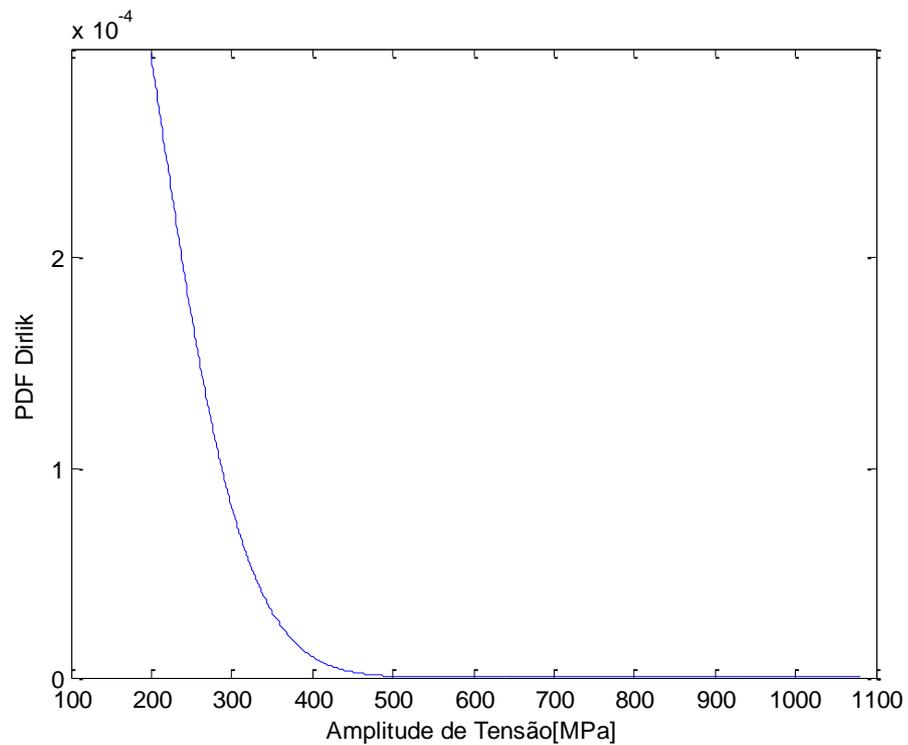


Figura 5.38 –PDF segundo modelo de Dirlik para o carregamento banda larga

É encontrado um dano de $1,9505 \times 10^{-5}$ no Matlab®, que comparado ao dano encontrado na análise do nCode® ($1,83 \times 10^{-5}$), o erro fica em 7%.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

6.1 Conclusões

Neste trabalho realizou-se a análise de alguns carregamentos aleatórios em uma viga, o gradiente de tensões causados pela fixação ou por um concentrador de tensões, pode dificultar a experimentação e a leitura da tensão em função do tempo. Porém é possível avaliar a durabilidade de componentes até a falha.

6.1.1 Erros e Variações na Estimativa de Dano/Vida

Ao longo do desenvolvimento do trabalho encontraram-se alguns pontos chave para a correta estimativa de vida do componente sob solicitação aleatória. Como descrito no texto, a PSD dos carregamentos correta deve ser calculada, porém existem inúmeros métodos para encontrar a PSD e cada método podem trazer valores diferentes para a PSD e, conseqüentemente, diferenças na estimativa de vida. A Figura 6.1 mostra algumas das formas possíveis de gerar uma PSD a partir do sinal em função do tempo. Na Figura 6.1 (a) a PSD é gerada a partir da FFT do sinal; Figura 6.1 (b) mostra a PSD gerada pela função residente do MATLAB®; Figura 6.1 (c) mostra a PSD gerada pela função residente do MATLAB®, com um estimador diferente; Figura 6.1 (d) mostra a PSD gerada utilizando o nCode®.

Além da diversidade dos métodos, por trabalharmos em um software comercial que manipula dados numéricos, é importante refinar o passo da PSD, pois para carregamentos onde temos picos na PSD, a falta de refinamento na PSD pode não representar o pico corretamente, o que irá gerar erros nos cálculos dos momentos e conseqüentemente um dano menor que o real. A Figura 6.2 mostra a diferença entre o pico para 2 passos diferentes, o segundo gráfico com um passo menor apresenta um pico significativamente maior

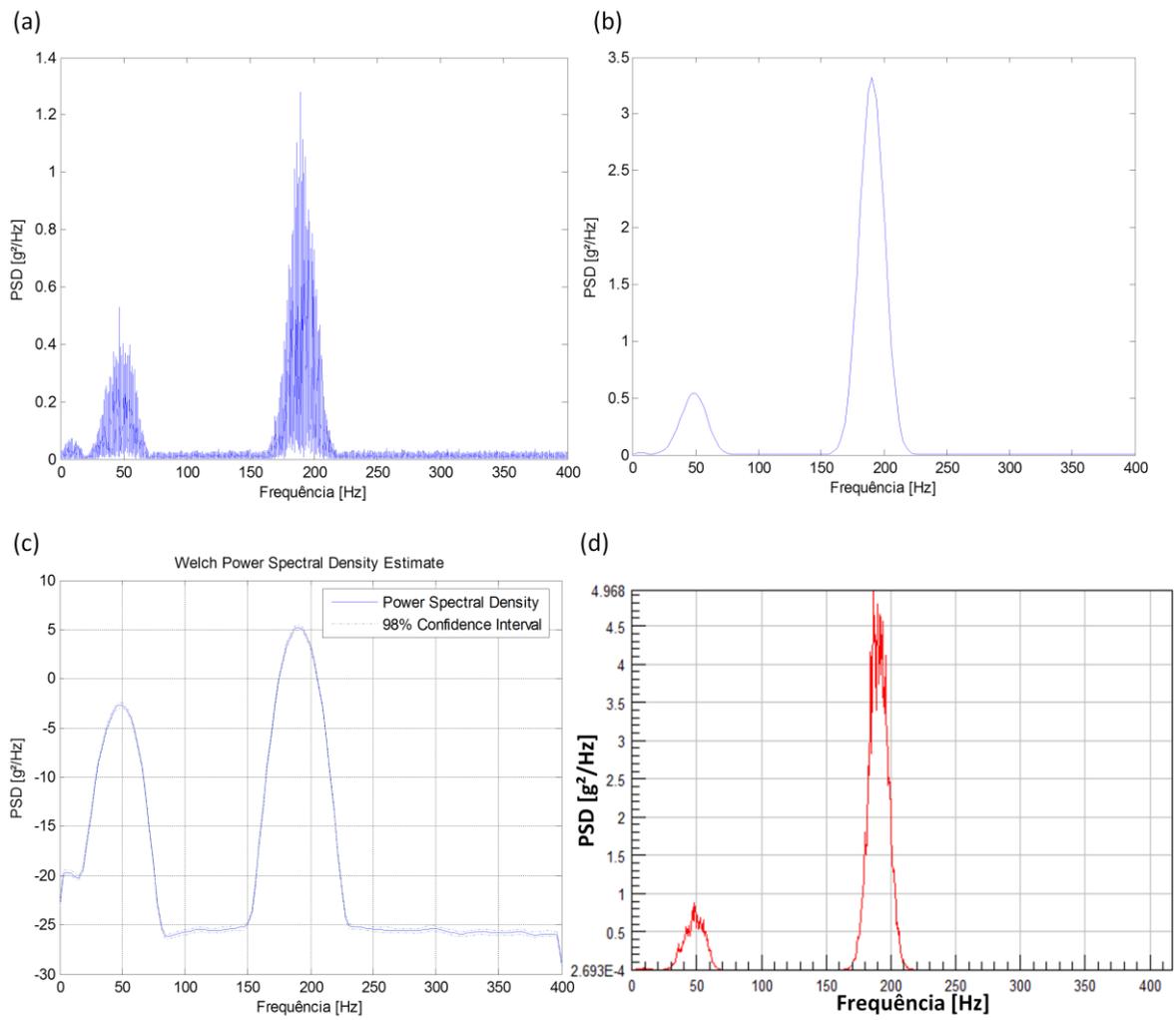


Figura 6.1 –Comparações de diferentes PSDs do sinal de banda larga.

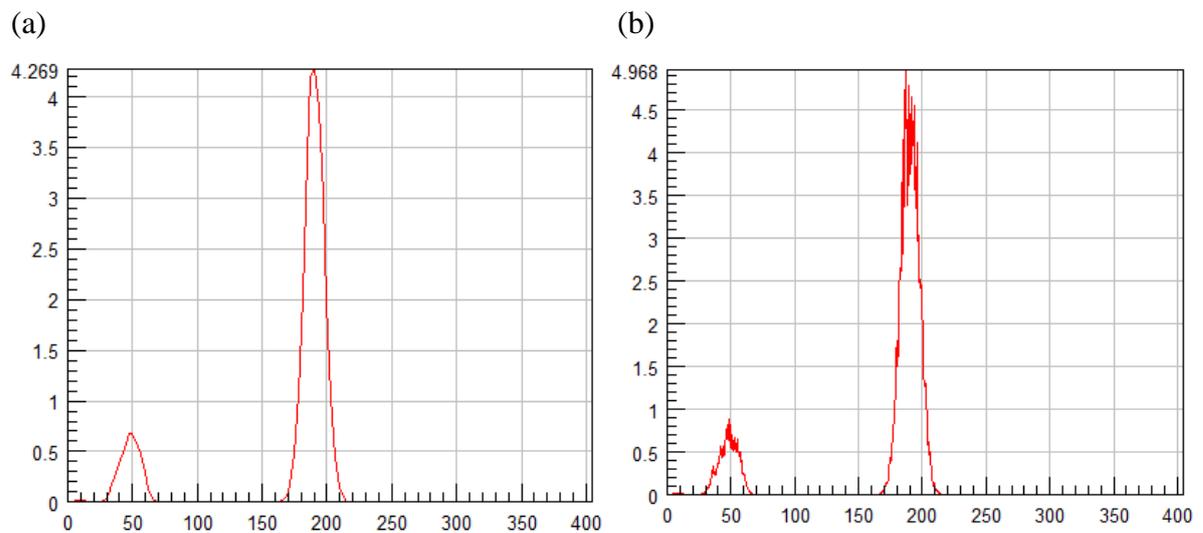


Figura 6.2 –Alteração da PSD conforme seu refinamento. (a) Maior passo (b) Menor passo.

Quanto ao modelo da viga, além dos cuidados de refinamento de malha e os erros resultante do método de elementos finitos, para a análise harmônica amortecida é importante extrair do modelo os picos de tensão nas frequências naturais, pois caso estes picos não estiverem bem destacados não irão representar as ressonâncias do componente e conseqüentemente gerar erros no resultado. Para descrever os picos significativamente, o *software* mapeia as frequências naturais e realiza mais análises ao redor destas frequências. Na

Figura 6.3 é possível observar que o primeiro gráfico, com a opção de mapeamento de frequências, além de ser mais rápida (pois apresenta um menor número de análises), apresenta maiores valores de tensão para as frequências naturais.

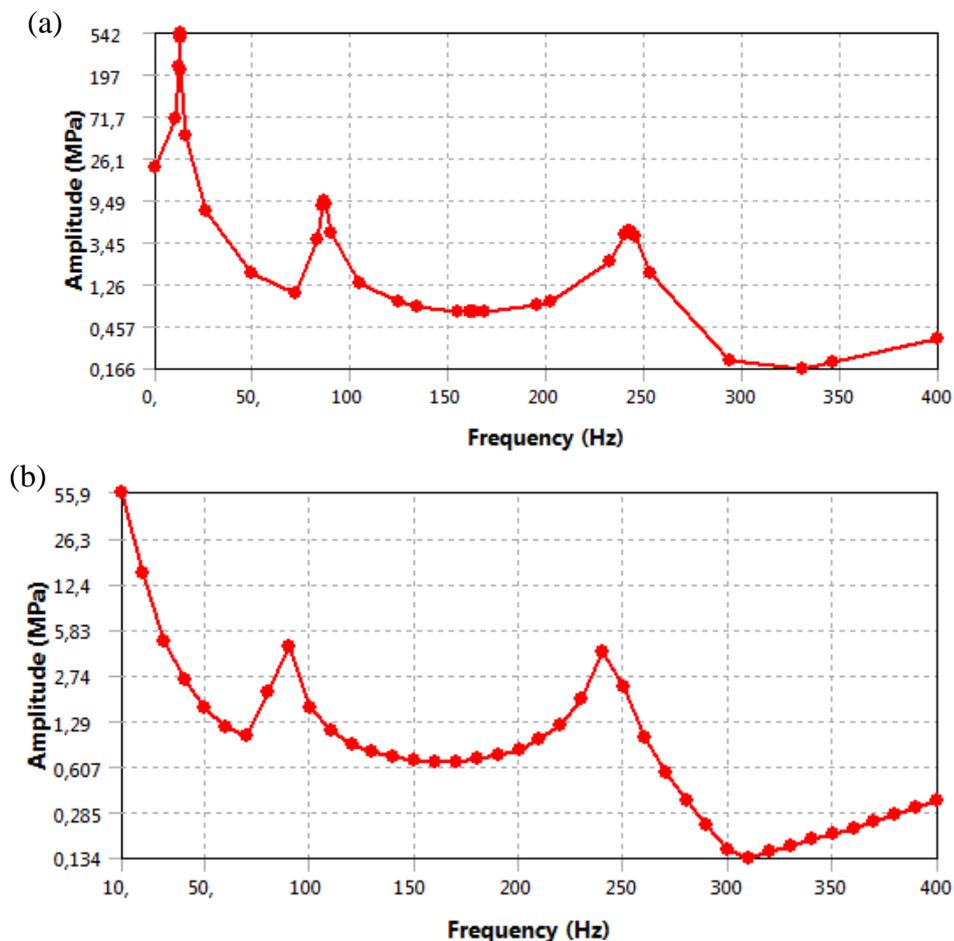


Figura 6.3 – Comparação da resposta harmônica: (a) com, e (b) sem a opção de mapeamento de frequências naturais.

Outro ponto de bastante atenção é o cálculo dos momentos da PSD, pois como os métodos de estimativa de vida utilizam estas propriedades, a alteração deste cálculo pode levar a uma significativa variação no cálculo da vida. Ao avaliarmos a literatura que trata do

cálculo dos momentos a partir da PSD, é apresentada uma integral, conforme equação (3.22), descrito no item 3.1.5, porém quando trabalhamos com dados discretos a integração torna-se numérica, utilizando o método do retângulo, como apresentado na equação (3.23).

São conhecidos diversos métodos de integração numérica além da retangular [Gilat e Subramaniam, 2008], e ao utilizarmos o método trapezoidal há uma significativa alteração nos resultados dos momentos, e conseqüentemente do dano/vida do componente. O *software* nCode® não disponibiliza os momentos utilizados no cálculo de dano, bem como nenhuma propriedade da PSD. A comparação dos resultados pode ser verificada na tabela Tabela 6.1 onde foi considerado o carregamento de banda larga. O erro foi calculado com base no método do retângulo. A Tabela 6.1 apresenta-se o valor do dano, calculado por ambos os métodos de integração no Matlab® em comparação ao dano resultante da análise pelo nCode®. Destaca-se que pela literatura fornecida junto ao *software* [nCode, 2011] é possível afirmar que o mesmo utiliza o método de integração retangular.

Tabela 6.1 - Comparação entre os métodos de integração dos momentos, bem como a variação causada no dano.

Método de Integração	Momentos				$E[P]$	$E[O^+]$	Dano (Dirlik)
	m_0	m_1	m_2	m_4			
Retângulo	3,6807E+03	5,3702E+04	2,3337E+06	6,4309E+10	166,00	25,18	1,9505E-05
Trapezoidal	3,7942E+03	5,5294E+04	2,3578E+06	6,4398E+10	165,27	24,93	2,2649E-05
Diferença	3%	3%	1%	0%	0%	-1%	16%

6.1.2 Comparação dos Resultados Obtidos

Com objetivo de comparar as diferenças entre os métodos, bem como verificar o dano fornecido pelo software com as soluções disponíveis na literatura que foram programadas, os dados extraídos nas análises estão confrontados nas tabelas abaixo indicando os respectivos erros (baseados nos resultados do nCode).

Tabela 6.2 - Comparação entre os danos calculados no nCode® e Matlab®.

	Carregamento	Método de Cálculo do Dano	Máximo valor da PSD do carregamento	Dano (Nó crítico)		Diferença
				Ncode	Matlab	
1	Banda Estreita Baixa Freq.	Dirlik	0,0128	$2,244 \times 10^{-6}$	$2,2023 \times 10^{-6}$	1,9%
2	Banda Estreita Baixa Freq.	Narrow Band	0,0128	$2,451 \times 10^{-6}$	$2,3983 \times 10^{-6}$	2,2%
3	Banda Estreita Média Freq.	Dirlik	18,92	$8,289 \times 10^{-8}$	$8,5947 \times 10^{-8}$	-3,7%
4	Banda Estreita Média Freq.	Narrow Band	18,92	$9,327 \times 10^{-8}$	$9,6288 \times 10^{-8}$	-3,2%
5	Ruído Branco	Dirlik	0,01449	$3,415 \times 10^{-6}$	$2,9400 \times 10^{-6}$	13,9%
6	Banda Larga	Dirlik	4,968	$1,83 \times 10^{-5}$	$1,9505 \times 10^{-5}$	-6,6%

É possível observar que nas análises de banda estreita o erro é pequeno, podendo ser oriundo de arredondamentos e erros numéricos, tais como o truncamento dos valores da PSD de tensão exportada. Na análise de ruído branco e banda larga ocorreu um erro de ordem maior. Este erro pode ter origem, como na banda estreita, no truncamento de valores, uma vez que como o ruído branco excita todo o espectro de frequências, o erro na exportação da PSD de tensões será maior.

É possível observar uma grande variação entre os métodos de estimativa de vida, como demonstrado na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 - Comparação entre os danos calculados com o métodos de Dirlik e o método de Banda Estreita.

Carregamento	Ncode			Matlab		
	Dano (Nó crítico)		Diferença	Dano (Nó crítico)		Diferença
	Dirlik	Narrow Band		Dirlik	Narrow Band	
Banda Estreita Baixa Freq.	$2,244 \times 10^{-6}$	$2,451 \times 10^{-6}$	-8,4%	$2,2023 \times 10^{-6}$	$2,3983 \times 10^{-6}$	-8,2%
Banda Estreita Média Freq.	$8,289 \times 10^{-8}$	$9,327 \times 10^{-8}$	-11,1%	$8,5947 \times 10^{-8}$	$9,6288 \times 10^{-8}$	-10,7%

Embora não tenha sido realizado nenhum experimento, é possível observar que os métodos de estimativa de vida estão muito suscetíveis a erros e variações sendo que é aconselhada a sua aplicação em conjunto com teste experimentais do componente, validando a durabilidade encontrada.

Apesar de analisarmos a durabilidade ou a vida do componente, a ideia de olharmos para o dano é mais interessante, pois é comum haver, na engenharia, casos onde um componente sofre diversos tipos de carregamento. Por exemplo, um componente fixado pela base a um veículo, sofre ao longo de sua vida carregamentos provenientes de diversas "pistas". Com um critério de acúmulo de dano adequado, é possível somar o dano que cada pista causa ao componente. Além disso, podem-se utilizar métodos no domínio do tempo em cooperação com métodos no domínio da frequência, somando-se ainda com o dano de alguma sobrecarga ocorrida ao longo da vida do componente.

6.2 Sugestões

É possível a aplicação dos métodos aqui citados em estruturas complexas, submetidas a vibrações pela fixação da base, alguns com resultados de durabilidade conhecidos, a fim de afinar e validar a metodologia no domínio da frequência, como por exemplo, a influência do método de integração dos momentos a partir da PSD de tensões, ou ainda a influência dos métodos de geração da PSD do carregamento.

É possível também avaliar o efeito das tensões multiaxiais em carregamentos alternados no domínio da frequência, o que tem sido discutido mais recentemente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves Filho, A., **Elementos Finitos - Base da Tecnologia CAE / Análise Dinâmica**, Érica, São Paulo, 2005.

Ariduru, S., **Fatigue Life Calculation by Rainflow Cycle Counting Method**, Thesis (Master Degree), The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, 2004.

Aykan, M. e Çelik, M., **Vibration Fatigue Analysis and Multi-axial Effect in Testing of Aerospace Structures**, Mechanical Systems and Signal Processing, Ankara, Turkey, 2008.

Bendat, J. S. e Piersol, A. G., **Random Data: Analysis and Measurement Procedures**, John Wiley & Sons, New York, 1971.

Bathe, K. J., **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, 1996.

Bendat, J. S., **Probability Functions for Random Responses**. NASA report on Contract NAS-5-4590, 1964.

Bishop, N. W. M e Woodward, A. **Fatigue Analysis of a Missile Shaker Table Mounting Bracket**, 2001. disponível em :<
http://www.randomvibration.com/Papers/BAe_Missile_Bracket_ver2.pdf>. Acesso em 18/12/2011.

Bishop, N. W. M; Lack, L. W.; Li, T. e Kerr, S. C., **Analytical Fatigue Life Assessment of Vibration Induced Fatigue Damage**, MSC World Users' Conference Proceedings, 1995.

Bishop, N. W. M., **Vibration Fatigue Analysis in the Finite Element Environment**, MSC Americas Users' Conference, Universal City, California, Estados Unidos, 1998.

Bishop, N. W. M. e Sherratt, F., **Finite Element Based Fatigue Calculations**, The International Association for the Engineering Analysis Community, Farnham, United Kingdom, 2000.

Bishop, N. W. M., **Vibration Fatigue Analysis in the Finite Element Environment**, XVI Encuentro Del Grupo Español De Fractura, Espanha, 1999.

Bishop, N.W.M., **The Use of Frequency Domain Parameters to Predict Structural Fatigue**, Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, England, 1988.

Bosco Junior, R., **Análise Numérico-Experimental de Componentes Sujeitos à Fadiga Por Solicitações Aleatórias - Avaliação de Modelos**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

Branco, C. Moura; Fernandes, A. Augusto; CASTRO, Paulo M. S. Tavares de. **Fadiga de Estruturas Soldadas**. 2.ed. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian, 1999.

Cesário, André, **Estimativa da Vida em Fadiga de Componentes de Implementos Rodoviários Através de Métodos Espectrais**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

Dirlik, T., **Application of Computers in Fatigue Analysis**, Ph.D. Thesis, University of Warwick, Coventry, England, 1985.

Dowling, Norman E. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 773 p.

Fatemi, A. e Yang, L., Cumulative Fatigue Damage and Life Prediction Theories: A Survey of the State of Art for Homogeneous Materials, **International Journal of Fatigue**, Vol. 20, No. 1, pp 9 - 34, 1998.

Fressinet, M.; Fuchs, F. e Madelpech, P., **Fatigue Life Estimation of Structures Subjected to Vibratory Loading**, 26th International Committee on Aeronautical Fatigue - ICAF - Symposium, Montreal, Canadá, 2011.

Frost, N. E.; Marsh, Kenneth James; Pook, Leslie Philip. **Metal fatigue**. Mineola, NY: Dover, 1999. 499 p.

Fuchs, H. O.; Stephens, Ralph I.. **Metal fatigue in engineering**. New York: J. Wiley, c1980. 318 p.

Halfpenny, A., **A Frequency Domain Approach for Fatigue Life Estimation from Finite Element Analysis**, International Conference on Damage Assessment of Structures - DAMAS 99, Dublin, Irlanda, 1999.

Halfpenny, A., **Methods For Accelerating Dynamic Durability Tests**, 9th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamic, Southampton, UK, 2006.

Hougaz, A. B., **Análise Probabilística de Durabilidade Aplicada a Veículos de Carga Rodoviária**, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

Hosford, W. F., **Mechanical Behavior of Materials**, 1 ed, Cambridge University Press, Cambridge 2005

Lee, Y.; Pan, J.; Hathaway, R. e Barkey, M., **Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice)**, Elsevier Butterworth-Heinemann Publications, USA, 2005.

Mancha, E.; Lagoda, T.; Nieslony, A.; Kardas, D. **Fatigue Life under Variable-Amplitude Loading According to the Cycle-Counting and Spectral Methods**. Materials Science, Vol. 42, No. 3, 2006

nCode, **Design Life Theory Guide 7.0**, HBM, 2011.

Newland, D. E., **An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis**, 3 ed., John Wiley & Sons, New York, 1993.

Nieslony, A., Comparison of Some Selected Multiaxial Fatigue Failure Criteria Dedicated for Spectral Method, **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, 48,1 pp. 233-254, Warsaw, 2010.

Nieslony, A., Macha, E., **Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue**, Opole: Springer, 2007.

Peebles Z. P. Jr., **Probability, Random Variables And Random Signal Principles**, 4th ed. New York: Mcgraw-Hill, 2001

Passipoularidis, V. A. e Brøndsted, P., **Fatigue Evaluation Algorithms: Review**, Materials Research Division, Risø National Laboratory for Sustainable Energy, Technical University of Denmark, Denmark, 2009.

Pook, Les. **Metal Fatigue**. Londres: Springer, 2007.

Qiang, R. e Hongyan W., **Frequency Domain Fatigue Assessment of Vehicle Component under Random Load Spectrum**, 9th International Conference on Damage Assessment of Structures - DAMAS 2011, Oxford, United Kingdom, 2011.

Quigley, J. e Lee, Y., **Assessing Dirlik's Fatigue Damage Estimation Method for Automotive Applications**, SAE Int. J. Passeng. Cars - Mech. Syst., 2012.

Rahman, M.M. et al., Fatigue Life Prediction of Two-Stroke Free Piston Engine Mounting Using Frequency Response Approach, **European Journal of Scientific Research**, ISSN 1450-216X Vol.22 No.4 (2008), pp.480-493 , 2008.

Rosa, E., **Análise de Resistência Mecânica**, Apostila da disciplina de Mecânica da Fratura e Fadiga, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, GRANTE, 2002.

Reis, Cesar Gonçalves dos, **Análise de um Componente Sujeito à Fadiga por Solicitações Aleatórias por Meio do Domínio do Tempo e da Frequência**, Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2009.

Schijve, Jaap. **Fatigue of Structures and Materials**. Delft: Springer, 2008. 621 p.

Sedmak, S.; Sedmak, A.; Arsi, M.; Tuma, J. V., **An experimental verification of numerical models for the fracture and fatigue of welded structures**. Original scientific article, 2007

Shigley, Joseph Edward; Mischke, Charles R.; Budynas, Richard G. **Projeto de engenharia mecânica**. 7.ed. Porto Alegre: Bookman, 2004. 960 p.

Shigley, J. E.; Budynas, Nisbett. **Shigley's Mechanical Engineering Design** 8 ed. The McGraw, 2008.

Steinberg, D. S., **Vibration Analysis for Electronic Equipment**, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1988.

Stephens, Ralph I. et al. **Metal fatigue in engineering**. 2.ed. New York: J. Wiley, 2001. 472 p

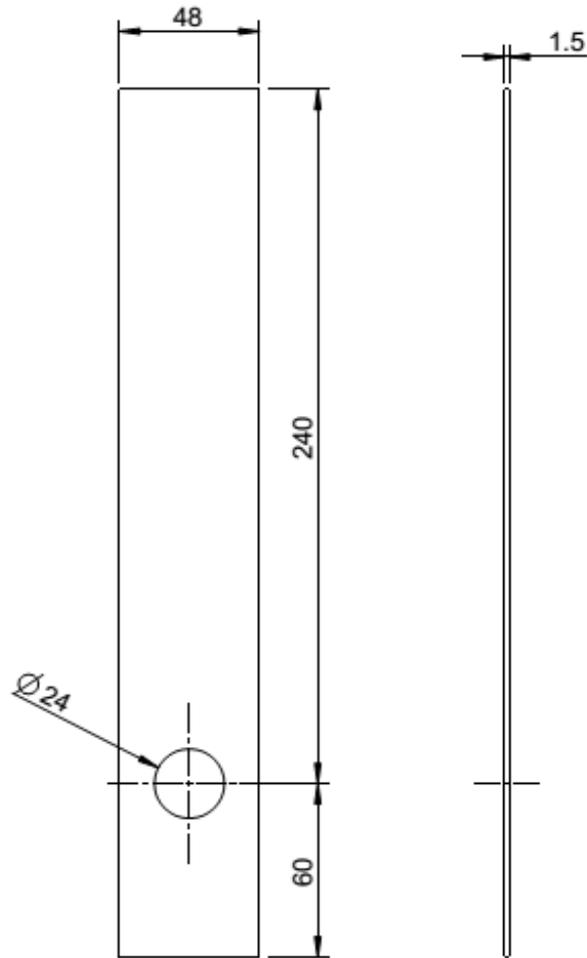
Su, H., Automotive CAE Durability Analysis Using Random Vibration Approach, **2nd MSC Worldwide Automotive Conference**, 2000.

Suresh, S., **Fatigue of Materials**, Cambridge University Press, Second Edition, 1998.

Tunna, J. M., Fatigue Life Predict for Gaussian Random Loads at the Design Stage, **Fatigue & Fracture Engineering Materials & Structures**, 9(3):185-194, 1986.

Wirsching, P. H. e Light, M. C., Fatigue Under Wide Band Random Loading, **Journal of the Structural Division**, ASCE, Vol. 106, No. ST7, pp. 1593-1607, 1980.

Zhang, Y. e Usman, M., Life Prediction for Lighting Bulb Shield Designs Subjected to Random Vibration, **SAE International Congress and Exposition**, Detroit, Michigan, USA, 1999.

APÊNDICE A – Modelo em Análise

APÊNDICE B – Scripts Matlab®

Script principal:

```
function dano=psd2life(psdstress)
% Onde psdstress é a psd do sinal em análise, sendo a primeira coluna a
% frequência e a segunda a magnitude.

%Dados da Análise:
tmax=60; % tempo do sinal

%Dados do material:
[DS , N] = materialncode(540);

%Gráfico da psd
figure, semilogy(psdstress(:,1),psdstress(:,2))
xlabel('frequencia [Hz]'); ylabel('Tensão [MPa^2/Hz]')

%momentos
[m0,m1,m2,m4]=momentos(psdstress);
Epicos=(m4/m2)^0.5;
Ezeros=(m2/m0)^0.5;

fprintf('Momentos da PSD\n')
fprintf('m_0 = %1.6e\n',m0)
fprintf('m_1 = %1.6e\n',m1)
fprintf('m_2 = %1.6e\n',m2)
fprintf('m_4 = %1.6e\n',m4)
fprintf('\nExpectativa de picos = %4.2f\n',Epicos)
fprintf('Expectativa de zeros = %4.2f\n\n',Ezeros)

%% pdf_dirlik
[pdf_d]=pdf_dirlik(DS,m0,m1,m2,m4);

% dano banda larga
div = pdf_d./ N;
dano_dirlik = Epicos* (trapz(DS,div)); %para comparar com o software é
necessário incluir o tempo do sinal
fprintf('\n(Nieslony)Dano Linear/s usando pdf dirlik =
%1.5e\n',dano_dirlik)
fprintf('Vida usando pdf dirlik = %6.1f\n',1/dano_dirlik)
Trf = 1/(dano_dirlik*3600);
disp(['Utilizando PM o tempo de falha ficou em ',num2str(Trf),' horas'])
dano(2)=tmax* dano_dirlik;

%% dano Banda Estreita
ni_narrow=DS*Epicos/(4*m0).*exp(-DS.^2*1/(8*m0));
dano_narrow = sum (ni_narrow./N);
fprintf('\nDano Linear/s usando Narrow band = %1.5e\n',dano_narrow)
fprintf('Vida usando narrow band = %6.1f\n',1/dano_narrow)
Trf = 1/(dano_narrow*3600);
disp(['Utilizando PM o tempo de falha ficou em ',num2str(Trf),' horas'])
dano(3)=tmax* dano_narrow;
```

Função dos Momentos:

```
function [m0,m1,m2,m4] = momentos (psdx)
% function momentos (psdx)

k=length (psdx);
f = psdx(:,1);
df= diff(f);

G = psdx(:,2);
Gf= G.*f;
Gf2= G.*(f.^2);
Gf4= G.*(f.^4);

%% Integração retângulo
m0= df'* G(2:k) + df(1)*G(1);
m1= df'* Gf(2:k) + df(1)*Gf(1);
m2= df'* Gf2(2:k) + df(1)*Gf2(1);
m4= df'* Gf4(2:k) + df(1)*Gf4(1);

%% Integração trapezoidal composta
% m0= df'* ((G(1:k-1)+G(2:k))./2);
% m1= df'* ((Gf(1:k-1)+Gf(2:k))./2);
% m2= df'* ((Gf2(1:k-1)+Gf2(2:k))./2);
% m4= df'* ((Gf4(1:k-1)+Gf4(2:k))./2);
```

Função do método de Dirlik:

```
function [pdf_dirlik] = pdf_dirlik(DS,m0,m1,m2,m4)

stress=DS;

z=stress./(2*sqrt(m0));
irf=m2/(sqrt(m0*m4));
xm=(m1/m0)*sqrt(m2/m4);
G1=(2*(xm-irf^2))/(1+irf^2);
r=(irf-xm-G1^2)/(1-irf-G1+G1^2);
G2=(1-irf-G1+G1^2)/(1-r);
G3=1-G1-G2;
q=(1.25*(irf-G3-G2*r))/(G1);

pdf_dirlik=(1/(2*sqrt(m0))) * ((G1/q)*exp(-z./q) + G2*z.*exp(-
z.^2/(2*r^2))/(r^2) + G3.*z.*exp(-z.^2/2));
figure, plot(stress,pdf_dirlik)
xlabel ('Tensão de Amplitude [Mpa]'); ylabel ('PDF Dirlik')
```