Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física
Programa de Pós-graduação em Ensino de Física
Doutorado em Ensino de Física

Daniel Santos Souza

A Interpretação Probabilística da Função de Onda: Potencialidades e Desafios no Ensino de Mecânica Quântica com Fontes Primárias

Porto Alegre
2026

Daniel Santos Souza

A Interpretação Probabilística da Função de Onda: Potencialidades e Desafios no Ensino de Mecânica Quântica com Fontes Primárias

Texto de tese apresentado como requisito à obtenção do título de Doutor em Ensino de Física pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
Orientador(a): Nathan Willig Lima

Coorientador, Ricardo Avelar Sotomaior Karam

Porto Alegre
2026

FOLHA DE APROVAÇÃO

Daniel Santos Souza

A Interpretação Probabilística da Função de Onda: Potencialidades e Desafios no Ensino de Mecânica Quântica com Fontes Primárias

Texto de tese apresentado como requisito à obtenção do título de Doutor em Ensino de Física pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
Orientador: Nathan Willig Lima
Coorientador, Ricardo Avelar Sotomaior Karam

Porto Alegre - RS, 07/08/2026

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Nathan Willig Lima – PPGEnFís – UFRGS/RS

Prof. Dra. Lívia Streit – IQ – UFRGS/RS

Prof. Dr. Leonardo Albuquerque Heidemann – PPGEnFís – UFRGS/RS

Prof. Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte – CEFET/RJ

Prof. Dr. Franciano Scremin Puhales – UFSM/RS

AGRADECIMENTOS

A conclusão desta tese representa também o encerramento de uma importante etapa da minha trajetória pessoal e profissional. Nenhuma caminhada dessa natureza é realizada de forma solitária e, por isso, registro minha sincera gratidão a todos aqueles que, de diferentes maneiras, contribuíram para que este trabalho se tornasse possível.

Agradeço aos meus pais por todos os ensinamentos, valores e incentivos que me acompanharam ao longo da vida. Em especial, dedico um pensamento carinhoso à minha mãe, que infelizmente não pôde estar presente para acompanhar a conclusão desta etapa. Sua presença, seu amor e seus ensinamentos permanecem vivos em minha memória e em tudo aquilo que construí ao longo da minha trajetória.

Agradeço aos meus amigos e pessoas próximas, pelo apoio, a amizade e as conversas ao longo desses anos que tornaram essa caminhada mais leve.

À minha companheira, Andréa, expresso minha mais profunda gratidão. Obrigado pela compreensão diante das ausências, pelo incentivo constante nos momentos de desânimo, pela paciência diante das dificuldades e por estar ao meu lado em cada etapa desse percurso, seu apoio foi essencial para que eu pudesse seguir em frente.

Ao meu filho, Cauã, agradeço por ser uma fonte permanente de motivação, alegria e esperança. Sua presença dá sentido a muitas das escolhas que faço e me inspira diariamente a buscar ser uma pessoa melhor.

Ao meu orientador, professor Nathan Willig Lima, registro meu sincero agradecimento pela orientação, confiança e generosidade ao longo de todo o doutorado. Agradeço especialmente pela paciência, pela compreensão diante das questões pessoais que marcaram parte desta trajetória e pelo respeito ao meu tempo em momentos particularmente difíceis. Sua disponibilidade para dialogar, sugerir caminhos e contribuir para o desenvolvimento desta pesquisa foi fundamental para a conclusão desta tese. Mais do que a orientação acadêmica, levo comigo o aprendizado proporcionado por sua postura humana, respeitosa e comprometida com a formação de seus orientandos.

Por fim, agradeço a todos os professores em especial ao meu coorientador Ricardo, aos professores que participaram da banca, aos colegas e instituições que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação e para a realização deste trabalho. A todos, meu muito obrigado.

RESUMO

No ensino de Física, ainda são recorrentes abordagens que privilegiam a resolução de problemas idealizados, frequentemente desvinculada de discussões mais aprofundadas acerca dos conceitos físicos e de seu processo de desenvolvimento histórico. Em contraposição, concepções contemporâneas de ensino têm problematizado tais práticas, abrindo espaço para perspectivas que superem abordagens tecnicistas e promovam maior articulação entre formalismo, significado conceitual e contexto histórico. No âmbito específico da Mecânica Quântica, a compreensão da interpretação probabilística associada ao módulo ao quadrado da função de onda ainda é, em muitos casos, pouco explorada em sua dimensão conceitual e histórica, o que pode resultar em lacunas em seu entendimento. Com o objetivo de contribuir para essa discussão, este trabalho investiga o seguinte problema de pesquisa: como abordar o ensino da interpretação probabilística da função de onda com o auxílio de fontes primárias e secundárias, de modo a favorecer sua compreensão em seu contexto histórico? A pesquisa parte da tese de que a reconstrução histórico-epistemológica da gênese da interpretação probabilística permite identificar os elementos conceituais essenciais para o seu entendimento, oferecendo subsídios para o desenvolvimento de propostas de ensino que articulem formalismo matemático, contexto histórico e significado físico. Para sustentar essa tese e responder à questão central, foram delineados três objetivos, desenvolvidos em três estudos articulados entre si. O primeiro estudo emprega a análise de conteúdo em Bardin, para examinar como a interpretação probabilística é apresentada em livros didáticos de Mecânica Quântica. Os resultados indicam que uma parcela significativa das obras analisadas não explicita os argumentos que fundamentam tal interpretação, enquanto outra parcela apresenta apenas aspectos parciais de um contexto mais amplo. O segundo estudo adota uma abordagem histórico-epistemológica, reconstruindo os principais elementos que contribuíram para a formulação da interpretação probabilística, com ênfase no trabalho original de Max Born sobre processos de colisão. Nesse percurso, são analisados os argumentos que articulam o formalismo matemático com os fundamentos conceituais da proposição do caráter probabilístico associado ao módulo ao quadrado da função de onda. O terceiro estudo, fundamentado nos resultados dos anteriores, desenvolve uma reflexão sistemática

acerca de orientações que possam subsidiar a elaboração de propostas didáticas voltadas ao ensino da interpretação probabilística. Essa reflexão é construída em diálogo com a utilização de fontes primárias e secundárias e orientada pelo modelo de reconstrução educacional, o qual articula a análise epistemológica do conteúdo, a consideração dos processos de aprendizagem e a formulação de encaminhamentos didáticos. Nesse contexto, destaca-se a relevância de situar historicamente a emergência da interpretação probabilística e de conferir significado ao formalismo quântico, de modo a promover uma aprendizagem que supere a simples manipulação técnica e se constitua como compreensão conceitual fundamentada. Conjuntamente, os três estudos buscam contribuir para uma abordagem do ensino da Mecânica Quântica que integre análise histórica, fundamentação conceitual e reflexão pedagógica, ampliando as possibilidades de compreensão da interpretação probabilística no contexto do ensino de física.

Palavras-chave: Interpretação Probabilística. Mecânica Quântica. Ensino de Física.

ABSTRACT

In Physics education, approaches that privilege the solution of idealized problems remain common, often disconnected from deeper discussions about physical concepts and their historical development. In contrast, contemporary perspectives on teaching have increasingly problematized such practices, opening space for approaches that move beyond technicist models and promote a stronger articulation between formalism, conceptual meaning, and historical context. In the specific domain of Quantum Mechanics, the understanding of the probabilistic interpretation associated with the squared modulus of the wave function is still, in many cases, insufficiently explored in its conceptual and historical dimensions, which may result in gaps in comprehension. To contribute to this discussion, this study investigates the following research question: how can the teaching of the probabilistic interpretation of the wave function be addressed through primary and secondary sources in a way that fosters its understanding within its historical context? The research is grounded in the thesis that the historical-epistemological reconstruction of the genesis of probabilistic interpretation allows for the identification of the conceptual elements essential to its understanding, providing insights for the development of instructional approaches that integrate mathematical formalism, historical context, and physical meaning. To support this thesis and answer the central question, three objectives were outlined and carried out across three interconnected studies. The first study employs Bardin's content analysis methodology to examine how the probabilistic interpretation is presented in Quantum Mechanics textbooks. The results indicate that a significant portion of the analyzed works does not make explicit the arguments that substantiate this interpretation, while another portion presents only partial aspects of a broader conceptual framework. The second study adopts a historical-epistemological approach, reconstructing the main elements that contributed to the formulation of the probabilistic interpretation, with emphasis on Max Born's original work on collision processes. In this reconstruction, the arguments that articulate mathematical formalism with the conceptual foundations underlying the probabilistic character associated with the squared modulus of the wave function are analyzed. The third study, grounded in the results of the previous ones, develops a systematic reflection on guidelines that may support the design of didactic proposals aimed at teaching probabilistic interpretation. This reflection is

developed in dialogue with the use of primary and secondary sources and is guided by the Model of Educational Reconstruction, which articulates epistemological analysis of the content, considerations about learning processes, and the formulation of didactic pathways. In this context, we highlight the importance of historically situating the emergence of the probabilistic interpretation and conferring physical meaning to quantum formalism, thereby promoting learning that goes beyond mere technical manipulation to foster a well-grounded conceptual understanding. Together, these three studies aim to contribute to an approach to Quantum Mechanics education that integrates historical analysis, conceptual grounding, and pedagogical reflection, broadening the possibilities for understanding the probabilistic interpretation in physics education.

Keywords: Probabilistic Interpretation, Quantum Mechanics, Physics Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 REFERÊNCIAS 22
2 PRIMEIRO ESTUDO 28
2.1 INTRODUÇÃO 29
2.2 GÊNESE DA INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA FUNÇÃO DE ONDA ... 32
2.3 METODOLOGIA 38
2.4 RESULTADOS 41
2.4.1 A gênese da interpretação probabilística em livros didáticos 41
2.4.2 Categoria T 44
2.4.3 Categoria A 45
2.4.4 Categoria N 47
2.4.5 Categoria E 49
2.5 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS 50
2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 52
2.7 REFERÊNCIAS 57
3 SEGUNDO ESTUDO 62
3.1 INTRODUÇÃO 63
3.2 O PROBLEMA DE ESPALHAMENTO DE PARTÍCULAS 66
3.3 RUTHERFORD E O ESPALHAMENTO DE PARTÍCULAS ALFA 67
3.4 SOLUÇÃO DE BORN PARA O PROBLEMA DE ESPALHAMENTO 72
3.4.1 Forma Integral da Equação de Schrödinger 74
3.4.2 Solução da Função de Green 76
3.5 APROXIMAÇÃO DE BORN PARA O PROBLEMA DE COLISÕES 78
3.6 A INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA NO CONTEXTO DE COLISÕES 81
3.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 88
3.8 REFERÊNCIAS 91
4 TERCEIRO ESTUDO 93
4.1 INTRODUÇÃO 94
4.2 REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO 97
4.2.1 O Modelo de Reconstrução Educacional 97

4.2.2 Reconstrução educacional, História e Filosofia da Ciência e Ensino de Física....98
4.2.3 O MER no ensino de mecânica quântica: potencialidades e limites 99
4.3 RECONSTRUÇÃO DA INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA....101
4.3.1 Reconstrução do conteúdo científico (Componente 1 do MER): A interpretação probabilística como resposta a problemas físicos concretos...102
4.3.2 Elementos conceituais estruturantes da interpretação probabilística 117
4.4 INVESTIGAÇÃO DAS PERSPECTIVAS DOS ESTUDANTES (COMPONENTE 2 DO MER)....120
4.4.1 Perspectivas dos estudantes e experiências formativas relacionadas à interpretação probabilística 121
4.4.2 Dificuldades na aprendizagem da mecânica quântica 123
4.4.3 Potencialidades da abordagem histórica 125
4.4.4 Desafios e limitações da abordagem histórica 127
4.4.5 Articulação entre a reconstrução histórica e as perspectivas dos estudantes.....129
4.4.6 Síntese e transição para a proposta didática (Componente 3 do MER) ..131
4.5 ELEMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA SOBRE A INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA FUNDAMENTADA NO MODELO DE RECONSTRUÇÃO EDUCACIONAL.....132
4.5.1 Princípios orientadores.....132
4.5.2 Hipóteses de design didático 134
4.5.3 Organização geral da proposta didática.....135
4.5.4 O papel das fontes primárias e secundárias no design didático 136
4.5.5 Articulação entre princípios orientadores, hipóteses de design e eixos conceituais.....138
4.5.6 Possibilidades estratégias didáticas para o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica.....140
4.6 POTENCIALIDADES E DESAFIOS DA PROPOSTA DIDÁTICA 142
4.6.1 Potencialidades para o ensino da interpretação probabilística 143
4.6.2 Desafios e limites da proposta 144
4.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 145
4.8 REFERÊNCIAS.....147

5 CONCLUSÃO 150

1 INTRODUÇÃO

Desde as últimas décadas do século XX, observa-se uma aproximação cada vez mais consistente entre a prática do ensino de ciências e os estudos em História e Filosofia da Ciência (HFC), movimento que ganha força diante do diagnóstico de uma crise persistente no ensino contemporâneo de ciências (Matthews, 1995). Essa crise manifesta-se sob múltiplas dimensões, que vão desde uma prática pedagógica dissociada de seus contextos culturais, políticos e éticos até abordagens pouco reflexivas e marcadamente instrumentalistas, centradas quase exclusivamente na manipulação de fórmulas, equações e técnicas de resolução de problemas.

Como consequência, consolidou-se um legado epistemologicamente problemático, ainda presente no meio acadêmico, segundo o qual a ciência seria compreendida como um empreendimento de desenvolvimento contínuo, linear e cumulativo. Tal visão tende a obscurecer os conflitos conceituais, as rupturas históricas e as disputas interpretativas que caracterizam a construção do conhecimento científico, dificultando uma compreensão mais crítica e contextualizada da natureza da ciência.

Argumentos em favor da inserção da História e Filosofia da Ciência de forma coerente e articulada às práticas de ensino são amplamente discutidos na literatura (Silva; Guerra, 2015). Ademais, um ensino de ciências conduzido de maneira aproblemática e ahistórica (Martins, 2006; Peduzzi, 2001; Pérez et al., 2001) tende a favorecer concepções simplificadas da atividade científica, frequentemente desconectadas das atuais perspectivas da educação científica (Batista; Ferreira; Freitas, 2015). Ao desconsiderar os contextos de produção do conhecimento, bem como os conflitos, controvérsias e escolhas que permeiam sua construção, corre-se o risco de apresentar a ciência como um corpo de verdades acabadas e desprovido de historicidade.

Por outro lado, conforme discutem Batista, Drummond e Freitas (2015), a utilização de episódios históricos no ensino pode contribuir para a contextualização das discussões sobre a natureza da ciência, favorecendo uma compreensão mais reflexiva de seus fundamentos e limites. No âmbito específico do ensino de Física, diferentes estudos têm ressaltado o papel da HFC como recurso para enfrentar dificuldades conceituais persistentes, ao possibilitar que os estudantes reconheçam

os problemas, impasses e reformulações que acompanharam a construção de determinados conceitos (Batista; Ferreira; Freitas, 2015).

Nessa perspectiva, abordagens históricas não contribuem apenas para a compreensão de noções epistemológicas abstratas, mas também favorecem a assimilação do processo de construção e consolidação de conceitos científicos (Arduriz-Bravo; Izquierdo-Aymerich, 2009 apud Forato; Pietrocola; Martins, 2011). Ao evidenciar os problemas, impasses e reformulações que acompanharam o desenvolvimento de determinadas teorias, a história da ciência permite que os conceitos sejam compreendidos não como enunciados prontos, mas como respostas provisórias a questões específicas.

Contudo, permanece em aberto a questão de como essa inserção deve ser realizada de modo consistente e pedagogicamente estruturada, o que explica o crescimento de estudos e propostas que buscam integrar o ensino de ciências e a HFC de maneira mais sistemática (Batista; Ferreira; Freitas, 2015). De modo geral, defende-se, nesse movimento de aproximação, um ensino de ciências mais contextualizado, no qual o conteúdo não seja apresentado de forma isolada de seus contextos sócio-históricos, mas articulado a uma reflexão sobre a natureza da ciência (Matthews, 1995). Além disso, tal perspectiva busca enfrentar dificuldades conceituais recorrentes ao recolocar em cena os problemas e questões originais que mobilizaram a elaboração das teorias científicas (Batista; Ferreira; Freitas, 2015).

Ao contextualizar historicamente ideias, conceitos ou resultados científicos, cria-se a possibilidade de que os estudantes preencham lacunas relativas aos argumentos que lhes deram origem, compreendendo-os como respostas a problemas específicos e não como enunciados descontextualizados. Entretanto, os desafios de aproximar a História e Filosofia da Ciência do ensino são numerosos (Forato; Pietrocola; Martins, 2011). Não há um método único ou uma fórmula pedagógica que possa ser considerada mais adequada para esse propósito, sobretudo porque o movimento que articula história da ciência e ensino de Física constitui um campo complexo e plural (Karam; Lima, 2022).

Ainda assim, essa aproximação mostra-se desejável, sem que isso implique negligenciar a importância da aprendizagem dos conteúdos específicos da disciplina. Entre as diversas possibilidades de integração, destacam-se iniciativas que recorrem ao uso de fontes primárias como recurso para a compreensão de conteúdos físicos (Karam, 2021). Tais fontes, entendidas como artefatos culturalmente construídos

(Batista; Ferreira; Freitas, 2015), contêm elementos significativos sobre o desenvolvimento de ideias, conceitos, teorias e resultados. Quando exploradas de maneira criteriosa, podem contribuir para um ensino de Física mais reflexivo e conceitualmente fundamentado.

Nessa perspectiva, as fontes primárias não se limitam a favorecer a aprendizagem sobre o desenvolvimento histórico ou sobre a natureza da ciência, mas também podem atuar diretamente na compreensão dos próprios conteúdos físicos (Karam, 2021). Ao serem mobilizadas em diálogo com diferentes estratégias didáticas, elas possibilitam a adoção de um pluralismo metodológico que enriquece a prática pedagógica (Rosa; Lima; Cavalcanti, 2022), perspectiva já explorada em outros trabalhos da área (Karam, 2018; Lima; Cavalcanti; Ostermann, 2021; Lima; Karam, 2021).

Ademais, há décadas aponta-se a existência de uma lacuna no ensino de Física Moderna e Contemporânea, cujos conteúdos ainda ocupam espaço reduzido na Educação Básica (Moreira, 2018). Tal cenário evidencia não apenas uma limitação curricular, mas também desafios formativos que atravessam a prática docente. Nesse contexto, um caminho possível para enfrentar essa fragilidade consiste em investir na formação de professores da Educação Básica, garantindo-lhes um domínio conceitual mais consistente de tópicos de Física Moderna, de modo que possam abordá-los com maior segurança a partir da sua contextualização histórica.

No que se refere especificamente ao ensino de Física Quântica, a literatura destaca que ainda é recorrente uma ênfase excessiva nos aspectos quantitativos e tecnicistas, frequentemente acompanhada de pouca reflexão sobre os conceitos e seus significados físicos (Johansson et al., 2018). Essa orientação tende a reforçar uma visão instrumentalista da Física, muitas vezes desvinculada de seus fundamentos históricos e epistemológicos. Soma-se a isso o fato de que os elementos históricos presentes nos livros didáticos, quando existentes, costumam aparecer de forma fragmentada e pouco articulada, por vezes acompanhados de inconsistências tanto filosóficas quanto históricas (Lima et al., 2018).

Desse modo, acabam sendo ocultados, ou mesmo apagados, aspectos relevantes da construção do conhecimento científico, o que frequentemente conduz a confusões e generalizações equivocadas sobre o desenvolvimento da Física e das ciências em geral (Karam; Lima, 2022). Tal postura repercute de maneira significativa

na formação de futuros professores, especialmente em um contexto no qual o livro didático ainda ocupa posição central nas práticas de ensino.

Evidentemente, os livros didáticos constituem um ponto de partida importante para a aprendizagem da Física. Contudo, é pertinente questionar se não seria possível estabelecer uma aproximação mais produtiva entre esses materiais e as fontes primárias, de modo que cada um possa suprir as limitações do outro. Uma articulação dessa natureza poderia favorecer um ensino que contemplasse simultaneamente os aspectos matemáticos e os significados conceituais envolvidos. Em outras palavras, busca-se promover uma aprendizagem que não se restrinja à manipulação de equações e expressões formais, frequentemente utilizadas pelos estudantes sem a devida compreensão de seu significado físico (Vannucchi; Carvalho, 1996).

Nessa perspectiva, aprender Física implica também aprender sobre a história de sua constituição (Karam; Lima, 2022; Kragh, 1987), isto é, compreender o significado atribuído a leis, princípios e modelos à luz das relações conceituais e dos contextos históricos nos quais foram elaborados e debatidos, aspectos que se tornam particularmente visíveis quando analisados sob o enfoque da História e Filosofia da Ciência.

Outro ponto relevante nessa discussão refere-se à relação entre a aprendizagem de conceitos e o papel desempenhado pelos livros didáticos. De modo geral, pode-se afirmar que as ideias apresentadas nesses materiais refletem, ainda que de forma mediada, o conhecimento científico registrado originalmente em fontes primárias. Contudo, essas fontes, em sua complexidade histórica e teórico-matemática, podem se revelar de difícil compreensão, inclusive para professores experientes (Karam, 2021; Karam; Lima, 2022).

Configura-se, assim, uma tensão significativa. De um lado, os livros didáticos tendem a condensar o conhecimento científico, frequentemente simplificando ou suprimindo argumentos, debates e elementos historicamente relevantes. De outro, as fontes primárias preservam a densidade conceitual, a complexidade formal e os impasses que marcaram o desenvolvimento do conhecimento científico, mas apresentam um nível de elaboração que pode dificultar sua incorporação direta ao contexto escolar. Entre esses dois polos, coloca-se o desafio de construir mediações didáticas que permitam articular acessibilidade e rigor conceitual, evitando tanto a simplificação excessiva quanto a reprodução acrítica da complexidade original.

Mais especificamente, no âmbito da Mecânica Quântica não relativística, a chamada Interpretação de Copenhague costuma ser apresentada como a interpretação hegemônica ou ortodoxa da teoria. Tradicionalmente, ela é associada a três pilares fundamentais: a dualidade onda-partícula, o princípio da incerteza e a interpretação probabilística proposta por Max Born. Nos últimos anos, discussões acerca do ensino da dualidade onda-partícula e do princípio da incerteza, com base no uso de fontes primárias, têm sido desenvolvidas na literatura (Lima; Cavalcanti; Ostermann, 2021; Rosa; Lima; Cavalcanti, 2022).

No presente trabalho, trataremos do ensino da interpretação probabilística da Mecânica Quântica a partir da proposta de uso de fontes históricas primárias e secundárias. A interpretação probabilística da função de onda constitui um dos fundamentos centrais do formalismo quântico, ao estabelecer que o módulo ao quadrado da função de onda está associado à distribuição de probabilidades. Ainda que exista amplo consenso quanto ao uso operacional dessa interpretação, diferentes abordagens da Mecânica Quântica divergem quanto aos seus compromissos ontológicos e epistemológicos, mesmo quando preservam a regra de Born como elemento formal da teoria.

Ainda que a Mecânica Quântica seja marcada por controvérsias interpretativas, os livros didáticos, em geral, não explicitam os fundamentos históricos e conceituais que conduziram à formulação da interpretação probabilística. Quando o fazem, recorrem frequentemente a fragmentos descontextualizados de uma discussão mais ampla (Souza; Lima; Karam, 2024), o que tende a produzir uma simplificação histórica que omite aspectos relevantes do processo de elaboração dessa ideia. Tal redução pode impactar diretamente o significado que os estudantes atribuem ao formalismo matemático, reforçando uma compreensão meramente operacional do módulo ao quadrado da função de onda. Diante desse cenário, esta pesquisa parte da tese de que a reconstrução histórico-epistemológica da gênese da interpretação probabilística permite identificar os elementos conceituais essenciais para o seu entendimento, oferecendo subsídios para o desenvolvimento de propostas de ensino que articulem formalismo matemático, contexto histórico e significado físico.

Considerando essas ponderações apresenta-se o seguinte objetivo geral para a presente tese: contribuir para a proposição de um ensino de Mecânica Quântica conceitualmente fundamentado (em contraposição a abordagens meramente tecnicistas), evidenciando os principais aspectos e argumentos relacionados ao

desenvolvimento da interpretação probabilística em diálogo com as fontes históricas primárias e secundárias, de modo a atribuir significado físico ao formalismo matemático adotado. Tendo em vista esse objetivo foram elaboradas as seguintes questões de pesquisa:

1. Que aspectos históricos referentes à interpretação probabilística da mecânica quântica são apagados, mantidos ou transformados nas abordagens adotadas nos livros didáticos de física quântica utilizados no ensino superior?
2. Quais os principais elementos históricos, teóricos e experimentais que subsidiam a gênese da interpretação probabilística da mecânica quântica?
3. Quais as potencialidades e desafios emergem na elaboração de orientações para a construção de uma proposta didática que utiliza fontes primárias a respeito da interpretação probabilística da Mecânica Quântica?

Com o propósito de responder às questões de pesquisa formuladas, propõe-se nesta tese uma investigação estruturada em três estudos complementares. O trabalho está organizado no formato de coletânea de artigos, de modo que cada estudo corresponde a um artigo específico.

O primeiro estudo consiste em uma análise de conteúdo de livros didáticos do ensino superior, focalizando a forma como a interpretação probabilística da Mecânica Quântica é apresentada. A partir dessa análise, busca-se delinear com maior precisão quais elementos conceituais, históricos e epistemológicos estão presentes, ausentes ou são tratados de maneira simplificada nessas obras.

O segundo estudo desenvolve uma investigação histórica com finalidade didática sobre a gênese da interpretação probabilística, com base em fontes primárias e secundárias. A análise das fontes primárias tem como objetivo identificar os principais argumentos, pressupostos e problemas que sustentaram a proposta de interpretar o módulo ao quadrado da função de onda como expressão de probabilidade, situando essa formulação em seu contexto teórico.

Por fim, tomando como referência os resultados dos dois estudos anteriores e em diálogo com a literatura contemporânea da área de Ensino de Física, especialmente no que concerne às abordagens fundamentadas em História e Filosofia da Ciência, propõe-se uma reflexão teórica sobre as potencialidades e os desafios associados a uma construção de orientações para o desenvolvimento de uma proposta didática para o ensino da interpretação probabilística da Mecânica Quântica, articulada de modo coerente com fontes primárias e secundárias.

Espera-se, assim, contribuir para a construção de uma proposta de ensino de Mecânica Quântica que promova uma dimensão reflexiva dos conceitos e favoreça o entendimento de seus fundamentos, ao deslocar o foco exclusivo dos produtos finais da ciência para as ideias, problemas e contextos que os sustentaram historicamente. Em outras palavras, a utilização de fontes primárias, à semelhança do que ocorre na incorporação de textos históricos no ensino de ciências na graduação (Oliveira, 2011), tensiona a dicotomia entre uma suposta objetividade científica e uma leitura histórica considerada subjetiva, abrindo espaço para uma abordagem que integre formalismo, contexto e significado na construção do conhecimento em Mecânica Quântica.

No que se refere ao quadro teórico-metodológico, optou-se por uma pesquisa de natureza qualitativa, documental e de caráter exploratório, cuja finalidade consiste em ampliar a familiaridade com a temática investigada (Creswell, 2011) e construir um entendimento mais aprofundado dos conceitos envolvidos. O delineamento metodológico articula-se de maneira específica a cada um dos três estudos anteriormente descritos, preservando, contudo, a coerência interna do projeto como um todo.

No primeiro estudo, a metodologia adotada para a análise dos livros didáticos foi a análise de conteúdo, conforme proposta por Bardin (2016). Trata-se de um procedimento empírico amplamente utilizado no campo das comunicações, aplicável a diferentes tipos de linguagem, como textos escritos, discursos orais ou representações gráficas. A escolha por essa abordagem justifica-se por sua capacidade de sistematizar a interpretação dos discursos, reduzindo a incerteza das inferências e permitindo uma leitura mais rigorosa das mensagens analisadas. Como destaca Bardin (2016, p. 35), a análise de conteúdo possibilita a “descoberta de conteúdos e de estruturas que confirmam (ou infirmam) o que se procura demonstrar a propósito das mensagens”.

No contexto desta pesquisa, esse procedimento é mobilizado com o objetivo de identificar quais elementos originais relacionados à interpretação probabilística foram preservados, transformados ou suprimidos nos discursos presentes nos livros didáticos, evidenciando as escolhas narrativas e conceituais que moldam a forma como esse conteúdo é apresentado no ensino superior.

Para o segundo estudo, recorreu-se à análise documental de fontes primárias e secundárias relacionadas à temática central da pesquisa, a saber, a interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Inicialmente, foram examinados os artigos

originais de Max Born (1926a, 1926b), nos quais o autor introduz, de maneira pioneira (Jammer, 1966), uma análise dos processos de colisão a partir do formalismo ondulatório de Schrödinger. Nesses trabalhos, Born propõe uma leitura alternativa da função de onda, atribuindo-lhe um caráter probabilístico que se tornaria elemento estruturante da interpretação da teoria quântica (Longair, 2013).

Além desses artigos, foram analisados o livro *Atomic Physics*, de Born, Blin-Stoyle e Radcliffe (1969), bem como o artigo clássico de Rutherford sobre o espalhamento de partículas alfa (Rutherford, 2012), com o objetivo de identificar elementos que contribuíssem para a compreensão do contexto no qual a proposta de Born foi formulada. Essa análise permitiu evidenciar argumentos e ideias de natureza teórica, experimental e analógica que sustentaram a interpretação probabilística associada ao módulo ao quadrado da função de onda.

Complementarmente, foram examinadas fontes históricas secundárias que discutem o problema sob diferentes perspectivas, visando situar a proposta de Born no interior do debate historiográfico contemporâneo. Nessa etapa, a pesquisa documental fundamenta-se também em discussões sobre historiografia da ciência (Kragh, 1987), buscando evitar leituras anacrônicas e promover uma reconstrução historicamente situada dos argumentos envolvidos.

A partir da análise dos livros didáticos, articulada ao exame das principais ideias presentes nas fontes primárias e secundárias, delineamos um percurso interpretativo que fundamenta o desenvolvimento do terceiro estudo. Este último consiste em uma reflexão sistemática acerca das potencialidades e dos desafios envolvidos na elaboração de hipótese de design que subsidiem uma proposta didática que articule coerentemente as ideias centrais das fontes primárias às demandas pedagógicas contemporâneas.

Tais demandas dizem respeito, sobretudo, à necessidade de um ensino que atribua significado ao formalismo matemático, evitando sua apresentação como um conjunto de procedimentos técnicos desvinculados dos problemas físicos que lhe deram origem. Implicam também a construção de abordagens contextualizadas, capazes de explicitar as condições históricas e epistemológicas de emergência das teorias, tensionando a concepção de ciência como um desenvolvimento linear e cumulativo. Nesse horizonte, busca-se favorecer uma aprendizagem fundamentada, no sentido que os conceitos sejam compreendidos em sua gênese, em suas justificativas e em suas implicações, e não apenas manipulados formalmente.

O terceiro estudo é desenvolvido em diálogo com as considerações metodológicas propostas por Karam (2021) acerca da utilização de fontes primárias no ensino de Física, bem como com o modelo de reconstrução educacional, que orienta a articulação entre análise epistemológica do conteúdo, investigação das condições de aprendizagem e elaboração de propostas didáticas. Nessa perspectiva, os trabalhos originais são incorporados ao contexto educacional a partir de cinco eixos orientadores: seleção criteriosa dos trechos; tradução para notação moderna quando necessário; explicitação de objetivos educacionais claros; apoio em fontes secundárias qualificadas; e comparação com livros didáticos contemporâneos. O estudo analisa esses aspectos de maneira integrada, examinando suas implicações teóricas e pedagógicas e discutindo em que medida tal proposta pode contribuir para uma formação conceitualmente reflexiva e epistemologicamente mais crítica no ensino de Física.

Por fim, tendo em mente a organização do estudo já mencionada a tese se estrutura em cinco capítulos. O primeiro capítulo é a introdução. O segundo capítulo trata sobre a análise de livros didáticos quanto a apresentação da interpretação probabilística da MQ. No terceiro capítulo contemplamos uma discussão sobre a interpretação probabilística da MQ alinhada aos trabalhos originais de Born que versam sobre a temática de interesse. No quarto capítulo, apresentaremos uma discussão sobre elementos que possam subsidiar a elaboração de propostas didáticas acerca da interpretação probabilística na Mecânica Quântica. Essa reflexão articula os elementos históricos e formais da contribuição de Born com o exame crítico das potencialidades e limitações inerentes ao uso da abordagem histórica na prática de ensino dessa interpretação. Por fim, no quinto e último capítulo trataremos sobre as considerações finais.

1.1 REFERÊNCIAS

AULETTA, G.; FORTUNATO, M.; PARISI, G. **Quantum Mechanics**. Cambridge University Press, 2009.

BADINO, M.; NAVARRO, J. **A History of Quantum Physics through Textbooks**. Berlin: Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge, 2013.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2016.

BATISTA, G. L. de F.; FERREIRA, J. M. H.; FREITAS, D. B. de. Fontes primárias no ensino de física: considerações e exemplos de propostas. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, vol. 32, p. 663–702, 2015.

BELLER, M. Born's probabilistic interpretation: A case study of "concepts in flux". **Studies in History and Philosophy of Science**, vol. 21, nº 4, p. 563–588, 1990.

BETHE, H. Theory of the Passage of fast corpuscular Rays Through Matter. **Ann. Physik**, vol. 5, p. 325–400, 1930.

BLOKHINTSEV, D. I. **Quantum Mechanics**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1964.

BORN, M. **On the Quantum Mechanics of Collisions**. 1926a.

BORN, M. On the Quantum Mechanics of Collisions Processes. **Zeit Phys**, vol. 37, p. 863–867, 1927.

BORN, M. Physical Aspects of Quantum Mechanics. **Nature**, vol. 119, nº 2992, p. 354–357, 1927.

BORN, M. Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, vol. 38, nº 11, p. 803–827, 1926b.

BORN, M. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, vol. 37, nº 12, p. 863–867, 1926c.

BORN, M.; BLIN-STOYLE, R. J.; RADCLIFFE, J. M. **Atomic Physics**. 8. ed. Blackie, 1969.

BUNGE, M. **Física e Filosofia**. São Paulo: Perspectiva, 2015.

CARDOSO, H. B.; FREIRE, P. de T. C.; FILHO, J. M. Arquimedes e a lei da alavanca: erros conceituais em livros didáticos. **Caderno brasileiro de ensino de Física**, vol. 23, p. 218–237, 2006.

CHAIB, J. P. M. C.; ASSIS, A. K. T. **Distorção da obra eletromagnética de Ampère nos livros didáticos** . scielo , 2007.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics: Waves and particles. Introduction to the fundamental ideas of quantum mechanics**. Wiley, 2005.

CORUSO, F.; OGURI, V. **Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

DUIT, R. *et al.* **The Model of Educational Reconstruction – a Framework for Improving Teaching and Learning Science1**. (D. Jorde & J. Dillon, Orgs.)**Science Education Research and Practice in Europe: Retrosspective and Prospecctive**RotterdamSensePublishers, , 2012. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-6091-900-8_2.

EINSTEIN, A. Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light. **American Journal of Physics**, vol. 33, nº 5, p. 367, 1965.

EISBERG, R.; RESNICK, R. **Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles.** 2nd. ed. New York: John Wile & Sons, 1985.

FAXÉN, H.; HOLTSMARK, J. Contribution to the Theory of the Passage of Slow Electrons Through Gases. **Z. Physik**, vol. 45, nº August, p. 307–324, 1927.

FONG, P. **Elementary Quantum Mechanics**. Addison-Wesley, 1962-. ISSN 2252-3405.

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de conteúdo**. 2. ed. Líber Livro, 2008. (Série Pesquisa).

F.R.S., J. S. T. M. A.; M.A., V. A. B. LXX. The motion of electrons in argon. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, vol. 43, nº 255, p. 593–600, 1922.

GASIOROWICZ, S. **Quantum Physics**. 3. ed. John Wile & Sons, 2003.

GOSWAMI, A. **Quantum Mechanics**. 2nd. ed. Waveland Press Inc, 2003.

GOTTFRIED, K.; YAN, T.-M. **Quantum Mechanics: Fundamentals**. New York, NY: Springer New York, 2003. (Graduate Texts in Contemporary Physics).

GREINER, W.; BROMLEY, D. A. **Quantum Mechanics: An Introduction**. 4nd. ed. 2000.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. 2nd. ed. London: Pearson Education, 2005.

GRIFFITHS, D. . J. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 2011.

GYEONG SOON, I. M. **Experimental constraints on formal quantum mechanics: The emergence of born's quantum theory of collision processes in göttingen, 1924-1927**. 1996-. ISSN 14320657.vol. 50

HEISENBERG, W. **Physics and Philosophy**. London: Penguin Books, 2000.

HEISENBERG, W. Quantum-Theoretical Re-interpretation of Kinematic and Mechanical Relations. **Journal for Physics**, vol. 33, p. 879–893, 1925.

JAMMER, Max. **The conceptual development of quantum mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1966.

JAMMER, M. **The Conceptual Development of Quantum Mechanics.pdf**. New York: McGraw Hill, 1966.

JAMMER, M. **The Philosophy of Quantum Mechanics**. New York: John Wiley and Sons, 1974.

JOHANSSON, A. *et al.* “Shut up and calculate”: the available discursive positions in quantum physics courses. **Cultural Studies of Science Education**, vol. 13, nº 1, p. 205–226, 2018.

KAISER, D. How the hippies saved physics: science, counterculture, and the quantum revival. **Choice Reviews Online**, 2011.

KAISER, D. **Pedagogy and the practice of science**. Cambridge: The MIT Press, 2006.

KARAM, R. A. S.; LIMA, N. W. Using history of physics to teach physics?. *In*: GUISASOLA, J.; MCLOUGHLIN, E. **Connecting Research in Physics Education with Teacher Education 3**. Dublin: The International Commission on Physics Education in cooperation with University of the Basque Country (UPV/EHU) and Dublin City University, 2022. vol. 3, p. 22–38.

KEMBLE, E. C. **The Fundamental Principles of Quantum Mechanics**. McGraw Hill, 1937.

KHRENNIKOV, A. Interpretations of probability. **Interpretations of Probability**, 2009.

KUHN, T. **The structure of Scientific Revolutions**. Terceiraed. Chicago: The University of Chicago Press, 1996.

KUKOLICH, S. G. Demonstration of the Ramsauer-Townsend Effect in a Xenon Thyratron. **American Journal of Physics**, vol. 36, p. 701–703, 1968.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Quantum Mechanics: Non-relativisti theory**. 3. ed. Pergamon, 1991.

LATOUR, B. **Reassembling the Social: An Introduction to Actor-Network-Theory**. Oxford University Press, 2005.

LIBOFF, R. L. **Introductory Quantum Mechanics**. 4. ed. Addison-Wesley, 2003.

LIMA, N. W. *et al.* A Metalinguistic Study on the Photon Interpretation Present in Physics Textbooks Approved in PNLDEM 2015 : Elements for a Symmetric Sociology of Science Education. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, vol. 18, nº April, p. 365–397, 2018.

LIMA, N. W. *et al.* **Louis de Broglie’s wave-particle duality: from textbooks_ blackboxes to a chain of reference presentation** . scielo , 2020.

LIMA, N. W.; CHAIB, J. P. Uma tradução comentada do artigo “A Termodinâmica Oculta das Partículas” de Louis de Broglie. **Revista Brasileira de História da Ciência2**, vol. 43, p. e20210246, 2021.

LIMA, N.; KARAM, R. Particle velocity = group velocity: A common assumption in the different theories of Louis de Broglie and Erwin Schrödinger. **American Journal of Physics**, vol. 89, nº 5, p. 521–528, 2021.

LIMA, N.; KARAM, R. Schrödinger ’ s Equation from Snell ’ s Law. **European Journal of Physics**, vol. 43, p. 0–11, 2022.

LONGAIR, M. **Quantum Concepts in Physics: An Alternative Approach to the Understanding of Quantum Mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

MARTINS, I. Analisando livros didáticos na perspectiva dos Estudos do Discurso : compartilhando reflexões e sugerindo uma agenda para a pesquisa. **Pro-Posições**, vol. 1, nº 49, p. 117–136, 2006.

MARTINS, R. de A.; ROSA, P. S. **História da teoria quântica - a dualidade onda-partícula, de Einstein a De Broglie**. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

MATTHEWS, M. R. **Science teaching : the role of history and philosophy of science**. New York: Routledge, 1994.

MERZBACHER, E. **Quantum mechanics**. 3nd. ed. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1998.

MESSIAH, A. **Quantum Mechanics**. North-Holland, 1961.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa Crítica**. 2ªed. 2010.

MOTT, N. F. Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei. *In*: PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON. SERIES A, CONTAINING PAPERS OF A MATHEMATICAL AND PHYSICAL CHARACTERVOLUME 124, ISSUE 794. The Royal Society, 1929. p. 425–442.

NARDI, R. Memórias da Educação em Ciências no Brasil: A Pesquisa em Ensino de Física. **Investigações em Ensino de Ciências**, vol. 10, nº 1, p. 63–101, 2005.

NEUMANN, J. Von. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. 1. ed. Berlin: Julius Springer, 1932.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa Física Moderna e Contemporânea no ensino médio. **Investigações em Ensino de Ciências**, vol. 5, nº 1, p. 23–48, 2000.

OSTERMANN, F.; RICCI, T. Relatividade restrita no ensino médio: os conceitos de massa relativitica e de equivalência massa-energia em livros didáticos de física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, vol. 21, nº 1, p. 83–102, 2004.

PAIS, A. Max Born ' s Statistical Interpretation of Quantum Mechanics Author (s): A . Pais Published by : American Association for the Advancement of Science Stable URL : https://www.jstor.org/stable/1688979 Max Born ' s Statistical Interpretation of Quantum Mec. vol. 218, nº 4578, p. 1193–1198, 1982a.

PAIS, A. Max Born's Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. **Science**, vol. 218, nº 4578, p. 1193–1198, 1982b.

PESSOA JR., O. **Conceitos de Física Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2003a.

PESSOA JR., O. **Conceitos de Física Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2003b.

POWELL, J. L.; CRASEMANN, B. **Quantum Mechanics**. Addison-Wesley, 1961.

RAMSAUER, C. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. **Annalen der Physik**, vol. 369, nº 6, p. 513–540, 1921.

RUTHERFORD, E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. **Philosophical Magazine**, vol. 92, nº 4, p. 379–398, 2012.

SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1994.

SCHIFF, L. I. **Quantum Mechanics**. McGraw Hill, 1968.

SCHRÖDINGER, E. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. **Physical Review**, vol. 28, nº 6, p. 1049–1070, 1926.

SCHRÖDINGER, E. **Four Lectures on Wave Mechanics**. London: London, Glasgow, Blackie & son limited, 1928.

SCHRÖDINGER, E. Quantisierung als Eigenwertproblem. **Annalen der Physik**, vol. 384, nº 4, p. 361–376, 1926.

SHANKAR, R. **Principles of Quantum Mechanics**. 2nd. ed. 1994.

SINGH, C. Student understanding of quantum mechanics. **American Journal of Physics**, vol. 69, nº 8, p. 885–895, 2001.

SOUZA, D. S.; LIMA, N. W.; KARAM, R. A. S. A gênese da interpretação probabilística em livros didáticos de mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 46, p. e20230238, 2024.

VON NEUMANN, J.; BEYER, R. T. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. Princeton University Press, 2018. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/j.ctt1wq8zhp. Acesso em: 4 mar. 2024.

WENTZEL, G. Zwei Bemerkungen über die Zerstreuung korpuskularer Strahlen als Beugungserscheinung. **Zeitschrift für Physik**, vol. 40, nº 8, p. 590–593, 1926.

WESSELS, L. What Was Born ’ s Statistical Interpretation ? Author (s): Linda Wessels Source : PSA : Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association , 1980 , Vol . 1980 , Volume Two : Symposia and Invited Papers (1980), pp . 187- Publi. vol. 1980, p. 187–200, 1980.

WHEATON, B. R. **The Tiger and the Shark: empirical roots of wave-particle dualism**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

2 PRIMEIRO ESTUDO

A gênese da interpretação probabilística em livros didáticos de mecânica quântica

The genesis of probabilistic interpretation in quantum mechanics textbooks

Daniel S. Souza*[1], Nathan W. Lima[1], Ricardo A. S. Karam[2]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil.
[2]University of Copenhagen, København, Dinamarca.

Neste artigo propomos uma análise de vinte livros didáticos utilizados no ensino de Física em cursos de licenciatura e bacharelado, com o objetivo de investigar como eles abordam e justificam a interpretação probabilística do quadrado do módulo da função de onda na Mecânica Quântica. Do ponto de vista do ensino de física, destaca-se a importância de ensinar não apenas os conceitos científicos, mas também as justificativas subjacentes a esses conceitos. Nesse sentido, a discussão da análise das obras busca amparo nas fontes primárias e secundárias que tratam sobre a temática. As principais questões a serem respondidas são quais argumentos e evidências são apresentados para legitimar a interpretação probabilística associada a função de onda e quais limitações são identificadas em cada abordagem didática adotada.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Interpretação Probabilística, Livros Didáticos.

In this article, we propose an analysis of twenty textbooks used in Physics education for undergraduate and graduate programs. The main objective is to investigate how these textbooks approach and justify the probabilistic interpretation of the square of the modulus of the wave function in Quantum Mechanics. From the perspective of physics education, the importance of teaching not only scientific

* Endereço de correspondência: daniel.souza@iffarroupilha.edu.br

concepts but also the underlying justification for these concepts is highlighted. Therefore, the discussion of the analysis of these works is based on primary and secondary sources related to the topic. The main questions to be addressed are what arguments and evidence are presented to legitimize the probabilistic interpretation associated with the wave function and what limitations are identified in each adopted didactic approach.

Keywords: Quantum Mechanics, Probabilistic Interpretation, Textbooks.

2.1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica (MQ) é uma das teorias de maior sucesso da física, tendo sobrevivido a inúmeros testes experimentais ao longo dos anos. Sua robustez teórica e experimental permite a compreensão das interações ao nível dos constituintes da matéria. O caráter estatístico intrínseco dessa teoria é um dos aspectos que a fundamentam e permite sua compreensão. Tal caráter foi devidamente formalizado por von Neumann (Neumann, 1932) que o descreve de em termos de autoestados e autovalores. Nessa perspectiva, quando uma certa grandeza física A é medida em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $P(a_n)$ de obter como resultado o autovalor não degenerado a_n do correspondente observável $\hat{A}$[1] é,

$$P(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 \tag{2.1}$$

onde $|u_n\rangle$ é o autovetor normalizado do observável $\hat{A}$ associado ao autovalor a_n.

O formalismo proposto por von Neumann tem um caráter mais geral, compreendendo também o entendimento do caráter estatístico em termos da função de onda. Na representação espacial da função de onda o seu modulo quadrado $(\psi^*\psi)$ desempenha um papel de densidade de probabilidade. Isto é, $(\psi^*\psi)dx$ corresponde à probabilidade de encontrar uma partícula entre x e $x + dx$. Tal enunciado pode ser entendido como uma regra de correspondência (Bunge, 2015; Jammer, 1974), ou seja, ela conecta um elemento abstrato da teoria (a função de onda) com uma grandeza empiricamente mensurável (a probabilidade de uma medida). Embora essa ideia tenha começado a ser desenvolvida por diversos físicos, como Dirac e Jordan (Longair, 2013), usualmente atribui-se sua gênese aos trabalhos de Max Born (Born,

[1] Nesse formalismo o observável é um operador.

1927). Posteriormente, essa viria a ser uma das teses centrais do que ficou conhecido como interpretação de Copenhague (Heisenberg, 2000).

Nesse sentido, a interpretação probabilística[2] atribui um caráter puramente epistêmico à função de onda (Pessoa Jr., 2003a), isto é, a função de onda é entendida como uma representação matemática que nos permite encontrar valores de probabilidade. De forma geral uma interpretação envolve um conjunto de afirmações que não possuem implicações experimentais. Mesmo assim, estamos adotando o termo interpretação probabilística porque ele é amplamente usado nos livros didáticos e se refere ao fato de que o significado da função de onda passou a ser interpretado como algo relacionado a conceitos probabilísticos. Deve-se ressaltar que essa não era a interpretação original de outros físicos como Louis de Broglie e Erwin Schrödinger (Lima; Karam, 2021). Em especial, na década de 1960, Louis de Broglie voltou a se opor a interpretação epistêmica da função de onda, propondo a noção de um campo real (Lima; Chaib, 2021).

As pesquisas na área de Ensino de Física vêm há muito tempo reforçando a importância de que os alunos aprendam não somente os conceitos científicos; mas, também, as justificativas que estão por trás de tais conceitos (Moreira, 2010). Por exemplo, tão importante quanto saber que o módulo quadrado da função de onda corresponde a uma densidade de probabilidade é entender como se chegou a tal noção bem como quais evidências teóricas e empíricas corroboram essa afirmativa[3]. Um ensino que esteja preocupado com essa justificativa (e não somente a apresentação de informações) tem maior potencial de aprendizagem para os discentes, uma vez que lhes permite atribuir significado aos elementos matemáticos abstratos a que estão sendo apresentados.

Nesse sentido, é importante que, em um curso de Física, permita-se que os alunos dominem as ferramentas matemáticas e simbólicas daquele campo específico do conhecimento – o que se pode chamar de aspecto instrumental do aprendizado. Mas também é importante que os alunos conectem os conceitos, entendam o seu

[2] Como mencionamos, a associação do módulo quadrado da função de onda com uma densidade de probabilidade, a rigor, é uma regra de correspondência. Entretanto, historicamente, ela carrega consigo a noção de que a função de onda tem caráter apenas instrumental – o que entra no campo a interpretação da teoria, e por isso, é chamada de interpretação. Há interpretações que a regra de correspondência é mantida mesmo que se atribua significa físico para ψ, como no casso da Teoria de Variáveis Ocultas de David Bohm – mas não é nosso objetivo entrar nessa discussão.

[3] Deve-se ressaltar que, embora, hoje, a interpretação probabilística seja um postulado (portanto, não sendo provada), historicamente, ela foi motivada por discussões teóricas, experimentais e analogias como apresentaremos na próxima seção.

desenvolvimento, saibam os justificar, e até mesmo questionar o limite de validade das propostas estudadas – uma dimensão mais reflexiva do aprendizado. É reconhecido que, a partir da segunda guerra mundial, a pedagogia científica tem se voltado sobretudo para a dimensão instrumental da aprendizagem (Kaiser, 2011; Nardi, 2005). Essa abordagem tem sido criticada amplamente na área de ensino (Johansson *et al.*, 2018).

Diante disso, diferentes abordagens para o Ensino de Mecânica Quântica têm sido propostas, como a abordagem postulacional, histórica e fenomenológica (Ostermann; Moreira, 2000). Essas diferentes propostas apresentam vantagens e desafios específicos, mas concordam que existe um desafio concreto em contribuir para que os alunos atribuam significado ao formalismo estudado. Nesse mesmo sentido, a literatura especializada aponta que, mesmo alunos que conseguem resolver exercícios de Mecânica Quântica, têm dificuldade de atribuir significado físico ao formalismo (Singh, 2001).

Ademais, é reconhecido que o livro didático apresenta um papel central no processo de formação de cientistas (Kaiser, 2006) e na formação de professores (Lima *et al.*, 2018). Por isso, analisar como livros didáticos apresentam determinado conceito é uma forma prática de entendermos como a comunidade científica vem formalizando essa noção – proposta que vem sendo discutida desde o trabalho seminal de Thomas Kuhn (Kuhn, 1996), com diferentes implicações para o Ensino de ciências (Badino; Navarro, 2013; Martins, 2006). Em especial, existem trabalhos nacionais na área de Ensino de Física que apontam distorções significativas em livros didáticos com relação ao eletromagnetismo (Chaib; Assis, 2007), na teoria da relatividade especial (Ostermann; Ricci, 2004) e na proposta de dualidade onda-partícula de Louis de Broglie (Lima *et al.*, 2020), entre outros (Cardoso; Freire; Filho, 2006; Martins, 2006).

Buscando contribuir para o ensino de Mecânica Quântica, neste artigo, temos por objetivo analisar como livros didáticos de Ensino superior introduzem a interpretação probabilística da função de onda. Isto é, pretendemos investigar como livros amplamente usados no ensino superior na formação de bacharéis e licenciados em Física apresentam e justificam a interpretação probabilística da função de onda, quais argumentos e elementos eles mobilizam para indicar aos estudantes a necessidade de tal proposição. Em especial, pretendemos responder às seguintes perguntas: 1) quais justificativas e evidências (teóricas, empíricas ou analogias) são

fornecidas em livros contemporâneos para legitimar a interpretação probabilística? 2) A partir dos resultados obtidos, que lacunas didáticas foram encontradas e quais possíveis caminhos podem nos ajudar a superar tais deficiências?

Sobretudo, a importância dessa discussão se dá no sentido de mapear a discussão didática existente sobre o assunto a fim de viabilizar a busca de novas propostas. É importante que tenhamos conhecimento de como está fundamentada a produção contemporânea para verificar a necessidade e a potencialidade de novas propostas didáticas que contribuam para uma aprendizagem significativa de mecânica quântica e, especialmente, da intepretação probabilística.

Para responder as perguntas apresentadas, na seção 2, apresentamos uma breve discussão histórica sobre a gênese e desenvolvimento da interpretação probabilística justamente para apontar as justificativas e evidências históricas para esse conceito. Na seção 3, apresentamos a metodologia de pesquisa para análise dos livros didáticos, a dizer, a análise de conteúdo de Bardin. Na seção 4, apresentados os resultados. E, por fim, na seção 5 apresentamos nossas considerações finais e reflexões para área de Ensino de Mecânica Quântica.

2.2 GÊNESE DA INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA FUNÇÃO DE ONDA

O início do século XX foi marcado por intensos debates no campo filosófico e científico, sobretudo na área da física. Nesse período, uma crescente necessidade de entender e interpretar sistemas microscópicos levou uma série de cientistas a se debruçar sobre os mais variados temas relacionados a essa problemática. Nesse contexto, o comportamento ondulatório de sistemas físicos, ou seja, perturbações de alguma grandeza física no espaço com uma periodicidade no tempo, assim como a dinâmica de corpos rígidos e consequentemente de partículas (corpúsculos), já eram bem conhecidos na época constituindo duas alternativas distintas para descrever os sistemas clássicos.

Apesar disso, é bem sabido, que diferentes estudos apontavam para a necessidade de conciliar os dois grupos de propriedades aos mesmos fenômenos, o que ficou conhecido como dualidade onda-partícula (Martins; Rosa, 2014; Wheaton, 1983). O físico Erwin Schrödinger (1887- 1961) tornou-se um dos protagonistas desse período, quando publicou em 1926 na revista Annalen der Physik quatro artigos intitulados “Quantização como um Problema de Autovalor” (Quantisierung als

Eigenwertproblem no original) (Schrödinger, E., 1926), dando origem àquilo que posteriormente ficou conhecido como Mecânica Ondulatória.

De forma geral, o formalismo de Schrödinger atribuía ao sistema (partículas massivas como elétrons) um caráter ondulatório, fato esse que foi motivo de grandes discussões e dúvidas na ocasião. Embora Schrödinger tenha em princípio tentado atribuir um significado físico para a função de onda, as crescentes críticas o fizeram a colocar em xeque esse significado, como ele mesmo destaca em um dos seus trabalhos,

> A afirmação de que o que realmente acontece é corretamente representado ao se descrever um movimento de onda não necessariamente significa a mesma coisa que: o que realmente existe é o movimento de onda. Veremos mais adiante que, ao generalizar para um sistema mecânico arbitrário, somos levados a descrever o que realmente acontece nesse sistema por meio de um movimento de onda no espaço generalizado de suas coordenadas (espaço-q). Embora este último tenha um significado físico bem definido, não pode ser dito que ele "existe" no sentido comum da palavra. Portanto, um movimento de onda nesse espaço também não pode ser dito que "existe" no sentido ordinário da palavra. É apenas uma descrição matemática adequada do que acontece. (Schrödinger, 1928).

A despeito da controvérsia sobre a função de onda, para dar conta do fato de que o sistema emitia radiação eletromagnética, Schrödinger relacionou a função de onda ψ um “significado eletromagnético” (Jammer, M, 1966), associando essa função a uma distribuição de carga (densidade de carga),

$$\rho = e\psi\psi^* \tag{2.2}$$

derivando assim, do seu formalismo, uma “equação da continuidade”. Dessa forma, considerando que essa carga está distribuída em uma pequena região do espaço e estabelecendo uma associação entre a eletrodinâmica e a função de onda, Schrödinger pode interpretar, pelo menos em um dado momento, que os corpúsculos são grupos de ondas localizados em uma pequena região formados pela superposição de funções de ondas ψ (Jammer, M, 1966)[4]. A rigor o pacote de onda que representa uma partícula livre se dispersa no espaço ao longo do tempo podendo implicar uma distribuição de carga mais dispersa, o que de fato nunca foi verificado, a carga sempre é detectada de forma pontual.

Em seus trabalhos sobre MQ Schrödinger essencialmente faz uma analogia ótico-mecânica (Lima; Karam, 2022) e obtém uma equação geral em termos de uma função de onda. Posteriormente utiliza sua prescrição para solucionar o “oscilador

[4] Para maiores detalhes ver “The Conceptual Development of Quantum Mechanics” de M. Jammer.

harmônico linear". Dessa forma, ele tenta mostrar que é possível compatibilizar o comportamento do sistema com a ideia de pacotes de ondas.

Entretanto, no mesmo período, Heisenberg (1901-1976) faz duras críticas à essa concepção de pacotes de ondas. No "oscilador harmônico" os níveis de energia são igualmente espaçados, isso o torna um caso bastante especial e compatível com a imagem concebida por Schrödinger para as ondas (Longair, 2013; Pais, 1982a). De forma geral as ondas se dispersam no espaço tornando-se incompatível com a imagem de que as partículas são pequenos pacotes de ondas localizadas que se propagam. Outras objeções à concepção de Schrödinger derivam dos efeitos observados em experimentos de difração de elétrons em cristais e de processos de colisões (espalhamento) onde é difícil compatibilizar a estabilidade das partículas com a dispersão da função de onda (Jammer, M, 1966).

Antes da proposição da Mecânica Ondulatória de Schrödinger, alguns trabalhos já começavam a introduzir noções probabilísticas na teoria quântica. Primeiramente, é notório que ela nasce de estudos estatísticos sobre a radiação, herdando o conceito de probabilidade dos estudos de Boltzmann, como acontece no artigo de Einstein de 1905 sobre a natureza da radiação (Einstein, 1965). Einstein, também, em 1917, deriva a equação de Planck a partir da noção de probabilidades de transição de níveis de energia. Embora, segundo Einstein, essas probabilidades deveriam ser interpretadas no sentido estatístico (sem implicar um indeterminismo intrínseco), Bohr e outros viram nessa discussão um reconhecimento de uma propriedade fundamental da natureza (Beller, 1990).

Ademais, deve-se ressaltar que o desenvolvimento da Mecânica Matricial por Heisenberg, Dirac, Jordan e Pauli, a partir de 1925, permitia calcular os níveis de energia do oscilador harmônico e do átomo de hidrogênio, bem como a intensidade das diferentes linhas de emissão, o que estaria associado com a frequência relativa das transições quânticas. Nesse contexto, contrapondo-se a interpretação realista para a função de onda de Schrödinger, Max Born (1882-1970) publica um artigo sobre o processo de colisão de elétrons contra alvos atômicos (Born, 1927). Neste trabalho, Born cita o trabalho de Heisenberg (Heisenberg, 1925) relacionados ao desenvolvimento do formalismo matricial da MQ (o próprio Born contribuiu com esses trabalhos) e o artigo da mecânica ondulatória de Schrödinger (Schrödinger, E, 1926). Dessa forma, o cenário na época se dividia (de forma simplista) entre estabelecer relações entre quantidades observadas (formalismo de Heisenberg) ou atribuir um

processo dinâmico ao sistema quântico, porém interpretá-lo como um pacote de ondas que se propaga no espaço (formalismo de Schrödinger).

Por outro lado, motivado por recentes experimentos envolvendo colisão de elétrons, entre eles os realizados por James Franck (1882-1964) e seus colaboradores, Born estava inclinado a conceber uma natureza corpuscular associada aos elétrons (Pais, 1982a). Mesmo reconhecendo mais tarde que a questão mais relevante não estava na controvérsia entre a representação corpuscular ou ondulatória e sim na solução para a transição de estado quântico (Beller, 1990), o apelo ao caráter corpuscular teve importante influência na sua interpretação. Em relação a essa questão, Born comenta que,

> As ondas que satisfazem essa equação não representam o movimento das partículas de matéria; elas apenas determinam os possíveis movimentos, ou melhor, estados, da matéria. A matéria pode sempre ser visualizada como consistindo de massas pontuais (elétrons, prótons), mas em muitos casos, as partículas não devem ser identificadas como indivíduos, por exemplo, quando elas formam um sistema atômico. (BORN, 1927).

Nesse contexto, o caráter complexo da dualidade onda-partícula não é um elemento que traz muitas dificuldades a sua interpretação e sim uma possibilidade do formalismo. Esse aspecto evidência uma postura muito mais preocupada em resolver outras questões, como a transição de estado comentada anteriormente, do que considerar o curioso aspecto dual da matéria que foi exaustivamente explorado e confirmado nas décadas seguintes.

Apesar de reconhecer as potencialidades do formalismo desenvolvido por Schrödinger enquanto princípio dinâmico, Born rejeita a interpretação de Schrödinger para a função de onda e propõe uma alternativa para essa concepção. Para testar sua interpretação, Born propõe uma análise da colisão de elétrons contra alvos (átomos), seguindo a prescrição do formalismo de Schrödinger (Born, 1927). Os elétrons (antes e depois da colisão) longe do centro de espalhamento (nos limites assintóticos) podiam ser considerados livres da influência do potencial do centro espalhador. Dessa forma, Born obtém a solução para a onda incidente e espalhada. A análise realizada por Born em seu artigo, consistiu em utilizar um tipo de aproximação, reconhecida posteriormente como aproximação de Born (Wessels, 1980), que de forma geral é uma aplicação de teoria de espalhamento de ondas planas (Longair, 2013).

Na interpretação probabilística de Born a natureza corpuscular não é abandonada, entretanto para compatibilizar esse fato com o formalismo de Schrödinger (ondulatório), ele é conduzido a uma interpretação estatística da função de onda. Ou seja, não podemos dizer categoricamente qual o estado final que o sistema adquire, essa questão perde o sentido nessa interpretação. Ao invés disso, deveríamos nos perguntar “Qual é a probabilidade de um estado particular após a colisão?” (Born, 1927). Assim, Born estabelece uma solução “meio termo” (Jammer, M, 1966) para a interpretação da função de onda que é a solução da equação de Schrödinger, uma tentativa de reconciliar ondas e partículas. Nessa perspectiva, a função de onda não adquire um “status ontológico”, os corpúsculos (elétrons) continuam na condição de principais elementos da natureza. Entretanto, a função de onda ψ carrega consigo informações essenciais da “dinâmica” desses corpúsculos nesse novo regime de validade (“em dimensões atômicas”). Sobre essa perspectiva Born chega a afirmar que “o movimento da partícula segue as leis da probabilidade, mas a própria probabilidade se propaga de acordo com as leis causais.” (Born, 1927). Desse modo, ele renuncia a natureza ondulatória dos corpúsculos e tenta estabelecer uma associação da função de onda à presença das partículas (Jammer, M, 1966) por meio de uma interpretação estatística[5].

Nesse contexto, a função de onda assume um papel mediador entre a natureza do sistema físico (corpuscular) e seus efeitos dinâmicos (probabilísticos). As partículas, entidades reais para Born, de alguma forma se orientam no espaço de acordo com a dinâmica estabelecida pela equação de Schrödinger. Born complementa esse quadro afirmando que essa situação está “intimamente relacionada a considerar as ondas de Broglie-Schrödinger como campos fantasmas, ou melhor ainda, campos guias” [p.2, nossa tradução], tal como uma ideia concebida por Einstein. A representação de que as partículas poderiam se orientar de acordo com a dinâmica de um campo é herdada de uma imagem concebida por Einstein ao relacionar os quanta de luz (fótons) ao campo eletromagnético (Jammer, M, 1966). Em relação a essa questão, Pais (Pais, 1982a) discorre sobre um comentário de Wigner que conhecia pessoalmente Einstein na década de 1920,

> a imagem [de Einstein] tem uma grande semelhança com o quadro atual da mecânica quântica. No entanto, Einstein, embora de certa forma gostasse

[5] Para maiores detalhes ver, Quantum Concepts in Physics: An Alternative Approach to the Understanding of Quantum Mechanics de M. Longair.

> dela, nunca a publicou. Ele percebeu que ela está em conflito com os princípios de conservação. (Pais, 1982a).

Assim, a despeito da controvérsia a respeito da imagem da função de onda como um *campo guia*, Born faz questão de mencionar em seu artigo essa imagem da função de onda, acrescentando então mais um elemento de influência sobre sua concepção da MQ. Mesmo que nas atuais abordagens da MQ não se mencione essa questão, é curioso que analogias com situações bastante distintas foram utilizadas como argumento para se reforçar uma hipótese.

A interpretação probabilística de Born da mecânica ondulatória de Schrödinger, diferentemente da interpretação deste último, confere um novo status aos sistemas quânticos, uma vez que não determina categoricamente a ocorrência de um evento e sim a probabilidade de que ele ocorra. Mais ainda, essa probabilidade associada aos sistemas quânticos difere das "estatísticas" encontradas nos casos clássicos como na teoria de probabilidades (Khrennikov, 2009) e mecânica estatística conferindo uma característica singular à interpretação probabilística de Max Born (Longair, 2013). A título de ilustração, se considerarmos a probabilidade de encontrar uma partícula classicamente (tal como na mecânica estatística clássica) que pode percorrer caminhos distintos, estamos considerando que a probabilidade de encontrar partícula é a soma das probabilidades para os diferentes caminhos, ou seja,

$$P(x) = P_1 + P_2. \tag{2.3}$$

Por outro lado, considerando o formalismo de Schrödinger, a probabilidade de encontrar a partícula é dada pelo quadrado do módulo da função de onda. Assim, para efeitos comparativos, se considerarmos que a função de onda é uma superposição de dois estados $\psi = \psi_1 + \psi_2$ (“duas possibilidades”), a probabilidade fica,

$$|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1 = P_1 + P_2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1, \tag{2.4}$$

que, evidentemente difere da situação anterior. Assim, ao introduzir uma interpretação probabilística Born não só se distância das visões concorrentes da física quântica (como a de Schrödinger e de Heisenberg por exemplo) mas também inaugura uma nova epistemologia a respeito do caráter estatístico relacionado aos fenômenos quânticos (Jammer, M, 1966).

Cabe destacar que a função de onda é uma possibilidade de representação para os estados dos sistemas quânticos. Existem outras representações igualmente relevantes. Em seu trabalho Born utilizou apenas a representação espacial da função de onda para discutir o caráter probabilístico.

Entretanto, como verificou-se posteriormente, esse caráter também está presente em outras representações.

A gênese da interpretação de $|\psi|^2$ de fato não pode ser reduzida a uma simples afirmação. Mesmo que sua hipótese a priori a respeito do caráter estatístico pudesse em princípio ser justificada pelo sucesso em explicar fenômenos observáveis (BORN, 1927), ainda restaria compreender os motivos ou justificativas que levaram Born a considerar sua hipótese. Para Beller (Beller, 1990), as raízes da interpretação não podem ser simplesmente derivadas dos seus artigos originais. Assim, para construir uma ideia mais adequada sobre essa concepção somos levados a considerar uma série de questões que contribuíram para a proposta interpretativa, questões essas que consideram analogias, construções teóricas e resultados experimentais.

No que diz respeito a aplicabilidade das ideias defendidas por Born, podemos citar os trabalhos de Wentzel que usou o método utilizado por Born da abordagem da mecânica ondulatória para derivar a fórmula de espalhamento de Rutherford (Gyeong Soon, 1996-), enquanto Faxén e Holtsmark (Faxén; Holtsmark, 1927), Mott (Mott, 1929) e Bethe (Bethe, 1930) usaram a mesma abordagem para estudar a passagem de partículas rápidas e lentas através da matéria. Entre os sucessos desses trabalhos estava a interpretação do efeito Ramsauer-Townsend, o mínimo na seção transversal para o espalhamento de elétrons de baixa energia nos gases nobres, argônio, criptônio e xenônio (F.R.S.; M.A., 1922; Ramsauer, 1921) – esse fenômeno não tinha explicação de acordo com a física clássica, mas é encontrado naturalmente na teoria quântica de espalhamento de elétrons (Kukolich, 1968).

Esse breve relato certamente não esgota o assunto e muito menos tem a pretensão de ser uma síntese definitiva a respeito do desenvolvimento da interpretação probabilística. Por outro lado, ilustra e contextualiza alguns elementos que consideramos relevantes para os propósitos deste trabalho, uma vez que contrastamos as abordagens encontradas nos livros com uma narrativa coerentemente conectada com os trabalhos de Born.

2.3 METODOLOGIA

Como o objetivo do trabalho é analisar livros didáticos quanto sua apresentação da interpretação probabilística, optamos por uma perspectiva de pesquisa qualitativa, ou seja, uma abordagem que permite um entendimento de um

contexto específico com objetivo de explorar as abordagens encontradas. Por ser uma pesquisa qualitativa, não estamos interessados em generalizar resultados e sim entender como os livros analisados abordam a temática e como isso pode influenciar o ensino do tema em questão. Para fins de análise adotamos o método de análise de conteúdo baseado em Bardin (Bardin, 2016). Segundo a autora, a análise de conteúdo é “[...] um conjunto de instrumentos metodológicos cada vez mais sutis em constante aperfeiçoamento, que se aplicam a “discursos” (conteúdos e continentes) extremamente diversificados” (Bardin, 2016). Nos livros didáticos a comunicação dos “discursos” realiza-se por meio de textos, neles encontramos elementos que interpretados pelo leitor adquirem significados, constituindo assim uma base de interpretação para o conteúdo exposto.

Na pesquisa em questão, estamos interessados em evidenciar as formas como o conteúdo da gênese da interpretação probabilística é apresentada nos livros didáticos utilizados no ensino superior. Além disso, propomos problematizar e evidenciar como as diferentes abordagens encontradas podem implicar em possíveis concepções a respeito da gênese dessa interpretação. Assim, o método de análise de conteúdo mostra-se como uma ferramenta adequada e capaz de fornecer subsídios para organizar e apresentar sistematicamente como esses livros didáticos abordam o tema de interesse, além de propiciar uma discussão qualificada a respeito de possíveis desdobramentos no ensino de física.

De forma geral, podemos pensar a estrutura dessa análise organizada em três passos: pré-análise; exploração do material, categorização ou codificação; tratamento dos resultados obtidos e interpretação (Bardin, 2016). Primeiramente selecionamos e organizamos o material a ser analisado, no caso específico desse estudo, isso inclui uma pré-análise dos livros didáticos de física observando o que está acessível e se existe coerência entre o que será analisado e os objetivos propostos na pesquisa. Ademais, Bardin (Bardin, 2016) recomenda uma leitura flutuante dos textos escolhidos, em nosso caso, os livros didáticos. Isso pressupõe uma escolha a priori dos livros e uma seleção a posteriori dos trechos de interesse. Com isso, constituímos o corpus a ser analisado, formulamos objetivos e preparamos o material a ser explorado. Essa etapa foi realizada primeiramente pelo autor e posteriormente compartilhada e discutida com os coautores desse estudo.

Selecionados os livros, o próximo passo constituiu-se na exploração do material. Esse momento da análise caracteriza-se pela codificação e categorização

do material. A codificação é um elemento crucial nesse tipo de análise, pois auxilia o recorte das unidades de registro e de contexto. Para isso, define-se uma unidade de registro que pode ser uma palavra, tema, objeto entre outros (Bardin, 2016). Para Franco: “A Unidade de Registro é a menor parte do conteúdo, cuja ocorrência é registrada de acordo com as categorias levantadas” (Franco, 2008).

Para selecionar os trechos para análise levamos em consideração a unidade de registro (Interpretação Probabilística) presente nos capítulos (ou seções) que apresentam especificamente essa temática. Ressaltamos que analisamos somente as seções em que há a primeira apresentação sobre o tema, ou seja, quando ele é introduzido ao aluno, não investigando argumentos que possam estar espalhados ao longo do livro didático. Uma vez identificados os capítulos ou seções pertinentes, parte-se para uma segunda restrição, um recorte mais refinado onde identificamos as unidades de contexto. Segundo Bardin (Bardin, 2016) a unidade de contexto,

> …serve de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores a da unidade de registro) são ótimas para que se possa compreender a significação exata da unidade de registro. (Bardin, 2016).

Para Bardin (Bardin, 2016) a unidade de contexto é guiada por dois critérios, o custo e a pertinência. Nesse sentido, as dimensões dessa unidade devem ser tal que cada elemento selecionado possibilite a compreensão precisa da(s) unidade(s) de registro(s). Nesse momento é possível organizar todo o material explorado em categorias de análise. Para Bardin a categorização é “uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos” (Bardin, 2016). De forma geral, o processo de categorização pode ocorrer de duas maneiras: as categorias são previamente fornecidas, e os elementos analisados são divididos à medida que são encontrados; ou as categorias são evidenciadas à medida que classificamos analogicamente e progressivamente os elementos (Bardin, 2016). Assim, como estamos interessados em explorar as diferentes abordagens encontradas nos livros didáticos, optamos pela primeira forma. Esta etapa foi realizada manualmente pelo autor do artigo, após isso, realizou-se um processo de três momentos de análise e conferência com os coautores. Para cada momento, teve-se um período de ajustes e correção até que todos os três momentos fossem concluídos. Diferentemente de uma análise quantitativa, onde podemos analisar os dados obtidos

dentro de uma margem de erro, a análise qualitativa proposta para esse estudo exigiu uma estratégia de análise e conferência em diferentes rodadas com os coautores para que o resultado refletisse coerência na convergência das diferentes concepções dos autores do estudo.

Terminado a etapa de exploração e com as categorias definidas, passamos para a última etapa da análise, o tratamento dos resultados obtidos e a interpretação (Bardin, 2016) que será abordado na seção seguinte. Todo o processo anteriormente descrito permite ao pesquisador uma visão ampla dos dados. Embora os livros didáticos possuam diferentes particularidades na apresentação da interpretação probabilística, o processo de categorização evidencia características de similaridade ou disparidades entre as apresentações do tema. Assim, ao invés de focar em apenas um livro, podemos fazer uma discussão ampliada em termos das abordagens mais (ou menos) recorrentes.

Por fim, destacamos que a nossa análise tem como preocupação principal evidenciar as abordagens da gênese da interpretação probabilística em livros didáticos e apontar possibilidades no âmbito do ensino de física. Dessa forma, as categorias propostas permitem uma análise comparativa das abordagens e ao mesmo tempo possibilitam a problematização e discussão de possíveis desdobramentos para ensino de física.

2.4 RESULTADOS

2.4.1 A gênese da interpretação probabilística em livros didáticos

Nesta pesquisa foram analisados vinte livros didáticos comumente utilizados no ensino superior de física (bacharelado/licenciatura) em disciplinas de Mecânica Quântica (MQ). A escolha dos livros se deu a partir de indicações de pesquisadores e professores do tema nas universidades de origem dessa pesquisa. Ademais, os livros foram escolhidos com base em características de similitude. Todas as obras abordam temas relacionados à MQ, porém com diferentes níveis de profundidade e ênfase, sendo amplamente usados em cursos de graduação e indicados por docentes de disciplinas sobre o assunto. Esses livros podem ser visualizados no Quadro 1. Na etapa pré-análise já foi possível visualizar algum tipo de abordagem (ou ausência) sobre a gênese da interpretação probabilística em todos os livros didáticos.

Quadro 1: Livros analisados.

Código	Ano da	Autor/ano edição
1	1995	Griffiths, 2005
2	1995	Sakurai, 1994
3	2005	Cohen-Tannoudji; Diu e Laloe,
4	1961	Messiah, 1961
5	1974	Eisberg e Resnick, 1985
6	1980	Shankar, 1994
7	1962	Fong, 1962
8	1997	Goswami, 2003
9	1974	Gasiorowicz, 2003
10	1966	Gottfried e Yan, 2003
11	2003	Liboff, 2003
12	2006	Caruso e Oguri, 2006
13	1989	Greiner, 2000
14	1958	Landau e Lifshitz, 1991
15	2009	Auletta; Fortunato e Parisi; 2009
16	1961	Merzbacher, 1998
17	1949	Schiff, 1968
18	1964	Blokhintsev, 1964
19	1937	Kemble, 1937
20	1961	Powell e Crasemann 1961

Fonte: Elaborado pelos autores.

Uma vez compostos e organizados os objetos de análise, partimos para a codificação, ou seja, identificamos a unidade de registro e de contexto (Bardin, 2016). Escolhemos propositalmente a temática “interpretação probabilística” como unidade de registro, pois entendemos que atende aos objetivos deste trabalho, visto que estamos interessados em identificar as diferentes abordagens desse assunto utilizadas nos livros. Por outro lado, essa escolha se justifica pois em contextos de MQ a palavra probabilidade/probabilística pode se relacionar a outras questões que não especificamente a gênese da interpretação probabilística associada a função de onda. Para ilustrar essas situações extraímos dois trechos de diferentes livros que mencionam a palavra probabilidade/probabilística:

> A seção de choque de espalhamento especifica a probabilidade do espalhamento ocorrer tanto pelo processo Rayleigh quanto pelo processo Compton. Para o chumbo, que tem um número atômico alto e consequentemente elétrons fortemente ligados, o espalhamento Rayleigh domina o espalhamento Compton quando a energia do fóton é menor que aproximadamente $h\nu = 10^5 eV$. (Eisberg; Resnick, 1985).

A seção a qual o trecho pertence se intitula “Seções de Choque para Absorção e Espalhamento de Fótons”. Nessa passagem, a palavra “probabilidade” se relaciona

a um contexto sobre espalhamento de fótons em alvos sólidos e não aborda especificamente argumentos sobre interpretação da probabilidade associado a função de onda.

A leitura flutuante dos textos permitiu perceber possíveis consequências ao se adotar uma unidade de registro e suas implicações para a análise. Uma escolha inadequada poderia nos conduzir a resultados indesejados, uma vez que, os trechos analisados poderiam não estar vinculados aos objetivos da pesquisa, a saber, nos argumentos que subsidiam a interpretação do quadrado da função de onda.

Outro trecho que evidencia a questão mencionada acima foi retirado do livro do autor Sakurai (Sakurai, 1994)**,**

> Para ilustrar melhor a equivalência entre as duas figuras, estudamos as amplitudes de transição, que terão um papel fundamental na Seção 2.5. Suponha que haja um sistema físico preparado em t=0 para estar em um autoestado de observável A com autovalor a'. Em algum momento posterior t, podemos perguntar: Qual é a amplitude de **probabilidade**, conhecida como amplitude de transição, para o sistema ser encontrado em um autoestado de B observável com autovalor b'? (Sakurai, 1994).

No trecho acima, a palavra “probabilidade” aparece no contexto de amplitude de transição, ou seja, o foco não está voltado para a fundamentação da interpretação probabilística de $|\psi|^2$. Assim, reforça-se a necessidade de escolher o tema “interpretação probabilística” e não uma palavra apenas como unidade de registro para a análise de conteúdo.

Uma vez escolhida a unidade de registro foi possível identificar em cada livro um capítulo (contendo seções) que tratam exclusivamente sobre o tema de interesse. Essa etapa foi realizada fazendo um levantamento dos sumários de cada obra selecionada. Identificamos nesse processo que todos os livros analisados trazem alguma discussão sobre a interpretação probabilística. Ao total, verificamos vinte capítulos que tratam sobre a temática de estudo.

Nessa etapa de exploração do material e definição das unidades de registro, buscamos recorrências e não recorrências (Bardin, 2016) sobre a temática de interesse nos capítulos destacados na etapa anterior. Nesse momento, percebemos que poderia haver alguma reorganização inicial que evidenciasse convergências e diferenças das abordagens adotadas e presentes em cada capítulo selecionado. Assim, estabelecemos categorias que se diferenciam quanto a fundamentação utilizada para se interpretar o quadrado do módulo da função de onda.

A primeira categoria está associada a argumentos teóricos que fundamentam

a interpretação probabilística da função de onda, ou seja, consideramos nessa categoria discussões que se baseiam em derivações de princípios mais gerais da física (como conservação de energia, princípio de mínima ação, teorema de Hamilton-Jacobi, etc.). Uma segunda categoria utiliza uma fundamentação baseada em analogias, ou seja, estabelece uma relação de semelhança entre coisas ou fatos distintos. A terceira categoria está relacionada às argumentações que utilizam algum tipo de experimento para justificar tal interpretação. Para casos que não se enquadram nesses tipos de fundamentações, optamos por definir uma quarta categoria onde não há justificativa explícita (teórica, analógica ou experimental). As categorias estão resumidas no Quadro 2 abaixo.

Quadro 2: Categorias de fundamentação.

Categorias	Descrição da Fundamentação
1 Teórica (T)	Adere a uma explicação teórica (derivação de princípios mais
2 Analógica (A)	Adere a uma explicação baseada em analogia.
3 Experimental (E)	Adere a uma explicação baseada em experimentos.
4 Não Justifica (N)	Não adere a nenhuma justificativa explícita.

Fonte: elaborado pelos autores.

É importante destacar que na análise de conteúdo (Bardin, 2016) aqui utilizada não faz sentido que um trecho selecionado se enquadre em mais de uma categoria de análise. Para antecipar possíveis situações desse tipo, utilizamos como critério de análise a utilização do argumento central destacado em cada trecho selecionado das obras. Dessa forma, trechos diferentes de uma mesma obra podem ser classificados em categorias diferentes sem recairmos em contradições na análise e as obras podem estar associadas às diferentes categorias, uma vez que são os trechos (unidades de contexto) que são, a rigor, categorizados e não as obras.

Concluída essa parte, partimos para a seleção das unidades de contexto. Assim, para essa seleção extraímos trechos que exemplificam as abordagens presentes nas obras no que diz respeito à discussão sobre a gênese da interpretação probabilística. Nas seções seguintes trazemos alguns exemplos de trechos utilizadas na análise.

2.4.2 Categoria T

Na categoria T procuramos por unidades de contexto que exemplificassem a interpretação probabilística em termos de uma derivação a partir de princípios mais

gerais da física. Como comentado anteriormente a interpretação probabilística da MQ possui uma série de questões que podemos associar a possíveis justificativas para seu embasamento. As justificativas teóricas que esperaríamos para essa categoria, na nossa perspectiva, deveriam ter semelhanças com o desenvolvimento proposto por Born em seu artigo sobre colisões. Nesse artigo, Born parte do modelo proposto por Schrödinger, que por sua vez, parte de uma analogia ótico-mecânica utilizando os princípio de Maupertuis e Fermat (Lima; Karam, 2022), para analisar de forma teórica uma fenômeno físico que é a colisão de elétrons contra átomos. Ou seja, por semelhanças entendemos algum tipo de derivação que parte de princípios mais gerais da física, como conservação de energia, momento, princípio de mínima ação, etc. e que possa ser contrastado com algum argumento ou resultado conhecido. No problema de espalhamento abordado por Born, ele utiliza uma aproximação (que ficou conhecida como aproximação de Born) cujo resultado para o espalhamento conduz (com uma certa manipulação) a fórmula de espalhamento de Rutherford. Ou seja, sua derivação conduz a um resultado (de espalhamento) conectado com algo conhecido e que é interpretado a luz da probabilidade. Como comentado na seção Metodologia, os trechos escolhidos para análise levaram em consideração a unidade de registro (Interpretação Probabilística) presente nos capítulos que apresentam especificamente essa temática. Assim, é comum encontrar primeiramente uma apresentação que não justifique essa interpretação de forma teórica, tal como comentado, e ao longo dos capítulos (ou seções) seguintes utilize algum desenvolvimento matemático para reforçar a ideia de que essa interpretação já apresentada anteriormente é coerente.

Entretanto, dos vinte livros analisados não encontramos obras que se enquadrassem na perspectiva acima mencionada. Dessa forma, a categoria T não teve nenhum trecho selecionado. Por outro lado, cabe destacar que na análise evidenciamos que algumas obras utilizavam argumentos baseados em postulados ou suposições, ou seja, uma afirmação ou fato que admitimos ser verdade sem a necessidade de prova ou demonstração. Poderia se considerar essas abordagens uma justificativa teórica se as implicações do postulado fossem analisadas ou investigadas. No entanto, não há qualquer justificativa ou discussão sobre a validade desses postulados quando apresentada a temática de interesse.

2.4.3 Categoria A

Os livros que foram classificados na categoria A são: Cohen-Tannoudji, Diu e Laloe (Cohen-Tannoudji; Diu; Laloë, 2005); Shankar (Shankar, 1994); Caruso e Oguri (Coruso; Oguri, 2006); Auletta, Fortunato e Parisi (Auletta; Fortunato; Parisi, 2009); Merzbacher (Merzbacher, 1998).

A título de exemplo temos o livro dos autores Merzbacher (Merzbacher, 1998) que traz uma analogia entre o padrão de interferência das ondas eletromagnéticas em óptica física com a fenomenologia presente na física quântica, descrita pela função de onda $\psi(x,y,z,t)$. O trecho destacado a seguir foi utilizado como unidade de contexto e esclarece uma situação que se enquadra como uma justificativa analógica,

> Na óptica física, os padrões de interferência são produzidos pela superposição das ondas de E e B, mas a intensidade das franjas é medida por E^2 e B^2. Analogamente a esta situação, assumimos que a quantidade positiva $|\psi(x,y,z,t)|^2$ mede a probabilidade de encontrar a partícula na posição x,y,z no tempo t...Aqui queremos apenas apresentar alguns argumentos qualitativos gerais para essa chamada interpretação probabilística da função de onda quântica para partículas com massa, que foi introduzida na mecânica quântica por Max Born (Merzbacher, 1998).

O autor evidencia a relação entre o quadrado dos campos elétrico e magnético com a intensidade das franjas de interferência das ondas eletromagnéticas ao passarem por obstáculos. Quanto maior o módulo ao quadrado dos campos em uma região, maior é a intensidade da radiação. Há uma noção de probabilidade subentendida nessa descrição, pois associa a intensidade da radiação à probabilidade de encontrarmos fótons. Nesse sentido, a função de onda faria o papel dos campos, consequentemente o quadrado da função de onda estaria relacionado a uma interpretação probabilística, tal como o quadrado dos campos elétrico e magnético ("intensidade da radiação") com a noção de probabilidade. Por outro lado, o autor argumenta que deseja apenas avançar na questão que foi introduzida por Born (Born, 1927) de forma qualitativa, evidenciando assim a postura de que esse assunto já está consolidado e bem entendido na literatura, não carecendo de maiores detalhes.

O próximo trecho destacado da obra de Caruso e Oguri (Coruso; Oguri, 2006), assim como no caso anterior, também faz uma analogia entre elétrons e fótons:

> É possível fazer uma analogia entre um feixe de elétrons e um feixe luminoso: se ao fóton corresponde o elétron, ao campo E corresponde a função de onda ψ, de tal modo que o produto $\Psi^*\Psi = |\Psi|^2$, isto é, o quadrado do módulo da função de onda seja igual ao número de elétrons por unidade de volume.
> Born interpretou, assim, o quadrado do módulo da função de onda, $|\Psi|^2 = \rho$, *como uma densidade de probabilidade de presença*, representando a distribuição de probabilidade das posições ocupadas por uma partícula ao longo de seu movimento por uma dada região do espaço, e $J =$

> $i\hbar\,(\Psi\nabla\Psi^{*}-\Psi^{*}\nabla\Psi)/2\,m$ como uma densidade de corrente de probabilidade. (Coruso; Oguri, 2006).

Embora uma onda eletromagnética (composta de campo elétrico e magnético) seja de natureza completamente diferente da "onda de matéria" (função de onda ψ), a uma tentativa de se estabelecer uma analogia entre esses elementos distintos, para justificar a razoabilidade de se associar um caráter estatístico à mecânica ondulatória. Por outro lado, o autor não evidencia o fato de que as "estatísticas" em ambos os casos diferem na sua composição, como comentado na seção 2.

Esses dois exemplares da categoria A comentados anteriormente exemplificam a postura dos livros que se enquadram nessa categoria. Esse tipo de abordagem pode ser interessante na perspectiva de ensino, pois de forma geral parte de algo mais familiar para o leitor e avança sobre uma nova problemática. Entretanto, é necessária uma atenção especial ao adotar tal perspectiva principalmente quando comparamos situações de natureza tão distintas. Fazer afirmações como, "Born interpretou, assim, o quadrado do módulo da função de onda…" (Coruso; Oguri, 2006), pode induzir o leitor a pensar que foi exatamente dessa maneira que a interpretação de $|\psi|^2$ foi realizada, ou seja, no imaginário do leitor cria-se uma perspectiva de que apenas a analogia foi suficiente para tal suposição. Embora essa analogia tenha desempenhado um papel relevante no desenvolvimento da gênese da interpretação probabilística, deixa-se de lado outros argumentos igualmente importantes elaboradas por Born, focando-se apenas em um aspecto (analogia com o campo e quanta de luz) de toda a discussão.

2.4.4 Categoria N

Os livros que foram classificados na categoria N são: Griffiths (Griffiths, 2005); Sakurai (Sakurai, 1994); Messiah (Messiah, 1961); Eisberg e Resnick (Eisberg; Resnick, 1985); Fong (Fong, 1962-); Goswami (Goswami, 2003); Gasiorowicz (Gasiorowicz, 2003); Gottfried e Yan (Gottfried; Yan, 2003); Liboff (Liboff, 2003); Greiner e Bromley (Greiner; Bromley, 2000); Landau e Lifshitz (Landau; Lifshitz, 1991); Schiff (Schiff, 1968); Blokhintsev (Blokhintsev, 1964); Kemble (Kemble, 1937); Powell e Crasemann (Powell; Crasemann, 1961).

Nessa categoria os livros não utilizam argumentos para justificar a interpretação probabilística associada da função de onda, como podemos observar

no trecho da obra de Griffiths (Griffiths, 2005) destacado abaixo,

> Mas o que exatamente é essa "função de onda" e o que ela faz por você depois de consegui-la? Afinal, uma partícula, por sua natureza, está localizada em um ponto, enquanto a função de onda (como o próprio nome sugere) está espalhada no espaço (é uma função de x, para qualquer tempo t). Como tal objeto pode representar o estado de uma partícula? A resposta é fornecida pela interpretação estatística de Born da função de onda, que diz que $|\psi(x,t)|^2$dá a probabilidade de encontrar a partícula no ponto x, no tempo t – ou mais precisamente,
>
> $$\int_a^b |\psi(x,t)|^2\,dx =$$ Probabilidade de encontrar a partícula entre a e b, no tempo t.
>
> (Griffiths, 2005).

Casos como esse são comuns entre os livros analisados. Em uma primeira abordagem, discutem a ideia da interpretação probabilística apenas referenciando outro autor para esse propósito. O trecho acima, destacado do primeiro capítulo da obra intitulado de "*A Interpretação Estatística*" (nossa tradução) o autor não faz uma discussão prévia mais elaborada a respeito do caráter probabilístico associado à função de onda $\psi(x,t)$. Esse fato fica mais evidente uma vez que no trecho apenas é mencionado que a resposta para a questão "*o que é a função de onda?*" é fornecida pela "estatística de Born". No restante do capítulo nenhuma informação ou discussão adicional é feita em relação a essa afirmação. Em uma nota de rodapé encontra-se uma menção ao caráter complexo da função de onda e a relação do seu módulo ao quadrado com a probabilidade: "A própria função de onda é complexa, mas $\psi^2 = \psi^*\psi$ (onde ψ^* é o complexo conjugado de ψ) é real e não negativo – como a probabilidade, é claro, deve ser." (Griffiths, 2005). Entretanto, não evidenciamos nenhum argumento a respeito da necessidade de se vincular $|\psi|^2$ com a noção probabilística neste trecho ou em outros da mesma obra.

Ainda, sem utilizar nenhuma fundamentação, no entanto trazendo outros elementos para a discussão, na obra dos autores Greiner e Bromley (Greiner; Bromley, 2000) encontramos a terminologia "campo fantasma" atribuída a Einstein, como pode ser observado a seguir,

> Max Born abriu o caminho para a interpretação estatística da função de onda que descreve uma partícula. Ele criou o termo campo guia (em alemão: "Führungsfeld") como uma interpretação das funções de onda. A ideia realmente se originou com Einstein, que o chamou de Campo Fantasma ("Gespensterfeld"). O campo guia é uma função escalar ψ das coordenadas de todas as partículas e do tempo. De acordo com a ideia básica, o movimento de uma partícula é determinado apenas pelas leis de conservação

> de energia e momento e pelas condições de contorno que dependem do experimento particular (aparato). A partícula é mantida dentro desses limites definidos pelo campo guia. A probabilidade de a partícula seguir um determinado caminho é dada pela intensidade, ou seja, o quadrado absoluto da onda de matéria (campo guia) determina em cada ponto a probabilidade de encontrar um elétron ali. (Greiner; Bromley, 2000).

Esse trecho, assim como em outras obras analisadas e que estão nessa mesma categoria, trazem referências e não argumentos para subsidiar a noção de probabilidade relacionada à função de onda ψ. Neste caso específico, o autor recorda a ideia de “campo guia” mencionada no artigo de Born (Born, 1927). O “campo guia” é uma ideia introduzida por Born em seu artigo e relacionada ao termo conhecido como “Campo Fantasma” (Gespensterfeld) atribuído a Einstein. Em seu artigo Born utiliza tal associação para contextualizar seu “insight” da idealização da função de onda ψ como uma espécie de campo que guiaria as partículas. Uma curiosidade a respeito desse termo é o fato de que ele não aparece explicitamente em nenhum trabalho publicado de Einstein, como comentado na seção anterior. Por outro lado, é utilizado no artigo sobre colisões (Born, 1927) e atribuído exclusivamente a uma “imagem” concebida por Einstein relacionada com um campo que guiaria os quanta de luz.

2.4.5 Categoria E

Por fim temos a categoria E. Nessa categoria a justificativa central gira em torno da utilização de experimentos para embasar a noção probabilística associada ao quadrado da função de onda. Dos livros analisados, apenas a obra de Blokhintsev (Blokhintsev, 1964) traz argumentos que associam experimentos (ou pelo menos a fenomenologia encontrada em experimentos) com interpretação probabilística, como podemos notar no trecho a seguir,

> A interpretação correta das ondas de De Broglie foi encontrada por Born de uma maneira bem diferente. Para entender a ideia básica de Born, vamos imaginar que elétrons estão sendo difratados e o impacto desses elétrons "difratados" em uma placa fotográfica é registrado. Deixe um pequeno número de elétrons ser inicialmente transmitido. Cada elétron que passa pelo sistema de difração (por exemplo, uma folha) é encontrado em algum ponto na placa e tem um efeito fotoquímico ali. A passagem de um pequeno número de elétrons produzirá na placa um padrão semelhante a um alvo usado por um atirador inexperiente. Uma distribuição regular de elétrons na placa é obtida somente quando um grande número de elétrons é transmitido e, finalmente, é obtida uma distribuição que corresponde exatamente à distribuição de intensidade na difração das ondas (por exemplo, a série de anéis de difração mostrada na Figura 10).

> Esse comportamento das partículas levou Born à interpretação estatística das ondas de de Broglie, em que o atomismo das partículas pode ser combinado com os fenômenos ondulatórios. De acordo com essa interpretação, a intensidade das ondas de de Broglie em qualquer ponto do espaço é proporcional à probabilidade de encontrar a partícula naquele ponto. (Blokhintsev, 1964).

Embora, possamos considerar que os argumentos experimentais sejam poucos substanciais no trecho em questão, o que chama atenção é o fato do autor da obra relacionar a fenomenologia da difração de elétrons como um argumento que levou Born a interpretação estatística.

De forma geral, os “experimentos” discutidos nas obras, quando aparecem, contribuem para estabelecer um quadro geral de toda a problemática evidenciando outros aspectos que não o caráter estatístico. Nesse sentido, não trazem elementos específicos (dados, análises, etc.) para substanciar argumentos estatísticos (probabilísticos) associados ao quadrado da função de onda. No trecho a seguir podemos perceber algo recorrente em algumas obras e que contextualiza essa questão,

> O tamanho de um padrão de difração de pequeno ângulo é proporcional ao comprimento de onda. Portanto, Thomson foi capaz de verificar a equação do comprimento de onda de de Broglie (2-9) ao mostrar que os diâmetros dos anéis de difração mais internos são inversamente proporcionais aos momentos correspondentes dos elétrons. Os resultados para o ouro são reproduzidos na Tabela 2-1. A última coluna contém o produto do diâmetro do anel D_1, proporcional ao comprimento de onda, e da quantidade $V^{1/2} = [1 + eV/(1200mc^2)]$, proporcional ao momento do elétron (incluindo uma correção relativística). A constância desse produto, dentro do erro experimental, confirma a hipótese de De Broglie. (Powell; Crasemann, 1961).

No trecho acima destaca-se o experimento de difração de elétrons. O contexto em que esse trecho foi retirado vem acompanhado de dados experimentais, porém o que se evidencia é o comportamento ondulatório dos elétrons ou melhor o seu comportamento dual. Essa é uma situação recorrente nos trechos analisados quando pensamos em argumentos experimentais. Nessas situações não se utilizam os experimentos para argumentar a respeito da interpretação probabilística, pelo menos não explicitamente.

2.5 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Para fins de apresentação dos resultados optamos, na seção anterior, por trazer apenas alguns exemplos. Cada livro analisado teve ao menos um capítulo

selecionado relacionado a temática de interesse. Em cada capítulo selecionamos trechos (unidades de contexto) que exemplificam a abordagem adotada pelo autor ao apresentar a gênese da interpretação probabilística da MQ. Após a análise dessas unidades de contexto, cada trecho foi enquadrado em uma das categorias propostas. O Quadro 3 apresenta a síntese dos resultados dessa análise conforme os livros,

Quadro 3: Síntese da análise dos livros didáticos conforme as categorias.

Código	Autor/ano edição	T	A	E	N
1	Griffiths, 2005				**X**
2	Sakurai, 1994				**X**
3	Cohen-Tannoudji; Diu; Laloe,		**X**		
4	Messiah, 1961				**X**
5	Eisberg e Resnick, 1985		**X**		
6	Shankar, 1994		**X**		
7	Fong, 1962				**X**
8	Goswami, 1997				**X**
9	Gasiorowicz, 2003		**X**		
10	Gottfried e Yan, 2003				**X**
11	Liboff, 2003				**X**
12	Caruso e Oguri, 2006		**X**		
13	Greiner, 2000				**X**
14	Landau e Lifshitz, 1991				**X**
15	Auletta; Fortunato e Parisi, 2009		**X**		
16	Merzbacher, 1998		**X**		
17	Schiff, 1968				**X**
18	Blokhintsev, 1964			**X**	
19	Kemble, 1937				**X**
20	Powell e Crasemann 1961				**X**

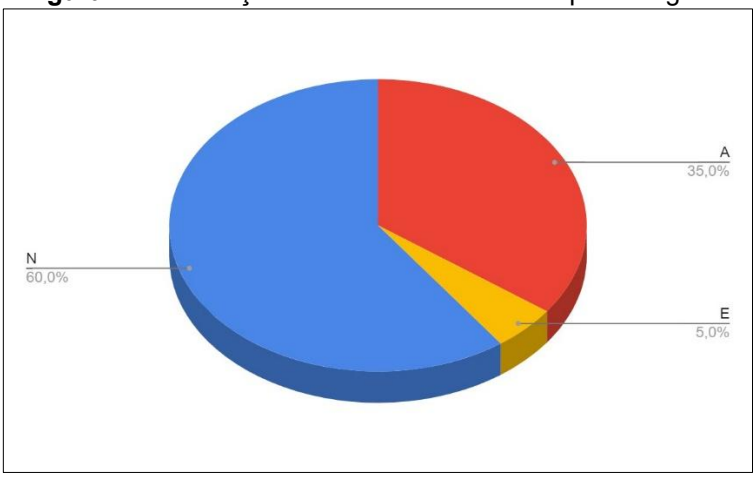
Fonte: Elaborado pelos autores.

Da forma como os resultados são apresentados no Quadro 3 poderíamos ter diferentes trechos de um mesmo livro em categorias diferentes como comentado anteriormente. Essa situação não é contraditória do pondo de vista da análise de conteúdo, uma vez que, são os trechos destacados nas obras que são categorizados. Cada trecho específico se enquadra em uma categoria apenas.

De acordo com a Figura 1, é possível observar que a maioria dos trechos analisados (60%) não apresentam uma justificativa (categoria N), ao interpretar o quadrado da função de onda como uma probabilidade. Já a categoria A agrega 35% dos trechos analisados onde evidencia-se algum tipo de justificativa baseando-se em analogias com outros temas. Embora possamos considerar (ou pelo menos esperamos) que justificativas teóricas ou experimentais sejam tradicionais para apresentar ou discutir temáticas em física, nenhum trecho analisado foi selecionada

para a categoria T (motivo da ausência no gráfico Figura 1) e apenas um (5%) enquadrou-se na categoria E. Cabe ressaltar que as categorias como a concebemos foram construídas a priori, dessa forma diferentes escolhas e definições são possíveis para definir as categorias de análise.

Figura 1: Distribuição dos trechos analisados por categoria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme mencionado anteriormente, as diferentes abordagens a respeito da gênese da interpretação probabilística desenvolvidas nos livros didáticos suscitam diferentes tipos de entendimentos e associações sobre as ideias ali apresentadas. A partir da categorização que propomos, construímos um panorama geral dessas abordagens que possibilita uma reflexão a respeito de possíveis consequências para o ensino de física ao se adotar uma ou outra abordagem. Embora a classificação que apresentamos neste trabalho seja discutível, pois outros elementos podem ser igualmente relevantes para essa problematização, podemos evidenciar as diferentes perspectivas apresentadas nos livros didáticos e mostrar que o tema em análise (interpretação probabilística da MQ), já consolidado na física, ainda pode ser explorado no âmbito do ensino de física.

2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho propusemos uma análise das abordagens da interpretação probabilística da MQ em livros didáticos. Assim, evidenciamos diferentes tipos de abordagens que compuseram quatro categorias que sintetizam a justificativa utilizada. Uma quantidade expressiva dos livros (60%) não utiliza uma justificativa (no sentido das categorias apresentadas) ao inserir a interpretação probabilística no contexto da

MQ ondulatória. Apenas 35% utilizam alguma analogia da interpretação probabilística no âmbito da física de partículas com outros temas, como por exemplo a noção de probabilidade de encontrar fótons associada ao módulo ao quadrado do campo de radiação. Além disso, nenhuma obra foi classificada na categoria T (justificativas teóricas) e apenas uma foi selecionada para a categoria E (justificativas experimentais). Deve-se ressaltar que esses resultados se referem à introdução dos temas nos livros, não implicando a inexistência de tais elementos ao longo do livro de forma posterior à sua introdução.

As implicações didáticas dessas posturas pedagógicas são imediatas. O leitor das obras é compelido a aceitar, mesmo que momentaneamente, as ideias apresentadas sem a possibilidade de construir um senso crítico próprio a respeito do que está sendo exposto, uma vez que não justificam a interpretação (categoria N) ou utilizam apenas fragmentos de um contexto mais amplo relacionado a interpretação (categoria A e E) no momento da introdução do assunto. Essa situação é problemática sob vários aspectos, limitando a discussão e deixando de lado características importantes que surgem durante o processo de elaboração de uma ideia. A título de exemplo, podemos citar a noção de “heurística” utilizada e citada no trabalho sobre colisões de Born (Born, 1927), quando comenta sobre desenvolver heuristicamente a ideia de que o campo ψ, que é solução da equação de Schrödinger, é um campo escalar que serviria como “guia” para as partículas. Essa hipótese de trabalho de Born, poderia suscitar interessantes debates a respeito do próprio processo de desenvolvimento científico. Dessa forma, ao suprimir esses detalhes dos livros os leitores podem perder a oportunidade de refletir sobre essas construções. Além disso, o sentido atribuído aos conceitos ou a matemática utilizada fica comprometido uma vez que certos argumentos, utilizados nas fontes originais não são evidenciados nos livros didáticos em detrimento de outros, podendo resultar muitas vezes em lacunas para o ensino de física.

Uma característica comum a todos os livros independentemente da categoria que se incluem é a pouca aderência dos argumentos da concepção estatística da MQ com os artigos de Born (Born, 1926a, 1927). Embora os livros façam referência ao autor, as discussões consideram apenas fragmentos contidos no trabalho de Born, explicitando assim apenas uma versão segmentada de um quadro mais amplo de seu trabalho. Em relação a essa questão, poderíamos pensar em dois aspectos relevantes para o ensino de física: a pouca ênfase ao artigo de Born e as ideias ali encontradas

é intencional ou desconhece-se o seu conteúdo. Sem a pretensão da certeza, preferimos acreditar que os autores conhecem sim o conteúdo presente nas fontes primárias. O que nos leva então a pensar que a pouca aderência comentada anteriormente decorre de questões pedagógicas. Nesse sentido, temos o seguinte quadro, de um lado temos uma preocupação didática legítima e por outro temos um apagamento de detalhes que poderiam constituir uma base para o entendimento da gênese da interpretação probabilística.

Cabe ressaltar que ao adotar uma perspectiva para abordar ideias, teorias e conceitos, em certo sentido, revela-se a tradição filosófica na qual a obra se insere. Assim, ao utilizar uma narrativa baseada por exemplo em postulados sem vínculo explícito com princípios gerais consolidados na física, tal como observado em algumas obras, ignora-se toda uma possível e rica discussão relacionada à concepção de probabilidade na MQ. Isso por sua vez, pode influenciar o leitor (estudantes por exemplo) no seu imaginário a pensar a ciência como algo que se desenvolve de forma linear, estruturada e cujos produtos dessa construção são a “verdade” final sobre a natureza.

É notável que uma parcela substancial dos trechos analisados (60%) se enquadra na categoria em que não há uma justificativa que subsidia a interpretação do módulo da função de onda ao quadrado. Portanto, segundo nossa categorização, não justificam a gênese da interpretação probabilística no sentido que não utilizam argumentações, sejam elas, teóricas, analógicas ou experimentais para sustentar essa concepção. Evidentemente, associações dessa interpretação probabilística com exemplos, situações ou problemas são realizadas nos capítulos, entretanto, são utilizadas apenas para reforçar a narrativa dessa concepção e não para justificar propriamente a interpretação. Além disso, percebe-se de forma geral a utilização de um artifício baseado muitas vezes no conhecido “argumento de autoridade”. Invoca-se uma autoridade no assunto (em muitos casos Max Born) para conferir credibilidade à ideia apresentada, promovendo assim um apagamento de elementos da rede (Latour, 2005) a qual pertence o desenvolvimento da interpretação probabilística da MQ.

Na nossa perspectiva, as abordagens evidenciadas nas obras podem comprometer a aprendizagem, pois colocam em segundo plano importantes discussões no âmbito da MQ. A interpretação probabilística de Born surge em meio a conflitos, tensões e incertezas a respeito da natureza das entidades ao nível quântico

que passa tanto pelas discussões teóricas, analogias, resultados experimentais e intensos debates. Assim, suprimindo esses debates dos livros, os leitores das obras didáticas (alunos, professores, entusiastas, etc.) podem ser conduzidos a uma concepção de ciência onde não há conflitos, disputas e dúvidas, o que de fato não encontra respaldo em pesquisas na área da história das ciências.

De forma geral, uma alternativa ao quadro exposto acima poderia ser a construção de uma proposta didática que utiliza livros didáticos e fontes originais (ou secundárias) de tal forma que uma supra as deficiências da outra. Os desafios para isso são muitos, de um lado temos um material (livros didáticos) que tem como característica ser didaticamente acessível aos leitores, mesmo que suprima algumas particularidades, e de outro temos fontes originais com ricos detalhes, porém com complexidade matemática e de ideias maior. Independentemente da proposta, devemos ter sempre em mente o público a quem se destina e as formas de abordagem do tema em questão.

Pensando em alunos de graduação, uma proposta poderia estar associada a alguma derivação didaticamente viável, mas que guarde similaridades com as principais ideias que subsidiam o desenvolvimento da temática. Nessa perspectiva, para construir tais propostas somos levados a refazer os originais ou fontes secundárias que muitas vezes são de difícil compreensão, seja pelo idioma adotado ou pela complexidade da matemática e de ideias apresentada. Muitas vezes é necessário reescrever as equações em notação moderna para efetivamente entender o significado associado. Provavelmente esses fatores sejam os mais relevantes quando pensamos em possíveis obstáculos ao uso das fontes originais. Entretanto, tais fatores não são impeditivos para o uso dos originais, mas certamente acrescentam elementos desafiadores para sua utilização. Além disso, nem sempre é fácil visualizar uma proposta que parta de uma derivação, tal como comentado anteriormente, que seja didaticamente viável. Outra possibilidade é utilizar a leitura direta das fontes originais pelos alunos de forma concomitante aos livros didáticos, entretanto é necessário que o professor já tenha dominado o conteúdo das fontes originais em detalhes auxiliando os alunos nos pontos de maior dificuldade.

De qualquer forma, a utilização de fontes primárias (e secundárias) no ensino de física reforça não apenas a importância do acesso direto aos conceitos e/ou teorias originais, mas também a valorização das ideias que as subsidiam. Ao proporcionar aos estudantes o acesso direto às obras originais, permite-se uma contextualização e

compressão dos conceitos que muitas vezes são amplamente utilizados no ensino de física sem que se entenda a origem de tais significados.

2.7 REFERÊNCIAS

AULETTA, G.; FORTUNATO, M.; PARISI, G. **Quantum Mechanics**. Cambridge University Press, 2009.

BADINO, M.; NAVARRO, J. **A History of Quantum Physics through Textbooks**. Berlin: Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge, 2013.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2016.

BELLER, M. Born's probabilistic interpretation: A case study of "concepts in flux". **Studies in History and Philosophy of Science**, v. 21, n. 4, p. 563–588, 1990.

BETHE, H. Theory of the Passage of fast corpuscular Rays Through Matter. **Ann. Physik**, v. 5, p. 325–400, 1930.

BLOKHINTSEV, D. I. **Quantum Mechanics**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1964.

BORN, M. **On the Quantum Mechanics of Collisions**, 1926.

BORN, M. On the Quantum Mechanics of Collisions Processes. **Zeit Phys**, v. 37, p. 863–867, 1927.

BORN, M. Physical Aspects of Quantum Mechanics. **Nature**, v. 119, n. 2992, p. 354–357, 1927.

BUNGE, M. **Física e Filosofia**. São Paulo: Perspectiva, 2015.

CARDOSO, H. B.; FREIRE, P. de T. C.; FILHO, J. M. Arquimedes e a lei da alavanca: erros conceituais em livros didáticos. **Caderno brasileiro de ensino de Física**, v. 23, p. 218–237, 2006.

CHAIB, J. P. M. C.; ASSIS, A. K. T. **Distorção da obra eletromagnética de Ampère nos livros didáticos**. scielo, 2007.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics: Waves and particles. Introduction to the fundamental ideas of quantum mechanics**. Wiley, 2005.

CORUSO, F.; OGURI, V. **Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

EINSTEIN, A. Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light. **American Journal of Physics**, v. 33, n. 5, p. 367, 1965.

EISBERG, R.; RESNICK, R. **Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles.** 2nd. ed. New York: John Wile & Sons, 1985.

FAXÉN, H.; HOLTSMARK, J. Contribution to the Theory of the Passage of Slow Electrons Through Gases. **Z. Physik**, v. 45, n. August, p. 307–324, 1927.

FONG, P. **Elementary Quantum Mechanics**. Addison-Wesley, 1962-. ISSN 2252-3405.

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de conteúdo**. 2. ed. Líber Livro, 2008. ((Série Pesquisa)).

F.R.S., J. S. T. M. A.; M.A., V. A. B. LXX. The motion of electrons in argon. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 43, n. 255, p. 593–600, 1922.

GASIOROWICZ, S. **Quantum Physics**. 3. ed. John Wile & Sons, 2003.

GOSWAMI, A. **Quantum Mechanics**. 2nd. ed. Waveland Press Inc, 2003.

GOTTFRIED, K.; YAN, T.-M. **Quantum Mechanics: Fundamentals**. New York, NY: Springer New York, 2003. (Graduate Texts in Contemporary Physics).

GREINER, W.; BROMLEY, D. A. **Quantum Mechanics: An Introduction**. 4nd. ed. [*S. l.: s. n.*], 2000.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. 2nd. ed. London: Pearson Education, 2005.

GYEONG SOON, I. M. **Experimental constraints on formal quantum mechanics: The emergence of born's quantum theory of collision processes in göttingen, 1924-1927**, 1996-. ISSN 14320657.v. 50

HEISENBERG, W. **Physics and Philosophy**. London: Penguin Books, 2000.

HEISENBERG, W. Quantum-Theoretical Re-interpretation of Kinematic and Mechanical Relations. **Journal for Physics**, v. 33, p. 879–893, 1925.

JAMMER, M. **The Conceptual Development of Quantum Mechanics.pdf**. New York: McGraw Hill, 1966.

JAMMER, M. **The Philosophy of Quantum Mechanics**. New York: John Wiley and Sons, 1974.

JOHANSSON, A. *et al.* "Shut up and calculate": the available discursive positions in quantum physics courses. **Cultural Studies of Science Education**, v. 13, n. 1, p. 205–226, 2018.

KAISER, D. How the hippies saved physics: science, counterculture, and the quantum revival. **Choice Reviews Online**, 2011.

KAISER, D. **Pedagogy and the practice of science**. Cambridge: The MIT Press, 2006.

KEMBLE, E. C. **The Fundamental Principles of Quantum Mechanics**. McGraw Hill, 1937.

KHRENNIKOV, A. Interpretations of probability. **Interpretations of Probability**, 2009.

KUHN, T. **The structure of Scientific Revolutions**. Terceiraed. Chicago: The University of Chicago Press, 1996.

KUKOLICH, S. G. Demonstration of the Ramsauer-Townsend Effect in a Xenon Thyratron. **American Journal of Physics**, v. 36, p. 701–703, 1968.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Quantum Mechanics: Non-relativisti theory**. 3. ed. Pergamon, 1991.

LATOUR, B. **Reassembling the Social: An Introduction to Actor-Network-Theory**. Oxford University Press, 2005.

LIBOFF, R. L. **Introductory Quantum Mechanics**. 4. ed. Addison-Wesley, 2003.

LIMA, N. W. *et al.* A Metalinguistic Study on the Photon Interpretation Present in Physics Textbooks Approved in PNLDEM 2015 : Elements for a Symmetric Sociology of Science Education. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 18, n. April, p. 365–397, 2018.

LIMA, N. W. *et al.* **Louis de Broglie's wave-particle duality: from textbooks_ blackboxes to a chain of reference presentation** . scielo , 2020.

LIMA, N. W.; CHAIB, J. P. Uma tradução comentada do artigo "A Termodinâmica Oculta das Partículas" de Louis de Broglie. **Revista Brasileira de História da Ciência2**, v. 43, p. e20210246, 2021.

LIMA, N.; KARAM, R. Particle velocity = group velocity: A common assumption in the different theories of Louis de Broglie and Erwin Schrödinger. **American Journal of Physics**, v. 89, n. 5, p. 521–528, 2021.

LIMA, N.; KARAM, R. Schrödinger ' s Equation from Snell ' s Law. **European Journal of Physics**, v. 43, p. 0–11, 2022.

LONGAIR, M. **Quantum Concepts in Physics: An Alternative Approach to the Understanding of Quantum Mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

MARTINS, I. Analisando livros didáticos na perspectiva dos Estudos do Discurso : compartilhando reflexões e sugerindo uma agenda para a pesquisa. **Pro-Posições**, v. 1, n. 49, p. 117–136, 2006.

MARTINS, R. de A.; ROSA, P. S. **História da teoria quântica - a dualidade onda-partícula, de Einstein a De Broglie**. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

MERZBACHER, E. **Quantum mechanics**. 3nd. ed. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1998.

MESSIAH, A. **Quantum Mechanics**. North-Holland, 1961.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa Crítica**. 2ªed. [*S. l.: s. n.*], 2010.

MOTT, N. F. Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei. *In*: PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON. SERIES A, CONTAINING PAPERS OF A MATHEMATICAL AND PHYSICAL CHARACTERVOLUME 124, ISSUE 794. The Royal Society, 1929. p. 425–442.

NARDI, R. Memórias da Educação em Ciências no Brasil: A Pesquisa em Ensino de Física. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 10, n. 1, p. 63–101, 2005.

NEUMANN, J. Von. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. 1. ed. Berlin: Julius Springer, 1932.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa Física Moderna e Contemporânea no ensino médio. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 5, n. 1, p. 23–48, 2000.

OSTERMANN, F.; RICCI, T. Relatividade restrita no ensino médio: os conceitos de massa relativitica e de equivalência massa-energia em livros didáticos de física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 21, n. 1, p. 83–102, 2004.

PAIS, A. Max Born ' s Statistical Interpretation of Quantum Mechanics Author (s): A . Pais Published by : American Association for the Advancement of Science Stable URL : https://www.jstor.org/stable/1688979 Max Born ' s Statistical Interpretation of Quantum Mec. v. 218, n. 4578, p. 1193–1198, 1982.

PESSOA JR., O. **Conceitos de Física Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2003.

POWELL, J. L.; CRASEMANN, B. **Quantum Mechanics**. Addison-Wesley, 1961.

RAMSAUER, C. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. **Annalen der Physik**, v. 369, n. 6, p. 513–540, 1921.

SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1994.

SCHIFF, L. I. **Quantum Mechanics**. McGraw Hill, 1968.

SCHRÖDINGER, E. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. **Physical Review**, v. 28, n. 6, p. 1049–1070, 1926.

SCHRÖDINGER, E. **Four Lectures on Wave Mechanics**. London: London, Glasgow, Blackie & son limited, 1928.

SCHRÖDINGER, E. Quantisierung als Eigenwertproblem. **Annalen der Physik**, v. 384, n. 4, p. 361–376, 1926.

SHANKAR, R. **Principles of Quantum Mechanics**. 2nd. ed., 1994.

SINGH, C. Student understanding of quantum mechanics. **American Journal of Physics**, v. 69, n. 8, p. 885–895, 2001.

WESSELS, L. What Was Born ' s Statistical Interpretation ? Author (s): Linda Wessels Source : PSA : **Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association** , Volume Two : Symposia and Invited Papers (1980), pp . 187 Publi. v. 1, p. 187–200, 1980.

WHEATON, B. R. **The Tiger and the Shark: empirical roots of wave-particle dualism**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

3 SEGUNDO ESTUDO

O Processo de Colisões de Partículas e a Interpretação Probabilística de Max Born da Mecânica Quântica

Daniel S. Souza*[1], Jaíne da Cruz[1], Nathan W. Lima[1], Ricardo A. S. Karam[2]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil.
[2]University of Copenhagen, København, Dinamarca.

No âmbito do ensino de física, frequentemente encontramos livros didáticos que associam a hipótese de Born da interpretação do módulo ao quadrado da função de onda na Mecânica Quântica (MQ) a uma densidade de probabilidade. Por outro lado, nesse cenário nem sempre são claros os argumentos que subsidiam tal interpretação. Buscando contribuir com essa questão, propomos um percurso para abordar argumentos que auxiliem nessa compreensão, aproximando-se da abordagem original de Born, por meio da análise de processos de colisões de partículas. Para isso, contextualizamos o problema de colisões revisitando o trabalho clássico de Rutherford sobre o espalhamento de partículas alfa e apresentamos em seguida uma solução compatível com os resultados obtidos por Born ao abordar esses processos utilizando o formalismo ondulatório de Schrödinger. Demonstramos, partindo das fontes históricas, que, no caso de um potencial de Coulomb, a solução de Born converge para a fórmula de espalhamento de Rutherford no limite clássico quando consideramos apenas a primeira ordem de interação entre a partícula incidente e o potencial do alvo. A partir desse desenvolvimento mostramos como essa aproximação entre um contexto clássico e quântico pode auxiliar na compressão da interpretação probabilística proposta por Born na MQ.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Interpretação Probabilística, Fontes Históricas.

In the context of teaching physics, we often encounter textbooks that associate Born's hypothesis of interpreting the square modulus of the wave function in Quantum

* Endereço de correspondência: daniel.souza@iffarroupilha.edu.br

Mechanics (QM) with a probability density. However, the arguments supporting this interpretation are not always clear in this context. To contribute to this issue, we propose a pathway to address arguments that aid in this understanding, closely following Born's original approach by analyzing particle collision processes. To this end, we contextualize the problem of collisions by revisiting Rutherford's classical work on alpha particle scattering and subsequently present a solution compatible with the results obtained by Born when addressing these processes using Schrödinger's wave formalism. We demonstrate, based on historical sources, that for a Coulomb potential, Born's solution converges to Rutherford's scattering formula in the classical limit when only the first-order interaction between the incident particle and the target potential is considered. From this development, we show how this approximation between a classical and quantum context can help in understanding Born's probabilistic interpretation in QM.

Keywords: Quantum Mechanics, Probabilistic Interpretation, Historical Sources.

3.1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica (MQ) é, sem dúvida, uma das teorias da física de maior sucesso. Seja pela possibilidade de estender o domínio da física para um universo pouco intuitivo como o das partículas, ou por permitir uma conexão apropriada entre observação experimental e modelagem dos fenômenos. No âmbito da MQ não-relativística, a Interpretação de Copenhague é considerada a interpretação hegemônica ou ortodoxa que compreende as concepções sobre a dualidade onda-partícula, o princípio da Incerteza, e a interpretação probabilística de Max Born.

Existem diferente iniciativas e perspectivas na literatura que abordam esses temas no ensino de física. Dentre elas, temos as que se destacam por utilizar fontes primárias com o objetivo de proporcionar a compreensão de conceitos, ideias e resultados, colocando-os em contexto com os problemas que tentaram resolver (Matthews, 1994). Nessa perspectiva, as fontes primárias são percebidas como artefatos culturalmente construídos que pertencem ao campo da História e Filosofia da Ciência (HFC) (Batista; Ferreira; Freitas, 2015). No que diz respeito ao ensino, encontramos discussões sobre o papel da HFC na tentativa de superar as dificuldades conceituais dos estudantes (Batista; Ferreira; Freitas, 2015). Essas dificuldades

frequentemente surgem devido a um ensino que muitas vezes se concentra apenas nos produtos das ciências, como equações, princípios e leis, sem abordar adequadamente o processo histórico e filosófico que levou ao desenvolvimento desses conhecimentos. A utilização da HFC pode contribuir para que os estudantes compreendam melhor os conceitos científicos ao mostrar como as ideias evoluíram ao longo do tempo, os debates e experimentos que moldaram essas ideias, os argumentos utilizados em determinados estudos além do contexto cultural e social em que estão imersos. As discussões recentes sobre o ensino da dualidade onda-partícula, a formulação da equação de Schrödinger e o princípio da incerteza com base em fontes primárias podem ser citadas com base nessa perspectiva (Lima, Cavalcanti e Ostermann, 2021; Lima e Karam, 2021b; Rosa, Lima e Cavalcanti, 2022). Esses trabalhos contribuem para a construção e compreensão de noções epistemológicas abstratas impactando no entendimento a respeito dos conceitos científicos (Forato, Pietrocola e Martins, 2011).

Ao tratar especificamente do ensino de física quântica, é importante observar que o ensino ainda se concentra excessivamente nos aspectos matemático, com pouca ou nenhuma reflexão sobre o significado físico de conceitos (Johansson *et al.*, 2018). Isso, pode levar a uma visão instrumentalista e a-histórica da física, obscurecendo ou até eliminando elementos cruciais do conhecimento científico. Isso pode levar a confusões e generalizações incorretas sobre o desenvolvimento da física e das ciências em geral (Karam; Lima, 2022). A interpretação probabilística da MQ é um exemplo disso, a abordagem comum encontrada nos livros didáticos de MQ não discute os argumentos que sustentam essa interpretação, o que cria uma lacuna no ensino de física. De forma geral, somos levamos a aceitar a interpretação do módulo ao quadrado da função de onda como uma densidade de probabilidade sem discutir os argumentos que a originaram, ou ainda, quando alguma discussão é feita apenas certos elementos são apresentados (Souza; Lima; Karam, 2024).

Além disso, uma importante constatação ao se utilizar fontes primárias para contextualizar discussões no âmbito da física reside na complexidade do desenvolvimento contido nos originais. Se por um lado recorremos aos originais para elucidar certas questões, do outro devemos ter a atenção e crítica adequada ao propor quais elementos contidos dos originais e de que forma devem ser utilizados no campo didático. Essa questão nos permite inclusive refletir sobre as abordagens que recorrentemente encontramos nos livros didáticos a respeito da apresentação da

interpretação probabilística da MQ. Para contornar as dificuldades dos originais é comum um apelo apenas a certos fragmentos encontrados nesses trabalhos, o que revela uma preocupação didática legitima por parte dos autores. Por outro lado, muitas vezes essa não é uma situação ideal principalmente quando pensamos nos argumentos que foram utilizados ao atribuir significado a um determinado conceito ou ideia. Se na gênese da interpretação probabilística temos elementos que contribuíram para a hipótese de Born, seria desejável no âmbito do ensino que esses elementos, mesmo que de forma qualitativa, estivessem presentes nas discussões sobre essa interpretação e não apenas parte destes.

Assim, buscando contribuir para essa questão, propomos nesse trabalho uma discussão que se baseia no contexto encontrado nos artigos sobre colisões de Max Born. Esses trabalhos (Born, 1926a, 1926b) são recorrentemente associados na literatura a gênese da interpretação probabilística da MQ. Embora existam outras abordagens igualmente válidas para a discussão da interpretação probabilística, optou-se pelo percurso histórico por se compreender que existem potencialidades no que diz respeito a aprendizagem dentro dessa perspectiva, conforme discutido anteriormente.

O desenvolvimento apresentado neste trabalho, tem como objetivo apresentar um percurso que contribua para o entendimento da referida interpretação e que permita reflexões sobre as potencialidades e limitações ao pensar uma transposição para o campo didático dos argumentos contidos na fonte original. Em especial, mostramos como o caminho necessário para a associação do módulo ao quadrado da função de onda com uma densidade de probabilidade depende de um caminho denso, demandando uma longa cadeia de argumentações teóricas. Assim, em vez de propor um encaminhamento didático pronto, esta seção dedica-se a explicitar os aspectos do formalismo necessários ao entendimento dos fundamentos da interpretação probabilística, respeitando o próprio percurso histórico de sua emergência prioritariamente teórica.

Além disso, discutimos possibilidades de se utilizar o problema de espalhamento clássico em busca de elementos que contribuam não somente na contextualização das colisões de partículas, mas também na tentativa de contornar a abstração necessária ao relacionar partículas e função de onda. Assim, espera-se contribuir para o entendimento fundamentado dessa interpretação probabilística de tal forma a promover sentido a essa interpretação a partir do contexto da qual ela surge.

3.2 O PROBLEMA DE ESPALHAMENTO DE PARTÍCULAS

No final do século XIX e início do século XX, pesquisadores como Joseph John Thomson, Ernest Rutherford, Hans Geiger, Ernest Marsden entre outros deram importantes contribuições para o estudo da estrutura atômica, valendo-se da análise de espalhamento de partículas. Em 1897 Thomson conduziu uma série de experimentos com tubos de raios catódicos, nos quais elétrons eram emitidos e colidiam com átomos de gás dentro do tubo, produzindo fenômenos como a fluorescência. Sob a supervisão de Rutherford, Geiger e Marsden em 1909 realizaram experimentos famosos nos quais bombardearam finas folhas metálicas com partículas alfa, observando o comportamento das partículas alfa ao interagir com os átomos do alvo. Em 1911 Rutherford publica um artigo (Rutherford, 2012) sobre a estrutura do átomo onde leva em consideração o contraste da teoria de Thomson em relação aos resultados encontrados por Geiger e Marsden. Propondo então um modelo atômico que explicava satisfatoriamente os resultados experimentais e que futuramente serviu de inspiração para o modelo atômico de Bohr nos primórdios na física quântica.

A crescente necessidade de compatibilizar efeitos ondulatórios com a física de partículas fez com que pesquisadores como de Broglie e Ernest Schrödinger se debruçassem sobre a possibilidade de modelar esses fenômenos introduzindo fenômenos ondulatórios e até mesmo uma função de onda na tentativa de descrever essa nova física. Entretanto, ao propor modelos ondulatórios que se relacionam com as partículas surgiram muitas críticas associadas a interpretação dessa onda. Em 1926 Max Born apresenta uma discussão sobre colisões de partículas utilizando o formalismo ondulatório de Schrödinger (Born, 1926a) onde propõe uma nova interpretação associada a função de onda. Essa interpretação rapidamente ganhou adeptos no meio científico tornando-se um dos pilares da Interpretação de Copenhague.

A relevância dos problemas de colisões atravessa a física clássica e quântica. Seja pelo interesse em investigar a estrutura da matéria ou como laboratório para se investigar hipóteses básicas de uma teoria. Segundo Born,

> Os processos de colisão não apenas produzem a prova experimental mais convincente dos pressupostos básicos da teoria quântica, mas também

> parecem adequados para explicar o significado físico das leis formais da chamada ‘mecânica quântica [2, p.1, nossa tradução].

De forma geral, podemos dizer que o contexto da qual surge a interpretação probabilística associada a função de onda é um problema de colisões de partículas e seus efeitos de espalhamento. Para compreender e contextualizar essa construção retomaremos inicialmente a discussão sobre espalhamento clássico a partir do trabalho de Rutherford. Veremos mais a frente que esses resultados são compatíveis com a solução em primeira aproximação obtida por Born no contexto da MQ e mostraremos como isso pode auxiliar na compreensão da hipótese probabilística proposta por Born.

3.3 RUTHERFORD E O ESPALHAMENTO DE PARTÍCULAS ALFA

O trabalho de Rutherford (Rutherford, 2012) publicado no início do século XX é um marco histórico a respeito do entendimento da estrutura atômica. Nesse trabalho ele propõe um modelo teórico que diverge do modelo atômico de J.J Thomson tradicionalmente aceito na época. A partir dos experimentos de Geiger e Marsden era evidente que partículas α poderiam sofrer grandes desvios quando espalhadas pelo alvo, entretanto a quantidade de partículas era muito pequena. Para se ter uma ideia, cerca de uma partícula a cada vinte mil era espalhada em um ângulo de noventa graus. Além disso, Rutherford menciona que a distribuição de partículas α para vários ângulos de grande deflexão não segue a probabilidade esperada quando se considera um número grande de pequenas deflexões, ou seja, não é possível explicar grandes ângulos de espalhamento a partir de numerosas pequenas deflexões da partícula ao atravessar o alvo. Isso, sugeria que os espalhamentos com grandes ângulos deveriam ocorrer devido a uma única deflexão o que entrava em contraste com o modelo de Thomson. O modelo de Thomson fundamenta-se na hipótese de que o espalhamento resultante de um único encontro com o alvo é muito pequeno. Além disso, a estrutura específica atribuída ao átomo não permite uma grande deflexão de uma partícula α ao atravessá-lo uma única vez (Rutherford, 2012).

Dessa forma, para superar essa questão Rutherford propôs que o átomo era composto por um centro de espalhamento carregado positivamente (prótons não eram conhecidos na época) que era orbitado por partículas de carga negativa (elétrons).

Assim, uma partícula α de carga positiva (e) que se aproxima do átomo é submetida a duas forças F_1 (força coulombiana entre centro de espalhamento de carga Ne e partícula α) e F_2 (força coulombiana entre os elétrons de carga $-Ne$ e partículas α), de tal forma que a força resultante sobre as partículas incidentes são,

$$F = \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right), \tag{1}$$

onde R é o raio do átomo. Se utilizarmos o fato de que a energia potencial pode ser obtida integrando a expressão acima, temos,

$$U = \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{R^3}\right) + C, \tag{2}$$

para distâncias muito pequenas comparadas aos parâmetros geométricos do alvo ($r \ll R$) obtemos uma interação,

$$U = \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}. \tag{3}$$

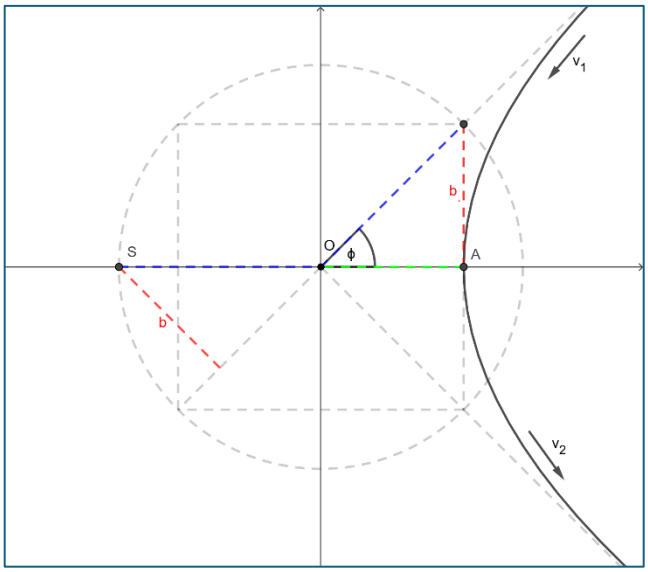
A energia potencial associada a configuração átomo e partícula α é inversamente proporcional à distância entre o centro espalhador e a partícula incidente. Em seu artigo, Rutherford (1911) argumenta que para velocidades típicas das partículas α ($v \approx 10^7 m/s$) as distâncias de maior aproximação são da ordem de$10^{-14}m$. Levando em consideração que o raio do átomo é algo em torno de $10^{-10}m$ a aproximação utilizada ($r \ll R$) é fisicamente coerente para a energia potencial quando as partículas α incidentes estão na máxima aproximação do centro de espalhamento (Rutherford, 2012).

Supondo que as partículas α incidentes aproximam-se do centro de espalhamento, centrado na posição S como mostrado na figura 1, em uma trajetória direta com o átomo até parar uma distância mínima r', pela lei de conservação de energia temos que toda a energia cinética das partículas α é convertida em energia potencial elétrica. Assim,

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'}, \tag{4}$$

onde μ é massa reduzida do sistema. Dessa forma estabelecemos uma relação aproximada entre a velocidade de incidência das partículas α e a distância mínima de aproximação r.

Figura 1: desenho esquemático do trajeto de uma partícula alfa ao se aproximar do átomo centrado em S.



Fonte: adaptado de Rutherford (1911, p. 672).

Por outro lado, se as partículas incidentes se aproximam com uma velocidade v_1 e são defletidas pelo átomo (ver figura 1) fazendo com que sua velocidade passe a ser v_2 a lei de conservação de energia fornece,

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{SA}, \tag{5}$$

o termo SA é a distância do centro de espalhamento (ponto O) ao vértice da hipérbole (ponto A) da figura 1. O ponto S está localizado exatamente no foco externo da hipérbole.

Com o auxílio de (4), após uma reorganização dos termos, a expressão (5) pode ser escrita como,

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{r'}{SA}\right) \tag{6}$$

A expressão (6) pode ser escrita apenas em termos de distâncias e ângulo de espalhamento. Para isso podemos utilizar a conservação de momento angular relacionado as distâncias SA e b (ver figura 1), assim obtemos,

$$L = cte \rightarrow bv_1\mu - (SA)v_2\mu = 0, \tag{7}$$

que resulta na relação,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{b}{SA}. \tag{8}$$

Utilizando o resultado acima em (6), após uma reorganização dos termos ficamos com,

$$b^2 = SA(SA - r'), \tag{9}$$

onde b é a distância perpendicular entre o centro de espalhamento e a trajetória incidente da partícula α (ver figura 1). É interessante notar a forte tendência geométrica nos argumentos de Rutherford aliada aos princípios físicos já bem consolidados da mecânica Newtoniana e do eletromagnetismo.

Da figura 1, podemos estabelecer três relações úteis,

$$\frac{SO}{OA} = \frac{1}{\cos\phi}, \tag{10}$$

$$SO = \frac{b}{sen\phi}, \tag{11}$$

combinando essas duas últimas relações em uma única expressão, temos,

$$OA = \frac{b}{\tan\phi}, \tag{12}$$

além disso,

$$SA = SO + OA, \tag{13}$$

assim, podemos escrever a distância SA como,

$$SA = b\left(\frac{1 + \cos\phi}{\sin\phi}\right), \tag{14}$$

utilizando essa última expressão em (9), obtemos o seguinte resultado,

$$r' = \frac{2b}{\tan\phi}, \tag{15}$$

podemos relacionar o ângulo de espalhamento θ com o ângulo ϕ. Esse ângulo de espalhamento é o ângulo entre a trajetória inicial da partícula (antes da interação temos uma linha reta) e a trajetória final da partícula (longe do centro de espalhamento). Da Figura 1 é fácil perceber que o ângulo θ se relaciona com ϕ da seguinte forma,

$$2\phi + \theta = \pi, \tag{16}$$

assim a expressão (15) fica,

$$\tan(\theta/2) = \frac{r'}{2b}. \tag{17}$$

A expressão acima revela que quanto maior o parâmetro de impacto b menor é o ângulo de deflexão das partículas α. O parâmetro de impacto está associado a distância perpendicular entre a trajetória da partícula incidente e a carga central Ne. Por outro lado, as técnicas experimentais relacionavam-se à contagem de partículas defletidas e capturadas em anteparos que cintilavam devido a passagem das

partículas desviadas. Dessa forma, é necessário construir uma quantidade que relacione a contagem de partículas com o ângulo de espalhamento.

Consideremos então um feixe incidente de partículas com uma intensidade uniforme que atravessa uma área definida pela distância b. Podemos definir a luminosidade ($\mathcal{L}$) (Griffiths, 2011) como esse número de partículas incidentes por unidade de tempo (N) por unidade de área (A),

$$\mathcal{L} = \frac{N}{A} \tag{18}$$

onde $A = \pi b^2$. Assim, o número de partículas incidentes por unidade de tempo que atravessa uma área entre os raios b e db (uma região que se assemelha a um anel) pode ser obtida diferenciando a expressão acima,

$$dN = \mathcal{L}(2\pi b db). \tag{19}$$

Podemos ainda explicitar a dependência de N com o parâmetro b e o ângulo de deflexão θ. Para isso, derivamos a equação (17) em relação ao ângulo θ, sendo b um parâmetro constante, obtemos[6]:

$$\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{r'}{2\tan(\theta/2)}\right] = \frac{r'}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1}{2}\right] \tag{20}$$

ou ainda,

$$db = \frac{r'}{4}\frac{d\theta}{\sin^2(\theta/2)}, \tag{21}$$

Substituindo o resultado acima na equação (19) e utilizando a relação (17), obtém-se:

$$dN = \mathcal{L}\frac{\pi(r')^2}{4}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}d\theta. \tag{22}$$

O número de partículas por unidade de tempo que incidem em uma região entre os raios b e db e é defletida em um ângulo sólido ($d\Omega$) definido entre θ e $d\theta$, é dada por,

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dN}{2\pi\sin\theta\, d\theta}, \tag{23}$$

onde $d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$. Com o resultado para dN e lembrando que,

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r'} \rightarrow r' = \frac{Ne^2}{2\pi\epsilon_0\mu v_1^2}, \tag{24}$$

[6] O sinal de valor absoluto se deve ao fato de que estamos interessados em expressar o número de partículas por unidade de tempo (N) em função da variação do parâmetro de impacto b em relação ao ângulo θ que de fato é negativo.

temos,

$$\frac{dN}{d\Omega} = \mathcal{L}\left(\frac{Ne^2}{16\pi\epsilon_0 E\,\sin^2(\theta/2)}\right)^2, \tag{25}$$

onde $E = \mu v_1^2/2$ representa a energia cinética das partículas incidentes. A quantidade ao quadrado no lado direito da expressão anterior é a *fórmula de espalhamento* de Rutherford conhecida como seção de choque diferencial $D(\theta)$,

$$D(\theta) = \left(\frac{Ne^2}{16\pi\epsilon_0 E\,\sin^2(\theta/2)}\right)^2. \tag{26}$$

De forma geral podemos escrever a seção de choque diferencial como,

$$D(\theta) = \frac{1}{\mathcal{L}}\frac{dN}{d\Omega}. \tag{27}$$

A quantidade acima é expressa em termos de quantidades que podem ser medidas em laboratório. Contamos o número de partículas que se espalham no ângulo sólido $d\Omega$ que são gravadas pelo detetor por unidade de tempo e normalizamos pela luminosidade do feixe incidente (Griffiths, 2011).

Portanto, a seção de choque diferencial está associada a uma medida de probabilidade. Uma rápida verificação da expressão (27) mostra que a seção de choque tem dimensão de área (a luminosidade $\mathcal{L}$ tem dimensão do inverso da área). Dessa forma, temos uma medida da fração de partículas incidentes que são desviadas em determinado ângulo (θ), ou seja, podemos construir uma distribuição do número de partículas em função do ângulo de espalhamento.

Mostraremos nas seções seguintes que no contexto de colisões de partículas os resultados obtidos a partir da MQ, em uma certa aproximação, convergem para os resultados do espalhamento clássico aqui discutidos. Mesmo que a concepção de probabilidade no contexto das colisões clássicas seja essencialmente distinta da interpretação probabilística presente na MQ, mostraremos que essa associação nos permite entender como relacionar o módulo ao quadrado da função de onda com a possibilidade de contagem de partículas espalhadas em determinado angulo.

3.4 SOLUÇÃO DE BORN PARA O PROBLEMA DE ESPALHAMENTO

O problema de espalhamento analisado pela ótica da MQ tem semelhanças com o espalhamento de ondas clássicas (Griffiths, 2011). Por outro lado, possui discrepâncias sobretudo quando associamos partículas às funções de ondas. De

forma geral, esse problema é interpretado como uma onda plana que se propaga a partir do infinito e se depara com um centro espalhador (alvo atômico), dessa interação resulta o seu espalhamento em todas as direções. Quando consideramos a onda espalhada a uma distância muito grande (limite assintótico) do alvo ela se comporta como uma onda plana (ou de forma análoga, partícula livre). O questão é responder quais os efeitos das condições de contorno (ou seja, do potencial V) para essa onda espalhada nesse limite assintótico (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969) e mais, como interpretar o resultado em termos corpusculares.

Ao reconhecer as potencialidades do formalismo ondulatório enquanto princípio dinâmico ao mesmo tempo em que rejeita a interpretação realista de Schrödinger para a função de onda, Born se depara com o impasse da relação entre função de onda e corpúsculo. Se de fato a natureza das entidades ao nível atômico são partículas, como pensava Born (Born, 1926a), que interpretação pode-se atribuir a função de onda ψ? Em seu artigo sobre colisões Born assume uma postura instrumentalista ao interpretar ψ como uma quantidade mediadora entre a natureza do sistema físico (corpuscular) e seus efeitos dinâmicos (probabilísticos). Dessa forma, ψ é concebida como uma representação matemática para o sistema físico que determina os “possíveis movimentos” (Born, 1926a) da partícula, conferindo a função de onda um caráter apenas epistêmico (Pessoa Jr., 2003). A concepção de Born atribuída a função de onda deriva de uma observação de Einstein ao se referir a um campo associado aos fótons, uma espécie de “Campo Fantasma” (Gespensterfeld do original) que não tem propriamente uma natureza, mas que orienta as reais entidades físicas (as partículas) no espaço (Jammer, 1966). Sobre isso, Pais (Pais, 1982) menciona um comentário de Wigner que esclarece que essa imagem de Einstein nunca foi formalmente publicada. De fato, não se encontram trabalhos de Einstein que tratem sobre essa questão. Por outro lado, Born faz questão de comentar em seu artigo (Born, 1926a) sobre essa interpretação ao fazer uma analogia entre o campo fantasma e as ondas guia associadas a função de onda ψ. Esse elemento de analogia é utilizado por alguns autores de livros didáticos de MQ ao argumentar sobre o motivo que leva a interpretar o módulo da função de onda ao quadrado como uma densidade de probabilidade. Por outro lado, mesmo que esse elemento apareça explicitamente no artigo original como um argumento que contribui para legitimar a hipótese de Born, ele é mais um fragmento de um contexto mais amplo que considera outros aspectos igualmente importantes como o desenvolvimento teórico proposto e influências de

resultados experimentais que estão presentes no trabalho original.

Para discutir o percurso teórico proposto por Born, consideremos primeiramente a equação de Schrödinger (independente do tempo) para um potencial V qualquer,

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V + E\right)\psi = 0 \tag{28}$$

Em uma primeira aproximação (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969), podemos substituir a função de onda no termo $V\psi$, por Ve^{ikz} (onde e^{ikz} é solução da equação para potencial $V = 0$ para uma onda incidente a partir da direção z na equação (28), obtendo a seguinte equação diferencial,

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + E\right)\psi = Ve^{ikz}, \tag{29}$$

cuja solução geral é interpretada como uma combinação de uma onda que incide sobre o alvo e uma onda que se espalha após a colisão ($\psi = \psi_i + \psi_e$). Nessa perspectiva, a solução associada ao espalhamento é então uma combinação da superposição de ψ_i. Em particular, se V for escolhido de modo a corresponder ao potencial de Coulomb, o resultado obtido por Wentzel (1926) para a intensidade da onda espalhada corresponde a uma fração da corrente de partículas desviadas em uma certa direção, que é precisamente a formula de espalhamento de Rutherford.

Nas discussões que seguem, por uma questão de conveniência desenvolveremos em um primeiro momento uma solução geral implícita para o problema de espalhamento, ou seja, não explicitaremos a forma do potencial V e a forma de ψ como solução de uma partícula livre (Mostraremos que as considerações de Born em seu trabalho original ao propor uma solução para o espalhamento sob esse resultado implícito implica em uma solução equivalente ao obtido em seu artigo sobre colisões (Born, 1926b).

3.4.1 Forma Integral da Equação de Schrödinger

Nessa seção discutiremos a forma integral da equação de Schrödinger. Em especial, nesta seção discutiremos uma solução geral para o problema de colisões sem explicitar a forma do potencial a que as partículas incidentes estão submetidas. A partir do resultado encontrado discutiremos como obter a primeira aproximação de Born.

Para isso, vamos partir da equação de Schrödinger para um potencial V qualquer, e reescrevê-la de uma forma mais sucinta,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = Q \tag{30}$$

onde,

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{31}$$

e

$$Q = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) V\psi \tag{32}$$

A expressão (30) tem a forma superficial da equação de Helmholtz[7]. Para encontrar uma solução consideremos primeiramente uma outra função $G(\vec{r},\vec{r}')$ que satisfaça à equação de Helmoltz com uma "fonte" função delta,

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{33}$$

devido a simetria da função delta, $G(\vec{r},\vec{r}')$ também deve ser simétrico, esta função é chamada de Função de Green.

Multiplicando a equação (30) por $G(\vec{r},\vec{r}')$ e a equação (33) por $\psi(\vec{r})$ e subtraindo esses resultados, obtemos,

$$G(\vec{r},\vec{r}')[\nabla^2\psi(\vec{r})] - \psi(\vec{r})[\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}')] = G(\vec{r},\vec{r}')Q(\vec{r}') - \psi(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{34}$$

o lado esquerdo dessa expressão é nulo, uma vez que a integral de superfície[8] tende a zero quando consideramos uma superfície tendendo ao infinito. Dessa forma, a integral de volume da expressão acima resulta em,

$$\psi(\vec{r}') = \int G(\vec{r},\vec{r}')Q(\vec{r}')\, dV. \tag{35}$$

onde utilizamos o fato de que a função delta $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ sob o sinal de integração resulta na própria função ψ. A solução para ψ na expressão acima implica em conhecermos G de tal forma que seja solução da equação (33). Na próxima seção discutiremos essa solução.

[7]A equação recebe esse nome devido as contribuições significativas de Hermann von Helmholtz para a física das ondas e vibrações. A primeira solução conhecida para a equação de Helmholtz foi dada pelo físico matemático britânico George Green em 1828. No seu trabalho "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism", Green introduziu o conceito de função de Green, que mais tarde foi aplicada para resolver a equação de Helmholtz.

[8]Para perceber isso, integramos a expressão em questão no volume e utilizamos a segunda identidade de Green, que relaciona um integral de volume com uma integral de superfície.

3.4.2 Solução da Função de Green

A função de Green $G(\vec{r},\vec{r}')$ é solução da equação de Helmholtz apresentada na seção anterior,

de tal forma que satisfaz a condição $G(\vec{r},\vec{r}') \to 0$ quando $|\vec{r}-\vec{r}'| \to \infty$. A condição de contorno no infinito somada a propriedade de simetria da função $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ implica que a função de Green só deve depender do módulo de $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$. Dessa forma, em um sistema de coordenadas centrado em $\vec{r}$ temos uma função de Green esfericamente simétrica. Por esse motivo, resolveremos a equação (33) no sistema de coordenadas esférico observando que a função de Green não depende explicitamente de das coordenadas θ e φ.

Assim, a equação de Helmholtz pode ser escrita como,

$$\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right)+k^2\right]G = \delta(\vec{R}), \tag{36}$$

note que temos uma divergência em $R=0$. Consideremos inicialmente pontos fora da origem. A equação acima pode ser escrita, após uma manipulação, como,

$$\frac{d^2}{dR^2}(RG)+k^2(RG)=0, \tag{37}$$

que tem como solução,

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{Ae^{ikR}}{R}, \tag{38}$$

onde A é uma constante a ser determinada. A forma explícita para (38) permite perceber que a condição de convergência de $G(\vec{r},\vec{r}')$ é satisfeita para $R \to \infty$.

Vamos determinar a constante A considerando a contribuição da função $\delta(\vec{R})$, ou seja, vamos considerar que,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = 4\pi\delta(\vec{R}). \tag{39}$$

Assim, considerando a solução (38) na equação de Helmholtz, ficamos com,

$$(\nabla^2+k^2)\frac{Ae^{ikR}}{R} = \delta(\vec{R}), \tag{40}$$

ou ainda,

$$\frac{A}{R}\nabla^2\left(e^{ikR}\right)+2\mathrm{A}\nabla\left(e^{ikR}\right)\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)+Ae^{ikR}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)+k^2\frac{Ae^{ikR}}{R} = \delta(\vec{R}) \tag{41}$$

perceba que o operador laplaciano ao atuar sobre a função dependente de R resulta em termos de derivada primeira e segunda de $(1/R)$. Podemos calcular a derivada primeira sem maiores problemas, resultando em,

$$Ae^{ikR}\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = \delta(\vec{R}), \tag{42}$$

, entretanto para considerar a divergência devemos utilizar (39), assim,

$$Ae^{ikR}\left[-4\pi\delta(\vec{R})\right] = \delta(\vec{R}), \tag{43}$$

e portanto,

$$A = -\frac{1}{4\pi}, \tag{44}$$

utilizando esse resultado na equação (38), finalmente obtemos para a função de Green,

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{45}$$

Se acrescentarmos um termo em $G(\vec{r},\vec{r}')$ que satisfaça a equação de Helmholtz homogênea, ainda teremos uma equação que é solução, assim,

$$(\nabla^2 + k^2)[G(\vec{r},\vec{r}') + G_0(\vec{r},\vec{r}')] = \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \tag{46}$$

onde,

$$(\nabla^2 + k^2)[G_0(\vec{r},\vec{r}')] = 0 \tag{47}$$

Utilizando o resultado (45) na expressão para $\psi(\vec{r})$ e lembrando que,

$$Q = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)V(\vec{r}')\psi(\vec{r}'), \tag{48}$$

finalmente chegamos ao resultado,

$$\psi(\vec{r}) = \psi_i(\vec{r}') - \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,dV, \tag{49}$$

onde $\psi_i(\vec{r}')$ é solução para a partícula livre. A equação acima, nada mais é do que a forma integral da equação de Schrödinger. Sua solução depende da forma explícita de $\psi(\vec{r}')$ para um dado potencial. Em seu artigo sobre colisões (Born, 1926a), Born segue um caminho equivalente para obter uma solução para o espalhamento. Por outro lado, a solução (49) difere dos resultados encontrados por Born uma vez que não explicitamos o potencial $V(\vec{r}')$ e $\psi(\vec{r}')$. Por questão de clareza, escolhemos trazer primeiramente a discussão da forma integral da equação de Schrödinger, e discutir na seção seguinte as implicações da aproximação de Born nessa forma integral ao obter uma solução explícita para a função de onda espalhada no processo de colisões.

Dessa forma, contornamos as dificuldades decorrentes da complexidade matemática apresentada no artigo original de Born ao mesmo tempo que percorremos uma trajetória alinhada a proposta original.

3.5 APROXIMAÇÃO DE BORN PARA O PROBLEMA DE COLISÕES

No artigo de Born sobre colisões, a solução do problema de espalhamento é tratada nos limites assintóticos. Assim, na solução encontrada por Born se considera regiões distantes do centro de espalhamento. Isso equivale dizer que $r \gg r'$, onde $\vec{r}$ é um vetor que aponta na direção do espalhamento e $\vec{r}'$ um vetor que aponta na direção do feixe incidente.

Levando em consideração essa aproximação podemos expandir em série de potências para escrever o módulo do vetor $(\vec{r} - \vec{r}')$ como,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r\left[1 - 2\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)\right]^{1/2} = r - \left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right) + \cdots \tag{50}$$

ao considerar a ordem mais baixa em r, temos,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \cong r - \hat{r}\cdot\vec{r}'. \tag{51}$$

Utilizando esse resultado em (49) no numerador e admitindo que na aproximação o denominador pode ser escrito apenas em termos de r (é uma aproximação que deve conter pelo menos o termo de ordem mais baixa no expoente), temos o seguinte resultado,

$$\psi(\vec{r}) \cong Ce^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,dV \tag{52}$$

onde $\psi_i(\vec{r}')$ (solução para a partícula livre) é uma onda plana na direção do eixo z que colide contra o alvo. Podemos ainda, convenientemente escrever essa solução como,

$$\psi(\vec{r}) \cong C\left[e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r}f(\theta)\right], \tag{53}$$

onde,

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 C}\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')\,dV. \tag{54}$$

Esse resultado é uma passo anterior se comparado a solução encontrada na versão preliminar do artigo de Born (Born, 1926b). Podemos interpretar o primeiro termo do lado direito de (53) como a onda incidente ψ_i (estado da partícula livre) e o segundo termo como a onda espalhada ψ_e (estado da partícula devido a interação

com o alvo), de tal forma que o estado do sistema é $\psi = \psi_i + \psi_e$. Podemos considerar que o resultado acima é em um passo intermediário da solução obtida por Born em seu segundo artigo onde discute em detalhes a solução em diferentes situações. Por outro lado, a forma da equação (53) nos permite evidenciar um aspecto fundamental que diz respeito a interpretação da função de onda. Entretanto, para explicitar como as características físicas do problema de colisões auxilia na compreensão dessa interpretação, vamos utilizar a aproximação de Born para obter primeiramente um resultado compatível com a fórmula de espalhamento de Rutherford.

Para isso, utilizaremos as considerações de Born, que consistem em admitir que a solução para a função de onda espalhada na direção do feixe incidente próximo ao alvo é pouco alterada. Assim, podemos escrever,

$$\psi_i(\vec{r}') \approx \psi(\vec{r}') = Ce^{ik'z_0} = Ce^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}, \tag{55}$$

onde $\vec{k}' = k\hat{z}$. Portanto na aproximação de Born, temos,

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')\,dV \tag{56}$$

A interação da partícula incidente com o alvo atômico é resultante do potencial coulombiano (esfericamente simétrico). Por uma questão de conveniência, escreveremos o potencial de forma mais geral (potencial de Yukawa),

$$V = \frac{Ce^{-\mu r}}{r}, \tag{57}$$

o potencial coulombiano pode ser obtido facilmente do potencial de Yukawa como veremos mais a frente. Além disso, definindo o vetor $\vec{K}$ como a diferença entre o vetor que aponta na direção do feixe incidente ($\vec{k'}$) e o vetor que aponta na direção do detector ($\vec{k}$), podemos escrever o argumento da exponencial como,

$$\vec{K}\cdot\vec{r}' = Kr'\cos\theta', \tag{58}$$

Com esses resultados a expressão (56) fica,

$$f(\theta) = -\frac{mC}{\hbar^2}\iint r'\sin\theta'\, e^{(iK\cos\theta'-\mu)r'}d\theta' dr'. \tag{59}$$

Para resolver a integral, consideremos primeiramente a parte em θ', uma simples mudança de variável resulta em,

$$f(\theta) = -\frac{2mC}{K\hbar^2}\int e^{-\mu r'}\sin(Kr')\,dr', \tag{60}$$

onde utilizamos a identidade $2\sin(kr') = i\left(e^{-iKr'} - e^{iKr'}\right)$. A integral em r', pode ser resolvida utilizando o método de integração por partes. Dessa forma, o resultado para $f(\theta)$ fica,

$$f(\theta) = -\frac{2mC}{K\hbar^2}\left(\frac{K}{\mu^2 + K^2}\right). \tag{61}$$

O resultado acima, é a *amplitude de onda* para o potencial de Yukawa. Essa estratégia visa contornar os problemas de divergência encontrados no cálculo dessa quantidade quando consideramos diretamente o potencial coulombiano. Note que se fizermos $\mu = 0$ e $C = Ne^2/4\pi\epsilon_0$ na expressão (57) obtemos exatamente o potencial de coulomb. Assim, se levarmos em consideração essas mudanças, a função $f(\theta)$, assume a seguinte forma.

$$f(\theta) = -\frac{2m(Ne^2/4\pi\epsilon_0)}{K^2\hbar^2}. \tag{62}$$

Além disso, temos que $K = 2k\sin(\theta/2)$, assim a amplitude de onda considerando o potencial de coulomb fica,

$$f(\theta) = -\frac{Ne^2}{16\pi\epsilon_0 E\sin^2(\theta/2)} \tag{63}$$

onde $E = p^2/2m$ e $p = \hbar k$. Portanto, a solução na aproximação de Born para o problema de colisões é,

$$\psi(\vec{r}) \cong e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta)$$

com, $f(\theta)$ dado pela expressão (63). O quadrado da expressão (63) é exatamente a fórmula de espalhamento de Rutherford obtida anteriormente.

Um aspecto conceitualmente central da análise de Born consiste na decomposição da solução da equação de Schrödinger em duas contribuições distintas: uma onda incidente, representando o estado livre inicial do feixe, e uma onda espalhada, cuja forma é determinada pela interação com o potencial. No limite assintótico, isto é, a grandes distâncias da região de interação, essa decomposição torna-se fisicamente significativa, pois é nesse regime que os resultados experimentais são efetivamente registrados. A interpretação do espalhamento não decorre, portanto, da análise local da função de onda na vizinhança do potencial, mas de seu comportamento distante, onde a componente espalhada assume uma estrutura aproximadamente esférica cuja amplitude depende da direção. Essa estratégia revela que o problema do espalhamento é formulado, desde o início, como

uma questão sobre a modificação da solução livre e sua manifestação observável no regime assintótico. Na próxima seção, com auxílio da solução encontrada mostraremos como a interpretação para o módulo ao quadrado da função de onda emerge no contexto de colisões de partículas.

3.6 A INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA NO CONTEXTO DE COLISÕES

Comentamos anteriormente que a interpretação probabilística da mecânica quântica emerge de um contexto de colisões no qual, ao menos em princípio, é possível realizar medições por meio da "contagem" do número de partículas espalhadas em determinado ângulo. Contudo, o formalismo quântico que descreve esses processos é formulado em termos de uma função de onda complexa ψ, o que torna a associação direta entre a contagem de partículas e ψ conceitualmente não imediata, exigindo um nível adicional de abstração. Ademais, antes mesmo de abordar explicitamente os processos de colisão, Born introduz, logo no início de seu artigo, um argumento de natureza estatística ao considerar a expansão da função de onda em autofunções associadas a sistemas periódicos. Nesse contexto, a função de onda pode ser expressa como,

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_n\psi_n. \tag{64}$$

Ao escrever a solução geral como uma superposição de estados estacionários, Born interpreta os coeficientes da expansão não como propriedades de um sistema individual, mas como "pesos" que indicam a frequência relativa com que determinados estados aparecem em um conjunto de sistemas preparados sob as mesmas condições. Essa leitura permite compreender a relação de normalização como expressão da conservação do número total de sistemas no ensemble, estabelecendo um primeiro vínculo entre o formalismo matemático e uma interpretação estatística. Assim, a interpretação probabilística não surge exclusivamente do problema de colisões, mas encontra, já nos estados periódicos, um embrião conceitual que será posteriormente aprofundado nos processos não periódicos

Ao tratar do problema não periódico, Born estabelece, no curso de seu desenvolvimento, a relação entre a solução obtida para o espalhamento por um potencial coulombiano e a correspondente seção de choque diferencial, o que implica uma análise de elevada complexidade e significativo grau de dificuldade matemática.

Nesse contexto, propomos avançar além da hipótese originalmente formulada por Born, desenvolvendo um argumento que permita explicitar a coerência interna de sua interpretação dos coeficientes da expansão da função de onda em termos de autofunções. Assim, buscando contornar as dificuldades apontadas, sem nos afastarmos das discussões centrais do artigo original, adotamos um percurso inspirado na exposição desenvolvida em *Atomic Physics*, de Born, Blin-Stoyle e Radcliffe (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969). Essa abordagem mostra-se particularmente apropriada por tornar mais explícita a hipótese de Born, ao mesmo tempo em que integra os resultados estabelecidos nas seções precedentes. Comecemos, portanto, pela equação de Schrödinger para um potencial V,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0, \tag{65}$$

para eliminar a dependência explícita do potencial dessa equação, podemos multiplicar (65) por ψ^*, e realizar o procedimento similar com o complexo conjugado dessa mesma expressão, porém multiplicando por ψ. Ao subtrair os resultados chegamos em,

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\psi|^2) = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla^2\psi^* - \psi^*\nabla^2\psi). \tag{66}$$

O lado direito da expressão acima, pode ser desenvolvido em termos das componentes x, y e z. Ao realizar esse procedimento nota-se que para cada componente temos um termo do tipo,

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\psi\frac{\partial}{\partial q}\psi^* - \psi^*\frac{\partial}{\partial q}\psi\right) \tag{67}$$

onde q representa uma componente qualquer x, y ou z. A forma que a expressão (66) assume após essa reorganização sugere uma semelhança com um divergente de uma função vetorial. Assim, se definirmos o seguinte vetor[9],

$$\vec{j} = j_x\hat{\imath} + j_y\hat{\jmath} + j_z\hat{k}, \tag{68}$$

cujas componentes são, respectivamente,

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^* - \psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi\right), \tag{69}$$

[9] Para interpretar essa corrente vetorial como uma corrente associada ao movimento de partículas é necessário um certo grau de abstração. Entretanto, no decorrer das discussões, apresentaremos argumentos para mostrar que essas correntes de fato estão associadas a corrente de partículas.

$$j_y = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial}{\partial y}\psi^* - \psi^*\frac{\partial}{\partial y}\psi\right), \tag{70}$$

e

$$j_z = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial}{\partial z}\psi^* - \psi^*\frac{\partial}{\partial z}\psi\right). \tag{71}$$

Com essas definições, podemos reescrever a expressão (66), como,

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \tag{72}$$

que nos remete a uma equação da continuidade. Esta interpretação fica mais clara ao utilizarmos o teorema do divergente. Para isso, basta integrar a expressão (72) no volume dv para obter,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint |\psi|^2\, dV = -\oiint \vec{j}\cdot d\vec{S}\,. \tag{73}$$

Se a integral do lado direito representar o número total de partículas por segundo que atravessa a superfície (S) que limita o volume V, então a hipótese de que,

$$\iiint |\psi|^2\, dV \tag{74}$$

representa o número total de partículas (ou átomos) (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969) contidas no volume V é consistente. Essa interpretação é formulada de maneira explícita no artigo sobre colisões (Born, 1926a), no qual Born busca fundamentar a conexão entre entidades físicas observáveis e o formalismo da função de onda. Nesse contexto, destacamos os argumentos que estabelecem a correspondência entre grandezas físicas, como energia e seção de choque, e os coeficientes c_n na expansão da função de onda em autofunções, expressa pela superposição $\psi = \sum_n c_n\,\psi_n$. Em seu trabalho, Born evidencia uma expressão que associa os coeficientes ao quadrado com a integral de volume de $|\psi|^2$ em uma expressão que chama de relação de completude,

$$\iiint |\psi|^2\, dV = \sum_n |c_n|^2\,. \tag{75}$$

Ao reinterpretar a relação de completude da expansão da função de onda em termos estatísticos, Born propõe que os coeficientes não representam amplitudes de um sistema individual, mas a distribuição de um conjunto de átomos ou partículas entre diferentes estados possíveis, como comentado anteriormente. Dessa forma,

essa condição de normalização passa a expressar a conservação do número total de partículas no ensemble, estabelecendo um vínculo entre o formalismo matemático e as contagens observadas experimentalmente. Os coeficientes $|c_n|^2$ representariam a "frequência de ocorrência" (nossa tradução) do estado n, onde o número total pode ser combinado de forma aditiva. Esse passo revela-se decisivo para a compreensão da interpretação probabilística, na medida em que permite articular a função de onda ao conceito de seção de choque. Além disso, ao estender sua análise para os sistemas não periódicos, Born considera a expansão da função de onda em termos de ondas planas associadas a diferentes valores de momento. Nesse contexto, os coeficientes da superposição deixam de representar pesos discretos (caso periódico) e passam a constituir uma densidade contínua no espaço de momentos. O termo $|c(k)|^2 dk$, que faz o mesmo papel dos coeficientes no caso periódico, é então interpretado como a fração de partículas de um feixe cujos momentos se encontram no intervalo entre k e $k + dk$. Essa leitura estatística, aplicada agora a distribuições contínuas, permite compreender a função de onda como descrição de um ensemble de partículas com diferentes componentes de momento, estabelecendo uma ponte direta entre o formalismo ondulatório e a prática experimental envolvendo feixes de elétrons. Assim, antes mesmo de tratar explicitamente o problema do espalhamento, Born já introduz os elementos conceituais que possibilitam interpretar a intensidade angular da onda espalhada como densidade de probabilidade de partículas desviadas.

Importa salientar que, nesse estágio, a noção de probabilidade introduzida por Born, ainda que inspirada pela perspectiva de Einstein, não se formula explicitamente em termos do módulo ao quadrado de ψ. Em seu artigo, Born sustenta que os processos periódicos não seriam suficientes para elucidar sua hipótese, razão pela qual a análise de processos não periódicos se impõe como condição necessária para o seu aprofundamento. Nesse sentido, a interpretação probabilística, embora hoje possamos reconhecer que a forma matemática apresentada em (74) sugira uma concepção estatística, não possuía à época um significado tão explícito nas próprias equações, o que tornou necessário o desenvolvimento de argumentos subjacentes capazes de sustentar essa hipótese. No artigo original, Born mobiliza explicitamente sua hipótese segundo a qual os coeficientes ao quadrado da expansão da função de onda devem ser interpretados em termos estatísticos. Esse procedimento é análogo à formulação da seção de choque em termos de correntes vetoriais, na medida em que, em ambos os casos, estabelece-se uma ponte entre o formalismo matemático e

grandezas fisicamente observáveis. Tal articulação revela não apenas um movimento técnico, mas também um gesto interpretativo deliberado, no qual a estrutura matemática é orientada para a obtenção de resultados empíricos.

Do ponto de vista epistemológico, esse movimento sugere um traço característico da construção do conhecimento científico. Antes mesmo de sua sistematização em um artigo, ideias, hipóteses e estratégias interpretativas costumam ser previamente discutidas, amadurecidas e submetidas a análises preliminares. Muitas vezes, o autor já possui uma ideia relativamente clara do ponto a que pretende chegar antes da redação final do texto. Isso se reflete na própria arquitetura argumentativa do artigo de Born, que conduz o leitor de maneira progressiva e "aparentemente natural" até a tese central. Tal estrutura não é meramente expositiva, mas expressa o próprio processo de elaboração conceitual que antecede a publicação, evidenciando um aspecto fundamental da dinâmica interna da produção do conhecimento científico.

Um passo conceitual decisivo na análise de Born ocorre quando ele mostra que a intensidade total associada à solução ondulatória é conservada ao longo do processo de espalhamento. No contexto do formalismo, essa conservação manifesta-se como a igualdade entre a intensidade da onda incidente e a soma das intensidades das ondas espalhadas em todas as direções. Born interpreta esse resultado não apenas como uma identidade matemática, mas como a expressão ondulatória da conservação do número de partículas em um ensemble de sistemas idênticos. Dessa forma, o espalhamento não corresponde à perda ou criação de partículas, mas à redistribuição probabilística dos possíveis resultados. Esse argumento desempenha um papel central na legitimação da interpretação probabilística, ao mostrar que o formalismo ondulatório é compatível com a descrição corpuscular dos eventos observados experimentalmente.

A demonstração da conservação da intensidade da onda espalhada introduz, no interior do formalismo ondulatório, a necessidade de uma grandeza capaz de expressar quantitativamente essa redistribuição no espaço. Se o processo de colisão não implica criação ou destruição de partículas, mas apenas sua redistribuição angular, torna-se necessário dispor de um conceito que permita descrever como essa intensidade atravessa superfícies espaciais distintas. Embora Born não formule explicitamente essa discussão em termos do vetor corrente tal como o conhecemos na apresentação moderna da mecânica quântica, a estrutura de seu argumento

aponta nessa direção, pois a conservação global da intensidade exige uma descrição local do transporte dessa quantidade no espaço.

Desse modo, para prosseguir em um percurso alinhado ao trabalho de Born, convenientemente definimos a "seção de choque diferencial" em termos das correntes vetoriais[10] que nos forneça a fração das partículas que saem de uma determinada superfície em relação a quantidade de partículas que entram. Para isso, adotaremos que o feixe de partículas incidentes (j_i) na superfície está orientado ao longo do eixo z e o feixe (j_e) de partículas que saem da superfície delimitada pelo volume V pode ser espalhada em todas as direções. Assim, temos que,

$$D(\theta) = r^2 \left(\frac{j_e}{j_i}\right), \tag{76}$$

onde,

$$j_i = \vec{J} \cdot \hat{k} = j_z = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi \frac{\partial}{\partial z}\psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial z}\psi\right), \tag{77}$$

e

$$j_e = \vec{J} \cdot \left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right) = \vec{J} \cdot \hat{r}, \tag{78}$$

A razão entre as correntes[11] expressa uma medida da quantidade de partículas que emergem da colisão, em uma dada direção, em relação a quantidade de partículas incidentes no alvo, ou seja, essa grandeza deve ser adimensional.

Para uma onda incidente plana, consideramos que,

$$\psi_i = e^{ikz}, \tag{79}$$

ao calcular a corrente incidente encontramos,

$$j_i = \frac{\hbar k}{m}. \tag{80}$$

Em seções anteriores mostramos que para a onda espalhada a solução (no limite assintótico) tem a forma,

$$\psi_e = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \tag{81}$$

onde $f(\theta)$ é a amplitude de espalhamento (depende da direção em relação ao feixe incidente) cuja forma é dada por (63).

Além disso, o vetor de corrente (em coordenadas esféricas) é

---

[10] Essa definição aparece explicitamente no anexo do livro escrito por Born intitulado "Atomic Physics"(Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969).

[11] A corrente j_e associada ao espalhamento é escrita em termos de coordenadas esféricas devido a simetria do problema. Assim o termo r^2 em $D(\theta)$ deve aparecer para garantir que a fração entre as correntes resulte em uma dimensão de área tal qual como deve ser a seção de choque.

$$j_e = \vec{J} \cdot \hat{r}, \tag{82}$$

assim, para $r \to \infty$ (estamos considerando os limites assintóticos), temos,

$$j_e = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi \frac{\partial}{\partial r}\psi^* - \psi^* \frac{\partial}{\partial r}\psi\right), \tag{83}$$

utilizando (81) encontramos para a corrente espalhada,

$$j_e = \frac{[f(\theta)]^2}{r^2}\left(\frac{\hbar k}{m}\right). \tag{84}$$

Com esses resultados podemos facilmente encontrar $D(\theta)$,

$$D(\theta) = r^2 \frac{\frac{[f(\theta)]^2}{r^2}\left(\frac{\hbar k}{m}\right)}{\frac{\hbar k}{m}} \tag{85}$$

que resulta em,

$$D(\theta) = r^2 \left(\frac{j_e}{j_i}\right) = [f(\theta)]^2 \tag{86}$$

A seção de choque $D(\theta)$ está relacionada a fração de partículas espalhadas em relação ao número de partículas que colidem no alvo assim como no caso clássico comentado anteriormente, além disso, note que,

$$\psi_e = \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta) \to \psi_e{}^* \psi_e = \frac{[f(\theta)]^2}{r^2} \tag{87}$$

ou ainda, utilizando (86) temos,

$$\psi_e{}^* \psi_e = |\psi_e|^2 = \left(\frac{j_e}{j_i}\right). \tag{88}$$

Portanto, é "...perfeitamente claro, especialmente à luz da analogia com a dispersão das ondas luminosas, que a intensidade da onda secundária forneça o número de elétrons, pertencentes a um determinado feixe incidente, que são desviados numa direção definida; e isso, na verdade, implica a interpretação estatística..." [5, p.147, nossa tradução]. De outra forma, o produto da função de onda pelo seu complexo conjugado é uma medida da fração de partículas espalhadas em uma dada direção em relação as partículas incidentes que colidem contra o alvo, ou seja, a quantidade $|\psi_e|^2$ fornece uma medida de probabilidade. A relação (88) não aparece explicitamente no trabalho de colisões de Born, entretanto é uma relação possível de ser construída a partir do desenvolvimento proposto no original.

A hipótese de Born para a função de onda se insere no formalismo mais geral proposto por Von Neumann (von Neumann; Beyer, 2018) onde a interpretação estatística entra como um postulado. Por outro lado, historicamente a gênese da

interpretação probabilística é comumente associada aos trabalhos sobre colisões de Born. Nesse contexto de espalhamento de partículas a hipótese estatística surge como uma tentativa de evidenciar que o comportamento corpuscular das entidades físicas está de alguma forma relacionado a função de onda espalhada. Dos argumentos teóricos que encontramos no original (Born, 1926a) destaca-se a relação da solução da função de onda espalhada com a seção de choque de espalhamento. Ao estabelecer essa relação Born constrói um caminho possível para atribuir significado a sua solução, uma vez que o conceito de "seção de choque" de espalhamento já era bem compreendido e interpretado a luz da probabilidade.

Do ponto de vista do ensino, poderíamos ainda questionar os argumentos que levam a interpretação das correntes vetoriais definidas no âmbito da MQ, dado que são definidas em termos de uma função de onda complexa. Se levarmos em conta que o quadrado de $f(\theta)$ no contexto de aproximação comentado, é exatamente a fórmula de espalhamento de Rutherford, podemos de forma mais intuitiva contornar essa abstração. A fórmula de espalhamento de Rutherford diz respeito a uma medida de contagem de partículas de um feixe desviadas em um certo ângulo em relação ao feixe de partículas incidentes. Assim, a partir do resultado (86) é possível relacionar a fórmula de espalhamento de Rutherford a essas correntes vetoriais. Essa comparação, embora não apareça explicitamente no trabalho original de Born, é uma possibilidade de se atribuir um caráter físico a essas correntes possibilitando contornar a abstração necessária ao relacionar partícula e função de onda.

A rigor o resultado encontrado por Born não tem um caráter generalista para a interpretação, pois é desenvolvido no contexto de colisões de partículas. Além disso, da forma como propomos a discussão a interpretação surge ao utilizar uma aproximação da solução geral. Entretanto, é notável que um contexto muito específico como o de colisões possa servir como uma ferramenta para avaliar o significado atribuído a função de onda com desdobramentos de caráter mais gerais para essa interpretação.

3.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, exploramos o problema de colisões e a interpretação probabilística na Mecânica Quântica. A hipótese de Born nos leva a uma compreensão mais profunda do significado atribuído a função de onda. Isso, mostra a extensão e

profundidade do entendimento construído sobre a função de onda evidenciando um caráter intrínseco da teoria difícil de ser demonstrado principalmente quando consideramos o ensino de física.

Concepções contemporâneas de ensino têm evidenciado cada vez mais a importância de contextualizar conceitos e ideias. Dessa forma, nos distanciamos de visões a-problemáticas construindo possíveis caminhos para compreender o significado atribuído aos conceitos entendendo os problemas aos quais tentaram responder. Do ponto de vista do ensino o desafio está em transpor para o campo didático o contexto da qual surgem as interpretações, ideias, hipóteses etc. Tratando especificamente da interpretação probabilística da MQ, propomos uma discussão do artigo de Born sobre colisões na tentativa de reconstruir o contexto em que surge sua hipótese. Por outro lado, acrescentamos outros elementos a essa discussão que julgamos ser interessantes para compreender e contornar lacunas presentes no trabalho original. Desses elementos, destacamos a seção de choque de espalhamento que é um conceito utilizado no artigo de Born herdado dos problemas de colisões de partículas clássico. Na obra original os argumentos para se inserir esse conceito e relacioná-lo a solução não estão explícitos. Essa é uma situação perfeitamente aceitável do ponto de vista do processo de construção de conhecimento científico, seja pela “obviedade” dos conceitos ou ideias utilizadas ou pela característica da apresentação dos resultados científicos. Além disso, utilizamos como base um desenvolvimento contido em um apêndice de um livro escrito por Born onde evidencia a relação entre as correntes vetoriais, seção de choque e a solução obtida para o espalhamento em seu artigo de 1926.

Do ponto de vista de ensino de física, o desenvolvimento aqui proposto não teve a pretensão de ser didático uma vez que o tema discutido envolve certo grau de abstração e de complexidade matemática. Dito de outra forma, procurou-se estabelecer um percurso que guardasse semelhanças com trabalho original, contornando tanto quanto possível as dificuldades matemáticas encontradas. O principal objetivo consistiu em estabelecer uma narrativa alinhada ao problema que Born se propôs a responder e evidenciar nesse contexto elementos que contribuíram para a gênese da interpretação probabilística da MQ. Assim, o presente trabalho pode servir como fonte de estudos para professores que desejam discutir a origem da interpretação probabilística em sala de aula (em nível superior) ou alunos interessados a se aprofundar sobre o tema. Assim, esperamos que a partir da discussão aqui

proposta possamos contribuir na reflexão sobre possíveis caminhos ou propostas didáticas para tratar a hipótese de Born de forma adequada no ensino de física.

3.8 REFERÊNCIAS

BATISTA, G. L. de F.; FERREIRA, J. M. H.; FREITAS, D. B. de. Fontes primárias no ensino de física: considerações e exemplos de propostas. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 32, p. 663–702, 2015.

BORN, M. Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, v. 38, n. 11, p. 803–827, 1926a.

BORN, M. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, v. 37, n. 12, p. 863–867, 1926b.

BORN, M.; BLIN-STOYLE, R. J.; RADCLIFFE, J. M. **Atomic Physics**. 8. ed. Blackie, 1969.

FORATO, T. C. de M.; PIETROCOLA, M.; MARTINS, R. de A. Historiografia e natureza da ciência na sala de aula. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 28, n. 1, p. 27–59, 2011.

GRIFFITHS, D. . J. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 2011.

JAMMER, M. **The conceptual development of quantum mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1966.

JOHANSSON, A. *et al.* “Shut up and calculate”: the available discursive positions in quantum physics courses. **Cultural Studies of Science Education**, v. 13, n. 1, p. 205–226, 2018.

LIMA, N.; CAVALCANTI, C.; OSTERMANN, F. Concepções de Dualidade Onda-Partícula: Uma proposta didática construída a partir de trechos de fontes primárias da Teoria Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, 2021.

LIMA, N.; KARAM, R. Particle velocity = group velocity: A common assumption in the different theories of Louis de Broglie and Erwin Schrödinger. **American Journal of Physics**, v. 89, n. 5, p. 521–528, 2021.

MATTHEWS, M. R. **Science teaching : the role of history and philosophy of science**. New York: Routledge, 1994.

PAIS, A. Max Born’s Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. **Science**, v. 218, n. 4578, p. 1193–1198, 1982.

PESSOA JR., O. **Conceitos de Física Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2003.

ROSA, G. G.; LIMA, N. W.; CAVALCANTI, C. J. de H. Diferentes proposições do princípio da incerteza para posição e momentum: integrando formalismo matemático, fenomenologia e interpretações no ensino da teoria quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 44, 2022.

RUTHERFORD, E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. **Philosophical Magazine**, v. 92, n. 4, p. 379–398, 2012.

SOUZA, D. S.; LIMA, N. W.; KARAM, R. A. S. A gênese da interpretação probabilística em livros didáticos de mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 46, p. e20230238, 2024.

VON NEUMANN, J.; BEYER, R. T. **Mathematical Foundations of Quantum Mechanics**. Princeton University Press, 2018. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/j.ctt1wq8zhp. Acesso em: 4 mar. 2024.

WENTZEL, G. Zwei Bemerkungen über die Zerstreuung korpuskularer Strahlen als Beugungserscheinung. **Zeitschrift für Physik**, v. 40, n. 8, p. 590–593, 1926.

4 TERCEIRO ESTUDO

Uma proposta didática para o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica à luz do modelo de reconstrução educacional

Daniel S. Souza*[12], Nathan W. Lima[1], Ricardo A. S. Karam[2]

[1]Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, Brasil.
[2]University of Copenhagen, København, Dinamarca.

O ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica no nível superior costuma ocorrer geralmente de forma declarativa e pouco contextualizada, frequentemente reduzido à apresentação da regra de Born como um postulado fundamental do formalismo quântico. Essa abordagem tende a limitar os fundamentos conceituais e epistemológicos da interpretação probabilística, dificultando a atribuição de significado à função de onda e ao caráter probabilístico da teoria. Neste trabalho, discute-se uma proposta didática para o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica fundamentada no Modelo de Reconstrução Educacional. Partindo de análises prévias de livros didáticos e de uma reconstrução histórica de elementos centrais da formulação da interpretação probabilística, em especial aqueles associados a processos de colisão e espalhamento, desenvolve-se uma reconstrução educacional que articula o conteúdo científico, as perspectivas dos estudantes e o papel de materiais didáticos no ensino. Com base nessa reconstrução, explicitam-se princípios e hipóteses de design didático que orientam propostas de ensino estruturada em eixos conceituais e que integra formalismo matemático, história e epistemologia. O uso criterioso de fontes primárias e secundárias é discutido como elemento central do design didático, em diálogo crítico com o livro didático. Por fim, são analisados as potencialidades e os desafios da proposta, com ênfase em suas contribuições para o ensino da mecânica quântica e para a formação de professores de Física.

Palavras-chave: Ensino de Mecânica Quântica; Interpretação Probabilística; Modelo de Reconstrução Educacional; História e Filosofia da Ciência; Livro Didático.

[12] Endereço de correspondência: daniel.souza@iffarroupilha.edu.br

The teaching of the probabilistic interpretation of quantum mechanics in higher education typically occurs in a declarative and decontextualized manner, often reduced to presenting Born's rule as a fundamental postulate of the quantum formalism. This approach tends to limit the conceptual and epistemological foundations of the probabilistic interpretation, hindering students from assigning physical meaning to the wave function and to the theory’s probabilistic nature. In this work, we discuss a didactic proposal for teaching the probabilistic interpretation of quantum mechanics grounded in the Model of Educational Reconstruction. Drawing on prior textbook analyses and a historical reconstruction of key elements in the formulation of the probabilistic interpretation, particularly those related to collision and scattering processes, we develop an educational reconstruction that articulates scientific content, student perspectives, and the role of instructional materials. Based on this reconstruction, we outline didactic design principles and hypotheses that guide a teaching proposal structured around conceptual axes, integrating mathematical formalism, history, and epistemology. The judicious use of primary and secondary sources is discussed as a core element of the didactic design, engaging in critical dialogue with traditional textbooks. Finally, we analyze the potential and challenges of this proposal, emphasizing its contributions to quantum mechanics education and physics teacher training.

Keywords: Quantum Mechanics Education; Probabilistic Interpretation; Model of Educational Reconstruction; History and Philosophy of Science; Textbook.

4.1 INTRODUÇÃO

A interpretação probabilística ocupa um lugar central na mecânica quântica, na medida em que estabelece a relação entre o formalismo matemático da teoria e os resultados obtidos em experimentos. Apesar dessa centralidade, livros didáticos tratam seu ensino de forma abreviada e pouco problematizada, frequentemente reduzido à apresentação da regra de Born como um postulado fundamental a ser aplicado de maneira operacional (Souza; Lima; Karam, 2024). Tal abordagem, embora funcional do ponto de vista técnico, tende a obscurecer os fundamentos conceituais e

epistemológicos da interpretação probabilística, contribuindo para uma compreensão fragmentada da teoria.

Pesquisas em Ensino de Física têm apontado que estudantes, mesmo quando demonstram domínio de procedimentos matemáticos, apresentam dificuldades persistentes na aprendizagem conceitual em física (Maryelly; Takahashi, 2020). Na Mecânica Quântica (MQ), os desafios de aprendizagem se intensificam em razão do elevado grau de abstração conceitual exigido por uma teoria cujo domínio de validade se afasta progressivamente das intuições construídas na experiência cotidiana e na física clássica. Em particular, o significado físico da função de onda não emerge de forma direta ou autoevidente da equação de Schrödinger, sendo necessário uma construção (ou reconstrução) adicional do aparato formal para estabelecer a conexão entre o formalismo matemático e a interpretação. Por outro lado, essas dificuldades não podem ser compreendidas apenas como decorrentes da complexidade intrínseca do formalismo quântico, mas também como resultado dos modos pelos quais a interpretação probabilística é tradicionalmente apresentada em cursos e materiais didáticos (Souza; Lima; Karam, 2024).

Em estudo recente, evidenciou-se que livros didáticos amplamente utilizados no ensino superior tendem a apresentar a interpretação probabilística de forma naturalizada, com escassa contextualização histórica e conceitual (Souza; Lima; Karam, 2024). Em geral, a regra de Born é introduzida como uma prescrição matemática cuja validade é assumida, sem explicitar os problemas físicos e epistemológicos que motivaram sua formulação. Tal apresentação contribui para reforçar uma visão tecnicista da mecânica quântica, na qual a interpretação aparece como um apêndice conceitual, dissociado do núcleo da teoria (Pessoa Jr., 2003). Nesse contexto, foram analisados criticamente os modos de apresentação da interpretação probabilística, dos livros didáticos a luz da reconstrução histórica de elementos centrais de sua formulação, em particular aqueles associados aos estudos de colisões e espalhamento. Esses estudos evidenciaram que a interpretação probabilística não emerge como uma consequência automática do formalismo ondulatório, pois, se assim fosse, naturalmente esse desenvolvimento interpretativo estaria explícito nos livros. No capítulo 2 desse trabalho, que trata sobre uma reconstrução do problema de espalhamento abordado por Born (Born, 1926a, 1926b), realiza-se uma discussão que evidencia que a interpretação probabilística emerge como uma resposta conceitual a limitações interpretativas concretas enfrentadas no

desenvolvimento da mecânica quântica. No entanto, a mera explicitação desses resultados teóricos-matemático, embora relevante, não é suficiente, por si só, para orientar práticas de ensino que atribuam sentido ao formalismo quântico.

Diante desse cenário, coloca-se a necessidade de avançar da análise crítica dos livros para a elaboração de propostas didáticas fundamentadas teoricamente, capazes de integrar os resultados de uma reconstrução histórica, análise de materiais didáticos, e dificuldades apresentadas por alunos de física em um design de ensino coerente. Esse movimento exige um referencial que permita articular, de modo sistemático, o conteúdo científico, as perspectivas e dificuldades dos estudantes e as decisões pedagógicas envolvidas no ensino da mecânica quântica.

O Modelo de Reconstrução Educacional (Duit *et al.*, 2012) apresenta-se, nesse sentido, como um referencial teórico-metodológico promissor. Ao propor a reconstrução do conhecimento científico para fins de ensino, considerando simultaneamente de forma equilibrada a estrutura conceitual da ciência e as dificuldades de aprendizagem dos estudantes, o modelo oferece ferramentas para a elaboração de propostas didáticas que vão além da simples transposição de conteúdo (Duit *et al.*, 2012; Niebert; Gropengiesser, 2013). Embora amplamente utilizado em pesquisas em Ensino de Ciências, sua aplicação ao ensino da mecânica quântica, em especial no nível superior, ainda é pouco explorada.

Este artigo insere-se nesse contexto e tem como objetivo discutir uma proposta didática para o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica fundamentada no Modelo de Reconstrução Educacional articulando a reconstrução do conteúdo com a história da interpretação probabilística da MQ. Partindo da reconstrução educacional desse conteúdo e da análise de dificuldades recorrentes no ensino de MQ encontrados na literatura da área de ensino de física, busca-se delinear princípios, hipóteses de design e escolhas didáticas que favoreçam a atribuição de significado ao formalismo quântico. O foco do trabalho não recai sobre a avaliação empírica da proposta, mas sobre sua fundamentação teórico-didática, em consonância com o uso de fontes primárias e secundárias que tratam sobre o caráter probabilístico associado a função de onda da MQ.

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 apresenta-se o referencial teórico-metodológico, com ênfase no Modelo de Reconstrução Educacional e em sua articulação com a História e Filosofia da Ciência no ensino de Física. A Seção 3 desenvolve a reconstrução educacional da interpretação

probabilística, considerando o conteúdo científico e as perspectivas dos estudantes. Na Seção 4 é discutida a proposta didática à luz do MER[13], incluindo princípios orientadores, hipóteses de design e o papel de fontes primárias e secundárias. A Seção 5 apresenta uma análise das potencialidades e desafios da proposta, e a Seção 6 reúne as considerações finais e indica possíveis desdobramentos do trabalho.

4.2 REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

A elaboração de propostas didáticas fundamentadas para o ensino de conteúdos conceitualmente complexos, como a mecânica quântica, exige referenciais que permitam articular a estrutura do conhecimento científico, as dificuldades de aprendizagem dos estudantes e as decisões pedagógicas envolvidas no processo de ensino. Nesse contexto, o Modelo de Reconstrução Educacional (MER) tem sido amplamente utilizado em pesquisas em Ensino de Ciências como uma ferramenta teórico-metodológica capaz de orientar o design de propostas de ensino que vão além da simples transposição de conteúdos acadêmicos para o contexto escolar (Duit *et al.*, 2012; Silva; Ferreira, 2020).

Nesta seção, apresenta-se o MER e discute-se sua articulação com a História e Filosofia da Ciência no ensino de Física, bem como sua adequação ao ensino da mecânica quântica no nível superior. Essa discussão fundamenta as escolhas metodológicas adotadas neste trabalho e prepara o terreno para a reconstrução educacional desenvolvida na seção seguinte.

4.2.1 O Modelo de Reconstrução Educacional

O Modelo de Reconstrução Educacional foi desenvolvido no âmbito da pesquisa em Ensino de Ciências com o objetivo de superar concepções lineares de transposição didática, segundo as quais o conhecimento científico seria simplesmente adaptado ou simplificado para fins de ensino. (Kattmann *et al.*, 1996). Em contraste com essas abordagens, o MER parte do pressuposto de que o conhecimento escolar não é uma versão reduzida do conhecimento científico, mas uma reconstrução orientada por objetivos educacionais específicos (Duit *et al.*, 2012).

[13] A sigla foi utilizada conforme o termo em inglês: Model of Educational Reconstruction (MER).

De acordo com o modelo (Niebert; Gropengiesser, 2013), o processo de reconstrução educacional envolve a articulação de três componentes principais: (i) a análise e reconstrução do conteúdo científico, (ii) a consideração das perspectivas dos estudantes e (iii) design e avaliação de ambientes de aprendizagem. Esses componentes não devem ser entendidos como etapas sequenciais rígidas, mas como dimensões interdependentes que se influenciam mutuamente ao longo do processo de design didático (Silva; Ferreira, 2020).

No primeiro componente, busca-se analisar o conteúdo científico em profundidade, identificando não apenas seus conceitos centrais, mas também sua estrutura epistemológica, sua gênese histórica e os problemas que motivaram sua formulação. O segundo componente focaliza as perspectivas dos estudantes, incluindo concepções prévias, dificuldades recorrentes e modos de apropriação do conteúdo. O terceiro componente consiste na elaboração propostas didáticas, materiais ou práticas que integrem os componentes anteriores, podendo incluir no processo orientações elaboradas a partir de princípios e hipóteses de design explicitamente formuladas.

Um aspecto central do MER é a ênfase na explicitação das escolhas envolvidas no design didático. Em vez de tratar propostas de ensino como aplicações diretas de teorias de aprendizagem ou de conteúdos científicos, o modelo acomoda a ideia de que tais propostas possam ser fundamentadas em hipóteses de design, isto é, suposições teoricamente embasadas sobre como determinadas escolhas pedagógicas podem favorecer a aprendizagem (Duit *et al.*, 2012). Essa característica confere ao MER um caráter particularmente adequado para trabalhos de natureza teórico-didática, como o presente estudo.

4.2.2 Reconstrução educacional, História e Filosofia da Ciência e Ensino de Física

A adoção do MER neste trabalho está intimamente relacionada ao uso da História e Filosofia da Ciência (HFC) como recursos para o ensino de Física. Diversos estudos têm argumentado que a incorporação de elementos históricos e filosóficos pode contribuir para uma compreensão mais profunda dos conceitos científicos, ao evidenciar sua gênese, seus limites e suas controvérsias (Karam; Lima, 2022; Matthews, 1995; Oliveira, 2011; Peduzzi, 2001; Silva; Guerra, 2015). A inserção de

narrativas históricas no ensino constitui apenas uma entre diversas possibilidades de mobilização da História e Filosofia da Ciência, apresentando tanto potencialidades quanto desafios no que se refere à promoção de ganhos conceituais e epistemológicos. Embora a história da ciência ofereça recursos importantes para a problematização e a atribuição de significado aos conceitos (Lima; Cavalcanti; Ostermann, 2021), defende-se aqui que sua incorporação ao ensino exige processos de reconstrução que preservem o lastro histórico ao mesmo tempo em que articulem essa narrativa a linguagens teóricas e matemáticas mais adequadas aos objetivos educacionais propostos. Nessa perspectiva o ensino de HFC deve necessariamente ancorar sua apresentação a objetivos educacionais específicos, explícitos e que exerçam influência em sua reconstrução e forma de apresentação aos estudantes.

O MER oferece um enquadramento teórico que permite integrar a HFC de modo sistemático ao design didático. Ao tratar a história da ciência como parte do conteúdo a ser reconstruído, e não como um adendo ilustrativo, o modelo legitima o uso de fontes históricas como elementos estruturantes do ensino. Nesse sentido, a HFC deixa de desempenhar um papel meramente contextual e passa a contribuir diretamente para a atribuição de significado aos conceitos científicos.

No caso da mecânica quântica, essa articulação é particularmente relevante. A teoria quântica é marcada por debates interpretativos, escolhas epistemológicas e rupturas conceituais profundas em relação à física clássica (Jammer, 1966; Kragh, 1987; Longair, 2013). Ignorar esses aspectos no ensino tende a reforçar uma visão dogmática da teoria (Matthews, 1995), na qual o formalismo matemático aparece dissociado de seus fundamentos conceituais. A reconstrução educacional, ancorada na HFC, permite enfrentar esse problema ao explicitar os caminhos conceituais que levaram à formulação da teoria e de suas interpretações.

4.2.3 O MER no ensino de mecânica quântica: potencialidades e limites

Embora o MER tenha sido amplamente utilizado em pesquisas em Ensino de Ciências (Silva; Ferreira, 2020), sua aplicação ao ensino da mecânica quântica no nível superior ainda é relativamente limitada. Parte dessa lacuna pode ser atribuída às especificidades da mecânica quântica, que combina elevado grau de abstração conceitual, formalismo matemático sofisticado e forte carga epistemológica. Essas

características colocam desafios adicionais para o design de propostas de ensino fundamentadas.

A adoção do MER no contexto da mecânica quântica exige, portanto, adaptações conceituais. Em particular, é necessário reconhecer que o formalismo matemático não pode ser simplesmente relegado a segundo plano em favor de discussões qualitativas ou históricas. Ao contrário, a reconstrução educacional deve preservar o papel da matemática, ao mesmo tempo em que explicita seus significados físicos e interpretativos. Essa postura evita tanto o tecnicismo acrítico quanto abordagens excessivamente narrativas que desconsideram a estrutura formal da teoria. No caso específico da interpretação probabilística, uma reconstrução detalhada de seus aspectos formais e matemáticos foi apresentada no Capítulo 3 desta tese, ancorada em seu desenvolvimento histórico. A análise dessa reconstrução, quando considerada à luz de uma proposta didática para o ensino superior, evidencia a necessidade de uma readequação do uso do formalismo matemático, em virtude de sua elevada complexidade conceitual e técnica. Nesse sentido, um dos principais desafios e, simultaneamente, uma das contribuições centrais desta tese consiste em construir orientações para construção de propostas de ensino que integrem o desenvolvimento histórico da interpretação probabilística aos seus fundamentos formais, de modo que o formalismo matemático não seja apresentado como um aparato autônomo e descontextualizado, mas como parte de um processo conceitual que responde a problemas físicos e epistemológicos específico.

Outro aspecto relevante diz respeito ao público-alvo considerado. No ensino superior, estudantes de Física possuem familiaridade com modelos matemáticos e com a física clássica, o que influencia tanto suas concepções quanto suas dificuldades em relação à mecânica quântica (Souza *et al.*, 2021). Nesse contexto, a reconstrução educacional deve levar em conta não apenas concepções intuitivas, mas também formas de raciocínio formal que podem atuar como obstáculos epistemológicos, por exemplo, quando analogias clássicas são aplicadas de maneira inadequada a fenômenos quânticos (Müller; Wiesner, 2002).

Assim, a utilização do MER neste trabalho não corresponde à aplicação literal de um modelo desenvolvido para outros contextos educacionais, mas à sua adaptação fundamentada ao ensino da MQ, mais especificamente ao ensino da interpretação probabilística da MQ. Essa adaptação orienta a reconstrução

educacional da interpretação probabilística desenvolvida na seção seguinte, na qual se articulam a reconstrução do conteúdo científico, as perspectivas dos estudantes e o papel de materiais didáticos no ensino.

4.3 RECONSTRUÇÃO DA INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA

No âmbito do Modelo de Reconstrução Educacional (MER), o processo de elaboração de propostas de ensino fundamentadas pressupõe a articulação entre três componentes estreitamente relacionados: a análise do conteúdo científico, a consideração das perspectivas dos estudantes e o desenvolvimento de propostas didáticas que resultem dessa articulação. À luz desse modelo, a interpretação probabilística da mecânica quântica configura-se como um objeto particularmente fértil para a reconstrução educacional, uma vez que envolve escolhas epistemológicas explícitas, dificuldades conceituais recorrentes e modos de apresentação didática historicamente consolidados, mas pouco problematizados.

Do ponto de vista do conteúdo científico, o MER propõe que a reconstrução educacional não se limite à transposição de resultados da ciência, mas considere os problemas, controvérsias e caminhos conceituais que estruturaram a construção do conhecimento (Duit *et al.*, 2012). Assim, a análise e reconstrução do conteúdo a luz da HFC articulada ao MER não se limita a uma simples descrição histórica. Aplicada à mecânica quântica, essa perspectiva cria um caminho natural para o uso de fontes históricas, pois nelas encontramos elementos que auxiliam na discussão das origens de conceitos e interpretações (Matthews, 1995). No que diz respeito especificamente a interpretação probabilística da função de onda, a análise dos registros históricos mostra que essa interpretação associada a função de onda emerge como resposta a dificuldades específicas associadas à descrição de processos subatômicos, em especial aqueles envolvendo colisões e espalhamento de partículas. Assim, ao reconstruir o conteúdo que orienta a discussão de uma proposta didática para o ensino da interpretação probabilística, busca-se não apenas analisar os fundamentos conceituais desse tema, mas também explicitar elementos que possam ser didaticamente mobilizados para enfrentar as dificuldades recorrentes dos estudantes. Nesse sentido, a reconstrução do conteúdo assume o papel de mediação entre a estrutura do conhecimento científico e as exigências do contexto educacional,

orientando a seleção e a organização de aspectos que favoreçam a superação desses obstáculos de aprendizagem.

4.3.1 Reconstrução do conteúdo científico (Componente 1 do MER): A interpretação probabilística como resposta a problemas físicos concretos

Os problemas de colisão e espalhamento de partículas remonta a um período anterior de consolidação da mecânica newtoniana, e ocuparam um lugar privilegiado na física (Kragh, 1987). Em parte, isso se deve ao fato de que impactos entre corpos forneciam situações experimentais nas quais princípios gerais, como conservação de quantidade de movimento e de energia, podiam ser testados e refinados de modo particularmente conveniente. Nos séculos XVIII e XIX, estudos sobre colisões elásticas e inelásticas não eram apenas exercícios de dinâmica, mas verdadeiros “laboratórios conceituais” nos quais se articulavam noções de força, impulso, trabalho e energia. Nessa tradição, uma colisão era compreendida como um processo localizado no tempo, em que dois corpos, dotados de posições e velocidades bem definidas, interagiam por forças que, ainda que complexas microscopicamente, podiam ser tratadas de forma efetiva por leis macroscópicas. O formalismo clássico permitia, ao menos em princípio, prever de maneira determinística o estado final dos corpos a partir de suas condições iniciais. Mesmo quando se introduzia uma descrição estatística, como no caso da teoria cinética dos gases ou na colisão de partículas subatômicas, tal estatística era entendida como reflexo de nossa ignorância sobre as condições microscópicas, e não como uma limitação fundamental da própria teoria (Jammer, 1966).

Quando, no início do século XX, a física passou a investigar processos no nível atômico e subatômico, as colisões mantiveram sua centralidade experimental. Experimentos de espalhamento de elétrons por átomos, de partículas alfa por núcleos, ou de fótons por elétrons tornaram-se ferramentas fundamentais para sondar a estrutura da matéria. Entretanto, esses novos regimes revelaram tensões profundas entre a intuição clássica e os resultados observados (Longair, 2013). Em especial os estudos sobre a estrutura do átomo tornaram-se um dos problemas centrais da física nesse período. A descoberta do elétron por J. J. Thomson, em 1897 (Jammer, 1966), impôs a necessidade de um modelo atômico capaz de acomodar cargas negativas no interior de uma entidade eletricamente neutra. A proposta de Thomson,

frequentemente conhecida como modelo do “pudim de passas”, representava o átomo como uma distribuição contínua de carga positiva, no interior da qual os elétrons estariam imersos, ocupando posições de equilíbrio. Esse modelo possuía uma plausibilidade considerável no contexto da época, pois preservava a continuidade da matéria e permitia explicar, ao menos qualitativamente, fenômenos como a neutralidade elétrica e certas regularidades espectrais (Jammer, 1966).

Do ponto de vista experimental, o modelo de Thomson também se articulava com os métodos então disponíveis. Em particular, os primeiros estudos de espalhamento de partículas carregadas por átomos eram interpretados como o resultado de múltiplas pequenas deflexões, produzidas por interações fracas e distribuídas ao longo do volume do átomo. Nesse cenário, grandes desvios angulares eram considerados altamente improváveis, uma vez que a carga positiva estaria diluída e não concentrada em uma região localizada (Longair, 2013).

É precisamente nesse ponto que os resultados obtidos por Ernest Rutherford e seus colaboradores em 1911, no famoso experimento de espalhamento de partículas alfa por lâminas metálicas (Rutherford, 2012), introduziram uma tensão profunda entre a imagem de átomo fornecida por Thomson e a emergência de uma nova concepção de átomo. Nesse contexto, foi necessário quantificar as partículas desviadas do alvo, e para isso foi introduzido um elemento teórico crucial para interpretar os resultados experimentais, a chamada **seção de choque de espalhamento**. Essencialmente podemos escrever que a seção de choque de espalhamento é,

$$\frac{nº\ de\ partículas\ espalhadas\ por\ segundo\ no\ ângulo\ sólido\ d\Omega}{fluxo\ incidente} = \frac{(dN/d\Omega)}{\mathcal{L}}$$

que é interpretada como uma fração de partículas incidentes desviadas em um certo ângulo. Ou seja, a expressão acima registra a quantidade N de partículas detectadas que se espalham dentro do ângulo sólido $d\Omega$ normalizado pelo valor da luminosidade ($\mathcal{L}$) do feixe incidente (Griffiths, 2011). Sua construção leva em consideração aspectos geométricos e quando aplicado ao regime clássico leva a uma expressão de espalhamento que mede a **probabilidade** de detectar partículas desviadas em uma certa direção devido a um potencial central.

O trabalho de Rutherford mostrou que uma pequena fração das partículas era desviada por ângulos muito grandes, algumas chegando mesmo a retroceder, não

podia ser acomodada dentro do quadro conceitual de Thomson. Tais eventos exigiam a presença de uma região altamente concentrada de carga positiva capaz de produzir forças intensas em distâncias muito pequenas, algo incompatível com uma distribuição difusa (Jammer, 1966).

A importância desse resultado não reside apenas em sua novidade experimental, mas em seu impacto epistemológico. O modelo de Thomson, embora coerente com uma série de dados anteriores, revelava-se incapaz de explicar um fenômeno crucial quando os experimentos alcançaram um novo regime de sensibilidade. Rutherford, ao propor um átomo com um núcleo compacto e massivo, deslocou o centro da explicação: a estrutura atômica deixava ser concebida como um contínuo carregado para se tornar um sistema fortemente hierarquizado, com grande parte da massa e da carga concentrada em uma região pequena.

Essa transição não foi apenas uma substituição de modelos, mas uma reconfiguração do próprio problema físico. No modelo de Thomson, o espalhamento era concebido como o resultado cumulativo de muitas interações fracas; no modelo nuclear de Rutherford, ele passava a ser dominado por eventos raros, porém intensos, governados pela interação com o núcleo. Assim, os mesmos dados experimentais (desvios angulares de partículas) adquiriram significados radicalmente distintos conforme o quadro teórico no qual eram interpretados.

Do ponto de vista histórico, a tensão entre Thomson e Rutherford ilustra de forma exemplar como resultados experimentais não “falam por si mesmos”, mas ganham significado apenas no interior de estruturas conceituais específicas. A proposta de Rutherford não apenas resolveu uma anomalia empírica, mas inaugurou uma nova forma de pensar a matéria, preparando o terreno para as crises subsequentes que levariam ao surgimento da mecânica quântica. Nesse sentido, o espalhamento de partículas alfa não foi apenas uma técnica de sondagem, mas um instrumento de transformação conceitual, cujo impacto ultrapassou em muito o contexto imediato da física atômica.

Entretanto, apesar das potencialidades da concepção atômica proposta por Rutherford, diversas questões em aberto, entre elas o problema da estabilidade do átomo e a incapacidade de explicar os espectros discretos observados experimentalmente, indicavam que uma simples extensão da mecânica clássica não seria suficiente para descrever os sistemas atômicos (Jammer, 1966). Essas

dificuldades indicavam que o arcabouço da mecânica clássica não poderia ser simplesmente estendido para o domínio atômico.

Tentativas de enfrentamento dessas tensões foram propostas por Niels Bohr (Jammer, 1966), que introduziu um modelo híbrido no qual elétrons descreviam órbitas estacionárias quantizadas em torno do núcleo. Embora o modelo de Bohr preservasse elementos da mecânica clássica, ele incorporava postulados quânticos ad hoc para explicar a estabilidade do átomo e os espectros observados. Do ponto de vista histórico, essa proposta representou um passo intermediário importante, pois evidenciou a necessidade de abandonar descrições puramente clássicas, ainda que não oferecesse uma fundamentação dinâmica completa para os postulados introduzidos.

O salto conceitual mais radical ocorreu com a proposta de Louis de Broglie, ao estender a dualidade onda-partícula, inicialmente formulada para a radiação, às partículas materiais (Jammer, 1966). Para de Broglie, a onda associada à partícula possuía um caráter físico real e desempenhava um papel causal em sua dinâmica. Essa concepção implicava uma ontologia na qual a partícula não poderia ser descrita independentemente de sua onda associada, introduzindo uma nova forma de compreender o movimento microscópico que rompia com a noção clássica de trajetória.

Inspirado por essas ideias, Erwin Schrödinger desenvolveu uma mecânica ondulatória ao formular uma equação de onda capaz de descrever a evolução temporal dos sistemas quânticos. Schrödinger concebia inicialmente a função de onda como uma entidade física real, distribuída no espaço, e buscava interpretar partículas como pacotes de ondas localizados. Essa leitura visava preservar uma imagem contínua e intuitiva da realidade física, em consonância com tradições clássicas da física. No entanto, dificuldades como a dispersão dos pacotes de onda e a descrição de processos de colisão e detecção localizada revelaram limites importantes dessa interpretação.

Paralelamente, Albert Einstein acompanhou criticamente esses desenvolvimentos. Embora tenha sido um dos principais responsáveis pela introdução de conceitos quânticos na física, Einstein manteve reservas profundas quanto ao estatuto da função de onda e ao caráter probabilístico da teoria. Ele explorou analogias nas quais quanta seriam guiados por estruturas de campo subjacentes, mas nunca aceitou a ideia de que a função de onda pudesse fornecer uma descrição

completa da realidade física. Para Einstein, a mecânica quântica deveria ser entendida como uma teoria incompleta, à espera de uma formulação mais profunda (Longair, 2013).

Assim, a transição histórica entre o modelo nuclear de Rutherford e a emergência da mecânica ondulatória quântica não pode ser compreendida como um simples refinamento técnico, mas como uma profunda reconfiguração conceitual. As discussões sobre a natureza da função de onda, envolvendo de Broglie, Schrödinger, Einstein, Born e Bohr, evidenciam que o surgimento da mecânica quântica foi acompanhado por debates ontológicos e epistemológicos intensos. A função de onda tornou-se o elemento central dessa nova teoria, não apenas como um objeto matemático, mas como o foco de diferentes concepções sobre o que significa descrever a realidade física no domínio microscópico

Paralelamente a essas questões, uma série de resultados experimentais acumulados nas primeiras décadas do século XX, como o efeito fotoelétrico, os espectros de emissão e absorção e, posteriormente, os fenômenos de difração e interferência de elétrons, tensionava as distinções tradicionais entre ondas e partículas. Esses fenômenos revelavam um comportamento híbrido da radiação e da matéria, no qual propriedades típicas de ondas e de corpúsculos se manifestavam de forma complementar, dando origem às discussões sobre a dualidade onda-partícula (Longair, 2013).

Nesse cenário, tornou-se progressivamente claro que uma nova forma de conceber o comportamento microscópico era necessária, abrindo caminho para a emergência de descrições ondulatórias nas quais elétrons e outras partículas passaram a ser representados por funções de onda cuja evolução no espaço e no tempo era governada por equações diferenciais, como a equação de Schrödinger. Em seus trabalhos sobre a mecânica quântica, Schrödinger recorreu a uma analogia ótico-mecânica, segundo a qual o comportamento das partículas poderia ser descrito por meio de uma função de onda que obedecia a uma equação diferencial (Lima; Karam, 2022; Longair, 2013). A partir dessa formulação, ele aplicou sua equação a sistemas como o oscilador harmônico linear, buscando mostrar que seria possível conciliar a dinâmica quântica com a imagem de pacotes de onda que se propagam no espaço. Nesse quadro, os estados estacionários surgiam como soluções nas quais o comportamento ondulatório poderia ser interpretado de modo relativamente estável.

No entanto, essa concepção foi alvo de críticas significativas por parte de Heisenberg e de outros físicos da época. No caso particular do oscilador harmônico, os níveis de energia são igualmente espaçados, o que torna esse sistema excepcionalmente compatível com a descrição ondulatória proposta por Schrödinger (Longair, 2013; Pais, 1982). Em situações mais gerais, contudo, as ondas associadas às partículas tendem a se dispersar no espaço ao longo do tempo, tornando problemática a interpretação das partículas como pacotes de onda localizados. Essa dificuldade torna-se ainda mais evidente à luz de resultados experimentais, como a difração de elétrons por cristais e os processos de colisão e espalhamento, nos quais a estabilidade e a localização das partículas parecem incompatíveis com a dispersão da função de onda prevista pelo formalismo ondulatório.

É nesse ponto que o problema investigado por Born assume um papel relevante historicamente (Jammer, 1966; Longair, 2013). Diante de soluções ondulatórias da equação de Schrödinger que em princípio deveriam descrever feixes espalhados em múltiplas direções, Born propôs uma análise de um problema de colisões (Born, 1926b, 1926b; Longair, 2013), semelhante ao problema físico clássico abordado por Rutherford, na tentativa de testar e compreender o papel do modelo de Schrödinger nesse contexto. De acordo com Born,

> Os processos de colisão não apenas produzem a prova experimental mais convincente dos pressupostos básicos da teoria quântica, mas também parecem adequados para explicar o significado físico das leis formais da chamada ‘mecânica quântica (Born, 1926a).

A emergência do formalismo ondulatório de Schrödinger trouxe uma nova forma de descrever partículas em interação. Em vez de trajetórias, a teoria fornecia funções de onda que evoluíam no tempo segundo uma equação diferencial. Nos problemas de colisão e espalhamento, essa função de onda passava a codificar a interação entre uma partícula incidente e um alvo, produzindo, no futuro distante, uma superposição de estados correspondentes a diferentes direções e energias de saída.

Essa proposta não foi uma escolha arbitrária, mas uma resposta direta a um problema herdado da física clássica das colisões: como relacionar uma descrição teórica contínua e ondulatória com eventos experimentais discretos, nos quais uma partícula é detectada em uma posição específica após a interação? Enquanto, no regime clássico, essa correspondência era garantida pela existência de trajetórias, no

regime quântico ela exigia um novo tipo de mediação conceitual abrindo espaço para novas propostas.

Aqui se manifesta uma ruptura conceitual decisiva: a teoria já não descrevia uma partícula que colide e sai em uma direção específica, mas uma entidade ondulatória que se distribui no espaço complexo. O formalismo era capaz de calcular amplitudes[14] para cada uma dessas possibilidades de espalhamento, mas não fornecia, por si só, uma previsão determinística do resultado de um evento individual. Além disso, restava interpretar como essa onda espalhada se relacionava com conceitos concretos.

Entretanto, apesar do caráter ondulatório associado a matéria ser reconhecido por Born, o contexto científico sobre a dinâmica das partículas subatômicas era influenciado por experimentos, especialmente aqueles associados a colisão de elétrons realizados por James Franck e seus colaboradores. Esses experimentos mostravam comportamentos que lembravam fortemente o de partículas clássicas: elétrons colidiam, transferiam energia e produziam efeitos localizados nos detectores. Isso, o levou a conceber uma natureza corpusculares para a matéria, ou seja, a “matéria pode sempre ser visualizada como consistida de massas pontuais (elétrons, prótons), mas em muitos casos, as partículas não devem ser identificadas como indivíduos, por exemplo, quando elas formam um sistema atômico” (Born, 1927) p.355, nossa tradução). Nessa perspectiva, Born sustenta uma concepção ontológica na qual os constituintes da matéria são entendidos como entidades corpusculares responsáveis por eventos localizados, enquanto à função de onda é atribuído um estatuto distinto. A função de onda não descreve diretamente a natureza física da partícula, mas atua como um elemento que permite relacionar as entidades com um comportamento dinâmico não determinístico. Nesse sentido, Born não reduz a função de onda a um mero artifício matemático. Sua posição se apoia em uma concepção intermediária, na qual a função de onda desempenha o papel de um campo que orienta a ocorrência de eventos corpusculares. Essa imagem é formulada de maneira particularmente explícita em seu trabalho sobre processos de colisão (Born, 1926a), no qual Born recorre a uma analogia com a noção de “campo fantasma” proposta por

[14] A amplitude comentada no texto se refere a amplitude de espalhamento. A rigor, a onda espalhada tem dependência com variáveis angulares. Assim, para cada ângulo de espalahmento considerdo temos um valor de amplitude de espalhamento.

Einstein no esforço de atribuir uma idealização que relacionasse quanta de luz e um campo que sustentaria sua dinâmica (Jammer, 1966). Embora essa concepção jamais tenha sido confirmada empiricamente e não tenha sido incorporada como parte estabelecida na física (Pais, 1982), ela forneceu a Born um recurso conceitual para reforçar uma imagem da função de onda. Assim, essa analogia não implica a atribuição de realidade física direta à função de onda, mas desempenha um papel heurístico (Born, 1926a) na construção da interpretação probabilística.

No contexto ondulatório, uma colisão é concebida como o espalhamento de uma onda incidente por um potencial associado ao alvo. A partícula que se aproxima não é descrita como um ponto material que segue uma trajetória determinada, mas por uma função de onda que se propaga no espaço e interage com o potencial do sistema. Como resultado dessa interação, a função de onda não emerge concentrada em uma única direção, mas se distribui espacialmente em múltiplas direções possíveis, caracterizando o fenômeno de espalhamento.

Do ponto de vista matemático, o problema se resume a encontrar uma solução para a equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi \qquad (1)$$

Ao resolver a equação de Schrödinger para o problema de espalhamento, Born estabelece uma série de considerações fundamentais. Em particular, ele examina o comportamento da função de onda em regiões muito afastadas do centro de interação. Nesse limite assintótico, isto é, a grandes distâncias do alvo, a função de onda deve assumir um comportamento simples e bem definido, aproximando-se de uma onda plana, o que corresponde, de forma equivalente, à descrição de uma partícula livre (Born, 1926a). Essa condição assintótica não é apenas uma conveniência matemática, mas um pressuposto físico fundamental, pois expressa o fato de que, longe da região onde o potencial atua, a partícula não está mais sob a influência da interação.

A questão central, então, consiste em compreender como as condições de contorno impostas pelo potencial V afetam a forma da função de onda nesse limite assintótico e como essas modificações podem ser interpretadas em termos de processos de colisão e espalhamento (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969). O efeito do potencial manifesta-se precisamente na modificação da onda incidente, dando origem

a uma componente adicional da função de onda que se propaga em múltiplas direções a partir do centro espalhador.

Para tornar o problema matematicamente tratável, Born introduz uma aproximação fundamental, posteriormente conhecida como primeira aproximação de Born. Nessa abordagem, ao considerar o termo $V\psi$ da equação de Schrödinger, a função de onda ψ é aproximada pela onda plana incidente onde o potencial de interação é suficientemente fraco para que a onda incidente sofra apenas uma pequena perturbação (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969). Em outras palavras, assume-se que o potencial atua sobre a onda incidente não perturbada, gerando uma contribuição espalhada que pode ser calculada de forma explícita. Essa hipótese simplificadora permite obter uma expressão para a onda espalhada como resultado direto da interação entre o potencial e a onda incidente.

Nesse contexto, a solução da equação de Schrödinger assume a forma geral,

$$\psi=\psi_i+\psi_e, \tag{2}$$

que contém dois termos: um associado a onda incidente (ψ_i), presumido como uma onda plana propagando-se, por convenção, ao longo da direção z, e uma onda espalhada (ψ_e), cuja forma incorpora os efeitos da interação. Essa decomposição reflete a exigência de que, antes da colisão, o sistema seja descrito por uma partícula livre, enquanto após a interação a função de onda contenha informações sobre todas as direções possíveis de espalhamento.

A solução associada ao espalhamento emerge, assim, como uma superposição de contribuições ondulatórias, nas quais a onda espalhada apresenta uma dependência angular que codifica os efeitos do potencial. No limite assintótico, essa onda assume a forma de uma onda aproximadamente esférica, cuja amplitude varia com a direção.

A solução encontrada por Born para o problema de colisões (Born, 1926b) assume então a forma geral,

$$\psi(\vec{r}) \cong \psi_i+\frac{Ce^{ikr}}{r}f(\theta), \tag{3}$$

onde, o segundo termo do lado direito da expressão é a contribuição para a onda espalhada (ψ_e). A função $f(\theta)$, conhecida como amplitude de espalhamento (Griffiths, 2011), ou melhor, o quadrado dessa função assume uma forma matemática muito particular para o regime de aproximação de Born. Nesse contexto, $f(\theta)$ ao quadrado é exatamente a fórmula de espalhamento de Rutherford.

Uma imagem muito conveniente sobre o problema de espalhamento envolvendo ondas remonta ao regime clássico, onde a seção de choque pode ser interpretada como uma medida da fração de partículas incidentes que sofrem espalhamento devido à presença do alvo. Em termos operacionais, isso corresponde a relacionar o número de partículas detectadas em uma determinada direção ao número total de partículas que incidem sobre o alvo.

Do ponto de vista histórico, Born estabelece uma relação entre os coeficientes da combinação linear de estados e a distribuição do número total de partículas do sistema nos casos estacionários, ou seja, para a combinação linear,

$$\psi = c_1\psi_1 + \cdots + c_2\psi_2. \tag{4}$$

Ao considerar os coeficientes ao quadrado, somo levados a relação,

$$\iiint |\psi|^2 \, dV = \sum_n |c_n|^2, \tag{5}$$

O quadrado desses coeficientes, associado à condição de normalização dos estados, sugere uma interpretação estatística que guarda certa proximidade com descrições probabilísticas já conhecidas na física clássica. No entanto, essa aproximação não deve ser entendida como uma equivalência conceitual. Embora a forma matemática remeta a distribuições estatísticas familiares, os processos quânticos são regidos por uma lógica de composição distinta daquela encontrada nas teorias clássicas. Desse modo, a semelhança observada é mais uma aproximação intuitiva que uma correspondência formal entre os dois domínios.

De modo análogo, ao tratar processos não estacionários, particularmente fenômenos de espalhamento, ele associa a amplitude de espalhamento $f(\theta)$ à distribuição dos resultados observáveis das colisões. Em seu artigo de 1926, essa interpretação é apresentada explicitamente como uma hipótese heurística, reconhecida pelo próprio autor como uma proposição que extrapola o formalismo matemático disponível naquele momento. Portanto, ao fazer uso dessa hipótese no trabalho original, somos conduzidos a,

$$\frac{(dN/d\Omega)}{\mathcal{L}} = |f(\theta)|^2 \tag{6}.$$

Entretanto, essa hipótese não parece constituir uma escolha arbitrária. Embora Born não apresente uma comparação sistemática entre sua proposta interpretativa e os resultados experimentais de espalhamento já consolidados à época, sua formulação encontra respaldo em evidências empíricas conhecidas. Em particular, as

distribuições probabilísticas inferidas a partir das seções de choque experimentais, amplamente utilizadas na descrição de processos de colisão, mostravam-se compatíveis com a interpretação dos coeficientes e das amplitudes de espalhamento como quantidades relacionadas à probabilidade de ocorrência dos resultados observados. Nesse sentido, a hipótese de Born pode ser compreendida menos como uma conjectura desprovida de fundamentação e mais como uma tomada de decisão orientada por resultados empíricos previamente estabelecidos. Ainda que o autor não explicite esse encadeamento argumentativo, sua proposta emerge em um contexto no qual a descrição estatística dos fenômenos de espalhamento já desempenhava um papel central, fornecendo elementos que tornavam plausível a atribuição de significado probabilístico às quantidades matemáticas introduzidas pela teoria quântica.

Sendo assim, é perfeitamente possível relacionar a função de onda espalhada encontrada por Born com a seção de choque diferencial, uma vez que o termo $f(\theta)$ aparece explicitamente em sua solução, temos que,

$$\frac{(dN/d\Omega)}{\mathcal{L}} \sim \psi^2, \tag{7}$$

essa relação explicita de forma inequívoca a associação entre o quadrado da função de onda e a noção de probabilidade.

De forma análoga podemos abordar essa mesma questão recorrendo a formalismo equivalente. Ao se considerar que a razão entre o número de partículas espalhadas em um ângulo sólido, $dN/d\Omega$, e a luminosidade $\mathcal{L}$ fornece a seção de choque diferencial e é formalmente análoga à razão entre os fluxos de partículas espalhadas e incidentes (j_e/j_i) (a menos de um parâmetro geométrico), obtemos,

$$\frac{(dN/d\Omega)}{\mathcal{L}} \sim \left(\frac{j_e}{j_i}\right). \tag{8}$$

Essa semelhança não é casual, pois ambas as expressões descrevem o mesmo processo físico de colisão e espalhamento, ainda que recorram a linguagens conceituais distintas. Enquanto uma enfatiza contagens de partículas, a outra antecipa a formalização do espalhamento em termos de seção de choque em termos de fluxos de partículas.

Nos trabalhos originais de Born sobre o problema de colisões no contexto da mecânica ondulatória (Born, 1926a, 1926b), a noção de seção de choque não é discutida de forma explícita, sequer se encontra algum argumento sistemático

em termos de fluxos de partículas incidentes e espalhadas. O foco desses artigos está centrado, sobretudo, na análise da equação de Schrödinger e a discussão do significado físico associado a função nos processos de transição de estados.

Ainda assim, a seção de choque surge de modo implícito na análise de Born, na medida em que o espalhamento das ondas é avaliado a partir da intensidade angular da onda espalhada no limite assintótico. Embora Born não formule o problema diretamente em termos de taxas de contagem ou fluxos de partículas, o formalismo que ele desenvolve fornece os elementos necessários para estabelecer essa conexão, tal como discutido anteriormente.

Por outro lado, a relação entre esses conceitos torna-se explícita em trabalhos posteriores de Born, como no seu livro intitulado *Atomic Physics*, nos quais a relação entre fluxos de partículas e seção de choque é empregada de maneira direta para reproduzir resultados clássicos, como a fórmula de Rutherford para o espalhamento de partículas alfa (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969). Nesse contexto, a seção de choque é interpretada como a razão entre o fluxo de partículas espalhadas em uma dada direção e o fluxo de partículas incidentes, estabelecendo uma ponte clara entre descrições experimentais baseadas em contagens de partículas e a descrição ondulatória fornecida pela função de onda.

A relação entre fluxo de partículas e função de onda pode ser feita a partir da equação de Schrödinger para obter a seguinte expressão,

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\psi|^2)=-\nabla\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right)\right], \tag{9}$$

Definindo o vetor corrente como,

$$\vec{j}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right) \tag{10}$$

Obtemos algo análogo a equação da continuidade,

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}. \tag{11}$$

Dessa forma, conseguimos estabelecer um vínculo do vetor corrente com a função de onda. A interpretação dessa grandeza como uma corrente associada ao movimento de partículas exige, à primeira vista, um certo grau de abstração, uma vez que ela é definida a partir da função de onda, um objeto de natureza complexa. No entanto, ao introduzir o vetor densidade de corrente dessa forma e considerar a equação de continuidade associada, torna-se possível, por meio do teorema do divergente, interpretar o fluxo dessa corrente através de uma superfície como

diretamente relacionado ao módulo ao quadrado da função de onda. Dessa maneira, estabelece-se um vínculo conceitual entre a função de onda, enquanto elemento abstrato do formalismo quântico, e a noção concreta de fluxo de partículas, tal como empregada na descrição de processos de colisão e espalhamento.

Assim, a despeito da possível controvérsia em se interpretar o vetor corrente $\vec{j}$ como algo realmente ligado ao fluxo de partículas, podemos utilizar essa prescrição para explorar suas implicações físicas. Para esse propósito vamos considerar primeiramente de forma genérica o módulo de um vetor corrente de entrada (j_i) associado as partículas incidentes, por exemplo vindos de uma direção arbitrária z,

$$j_i=\vec{J}\cdot\hat{k}=j_z=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_i\frac{\partial}{\partial z}\psi_i^*-\psi_i^*\frac{\partial}{\partial z}\psi\right), \tag{12}$$

e um vetor corrente espalhado (em três dimensões),

$$j_e=\vec{J}\cdot\hat{r}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_e\frac{\partial}{\partial r}\psi_e^*-\psi_e^*\frac{\partial}{\partial r}\psi_e\right). \tag{13}$$

A solução da equação de Schrödinger encontrada por Born, expressão (3), fornece as expressões para a onda incidente e espalhada. A função de onda incidente, é uma onda plana enquanto a função de onda espalhada possui uma contribuição do termo da amplitude de espalhamento $f(\theta)$. Ao utilizar a forma explícitas das funções de onda na explícita da função de onda na expressão da seção de choque de espalhamento em termos das correntes, obtém-se,

$$D(\theta)=r^2\left(\frac{j_e}{j_i}\right)=[f(\theta)]^2, \tag{14}$$

ou seja, a seção de choque na MQ depende, do ponto de vista prático, da amplitude de onda associado a função de onda espalhada. Em seu artigo sobre processos de colisão (Born, 1926a, 1926b), Born obtém uma expressão para a seção de choque em termos dessa grandeza, de modo formalmente análogo. O fato curioso desse resultado aparece quando consideramos escrever $f(\theta)$ explicitamente em termos da função de onda espalhada,

$$\psi_e=\frac{e^{ikr}}{r}f(\theta)\rightarrow\psi_e{}^*\psi_e=\frac{[f(\theta)]^2}{r^2}, \tag{15}$$

que, ao utilizar a seção de choque em termos da corrente vetorial, resulta em,

$$\psi_e{}^*\psi_e=|\psi_e|^2=\left(\frac{j_e}{j_i}\right). \tag{16}$$

A expressão acima revela-se particularmente esclarecedora do ponto de vista conceitual. Se, nos problemas de colisão, a razão entre as correntes explicita de maneira inequívoca o caráter estatístico do espalhamento, de modo análogo ao que foi discutido anteriormente a respeito da hipótese de Born no contexto de seu artigo, então o módulo ao quadrado da função de onda deve ser compreendido como expressão desse mesmo conteúdo interpretativo. Ainda que os regimes clássico e quântico apresentem formalismos profundamente distintos, é possível estabelecer entre eles um vínculo interpretativo consistente, que se acomoda de forma natural no formalismo quântico sem introduzir ambiguidades conceituais. A seção de choque, que possui uma interpretação estatística intrínseca, pode se relacionar (em regimes apropriados), tanto aos casos em que a mecânica quântica é válida, quanto para os casos em que predominam efeitos quânticos.

Além disso, a formulação da seção de choque em termos das correntes, quando aplicada à solução obtida por Born no âmbito da primeira aproximação, conduz ao mesmo resultado clássico encontrado por Rutherford (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969; Rutherford, 2012) para o espalhamento de partículas alfa. Esse fato não é meramente técnico, pois indica que os pressupostos heurísticos adotados por Born no tratamento ondulatório das colisões não conduzem a previsões discrepantes ou inconsistentes com os resultados já consolidados experimentalmente. Ao contrário, o novo formalismo mostra-se capaz de recuperar, em um limite apropriado, descrições bem estabelecidas da física clássica.

Do ponto de vista de construção de conhecimento científico, essa recuperação desempenha um papel fundamental na legitimação de uma nova teoria ou modelo. A construção científica se apoia também na capacidade de reproduzir resultados previamente conhecidos, conferindo continuidade e coerência ao corpo do conhecimento. Nesse sentido, a concordância entre a seção de choque derivada no contexto quântico e o resultado de Rutherford pode ser interpretada como um critério de adequação teórica, no qual a mecânica quântica, longe de romper arbitrariamente com a física clássica, incorpora-a como um caso limite. Essa articulação reforça a ideia de que a interpretação probabilística proposta por Born não é um artifício ad hoc, mas uma resposta conceitualmente consistente à necessidade de conciliar novas descrições ondulatórias com problemas concretos.

Essa formulação em termos de fluxo de corrente, posterior ao trabalho de Born sobre colisões, não deve ser vista como um acréscimo artificial ao trabalho original,

mas como uma extensão ao desenvolvimento de sua proposição estatística da MQ e que corrobora com os resultados e discussões obtidas originalmente em seu artigo de 1926. A introdução dos fluxos de corrente (Born; Blin-Stoyle; Radcliffe, 1969) permite explicitar o papel mediador da função de onda, que passa a conectar diretamente grandezas calculadas no formalismo teórico, como a intensidade da onda espalhada, com quantidades observáveis em experimentos de colisão, como taxas de detecção e distribuições angulares de partículas.

Assim, embora as relações entre fluxo de partículas e seção de choque não apareçam explicitamente nos artigos originais de Born sobre colisões, sua utilização revela-se particularmente útil, tanto do ponto de vista conceitual quanto didático. Ela torna mais transparente a passagem da descrição ondulatória contínua para a interpretação corpuscular, reforçando a compreensão da função de onda como um instrumento que governa probabilisticamente a ocorrência de eventos físicos localizados.

O processo de colisões no regime quântico pode ser visto como uma continuidade e, ao mesmo tempo, uma ruptura em relação às colisões clássicas. Elas preservam o papel central da interação como meio de acesso às propriedades da matéria, mas substituem a ontologia de trajetórias por uma descrição probabilística baseada na função de onda. É precisamente nessa transição do impacto determinístico ao espalhamento probabilístico que se revela o caráter profundamente não clássico da mecânica quântica e a necessidade de um aparato interpretativo que busque de forma articulada amparo no formalismo matemático, nas analogias e aplicação em problemas concretos propensos a experimentação.

Os trabalhos de Max Born sobre espalhamento (Born, 1926a, 1926b) ilustram de forma paradigmática o processo de conexão de elementos abstratos da teoria com problemas físicos concretos. Embora o formalismo ondulatório permitisse calcular amplitudes associadas aos estados possíveis após a interação, não havia como prever qual resultado seria observado em uma medida específica. A interpretação do módulo ao quadrado da função de onda como densidade de probabilidade surge, nesse contexto, como uma solução conceitual que articula o formalismo matemático com a possibilidade de medir eventos de espalhamento, sobretudo aqueles ligados a transição de estados (Born, 1927).

4.3.2 Elementos conceituais estruturantes da interpretação probabilística

A reconstrução do conteúdo científico exige a identificação de elementos conceituais cuja compreensão é fundamental para o ensino da interpretação probabilística. No MER, não se parte do conteúdo científico “pronto” nem de uma transposição direta para o ensino. Parte-se do reconhecimento de que o conhecimento científico possui uma estrutura interna, composta por conceitos, relações, problemas, pressupostos e práticas, que precisam ser explicitadas e reorganizadas para fins educacionais (Duit *et al.*, 2012).

Nesse sentido, o primeiro elemento elencado nesse trabalho refere-se ao estatuto epistemológico da função de onda. Na interpretação ortodoxa da MQ, a função de onda não é concebida como uma entidade física no espaço tridimensional, mas como um objeto matemático que codifica informações probabilísticas sobre os resultados possíveis de medidas (Jammer, 1966). Essa concepção representa um afastamento deliberado de interpretações que atribuem à função de onda um caráter ontológico direto.

Outro elemento central diz respeito à relação entre formalismo matemático e interpretação física. O MER enfatiza que o conteúdo científico a ser ensinado não se reduz ao formalismo, mas inclui os significados atribuídos a esse formalismo. No caso da mecânica quântica, a equação de Schrödinger, por si só, não determina a interpretação probabilística; esta decorre de uma escolha de Born que busca compatibilizar o formalismo a uma imagem coerente do quadro geral da física de partículas conhecida a época. Isto, implicou evidenciar a perspectiva da necessidade de relacionar o formalismo com problemas concretos como os problemas de colisão e espalhamento de partículas averiguando suas implicações. Tornar explícita essa distinção é fundamental para evitar a naturalização acrítica da regra de Born no ensino.

A distinção entre probabilidade quântica e probabilidade clássica constitui outro aspecto estruturante. Enquanto, na mecânica clássica, a probabilidade costuma ser associada à ignorância sobre condições iniciais ou variáveis não observadas, na interpretação probabilística da mecânica quântica a probabilidade assume um caráter fundamental. Essa diferença, frequentemente obscurecida em abordagens didáticas tradicionais, é central para compreender o alcance e os limites da interpretação probabilística.

O papel das analogias e imagens historicamente mobilizadas na formulação da interpretação probabilística, desempenham no contexto histórico um elemento importante. Embora tais recursos tenham desempenhado funções heurísticas relevantes, sua incorporação ao ensino exige análise crítica, uma vez que analogias não problematizadas podem reforçar concepções equivocadas acerca do significado da função de onda. Sob a perspectiva do MER, a reconstrução educacional não implica a simples reprodução dessas analogias, mas sua reinterpretação à luz de objetivos didáticos específicos.

Por fim, a experimentação assume um papel conceitual estruturante no trabalho de Born, particularmente quando se considera que sua interpretação probabilística é formulada em diálogo direto com os resultados experimentais conhecidos à época, em especial, os obtidos por James Franck e seus colaboradores em estudos de colisões eletrônicas. Esses experimentos, que evidenciavam transferências discretas de energia e eventos localizados associados às interações entre elétrons e átomos, constituíram um pano de fundo empírico para a reflexão de Born sobre o significado físico da função de onda. Nesse sentido, a experimentação não aparece como um simples teste posterior da teoria, mas como um elemento que orienta a própria construção conceitual da interpretação probabilística, ao exigir uma articulação entre a descrição ondulatória contínua e a observação de eventos corpusculares discretos.

Abaixo, temos um quadro que resume os elementos conceituais estruturantes e sua relação com três categorias de análise utilizadas para fins de análise.

Quadro 1: Elementos conceituais estruturantes.

Categorias de Análise	Elementos Conceituais Estruturantes	Descrição
Teórica	Estatuto epistemológico da função de onda.	Inicialmente existe um descontentamento com a tentativa de se atribuir significado físico a função de onda.
	Formalismo e sua aplicação.	O caráter probabilístico não emerge do formalismo proposto por Schrödinger e sim de uma aplicação de seu formalismo.
	Probabilidade clássica e quântica	A probabilidade quântica surge como um elemento intrínseco ao formalismo.

Analógica	Relações de analogias	A analogia da função de onda com um campo “guia” (“campo fantasma”) desempenha um papel heurístico na interpretação.
Experimentação	Relações com experimentação	Experimentos como colisões e difração de elétrons criaram um contexto favorável a imagem das partículas como entidades corpusculares.

Fonte: Elaboração própria.

Os elementos conceituais estruturantes apresentados no Quadro 1 foram construídos a partir de uma análise sistemática de fontes primárias e secundárias que tratam da interpretação probabilística da mecânica quântica. Essa análise, de natureza qualitativa, foi inicialmente orientada pelas categorias analíticas estabelecidas no estudo que investigou a forma como livros didáticos abordam a interpretação probabilística (Souza; Lima; Karam, 2024). Nesse trabalho, foram identificadas quatro categorias recorrentes de apresentação: Teórica, Experimental, Analógica e Não Justifica.

No presente estudo, essas categorias foram tomadas como referência para a identificação dos elementos conceituais estruturantes, na medida em que sintetizam modos recorrentes de organização do conteúdo observados nos livros didáticos. A categoria “Não Justifica”, por sua própria natureza, não se associa a nenhum elemento conceitual estruturante, uma vez que corresponde à ausência de fundamentação conceitual explícita. Por sua vez, a categoria “Teórica” mostrou-se internamente heterogênea, demandando um desdobramento em três elementos conceituais estruturantes distintos: o estatuto epistemológico da função de onda, o formalismo e sua aplicação, e a distinção entre probabilidade clássica e probabilidade quântica.

Esse desdobramento justifica-se pelo fato de que, no âmbito teórico, as discussões sobre a interpretação probabilística não se restringem ao uso do formalismo matemático, mas envolvem relações conceituais mais amplas. Em particular, os aspectos probabilísticos característicos da mecânica quântica e as questões epistemológicas associadas à função de onda emergem diretamente da forma como o formalismo é mobilizado e interpretado. Assim, embora inter-relacionados, esses três elementos cumprem papéis conceituais distintos na

atribuição de significado à interpretação probabilística, o que torna sua explicitação fundamental no processo de reconstrução educacional do conteúdo.

Nesta seção, discutiu-se uma reconstrução do conteúdo científico da interpretação probabilística, com ênfase na gênese histórica e nos elementos conceituais estruturantes da interpretação probabilística. A próxima seção é dedicada ao segundo componente do MER, onde é feita uma análise das perspectivas dos estudantes e desafios de aprendizagem reportados na literatura em MQ e de entrevistas realizadas com estudantes de licenciatura em física.

4.4 INVESTIGAÇÃO DAS PERSPECTIVAS DOS ESTUDANTES (COMPONENTE 2 DO MER)

O segundo componente do MER refere-se à consideração das perspectivas dos estudantes, incluindo concepções prévias, dificuldades recorrentes e modos de apropriação do conteúdo científico. No ensino de MQ, diversos estudos indicam que estudantes apresentam dificuldades conceituais persistentes (Souza *et al.*, 2021), mesmo quando dominam procedimentos matemáticos associados ao formalismo quântico. Embora exista uma diversidade nos desempenhos dos estudantes, as pesquisas na área têm apontado que estudantes de Física, ao longo da graduação, têm dificuldades em construir uma compreensão funcional dos conceitos fundamentais da mecânica quântica (Singh; Marshman, 2015).

Entre essas dificuldades, destaca-se a tendência de estabelecer analogias diretas entre conceitos clássicos e quânticos, o que pode levar à concretização indevida de um conceito abstrato. A mudança de paradigma entre as visões clássica e quânticas é reconhecidamente um elemento que impacta na dificuldade de compreensão dos alunos (Singh; Marshman, 2015). Em MQ a presença constante de elementos abstratos, como a probabilidade quântica, o princípio de incerteza e a dualidade onda-partícula, que não possuem análogos diretos na física clássica, desafiam as intuições construídas a partir de uma visão determinística do mundo físico (Souza *et al.*, 2021). Esses conceitos introduzem formas de descrição nas quais não é possível atribuir simultaneamente valores bem definidos a todas as grandezas físicas nem prever de maneira determinística os resultados de experimentos individuais, o que frequentemente entra em conflito com os esquemas conceituais que os estudantes trazem da física clássica (Müller; Wiesner, 2002). Em especial, o

desconhecimento epistemológico e ontológico da interpretação probabilística da MQ, reforça a ideia de conceber a regra de Born como expressão de uma limitação provisória do conhecimento, e não como um traço estrutural da teoria quântica.

4.4.1 Perspectivas dos estudantes e experiências formativas relacionadas à interpretação probabilística

No âmbito do Modelo de Reconstrução Educacional, a consideração das perspectivas dos estudantes não se restringe à identificação de dificuldades de aprendizagem, mas envolve também a compreensão das experiências formativas por meio das quais eles estabelecem contato com determinados conhecimentos científicos. Nessa perspectiva, buscando incorporar de forma consistente a dimensão dos estudantes ao presente estudo, foi desenvolvida uma formação com licenciandos em Física sobre a interpretação probabilística da Mecânica Quântica. A proposta teve como objetivo identificar elementos recorrentes relacionados às formas pelas quais essa interpretação lhes foi apresentada ao longo de sua trajetória formativa, possibilitando compreender aspectos que marcaram sua apropriação desse conteúdo.

A formação contou com a participação de oito estudantes de Licenciatura em Física e teve seu conteúdo gravado a partir da autorização dos participantes por meio de termo de consentimento livre e esclarecido. A formação ocorreu em um dia, totalizando, portanto, um encontro com duração de uma hora e 10 min aproximadamente. Durante os encontros, foi apresentado aos participantes um percurso histórico sobre a construção da interpretação probabilística da Mecânica Quântica, elaborado a partir da reconstrução do conteúdo científico desenvolvida no primeiro componente do Modelo de Reconstrução Educacional. Essa abordagem buscou evidenciar os principais debates, problemas e contribuições históricas que marcaram a consolidação dessa interpretação.

Após a formação, os alunos foram convidados a participar de forma voluntária de entrevistas individuais que tinham como objetivo evidenciar aspectos referentes as experiências prévias dos estudantes, dificuldades com conteúdos e conceitos de MQ e perspectiva de abordagens históricas no ensino de física. Do grupo de estudantes convidados, que totalizavam oito, três concordaram em participar das entrevistas, os estudantes entrevistados foram orientados previamente a partir de termo de

consentimento livre e esclarecido sobre as entrevistas individualizadas e sobre a transcrição e análise de suas respostas para fins de pesquisa acadêmica.

Um primeiro aspecto que emerge das entrevistas refere-se à centralidade atribuída ao formalismo matemático no ensino da mecânica quântica. Os três participantes descrevem experiências em que a matemática ocupou posição predominante, enquanto discussões conceituais e interpretativas receberam menor atenção. O Entrevistado 1, por exemplo, afirma que na disciplina de mecânica quântica foi " c*álculo, cálculo, ..., isso serve para isso, isso serve para aquilo, e pronto*". De modo semelhante, o Entrevistado 2 relata que a apresentação do significado do módulo ao quadrado da função de onda foi "*bem matemática*", acrescentando que "*partiu direto para as contas*" e que "*as interpretações ficaram em segundo plano*". O Entrevistado 3 apresenta percepção semelhante ao afirmar que o significado da função de onda foi abordado de forma "m*uito superficial*". Essa percepção torna-se particularmente evidente quando os estudantes descrevem a forma como a interpretação probabilística foi discutida em suas disciplinas. O Entrevistado 1 relata que houve alguma explicação sobre a densidade de probabilidade, mas ressalta que "*era muito mais matemática do que, de fato, interpretação física*". Em direção semelhante, o Entrevistado 3 argumenta que o ensino frequentemente enfatiza a matemática "*para te provar que tu decorou*" em vez de discutir "*para onde serve, qual é a fundamentação, para que foi desenvolvido*". Tais relatos sugerem que a atribuição de significado à função de onda e à interpretação probabilística ocupou um papel secundário em comparação com a aprendizagem operacional do formalismo.

As falas sugerem que o contato dos estudantes com a interpretação probabilística ocorreu predominantemente por meio da manipulação formal de expressões matemáticas. Embora os participantes reconheçam a importância da matemática para a compreensão da mecânica quântica, seus relatos indicam que o formalismo frequentemente foi apresentado dissociado de discussões mais amplas acerca de seus significados físicos e interpretativos.

Outro aspecto recorrente nas entrevistas refere-se à reduzida presença de elementos históricos no ensino da mecânica quântica. Os participantes relatam que o contato com a História da Física ocorreu principalmente em disciplinas específicas, geralmente desvinculadas das disciplinas de mecânica quântica. O Entrevistado 1 afirma que os aspectos históricos eram abordados em uma disciplina própria de História da Física, mas que "*na disciplina mesmo foi só cálculo*". De forma semelhante,

o Entrevistado 2 e 3 afirmam não tiveram contato com aspectos históricos da mecânica quântica em disciplinas específicas de MQ.

Também chama atenção a ausência de contato sistemático com fontes primárias. Quando questionados sobre o uso de artigos originais de autores como Born e Schrödinger, os participantes afirmaram não ter trabalhado diretamente com esses materiais durante sua formação. Em geral, o acesso aos conteúdos ocorreu por meio de livros didáticos ou de referências secundárias.

À luz do Modelo de Reconstrução Educacional, esses resultados permitem caracterizar aspectos relevantes das perspectivas dos estudantes sobre a interpretação probabilística da mecânica quântica. Em conjunto, os relatos apontam para experiências formativas marcadas pela predominância do formalismo matemático, pela limitada exploração dos fundamentos conceituais da interpretação probabilística e pela pouca integração entre conteúdos históricos e o ensino da mecânica quântica. Esses elementos constituem um contexto importante para compreender as dificuldades de aprendizagem relatadas pelos estudantes e discutir possíveis contribuições de abordagens historicamente fundamentadas para o ensino desse tema.

4.4.2 Dificuldades na aprendizagem da mecânica quântica

A análise das entrevistas revela que as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem da mecânica quântica não se restringem ao domínio técnico do formalismo matemático. Embora as dificuldades com a matemática apareçam de forma recorrente nos relatos, os participantes também destacam dificuldades relacionadas à compreensão dos significados físicos dos conceitos e à ausência de discussões que permitam compreender a origem, a finalidade e o contexto de desenvolvimento dos elementos formais da teoria.

Um primeiro aspecto recorrente refere-se às dificuldades associadas ao formalismo matemático da mecânica quântica. Os três entrevistados mencionam obstáculos relacionados à complexidade dos cálculos e à necessidade de domínio prévio de conhecimentos matemáticos considerados fundamentais para o estudo da teoria. O Entrevistado 1 descreve a experiência de estudar mecânica quântica como "*um grande tormento*", destacando suas dificuldades com integrais e derivadas. De forma semelhante, o Entrevistado 2 afirma que "*a maior dificuldade foi através dos*

cálculos'', enquanto o Entrevistado 3 ressalta que "*a própria matemática é muito complexa*" exigindo um conhecimento aprofundado de conteúdos anteriores. Essas falas sugerem que a matemática constitui um obstáculo relevante para a aprendizagem da mecânica quântica, especialmente quando os estudantes não dispõem de uma base suficientemente consolidada para acompanhar o formalismo empregado.

Por outro lado, em diferentes momentos das entrevistas, os participantes associam suas dificuldades à ausência de elementos que permitam compreender o significado físico dos conceitos e equações apresentados. O Entrevistado 1 afirma que "*quando a coisa é muito matemática e eu não sei de onde surgiu, ou para que serve, ou como aquilo ali apareceu, quando me dão só a equação pronta, eu tenho muita dificuldade de interpretar ela*". Em direção semelhante, o Entrevistado 2 argumenta que "*tu pega uma equação e tu sem saber de onde que ela vem (...) eu acho que é um pouco difícil*", enquanto o Entrevistado 3 ressalta que "*o conceito é o principal*" e que muitas vezes os estudantes não conseguem interpretar adequadamente os conceitos envolvidos. Tais relatos sugerem que as dificuldades dos estudantes não estão associadas exclusivamente ao cálculo matemático, mas também à dificuldade de atribuir significado aos objetos matemáticos mobilizados pela teoria.

Essa percepção aparece de forma ainda mais evidente quando os estudantes discutem a interpretação probabilística da função de onda. Embora os participantes demonstrem familiaridade com a ideia de que o módulo ao quadrado da função de onda está relacionado à probabilidade, suas falas indicam dificuldades em justificar ou compreender mais profundamente os fundamentos dessa interpretação. O Entrevistado 1 relata que, durante sua formação, frequentemente ficava "*muito encucada porque a gente, tipo, não calcula onde a partícula tá*", destacando o estranhamento diante da natureza probabilística da descrição quântica. Em outro momento, ao refletir sobre sua formação, afirma que "*mecânica quântica, assim, em grande parte, na minha graduação, foi decorada. Eu não aprendi, eu decorei*". O Entrevistado 2, por sua vez, observa que muitas vezes "*algum professor diz que tal coisa tem um significado e a gente não se questiona*", sugerindo uma aceitação operacional dos conceitos sem uma discussão aprofundada de seus fundamentos.

As entrevistas também indicam que os estudantes percebem uma forte relação entre a compreensão conceitual e a aprendizagem do formalismo matemático. Para o

Entrevistado 1, "*na física, se a gente não entende um conceito, isso implica diretamente quando a gente vai calcular*". De modo semelhante, o Entrevistado 2 argumenta que o ensino deveria começar pelos conceitos e por sua contextualização, afirmando que os estudantes frequentemente entram em contato com a teoria "*através de números, de letras, não através de conceitos, através de histórias*". Essas percepções sugerem que a compreensão conceitual não é vista pelos participantes como um elemento secundário em relação ao formalismo, mas como uma condição importante para sua apropriação. Embora as entrevistas revelem uma compreensão por vezes ambígua da relação entre os aspectos conceituais e o formalismo matemático da Mecânica Quântica, os relatos dos estudantes também indicam que essas dimensões não são percebidas como completamente independentes. Ainda que haja uma tendência em distingui-las durante a descrição de suas experiências de aprendizagem, observa-se o reconhecimento, em diferentes níveis, de que conceitos físicos e formalismo matemático mantêm uma relação intrínseca. Essa interpretação é coerente com a própria natureza do conhecimento físico, no qual a construção de significados conceituais e sua expressão matemática constituem dimensões indissociáveis do processo de compreensão dos fenômenos.

Do ponto de vista do MER, tais dificuldades podem ser interpretadas como indicadores de tensões entre a estrutura do conteúdo científico e os modos pelos quais esse conteúdo é tradicionalmente apresentado aos estudantes. As falas dos participantes sugerem que o ensino da mecânica quântica frequentemente privilegia o domínio operacional do formalismo, enquanto aspectos relacionados à atribuição de significado aos conceitos, à compreensão dos fundamentos da interpretação probabilística e à contextualização histórica dos problemas que motivaram sua formulação permanecem em segundo plano. Nesse sentido, os resultados reforçam a necessidade de abordagens de ensino que articulem formalismo matemático, interpretação física e contextualização histórica, favorecendo a construção de significados para conceitos centrais da mecânica quântica e, em particular, para a interpretação probabilística da função de onda.

4.4.3 Potencialidades da abordagem histórica

As entrevistas realizadas indicam que os estudantes atribuem diferentes potencialidades ao uso de abordagens históricas no ensino da mecânica quântica. De

modo geral, os participantes associam a História da Ciência à possibilidade de compreender melhor a origem dos conceitos, os problemas que motivaram sua formulação e os processos envolvidos na construção do conhecimento científico. Tais percepções sugerem que a abordagem histórica é compreendida pelos estudantes não como um elemento complementar ou meramente ilustrativo, mas como um recurso capaz de favorecer a atribuição de significado aos conteúdos científicos.

Um primeiro aspecto destacado pelos participantes refere-se à possibilidade de humanizar a ciência e aproximar os estudantes dos processos de construção do conhecimento científico. O Entrevistado 1 afirma que "*quando a gente estuda a história, a gente torna aquilo que é muito teórico, muito, sabe, tipo, mecânico em algo mais humanizado*". Em outro momento, o mesmo participante argumenta que conhecer os cientistas envolvidos na construção das teorias permite compreender que o conhecimento científico é resultado da atividade humana, afirmando que "*se a gente conhece o indivíduo, a gente sabe que é uma coisa possível, né? Que alguém pensou nisso. E não que surgiu do nada e é imposto*". Essas falas sugerem uma percepção da História da Ciência como um meio para compreender a ciência como um empreendimento humano, marcado por problemas, debates e processos de construção coletiva.

Outro aspecto recorrente refere-se à contribuição da abordagem histórica para a compreensão da origem e do significado dos conceitos científicos. O Entrevistado 1 afirma que se sentia "*mais confortável quando eu sabia de onde as coisas surgiam*". De maneira semelhante, o Entrevistado 2 argumenta que "*tudo tem um começo*" e que "*a gente tem que entender de onde vêm as coisas primeiro*". O Entrevistado 3, por sua vez, destaca a importância de compreender "*para onde serve, qual é o fundamento, para que foi desenvolvido*". Em conjunto, essas falas indicam que os estudantes atribuem valor formativo à compreensão dos contextos e problemas que motivaram a elaboração dos conceitos científicos, aspecto frequentemente ausente em abordagens centradas exclusivamente no formalismo matemático.

As entrevistas também sugerem que os estudantes percebem a abordagem histórica como um recurso capaz de favorecer a compreensão conceitual dos conteúdos. O Entrevistado 2 argumenta que, frequentemente, os estudantes entram em contato com a teoria "*através de números, de letras, não através de conceitos, através de histórias*", acrescentando que o ensino deveria começar por esses elementos. Em direção semelhante, o Entrevistado 3 defende que é importante

discutir "*para que serve aquilo*" e não apenas apresentar procedimentos formais. Essas percepções indicam que os estudantes associam a História da Ciência à possibilidade de estabelecer relações entre conceitos, problemas científicos e representações matemáticas, contribuindo para uma compreensão mais significativa dos conteúdos.

Além das contribuições para a aprendizagem conceitual, os participantes também reconhecem potencialidades da abordagem histórica para a formação docente. O Entrevistado 1 afirma que "*inserir essa história no nosso processo formativo, ela vai contribuir para a prática até mesmo pedagógica*", acrescentando que a compreensão dos conteúdos possibilita "*refletir e até mesmo fazer críticas e contextualizar*". Essa percepção sugere que a abordagem histórica pode contribuir não apenas para a compreensão dos conteúdos científicos, mas também para a formação de futuros professores capazes de desenvolver práticas de ensino mais contextualizadas e reflexivas.

No contexto do Modelo de Reconstrução Educacional, essas percepções assumem particular relevância, pois evidenciam elementos das perspectivas dos estudantes que podem orientar processos de reconstrução educacional do conteúdo. As falas indicam que a compreensão da gênese histórica dos conceitos, dos problemas científicos que motivaram sua formulação e dos debates envolvidos em sua construção é percebida pelos participantes como um aspecto potencialmente relevante para a aprendizagem da mecânica quântica. Tais resultados reforçam a importância de considerar a História da Ciência não apenas como um recurso complementar, mas como um elemento capaz de contribuir para a atribuição de significado aos conteúdos científicos e para a articulação entre formalismo matemático e interpretação física.

4.4.4 Desafios e limitações da abordagem histórica

Embora os estudantes reconheçam diferentes contribuições potenciais da abordagem histórica para a aprendizagem da mecânica quântica, as entrevistas também evidenciam desafios relacionados à incorporação desse tipo de abordagem nos processos de ensino. De modo geral, os participantes destacam limitações associadas ao tempo disponível para o desenvolvimento dos conteúdos, à

complexidade das fontes históricas e à necessidade de mediação pedagógica para que esses materiais possam contribuir efetivamente para a aprendizagem.

Um primeiro aspecto refere-se às condições curriculares nas quais o ensino da mecânica quântica é desenvolvido. Os estudantes relatam que as disciplinas frequentemente são marcadas pela necessidade de abordar uma grande quantidade de conteúdos em um período relativamente curto. O Entrevistado 1 sugere que a pouca presença de discussões históricas pode estar relacionada ao fato de que o professor precisava "*vencer todo o conteúdo*", caracterizando a disciplina como "*muito corrida*". Em direção semelhante, o Entrevistado 3 argumenta que a ausência de elementos históricos pode estar associada a uma "*carga reduzida para vencer todo o conteúdo*". Essas percepções indicam que a incorporação de abordagens históricas não depende apenas de decisões didáticas, mas também das condições institucionais e curriculares em que o ensino ocorre.

Outro desafio identificado pelos participantes refere-se à utilização de fontes primárias no ensino. Embora os estudantes reconheçam o potencial desses materiais para compreender a construção do conhecimento científico, suas falas sugerem que o uso direto de artigos originais pode apresentar dificuldades significativas. O Entrevistado 1 afirma que os estudantes "*precisam de um material mais adaptado e mais pedagógico*", enquanto o Entrevistado 2 argumenta que "*se for só um artigo onde tenha só a parte matemática, eu acho que daí não ia ajudar*". De forma semelhante, o Entrevistado 3 destaca que "*a matemática é muito complexa para você conseguir entender sozinho*". Esses relatos sugerem que a simples inserção de fontes históricas no contexto educacional não garante, por si só, uma aprendizagem mais significativa, sendo necessária uma adaptação dos materiais às características e necessidades dos estudantes.

As entrevistas também evidenciam a importância da mediação pedagógica na utilização de abordagens históricas. O Entrevistado 2 afirma que o trabalho com textos históricos "*teria que ter uma mediação*" por parte do professor, enquanto o Entrevistado 3 destaca que esse processo "*necessita do auxílio*" de alguém que auxilie na interpretação dos conteúdos apresentados. Essas percepções indicam que os estudantes não compreendem a História da Ciência como um recurso autossuficiente, mas como um elemento que precisa ser articulado a estratégias pedagógicas capazes de favorecer a compreensão dos conceitos e contextos envolvidos.

No contexto do Modelo de Reconstrução Educacional, esses resultados reforçam a importância dos processos de reconstrução educacional do conteúdo. As falas dos estudantes sugerem que a transposição de elementos históricos para o contexto educacional exige processos de seleção, adaptação e organização dos materiais, de modo que estes possam contribuir para a aprendizagem sem reproduzir integralmente a complexidade presente nos contextos originais de produção do conhecimento científico. Assim, embora a abordagem histórica seja percebida pelos participantes como uma estratégia promissora para o ensino da mecânica quântica, sua implementação demanda planejamento didático, mediação pedagógica e adequação às condições concretas dos contextos de ensino.

À luz do MER, as perspectivas dos estudantes não devem ser interpretadas meramente como opiniões ou até mesmo déficits individuais de aprendizagem, mas como indicadores de tensões entre o conteúdo científico reconstruído para o ensino e os modos efetivos de apresentação desse conteúdo. Além disso, a análise de livros didáticos revela que a interpretação probabilística costuma ser introduzida de forma fragmentada, com escassa contextualização histórica e conceitual. Essa abordagem tende a naturalizar a regra de Born, apresentando-a como um fato estabelecido, sem discutir os problemas físicos e epistemológicos que motivaram sua formulação.

Desse modo, as considerações a respeito das perspectivas dos estudantes reforçam a necessidade de uma reconstrução educacional que integre explicitamente contextos bem delineados, fundamentos conceituais e explicitação dos limites de uma proposta. Tal integração é entendida na perspectiva desse trabalho como condição favorável para a elaboração e/ou discussão de orientações para propostas didáticas de viés histórico que favoreçam a atribuição de significado aos conceitos (Batista; Ferreira; Freitas, 2015), em consonância com os princípios do MER.

4.4.5 Articulação entre a reconstrução histórica e as perspectivas dos estudantes

A análise das entrevistas, quando considerada em conjunto com a reconstrução histórica da interpretação probabilística desenvolvida nesta pesquisa, permite identificar aproximações significativas entre os elementos presentes na estrutura do conteúdo científico e as necessidades formativas expressas pelos estudantes. No contexto do Modelo de Reconstrução Educacional, essa articulação assume papel

central, uma vez que o desenvolvimento de propostas de ensino não deve considerar apenas a organização conceitual do conteúdo, mas também as perspectivas dos sujeitos envolvidos nos processos de aprendizagem.

Um dos aspectos mais relevantes observados refere-se à compreensão dos fundamentos da interpretação probabilística da função de onda. A reconstrução histórica evidenciou que a proposta formulada por Born não surgiu como uma consequência imediata do formalismo matemático da mecânica quântica. Pelo contrário, sua formulação esteve associada à necessidade de dar uma resposta a questões de natureza interpretativa presentes no contexto de desenvolvimento da teoria. As entrevistas com os estudantes indicam que dificuldades semelhantes aparecem entre os estudantes, que frequentemente relatam compreender a utilização operacional da interpretação probabilística, mas apresentam dificuldades para justificar seus fundamentos ou compreender sua origem conceitual.

Outra aproximação importante refere-se à forma como os conceitos são apresentados aos estudantes. A reconstrução histórica mostrou que a interpretação probabilística foi construída em meio a debates, problemas e tentativas de compreensão do formalismo frente aos fenômenos quânticos conhecidos à época. Em contraste, os participantes relatam que, durante sua formação, os conceitos frequentemente lhes foram apresentados de forma pronta, acompanhados principalmente de procedimentos matemáticos e aplicações formais. Tal constatação sugere que parte das dificuldades relatadas pelos estudantes pode estar relacionada à ausência de elementos que explicitem os problemas e contextos que motivaram historicamente a construção desses conceitos.

As entrevistas também revelam que os estudantes atribuem valor à compreensão da origem dos conhecimentos científicos e à contextualização histórica dos conteúdos. De modo recorrente, os participantes afirmam que compreender de onde surgem os conceitos, quais problemas procuram resolver e como foram desenvolvidos favorece sua aprendizagem e sua apropriação dos conteúdos. Essa percepção converge com a própria lógica da reconstrução histórica realizada nesta pesquisa, que buscou evidenciar os processos de elaboração da interpretação probabilística a partir dos trabalhos originais de Born e dos problemas científicos presentes naquele contexto.

Nesse sentido, os resultados sugerem que a reconstrução histórica da interpretação probabilística pode contribuir para responder a necessidades formativas

identificadas pelos próprios estudantes. Ao explicitar os problemas físicos e conceituais envolvidos na formulação da interpretação probabilística, bem como os argumentos mobilizados por Born para justificar sua proposta, a abordagem histórica oferece elementos que podem favorecer a atribuição de significado ao formalismo matemático e promover uma compreensão mais ampla dos conceitos envolvidos.

À luz do Modelo de Reconstrução Educacional, essa convergência entre a estrutura do conteúdo científico e as perspectivas dos estudantes reforça a relevância da utilização de abordagens historicamente fundamentadas no ensino da mecânica quântica. Mais do que um recurso complementar, a reconstrução histórica mostra potencial para atuar como elemento mediador entre os significados produzidos no contexto científico e os processos de aprendizagem dos estudantes, contribuindo para uma compreensão mais contextualizada da interpretação probabilística da função de onda

4.4.6 Síntese e transição para a proposta didática (Componente 3 do MER)

A articulação entre a reconstrução do conteúdo científico e a análise das dificuldades dos estudantes, conforme preconizado pelos dois primeiros componentes do Modelo de Reconstrução Educacional, evidencia que as dificuldades associadas ao ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica não decorrem apenas da complexidade intrínseca do tema, mas também dos modos tradicionais de sua apresentação didática. A ausência de contextualização, a naturalização de conceitos (como a regra de Born) e a separação rígida entre formalismo e interpretação podem contribuir para uma compreensão fragmentada e instrumental da teoria (Martins, 2006; Matthews, 1995; Oliveira, 2011; Peduzzi, 2001; Silva; Guerra, 2015).

Nesse sentido, a reconstrução educacional realizada nesta seção fornece os fundamentos conceituais e didáticos para o terceiro componente do MER: o desenvolvimento de orientações que auxilie na construção de propostas para o ensino da interpretação probabilística da MQ. A seção seguinte apresenta, portanto, uma discussão que busca integrar os elementos identificados na reconstrução do conteúdo científico realizado em seção anterior a partir de fontes históricas e nas perspectivas dos estudantes, orientando-se por princípios de design didático coerentes com o Modelo de Reconstrução Educacional.

4.5 ELEMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA SOBRE A INTERPRETAÇÃO PROBABILÍSTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA FUNDAMENTADA NO MODELO DE RECONSTRUÇÃO EDUCACIONAL

À luz da reconstrução educacional apresentada em seções anteriores, torna-se possível delinear uma proposta sobre elementos que orientam o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica que busque superar os limites identificados nas abordagens tradicionais, em particular aquelas fortemente mediadas pelo livro didático. Conforme preconiza o Modelo de Reconstrução Educacional (MER), essa proposta não decorre de uma simples transposição do conhecimento científico reconstruído, mas resulta da articulação entre a análise do conteúdo, as perspectivas dos estudantes e decisões de design didático orientadas por objetivos educacionais explícitos (Silva; Ferreira, 2020).

Nesse sentido, a proposta aqui apresentada deve ser compreendida como uma **estrutura orientadora**, cujo foco recai sobre a atribuição de significado ao formalismo quântico, e não sobre a substituição ou eliminação desse formalismo. O objetivo central é criar condições didáticas para que a interpretação probabilística se manifeste, para o estudante, como uma resposta conceitual a problemas físicos e epistemológicos concretos, e não apenas como uma prescrição matemática ou atribuição a ser aceita por autoridade.

4.5.1 Princípios orientadores

O primeiro passo no desenvolvimento do terceiro componente do MER consiste na explicitação dos princípios que orientam as escolhas didáticas. Esses princípios não devem ser entendidos como regras prescritivas, mas como **diretrizes conceituais** que estruturam a proposta e garantem sua coerência com a reconstrução educacional realizada.

Um primeiro princípio refere-se à centralidade da gênese conceitual da interpretação probabilística. Em contraste com abordagens que introduzem a regra de Born de forma abrupta em um contexto mais amplo da MQ, a proposta assume que o processo de ensino-aprendizagem é favorecido ao partir dos problemas físicos que motivaram sua formulação (Batista; Ferreira; Freitas, 2015), em especial aqueles relacionados a processos de colisão e espalhamento. Essa escolha visa explicitar o

caráter não arbitrário da interpretação probabilística, favorecendo a compreensão de sua necessidade no interior da mecânica quântica.

Um segundo princípio diz respeito à integração entre formalismo matemático e interpretação física. Embora a mecânica quântica seja indissociável de seu aparato matemático, a proposta reconhece que o domínio técnico do formalismo não garante, por si só, a compreensão de seus significados. Assim, busca-se evitar tanto a dissociação entre matemática e interpretação quanto a substituição do formalismo por narrativas puramente qualitativas ou meramente narrativas. O formalismo é preservado, porém passa a ser sistematicamente problematizado em relação aos seus significados físicos e epistemológicos, bem como às suas articulações com elementos externos ao próprio formalismo.

Por fim, a proposta assume como princípio a valorização da discussão conceitual e epistemológica como parte integrante do ensino da mecânica quântica. Em lugar de tratar interpretações como tópicos periféricos ou opcionais, a interpretação probabilística é abordada como elemento estruturante da teoria possuindo em sua base elementos que contribuem para sua interpretação, cuja compreensão é fundamental tanto para a formação conceitual quanto para a formação epistemológica de estudantes de Física.

Quadro 2: Princípios orientadores da proposta didática

Princípios Orientadores	Descrição
Centralidade da gênese da interpretação probabilística.	O ensino da interpretação probabilística deve partir de um contexto bem delineado.
Integração entre formalismo matemático e interpretação física.	O formalismo matemático é mantido na medida do possível, porém, é continuamente problematizado.
Valorização da dimensão conceitual e epistemológica da interpretação.	A interpretação probabilística constitui um elemento estruturante da mecânica quântica, fundamentada por elementos essenciais e indispensáveis para a sua real compreensão.

Fonte: Elaboração própria.

Os princípios orientadores sintetizados no Quadro 2 emergem diretamente da articulação entre a reconstrução do conteúdo científico e a análise das dificuldades recorrentes apresentadas por estudantes no ensino da mecânica quântica. Conforme discutido nas seções anteriores, tais dificuldades não se limitam à complexidade

matemática do formalismo, mas envolvem obstáculos conceituais e epistemológicos, como a naturalização de conceitos e analogias excessivas. À luz do Modelo de Reconstrução Educacional, esses princípios funcionam como mediadores entre o conteúdo científico reconstruído e as decisões de design didático, orientando a seleção, a organização e a problematização dos elementos a serem ensinados. Dessa forma, os princípios não apenas estruturam a proposta didática, mas explicitam uma resposta educacional fundamentada às tensões identificadas entre o modo tradicional de apresentação da mecânica quântica e os desafios efetivos de aprendizagem enfrentados pelos estudantes.

4.5.2 Hipóteses de design didático

No âmbito do Modelo de Reconstrução Educacional, a elaboração de propostas didáticas não se limita à descrição de conteúdo ou atividades, mas envolve a formulação explícita de hipóteses de design que articulam o conteúdo científico reconstruído, as perspectivas dos estudantes e os objetivos educacionais explícitos. Essas hipóteses expressam suposições fundamentadas sobre como determinadas escolhas de design podem favorecer a aprendizagem conceitual, orientando tanto a estrutura da proposta quanto possíveis investigações empíricas futuras.

No presente trabalho, as hipóteses de design didático decorrem diretamente dos princípios orientadores apresentados na Seção anterior. Elas não devem ser interpretadas como afirmações conclusivas, mas como proposições que estruturam a proposta e explicitam suas perspectivas didáticas.

Hipótese 1 – A problematização histórica favorece a atribuição de significado à interpretação probabilística: Parte-se da hipótese de que a introdução da interpretação probabilística a partir de problemas históricos concretos, como aqueles associados a processos de colisão e espalhamento, favorece a compreensão de sua necessidade conceitual (Batista; Ferreira; Freitas, 2015). Ao reconstruir o contexto no qual a regra de Born foi formulada, os estudantes podem perceber a interpretação probabilística como uma resposta a limitações interpretativas do formalismo ondulatório, e não como um postulado arbitrário introduzido por conveniência matemática.

Hipótese 2 – A articulação explícita entre formalismo e interpretação reduz a naturalização acrítica da regra de Born: Supõe-se que a discussão sistemática

da utilização da equação de Schrödinger em problemas concretos como o problema de espalhamento contribui para romper com abordagens que apresentam a regra de Born como consequência direta e inevitável do formalismo. O aparato matemático é utilizado na medida do possível observando o contexto dos alunos. Ao explicitar que o formalismo matemático não evidencia de forma direta a interpretação probabilística, cria-se espaço para uma compreensão mais reflexiva do papel da probabilidade na mecânica quântica.

Hipótese 3 – A explicitação dos pressupostos que subsidiam a interpretação probabilística favorece uma compreensão mais reflexiva da mecânica quântica: Parte-se da hipótese de que a discussão explícita dos elementos (analógicos, teóricos ou experimentais) que subsidiam a interpretação probabilística da mecânica quântica, contribui para superar leituras excessivamente instrumentalistas da mecânica quântica. Ao tratar desses elementos estruturantes da interpretação, os estudantes podem desenvolver uma compreensão mais profunda de seus fundamentos conceituais e epistemológicos impactando na atribuição de significado dado a interpretação.

4.5.3 Organização geral da proposta didática

Coerentemente conectada aos princípios e hipóteses anteriormente delineados, a proposta didática foi organizada em **eixos conceituais**, e não em uma sequência rígida de aulas ou atividades. Essa opção visa preservar a flexibilidade da proposta, permitindo sua adaptação a diferentes contextos institucionais e perfis de curso, ao mesmo tempo em que mantém sua coerência interna.

Eixo Conceitual 1 - A interpretação probabilística como resposta ao problema do espalhamento. Este eixo tem como objetivo discutir a emergência da interpretação probabilística no contexto dos problemas de colisão e espalhamento investigados por Born. Parte-se da compreensão de que a interpretação probabilística não decorre diretamente do formalismo da mecânica ondulatória, mas surge como uma resposta conceitual à necessidade de relacionar as soluções da equação de Schrödinger a problemas fenomenológicos com potencial empírico. Busca-se evidenciar como o problema do espalhamento constitui um contexto privilegiado para compreender a formulação da interpretação probabilística e sua inserção no desenvolvimento histórico da mecânica quântica.

Eixo Conceitual 2 - A relação entre a seção de choque de espalhamento e a função de onda. Este eixo busca explorar as relações entre o formalismo matemático da mecânica quântica e seus significados físicos. A partir da análise dos processos de espalhamento, discute-se como a seção de choque pode ser relacionada ao módulo ao quadrado da função onda, evidenciando o papel da interpretação probabilística na atribuição de significado físico ao formalismo. O objetivo é favorecer a compreensão da função de onda não apenas como um objeto matemático abstrato, mas como um elemento que pode ser associado matematicamente a conceitos probabilísticos desde que escolhas interpretativas adequadas sejam tomadas.

Eixo Conceitual 3 - O papel das analogias, da experimentação e do formalismo na interpretação probabilística. Este eixo dedica-se à análise dos diferentes recursos mobilizados historicamente para atribuir significado à interpretação probabilística. São discutidos o papel das analogias utilizadas por Born, especialmente aquelas associadas à ideia de campo guia ou campo fantasma, a influência dos resultados experimentais sobre colisões e espalhamento e as contribuições do formalismo matemático para a construção da interpretação. Busca-se problematizar potencialidades e limites desses elementos, favorecendo uma compreensão mais ampla dos aspectos conceituais, epistemológicos e históricos envolvidos na interpretação probabilística da mecânica quântica.

4.5.4 O papel das fontes primárias e secundárias no design didático

No âmbito da proposta didática delineada neste trabalho, o uso de fontes primárias e secundárias ocupa um papel central no processo de reconstrução educacional da interpretação probabilística da mecânica quântica. Em consonância com o Modelo de Reconstrução Educacional (MER), tais fontes não são mobilizadas como meros recursos ilustrativos ou complementares, mas como elementos estruturantes do design didático, capazes de materializar, de forma concreta, as hipóteses de design apresentadas na Seção 5.2.

A incorporação de fontes primárias responde, em primeiro lugar, à hipótese de que a problematização histórica favorece a atribuição de significado aos conceitos (Batista; Ferreira; Freitas, 2015; Matthews, 1995; Peduzzi, 2001), em especial à interpretação probabilística. Textos originais, em especial aqueles associados aos trabalhos de Max Born sobre colisões e espalhamento, permitem explicitar os

problemas físicos e conceituais enfrentados no contexto de formulação da interpretação probabilística. Ao entrar em contato com esses textos, mesmo que de forma mediada e selecionada, os estudantes têm a oportunidade de reconhecer que a regra de Born emerge como resposta a dificuldades interpretativas específicas, e não como um postulado introduzido de maneira arbitrária.

Do ponto de vista do design didático, essa incorporação não implica a leitura integral ou acrítica de textos originais, mas sua seleção e adaptação criteriosa. Trechos são escolhidos em função de sua capacidade de evidenciar tensões conceituais, incertezas e escolhas interpretativas. A mediação docente, nesse contexto, assume papel fundamental ao articular a linguagem histórica das fontes com a notação e os conceitos da mecânica quântica moderna, evitando tanto o anacronismo quanto a sobrecarga conceitual.

As fontes secundárias, por sua vez, desempenham uma função complementar e igualmente relevante no design didático. Textos historiográficos e análises contemporâneas da interpretação probabilística permitem contextualizar as fontes primárias, esclarecendo aspectos conceituais que não são imediatamente acessíveis aos estudantes. Além disso, essas fontes oferecem um espaço privilegiado para discutir diferentes leituras e interpretações da mecânica quântica, contribuindo para a materialização da hipótese de que o confronto controlado entre interpretações favorece a compreensão dos pressupostos da interpretação probabilística.

A articulação entre fontes primárias e secundárias também responde à hipótese de design que enfatiza a integração entre formalismo matemático e interpretação física. Enquanto as fontes primárias evidenciam os problemas conceituais, empíricos e interpretativos enfrentados no desenvolvimento histórico da teoria, as fontes secundárias permitem estabelecer conexões entre esses problemas e as atuais concepções e desdobramentos da temática. Dessa forma, o formalismo deixa de ser apresentado como um conjunto de procedimentos matemáticos autossuficientes e passa a ser compreendido como parte de um arcabouço conceitual cuja interpretação foi historicamente construída.

Outro aspecto central do design didático refere-se à relação entre o uso de fontes históricas e o papel do livro didático. Conforme discutido na Seção 3, os livros didáticos tendem a apresentar a interpretação probabilística de forma naturalizada, ou até mesmo impositiva, frequentemente dissociada de sua gênese histórica, ou pelo menos com grandes recortes que inviabilizam e comprometem o significado atribuído

a função de onda. A introdução de fontes primárias e secundárias não visa substituir o livro didático, mas tensionar suas narrativas, tornando explícitas as escolhas e simplificações envolvidas. Nesse sentido, o livro didático passa a ser incorporado como um objeto de reflexão, e não apenas como uma fonte de autoridade.

Importa destacar que o uso de fontes históricas no design didático não tem como objetivo principal promover uma aprendizagem factual sobre a história da mecânica quântica. Em consonância com as hipóteses de design, essas fontes são mobilizadas como instrumentos de problematização conceitual e epistemológica, capazes de suscitar discussões sobre o significado da função de onda, o estatuto da probabilidade e os limites interpretativos do formalismo quântico. Essa abordagem contribui para deslocar o foco do ensino da simples aplicação de regras para a compreensão dos fundamentos da teoria.

Por fim, a opção por integrar fontes primárias e secundárias ao design didático reflete a compreensão de que a interpretação probabilística da mecânica quântica não pode ser adequadamente ensinada apenas por meio de exposições formais ou exercícios algorítmicos. Ao materializar as hipóteses de design didático em escolhas concretas relativas ao uso dessas fontes, a proposta busca criar condições para que os estudantes se apropriem da interpretação probabilística como uma construção conceitual historicamente situada, epistemologicamente fundamentada e indissociável do formalismo da mecânica quântica.

4.5.5 Articulação entre princípios orientadores, hipóteses de design e eixos conceituais

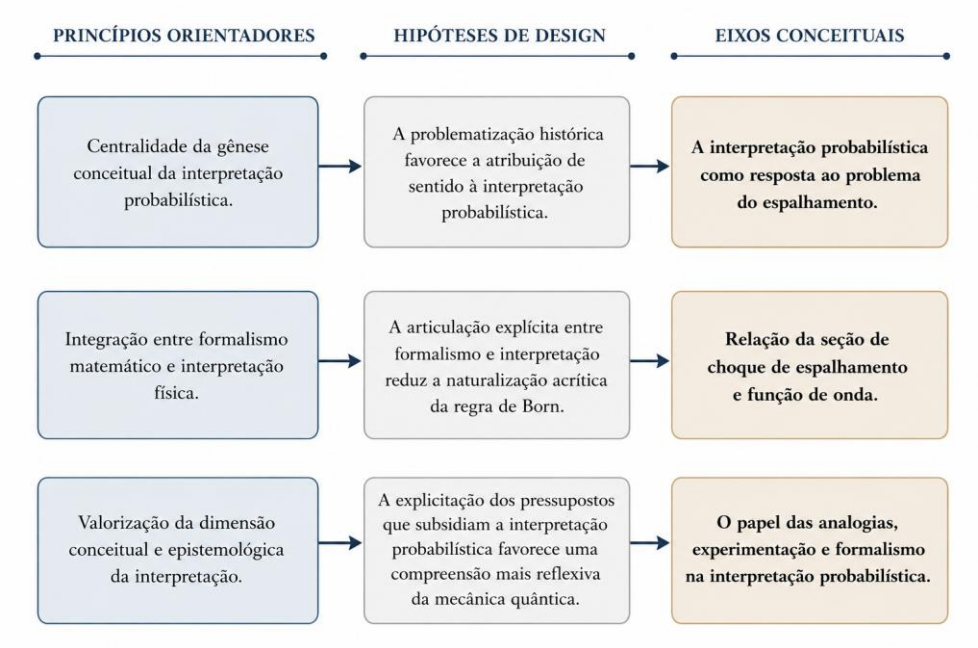
No âmbito do Modelo de Reconstrução Educacional, os princípios orientadores, as hipóteses de design e os eixos conceituais não constituem elementos independentes, mas componentes articulados de um mesmo processo de construção didática. Os princípios orientadores emergem da reconstrução do conteúdo científico e da análise das perspectivas dos estudantes, expressando diretrizes gerais que orientam as decisões educacionais. As hipóteses de design, por sua vez, traduzem essas diretrizes em expectativas fundamentadas sobre como determinadas escolhas didáticas podem favorecer a aprendizagem. Por fim, os eixos conceituais materializam essas hipóteses na organização do conteúdo e das atividades de ensino.

Nesse sentido, o princípio da centralidade da gênese conceitual da interpretação probabilística fundamenta a hipótese de que a problematização histórica favorece a atribuição de significado à interpretação probabilística. Tal hipótese se concretiza no eixo conceitual “A interpretação probabilística como resposta ao problema do espalhamento”, no qual os estudantes são convidados a analisar os problemas físicos e conceituais que motivaram a formulação da interpretação proposta por Born.

De modo semelhante, o princípio da integração entre formalismo matemático e interpretação física sustenta a hipótese de que a articulação explícita entre formalismo e interpretação reduz a naturalização acrítica da regra de Born. Essa hipótese encontra expressão no eixo conceitual “A relação entre a seção de choque de espalhamento e a função de onda”, que busca explicitar as conexões entre os elementos matemáticos do formalismo quântico e seus significados físicos.

Por fim, o princípio da valorização da dimensão conceitual e epistemológica da interpretação fundamenta a hipótese de que a explicitação dos pressupostos que subsidiam a interpretação probabilística favorece uma compreensão mais reflexiva da mecânica quântica. Essa hipótese é desenvolvida no eixo conceitual “O papel das analogias, da experimentação e do formalismo na interpretação probabilística”, no qual são discutidos os recursos conceituais, experimentais e heurísticos que contribuíram para a construção da interpretação probabilística. Na figura 1, podemos observar como os elementos estruturantes da proposta se articulam.

Figura 1 – Estruturação da proposta didática a partir dos princípios orientadores, hipóteses de design e eixos conceituais.



Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, os eixos conceituais não devem ser compreendidos apenas como uma organização temática dos conteúdos, mas como uma expressão das hipóteses de design formuladas a partir dos princípios orientadores da proposta didática. Essa articulação busca garantir coerência entre a reconstrução educacional realizada, os objetivos de aprendizagem pretendidos e a estrutura geral da proposta de ensino.

4.5.6 Possibilidades estratégias didáticas para o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica

Em consonância com os pressupostos do Modelo de Reconstrução Educacional, os eixos conceituais apresentados anteriormente não determinam uma sequência fixa de atividades nem constituem prescrições metodológicas rígidas. Sua função é organizar conceitualmente a proposta didática e orientar escolhas pedagógicas coerentes com os princípios orientadores e hipóteses de design que fundamentam este trabalho. Dessa forma, as estratégias discutidas a seguir devem ser compreendidas como possibilidades de implementação dos eixos conceituais, podendo ser adaptadas em função dos objetivos educacionais, do contexto de ensino e das características dos estudantes.

Eixo Conceitual 1 – A interpretação probabilística como resposta ao problema do espalhamento.

Neste eixo, estratégias didáticas podem privilegiar a reconstrução histórica dos problemas que motivaram a formulação da interpretação probabilística. Uma possibilidade consiste na discussão de situações associadas ao espalhamento clássico de partículas, como os experimentos de Rutherford, seguida da problematização das dificuldades encontradas quando descrições ondulatórias passam a ser utilizadas para representar partículas microscópicas.

Outra estratégia consiste na utilização de trechos selecionados dos trabalhos de Born sobre processos de colisão e espalhamento, articulados a discussões conduzidas pelo professor. O objetivo não é reproduzir integralmente o desenvolvimento dos artigos originais, mas explicitar os problemas físicos e conceituais que tornaram necessária uma interpretação probabilística da função de onda.

Questões orientadoras podem ser utilizadas para estimular a reflexão dos estudantes, tais como: "Por que uma descrição puramente ondulatória não parecia suficiente para explicar os resultados experimentais?" ou "Que problema Born buscava resolver ao analisar processos de espalhamento?".

Eixo Conceitual 2 – A relação entre a seção de choque de espalhamento e a função de onda

As estratégias associadas a este eixo devem favorecer a articulação entre formalismo matemático e significado físico. Uma possibilidade consiste na análise gradual das relações matemáticas entre amplitude de espalhamento, seção de choque e módulo ao quadrado da função de onda.

Nesse contexto, o formalismo matemático não é apresentado apenas como um conjunto de procedimentos algorítmicos, mas como um instrumento para atribuição de significado físico aos fenômenos de espalhamento. Diagramas, representações gráficas e discussões qualitativas podem ser utilizados para auxiliar os estudantes na construção dessas relações.

Também podem ser propostas atividades nas quais os estudantes comparem diferentes formas de expressar a seção de choque, analisando como a interpretação probabilística emerge das conexões estabelecidas entre essas expressões. O foco

não recai na complexidade matemática dos cálculos, mas na compreensão das relações conceituais que vinculam o formalismo à interpretação física.

Eixo Conceitual 3 – O papel das analogias, da experimentação e do formalismo na interpretação probabilística

Este eixo permite explorar elementos históricos, epistemológicos e conceituais frequentemente ausentes nas abordagens tradicionais. Uma possibilidade consiste na análise crítica das analogias mobilizado por Born para atribuir significado à função de onda, discutindo simultaneamente suas potencialidades e limitações.

Outra estratégia envolve a utilização de episódios históricos relacionados aos experimentos de colisão, difração e espalhamento de partículas, buscando evidenciar como resultados experimentais influenciaram a construção de interpretações para a mecânica quântica.

Também podem ser promovidas discussões sobre diferentes formas de compreender a função de onda e a probabilidade quântica, enfatizando que interpretações científicas são construções conceituais fundamentadas em evidências, pressupostos teóricos e escolhas epistemológicas. O objetivo não é promover o estudo aprofundado das diversas interpretações da mecânica quântica, mas favorecer uma compreensão mais reflexiva dos pressupostos que sustentam a interpretação probabilística.

Em conjunto, essas estratégias procuram criar condições para que os estudantes compreendam a interpretação probabilística não apenas como uma regra operacional associada ao formalismo matemático, mas como uma construção conceitual historicamente situada, epistemologicamente fundamentada e articulada a problemas físicos concretos. Assim, os eixos conceituais funcionam como organizadores da aprendizagem, enquanto as estratégias didáticas representam possibilidades de materialização das hipóteses de design formuladas a partir da reconstrução educacional realizada neste trabalho.

4.6 POTENCIALIDADES E DESAFIOS DA PROPOSTA DIDÁTICA

A proposta didática discutida neste trabalho, fundamentada no Modelo de Reconstrução Educacional, apresenta um conjunto de potencialidades para o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica, ao mesmo tempo em que

explicita desafios e limites que precisam ser considerados em sua implementação. Em consonância com o caráter teórico-didático do artigo, esta seção não tem como objetivo avaliar empiricamente a proposta, mas discutir criticamente suas implicações educacionais, à luz da literatura em Ensino de Física e das análises desenvolvidas nas seções anteriores.

4.6.1 Potencialidades para o ensino da interpretação probabilística

Uma das potencialidades iniciais da proposta é romper com abordagens estritamente declarativas no ensino da interpretação probabilística. Ao reconstruir a gênese histórica da regra de Born e articular explicitamente elementos do formalismo e seus significados físicos, epistemológicos e ontológicos a proposta cria condições para que os estudantes compreendam a interpretação probabilística como uma resposta conceitual a problemas concretos, e não como um postulado arbitrário. Essa abordagem favorece a atribuição de significado ao formalismo quântico, aspecto frequentemente apontado como problemático no ensino da mecânica quântica (Singh; Marshman, 2015).

Outra potencialidade refere-se à integração entre diferentes dimensões do conhecimento físico. A organização da proposta em eixos conceituais, aliada ao uso articulado de fontes primárias e secundárias, contribui para romper a fragmentação entre matemática, história e epistemologia, comum em cursos introdutórios de mecânica quântica. Essa integração está alinhada às hipóteses de design didático formuladas dentro do MER, segundo o qual o ensino deve preservar, de forma reconstruída, a complexidade conceitual do conhecimento científico (Duit *et al.*, 2012).

A proposta também apresenta potencialidades relevantes para a formação de professores de Física. Ao problematizar o papel do livro didático e explicitar escolhas interpretativas frequentemente naturalizadas, o design didático favorece o desenvolvimento de uma postura epistemologicamente mais reflexiva. Tal postura é particularmente importante na formação docente, uma vez que professores em formação tendem a reproduzir, em sua prática futura, os modos de apresentação do conhecimento que vivenciaram como estudantes (Neto; Parente; Macedo, 2020). Nesse sentido, a proposta contribui para ampliar o repertório conceitual e didático desses futuros professores.

Além disso, a abordagem adotada favorece o desenvolvimento de competências argumentativas e interpretativas. Ao mobilizar fontes históricas e discutir diferentes leituras da mecânica quântica, cria-se espaço para a problematização conceitual e para a explicitação de pressupostos, em contraste com práticas centradas exclusivamente na resolução de exercícios algorítmicos. Essa potencialidade é coerente com perspectivas contemporâneas de ensino de Física que valorizam a compreensão conceitual e epistemológica como objetivos educacionais legítimos.

4.6.2 Desafios e limites da proposta

Apesar de suas potencialidades, a proposta didática apresenta desafios significativos que não podem ser ignorados. Um primeiro desafio diz respeito à complexidade das fontes primárias utilizadas. Mesmo quando cuidadosamente selecionados e mediados, textos históricos da mecânica quântica apresentam linguagem, notação e pressupostos conceituais que podem dificultar sua compreensão por parte dos estudantes. Esse desafio reforça a necessidade de uma mediação docente atenta e de uma integração cuidadosa dessas fontes ao conjunto do curso.

Outro desafio relevante refere-se às demandas formativas impostas ao professor. A implementação de uma proposta didática fundamentada no MER, que articula história, epistemologia e formalismo matemático, requer do docente um domínio conceitual amplo e uma familiaridade com a história da mecânica quântica que nem sempre fazem parte de sua formação inicial. Esse aspecto evidencia que propostas dessa natureza devem ser acompanhadas de reflexões sobre a formação de professores e sobre condições institucionais favoráveis à sua adoção.

As restrições de tempo didático constituem um limite adicional. Cursos introdutórios de mecânica quântica frequentemente operam sob forte pressão curricular, o que pode dificultar a inclusão de discussões históricas e epistemológicas mais aprofundadas. Nesse contexto, a proposta exige escolhas cuidadosas e adaptações locais, sob o risco de sobrecarregar o curso ou de comprometer outros objetivos de aprendizagem.

Por fim, deve-se considerar o risco de anacronismo ou de simplificação excessiva no uso de fontes históricas. Embora a reconstrução educacional busque

preservar o significado conceitual do desenvolvimento histórico, há sempre o perigo de projetar concepções atuais sobre textos do passado ou de reduzir debates complexos a narrativas excessivamente lineares. Reconhecer esse risco é parte integrante de uma abordagem crítica e responsável do uso da História e Filosofia da Ciência no ensino.

Em síntese, as potencialidades e desafios discutidos nesta seção indicam que a proposta didática apresentada não deve ser entendida como um modelo universal ou acabado, mas como uma possibilidade de design fundamentada teoricamente, cujos méritos e limites dependem das condições concretas de sua implementação. Essa compreensão está em consonância com o Modelo de Reconstrução Educacional e reforça a necessidade de investigações futuras que explorem empiricamente os efeitos dessa abordagem em diferentes contextos educacionais.

4.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, discutiu-se uma proposta didática para o ensino da interpretação probabilística da mecânica quântica fundamentada no Modelo de Reconstrução Educacional. Partindo da constatação de que a interpretação probabilística costuma ser apresentada de forma naturalizada e descontextualizada no ensino superior, buscou-se reconstruir esse conteúdo à luz de sua gênese histórica, de seus fundamentos conceituais e das dificuldades recorrentes associadas à sua aprendizagem.

A reconstrução educacional desenvolvida ao longo do artigo evidenciou que a interpretação probabilística não emerge como uma consequência automática do formalismo matemático da mecânica quântica representado pela equação de Schrödinger, mas como uma resposta conceitual a problemas físicos e epistemológicos concretos, em especial aqueles relacionados a processos de colisão e espalhamento. Tornar explícito esse percurso revelou-se central para compreender os limites das abordagens didáticas tradicionais e para fundamentar a elaboração de uma proposta de ensino que atribua significado ao formalismo quântico.

Com base nessa reconstrução, o artigo explicitou princípios e hipóteses de design didático que orientam a proposta apresentada. Ao articular a análise do conteúdo científico, as dificuldades dos estudantes em MQ e escolhas de design coerentes com o MER, a proposta busca superar dicotomias frequentemente

observadas no ensino da mecânica quântica, como a separação entre matemática e interpretação ou entre conteúdo formal e discussões epistemológicas. O uso criterioso de fontes primárias e secundárias, bem como a problematização do papel do livro didático, foram apresentados como elementos centrais desse design.

Do ponto de vista do Ensino de Física, a principal contribuição do trabalho reside na explicitação de uma abordagem teórico-didática que trata a interpretação probabilística como elemento estruturante da mecânica quântica, e não como um apêndice conceitual, como recorrentemente encontramos nos livros didáticos (Souza; Lima; Karam, 2024). Ao deslocar o foco do ensino da simples aplicação da regra de Born para a compreensão de seus fundamentos, a proposta oferece subsídios para uma formação conceitualmente mais robusta e epistemologicamente mais reflexiva de estudantes de Física.

No que se refere à formação de professores, a proposta destaca a importância de problematizar materiais didáticos amplamente utilizados e de ampliar o repertório de estratégias de ensino para a mecânica quântica. Ao evidenciar que o livro didático incorpora escolhas e simplificações que podem impactar a aprendizagem, o artigo reforça a necessidade de uma postura crítica em relação às fontes de autoridade no ensino, aspecto particularmente relevante na formação inicial e continuada de docentes.

Cabe ressaltar que a proposta apresentada não pretende constituir um modelo acabado ou universal. Em consonância com o Modelo de Reconstrução Educacional, trata-se de uma possibilidade de design fundamentada teoricamente, cujos efeitos dependem das condições concretas de implementação, do perfil dos estudantes e das escolhas do professor. Nesse sentido, o trabalho aponta para a necessidade de investigações futuras que explorem empiricamente o potencial e os limites dessa abordagem em diferentes contextos educacionais.

Por fim, espera-se que a discussão desenvolvida neste artigo contribua para o aprofundamento do debate sobre o ensino da mecânica quântica no nível superior, incentivando abordagens que integrem formalismo, história e epistemologia de forma articulada. Ao explicitar o papel da reconstrução educacional no ensino da interpretação probabilística, o trabalho busca oferecer subsídios teóricos e didáticos para práticas de ensino que promovam uma compreensão mais significativa e reflexiva da mecânica quântica.

4.8 REFERÊNCIAS

BATISTA, Giovanninni Leite de Freitas; FERREIRA, Juliana Mesquita Hidalgo;

FREITAS, Daniel Brito de. Fontes primárias no ensino de física: considerações e exemplos de propostas. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 32, p. 663–702, 2015.

BORN, M. Physical Aspects of Quantum Mechanics. **Nature**, v. 119, n. 2992, p. 354–357, 1927.

BORN, Max. Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, v. 38, n. 11, p. 803–827, 1926a.

BORN, Max. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. **Zeitschrift für Physik**, v. 37, n. 12, p. 863–867, 1926b.

BORN, M.; BLIN-STOYLE, R.J.; RADCLIFFE, J.M. **Atomic Physics**. 8. ed. Blackie, 1969.

DUIT, Reinders *et al.* **The Model of Educational Reconstruction – a Framework for Improving Teaching and Learning Science1**. (Doris Jorde & Justin Dillon, Org.)**Science Education Research and Practice in Europe: Retrosspective and Prospecctive**RotterdamSense Publishers, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-6091-900-8_2.

GRIFFITHS, David .J. **Mecânica Quântica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education, 2011.

JAMMER, Max. **The conceptual development of quantum mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1966.

KARAM, Ricardo Avelar Sotomaior; LIMA, Nathan Willig. Using history of physics to teach physics?. *In*: GUISASOLA, Jenaro; MCLOUGHLIN, Eilish (ed.). **Connecting Research in Physics Education with Teacher Education 3**. Dublin: The International Commission on Physics Education in cooperation with University of the Basque Country (UPV/EHU) and Dublin City University, 2022. v. 3, p. 22–38.

KATTMANN, Ulrich *et al.* Educational Reconstruction – Bringing Together Issues of Scientific Clarification and Students' Conceptions. 1996. **Annual Meeting of the National Association of Research in Science Teaching (NARST)**. 1996. p. 19.

KRAGH, Helge S. **An Introduction to the Historiography of Science**. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. Disponível em: https://www.cambridge.org/core/product/BB97CBAD6F58F6ED512A1651BD8EFBBF

LIMA, Nathan; CAVALCANTI, Cláudio; OSTERMANN, Fernanda. Concepções de Dualidade Onda-Partícula: Uma proposta didática construída a partir de trechos de

fontes primárias da Teoria Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, 2021.

LIMA, Nathan; KARAM, Ricardo. Schrödinger's equation from Snell's law. **European Journal of Physics**, v. 43, n. 3, p. 035402, 2022.

LONGAIR, Malcolm. **Quantum Concepts in Physics: An Alternative Approach to the Understanding of Quantum Mechanics**. 2013.

MARTINS, Roberto de Andrade. Introdução: a história das ciências e seus usos na educação. *In*: SILVA, Cibelle Celestino (org.). **Estudos de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2006. p. xxi–xxxiv.

MARYELLY, Faria; TAKAHASHI, Eduardo. Dificuldades de Aprendizagem em Física no Ensino Superior: Um Estado da Arte. *In*: **ENTRE FIOS E TRAMAS DA FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA DE PROFESSORES**. Kelps, 2020. p. 201–303.

MATTHEWS, M.R. História, filosofia e ensino de ciências: A tendência atual de reaproximação. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 12, 1995.

MÜLLER, Rainer; WIESNER, Hartmut. Teaching quantum mechanics on an introductory level. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 3, p. 200–209, 2002.

NETO, Jonas Guimarães Paulo; PARENTE, Nórlia Nabuco; MACEDO, Diego Ximenes. Formação de professores de Física e a Física moderna e contemporânea: o caso da rede pública de Sobral. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 7, p. e750974696, 2020.

NIEBERT, Kai; GROPENGIESSER, Harald. The Model of Educational Reconstruction: A framework for the Design of Theory-based Content Specific Interventions. The example of Climate Change. *In*: **EDUCATIONAL DESIGN RESEARCH – PART B: ILLUSTRATIVE CASES**. Enschede, the Netherlands: SLO., p. 511–531. 2013

OLIVEIRA, Odisséa Boaventura de. Em defesa da leitura de textos históricos na formação de professores de ciências. **Pro-Posições**, v. 22, 2011.

PAIS, A. Max Born's Statistical Interpretation of Quantum Mechanics. **Science**, v. 218, n. 4578, p. 1193–1198, 1982.

PEDUZZI, Luiz Orlando de Quadros. Sobre a utilização didática da História da Ciência. *In*: PIETROCOLA, Maurício (org.). **Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora.** UFSC, 2001. p. 151–170.

PESSOA JR., Osvaldo. **Conceitos de Física Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2003.

RUTHERFORD, E. The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. **Philosophical Magazine**, v. 92, n. 4, p. 379–398, 2012.

SILVA, Michelle Garcia da; FERREIRA, Helaine Sivini. Modelo de Reconstrução Educacional como um Aporte teórico e Metodológico para o Design de Ambientes de Ensino e Aprendizagem da Ciência. **Investigações Em Ensino De Ciências**, v. 25, n. 1, p. 262–281, 2020.

SILVA, Ana Paula Bispo da; GUERRA, Andreia. **História da Ciência e Ensino: Fontes primárias e propostas para sala de aula**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SINGH, Chandralekha; MARSHMAN, Emily. Review of student difficulties in upper-level quantum mechanics. **Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.**, v. 11, n. 2, p. 020117, 2015.

SOUZA, Rafaelle da Silva *et al.* Reflexões sobre o Ensino de Mecânica Quântica nos Cursos de Graduação em Física a partir de Revisão Sistemática. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 20, n. u, p. 1363–1391, 2021.

SOUZA, Daniel S.; LIMA, Nathan W.; KARAM, Ricardo A. S. A gênese da interpretação probabilística em livros didáticos de mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 46, p. e20230238, 2024.

5 CONCLUSÃO

Esta tese teve como objetivo contribuir para a proposição de um ensino de Mecânica Quântica que atribua significado à interpretação probabilística associada à função de onda, evidenciando os principais aspectos históricos, teóricos e conceituais relacionados à sua gênese e discutindo caminhos para que esses elementos possam ser mobilizados na construção de abordagens didáticas sobre o tema. Para atingir esse objetivo, a investigação foi organizada em três estudos complementares, articulados entre si, que buscaram responder às diferentes dimensões do problema de pesquisa.

O primeiro estudo voltou-se para a análise de livros didáticos de Mecânica Quântica utilizados no ensino superior. A investigação permitiu identificar como a interpretação probabilística é apresentada aos estudantes e quais justificativas são mobilizadas para sustentar a associação entre o módulo ao quadrado da função de onda e a noção de probabilidade. Os resultados evidenciaram que uma parcela significativa das obras analisadas apresenta essa interpretação como um elemento já estabelecido da teoria, sem explicitar os problemas físicos, os argumentos conceituais ou os contextos históricos que motivaram sua formulação. Em outros casos, são encontrados elementos históricos ou justificativas conceituais, porém de maneira parcial e fragmentada. Assim, o primeiro estudo permitiu identificar uma lacuna importante no ensino de Mecânica Quântica: a tendência de apresentar a interpretação probabilística como um resultado acabado, frequentemente desvinculado das questões que lhe deram origem.

Essa constatação conduziu ao desenvolvimento do segundo estudo. Se os livros didáticos pouco explicitam os fundamentos históricos e conceituais da interpretação probabilística, torna-se necessário compreender como essa interpretação foi efetivamente construída. Nesse sentido, o segundo estudo realizou uma reconstrução histórico-epistemológica da gênese da interpretação probabilística a partir da análise de fontes primárias e secundárias, com destaque para os trabalhos originais de Max Born sobre processos de colisão. A investigação mostrou que a interpretação probabilística não surgiu como um postulado arbitrário nem como uma consequência imediata do formalismo matemático da Mecânica Quântica. Ao contrário, ela foi construída em resposta a problemas físicos concretos, especialmente aqueles relacionados aos fenômenos de espalhamento e colisão, articulando

fonômeno, analogias físicas e elementos formais da teoria quântica. Dessa forma, o estudo evidenciou que o significado atribuído ao módulo ao quadrado da função de onda emerge de um processo histórico complexo, no qual diferentes elementos teóricos, experimentais e conceituais se articulam. Embora a relação entre formalismo matemático e interpretação física ocupe posição central nessa discussão, a análise realizada mostrou que ela não é suficiente para compreender a gênese da interpretação probabilística. Problemas concretos associados aos processos de espalhamento, resultados experimentais sobre o comportamento da matéria, analogias com fenômenos ondulatórios e debates acerca da natureza dos sistemas quânticos desempenharam papel igualmente relevante na construção dessa interpretação. Ao recuperar esses elementos, o estudo evidencia aspectos que frequentemente são omitidos ou relegados a segundo plano nos relatos didáticos, contribuindo para uma compreensão mais ampla da complexidade histórica envolvida na formação dos conceitos físicos e, em particular, da interpretação probabilística da Mecânica Quântica.

Os resultados dos dois primeiros estudos forneceram as bases para o terceiro estudo, cuja finalidade consistiu em refletir sobre as potencialidades e os desafios envolvidos na elaboração de propostas didáticas para o ensino da interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Para isso, adotou-se como referencial o Modelo de Reconstrução Educacional, que possibilita articular a análise epistemológica do conteúdo científico, a consideração das perspectivas dos estudantes e a elaboração de orientações para o ensino. Nessa perspectiva, buscou-se transformar os resultados da reconstrução histórica em elementos potencialmente relevantes para a aprendizagem, considerando simultaneamente as dificuldades relatadas na literatura acerca do ensino de Mecânica Quântica.

A análise realizada permitiu identificar que muitos dos obstáculos encontrados pelos estudantes decorrem justamente da dificuldade de atribuir significado físico ao formalismo matemático. Tal resultado reforça a importância de abordagens que apresentem os conceitos científicos como respostas a problemas específicos e historicamente situados. Nesse contexto, as fontes primárias e secundárias mostraram-se recursos particularmente promissores, pois permitem evidenciar os argumentos, dúvidas, impasses e escolhas que acompanharam o desenvolvimento da interpretação probabilística. Assim, o terceiro estudo não teve como objetivo produzir uma sequência didática prescritiva, mas propor princípios orientadores,

hipóteses de design e possibilidades de organização conceitual capazes de subsidiar futuras propostas de ensino.

A articulação entre os estudos mencionados permitiu responder às questões de pesquisa inicialmente formuladas e avançar na compreensão das potencialidades do uso de fontes históricas para o ensino da Mecânica Quântica. As questões de pesquisa formuladas na introdução demandaram abordagens distintas e complementares. Nesse sentido, cada estudo respondeu a uma questão específica, produzindo resultados próprios que, quando analisados em conjunto, permitiram construir um quadro mais abrangente sobre os desafios e as potencialidades do ensino da interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Em relação à primeira questão de pesquisa, referente aos aspectos históricos da interpretação probabilística que são apagados, mantidos ou transformados nos livros didáticos, o primeiro estudo evidenciou que predominam abordagens que apresentam a interpretação probabilística como um resultado consolidado da teoria, frequentemente dissociado dos problemas físicos e dos argumentos que motivaram sua formulação. Quanto à segunda questão, relativa aos elementos históricos, teóricos e experimentais que subsidiam a gênese da interpretação probabilística, o segundo estudo mostrou que a proposta de Born emerge da articulação entre recursos formais da Mecânica Quântica, problemas de espalhamento e colisão, evidências empíricas disponíveis à época e analogias revelando um processo de construção conceitual significativamente mais complexo do que aquele normalmente apresentado nos textos didáticos. Por fim, em relação à terceira questão de pesquisa, o terceiro estudo permitiu discutir as potencialidades e os desafios associados à elaboração de propostas didáticas fundamentadas em fontes primárias e secundárias, indicando que a reconstrução histórica tem potencial para favorecer a atribuição de significado ao formalismo matemático, ao mesmo tempo em que impõe desafios relacionados à seleção, adaptação e mediação dos materiais históricos no contexto educacional.

Em conjunto, esses resultados respondem ao objetivo geral da tese ao mostrar que a interpretação probabilística da função de onda pode ser abordada de forma mais significativa quando compreendida em seu contexto histórico de emergência e quando os argumentos que sustentaram sua formulação são incorporados ao processo de ensino. Assim, a pesquisa não apenas identificou limitações presentes nas abordagens didáticas contemporâneas, mas também reconstruiu os elementos

conceituais que lhes conferem significado e discutiu caminhos para sua transposição ao contexto educacional.

Do ponto de vista da área de Ensino de Física, a principal contribuição desta tese consiste em evidenciar que a interpretação probabilística pode ser compreendida de maneira mais significativa quando apresentada em diálogo com os problemas físicos que motivaram sua formulação. Ao recuperar a gênese histórica da interpretação probabilística e discutir formas de sua reconstrução educacional, a pesquisa contribui para uma abordagem de ensino que busca superar a dicotomia frequentemente estabelecida entre formalismo matemático e compreensão conceitual. Nessa perspectiva, o formalismo deixa de ser entendido apenas como um conjunto de procedimentos operacionais e passa a ser concebido como parte de uma rede mais ampla de significados construída historicamente.

Além disso, esta investigação contribui para o campo das pesquisas que articulam História e Filosofia da Ciência ao Ensino de Física, ao oferecer um estudo de caso sobre a utilização de fontes primárias em um tema tradicionalmente considerado abstrato e de elevada complexidade conceitual. Os resultados sugerem que a reconstrução histórica de conceitos científicos pode constituir uma estratégia relevante para promover uma aprendizagem mais crítica, contextualizada e conceitualmente fundamentada.

Por fim, reconhece-se que as discussões aqui desenvolvidas não esgotam a temática. Permanecem abertas possibilidades de investigação relacionadas à implementação e avaliação empírica das orientações didáticas propostas, bem como à ampliação da análise para outros conceitos da Mecânica Quântica. Espera-se, contudo, que os resultados desta tese possam contribuir para futuras pesquisas e para o desenvolvimento de propostas de ensino que favoreçam uma compreensão mais profunda da interpretação probabilística da função de onda e de seu papel na construção da Mecânica Quântica.