

## XXIV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS

### **Modelo Hidrodinâmico de Fluxos Superficiais e Subsuperficiais Acoplados**

*Cayo Lopes Bezerra Chalegre<sup>1</sup>; David da Motta Marques<sup>1</sup>; Carlos Ruberto Fragoso Jr<sup>2</sup>*

**Palavras-Chave** – Escoamentos acoplados, escoamento subsuperficial; métodos numéricos;

**RESUMO:** A interação entre escoamentos subsuperficiais e superficiais pode ter relevante papel na dinâmica de diferentes ecossistemas. Devido a fatores como heterogeneidade espacial e temporal da distribuição de fluxos dessa interação e características físicas do ambiente, a quantificação dessa interação pode ser dificultada. A utilização de modelos numéricos de fluxos acoplados junto a dados de campo pode ser uma alternativa metodológica para lidar com essas dificuldades. No presente estudo, um algoritmo numérico de fluxos acoplados baseado nas equações médias de Reynolds e nas equações de Darcy é apresentado. Um esquema numérico híbrido de diferenças finitas e volumes finitos conservativo é utilizado para solução das equações. O algoritmo é validado com uso de dois *test cases* comumente utilizados na validação desse tipo de algoritmo. Os resultados mostraram representação adequada dos fenômenos a serem representado em cada teste.

#### **1. INTRODUÇÃO**

A modelagem de fluxos subsuperficiais e superficiais acoplados podem desempenhar importante papel no estudo da relevância dessa interação em fluxos ambientais. Em ambientes lacustres, por exemplo, a interação entre o escoamento superficial e subsuperficial pode exercer forte influência no seu balanço hídrico e de nutrientes (Hagerthey e Kerfoot, 1998; Zhu e Schwartz, 2011; Oliveira Ommen et al., 2012; Shaw et al., 2013). Em alguns casos foram relatadas que a contribuição dessa componente ao balanço hídrico desses ecossistemas podem chegar a 94% (Rosenberry et al., 2015). Apesar de sua relevância, a quantificação dessa interação pode ser dificultada devido a fatores como a heterogeneidade da espacial e temporal da distribuição dos fluxos e anisotropia do solo. Para lidar com essas problemáticas o uso de dados levantados em campo pode ser associado a modelos de fluxos subsuperficiais e superficiais acoplados.

A modelagem de fluxos subsuperficiais vem sendo feita com uso de modelos desacoplados iterativamente e não iterativamente e modelos acoplados (Huang e Yeh, 2009; Chen et al., 2020; Wu et al., 2021). Os modelos não-iterativos (forma mais simples) utilizam os resultados de dois modelos (um modelo para simular cada fluxo), adotando a saída do modelo de fluxo subsuperficial como condição de contorno do modelo de fluxo superficial. A aplicação desta metodologia de forma iterativa (isto é, integrando os modelos ao nível do passo do tempo) pode melhorar a precisão, mas ainda não há garantia de que os resultados serão tão precisos quanto as metodologias acopladas. As metodologias acopladas resolvem as equações para regimes de subsuperfície e superfície simultaneamente, integrando ambos os fluxos através de uma condição de contorno cinemática na interface entre os domínios de cada um. Esta abordagem pode minimizar problemas de convergência e conservação de massa que frequentemente ocorrem, principalmente na presença de dinâmica de

<sup>1</sup> Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil (cayolopesbc@gmail.com, dmm@iph.ufrgs.br)

<sup>2</sup> Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brasil (carlosruberto@gmail.com)

secagem/inundação, em meios porosos não homogêneos, e durante a transição de superfície livre na interface de ambos os fluxos (Weill et al., 2009; Casulli e Zanolli, 2010; Casulli, 2015; Chen et al., 2020).

O conjunto de equações adotadas pelos modelos é outra questão significativa que deve ser observada no processo de modelagem. Existem modelos com maior sofisticação que utilizam aproximações 3D para ambos os fluxos, aplicando as equações Navier-Stokes para fluxo de superfície e a equação Richards para fluxo subterrâneo (ver Spanoudaki et al., 2009; Yuan et al., 2011; Lou et al., 2018), como modelos que adotam simplificações nessas equações de forma a balancear o trade-off entre representação dos principais processos e aplicabilidade. Para a simulação do escoamento superficial uma aproximação utilizando onda difusiva ou as equações de águas rasas pode ser adequada. Enquanto, para a simulação de fluxos subsuperficiais a adoção de equações 2D de Boussinesq considerando a hipótese de Dupuit-Forheimer são válidos.

Com isso, no presente estudo um algoritmo acoplado e conservativo para simulação hidrodinâmica de fluxos subsuperficiais-superficiais baseado nas Equações de Médias de Reynolds para fluxos superficiais e equação de Darcy para os fluxos subsuperficiais é apresentado.

## 2. METODOLOGIA

### EQUAÇÕES GOVERNANTES

O fluxo superficial é definido pelas Equações de Médias de Reynolds (Equações 1 a 3) e o sub-superficial é definido pela Equação de Richard (Equação 4) e pela lei de Darcy (Equação 5).

$$u_t + (\vec{V} \cdot \nabla)u - fv = -Pa_x - g\eta_x + (v^h u_x)_x + (v^h u_y)_y + v^v (u_z)_z, \quad (1)$$

$$v_t + (\vec{V} \cdot \nabla)v - fu = -Pa_y - g\eta_y + (v^h v_x)_x + (v^h v_y)_y + v^v (v_z)_z, \quad (2)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot V^g = 0, \quad (4)$$

$$u = -K \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (5)$$

$$v = -K \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (6)$$

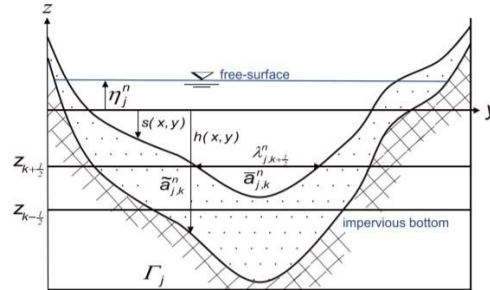
onde  $u(x, y, z, t)$  e  $v(x, y, z, t)$  são os componentes de velocidade na direção horizontal ( $x$  e  $y$ ) respectivamente, do vetor de velocidade  $V(x, y, z, t)$ ;  $\nabla_{xy}$  é o operador gradiente;  $v^h$  e  $v^v$  são os coeficientes de viscosidade turbulenta horizontal e vertical, respectivamente;  $t$  é o tempo;  $\eta$  é a elevação da superfície livre a partir de uma referência de nível de água;  $Pa(x, y, z, t)$  é a pressão atmosférica;  $f$  é o parâmetro Coriolis;  $g$  é a aceleração gravitacional;  $K$  é a condutividade hidráulica da camada permeável;  $\theta(x, y, z, t) = \epsilon(x, y, z)S(x, y, z)$  é o teor de umidade do solo, com  $\epsilon(x, y, z)$  sendo a porosidade do solo e  $S(x, y, z)$  é o nível de saturação.

### DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

O domínio vertical é limitado abaixo por uma camada impermeável e acima pela superfície livre. Além disso, assume-se que uma aproximação da pressão pela hidrostática válida (suposição de Dupuit) (Bear e Verruijt, 2012). Considerando que as camadas impermeáveis do leito e do solo são conhecidas para  $\forall(x, y)$  no domínio horizontal  $\Omega$ , o nível impermeável está localizado em  $z = -h(x, y)$  e o nível do solo em  $z = -s(x, y)$  (Figura 1), respeitando a condição que estabelece  $-h(x, y) \leq s(x, y)$ . A região entre esses dois níveis define a camada permeável onde ocorre o fluxo de subsuperfície.

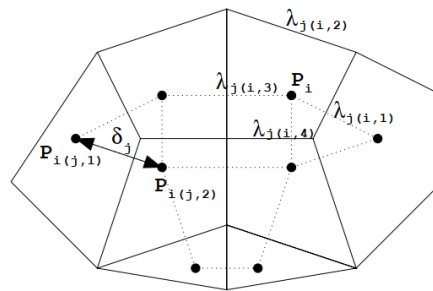
Assim, nos casos que  $-h(x,y) = -s(x,y)$  para  $(x,y) \in \Omega$ , a camada subsuperficial é negligenciada e só ocorre fluxo superficial.

Figura 1: Corte transversal vertical. Fonte: (Casulli, 2015).



A grade computacional pode ser descrita como uma grade ortogonal genérica não estruturada, coberta por polígonos convexos não sobrepostos  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_p$  (Figura 2), com área  $P_i$  e  $N_s$  lados  $\Gamma_j$  com comprimento  $\lambda_j$ . Quando a célula está molhada, o  $\lambda_j$  representa o comprimento molhado. A distância não nula entre os centros dos polígonos adjacentes que compartilham o  $j$ -th lado é indicada com  $\delta_j$ . Os dois polígonos que compartilham a face  $\Gamma_j$  da grade são identificados pelos índices  $l(j)$  e  $r(j)$ . Além disso,  $\wp(i,j)$  denota o vizinho do polígono  $i$ -th que compartilha o lado  $j$ .

Figura 2: - Variáveis de fluxo discretizadas em uma grade estruturada. Fonte: Casulli (2009).



Ao longo da direção vertical é adotada uma discretização simples de diferenças finitas, não necessariamente uniforme. A discretização espacial consiste em elementos cujas faces horizontais são o polígono de uma determinada grade ortogonal, representada pelas camadas em  $k + 1$  (face superior) ou  $k - 1$  (face inferior), cuja altura, para cada camada, é  $\Delta z_k$  (Figura 1). A elevação da superfície da água ( $\eta$ ) foi definida no baricentro da face horizontal superior para cada  $i$ -th elemento.

A área molhada total de cada face vertical é definida por  $a_{j,k}^n = \bar{a}_{j,k}^n + \tilde{a}_{j,k}^n$ , de tal forma que  $\bar{a}_{j,k}^n = \lambda_j \Delta z_{j,k}^n$  e  $\tilde{a}_{j,k}^n = \lambda_j \Delta \tilde{z}_{j,k}^n$  são as áreas úmidas não-negativas de superfície e subsuperfície para cada face vertical, respectivamente. Os componentes de superfície e sub-superfície da velocidade horizontal são assumidos constantes sobre a face vertical de cada célula computacional, sendo colocados no centro de cada célula. Os componentes de velocidade média horizontal em cada face vertical úmida são descritos como:

$$u_{j,k}^n = \frac{\bar{a}_{j,k}^n u_{j,k}^n + \tilde{a}_{j,k}^n u_{j,k}^n}{a_{j,k}^n}, \quad (7)$$

onde a direção positiva de cada componente de velocidade horizontal é escolhida de  $l(j)$  para  $r(j)$ . Além disso, para cada célula molhada, a velocidade média normal em cada face horizontal é definida por  $w_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1}$ .

## DISCRETIZAÇÃO NUMÉRICA

Para as equações de momento (Equações 1 e 2), foi aplicado um método de diferença finita semi-implícita para cada face  $\Gamma_j$  como se segue:

$$\bar{a}_{j,k}^n \bar{u}_{j,k}^{n+1} = \bar{a}_{j,k}^n F \bar{u}_{j,k}^n - g \Delta t \bar{a}_{j,k}^n \frac{\eta_{r(j)}^{n+\theta} - \eta_{l(j)}^{n+\theta}}{\delta_j} - \Delta t \gamma_{j,k}^n \left( \lambda_{j,k+\frac{1}{2}}^n - \lambda_{j,k-\frac{1}{2}}^n \right) \bar{u}_{j,k}^n + \Delta t \left\{ \lambda_{j,k+\frac{1}{2}}^n v_{j,k+\frac{1}{2}}^n \frac{\bar{u}_{j,k+1}^{n+1} - \bar{u}_{j,k}^{n+1}}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} - \lambda_{j,k-\frac{1}{2}}^n v_{j,k-\frac{1}{2}}^n \frac{\bar{u}_{j,k}^{n+1} - \bar{u}_{j,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{k-\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (8)$$

$$k = \bar{m}_j, \bar{m}_{j+1}, \dots, \bar{M}_j$$

onde  $F$  é um operador de diferença finita explícita, que é responsável por computar a contribuição da discretização do efeito de Coriolis, termos de advectivos e fricção horizontal;  $\Delta t$  denota o passo do tempo;  $\eta^{n+\theta} = \theta \eta^{n+1} + (1 - \theta) \eta^n$  e  $\theta \in [0.5, 1]$  é o parâmetro de implicidade do método  $\theta$  (Casulli, 1990);  $\gamma_n$  é o coeficiente de fricção.  $m_j$  e  $M_j$  são a face vertical úmida superficial mais baixa e a mais alta, respectivamente.

Para o operador de diferenças finitas explícito  $F$ , foi adotada uma discretização Eularian-Lagrangian (Casulli e Cheng, 1992; Casulli e Walters, 2000), dada da seguinte forma:

$$F \bar{u}_{j,k}^n = \frac{[1 - \theta(1 - \theta) f^2 \Delta t^2] u_{j,k}^* + f \Delta t v_{j,k}^*}{1 + \theta^2 f^2 \Delta t^2} + \Delta t v^h \Delta_h u_{j,k}^*, \quad (9)$$

onde  $u_{j,k}^*$  denota o componente de velocidade normal a  $j$ -th face e  $v_{j,k}^*$  é o componente de velocidade tangencial em um sistema de coordenadas cartesianas. A trajetória Lagrangiana é aproximada pela integração da velocidade para trás no tempo a partir do nó  $(j,k)$  em  $t_n + 1$  até sua localização no tempo  $t_n$ , o que é feito por uma abordagem Multi-Step com método de Euler. Então, ambos os componentes são interpolados na trajetória Lagrangiana com base nos valores em pontos de grade adjacentes usando um método de interpolação quadrática similar ao adotado por Hodges et al. (2000).

Para a região de fluxo subsuperficial, as Equações de Darcy são discretizadas em uma simples aproximação de diferença finita não dependente do tempo implícito:

$$\tilde{u}_{j,k}^{n+1} = -K_{j,k} \frac{\eta_{r(j)}^{n+1} - \eta_{l(j)}^{n+1}}{\delta_j}, \quad k = \tilde{m}_j, \tilde{m}_j + 1, \dots, \tilde{M}_j \quad (10)$$

onde  $K_{j,k}$  é a condutividade hidráulica média da face;  $\tilde{m}_j$  e  $\tilde{M}_j$  são a face vertical úmida mais baixa e a mais alta da região permeável, respectivamente. Uma vez adotado o modelo de relação constitutiva de Darcy para definir a saturação do solo, os valores  $\tilde{M}_j$  mudam espacialmente a cada nível de tempo  $t_n$  para levar em conta as mudanças da superfície livre, da mesma forma, a discretização do fluxo superficial.

Para a equação da continuidade integrada na coluna d'água (Equação 3), foi aplicada uma aproximação semi-implícita de volumes finitos para obter a seguinte expressão de volume para o  $i$ -th polígono:

$$V(\eta_i^{n+1}) = V(\eta_i^n) + \Delta t \sum_{j \in S_i} \sigma_{i,j} \left( \sum_{j=\bar{m}_j}^{\bar{M}_j} \bar{a}_{j,k}^n \bar{u}_{j,k}^{n+\theta} + \sum_{j=\tilde{m}_j}^{\tilde{M}_j} \tilde{a}_{j,k}^n \tilde{u}_{j,k}^{n+\theta} \right), \quad (11)$$

onde  $u^{n+\theta} = \theta u^{n+1} + (1 - \theta) u^n$ ;  $V(\eta^{n+1})$  é o volume de água na  $i$ -th coluna, para um dado  $\eta^{n+1}$ ; e  $\sigma_{i,j}$  é uma função sinal associada à orientação das velocidades normais definidas nas faces verticais  $j$ -th, descritas por:

$$\sigma_{i,j} = \frac{r(j) - 2i + l(j)}{r(j) - l(j)}. \quad (12)$$

A velocidade média normal em cada face horizontal é alcançada aplicando uma forma de volume finito da condição de incompressibilidade (Equação 3), como segue:

$$\left( \sum_{j \in S_i} \sigma_{i,j} a_{j,k}^n u_{j,k}^{n+1} \right) + a_{j,k+\frac{1}{2}}^n w_{j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - a_{j,k-\frac{1}{2}}^n w_{j,k-\frac{1}{2}}^{n+1} = 0, \quad k = m_i, m_i^n + 1, \dots, M_i^n - 1, \\ w_{j,m-\frac{1}{2}}^{n+1} = 0. \quad (13)$$

A Equação 11 aplicada a todos os elementos do domínio discreto resulta em um sistema de  $N_p$  equações, que é resolvido utilizando um algoritmo de Newton. A solução do sistema anterior trás simultaneamente os volumes e os valores de  $\eta^{n+1}$ . Com os valores de  $\eta^{n+1}$ , se obtém as velocidades horizontais superficiais e subsuperficiais, e, posteriormente, a velocidade normal as faces horizontais.

### VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

A abordagem numérica proposta foi aplicada em referências consolidadas utilizadas para verificação e validação de modelos de fluxos numéricos acoplados. Dois benchmarks e os resultados obtidos são apresentados no item a seguir.

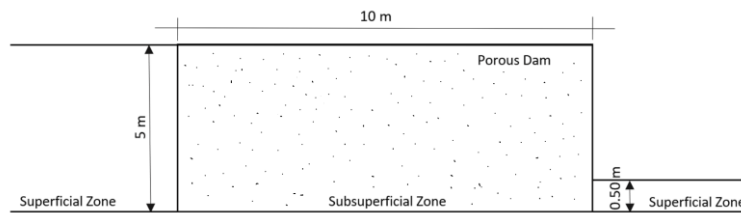
### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

#### FLUXO ATRAVÉS DE UMA BARRAGEM POROSA

Nesse *test case*, é avaliado um fluxo subsuperficial constante através de uma barragem vertical porosa. A barragem tem um comprimento de 10m e altura igual a 5 m (Figura 3). Os resultados da simulação foram comparados com a solução analítica de fluxo através do meio poroso definido pela Equação de Parábola de Dupuit, que é definida como segue:

$$\eta(x) = \left[ H_1^2 - \frac{x}{L}(H_1^2 - H_2^2) \right]^{1/2} \quad (14)$$

Figura 3: Domínio para o experimento de fluxo através de barragem porosa.



onde  $H_1$  e  $H_2$  podem ser definidos como os níveis constantes de água no lado esquerdo e direito da barragem, respectivamente; e  $L$  é o comprimento da barragem.

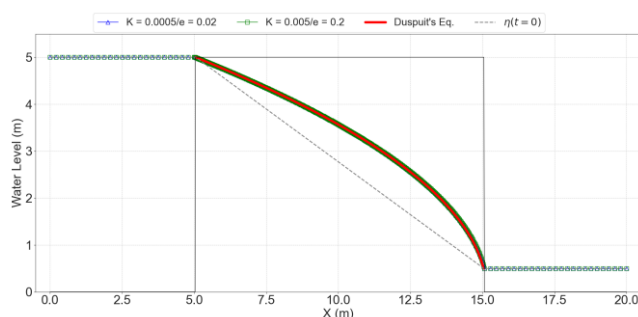
A simulação foi realizada com duas configurações de parâmetros subsuperficiais para ilustrar a independência do fluxo dos parâmetros do solo para este *test case*. Este é uma importante suposição para se avaliar, uma vez que a Equação de Dupuit depende apenas do gradiente hidráulico definido pela condição de contorno. Para a primeira configuração, a porosidade e condutividade hidráulica foram definidas como  $\epsilon = 0,02$  e  $K = 0,0005$  m/s, e na segunda os parâmetros foram definidos  $\epsilon = 0,2$  e  $K = 0,005$  m/s. Enquanto para a zona superficial, a rugosidade de Chezy foi definida como 50 m/s. Os parâmetros numéricos foram definidos como  $\Delta x = 0,2$  m e o fator de implicidade  $\theta = 0,60$ .

O nível da água nos lados esquerdo e direito da represa foi prescrito igualmente a 5 m e 0,5 m, respectivamente, e foram mantidos constante durante toda a simulação. Foi prescrita uma condição de ausência de fluxo em todos os outros lugares. O nível inicial da água na zona subsuperficial foi

prescrito como  $\eta(x, 0) = 5 - 0,45x$ . Assim, a simulação foi realizada até o estado estacionário ser alcançado, com um passo de  $\Delta t = 3600s$ .

Na Figura 4 os níveis de água simulados são comparados com o nível de água analítico e mostram boa concordância (em ambas as configurações, a raiz do erro quadrático médio é 0.001 m). Como esperado, o lençol freático subterrâneo simulado mostrou independência dos parâmetros do solo e segue a parábola de Dupuit. Estes resultados foram semelhantes aos obtidos pelos modelos de Liang et al. (2007), Yuan et al. (2012) e Shokri et al. (2018) para um *test case* semelhante.

Figura 4: Níveis simulados para duas configurações de parâmetros de solo comparados com a solução analítica da parábola de Dupuit.

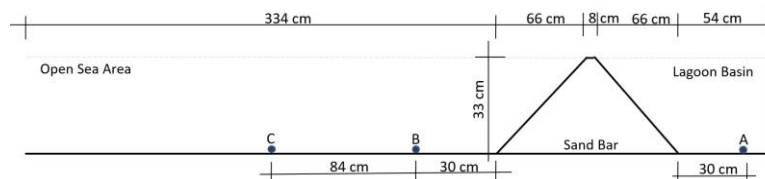


## FLUXO EM UMA LAGOA SOB AÇÃO DE MARÉ

Esse *test case* é baseado em um experimento de laboratório conduzido por Ebrahimi et al. (2007). Neste experimento, uma lagoa foi separada de uma área de mar aberto sob ação de maré por uma barra de areia permeável. Esse *test case* possibilita avaliar a troca entre a bacia idealizada da maré e a lagoa adjacente, o que a tornou um experimento numérico clássico na verificação e validação da capacidade dos modelos de simular fluxos acoplados entre estas áreas (Liang et al., 2007; Yuan et al., 2008, 2012; Kong et al., 2010; Casulli, 2015, 2017; Shokri et al., 2018; Chen et al., 2020).

O domínio utilizado está apresentado na Figura 5. A barra de areia permeável foi caracterizada por uma porosidade  $\epsilon = 0,3$  e condutividade hidráulica  $K = 1,0$  cm/s. Para o fluxo superficial, a viscosidade horizontal foi negligenciada e a rugosidade de Chezy foi definida como 50 m/s.

Figura 5: Domínio para o experimento de fluxo em uma lagoa sob ação de maré.

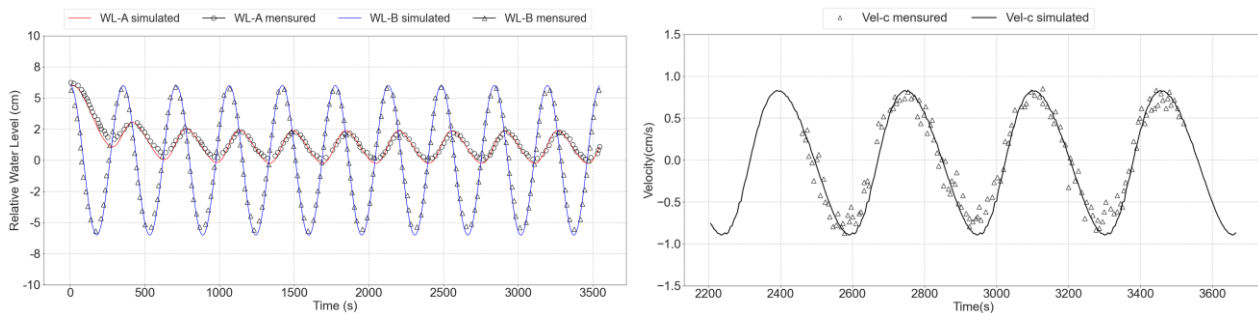


Em todo o domínio foi estabelecida uma condição de contorno de fluxo nulo, exceto no limite à esquerda na área de mar aberto, onde foi aplicada uma condição de contorno harmônica (simulando efeito de maré). A condição de limite harmônico oscila com uma amplitude constante de  $a = 6$  cm, um período de  $T = 355s$ , e um nível médio de água de 21,4 cm, que pode ser definido por  $\eta(0, t) = 21,4 + \text{acos } 2\pi t$ . No tempo inicial ( $t = 0$ ) o nível de água foi prescrito igual a 27,4 cm e as velocidades foram definidas como iguais a zero em todo o domínio. A simulação foi realizada por 10 ciclos de maré com um passo de tempo igual a  $\Delta t = 5$  s e parâmetros numéricos foram definidos  $\Delta x = 2$  cm e  $\theta = 0,62$ .

Na Figura 6 os níveis de água simulados em relação ao nível médio da água são comparados com os dados experimentais coletados tanto na lagoa (ponto A) quanto na área de mar aberto (ponto B) (Figura 5). Os resultados numéricos mostram boa concordância com os dados de laboratório,

simulam bem o amortecimento observado e o deslocamento de fase das oscilações da maré (perto de 90° entre o nível da água da lagoa e a área de mar aberto). Além disso, na Figura 6 a velocidade simulada para os três últimos ciclos de maré no ponto C também é comparada com os dados experimentais e mostrou bons resultados. Todos os resultados encontrados também estão de acordo com resultados simulados anteriormente por outros modelos similares (Liang et al., 2007; Kong et al., 2010; Casulli, 2015; Shokri et al., 2018; Chen et al., 2020).

Figura 6: Verificação dos níveis simulados nos pontos A e B (dir.) e das velocidades simulados no ponto C (dir.).



#### 4. CONCLUSÕES

Neste estudo, um algoritmo que possibilita a simulação do fluxo superficial acoplado ao fluxo subsuperficial foi apresentado. O esquema numérico adotado, adota uma abordagem híbrida de volumes finitos e diferença finitas. A validação do algoritmo foi realizada com dois *test cases* comumente aplicados em algoritmos similares.

Os resultados mostraram boa concordância com os resultados analíticos e experimentais disponíveis para os *test cases* utilizados. No primeiro *test case*, o fluxo através de uma barragem porosa sob o efeito de um gradiente hidráulico constante demonstrou a capacidade do algoritmo de simular fluxos acoplados ambientais bem desenvolvidos (estado estacionário). O segundo *test case* validou a capacidade do algoritmo de captar a dinâmica de uma lagoa costeira sob influência da maré.

**AGRADECIMENTOS** Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES/PROCAD – pelo financiamento parcial.

#### REFERENCIAS

BEAR, J. E VERRUIJT, A. (2012). “*Modeling groundwater flow and pollution*”, volume 2. Springer Science & Business Media.

CASULLI, V. (1990). “*Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations*”. *Journal of Computational Physics*, 86(1):56–74.

CASULLI, V. E CHENG, R. T. (1992). “*Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow*”. *International Journal for numerical methods in fluids*, 15(6):629–648.

CASULLI, V. (2009). “*A high-resolution wetting and drying algorithm for free-surface hydrodynamics*”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(4):391–408.

- CASULLI, V. (2015). “A conservative semi-implicit method for coupled surface–subsurface flows in regional scale”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 79(4):199–214.
- CASULLI, V. E WALTERS, R. A. (2000). “An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations.” *International journal for numerical methods in fluids*, 32(3):331–348.
- CASULLI, V. E ZANOLLI, P. (2010). “A nested newton-type algorithm for finite volume methods solving richards’ equation in mixed form”. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(4):2255–2273.
- CHEN, Y., SHI, F., KIRBY, J. T., WU, G., E LIANG, B. (2020). “A computationally efficient subgrid model for coupled surface and groundwater flows.” *Coastal Engineering*, 157:103665.
- EBRAHIMI, K., FALCONER, R. A., E LIN, B. (2007). “Flow and solute fluxes in integrated wetland and coastal systems.” *Environmental Modelling & Software*, 22(9):1337–1348.
- HAGERTHEY, S. E. E KERFOOT, W. C. (1998). “Groundwater flow influences the biomass and nutrient ratios of epibenthic algae in a north temperate seepage lake”. *Limnology and Oceanography*, 43(6):1227–1242.
- HODGES, B. R., IMBERGER, J., SAGGIO, A., E WINTERS, K. B. (2000). “Modeling basin-scale internal waves in a stratified lake.” *Limnology and oceanography*, 45(7):1603–1620.
- KONG, J., XIN, P., SONG, Z.-Y., E LI, L. (2010). “A new model for coupling surface and subsurface water flows: with an application to a lagoon.” *Journal of Hydrology*, 390(1- 2):116–120.
- LIANG, D., FALCONER, R. A., E LIN, B. (2007). “Coupling surface and subsurface flows in a depth averaged flood wave model”. *Journal of Hydrology*, 337(1-2):147–158.
- LOU, S., LIU, S.-G., MA, G., ZHONG, G.-H., E LI, B. (2018). “Fully integrated modeling of surface water and groundwater in coastal areas”. *Journal of Hydrodynamics*, 30(3):441–452.
- OLIVEIRA OMMEN, D. A., KIDMOSE, J., KARAN, S., FLINDT, M. R., ENGESGAARD, P., NILSSON, B., E ANDERSEN, F. Ø. (2012). “Importance of groundwater and macrophytes for the nutrient balance at oligotrophic lake hampen, Denmark”. *Ecohydrology*, 5(3):286–296.
- PANDAY, S. E HUYAKORN, P. S. (2004). “A fully coupled physically-based spatially-distributed model for evaluating surface/subsurface flow.” *Advances in water Resources*, 27(4):361– 382.
- ROSENBERRY, D. O., LEWANDOWSKI, J., MEINIKMANN, K., E NÜTZMANN, G. (2015). “Groundwater-the disregarded component in lake water and nutrient budgets. part I: effects of groundwater on hydrology.” *Hydrological Processes*, 29(13):2895–2921.
- SHAW, G. D., WHITE, E. S., E GAMMONS, C. H. (2013). “Characterizing groundwater–lake interactions and its impact on lake water quality”. *Journal of hydrology*, 492:69–78.



SPANOUDAKI, K., STAMOU, A. I., E NANOU-GIANNAROU, A. (2009). “*Development and verification of a 3-d integrated surface water–groundwater model*”. *Journal of Hydrology*, 375(3-4):410–427.

SHOKRI, N., MONTAZERI NAMIN, M., E FARHOUDI, J. (2018). “*An implicit 2d hydrodynamic numerical model for free surface–subsurface coupled flow problems*”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 87(7):343–357.

YUAN, B., YUAN, D., SUN, J., E TAO, J. (2012). “*A finite volume model for coupling surface and subsurface flows*”. *Procedia Engineering*, 31:62–67.

WEILL, S., MOUCHE, E., E PATIN, J. (2009). “*A generalized richards equation for surface/subsurface flow modelling*”. *Journal of Hydrology*, 366(1-4):9–20.

WU, R., CHEN, X., HAMMOND, G., BISHT, G., SONG, X., HUANG, M., NIU, G.-Y., E FERRE, T. (2021). “*Coupling surface flow with high-performance subsurface reactive flow and transport code pflotran*”. *Environmental Modelling & Software*, 137:104959.

ZHU, C. E SCHWARTZ, F. W. (2011). “*Hydrogeochemical processes and controls on water quality and water management*”. *Elements*, 7(3):169–174.