UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ATELIÊ DE MATEMÁTICA: UM ESPAÇO PARA DIÁLOGO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Leandro de Andrades Campos

Porto Alegre, Março de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ATELIÊ DE MATEMÁTICA: UM ESPAÇO PARA DIÁLOGO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Leandro de Andrades Campos

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva.

Porto Alegre, Março de 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ATELIÊ DE MATEMÁTICA: UM ESPAÇO PARA DIÁLOGO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Leandro de Andrades Campos

Dissertação aprovada em 21 de março de 2019.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Leandra Anversa Fioreze (PPGEMAT – FACED – UFRGS)

Prof.ª Dr.ª Marlusa Benedetti da Rosa (Colégio de Aplicação – UFRGS)

Prof. Dr. Vandoir Stormowski (PPGEMAT – IME – UFRGS)

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva (orientador, PPGEMAT – IME – UFRGS)

Dedico este trabalho à memória de amigos de infância que não sobreviveram à violência da periferia pra ver esse sonho se tornar realidade. Especialmente ao meu amado irmão Rafael.
"In Memorian".

As conquistas não pertencem aos melhores, mas aos que mais as perseguem.

Napoleão Bonaparte

Resumo

A presente pesquisa consiste no desenvolvimento de material didático a partir de estruturação teórica e metodológica, seguida de experimentação de uma sequência de atividades de caráter interdisciplinar. Tais atividades têm o propósito de observar a evolução no aprendizado dos estudantes de uma turma de nono ano da escola municipal de ensino fundamental General Osório que se situa na cidade de Canoas, no estado do Rio Grande do Sul. As referidas atividades constituíram-se na observação de experimentos físicos por parte dos estudantes, descrição dos mesmos, interpretação por meio de diálogo entre os pares, e resolução de problemas. Elas ocorreram por meio da execução metodológica de um ateliê de matemática partindo da hipótese de que a investigação por parte dos estudantes bem como a troca de ideias em contextos preferencialmente interdisciplinares pode proporcionar aos mesmos a construção de conceitos matemáticos, a generalização de tais conceitos, e a aplicação desses conceitos em problemas posteriores. Em outras palavras, a presente pesquisa teve como pergunta central a seguinte questão norteadora: "*Como ocorre a construção de conceitos matemáticos entre estudantes imersos em um cenário de investigação durante a realização de atividades interdisciplinares com a mediação do professor?".* Ou seja, analisar como os estudantes, a partir de diálogos entre os pares e comunicações sobre suas análises pessoais produzem e argumentam sobre matemática. A proposta tem como objetivos secundários observar como as atividades propostas contribuem para potencializar: motivação, autonomia na resolução de problemas, flexibilidade de pensamento, senso crítico, e criatividade na construção de soluções. Adotou-se como metodologia da pesquisa a denominada "*pesquisa-ação*" na qual o pesquisador orienta a mesma a partir dos dados coletados em campo utilizando esses dados para o aperfeiçoamento de práticas posteriores. Já para lançar luz às análises dos dados coletados durante as práticas, recorreram-se as teorias de aprendizagem de Piaget e Vygotsky. A partir disso, evidenciou-se que as atividades propostas mostraram-se em primeiro lugar motivadoras à ação de investigação dos estudantes. E a partir da prática de observação, descrição de uma realidade dada, e sua análise, os estudantes foram desenvolvendo a reversibilidade de pensamento. Por fim, como produto da pesquisa foi elaborado uma sequência de atividades interdisciplinares e um roteiro metodológico cujo propósito é servir de inspiração para outros professores utilizarem em suas aulas.

Palavras–chave: Cooperação. Interdisciplinaridade. Investigação Matemática.

Abstract

The present research consists of the development of didactic material from theoretical and methodological structuring, followed by experimentation of a sequence of interdisciplinary activities. These activities have the purpose of observing the evolution in the learning of the students of a ninth grade class of the general Osório municipal elementary school that is located in the city of Canoas, in the state of Rio Grande do Sul. observation of physical experiments by students, description of them, interpretation through peer dialogue, and problem solving. They occurred through the methodological execution of a mathematical atelier based on the hypothesis that the investigation by the students as well as the exchange of ideas in preferentially interdisciplinary contexts can provide them with the construction of mathematical concepts, the generalization of such concepts, and the application of these concepts in later problems. In other words, the present research had as a central question the following guiding question: "How does the construction of mathematical concepts between students immersed in a research scenario during the performance of interdisciplinary activities with the teacher's mediation take place?" That is, analyze how students, from peer dialogues and communications about their personal analyzes produce and argue about mathematics. The purpose of the proposal is to observe how the proposed activities contribute to enhance: motivation, autonomy in solving problems, flexibility of thinking, critical sense, and creativity in the construction of solutions. It was adopted as research methodology the so-called "action research" in which the researcher guides the same from the data collected in the field using this data for the improvement of later practices. In order to shed light on the analysis of the data collected during the practices, the theories of learning of Piaget and Vygotsky were used. From this, it was evidenced that the proposed activities were first and foremost motivating to the research action of the students. And from the practice of observation, description of a given reality, and its analysis, students were developing the reversibility of thought. Finally, as a research product, a sequence of interdisciplinary activities and a methodological script were developed, the purpose of which is to serve as inspiration for other teachers to use in their classrooms.

Keywords: Cooperation. Interdisciplinarity. Mathematical Research.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: A atividade do sujeito segundo Vygotsky..22

Figura 2: O conceito de aprendizagem no sistema piagetiano..36

Figura 3: Multidisciplinaridade de acordo com Japiassu...49

Figura 4: Pluridisciplinaridade de acordo com Japiassu..49

Figura 5: Interdisciplinaridade de acordo com Japiassu..50

Figura 6: Transdisciplinaridade de acordo com Japiassu...50

Figura 7: Ciclos sucessivos da Pesquisa Ação segundo Fiorentini..67

Figura 8: Mapa Mundi...72

Figura 9: Mapa Mundi com coordenadas geográficas...72

Figura 10: Resposta estudante B.M..73

Figura 11: Resposta estudante L.H...73

Figura 12: Pontos plotados no Plano Cartesiano..73

Figura 13: Coordenadas obtidas por B.M..74

Figura 14: Atividade – Preço pago para o envio de cartas em função do peso........................75

Figura 15: Resposta estudante: A.M...75

Figura 16: Resposta estudante E.C..75

Figura 17: Resposta estudante: A.M...77

Figura 18: Resposta estudante D.S..77

Figura 19: Resposta estudante D.S..77

Figura 20: Resposta estudante N.A..78

Figura 21: Resposta estudante A.G..78

Figura 22: Resposta estudante I.L..........78
Figura 23: Resposta estudante A.L. e M.S..........79
Figura 24: Resposta estudante D.S..........79
Figura 25: Gráficos relativos ao envio em função do peso – problema da figura 14..........80
Figura 26: Construção realizada pela estudante A.M..........81
Figura 27: Gráfico construído pela estudante M.S..........83
Figura 28: Impossibilidade do gráfico 3 representar a função referente ao problema 14..........83
Figura 29: Gráfico eleito como mais adequado para representar o problema da figura 14..........84
Figura 30: As taxas de emprego e desemprego dos meses do ano..........86
Figura 31: Resposta aluna C.D..........86
Figura 32: Resposta aluna S.B..........87
Figura 33: Resposta estudante C.D..........87
Figura 34: Resposta estudante M.P..........87
Figura 35: Resposta estudante B.M..........87
Figura 36: Resposta estudante A.L..........87
Figura 37: Resposta estudante B.M..........88
Figura 38: Experimento – crescimento da coluna d’água em função do tempo..........88
Figura 39: Gráfico construído por G.K..........90
Figura 40: Gráfico construído pelos estudantes B.D. e N.L..........91
Figura 41: Gráfico construído pelas estudantes N.A, M.P e B.M..........92
Figura 42: Tempos cronometrados pelos estudantes durante a prática..........92
Figura 43: Tempos cronometrado pelos estudantes..........93
Figura 44: Gráfico construído pela estudante A.M..........94

Figura 45: Gráfico construído pelo estudante M.L...96

Figura 46: Debates sobre o Gráfico construído por M.L..97

Figura 47: Gráfico descrevendo o experimento Coluna d’água em função do tempo.............98

Figura 48:Gráfico da velocidade da moeda em função do tempo – Construção de L.H.........99

Figura 49: Descrição de percurso realizado no pátio..100

Figura 50: Gráfico construído pela estudante N.O...100

Figura 51: Experimento – ponto móvel percorrendo líquido em tubo acrílico......................102

Figura 52: Gráfico construído pelos estudantes N.L e B.D..103

Figura 53: Tempo observado para um ponto móvel percorrer a distância de 10 cm.............104

Figura 54: Atividades propostas pelo professor de Ciências..108

Figura 55: Atividades propostas pelo professor de Ciências – quadro 2..............................108

Figura 56: Problema do Cone...109

Figura 57: Alternativas do problema do Cone..109

Figura 58: Dois móveis em uma trajetória..112

Figura 59: Projeção do problema da figura 58..113

Figura 60: Anotações na projeção da figura 59..114

Figura 61: Construindo a solução da figura 58...114

Figura 62: Continuação da construção da solução da figura 58..115

Figura 63: Projeção para debate em grupo..117

Figura 64: A posição em função do tempo (móvel A)..123

Figura 65: A função horária do móvel A...123

Figura 66: A posição em função do tempo (móvel B)..125

Figura 67: A função horária do móvel B...126

Figura 68: A temperatura em função do resíduo de planta e biomassa.................................128

Figura 69: Solução proposta pela estudante D.S..129

Figura 70: Solução proposta pela estudante D.S..130

Figura 71: Representação gráfica da fábula da lebre e da tartaruga......................................130

Figura 72: Solução proposta pelos estudantes: M.L. e G.K...131

Figura 73: Estratégia de solução para o problema da figura 71...132

Figura 74: Continuação da Estratégia de solução para o problema da figura 71...................132

Figura 75: Funções Custo e Receita...134

Figura 76: Solução do problema da figura 75 proposta pela estudante D.S..........................136

Figura 77: Enquete aquecimento global...137

Figura 78: Movimento de 2 veículos..138

Figura 79: Posição em função do tempo..140

Figura 80: Corrida de Fórmula 1...142

Figura 81: Posição em função do tempo 2..144

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Ambientes de aprendizagem segundo Skovsmose..44

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 13
2. REFERENCIAL TEÓRICO 18
2.1 Um olhar para Vygotsky e Piaget: aspectos cognitivos 18
2.2 Um Olhar Para a Interdisciplinaridade 41
3. REVISÃO DE LITERATURA 51
3.1. Trabalhos Correlatos Sobre o Ensino Interdisciplinar Entre Matemática e Física 51
3.2 As Diretrizes e Orientações nos Documentos Oficiais: o que diz a BNCC e os PCNS para o ensino fundamental? 57
4. METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO: APORTES TEÓRICOS 66
4.1 Contexto e Sujeitos da Pesquisa 68
4.2 Coleta de Dados 68
5. ANÁLISE DOS DADOS 70
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 147
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 155
8. APÊNDICES 158
APÊNDICE A – ATIVIDADES APLICADAS AOS ESTUDANTES 158
APÊNDICE B – ROTEIRO DE ATIVIDADES COMPLEMENTARES – UMA FORMA ALTERNATIVA DE DESENVOLVIMENTO DAS PRÁTICAS 179
APÊNDICE C – AUTORIZAÇÃO PELA SECRETARIA MUNICIPAL DE CANOAS PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA NA ESCOLA (SME) 194
APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO – ESCOLA 195
APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO – ALUNO 196

1. INTRODUÇÃO

O interesse pela presente pesquisa surgiu há cinco anos quando em uma aula de matemática, alunos “desesperados” pediram-me para que resolvesse exercícios relacionados aos movimentos de física (MRU), pois nos períodos seguintes teriam uma prova. Ao ditarem os exercícios, percebi que estes tinham relação direta com a matemática que estávamos estudando, funções do primeiro grau. Ou seja, uma aplicação direta da matemática.

Naquela ocasião, foi possível perceber que o fator que dificultava a compreensão dos estudantes era que o estudo dos movimentos estava sendo tratado apenas por meio de enunciados e equações da física. Porém, ao transferir para o plano cartesiano as informações ditadas por eles, esboçando as equações dos movimentos da física e comparando-as com aquelas estudadas nas aulas de matemática, pude perceber reações por parte dos estudantes, os quais pareciam demonstrar maior compreensão.

A partir daí, no espaço escolar em que atuo, passou-se a ter a disciplina de física como um campo de aplicação da matemática e também auxiliador na compreensão dos conceitos envolvidos. E ainda, começo a refletir sobre como a interdisciplinaridade pudesse contribuir na compreensão dos conteúdos abordados. Nesse sentido, Maia (2000 *apud* Almeida 2004, p.11), afirma ser necessário que se encontre uma contextualização dos problemas, pois é “uma estratégia para encontrar os elos que permitem ao aluno dar significado ao que está aprendendo, o que depende em grande parte da sensibilidade do professor”. Da mesma forma que Brasil (2013, p. 244) dispõe o seguinte:

> A organização curricular deve fundamentar-se em metodologia interdisciplinar, que rompa com a fragmentação do conhecimento e a segmentação presentes na organização disciplinar tradicionalmente adotada de forma linear. Esse tradicional modelo curricular foi criticado por Paulo Freire, na obra “Pedagogia do Oprimido”, como sendo “educação bancária”. Criticou como os conteúdos culturais que formavam o currículo escolar eram frequentemente descontextualizados, distante do mundo experiencial dos estudantes. As disciplinas escolares eram trabalhadas de forma isolada, não propiciavam a construção e a compreensão de nexos que permitissem sua estruturação com base na realidade. (BRASIL, 2013, p. 244)

Assim, o estudo da matemática com predomínio de ênfase a técnicas de cálculo descontextualizado, com frequência costuma não fazer sentido aos estudantes que acabam por esmorecer de estudá-la. Já que não conseguem perceber utilidade em seu cotidiano. Neste aspecto, durante a caminhada docente começo a elaborar os seguintes questionamentos: A disciplina de física pode contribuir para que o aluno compreenda os conteúdos de matemática e construa significado a partir do seu estudo? A disciplina de matemática pode contribuir na compreensão da disciplina de física? A disciplina de geografia pode contribuir na compreensão e na significação do estudo da disciplina de matemática? A disciplina de matemática pode contribuir na compreensão da disciplina de geografia?

Entendo que sim, que o ensino por meio de contextos interdisciplinares no qual o professor passa de "detentor do saber" ou aquele que mostra "como se faz" para mediador de uma prática de investigação por parte dos estudantes, possa contribuir em aspectos tais como: motivação, autonomia na resolução de problemas, flexibilidade de pensamento, senso crítico, formação sócio-política, aprendizagem a partir da cooperação em grupo, organização, e o próprio fazer dos estudantes durante as aulas. E aqui vale destacar os possíveis ganhos que trabalhos em grupos de estudantes podem surtir, já que, entende-se que aquilo que uma criança consegue realizar inicialmente apenas com a ajuda de um adulto ou alguém mais capaz, ela poderá realizar futuramente de forma independente. A essa distância entre tarefas que os estudantes conseguem realizar sozinhos e o que conseguem com a ajuda de um adulto ou colega mais capaz é caracterizada por Vygotsky (1994) como a zona de desenvolvimento proximal.

Também nesse sentido, a Base Nacional Curricular para o Ensino Fundamental (BRASIL 2018, p. 14-15) propõe que o ensino não seja fragmentado, mas que deva ser comprometido com a formação global dos estudantes como, por exemplo, intelectual, física, afetiva, social, moral e simbólica. Ou seja, o estudante deve não somente aprender conteúdos de matemática, português, geografia, português, história, ciências, arte, mas também deve ter condições de relacionar estes formando dessa forma uma consciência critica e ampliando a sua visão de mundo. Assim, sugere-se que os professores estabeleçam estratégias para:

> Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas. (BRASIL, 2018, p. 16)

Em contrapartida, o estudo descontextualizado da matemática na qual o professor apresenta a mesma como um produto pronto e acabado, e em que o estudante tem como único papel repetir procedimentos realizados pelo professor ou pelo livro didático, entende-se que possa desmotivá-lo. Sobre isso, Chagas (2004) comenta que:

> Avanços teóricos têm comprovado que a aprendizagem não se dá pelo treino mecânico descontextualizado, ou pela exposição exaustiva do professor. Pelo contrário, a aprendizagem dos conceitos ocorre pela interação dos alunos com o conhecimento. (CHAGAS, 2004, p.245)

Mas não somente isso, propor ao aluno que resolva listas de exercícios, nas quais, basta aplicar determinado algoritmo para tal, além de ser uma tarefa repetitiva e exaustiva também não produz conhecimento aos estudantes nem tampouco aos professores em relação ao potencial existente nos mesmos. Antes, é como se estudantes e professores estivessem andando em circulo sem saírem do lugar. Sobre isso, Vygotsky (1994, p. 116-117) afirma que:

> O aprendizado orientado para os níveis de desenvolvimento que já foram atingidos é ineficaz do ponto de vista do desenvolvimento global da criança. Ele não se dirige para um novo estágio do processo do desenvolvimento, mas ao invés disso, vai a reboque desse processo.

Em razão disso, e com base nas idéias de Vygotsky é possível afirmar que o "bom aprendizado" é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento já formado na criança e não aquele que se limita a meras repetições.

Além disso, as aulas predominantemente expositivas podem inibir a criatividade dos estudantes, haja vista que não é oportunizada a necessidade de pôr os conhecimentos produzidos e construídos em prática. A criatividade e modo de pensar dos estudantes são limitados ou praticamente excluídos do processo escolar, pois ao centrar-se numa metodologia que valoriza a repetição de algoritmos e técnicas compromete-se veementemente a aprendizagem.

Assim, o estudante não tem um papel ativo na construção do seu conhecimento, mas o de mero expectador no momento das aulas. Neste aspecto ao produzir e realizar toda e qualquer ação sobre o conhecimento, o professor exclui a possibilidade de o estudante desenvolver autonomia e liberdade sobre quais caminhos trilhar na construção de soluções e consequentemente do seu próprio conhecimento. Sobre isso, D'Ambrosio (1989) disserta:

> Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado, em nenhum momento, a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno, assim, passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante (D'AMBROSIO, 1989, p.16).

Quanto ao ensino com elementos de interdisciplinaridade entende-se que o mesmo privilegia aspectos importantes na formação dos estudantes, tais como:

- Dar maior significado ao estudo da matemática ensinada na escola básica, haja vista que por meio da prática interdisciplinar os estudantes podem perceber uma aplicação direta do que é visto na teoria;
- Proporcionar situações em que o estudante possa pôr em ação a sua criatividade na resolução de problemas;
- Desenvolver a autonomia e flexibilidade de pensamento na resolução de problemas;
- Contribuir para o aprendizado por meio da cooperação entre os estudantes, interatividade;
- Contribuir para a organização de dados e análise dos mesmos.
- Oportunizar aos estudantes a construção do seu próprio conhecimento por meio de investigação em cenários preferencialmente interdisciplinares.

Dessa forma, entende-se que as demais disciplinas podem apresentar-se como uma ferramenta auxiliadora na compreensão, construção, e na significação dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes. Assim, julga-se importante contextualizar os temas matemáticos com as demais disciplinas do currículo escolar, bem como situações do cotidiano dos aprendizes.

Com isso, a partir da valorização do diálogo e mediação pedagógica do professor de matemática, pretende-se lançar luz às cooperações mútuas observadas entre os sujeitos no cenário da sala de aula com foco na observação de construções matemáticas. Ou seja, a pesquisa tem como objetivo investigar o seguinte questionamento: *Como ocorre a construção de conceitos matemáticos entre estudantes imersos em um cenário de investigação durante a realização de atividades interdisciplinares com a mediação do professor?*

Em resumo, a proposta da pesquisa tem como objetivos gerais, propor espaços de investigação por meio de atividades interdisciplinares outras disciplinas (ou áreas do conhecimento), e refletir sobre a aprendizagem dos estudantes participantes. E como objetivos específicos, analisar o desenvolvimento da aprendizagem por meio da proposta de cenários investigativos, preferencialmente interdisciplinares, nos quais os estudantes são dispostos aos pares com o propósito de cooperarem entre si. E ainda, observar como a matemática inserida em atividades interdisciplinares pode contribuir na conscientização ambiental e sócio-política dos estudantes, ou seja, o desenvolvimento de uma matemática crítica. Ademais, observar também como propostas de caráter interdisciplinar podem contribuir para autonomia dos estudantes no tocante à resolução de situações-problema.

Dessa forma, entende-se que o ensino da Matemática não deva se limitar predominantemente apenas a polinizar técnicas de realização de cálculos matemáticos e execução de algoritmos, mas deve ser um ensino comprometido com as relações nos mais variados setores da sociedade. Ou seja, deve ser um ensino comprometido com o desenvolvimento do senso crítico dos estudantes, oportunizando que a capacidade de analisar e de tomar decisões em determinadas situações da sociedade atual e do seu cotidiano se faça presente na formação deles, desde a escola básica.

Dito isto, vale destacar a organização do texto da presente pesquisa que se constitui da seguinte maneira. No capítulo 2 dispõe-se a fundamentação teórica, a qual abrange aspectos cognitivos e psicológicos da construção da aprendizagem por meio de Piaget e da zona de desenvolvimento proximal trazida por Vygotsky, autores e teorias fundamentais para a análise da evolução da aprendizagem dos estudantes durante as atividades aqui propostas. Também nesse mesmo capítulo, na seção 2.2, tratamos de caracterizar o tema interdisciplinaridade.

Já na seção 2.3, realizou-se análises de literaturas/pesquisas anteriores que tratam do tema sobre o ensino de matemática por meio de ambientes interdisciplinares. E na seção 2.4 buscamos saber o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental sobre o tema em questão, a saber, a construção do conhecimento por meio da ação investigativa dos estudantes.

No capítulo 3 salientamos e justificamos quais motivos nos levou a adotar a pesquisa qualitativa como metodologia para o seu decorrer e também o contexto em que se encontravam os sujeitos da mesma. E também nesse mesmo capítulo descrevemos de que forma foi proposta aos estudantes a realização dos experimentos, a distribuição dos mesmos, bem como a nossa postura enquanto professor pesquisador. Aliás, por entender-se que a presente pesquisa se trata de um tipo de pesquisa participante denominada pesquisa-ação, procurou-se caracterizar essa modalidade de pesquisa neste capítulo.

No capítulo 4, apresentamos a análise dos dados obtidos durante as atividades propostas, a participação dos estudantes, suas posições, suas soluções, bem como as dificuldades encontradas pelos mesmos. E por fim, no capítulo 5 deixamos as nossas considerações finais sobre a pesquisa, nosssos erros e acertos, certezas e incertezas, enfim, aspectos do desenvolvimento das atividades durante a pesquisa que consideramos ter contribuído para a construção do conhecimento dos estudantes.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir, trazemos reflexões sobre as teorias de Vygotsky e Piaget as quais serviram de base para realização da análise do desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes durante as atividades práticas. Também trazemos a caracterização e reflexões sobre o trabalho interdisciplinar em sala de aula, acompanhado de pesquisa de trabalhos já produzidos sobre o tema da interdisciplinaridade. Por fim, apresentam-se as recomendações sobre o ensino de matemática nos documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental.

2.1 Um olhar para Vygotsky e Piaget: aspectos cognitivos

Durante as aulas de matemática, a partir da nossa vivência enquanto professor de matemática observa-se os estudantes acompanhando e contribuindo com propriedade no desenvolvimento de raciocínios expostos à classe no quadro negro. De maneira que é possível perceber que eles estão compreendendo o tema em questão e, de certa forma, mostrando-se conhecedores do mesmo. Porém, ao serem propostas situações-problema individualmente sobre o mesmo tema desenvolvido em aula, tais estudantes manifestam fracasso diante do exercício pessoal.

A partir do fato acima citado, enquanto docente, passamos a refletir que para fins de avaliação destes alunos, entendeu-se ser pertinente dar mais importância a essa participação em aula, haja vista a demonstração de domínio em relação aos temas estudados durante as aulas. Assim, passa-se a questionar sobre essa discrepância entre o desempenho individual e o desempenho quando esses alunos estão inseridos em atividades de investigação coletiva e acompanhados de outros colegas ou por professores. Essa diferença de desempenho dos estudantes quando situados nessas diferentes situações, ou seja, quando intentam solucionar um problema qualquer sozinhos e quando estão trabalhando em grupo, é retratada por Vygotsky como a zona de desenvolvimento proximal (ZDP). De acordo com Vygotsky (1994, p. 112), a zona de desenvolvimento proximal é caracterizada como sendo:

> A distância que medeia entre o nível atual de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas

> sob orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.

A partir do trecho exposto, é possível afirmar que o ensino da matemática proposto por meio de situações-problema, na qual, estudantes e professores cooperam com o intuito de pensar em possíveis soluções, pode contribuir para o desenvolvimento em diversos aspectos do estudante. Um dos principais aspectos que se acredita beneficiarem com tal prática é o desenvolvimento cognitivo. Ou seja, o desenvolvimento da capacidade de pensar, de compreender, e de resolver problemas, pode ser potencializado a partir da interação entre estudantes e professores, estudantes e seus colegas, e por fim, estudantes e alguém mais capacitado.

Porém, para se entender mais profundamente a teoria da zona de desenvolvimento proximal (ZDP), entende-se ser necessário destacar as concepções e correntes da relação existente entre desenvolvimento e aprendizado. Tais concepções e correntes, de acordo com Vygotsky (1994, p. 103-104), podem ser reduzidas a três grandes posições teóricas. A primeira delas afirma que:

> Os processos de desenvolvimento da criança são independentes do aprendizado. O aprendizado é considerado um processo puramente externo que não está envolvido ativamente no desenvolvimento. Ele simplesmente se utilizaria dos avanços do desenvolvimento ao invés de fornecer um impulso para modificar seu curso.

Tal posição entende que a criança só poderá aprender algo se já estiver com as funções mentais já amadurecidas para poder assimilar determinado conteúdo, sendo inútil qualquer esforço externo para tal intento. Dessa forma, o desenvolvimento ou a maturação é visto como um pré-requisito para o aprendizado.

Já a segunda posição, e que também faz relação entre o desenvolvimento e o aprendizado, afirma que o aprendizado é desenvolvimento. Ou seja, o “[...] o processo de aprendizado está completa e inseparavelmente misturado com o processo de desenvolvimento [...]" (VYGOTSKY, 1994, p. 105). E a terceira posição, constitui-se na combinação das duas primeiras já vistas, trazendo consigo novos aspectos e também dúvidas em relação à validade da mesma. Dentre esses aspectos, vale destacar o problema pedagógico que diz respeito à disciplina formal e o problema da transferência. Tal problema é descrito pelo psicólogo russo da seguinte maneira:

> Os movimentos pedagógicos que enfatizaram a disciplina formal e forçaram o ensino das línguas clássicas, das civilizações antigas e da matemática, assumiam que apesar da irrelevância desses assuntos específicos para a vida diária, eles eram de grande valor para o desenvolvimento mental do aluno. (VYGOTSKY, 1994, p. 106)

Em outras palavras, segundo esse conceito entendia-se que o ensino de latim poderia contribuir para o desenvolvimento em outras áreas como, por exemplo, o português, o inglês, a matemática, enfim, outras áreas do conhecimento. Assim, de acordo com tal teoria, se alguém consegue fazer bem alguma coisa, poderá realizar bem outra sem que elas tenham qualquer relação uma com a outra, por uma espécie de transferência. Porém, como já citado anteriormente, tal teoria é questionada, pois segundo Vigostky (1994, p. 108) o “[...] aprendizado não altera nossa capacidade global de focalizar a atenção; ao invés disso, no entanto, desenvolve várias capacidades de focalizar a atenção sobre várias coisas [...]”.

A discussão acima foi trazida com o propósito não somente de ilustrar posições teóricas que relacionam o aprendizado com o desenvolvimento, não necessariamente nessa ordem. Mas também, para que se possa entender melhor um dos aportes teóricos, pelo qual, deseja-se fundamentar a presente pesquisa. Haja vista, entender-se não fazer sentido refletir sobre a zona de desenvolvimento proximal proposta por Vygotsky, sem ter uma noção maior dos conceitos nos quais ela se apóia.

Assim, cabe dizer que embora as teorias descritas acima sejam refutadas na concepção de Lev Vygotsky, ele também considera que o aprendizado e o desenvolvimento estão inter-relacionados desde os primeiros dias de vida da criança. E uma vez que é do interesse deste trabalho o aprendizado escolar sistemático, o qual é combinado de acordo com o nível de desenvolvimento da criança ou sua idade, sempre que referir-se sobre o aprendizado, este será o escolar. Além disso, vale dizer que a combinação entre o aprendizado e o nível de desenvolvimento da criança, constitui-se, segundo Vygotsky (1994, p. 111), em um fato empiricamente estabelecido e bem conhecido.

Já para fazer a dita relação entre esses dois conceitos, o psicólogo russo divide-os em dois níveis, o primeiro é chamado de nível de desenvolvimento real, que segundo ele, é o “[...] nível de desenvolvimento das funções mentais da criança que se estabeleceram como resultado de certos ciclos de desenvolvimentos já completados [...]” (VYGOTSKY, 1994, p. 111). Esse nível é determinado através da capacidade de solucionar problemas de maneira independente pela criança, sem necessitar de ajuda alguma. E o segundo nível, é aquele em que a criança consegue resolver o problema, porém, necessita de uma ajuda de um adulto ou alguém mais capacitado. Sendo que a distância entre esses dois níveis caracteriza a zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

Os referidos estudos também foram chamados por Vygotsky e por seus seguidores como sendo estudos de psicologia “cultural”, “histórica” ou “instrumental”. Ou ainda de teoria histórico-cultural da atividade. Essa teoria, de acordo com Fino (2001, p. 2), descreve:

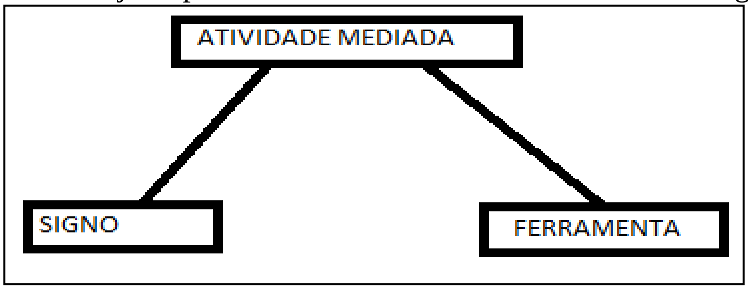
> [...] os processos através dos quais o conhecimento é construído como resultado da experiência pessoal e subjetiva de uma atividade. Considera que a atividade precede o conhecimento, que é mediada por signos culturais (linguagem, utensílios, tecnologias, meios de comunicação, convenções, etc.) [...]

Ou seja, o conhecimento é construído a partir da atividade dos estudantes em que são utilizados instrumentos os quais são construídos pelos próprios a partir de estímulos oferecidos ou por algum experimentador, ou pelo seu próprio ambiente natural. Tais instrumentos culturais que, segundo Vygotsky (1988, p. 26) não saíram da “cabeça de Deus”, mas foram inventados e aperfeiçoados pelo indivíduo ao longo da história social, são: a linguagem, a escrita e a aritmética. Também contornam a perspectiva teórica de Lev Vygotsky os seguintes temas que foram sendo desenvolvidos ao longo de seus escritos:

> a) o uso de um método genético ou de desenvolvimento; b) a afirmação de que as mais elevadas funções mentais do indivíduo emergem de processos sociais e psicológicos humanos que se formam através de ferramentas, ou artefatos culturais, que medeiam a interação entre indivíduos e entre estes e os seus envolvimentos físicos. (WERTSCH, 1993, p. 9-13, *apud* FINO, 2001, p. 2)

De acordo com o exposto acima, é possível afirmar que parte considerável do aprendizado dos estudantes e consequentemente do seu desenvolvimento provêm da interatividade entre estes com pares mais capazes, mas também com o objeto em estudo proposto por um experimentador, ou pelo próprio ambiente social em que estão inseridos. Dessa forma entende-se ser preciso avaliar e estudar o processo de aprendizado do individuo não apenas individualmente, mas em seu envolvimento social, pois segundo (Cole, 1985, p. 147-161, *apud* Fino, 2001, p. 3) o individual e o social são “[...] elementos mutuamente constitutivos de um único sistema interativo. E dentro desse sistema, o desenvolvimento cognitivo devia ser entendido como um processo de aquisição cultural [...]”. Processo esse que se dá fundamentalmente pela mediação entre o indivíduo e o seu ambiente (o mundo), e o indivíduo e o seu semelhante por meio de uma ferramenta ou um signo, representado pela figura a seguir:

Figura 1: A atividade do sujeito por intermédio de uma ferramenta e seus signos.



Fonte: Vygotsky (1994, p. 71)

Ainda de acordo com Vygotsky (1994, p. 111), nos "[...] estudos do desenvolvimento mental das crianças, geralmente admite-se que só é indicativo da capacidade mental das crianças aquilo que elas conseguem fazer por si mesmas [...]". Porém, para o psicólogo russo o nível mais indicativo do desenvolvimento mental das crianças, o qual foi ignorado durante muito tempo por psicólogos e educadores, não é o nível de desenvolvimento real, já que nesse estágio a criança já amadureceu as funções para a realização de tais e tais tarefas. E serviria apenas como uma constatação das capacidades mentais já consolidadas ou um nível de desenvolvimento atingido. Em relação a isso, Vygotsky disserta que:

> Por outro lado, se a criança resolve o problema depois de fornecermos pistas ou mostrarmos como o problema pode ser solucionado, ou se o professor inicia a solução e a criança a completa, ou, ainda, se ela resolve o problema em colaboração com outras crianças – em resumo, se por pouco a criança não é capaz de resolver o problema sozinho – a solução não é vista como um indicativo de seu desenvolvimento mental. Esta "verdade" pertencia ao senso comum e era por ele reforçada. Por mais de uma década, mesmo os pensadores mais sagazes nunca questionaram esse fato; nunca consideraram a noção de que aquilo que a criança consegue fazer com ajuda dos outros poderia ser, de alguma maneira, muito mais indicativo de seu desenvolvimento mental do que aquilo que consegue fazer sozinha. (VYGOTSKY, 1994, p. 111)

De maneira que, assim como ao psicólogo russo, é de interesse da presente pesquisa não somente aquelas funções e capacidades já consolidadas ou desenvolvidas, mas, deseja-se saber também qual o desenvolvimento e aprendizado que pode ser proporcionado aos estudantes, a partir daqueles problemas que eles não conseguem resolver sozinhos, mas por meio da cooperação entre eles. E aqui vale chamar a atenção para repetições extensas de exercícios em que os estudantes já demonstraram capacidade de resolvê-los sozinhos, e, simplesmente fazê-los resolver listas infindáveis de exercícios cujas habilidades já foram demonstradas não produzirá desenvolvimento, nem tampouco conhecimento para os educadores em relação ao desenvolvimento e aprendizado dos estudantes. Sem dizer é claro, da desmotivação que tais atividades podem provocar, uma vez que com frequência são desconexas de qualquer coisa, seja do cotidiano ou de outras áreas da ciência.

Em síntese, interessa-nos não somente o produto final do desenvolvimento ou de ciclos de maturação, pois como dito anteriormente, tal fato revela apenas um estágio que foi atingido pela criança, ou seja, dessa forma enxerga-se apenas retrospectivamente. Mas deseja-se também vislumbrar os estágios futuros do desenvolvimento dos estudantes ou, nas palavras do psicólogo, "enxergar prospectivamente". Tais estágios a que nos referimos são definidos por Vygotsky (1994, p. 113) como sendo "[...] aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário [...]".

Ademais, segundo ele, tais funções poderiam ser chamadas de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, ao invés de "frutos" do desenvolvimento, uma vez que são funções que estão ainda por serem consolidadas. Ou seja, por meio da (ZDP) é possível caracterizar o desenvolvimento da criança prospectivamente, o desenvolvimento ainda em maturação. Sobre isso, Lev Vygotsky disserta que:

> [...] provê psicólogos e educadores de um instrumento através do qual se pode entender o curso interno do desenvolvimento. Usando esse método podemos dar conta não somente dos ciclos e processos de maturação que já foram completados, como também daqueles processos que estão em estado de formação, ou seja, que estão apenas começando a amadurecer e a se desenvolver. Assim, a zona de desenvolvimento proximal permite-nos delinear o futuro imediato da criança e seu estado dinâmico de desenvolvimento, propiciando o acesso não somente ao que já foi atingido através do desenvolvimento, como também àquilo que está em processo de maturação [...]. (VYGOTSKY, 1994, p. 113)

Além disso, de acordo com Fino (2001, p. 3), para Vygotsky o desenvolvimento cognitivo deve ser entendido como um processo de aquisição cultural e que esse processo se dá em um sistema interativo no qual o individual e o social fazem parte do mesmo. Ainda segundo o autor, "[...] todas as funções cognitivas aparecem duas vezes no desenvolvimento cultural da criança: primeiro, no nível social e, mais tarde, no nível individual: primeiro entre pessoas (interpsicologicamente), e depois dentro da criança (intrapsicologicamente) [...]". E por fim, Vygotsky (1994, p. 113) afirma que "[...] aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã [...]".

Piaget (1973, p. 17) concorda com a teoria de Vygotsky no tocante à importância do envolvimento social dos estudantes nas práticas escolares, haja vista que para ele o "[...] conhecimento humano é essencialmente coletivo e a vida social constitui um dos fatores essenciais da formação e do crescimento dos conhecimentos pré-científicos e científicos [...]". E vai além, ao afirmar que:

> "[...] assim como o desenvolvimento orgânico individual depende, por um lado, da transmissão hereditária, assim também o desenvolvimento mental individual é condicionado em parte (e além dos fatores de maturação orgânica e de formação mental *stricto sensu*) pelas transmissões sociais ou educativas [...]". (PIAGET, 1973, p. 27)

A partir disso, entende-se que a cooperação entre os estudantes quando estes se engajam na investigação de situações problema podem contribuir potencializando o processo de construção do conhecimento dos mesmos. E ainda, contribuir na formação da capacidade de trabalhar em equipe, e claro, na conscientização da solidariedade com colegas em dificuldade.

Ademais, de acordo com Piaget (1973, p. 18) é possível afirmar que por meio das interações entre os indivíduos – na sociologia humana – há transmissão cultural ou exterior, pela qual, é possível observar mudanças no comportamento de indivíduos de um mesmo grupo. Tais mudanças se dão por meio de interações exteriores (sociais ou educativas), e quando ocorrem, são constituídas "[...] por transmissões externas e interações que modificam o comportamento individual [...]". E que, requerem um método de análise dirigido ao "[...] conjunto do grupo considerado como sistema de interdependências construtivas, e não somente uma explicação biológica das estruturas orgânicas ou instintivas [...]". A partir disso, vale dizer novamente sobre a importância da troca de saberes por meio do diálogo entre os pares de estudantes, e entre estudantes e professor. E ainda, chamar a atenção para o fato de que, por vezes, em sala de aula os estudantes aprendem muito mais com os seus pares do que com o professor, propriamente dito.

Outro sim, ressalta-se não somente a importância da postura do professor em sala de aula, mas também a necessidade de se estabelecer ambientes investigativos para os estudantes, uma vez que para Piaget (1973, p. 27) o "[...] desenvolvimento individual é em parte condicionado pelo meio social [...]" em que o indivíduo está inserido. Por exemplo, se o professor frequentemente expõe um problema e em seguida mostra como se faz dando o resultado de tal problema à turma, é bem provável que a mesma espere sempre do professor a mesma atitude.

Em outras palavras, o meio (aula) pode ajudar a acelerar o desenvolvimento intelectual dos estudantes, ou pelo contrario, pode inibir esse desenvolvimento. Entende-se dessa forma que para que o estudante possa pôr em ação as suas potencialidades mentais, intelectuais e criativas, é necessário que sejam geradas situações em que o mesmo necessite pôr em prática a sua maneira de pensar. Em relação a esse aceleramento ou inibição do desenvolvimento individual do indivíduo, Piaget (1973, 28-29) disserta que:

> Se a transmissão social acelera o desenvolvimento mental individual, é porque entre uma maturação orgânica que fornece potencialidades mentais, mas sem estruturação psicológica feita, e uma transmissão social que fornece os elementos e o modelo de uma construção possível, mas sem impor esta última num bloco acabado, há uma construção operatória que traduz em estruturas mentais as potencialidades oferecidas pelo sistema nervoso; mas ela só efetua esta tradução em função de interações entre indivíduos e, por conseguinte sob a influência aceleradora ou inibidora dos diferentes modos reais destas interações sociais. Assim, o biológico invariante (enquanto hereditário) se prolonga simultaneamente em mental e em social, e é a interdependência desses dois últimos fatores que pode explicar as acelerações ou os atrasos do desenvolvimento segundo os diversos meios coletivos. (PIAGET, 1973, p. 28-29)

A partir do trecho acima é possível inferir que, de acordo com o ensino proposto, o aprendizado e o desenvolvimento da criança podem ser prejudicados ou potencializados. Dessa forma, entende-se que a falta de interação social entre os estudantes por meio do diálogo e troca de ideias, pode inibir o desenvolvimento do aprendizado.

Um exemplo disso é aquele modelo de ensino em que pais ou responsáveis, de maneira equivocada e acreditando estar protegendo as suas crianças, manifestou em reportagens televisivas preferência pelo ensino em suas próprias residências. Naturalmente que esse modelo de ensino, a nosso ver, é prejudicial, pois impede a troca de idéias entre os estudantes, inibindo dessa forma o processo de aprendizado e desenvolvimento dos mesmos.

Também contrário a esse modelo, Vygotsky (1994, p. 115) afirma que o “[...] aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daquelas que as cercam [...]”. E ainda, afirma que alguns processos de desenvolvimento estão condicionados à interação social das crianças, conforme trecho a seguir:

> O aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. Uma vez internalizados, esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança.
>
> Desse ponto de vista, aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas. (VYGOSTKY, 1994, p. 117-118)

Além disso, entende-se que o processo de construção e uso de saberes pelos estudantes por meio de uma situação-problema em que eles reúnem-se com o propósito de debater sobre o mesmo, possa contribuir tanto para a autonomia em resolvê-los como no desenvolvimento da criatividade. Sendo assim, a proposta de ensino pretendida por meio das atividades de investigação dos estudantes e dessa pesquisa, é a de que não seja um ensino predominantemente diretivo, mas investigativo, no qual os estudantes têm um papel ativo na obtenção de soluções e vão construindo as mesmas coletivamente por meio da cooperação.

Desse modo, vale chamar a atenção para a importância que a atividade dos estudantes representa em relação a alguns aspectos na formação lógica dos mesmos, quando esses se envolvem ativamente na busca por soluções durante a aula de matemática. Piaget (1973, p.95) cita que as “operações lógicas” procedem dessa ação, mas não somente isso, também é categórico ao dizer que a “[...] passagem da ação irreversível às operações reversíveis se acompanha necessariamente de uma socialização das ações, procedendo ela mesma do egocentrismo à cooperação [...]”.

Ou seja, é possível detectar aspectos do pensamento reversível nos estudantes quando estes se envolvem ativamente nos processos de construção de soluções dos problemas dados, ou dos conceitos matemáticos ao conseguirem também explicar como chegaram a tais soluções. Não é mais apenas a aplicação de um determinado algoritmo, mas uma construção lógica por parte destes. Analogamente, o estudante passa de uma ação irreversível para uma ação reversível quando este consegue não apenas sair de um ponto A ao B de um determinado problema, mas também consegue voltar de B para A, enfim, voltar ao seu estado primeiro. O que Lima (1976, p. 18) define da seguinte maneira:

> A reversibilidade, “capacidade de executar uma mesma ação nos dois sentidos de percurso, mas tendo consciência de que se trata da mesma ação”, se inicia. O pensamento capta não apenas as realidades físicas aparentes, mas também as suas transformações. A realidade é vista como um todo permanente, apesar das mudanças que afetam a percepção. (LIMA, 1976, p. 18)

Dito isso, vale dizer que quando são feitas referências em relação a operações concretas ou a ação por parte dos estudantes, não se quer dizer que professores devem trabalhar em sala de aula apenas situações concretas em detrimento de atividades que privilegiem o desenvolvimento do pensamento formal dos estudantes (educação intelectual). Pelo contrário, entende-se que as atividades concretas podem servir como um “trampolim” ao desenvolvimento do pensamento formal. Ademais, é sabido que parte do trabalho dos matemáticos e cientistas constitui-se em investigar pequenos valores em casos particulares, nos quais, se procura perceber padrões por meio de testes em pequenas sequências, para em seguida, generalizar para um número muito grande, quiçá, infinito de dados – efeito dominó e indução matemática, por exemplo.

Senão, como trabalharíamos com a noção do infinito? É possível, por acaso, trabalhar concretamente com dados infinitos? De acordo com Castro (1974, p. 5) menosprezar a educação intelectual em proveito da prática quase conduziu a Escola Nova a uma crise intelectual, pois:

> A Escola Nova, não dispondo ainda dos instrumentos científicos que poderiam desde logo levar a uma interpretação coerente e global dessas diretrizes, sofreu muitas vezes distorções que quase conduziram a uma crise de educação intelectual. Alguns sintomas foram sentidos pelos educadores americanos, quando, diante do lançamento do primeiro *Sputnik* russo, examinaram com sinceridade as fraquezas de seu ensino científico. O desprezo da educação intelectual em proveito da prática, a falta de coerência e integração curricular, as opções prematuras dos educandos, foram alguns dos elementos apontados como pontos críticos do sistema. (CASTRO, 1974, p. 5)

Ainda de acordo com Castro (1974, p. 6):

> O impasse da Escola Nova, a nosso ver, encontrava-se precisamente na falta de uma teoria interpretativa da vida mental que pudesse levar-nos a compreender o mecanismo de passagem da ação prática à atividade mental superior, em termos da relação epistemológica fundamental entre o sujeito e o objeto, o homem e o meio, em cada momento da vida e no decorrer do desenvolvimento. (CASTRO, 1974, p. 6)

Com intuito de não cometer os mesmos equívocos da Escola Nova é que se optou por recorrer à solução piagetiana para orientar o desenvolvimento e investigação das práticas propostas aos estudantes. Haja vista que de acordo com Castro (1974, p. 6), o mesmo encara o problema da Escola Nova acentuando "[...] a interação entre sujeito e objeto no mecanismo do conhecimento, ao mesmo tempo colocando a aprendizagem em função do desenvolvimento, e não o contrário [...]". Além disso, Piaget não supervaloriza as práticas em detrimento das atividades mentais superiores (educação intelectual), e também não as subestima, mas realiza um trabalho intenso em que teoria e pratica se enriquecem mutuamente.

Assim, cabe ilustrar os dois mecanismos que, indissoluvelmente ligados, resultam no processo adaptativo do sujeito, e pelos quais, Piaget explica a vida mental e orgânica do individuo, a saber, a *assimilação* e a *acomodação*. Castro (1974, p. 6) nos ajuda a entender esses dois mecanismos da seguinte maneira:

> a) *Assimilação*: há um organismo que assimila o meio, um sujeito que busca o objeto do conhecimento (assim como existem órgãos que assimilam alimentos), tudo conforme as possibilidades da organização, ou seja, conforme a estrutura mental de que dispõe o sujeito, seus esquemas assimiladores em atividade.
> b) *Acomodação*: a atividade de assimilação leva a uma acomodação da própria estrutura, que se modifica em resultado daquela atividade, seja desenvolvendo novos esquemas, seja diferenciando-os uns aos outros. (CASTRO, 1974, p. 6)

Por meio da citação acima, é possível afirmar que o processo adaptativo que permeia o desenvolvimento mental do sujeito e consequentemente a sua aprendizagem, os quais são retratados por Piaget, está centrado na atividade do indivíduo. De forma que para ele não há assimilação do meio nem acomodação de novas estruturas mentais, se não houver uma busca efetiva por parte do sujeito em assimilar esse objeto.

Ou seja, o desenvolvimento e a aprendizagem em Piaget de maneira alguma ocorrem de maneira passiva, mas são desencadeados quando o sujeito é perturbado pelo objeto e busca a compensação de tais perturbações por sua própria aprendizagem. Ademais, Castro (1974, p. 7) destaca que o papel da interação ativa entre sujeito e objeto na concepção piagetiana é indispensável, pois explica que o sujeito só assimila "[...] porque busca ativamente assimilar e que há acomodação não por uma recepção passiva, mas por atividade que resulta em acomodação [...]".

Assim, cabe dizer que a atividade do indivíduo em relação ao objeto por meio da acomodação e assimilação e que resultam, segundo Castro (1974, p. 7), na elaboração de uma organização interna (estrutura mental) adaptando-o ao meio por auto-regulação, são múltiplas em suas manifestações. E também por isso se entende que não se deva adotar uma única metodologia de ensino, haja vista que:

> A partir de certo nível de desenvolvimento, diz Piaget, a mais autêntica atividade de investigação pode ser exercida por reflexão, abstração e manipulação verbal. O que não impede que as demais formas de atividade continuem sendo exercidas pelo indivíduo que já atingiu as formas superiores da vida mental. Sempre que nos faltam esquemas assimiladores adequados, ou não temos experiência suficiente acerca do objeto, recorremos à ação efetiva. É da realidade que retiramos, pela ação, os elementos, os dados para o exercício da atividade mental, mas também é da coordenação das ações exercidas que partimos para nova atividade mental. As construções mentais, as combinações internas de esquemas, que explicam as atividades mais criativas, da descoberta à invenção, derivam, pois, seja geneticamente das ações elementares, seja, atualmente, do desafio que a atuação sobre a realidade oferece à mente humana.
> Verificamos, pois, como Piaget resolve o impasse da Escola Nova diante do conceito de atividade. Resolveu-o integrando a atividade prática no desenvolvimento intelectual, numa continuidade hierárquica em que a primeira não se perde ao ser colocado sob a égide da outra, mais eficiente e avançada. Mas também refinando e aprofundando a noção de atividade vinculada inicialmente à ação efetiva, que se interioriza progressivamente e tem como órgãos mais aperfeiçoados de equilibração, as operações mentais. (CASTRO, 1974, p. 8)

Entretanto, um dos grandes desafios que educadores de todos os níveis e disciplinas enfrentam em sala de aula é exatamente o de motivar os estudantes à ação. Ora, não se sabe se determinada atividade (cenário investigativo) apresentada aos estudantes poderá levá-los a interagir com o objeto. Mas, segundo Castro (1974, p.10), para Piaget existem no indivíduo necessidades e interesses em compreender e explicar, os quais o energizam, o impulsionam para essa ação.

Assim, encontrar certa organização didática que se mostre ao estudante como um convite ao raciocínio, um desafio a sua capacidade de realizar descobertas, estando dentro das possibilidades dele de realização, deve ser um alvo a ser atingido pelos educadores de todas as disciplinas. Destarte, é importante dizer que faz parte da natureza do homem esse componente "energético", afetivos e também cognitivos que impulsionam o mesmo à ação, sendo que o despertar dessas forças dependem da "perturbação" que o objeto provoque. Ademais:

> Por outro lado, a regulação dessa energia, também recorre, para a organização das relações cognitivas entre sujeito e objeto, seja à vontade, que regula o impulso afetivo, seja à inteligência, que organiza as relações

> entre sujeito e objeto, por meio de seus órgãos próprios de regulação – os mecanismos operativos. Estes últimos proporcionam ao homem os meios de agir – as técnicas – e esclarecem seus objetivos. Como diz Piaget há sentimentos envolvidos na solução de um problema de matemática (interesses, valores, impressões de harmonia), e o próprio sentimento do amor, supõe a compreensão, e esta é de ordem intelectual.
>
> Mas tanto a energia que desencadeia a ação e orienta a conduta, quanto a estruturação da atividade, promovem, seja a adaptação às coisas (em que pode predominar a necessidade intelectual de compreender, explicar) seja a adaptação aos outros (em que podem predominar os sentimentos). Predomínio e não exclusividade. (CASTRO, 1974, p. 10)

A partir do exposto acima, entende-se que a motivação tão esperada por parte de professores e educadores é parte intrínseca do ser humano, haja vista que existe no indivíduo uma necessidade de "compreender e explicar" que são próprios do homem e que o levam a agir sobre o objeto (meio). Assim sendo, pode-se concluir que é característica da natureza humana a busca pelo equilíbrio superando assim as suas próprias dificuldades e as diversas etapas do desenvolvimento.

Contudo, é bom dizer que na perspectiva piagetiana (CASTRO, 1974, p. 11), "[...] motivar não significa a exploração dos interesses imediatos e atuais do educando, mas o suscitar de energias que, vinculadas às possibilidades operativas dos alunos em dado momento, promovam e desenvolvam atividades [...]". Ou seja, não é mostrando como se resolve um problema – o que os estudantes com frequência solicitam aos professores, que mostrem como se faz – que se estará motivando os mesmos. Pelo contrário, entende-se que oferecer meios para que eles trilhem seus próprios caminhos em busca das suas próprias soluções, seja a melhor maneira de motivá-los.

Ademais, pode-se dizer que mais importante que o sucesso da ação é a ação em si, a busca pela compreensão do objeto investigado. Ou ainda, melhor do que observar se os resultados atingidos por eles estão corretos é observar o caminho que os mesmos percorreram e que os fizeram chegar a tais e tais conclusões (resultados). Já dizia o neurocirurgião Miguel Nicolelis, quando se trilha um caminho em busca de algo "impossível", por mais que você não consiga atingir tal objetivo, o caminho trilhado certamente trará muitas contribuições para o seu desenvolvimento. De modo que não foi priorizado na coleta de dados as respostas finais dos exercícios realizados por eles, mas a sua maneira de pensar, de tentar construir a solução destes problemas, seja de maneira coletiva ou individual.

Também sobre a ação por parte dos aprendizes, Maria Montessori (AZEVEDO, 1979 *apud* FIORENTINI, 1990, p. 2) afirma que "[...] nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração [...]". Contrariando assim aquele ensino em que o papel dos estudantes limita-se a repetir o que foi exposto pelo professor ou pelo livro didático. Mas aí vem a pergunta, essa metodologia em que eles repetem a maneira de chegar a um resultado, conforme ensinado pelo professor ou pelo livro didático, não se constituiria na ação tão almejada pelos professores? Para o mestre de genebra não, antes, tal metodologia assemelha-se a uma "máquina de ensinar" possuindo assim um caráter mecânico, conforme trecho a seguir:

> Piaget considera que o sucesso da máquina de ensinar significa o reconhecimento do "caráter mecânico da função de mestre, tal como a concebe o ensino tradicional". E acrescenta: "se o ensino só tem por ideal fazer com que se repita corretamente o que foi corretamente exposto, é claro que a máquina preenche melhor esses requisitos". Admite o autor citado, que a programação possa ser utilizada para aspectos limitados de determinadas matérias. Seria assim o professor liberado para a promoção de tarefas operatórias, para o incentivo à autêntica atividade. (CASTRO, 1974, p. 13)

Ou seja, a ação a que Piaget se refere não se limita a uma repetição dos estudantes de um algoritmo ensinado pelo professor ou pelo livro didático, mas sim um processo de descoberta e redescoberta por parte destes em situações de investigação. Nesse sentido, vale trazer duas características de estratégia didáticas fundamentais para o mesmo, as quais são acentuadas por Castro (1974, p. 14), a saber, "[...] a investigação pessoal e autônoma do aluno e a cooperação promovida pela troca intelectual em trabalho de grupo [...]". Tal estratégia, segundo ela caracteriza-se por:

> Promover assimilação ativa de conteúdos, contribuindo concomitantemente para o desenvolvimento e robustecimento das estruturas mentais do aprendiz. Incluem manipulação efetiva ou mental do objeto do conhecimento, incentivam a mobilidade e reversibilidade do pensamento por meio de comparações, confrontos, relações; desafiam esquemas assimiladores por meio de situações-problema; promove a aptidão a descoberta, a criatividade do aluno. (CASTRO, 1974, p. 15)

Vale chamar a atenção mais uma vez para as características da estratégia piagetiana, pois como citado anteriormente, nelas estão envolvidas tanto a investigação pessoal e autônoma do estudante como a cooperação em trabalhos em grupo. E é nessa mesma cooperação em grupo, que os sujeitos envolvidos têm os seus pontos de vistas postos em "xeque", já que seus resultados só serão aceitos pelos demais componentes do grupo por meio de justificativas de sua forma de pensar (raciocínio). Por sua vez, a aceitação das posições dos colegas que, por vezes, confrontam as suas próprias posições referentes a determinados problemas é considerada por Piaget como a superação de uma das fases do chamado egocentrismo.

Assim, é na adolescência que umas das ultimas fases do egocentrismo do indivíduo deve ser superada, pois segundo Castro (1974, p. 15), para Piaget tal fase é marcante pelo fato de atribuir ao adolescente um caráter “messiânico” e reformista. Mais ainda, é nessa fase que o jovem procura “[...] não somente sua inserção no meio social, mas o ajustamento desse meio a si mesmo [...]”. Além disso, Castro (1974, p. 15-16) disserta que:

> O processo que conduz do egocentrismo à cooperação exige que o pensamento não mais permaneça centrado num só aspecto do problema que considera. Leva a um constante remanejamento de perspectivas. O egocentrismo sendo um estado de indiferenciação que ignora a multiplicidade de perspectivas opõe-se à objetividade que supõe, ao mesmo tempo, uma diferenciação e uma coordenação de pontos de vista.
>
> A vida social, por introduzir o “outro” e sua perspectiva, obriga o indivíduo a distinguir-se dele (fisicamente, representativamente, socialmente) e a um esforço de reformulação do conjunto “eu-e-outro”. Na conduta e no plano intelectual, é por meio de convívio no grupo que se desenvolve o “controle mútuo”, ou seja, a necessidade de justificar e verificar, objetivamente, ações e pensamentos. É assim que modalidades específicas de atuação grupal, como a discussão, a troca de ideias, a colaboração no jogo e no trabalho, tornam-se importantes para o desenvolvimento do pensamento. A lógica, diz Piaget, é a “moral do pensamento”, imposta e sancionada pelos outros (assim como, diz o psicólogo, “a moral é a lógica da ação”).
>
> O trabalho escolar em grupo, pois, assume, na perspectiva piagetiana, papel mais amplo que o usual. Não será somente um meio de adaptação do sujeito no plano da conduta e das relações humanas. Torna-se processo importante de desenvolvimento intelectual, pelo que apresenta de estímulo à reorganização cognitiva do indivíduo que deve a um tempo tornar objetivo e comunicável seu pensamento, assimilar o ponto de vista alheio e tudo coordenar numa perspectiva de conjunto. (CASTRO, 1974, p. 15-16)

Vale ilustrar alguns aspectos dessa última fase do egocentrismo do individuo e que ficam evidentes quando este é imerso em atividades de grupo, pois para cada afirmação/conclusão é necessário que se justifique o que o levou as mesmas. E é, segundo a perspectiva piagetiana, nessa fase que os estudantes devem com frequência reformular a sua maneira de pensar com a dos colegas de classe. Nesse sentido, vale acrescentar também a necessidade hodierna não somente dos adolescentes, mas de qualquer indivíduo de julgar as posições alheias.

Ora, no mundo globalizado em que se vive em que notícias falsas e verdadeiras são veiculadas em forma de "avalanche" nas redes sociais e outros meios de comunicação, torna-se importante que o indivíduo saiba distinguir o verdadeiro do falso, e não aceite "tudo" que lhe é oferecido. Nesse sentido, já dizia Piaget (Castro, 1974, p. 40) que "[...] um dos objetivos da educação é "formar mentes que possam ser críticas, possam verificar e não aceitar tudo que lhes é oferecido", desde que o grande perigo hoje é dos slogans, opiniões coletivas, tendências "compradas feitas", de pensamento [...]".

Dessa forma, o ensino por meio das práticas pretendeu proporcionar o desabrochar das seguintes capacidades: observação, reflexão, criação, discriminação de valores, julgamento, comunicação, convívio, cooperação, decisão e ação. E não um ensino centrado "apenas em conteúdos" que as ignore.

Mas como visto anteriormente, para que o indivíduo atinja determinados níveis de desenvolvimento e consiga experimentar o desabrochar das capacidades citadas, precisa percorrer diversos períodos de seu desenvolvimento, sobre os quais, deseja-se fazer uma breve descrição. Um desses períodos é chamado por Piaget de período operatório. Nele, o indivíduo deixa de apenas agir sobre a realidade, mas passa a operar de modo efetivo sobre a realidade, e dessa forma tem maior mobilidade sobre campos da realidade mais extensos e complexos (Castro, 1974, p. 43-44). Mas não somente isso, ele também passa a operar de maneira virtual sobre uma realidade não palpável, como por exemplo, o campo infinito de números. Segundo Castro (1974, p. 45):

> A operação é um tipo de comportamento adaptativo, funcional, ligado a outros semelhantes numa organização relativamente estável, mas é também um ato interno de coordenação, um ato de pensamento. Antes do período em que as constrói, entretanto, a criança é capaz de pensar, ou seja, de representar interiormente a realidade, de modo semi-simbólico, e não perfeitamente adaptado. É a mobilidade reversível desse pensamento, que o distingue, na fase operatória, ou melhor, são suas características lógicas.
>
> Não é o fato de "representar" simbolicamente a realidade, pois desta possibilidade a criança já dispunha, nem o de formar "imagens" mentais, que marca a nova etapa. O período operatório permite ao sujeito atingir à coerência do próprio pensamento, em si; possibilita distinguir a necessidade lógica do pensamento. Essa capacidade, concomitantemente, conduz o sujeito a uma nova visão do mundo e da realidade, o que, na verdade, traz uma dificuldade suplementar: pensar sobre os objetos, os acontecimentos, as transformações da realidade e dar-lhes também coerência. (CASTRO, 1974, p. 45)

Em outras palavras, o período operatório permite ao indivíduo formar teorias sobre determinado tema ou fenômeno observado, e, a partir de tal teorização, generalizar virtualmente para qualquer número, quantidade, enfim, qualquer situação desde que mantidas as condições iniciais. E isso constitui parte do trabalho dos matemáticos e cientistas, ou seja, saber se aquilo que vale para determinado valor em particular, vale também para qualquer outro valor do fenômeno observado. Em resumo, tal período permite ao sujeito desprender-se do concreto e ingressar em um processo de formulação de conhecimento intelectual o qual permite, segundo Castro (1974, p. 46), não apenas “[...] agir sobre os objetos, mas transformá-los em objetos de conhecimento; é o que revela sua plena reversibilidade, e libera o pensamento das injunções da realidade [...]”.

Assim, entende-se que as atividades devem privilegiar a ação dos estudantes bem como as discussões em grupo e assim, por meio de tais discussões, poderem teorizar sobre determinados aspectos de problemas dados. Tal proposta de ação aos estudantes, segundo Castro (1974, p. 49-50), constitui-se num dos princípios fundamentais da metodologia piagetiana, haja vista que segundo tal metodologia o “aprender agindo” futuramente se desdobrará em um “aprender pensando”. De acordo com ela:

> À criança deve ser dada a oportunidade de observar e de agir sobre os objetos. Ora, nessa fase agir é operar: transformar física e/ ou mentalmente o objeto, para ganhar experiência física e a experiência que Piaget chama “lógico-matemática”. Em que se diferenciam? No primeiro caso, ganha-se uma experiência que consiste em agir sobre os objetos e descobrir suas propriedades por abstração a partir dos próprios objetos. É quando, por exemplo, manipula-se um objeto para conhecer o seu peso, ou outras qualidades que oferece ao tato ou à vista. A experiência lógico-matemática, entretanto, vai além. Quando a ação sobre os objetos leva a uma conclusão que atinge as propriedades dessa mesma ação, ou seus resultados, trata-se de uma experiência mais aperfeiçoada. É o caso da criança que ao contar objetos, em sentido direto e inverso, descobre que o resultado não se altera. Nada foi abstraído diretamente dos objetos contados, mas sim uma propriedade da operação exercida foi descoberta, que provém de abstração realizada a partir da coordenação das próprias ações do sujeito, com parte preponderante de atividade interna. Esse tipo privilegiado de manipulação da realidade deve ser desenvolvido, como aquele que faz prolongar o “aprender fazendo” pelo “aprender pensando”. (CASTRO, 1974, p. 49-50)

Considerando a perspectiva Piagetiana em relação ao processo de conhecer do sujeito e que, segundo Castro (1974, p. 41), estão na “[...] dependência das estruturas mentais construídas ativamente pelo sujeito, pelo jogo recíproco das assimilações e acomodações que rege a adaptação entre homem e meio [...]”. Assim, de acordo com a autora citada, nesse período:

> [...] as ações do sujeito, efetivas ou interiorizadas, vêm a amalgamar-se numa estrutura de conjunto, dotada de novas propriedades. Entre estas destaca-se a reversibilidade que vem aperfeiçoar os mecanismos reguladores do período anterior. É possível, pois, à criança, ver sob nova luz os problemas de transformação e conservação, tendo consciência da totalidade do processo [...]. (CASTRO, 1974, p. 44)

De forma análoga, pode-se afirmar que quando o estudante dispõe do pensamento reversível ele consegue fazer relações em um dado problema como, por exemplo, as propriedades da transitividade matemática. De acordo com Castro (1974, p. 44):

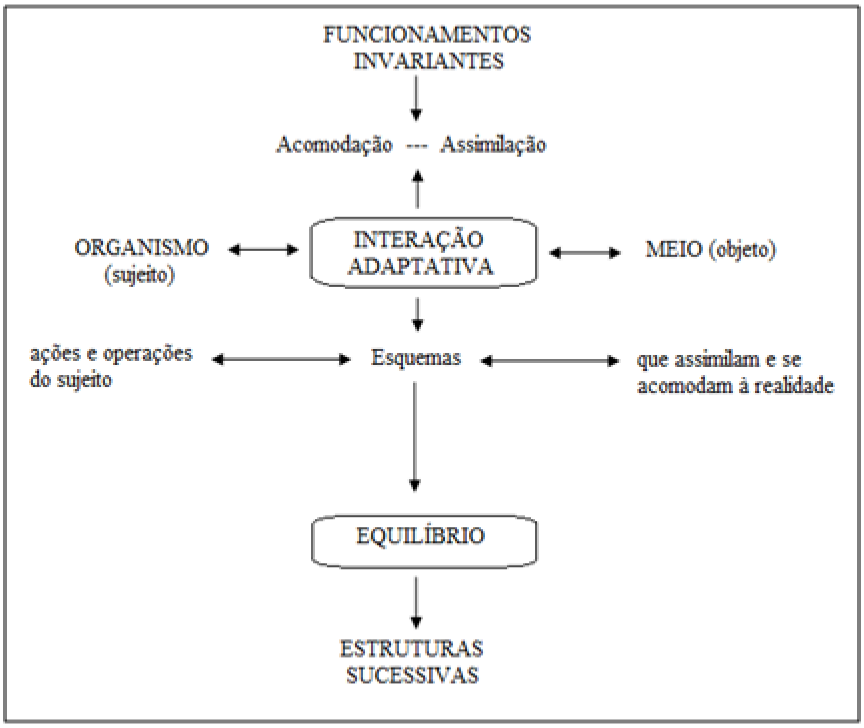
> Não se trata – e Piaget o acentua – de um poder totalmente novo, mas de um aperfeiçoamento das regulações anteriores, que atingem agora uma coordenação completa entre as centrações e descentrações "fundindo em um único ato, as antecipações e retroações", o que caracteriza a reversibilidade operatória. Duas propriedades solidárias aparecem agora nas estruturas desse nível: a transitividade que permite ao sujeito raciocínios do tipo: se $A < B$ e $B < C$, então $A < C$, ou, se A = B e B = C então A = C. (CASTRO, 1974, p. 44)

Por sua vez, Lima (1976, p. 23) ilustra a propriedade da reversibilidade operatória da seguinte maneira:

> No pensamento formal as deduções se libertam do real e do concreto e se colocam em pleno possível. Para admitir hipóteses, a criança precisa desistir do seu modo de ver, despir as suas convicções pessoais para entrar num ponto de vista diferente do seu e capacitar-se para admitir a relatividade dos fatos. Se Maria é mais clara que Adélia e mais escura que Teresa, precisará concluir que Teresa é a mais clara das três e Adélia, a mais escura. Se ela chega a tal conclusão, sem os modelos diante de si, mas apenas o apoio verbal, diz-se que o seu pensamento já atingiu o equilíbrio das operações abstratas. (LIMA, 1976, p. 23)

E como dito anteriormente, a construção do conhecimento proposto por Piaget não supervaloriza as atividades por meio de manipulação em material concreto (experimentos físicos) em detrimento das atividades mentais superiores (educação intelectual). Mas também não propõe um ensino por meio da transmissão do saber em que o papel dos estudantes limita-se a uma atividade "mecânica" de repetir a maneira de fazer do professor ou do livro didático. Antes, a aprendizagem dos mesmos é construída a partir da ação dos próprios estudantes, seja ela manipulação concreta, observação e descrição do real, continuando por meio da atividade mental superior do estudante. E, por fim, toda essa construção fica disponível ao indivíduo para ser aplicados em outras situações. A seguir, o conceito piagetiano de aprendizagem ilustrado por Castro (1976, p. 94).

Figura 2: O conceito de aprendizagem no sistema piagetiano.



Fonte: Castro (1976, p. 94)

A figura acima apresenta a evolução de cima para baixo do processo das relações entre o sujeito e o objeto e que conduz ao agrupamento das operações em um sistema de conjunto. Nesse processo de interação, Castro (1976, p. 88) afirma que "[...] as operações intelectuais, cuja forma superior é "lógico-matemática", iniciam-se da ação efetiva sob seu duplo aspecto de: uma produção própria ao sujeito e uma experiência sobre a realidade [...]". Assim, vale ilustrar o processo de interacionismo de Piaget que é trazido por intermédio do modelo explicativo da Adaptação e do Equilíbrio e que Castro (1976, p. 88) trata da seguinte maneira:

> Adaptação – Toda conduta, para Piaget, quer se trate de um ato exercido exteriormente, ou interiormente em pensamento, apresenta-se como uma adaptação ou readaptação. Esse termo, que se refere às relações entre o indivíduo e o meio, o sujeito e o objeto, é explicado por um duplo mecanismo: assimilação e acomodação. Quando o indivíduo atua sobre o meio e incorpora novos elementos às suas estruturas mentais, a partir de um equipamento original puramente orgânico ("montagens hereditárias"), está assimilando o meio às suas estruturas mentais. Do processo resultam alterações na própria organização mental do indivíduo, que modifica-se em decorrência do esforço assimilador, para proceder a novas assimilações. Esta é a fase de acomodação do ciclo adaptativo. (CASTRO, 1976, p. 88)

Dessa forma, no sistema de aprendizagem piagetiano só existe adaptação por meio da assimilação e acomodação. Estas por sua vez, só ocorrem quando o indivíduo esforça-se por assimilar este objeto, que pode ser exercida manualmente ou mentalmente, ou seja, a ação do estudante é fator primordial nesse processo. Porém, segundo Castro (1976, p. 89), "[...] assimilar não significa apenas agir, mas agir para incorporar os dados da experiência a esquemas de ações (e posteriormente de operações) [...]". Ainda, segundo Castro (1976, p. 89):

> Nesse esforço assimilador, é que o sujeito constrói os próprios esquemas de suas atividades, ou seja, "o conjunto estruturado das características generalizáveis de uma ação, os que permitem repeti-la ou aplicá-la a novas ações".
> O conceito de esquema está, pois, ligado à atividade de assimilação. Esta é que permite ao sujeito reconhecer certas atividades, reproduzi-las e generalizá-las, quando construídos os seus esquemas, pelo próprio funcionamento assimilador, geneticamente, pouco a pouco. (CASTRO, 1976, p. 89)

E assim como a assimilação, a acomodação constitui-se aspecto importante no ciclo adaptativo do sujeito e também para a compreensão das modificações dos esquemas assimiladores. Haja vista que, de acordo com Castro (1976, p. 89):

> Quando o esquema assimilador encontra resistências por parte do objeto, ou seja, quando o objeto resiste à integração num esquema prévio, a atividade do sujeito é mobilizada, modificando os esquemas, diferenciando-os ou integrando-os para formar novos esquemas que sejam convenientes à assimilação. A acomodação, pois, não é apenas entendida como uma pressão das coisas moldando o sujeito ao meio. A acomodação é ainda uma atividade do sujeito, que consiste em modificar um esquema, atividade, entretanto, que é derivada da primordial que é assimiladora. (CASTRO, 1976, p. 89)

E da mesma forma que a assimilação e a acomodação não são processos que ocorrem de forma passiva, mas a partir da ação do sujeito. Também o processo de adaptação na concepção piagetiana não é um ajustamento passivo do sujeito ao meio. Antes, de acordo com Castro (1976, p. 89), a adaptação é um processo pelo qual "[...] o indivíduo se transforma em função do meio e transforma o próprio meio à medida em que o assimila por suas ações e operações [...]".

Seguindo a evolução entre sujeito e objeto descrito pela figura 2 percebe-se que a tendência é que o indivíduo chegue ao equilíbrio por meio de suas ações adaptativas pela assimilação e acomodação, bem como pela formação de esquemas mentais. Conforme descrito por Castro (1976, p. 63) a seguir, essa é uma tendência inerente ao indivíduo.

> Uma propriedade intrínseca à vida orgânica e mental do homem é a atividade que lhe permite compensar as perturbações do meio, e mesmo, num determinado nível de seu desenvolvimento, prevê-las, e antecipar essa compensação. O equilíbrio ou auto-regulação, que é como Piaget denomina essa propriedade, completa, para o Psicólogo, a explicação do desenvolvimento em termos de interação entre o homem e o meio, a partir da atividade inerente à vida orgânica e mental.
> A ação efetiva, posteriormente interiorizada e tornada operatória quando, reversível, passa a constituir sistemas de conjunto, é o mecanismo funcional privilegiado dessa adaptação.
> A atividade inteligente, para Piaget, se confunde com o próprio mecanismo adaptativo, emergindo das formas iniciais vinculadas ao período sensório-motor e atingindo as formas superiores de organização.
> É o que leva Piaget a dizer que a inteligência é a forma de equilíbrio para a qual tendem todas as formas de adaptação, desde o desenvolvimento sensório-motor, cumprindo-lhes a função de estruturar o universo. Quando se torna reflexiva, gnóstica, verbal, destaca-se do contato imediato com a realidade, e passa a proceder por construção interior. (CASTRO, 1976, p. 63)

Dito isso, pode-se concluir que um ensino na concepção de Piaget e Vygotsky tem dois pilares, a saber, a atividade do sujeito ou a sua ação, e a questão social desse processo. Sabe-se também que não será a aula exclusivamente expositiva que proporcionará aos sujeitos tais condições, pelo contrário, ela costuma deixar os mesmos passivos e isolados. Nem tampouco se quer dizer que a atividade dos estudantes em certos níveis de desenvolvimento está necessariamente ligada à manipulação de objetos, até porque, segundo Castro (1976, p. 78), “[...] noutros níveis a atividade mais autêntica de pesquisa pode manifestar-se no plano da reflexão, da abstração mais avançada e de manipulações verbais [...]”.

Por isso, não menosprezamos nenhum modelo de aula, desde que haja espaço para a ação dos estudantes, em suas mais diversas maneiras. Vale salientar novamente o potencial que o transitar em diferentes ambientes educacionais trazem à construção da aprendizagem dos estudantes. No entanto, deseja-se reforçar por meio dessa pesquisa, o potencial para a aprendizagem que a interação social entre os envolvidos nesse processo possui. Uma vez que se entende que por meio desse processo de interacionismo entre o sujeito e o objeto de estudo, e entre os sujeitos, vá sendo construído e consolidado estruturalmente os conceitos matemáticos requeridos. Ou seja, nas palavras de Vygotsky (1978 *apud* Fino, 2001, p.4), “[...] um processo interpessoal transforma-se num processo intrapessoal, sendo a transformação do processo interpessoal em intrapessoal o resultado de uma longa série de eventos de desenvolvimento [...]”.

Diante disso emergem as seguintes questões: Como estimular a autonomia, a criatividade e o senso crítico dos estudantes? Ou, que tipo de atividade tem potencial para isso? E ainda, qual postura sugere-se que os professores adotem durante as atividades? Como dito anteriormente, entende-se não ser aquele o modelo de aula que segue a sequência unidirecional definição, exemplo e exercícios que oportunizará tal objetivo. Pelo contrário, tal modelo costuma determinar um lugar de expectadores aos estudantes cuja função se restringe a repetir procedimentos expostos pelo professor ou pelo livro didático. De acordo com D'Ambrósio (1989, p.16), nesse modelo de aula:

> [...] ao aluno não é dado, em nenhum momento, a oportunidade ou a necessidade de gerar nada, nem mesmo de criar uma solução mais interessante. O aluno, assim, passa a acreditar que o seu papel na aula de matemática é passivo e desinteressante [...]. (D'AMBRÓSIO, 1989, p.16)

Além disso, ao seguir o modelo de aula descrito pela tríade seqüencial definição/exemplo/exercício a qual se restringe à aplicação de algoritmos para a solução de problemas, os educadores correm o risco de estarem treinando os estudantes apenas para um sucesso temporário e raso, que ocorrerá apenas no âmbito da escola. De acordo com David e Lopes (1998, p. 40), o estudante preso a procedimentos, regras e algoritmos obtêm "[...] um sucesso em curto prazo; em longo prazo estão fadados ao fracasso [...]". E ainda, o ensino baseado com ênfase na aplicação de técnicas, procedimentos e algoritmos não relacionados aos conceitos matemáticos por trás deles costuma não fazer sentido para os estudantes.

Ademais, tal metodologia de ensino contribui para a formação de estudantes que não sabem o que fazer e nem como aplicar o conhecimento visto na escola básica em situações de seu cotidiano, gerando assim frustração e descontentamento em relação ao mesmo. Sem dizer que tal concepção pedagógica de ensino inibe a autonomia, a criatividade e a flexibilidade de pensamento nas resoluções de problemas. Logo, diante de um problema diferente – e aqui vale lembrar a impossibilidade de se abordar todos os exemplos e problemas existentes – esse estudante possivelmente fracassará.

Em contrapartida, o ensino que procura dar significado à matemática aprendida na escola, bem como aos procedimentos matemáticos e algoritmos, ou até mesmo construir tais algoritmos por meio dos conceitos que estão por trás dos mesmos, tende a preparar os estudantes a um sucesso em longo prazo. Ou seja, preparar os estudantes não somente para terem sucesso nas avaliações escolares, mas em quaisquer situações-problema que os mesmos encontrem, independente de sua natureza. Nesse sentido, David e Lopes (1998, p. 31) afirmam que o "[...] aluno de sucesso em longo prazo passou a ser identificado como aquele que apresenta um pensamento flexível, que lhe permite alcançar uma compreensão mais global e significativa dos conceitos [...]".

A seguir, listam-se habilidades que, segundo as autoras, são características de estudantes que apresentam autonomia e pensamento flexível:

> Habilidades de planejar, monitorar, avaliar, fazer perguntas relevantes, refletir, explicar, levantar hipóteses e testá-las, justificar e provar, visualizar conexões entre diferentes linhas de pensamento, distinguir entre considerações relevantes e irrelevantes, avaliar linhas de ações conflitantes, pensarem analogicamente, detectar falácias num pensamento, ser capaz de apresentar justificativas/razões para as posições assumidas e as decisões tomadas, generalizar a partir de casos particulares, tirarem conseqüências do que é dito e feito, inferir, etc. (COLES, 1993; TANNER e JONES, 1995 *apud* DAVID e LOPES, 1998, p. 37)

No entanto, entende-se que para que se chegue nesses resultados é necessário que professores assumam uma postura de mediador entre os alunos e o objeto de estudo. Ou seja, o professor não é mais o detentor do saber, que apresenta ao estudante como se resolve, mas aquele que procura instigá-los com o intuito de fazê-los pensar no problema dado. Dessa forma, sugere-se que professores adotem uma postura que incentive o desenvolvimento da habilidade de resolução de problemas em seus alunos. Sobre isso, David e Lopes (1998, p. 31) afirmam que "[...] quando os professores fazem uso de formas de pensamento flexível, mesmo que de forma não deliberada, eles podem estar contribuindo para que alguns alunos busquem um sentido para o uso de fórmulas e conceitos matemáticos [...]" e, procedendo dessa maneira, estarão contribuindo para o sucesso em longo prazo de seus alunos.

Assim, entende-se necessário que o ensino de matemática, preferencialmente, envolva a investigação de situações-problema, nos quais o estudante tenha que por em prática a sua criatividade, a sua maneira de pensar. Caso contrário, os estudantes estarão apenas repetindo o que o professor fez ou os exemplos do livro didático. O que, para Mandarino (2004, p.7), não significa resolver problemas, haja vista que para ele "[...] resolver problemas não é apenas aplicar uma fórmula tal para encontrar um resultado. Não é simplesmente memorizar e resolver um algoritmo, sem que se saiba muito bem por que e para que [...]".

Nesse sentido, Piaget (1973, p. 26) também reforça que antes de chegar à fase de construção de operações lógicas e numéricas, noções sobre espaço e tempo, de velocidade, etc., etc., a criança tem a "[...] necessidade, apesar das coações sociais de todas as espécies que lhe impõem estas noções ao estado acabado e comunicável, de repassar por todas as etapas de uma reconstrução intuitiva [...]" e, somente após isso, a fase operatória. Ou seja, ao invés de receber as noções prontas, seja-lhe, apresentada situações por meio de representações ambientais e sociais, enfim, elementos que contribuam para a assimilação por parte da criança. Em outras palavras, entende-se que ocorre o desenvolvimento da capacidade de pensar e por sua vez de resolver problemas de forma autônoma, quando o estudante reconstrói a situação dada, reorganiza os dados do mesmo, e sem a coação do livro didático ou do professor, resolve-o à sua maneira. Sobre isso, Piaget (1973, p. 21) afirma que:

> Porque, se a escola inculca na criança o conteúdo das representações coletivas segundo certo programa cronológico, a linguagem e os modos usuais de raciocínio lhe são impostos em bloco pelo meio que a cerca: se ela escolha em cada estágio certos elementos e os assimila em certa ordem na sua mentalidade, é porque a criança já não sofre mais passivamente a coação da "vida social" que da "realidade física" consideradas em sua totalidade, mas opera uma segregação ativa no que lhe é oferecido e reconstrói à sua maneira, assimilando-o. (PIAGET, 1973, p. 21)

Por fim, vale considerar os entraves que a obrigação de professores em "inculcar conteúdos" nos estudantes segundo uma ordem cronológica imposta pelo sistema escolar de ensino contribui para um ensino de matemática descontextualizado em que estudantes desconhecem os motivos pelos quais precisam dos mesmos, e assim, costumam levantar questionamentos. De modo que, torna-se compreensível a pergunta que, com frequência estes expõem tanto nas aulas como nas redes sociais: "Em que parte da minha vida irei utilizar isso que estou aprendendo?". Assim, entende-se que a produção de significados à matemática ensinada em sala de aula aos estudantes, deva ser um objetivo a ser alcançado pelos educadores.

2.2 Um Olhar Para a Interdisciplinaridade

Desde a antiguidade o homem foi inquietado por diversos questionamentos que o levaram a pensar com intuito de buscar respostas sobre os mais diversos assuntos como, por exemplo, o surgimento do universo, o surgimento de sua própria espécie, o formato da terra, a distância entre os planetas. Enfim, perguntas que se tornaram clássicas até mesmo entre crianças, como quem surgiu primeiro, o ovo ou a galinha? Fazem parte da natureza humana, questionadora.

Ou seja, os questionamentos foram a motivação necessária que "empurrou" o homem em busca de respostas e, com elas, o avanço científico e tecnológico atual. Dessa forma, a curiosidade presente no indivíduo mostra-se como um aliado aos professores em sala de aula e também ao próprio indivíduo, com vistas à evolução do seu conhecimento e progresso. Como não poderia ser diferente, tal curiosidade bem como os questionamentos também são presentes em estudantes de ensino fundamental, em relação ao que está sendo ensinado e quais aplicações existem para tal. Entende-se dessa forma que os questionamentos, bem como a curiosidade dos estudantes podem ser fatores favoráveis ao processo de descobertas e de construção do conhecimento dos mesmos, mas também como um sintoma de como é vista aos olhos destes a metodologia de abordagem dos referidos conteúdos.

Dessa forma, os questionamentos destes estudantes em relação à utilidade de assuntos abordados no ambiente escolar e em sua vida fora da escola, devem ser considerados como uma característica pertencente à natureza curiosa e descobridora do homem. Caso contrário, analogamente falando, de que serve saber o funcionamento de cada equipamento de uma cozinha de última geração se não soubermos quais receitas gastronômicas fazer? Da mesma forma, torna-se compreensível que o estudante queira saber, dentre outras disciplinas, qual a aplicação do ensino de funções, álgebra, geometria e estatística na vida real.

Dessa forma, assim como o homem buscou, desde os primórdios de sua história, respostas para diversos enigmas do universo, também os estudantes procuram um sentido para o que estão estudando. De modo que, entende-se serem pertinentes tais questionamentos por parte deles, o qual deve ser tomado como um alerta para que o ensino não se torne naquilo que para Japiassu (1976, p. 14) é um sintoma “mórbido de regressão” da ciência, a saber:

> Quanto mais se desenvolvem as disciplinas do conhecimento, diversificando-se, mais elas perdem o contato com a realidade humana. Nesse sentido, podemos falar de uma alienação do humano, prisioneiro de um discurso tanto mais rigoroso quanto mais bem separado da realidade global, pronunciando-se num esplendido isolamento à ordem das realidades humanas. (JAPIASSU, 1976, p. 14)

Dito isto, entende-se ser necessário estabelecer estratégias de ensino, ou seja, criar situações-problema que motivem, envolvam, e agucem a curiosidade pela descoberta dos estudantes em seus processos de construção do conhecimento. Mais ainda, situações em que os estudantes sejam convidados a explorarem, refletirem, enfim, sejam responsáveis pelo próprio processo de aprendizado.

Nesse sentido, as estratégias pretendidas dizem respeito, de certa forma, com a formação científica dos estudantes por meio de atividades de caráter interdisciplinar e que valorizam os aspectos qualitativos de determinados fenômenos estudados e, após isso, introduzir as relações numéricas – geralmente representadas por leis determinadas por meio de equações. Tal estratégia de ensino justifica-se pela experiência descrita na introdução deste texto quando estudantes declararam ter dificuldades na disciplina de física, dificuldades essas que, a nosso ver, são oriundas da não valorização dos aspectos qualitativos na metodologia de ensino como, por exemplo, a observação e descrição gráfica de experimentos físicos. O que por vezes não ocorre, pelo contrário, a compreensão por parte dos estudantes e a resolução dos problemas dependem, quase que exclusivamente, da interpretação de enunciados e da utilização de equações. O que conforme a experiência citada na introdução deste texto (cap. 1), nem sempre é suficiente para a compreensão dos aprendizes.

Tais dificuldades, de acordo com Piaget (2011, p. 22) não significam que estes estudantes não tenham aptidões para dominarem esses conteúdos de física ou de matemática, mas que eles estão perfeitamente aptos a compreender os mesmos, desde que os ensinamentos lhes cheguem por outros "caminhos". De acordo com o autor citado:

> São as "lições" oferecidas que lhes escapam à compreensão, e não a matéria. É sobretudo possível – e nós o verificamos em diversos casos – que o insucesso escolar em tal ou tal ponto decorra de uma passagem demasiado rápida da estrutura qualitativa dos problemas (por simples raciocínios lógicos, mas sem a introdução imediata das relações numéricas e das leis métricas) para a esquematização quantitativa ou matemática (no sentido das equações já elaboradas) usada habitualmente pelo físico. Nesse particular, admitiríamos sem dúvida algumas aptidões diferenciais que opõem os espíritos estritamente dedutivos (a partir de determinada idade) aos experimentais e concretos; todavia, mesmo no campo da matemática, muitos dos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico).

Nesse sentido, o presente trabalho propõe-se a valorizar os aspectos qualitativos reservando mais tempo a estes, antes de introduzir equações ou leis que generalizam fenômenos observados nos mais diversos problemas existentes do cotidiano dos estudantes, ou nas demais disciplinas escolares. Além disso, pretende-se incentivar os chamados métodos ativos nos quais se estimula a atividade pesquisadora dos estudantes no intuito de que percebam certas regularidades em problemas dados e, a partir disso, chegarem as suas próprias conclusões (verdades). Segundo Piaget (2011, p. 23), os métodos ativos têm como característica conferir "[...] especial relevo à pesquisa espontânea da criança ou do adolescente e exigindo-se que toda verdade a ser adquirida seja reinventada pelo aluno, ou pelo menos reconstruída, e não simplesmente transmitida [...]".

Vale dizer ainda que, segundo o referido teórico (Piaget, 2011, p 24), o fato de incentivar a pesquisa espontânea dos estudantes não significa obviamente deixar os mesmos totalmente livres para fazerem o que quiserem. Pelo contrário, na verdade o que se deseja é que "[...] o professor deixe de ser apenas um conferencista e que passe a estimular a pesquisa e o esforço, em vez de se contentar com a transmissão de soluções já prontas [...]".

A essa pesquisa realizada por parte do estudante em determinados ambientes Skovsmose (2000, p. 1) dá o nome de cenários de investigação e, segundo ele, tal prática se diferenciam da educação matemática unidirecional, a qual é enquadrada no paradigma do exercício. Haja vista que o cenário para investigação é aquele no qual “[...] os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada [...]”.

Vale esclarecer que o paradigma do exercício, segundo Skovsmose (2000, p. 2), tem a ver com a aula de matemática cuja metodologia de trabalho do professor seja predominantemente unidirecional e conformada, na qual “[...] o livro didático representa as condições da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. [...]”. Tal fato, segundo ele, significa que “[...] a justificativa da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. [...]”. E também, que tal modelo de aula pressupõe que para cada problema tenha uma única resposta correta bem como uma única maneira de resolvê-los.

Contudo, é importante ressaltar que o entendimento da importância de apostar em novos caminhos para a educação matemática não significa abolir totalmente às práticas que professores realizaram até aqui. Antes, entende-se que o transitar por diversas metodologias de trabalho em sala de aula possa enriquecer a construção do conhecimento matemático dos estudantes. Esses ambientes são representados por Skovsmose (2000, p. 8) pela matriz a seguir:

Tabela 1: Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	**Cenário para Investigação**
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p. 8).

É importante mencionar a nossa consideração em relação aos diversos ambientes de aprendizagem, mas é do interesse dessa pesquisa lançar o olhar aos ambientes de aprendizagem descritos e entendidos por Skovsmose na tabela acima como cenários de investigação. Haja vista que esses cenários lançam aos estudantes um convite para exploração que, quando aceito, proporciona envolvimento no processo de construção de conceitos matemáticos, reflexão, descobertas, senso crítico. E ainda, considera-se que tais atividades possam proporcionar o desenvolvimento da Materacia, o que de acordo com Skovsmose (2000, p. 2), "[...] não se refere apenas as habilidades matemáticas, mas também a competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática [...]".

Assim, de acordo com Skovsmose (2000, p. 8-10), os ambientes (2), (4) e (6) são descritos como cenários de investigação diferindo apenas em relação às referências: matemática pura, semi-realidade e realidade. A título de exemplo, uma atividade na qual os estudantes tenham que explorá-la com o intuito de obter valores ou semelhanças entre figuras, pode representar o cenário (2). Já o cenário (4), referente à semi-realidade, como por exemplo, uma corrida de fórmula 1 em que não há carros, nem torcida, ou cheiro de pneus e combustível. Tal cenário é utilizado com frequência nas disciplinas de física e chamado de problemas idealizados. Já no cenário (6), os estudantes vão a campo investigar uma situação real, por exemplo, a incidência de chuvas em uma determinada região numa estação do ano.

Nesse sentido, por questões de viabilidade da realização de práticas educativas nesse sentido, entendemos que atividades interdisciplinares possam ser usadas com o objetivo de instaurar cenários investigativos em sala de aula. E ainda, entende-se que tais práticas devem ser levadas em conta no tocante a avaliação do aprendizado dos estudantes. Já que, é possível notar não somente a diferença entre desempenhos em atividades em grupo e atividades individuais, mas também o enriquecimento do contexto da aula que a participação de cada estudante oferece. Vale pontuar que as atividades propostas nesse trabalho têm o caráter de cenários de investigação cujas referências são, de acordo com Skovsmose (2000, p. 8), a semi-realidade e realidade.

Antes, porém, de abordar o tema interdisciplinaridade, vale ilustrar por meio de Japiassu (1976) o significado de disciplina ou disciplinaridade:

> Por conseguinte, o que podemos entender por disciplina e por disciplinaridade é essa progressiva exploração científica especializada numa certa área ou domínio homogêneo de estudo. Uma disciplina deverá, antes de tudo, estabelecer e definir suas fronteiras constituintes. Fronteiras estas que irão determinar seus objetivos materiais e formais, seus métodos e sistemas, seus conceitos e teorias. (JAPIASSU, 1976, p. 61)

Já a interdisciplinaridade para ele, significa falar de interação entre as disciplinas. E como definir o tema sobre a interdisciplinaridade ou as atividades interdisciplinares constitui-se uma tarefa sobremodo difícil, senão impossível, haja vista não haver uma definição única para o tema, o mesmo procura fazer uma aproximação ao afirmar que:

> Ademais, ela se afirma como uma *reflexão epistemológica* sobre a divisão do saber em disciplinas para extrair suas relações de interdependências e de conexões recíprocas. Portanto, numa primeira aproximação, a interdisciplinaridade se define e se elabora por uma crítica das fronteiras das disciplinas, de sua compartimentação, proporcionando uma grande esperança de renovação e de mudança no domínio da metodologia das ciências humanas. (JAPIASSU, 1976, p. 54)

Em outras palavras, a interdisciplinaridade é uma tentativa de superação do isolamento das disciplinas integrando-as, fazendo com que tenham interconexões, enfim, fazendo-as convergir. Também é possível dizer que ela é uma nova forma de compor um mesmo objeto de estudo, em toda a sua complexidade, sob diferentes olhares, diferentes aspectos. Nesse sentido, assim como os sábios da antiguidade cujos ensinamentos remetiam os seus aprendizes a um saber da totalidade, universal. Acredita-se que o ensino da matemática, da física, da geografia, dentre outros, devem também contribuir para que os estudantes tenham uma visão de totalidade de mundo, da complexidade da sociedade a que fazem parte, e não um saber alienante, desconexo das demais disciplinas e da vida real.

Ademais, de acordo com Japiassu (1976, p. 56), a metodologia de ensino por meio de atividades interdisciplinares além de ser um esforço por aproximar, comparar, relacionar e integrar conhecimentos, também tem como objetivos:

> - despertar entre os estudantes e os professores um interesse pessoal pela aplicação de sua própria disciplina a uma outra;
> - estabelecer um vínculo sempre mais estreito entre matérias estudadas;
> - abolir o trabalho maçante e por vezes “bitolante” que constitui a especialização em determinada disciplina;
> - reorganizar o saber;
> - estabelecer comunicações entre especialistas;
> - criar disciplinas e domínios novos de conhecimento, mais adaptados à realidade social;
> - aperfeiçoar e reciclar professores, reorientando-os, de sua formação especializada, a um estudo que vise à solução de problemas;
> - reconhecer o caráter comum de certos problemas estruturais, etc.

Não se deseja jamais menosprezar o ensino que cada professor realiza todos os dias nas diversas salas de aula espalhadas pelo Brasil por meio da sua especialidade (disciplina). E também entendemos que nos dias atuais seria quase impossível realizar todo o ensino escolar por meio das atividades que se está propondo neste trabalho, haja vista as dificuldades de infraestrutura, além da carência de professores atualmente no ensino público – quadros incompletos. Nem tampouco se afirma que o ensino interdisciplinar seja a metodologia por excelência, a única capaz de solucionar os problemas atuais da educação, mas reafirma-se o posicionamento em relação aos benefícios de transitar em diferentes ambientes de aprendizado.

Contudo, cabe dizer que a abordagem de problemas sociais por meio de uma única disciplina fornece elementos para constatações e possíveis soluções sob uma única ótica, conforme trecho a seguir:

> É bem verdade que cada disciplina, através de seu enfoque específico, não somente tem a pretensão de fornecer o real, mas fornece de fato. No entanto, trata-se de um real sempre “reduzido” ao ângulo de visão particular dos especialistas em questão. Cada um deles adota um ponto de vista que lhe é próprio para observar, representar e explicar sua realidade: uma dimensão do *humano*. Ora, não podemos esquecer-nos de que toda *visão monodisciplinar*, pela definição que ela nos fornece de seu fenômeno, pelas variáveis que retém, pela análise que escolhe e pelas conclusões a que chega, só pode atingir certo sentido parcial e limitado da realidade de que foi “destacada” sua realidade. Ademais, é inegável que a visão unidisciplinar fragmenta necessariamente o objeto e é levada a reduzi-lo à sua escala própria. (JAPIASSU, 1976, p. 66-67)

Dessa forma, entende-se que o tema escolhido para elaboração de cenários de investigação, e que surgiu no Brasil em meados da década de 70, deva ser debatido e alvo de pesquisas, haja vista entendermos ser um tema promissor à educação e que merece atenção especial. Em relação ao surgimento de tal metodologia de ensino (interdisciplinaridade), e os propósitos a que se dispôs, Fazenda (1994, p. 18-19) faz as seguintes considerações:

> Uma tentativa de elucidação e de classificação temática das propostas educacionais que começavam a aparecer na época, evidenciando-se, através do compromisso de alguns professores em certas universidades, que buscavam, a duras penas, *o rompimento a uma educação por migalhas.*
> Esse posicionamento nasceu como oposição a todo o conhecimento que privilegia o capitalismo epistemológico de certas ciências, como oposição à alienação da Academia às questões da cotidianidade, às organizações curriculares que evidenciavam a excessiva especialização e a toda e qualquer proposta de conhecimento que incitava o olhar do aluno a uma única, restrita e limitada direção, a uma patologia do saber. (FAZENDA, 1994, p. 18-19)

O trecho acima se mostra pertinente à proposta dessa pesquisa uma vez que alerta para o perigo que atividades que não “comungam” com outras áreas das ciências ou com situações do cotidiano dos estudantes ou da própria sociedade, representam para a alienação dos estudantes. Além disso, o trecho citado reafirma o potencial de aprendizado e de conscientização de questões sociais que as atividades interdisciplinares ou contextualizadas a problemas sociais possuem. Enfim, demonstra a importância das praticas interdisciplinares cujo eixo norteador é a intensa troca de saberes entre as diversas disciplinas do currículo.

Assim sendo, nessa relação com outras áreas do conhecimento, todas as envolvidas no processo influenciam-se mutuamente, e assim, acredita-se tornar-se não somente um fator facilitador aos estudantes na compreensão e desenvolvimento dos conteúdos abordados, mas também ajuda a dar sentido para o estudo de determinados conteúdos. Haja vista que, por vezes, a matemática desconexa de suas aplicações no contexto da sociedade ou em outras áreas da ciência costuma desmotivar os estudantes. Sem dizer é claro, que a prática de um ensino fragmentado em um mundo globalizado em que as pessoas interagem o tempo todo umas com as outras, dificilmente irá contribuir para que o estudante possa fazer conexões ou correlações entre as mais variadas situações ou problemas existentes em seu cotidiano e no mundo atual.

Assim, no intuito de entender um pouco mais sobre o tema exposto vale à pena recorrer à definição trazida por estudiosos em relação ao mesmo. De acordo com Japiassu (1976, p. 72), a interdisciplinaridade pode ser descrita da seguinte maneira:

> [...] A interdisciplinaridade, compõe-se por um grupo de disciplinas conexas e com objetivos comuns. Está em nível superior a disciplina, ou área que coordena e define finalidades. Ocorre intensa troca entre especialistas. O horizonte epistemológico deve ser o campo unitário do conhecimento, a negação e a suspensão das fronteiras disciplinares, a interação propriamente dita [...]. (JAPIASSU, 1976, p. 72)

Destarte, é possível afirmar que a interdisciplinaridade tem como uma de suas características oferecer aos estudantes a possibilidade de “enxergarem” um mesmo objeto de estudo sob diferentes formas. Ou ainda, é possível proporcionar a eles a oportunidade de comporem um determinado objeto de estudo em seus múltiplos aspectos, sejam eles, econômico, cultural, ecológico, político, sociológico, psicológico, entre outros. Esquematicamente, é possível representar as diferenças existentes entre a definição interdisciplinaridade e das demais modalidades “vizinhas” da mesma, que vem a ser: “disciplinaridade”, “multidisciplinaridade”, “pluridisciplinaridade” e “transdisciplinaridade”. Dessa forma, entende-se necessário lembrar o que significa o termo disciplinaridade ou disciplina, que de acordo com Japiassu (1976, p. 72):

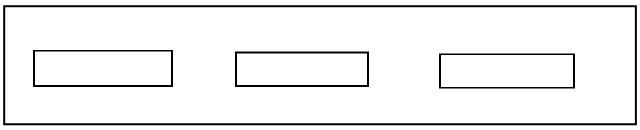
> Assim, para nós, “disciplina” tem o mesmo sentido de “ciência”. E disciplinaridade significa a exploração científica especializada de determinado domínio homogêneo de estudo, isto é, o conjunto sistemático e organizado de conhecimentos que apresentam características próprias nos

planos de ensino, da formação, dos métodos e das matérias. (JAPIASSU, 1976, p. 72)

E como dito anteriormente, o termo interdisciplinaridade não possui, segundo o referido autor, um sentido epistemológico único e estável, mas trata-se de um “[...] neologismo cuja significação nem sempre é a mesma e cujo papel nem sempre é compreendido da mesma forma [...]”. Dessa forma, propor a distinção entre as modalidades pode servir como uma aproximação ao termo cujas atividades serão desenvolvidas. A seguir, os referidos esquemas propostos por Japiassu (1976, p. 73-74) e seus respectivos significados.

Multidisciplinaridade: Gama de disciplinas que propomos simultaneamente, mas sem fazer aparecer as relações que podem existir entre elas. Nesse sistema de um só nível e de objetivos múltiplos; nenhuma cooperação.

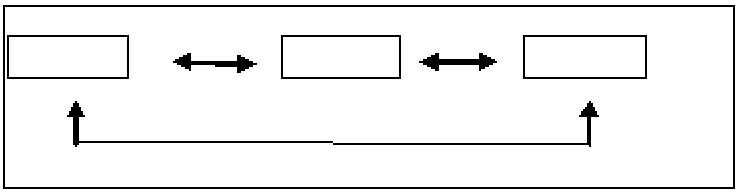
Figura 3: Multidisciplinaridade de acordo com Japiassu.



Fonte: Japiassu (1976, p. 73)

Pluridisciplinaridade: Justaposição de diversas disciplinas situadas geralmente no mesmo nível hierárquico e agrupadas de modo a fazer aparecer as relações existentes entre elas. Nesse sistema de um só nível e de objetivos múltiplos; cooperação, mas sem coordenação.

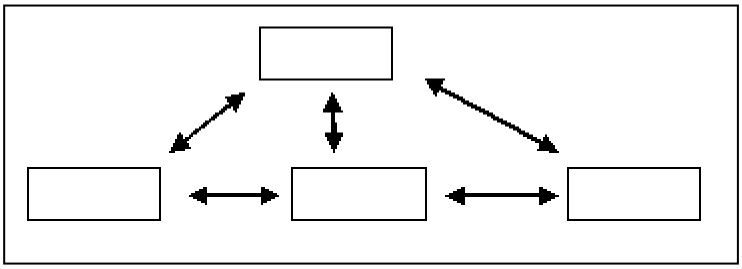
Figura 4: Pluridisciplinaridade de acordo com Japiassu.



Fonte: Japiassu (1976, p. 73)

Interdisciplinaridade: Axiomática comum a um grupo de disciplinas conexas e definida no nível hierárquico imediatamente superior, o que introduz a noção de finalidade. Nesse sistema de dois níveis e de objetos múltiplos; coordenação procedendo do nível superior.

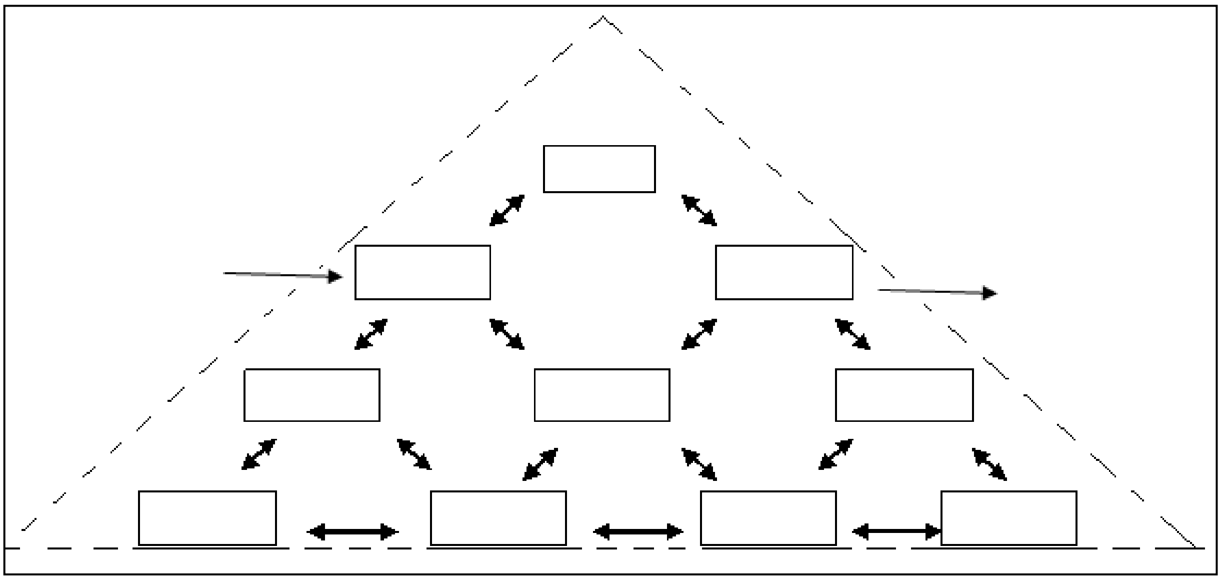
Figura 5: Interdisciplinaridade de acordo com Japiassu



Fonte: Japiassu (1976, p. 74)

Transdisciplinaridade: Coordenação de todas as disciplinas e interdisciplinas do sistema de ensino inovado, sobre a base de uma axiomática geral. Nesse sistema de níveis e objetivos multiplos; coordenação com vistas a uma finalidade comum dos sistemas.

Figura 6: Transdisciplinaridade de acordo com Japiassu



Fonte: Japiassu (1976, p. 74)

Assim, por meio das ideias de Vygotsky, entende-se que o processo de desenvolvimento dos estudantes se dá por meio da mediação de um parceiro mais capaz entre a criança e o objeto de estudo, e também que a interação entre as disciplinas é uma forma facilitadora para a construção do real. E a partir daí, poder fazer representações e generalizações simbólicas de diversos contextos sociais.

3. REVISÃO DE LITERATURA

Com o intuito de se entender o tema pesquisado, realizou-se um levantamento em outras pesquisas sobre o ensino interdisciplinar entre matemática e física, ou seja, os benefícios que tal proposta pode trazer aos estudantes na compreensão dessas duas disciplinas, as dificuldades apresentadas, como os estudantes constroem os conceitos matemáticos e físicos. Enfim, o que especialistas dizem em relação a estes aspectos do aprendizado dos estudantes. Além disso, é trazido à discussão o que dizem a Base Nacional Curricular e os Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao assunto abordado na presente pesquisa.

3.1. Trabalhos Correlatos Sobre o Ensino Interdisciplinar Entre Matemática e Física

Com frequência ouvem-se professores de física queixar-se que os estudantes apresentam dificuldades de aprendizado na disciplina que lecionam por razão dos estudantes não dominarem as operações matemáticas, as quais são pré-requisitos para o desenvolvimento do pensamento físico bem como o enunciado de suas leis e princípios. Porém, mais uma vez torna-se pertinente lembrar as palavras de estudantes que afirmam não saberem o que fazer com o ensino de matemática que tiveram na escola básica. Ou seja, entende-se que parte das dificuldades dos estudantes no ensino de física não sejam decorrentes de uma deficiência no ensino da matemática, mas sim, por não conseguirem estabelecer relações entre as duas disciplinas.

Tal ocorrência pode ter origem em um ensino da matemática que privilegia excessivamente a aplicação de algoritmos para resolução de problemas, sem que estes tenham qualquer conexão com situações do cotidiano ou outras disciplinas do currículo escolar. Dessa forma, não basta que os estudantes saibam operacionalizar equações, possuir conhecimentos em geometria, aritmética, álgebra e funções. Mas é necessário que saibam estabelecer conexões com outros conhecimentos científicos para que haja uma motivação maior em aprendê-los e também poderem realizar uma melhor leitura do mundo ao seu redor.

Nesse sentido, entende-se que o desenvolvimento de tais habilidades no estudante pode ser beneficiado por um ensino interdisciplinar entre essas duas disciplinas. De acordo com Pietrocola (2002, p. 89) a relação existente entre elas é sobremodo complexa e faz da matemática um estruturante do conhecimento físico, de modo que a primeira pode acarretar profundas implicações para o ensino da segunda. De acordo com ele:

> Na comparação entre estas culturas, a linguagem utilizada é também uma fonte de diferenciação importante, pois, ao contrário do que ocorre no cotidiano, a ciência, normalmente, vale-se da Matemática como forma de expressar seu pensamento. Seu emprego torna-se critério de cientificidade, na física, na medida em que a incapacidade de expressar propriedades de sistemas em linguagem matemática inviabiliza mesmo a possibilidade de admiti-las como hipóteses para o debate científico. (PIETROCOLA, 2002, p. 89-90)

A partir da citação acima, há de se concordar que sem conhecimentos matemáticos fazer física se torna uma tarefa sobremodo difícil, uma vez que ao abrir os livros de física percebe-se a dependência da utilização maciça da linguagem matemática com o fim de expressar resultados e discutir o conhecimento científico em todos os níveis de escolaridade. Para Pietrocola (2002, p. 90) não há dúvidas da necessidade de se ensinar matemática, pelo contrário, segundo ele:

> […] para fazermos Física, temos que conhecer Matemática. E, portanto, temos que ensiná-la! Porém, a questão colocada desta forma mascara o problema de saber como a Matemática deve ser ensinada e, portanto, aprendida no contexto da Física […]. (PIETROCOLA, 2002, p. 90)

Ou seja, não se tem dúvidas da importância do ensino de matemática como fator estruturante ao ensino de física. Mas como ensinar ela de tal maneira que os estudantes saibam como aplicá-las? E para que aplicá-las? E ainda, de acordo com o autor acima citado, outra barreira que os estudantes têm que ultrapassar é um ensino da matemática sem justificativa, o que acaba por desanimar os mesmos. E que, mostrar o papel da matemática no ensino da física pode ser um fator motivador para diminuir o desinteresse dos estudantes em um ensino que não se pode identificar pertinência. (PIETROCOLA, 2002, p. 91)

A partir do exposto, vale apontar dois questionamentos, o primeiro aos professores, como ensinar matemática de modo que os estudantes saibam utilizá-la para realização de leituras de mundo (ciências da natureza)? E o segundo para os estudantes, qual a pertinência do estudo da matemática? Uma das justificativas apresentadas pelo autor para a pertinência de tal estudo é a de que aprendemos a ver as leis físicas expressas em linguagem matemática. De acordo com Paty (1989 *apud* Pietrocola 2002, p. 93), para Galileu a "Matemática era concebida como um conhecimento que permitia uma leitura direta da natureza, da qual, precisamente, era a língua".

Assim sendo, para a realização dessas leituras é necessário que cientistas, professores e estudantes desenvolvam a habilidade de transitar entre as diferentes linguagens. Ou seja, a partir de observações da natureza possuir a habilidade de relatar por meio de expressões matemáticas determinados fenômenos. Além disso, de acordo com Pietrocola (2002, p. 95), tal habilidade faz referência à produção do método científico no qual é necessário que o indivíduo passe do qualitativo ao quantitativo e, para isso, seria preciso "[…] valer-se de técnicas especiais, estas presentes na observação, na experimentação e na descrição matemática precisa […]". Além disso, o autor expõe que:

> A minha experiência como professor de Física do Ensino Médio e universitário tem me mostrado que não basta ao aluno conhecer a Matemática no seu campo próprio de validade para obter um bom desempenho em Física. Isto é, não é suficiente conhecê-la enquanto "ferramenta" para poder utilizá-la como estruturante das idéias físicas sobre o mundo. Este fato parece exemplificar a conclusão extraída da análise epistemológica realizado anteriormente. Ao concebermos a apreensão do real como fruto de um processo de interação dialética entre abstrato e concreto, entre teórico e empírico, não há como evitar o tratamento da Matemática como elemento que participa, com sua especificidade própria, do contexto da construção do conhecimento. Assim, um dos atributos essenciais ao educador com relação a esta questão é perceber que *não se trata apenas de saber Matemática para poder operar as teorias Físicas que representam a realidade, mas de saber apreender teoricamente o real através de uma estruturação matemática.* (PIETROCOLA, 2002, p. 106)

É importante ressaltar a posição de Pietrocola ao considerar que trata-se de um equívoco a noção de que basta que os estudantes tenham uma boa base matemática para que compreendam conceitos de física e tenham êxito na mesma. Antes, é necessário que os estudantes consigam representar o real por meio das estruturas matemáticas, ou nas palavras dele, *"apreender teoricamente o real através de uma estruturação matemática"*. Nesse sentido, a matemática seria uma ferramenta do método empírico, pela qual, o cientista, o professor e o estudante, poderiam representar e conceituar fatos observados na natureza.

Ademais, ela serve não somente para representar situações concretas, mas também para se generalizar situações em que há inviabilidade de serem observadas concretamente, sendo possível apenas a partir de hipóteses. Vale chamar a atenção para o fato de que o aprendizado por meio de algumas observações é inviabilizado por depender de equipamentos sofisticados, dos quais a grande maioria das escolas não dispõe.

A partir disso, percebe-se como a disciplina de matemática está estreitamente ligada à disciplina de física. Porém, essa relação que deveria ser de contribuição e de parceria entre as disciplinas, por vezes, de acordo com o autor em estudo, torna-se um jogo de “empurra - empurra”. E sobre isso relata que:

> Na organização curricular do Ensino Médio, há uma estrutura de pré-requisitos que faz com que os conteúdos presentes numa disciplina articulem-se com aqueles presentes em outras. Na Física, a relação com a Matemática é sintomática, e se coloca como um quebra-cabeça de difícil solução. Os professores de Física gostariam que seus alunos chegassem à sala de aula com os pré-requisitos matemáticos completos. Em contrapartida, os professores de Matemática não aceitam, com razão, que sua disciplina seja pensada apenas como instrumento para outras disciplinas, impondo uma programação que nem sempre se articula com aquela da Física. No primeiro ano, em particular, a Cinemática se apóia fortemente em conhecimentos sobre funções que são anteriores ou dados em paralelo a esta. Não é incomum que os professores se esmerem na interpretação física de problemas, chegando a esboçar soluções num formalismo matemático e digam: "daqui para frente é só matemática e a solução completa disto vocês já aprenderam na outra disciplina". Isto sugere que, uma vez entendido o problema do ponto de vista físico, dali para frente as competências não são mais de responsabilidade daquele professor. A transformação do problema em um algoritmo matemático e sua solução passariam a depender de habilidades obtidas em outra disciplina. Muitas vezes, os professores de Física acabam por atribuir à Matemática a responsabilidade pelas dificuldades na aprendizagem e não naquilo que ensinam. Erros de alunos na resolução de equações do segundo grau, no cálculo de coeficientes angulares de curvas em gráficos, na solução de sistemas de equações etc, são comuns, reforçando a idéia de que se trata de falta de conhecimento matemático. (PIETROCOLA, 2002, p. 91)

A citação acima demonstra que a articulação entre as disciplinas de física e matemática não é uma tarefa simples, e por isso é descrita como um “quebra-cabeça” de difícil solução. Assim, é importante dizer que o presente trabalho não tem a pretensão de solucionar o mesmo, mas sugerir não um ensino de matemática cujo fim seja a “aplicação” na disciplina de física.

Antes, deseja-se propor situações em que os estudantes possam construir conceitos de matemática a partir da observação de fenômenos da física. Ou seja, espera-se que tais atividades contribuam no desenvolvimento da habilidade da descrição matemática da realidade, sua interpretação, culminando na generalização de determinados aspectos matemáticos observados nos experimentos, os quais poderão ser reaplicados em problemas posteriores.

Conforme citado anteriormente, no contexto de movimentos de móveis (cinemática) percebe-se a estreita relação entre a matemática e a física, uma vez que para a representação desses movimentos é utilizado, com frequência, os conceitos de função. Sejam por meio de tabelas, diagramas, gráficos, ou expressões matemáticas (álgebra). Ou seja, é necessário que o indivíduo consiga estabelecer em primeiro momento relações entre essas diferentes formas de representação do tema chamado funções. De acordo com Lopes (2003, p. 2), por vezes, o que se percebe nos estudantes é justamente a falta dessa habilidade de compreender e de estabelecer relações entre as diversas áreas de aplicação do conceito em questão. Sobre isso, disserta a seguir algumas dificuldades de aprendizagem e aplicação do mesmo:

> Dentre estas está a inabilidade de construir conexões entre as diferentes representações de funções: fórmulas, tabelas, diagramas, gráficos, expressão verbal das relações, e, ainda, em estabelecer interações com outras áreas do conhecimento que fazem uso dessas mesmas representações, situadas em contextos diferentes. Outra dificuldade apresentada está ligada à complexidade na construção do próprio conceito de função e, nesse sentido, é imprescindível ter clareza de que a aprendizagem desse conceito é um processo lento, evolutivo e gradual. E requer, portanto, um espaço que propicie a construção, individual e coletiva, não só desse conceito como dos conhecimentos adjacentes a ele e das relações em domínios intra e interdisciplinares que proporciona. Neste processo não existem receitas, mas sim questionamentos, indagações e dúvidas. (LOPES, 2003, p. 2)

É importante notar que o autor citado entende que os educadores têm o desafio de propor espaços nos quais os aprendizes possam construir os conceitos relativos ao tema e ao mesmo tempo dar significado a eles. Além disso, esse espaço deve proporcionar ao estudante a emancipação do mesmo no processo de sua aprendizagem e também dar significado à matemática aprendida. Ou seja, de acordo com Lopes (2003, p. 2), os educadores devem incorporar:

> Uma concepção de práxis pedagógica, seja no ensino de Matemática ou no de Física, de caráter emancipatório, concebendo o processo de ensino e aprendizagem como um processo que viabiliza ao educando experiências para atribuir sentido e significado às idéias matemáticas, nesse caso particular às ligadas ao conceito de função, e às suas relações com os fenômenos físicos. Que ele possa pensar, justificar, analisar e discutir sobre elas, criando e estendendo relações a outros ramos do conhecimento, em especial com a disciplina de Física, tendo em vista a importância desse conceito no contexto do ensino e aprendizagem dessa disciplina. (LOPES, 2003, p. 2)

Nesse caso, entende-se que oferecer atividades de caráter emancipatório da aprendizagem dos estudantes não seja de forma alguma uma repetição de “passos” para chegar a um valor numérico sem que haja uma ação de investigação matemática por parte deles. Pelo contrário, de acordo com Trindade (1996, p.136), deve-se propor aos alunos:

> Situações-problema que favorecessem a construção com significado do conceito de função. Situações-problema que motivem os alunos a explicar mudanças, a encontrar regularidades entre mudanças, a perceber mudanças e relações entre elas como um problema merecedor de uma explanação científica. Situações que possibilitem aos alunos aplicar o conhecimento de funções para explicar fenômenos de sua vida diária, econômica e social, bem como os inúmeros fenômenos da Física e de outras Ciências (TRINDADE, 1996, p.136).

Vale acentuar a ênfase dada pelo autor citado em relação às situações-problema que favoreçam a construção de significado e nas quais os estudantes possam perceber regularidades, perceber relações entre grandezas. Ou seja, uma atividade em que a ação dos aprendizes se dê no sentido de explicar uma situação dada, comunicar uma solução de um determinado problema a partir da observação de um fenômeno.

Além disso, é importante notar também que o trecho citado sugere não somente a aplicação do conceito de funções, mas a construção dos mesmos por meio da observação de regularidades em fenômenos físicos ou problemas relacionados a outras situações da sociedade. E por serem conceitos comuns a determinadas situações, mantendo-se as condições iniciais, podem ser utilizados em outros problemas que a natureza apresente ou em situações do cotidiano da sociedade.

Lopes (2003, p. 3) esclarece que a necessidade do homem em explicar esses fenômenos, permitiu que o mesmo formulasse leis matemáticas e físicas em relação a eles. De acordo com ele, a partir da observação desses fenômenos e da sistematização dos dados obtidos:

> São lançados sobre ela uma infinidade de leis, leis quantitativas, originadas nas regularidades dos fenômenos observados, a espera de um 'instrumento' ou conceito matemático próprio para o seu estudo.
> Todo esse processo de investigação e busca contínua de explicações para os fenômenos observados teve papel substancial no processo de evolução do que hoje conhecemos por função, seja no contexto da Matemática, seja no contexto da Física. (LOPES, 2003, p. 3)

No entanto, em relação à construção de conceitos por meio de experimentos e debates, enfim, uma construção cooperativa e dialógica por parte dos aprendizes, Lopes (2003, p. 4) tráz à tona novamente o antigo debate que a uns causa adoração e a outros causa a repudia. A saber, "os currículos e programas escolares", os quais são "desde tempos remotos, pautados pela estrutura dos conteúdos".

Estrutura essa que, segundo Lopes (2003, p.4), têm-se "[...] revelado bastante limitado, basicamente se restringem em moldar e direcionar, de maneira padronizada e castradora, as ações educativas empreendidas pelos professores, tornando-se critérios de ‘avaliação’ e ‘controle [...]”. Ademais, tal estrutura é considerada “paradigmas de ensino” e referem-se ao ensino das disciplinas de forma isolada, sem conexão com o cotidiano dos estudantes ou com as demais disciplinas.

Assim, o autor sugere que tal estrutura que “impede a transposição de saberes para outras áreas do conhecimento” seja gradualmente substituída por uma construção do saber por meio de uma abordagem conceitual (LOPES, 2003, p. 4). Ou seja, o ensino não deve se limitar aos conteúdos que devem ser ensinados ou transmitidos, mas deve partir da construção dos conceitos que estão por trás deles. Por fim, Lopes (2003, p.4) afirma que “[...] a perspectiva da abordagem conceitual abre caminhos na busca da estruturação do saber ao propor direções norteadoras para novas perspectivas, entre elas a extrapolação dos dilemas disciplinares [...]”.

Em outras palavras, na abordagem conceitual não se transmite os conteúdos prontos aos estudantes, mas constroem-se os conceitos. Tal proposta de construção vai ao encontro dos propósitos dessa pesquisa, haja vista que se pretende oportunizar a investigação, a argumentação em relação a aspectos matemáticos observados durante as práticas, enfim, construir os conceitos matemáticos envolvidos.

3.2 As Diretrizes e Orientações nos Documentos Oficiais: o que diz a BNCC e os PCNS para o ensino fundamental?

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo e que se baseia na idéia de que não basta apenas garantir acesso e permanência dos estudantes na escola, entende ser necessário que sistemas, redes e escolas, garantam também patamar comum de aprendizagens aos estudantes (BRASIL, 2018, p. 8). Tais aprendizagens têm por objetivos desenvolver nos estudantes competências, haja vista que o ensino oferecido nos ambientes escolares deve oferecer ferramentas pelas quais os indivíduos possam, por meio da organização de informações, interpretarem, interagir, e encontrar possíveis soluções para os mais diversos problemas da sociedade em que vivem.

Assim, é necessário que os estudantes saibam “[...] utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva [...]” (BRASIL, 2018, p. 9). Ainda de acordo com Brasil (2018, p. 9), para chegar a tal estágio seja necessário:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9)

Nesse sentido, não basta que os estudantes saibam apenas – no sentido de conhecimentos adquiridos na escola e habilidades – mas devem também saber o que fazer com esses conhecimentos e habilidades desenvolvidas. Ou seja, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p.15), o estudante precisa saber mobilizar esses conhecimentos e habilidades para “[...] resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho [...]”.

Assim, como dito anteriormente, não basta apenas saber, mas é preciso saber o que fazer com o saber. E é este “saber o que fazer” com o conhecimento que poderá evitar ou responder a velhos questionamentos como, por exemplo, “mais um ano se passou e eu ainda não sei o que fazer com a fórmula de Bháskara?”.

Dessa forma, entende-se que quando perguntas como essas ficam sem respostas, estudantes acabam por desinteressar-se pelo ensino proposto pela escola, haja vista não saberem a utilidade dos mesmos. Assim, com o intuito de dar significado aos estudantes e evitar tal desinteresse, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 14) entende que a sociedade, incluindo a comunidade escolar, deva desenvolver um olhar inovador e inclusivo no processo educativo, no qual, é necessário saber o que “[...] aprender, para que aprender, como ensinar, como promover redes de aprendizagem colaborativa e como avaliar o aprendizado [...]”.

Por isso, entende-se que o ensino deva, preferencialmente, ter conexão com a vida real e com as demais disciplinas e não somente um acúmulo de conteúdos e informações, e ainda, torna-se necessário saber o que fazer com tais informações. Nesse sentido, a BNCC (2018, p. 15) propõe que é preciso que haja uma “[...] superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento [...]” e um “[...] estímulo da sua aplicação na vida real [...]”. Mas não somente isso, também reconhece a importância de que os estudantes exerçam protagonismo em seu aprendizado e na construção de seu projeto de vida. Ademais, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 14) dispõe que:

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que um acumulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades. (BRASIL, 2018, p. 14)

Vale lembrar o reconhecimento de que a tarefa de contextualizar todos os conteúdos da disciplina de matemática com situações da vida real ou com outras disciplinas não seja uma tarefa tão simples de ser realizada. E por isso, mais uma vez é preciso reforçar que não é o propósito dessa pesquisa afirmar que o ensino deva ser proposto aos estudantes unicamente por meio dessa proposta, nem tampouco afirmar ser esta a proposta a ser seguida, mas entende-se que o processo de aprendizado não deva se limitar a um simples processo de transferência de conhecimentos. Antes, deve ser um processo em que os estudantes exerçam protagonismo em seus processos de construção do conhecimento, interagindo com o objeto de estudo, debatendo com colegas, conferindo hipóteses e chegando as suas próprias conclusões.

Dessa forma, entende-se que a investigação dos estudantes em contextos interdisciplinares, bem como a aplicação deste saber adquirido em aula em contextos de situações concretas ou de seu cotidiano, pode estimular o interesse pelas práticas escolares e também potencializar o processo de construção do conhecimento. Para isso, vale destacar as seguintes propostas trazidas pela BNCC (BRASIL, 2018, p.16):

> - Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
> - Decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;
> - Conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens.

Assim, a partir das propostas de ensino pretendidas entende-se ser possível dar suporte aos estudantes munindo-os para exercer o seu “papel” de cidadãos ativos. E ainda, por meio de tais ferramentas poderem:

> Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. (BRASIL, 2018, p. 9)

Em outras palavras, é possível perceber um apelo por parte da Base Nacional Comum Curricular em relação ao desenvolvimento da autonomia dos estudantes no tocante a aplicação dos conhecimentos adquiridos na escola como uma forma de interação destes com o mundo a que fazem parte. Interpreta-se tal apelo, como uma forma de destacar a importância de estimular os estudantes a serem criativos, exercitarem a lógica e a crítica, as quais podem ser construídas por meio da construção da “[...] capacidade de fazer perguntas e de avaliar respostas, de argumentar, de interagir com diversas produções culturais, de fazer uso de tecnologias de informação e comunicação [...]”. Tais exercícios podem, segundo Brasil (2018, p. 56), oportunizar aos estudantes ampliarem sua compreensão de si mesmos, do mundo natural e social, das relações dos seres humanos entre si e com a natureza.

Enfim, a BNCC mostra como é importante fortalecer a autonomia dos estudantes oferecendo-lhes ferramentas e condições para que os adolescentes possam, não somente acessarem, mas também interagirem criticamente com diferentes conhecimentos e diferentes fontes de informação. E assim, poderem compreender, explicar, e poder interagir em os mais diversos cenários investigativos.

Já em relação ao ensino específico de matemática, a BNCC reconhece que a matemática cria sistemas pelos quais e possível inter-relacionar fenômenos do “[...] espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico [...]” (BRASIL, 2018, p. 263). Tais sistemas têm aspectos fundamentais para a compreensão de fenômenos e a construção de representações e argumentações sobre os mais variados contextos.

Ademais, entende e reconhece a importância das demonstrações, dos axiomas e postulados, mas chama a atenção para o papel heurístico das experimentações na aprendizagem matemática (BRASIL, 2017, p.263). Ou seja, é preciso valorizar os processos em que os estudantes podem por meio de experimentações em situações problema – aqui chamados de cenários investigativos – chegarem a conclusões por meio da observação e descrição de dados obtidos em determinados experimentos. E assim, poderem relacionar as diversas áreas da matemática com o seu cotidiano, descobrindo aspectos peculiares e os aplicando em outros problemas. Ainda sobre isso, a BNCC dispõe que:

> No ensino fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisam garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem as representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018, p. 263)

Já os parâmetros curriculares nacionais (BRASIL, 1988, p. 9), documento esse que foi elaborado a partir da necessidade de construir uma referência curricular nacional para o ensino fundamental. E que tem como objetivo servir de apoio às discussões e ao desenvolvimento de processos educativos das escolas, bem como a reflexão sobre as práticas pedagógicas, análise de material pedagógico e planejamento das aulas. E cuja função é a de provocar debates sobre a função da escola e sobre o que deve ser ensinado, como, quando, e para que deva ser ensinado determinados conteúdos. Tem ainda a seguinte característica, a saber:

> Contrapor-se a idéia de que é preciso estudar determinados assuntos porque um dia poderão ser úteis; o sentido e o significado da aprendizagem precisam estar evidenciados durante toda a escolaridade, de forma a estimular nos alunos o compromisso e a responsabilidade com a própria aprendizagem. (BRASIL, 1988, p. 10)

A citação acima ilustra novamente um questionamento que frequentemente estudantes realizam durante a sua jornada no ensino fundamental e que já foi explicitado anteriormente neste texto, a saber: “Onde em minha vida irei utilizar o que estou aprendendo?”. Dessa forma, o trecho dos PCN se mostra pertinente, pois não somente trás a tona o freqüente questionamento dos estudantes, mas também sugere que a justificativa de se estudar determinados assuntos da matemática não precisa necessariamente estar ligado à utilização em seu cotidiano, ou em um futuro próximo.

É bom ressaltar a importância que, tanto a interdisciplinaridade como a aplicação da matemática no cotidiano dos estudantes têm na contribuição para a construção de significados de propriedades da matemática aos mesmos. Porém, assim como a BNCC, entende-se que a formação de significados de propriedades da matemática não deva depender exclusivamente das duas situações citadas, ou seja, da aplicação no cotidiano e da interdisciplinaridade. E por isso, não se descarta nenhuma outra metodologia de ensino.

Além disso, os PCNs consideram que a educação ao longo da vida do indivíduo está fundada em quatro pilares, a saber:

> - aprender a conhecer, que pressupõe saber selecionar, acessar e integrar os elementos de uma cultura geral, suficientemente extensa e básica, com o trabalho em profundidade de alguns assuntos, com espírito investigativo e visão crítica; em resumo, significa ser capaz de aprender a aprender ao longo de toda a vida;
> - aprender a fazer, que pressupõe desenvolver a competência do saber se relacionar em grupo, saber resolver problemas e adquirir uma qualificação profissional;
> - aprender a viver com os outros, que consiste em desenvolver a compreensão do outro e a percepção das interdependências, na realização de projetos comuns, preparando-se para gerir conflitos, fortalecendo sua identidade e respeitando a dos outros, respeitando valores de pluralismo, de compreensão mútua e de busca da paz;
> - aprender a ser, para melhor desenvolver sua personalidade e poder agir com autonomia, expressando opiniões e assumindo as responsabilidades pessoais.(BRASIL, 1988, p. 17)

Dentre esses pilares vale destacar a ênfase dada por esse documento ao senso investigativo, a visão crítica, e que, segundo a citação acima significa “aprender a aprender”. Interpreta-se esse primeiro pilar como sendo a habilidade que o indivíduo desenvolve para construir o seu próprio conhecimento a partir da observação e da interpretação de determinada situação. O que na matemática significa analisar, construir conceitos matemáticos, enfim, tirar suas próprias conclusões em relação a determinado problema apresentado. Além disso, destaca-se a capacidade de trabalhar em grupo, ou seja, de cooperar com outras pessoas para resolver problemas.

Já em relação ao uso de tecnologias como o vídeo-aula e o computador como apoio às aulas, os quais são difundidos no meio escolar e universitário, os PCN (BRASIL, 1998, p. 37) entendem que não basta a utilização desses meios, seguida daquele modelo didático de “[…] explicar os conteúdos e solicitar a execução de muitos exercícios para a sua fixação, desconsiderando, dessa maneira, a contribuição e a participação do aluno no processo de aprendizagem […]”. Antes, sugere que para se propor ações em educação que colaborem para a atuação autônoma dos estudantes, é necessário considerar os seus distintos aspectos, sejam eles: sociais, políticos, culturais, antropológicos e psicológicos. Ou seja, de acordo com Brasil (1988, p. 38), “[…] os professores devem ser capazes de conhecer os alunos, adequar o ensino à aprendizagem, elaborando atividades que possibilitem a ação reflexiva do aluno […]”.

Entende-se, portanto, que para ser capaz de conhecer os estudantes seja necessário a adoção de uma política de acolhimento aos mesmos, tanto pela escola como pelos professores em sala de aula. Tal política de acordo com os PCNs (BRASIL, 1988, p. 43), significa "[…] valorizar o conhecimento do aluno, considerando suas dúvidas e inquietações, implica promover situações de aprendizagem que façam sentido para ele [...]". E acrescenta que:

> Exercer o convívio social no âmbito escolar favorece a construção de uma identidade pessoal, pois a socialização se caracteriza por um lado pela diferenciação individual e por outro pela construção de padrões de identidade coletiva.
>
> Contribuir para o processo de acolhimento dos alunos não é tarefa simples, pois envolve lidar com emoções, motivações, valores e atitudes dos sujeitos em relação ao outro, suas responsabilidades e compromissos. (BRASIL, 1988, p. 43)

Por meio das leituras e das citações do PCNs (1998), pode-se perceber a valorização da ação dos estudantes no processo de construção de sua aprendizagem, seja pelo incentivo a construção de atividades que privilegiem a análise crítica dos mesmos, reflexões, enfim, o desenvolvimento da sua autonomia durante a realização das tarefas escolares. Nesse sentido, mais uma vez é bom lembrar que um dos pilares da educação apontado pelos PCNs (1998, p. 17) e que deve acompanhar o indivíduo ao longo de toda a sua vida é "aprender a aprender". Tal ênfase se justifica à medida que os PCNs (1998, p. 44) descrevem que o conhecimento é "um recurso controlador e fator decisivo de inserção social e de produção". E ainda:

> Hoje em dia não basta visar a capacitação dos estudantes para futuras habilitações nas especializações tradicionais. Trata-se de ter em vista a formação dos estudantes para o desenvolvimento de suas capacidades, em função de novos saberes que se produzem e que demandam um novo tipo de profissional.
>
> Essas relações entre conhecimento e trabalho exigem capacidade de iniciativa e inovação e, mais do que nunca, a máxima "aprender a aprender" parece se impor à máxima "aprender determinados conteúdos". (BRASIL, 1998, p. 44)

No entanto, a construção do conhecimento do indivíduo não deve ter como único objetivo a sua inserção no mercado de trabalho. Pelo contrário, os PCNs sugerem que o ensino escolar possa dar suporte a esse indivíduo interferir modificando este mercado. Para isso, segundo eles, é necessário:

> A utilização de metodologias capazes de priorizar a construção de estratégias de verificação e comprovação de hipóteses, na construção do conhecimento, a construção de argumentação capaz de controlar os resultados desse processo, o desenvolvimento do espírito critico capaz de favorecer a

> criatividade, a compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas.
>
> Metodologias que favoreçam essas capacidades, favorecem também o desenvolvimento da autonomia do sujeito, o sentimento de segurança em relação às suas próprias capacidades, interagindo de modo orgânico e integrando num trabalho de equipe e, portanto, sendo capaz de atuar em níveis de interlocução mais complexos e diferenciados. Em resumo, busca-se um ensino de qualidade capaz de formar cidadãos que interfiram criticamente na realidade para transformá-la e não apenas para que se integrem no mercado de trabalho. (BRASIL, 1998, p. 44-45)

Ou seja, percebe-se nas propostas de ensino sugeridas pelos PCNs o estudante situado como eixo central de todo o processo de construção e de desenvolvimento de suas capacidades, como um agente ativo, crítico e reflexivo. E não alguém passivo que aguarda a "transmissão" do conhecimento e que tem por finalidade repetir aquilo que foi ensinado. Ademais, os conteúdos não são vistos como o produto final desse processo, mas sim como os meios pelos quais os estudantes deverão construir e desenvolver habilidades para a resolução de problemas. Enfim, nota-se a valorização da interatividade do aprendiz com o objeto de estudo, colegas, e professores, conforme trecho a seguir.

> É também por valorizar a capacidade de utilização crítica e criativa dos conhecimentos, e não um acúmulo de informações, que a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais não se apresenta como um currículo mínimo comum ou um conjunto de conteúdos obrigatórios de ensino.
>
> Os Parâmetros Curriculares Nacionais, tanto nos objetivos educacionais que propõem quanto na conceitualização das áreas de ensino e dos temas da vida social contemporânea que devem atravessá-las, buscam apontar caminhos para os problemas do ensino do Brasil, adotando como eixo o desenvolvimento de capacidades do aluno, processo em que os conteúdos curriculares atuam não como fins em si mesmos, mas como meios para aquisição e desenvolvimento dessas capacidades. Assim, o que se tem em vista nos Parâmetros Curriculares Nacionais, é que o aluno possa ser sujeito de sua própria formação, em um complexo processo interativo em que intervêm alunos, professores e conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 51)

Vale destacar ainda, dentre outros, três objetivos que os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam ao ensino fundamental, a saber, que os estudantes sejam capazes de:

> – Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
>
> – Desenvolver o conhecimento de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetivas, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação social e inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
>
> – Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a

> capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando a sua adequação. (BRASIL, 1998, p. 56)

No trecho acima citado mais uma vez nota-se a valorização dada por parte dos PCNs em relação à ação investigativa dos estudantes e também no tocante a exercerem um posicionamento crítico e responsável mediante situações de seu cotidiano. Mas não somente isso, também demonstra reconhecer a importância do papel questionador dos estudantes tanto na escola como em qualquer outra situação de seu dia a dia. Por fim, vale citar também o papel relevante que existe nas inter-relações pessoais entre colegas, ou seja, a troca de idéias, o diálogo entre professores e estudantes e entre os estudantes.

4. METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO: APORTES TEÓRICOS

Com intuito de responder a questão norteadora exposta neste texto, entende-se ser a metodologia denominada pesquisa qualitativa a mais apropriada para tal intento. Haja vista que não iremos trabalhar com a análise de quantidades consideravelmente grandes em que a pesquisa quantitativa seja mais adequada. De modo que, buscamos apoio teórico em D'Ambrosio (2004, p. 12) o qual afirma que pesquisas qualitativas têm como foco em "[...] entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes [...]". E ainda, para D'Ambrosio (2004, p. 21) a pesquisa qualitativa "[...] é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas idéias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos [...]".

Assim, justifica-se a escolha por tal metodologia pelo fato que seja de nosso interesse entender como se dá a construção de conceitos matemáticos por meio das práticas que serão propostas, as posições particulares de cada estudante sejam elas por meio de diálogos entre os pares ou por meio de desenvolvimentos escritos (análise documental). Ou seja, não estamos interessados apenas nos resultados, mas também no caminho percorrido pelos estudantes para construírem tais resultados. Tais aspectos estão de acordo com a caracterização de pesquisa qualitativa trazida por Bogdan e Biklen (1994, *apud* Borba 2004, p. 25):

1. Na pesquisa qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (p.47);
2. A investigação qualitativa é descritiva (p.48);
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (p.49);
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva (p. 50);
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (p. 50).

Além disso, na pesquisa qualitativa o professor–pesquisador insere-se nos ditos cenários investigativos, como pesquisador da sua própria prática e cujo intuito não é somente observar, mas também para intervir na prática com o propósito de encontrar caminhos que aperfeiçoem a mesma. Dessa forma, entende-se que a postura enquanto professor-pesquisador caracteriza um tipo especial de pesquisa participante a qual é denominada por Fiorentini (2004) como *pesquisa-ação* e definida da seguinte maneira:

> A pesquisa-ação, nesse sentido, é um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa. Ou seja, a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas na transformação dessa mesma prática, gerando novas situações de investigação. (FIORENTINI, 2004, p. 77)

Assim, usando-se como referência da pesquisa a definição proposta por Fiorentini (2006, p. 113), torna-se elemento importante para chegar às possíveis respostas da questão norteadora a consideração de uma sequência de passos que, de certa forma, definem a pesquisa-ação. Tal sequência é ilustrada e descrita por Fiorentini por meio do esquema a seguir:

Figura 7: Ciclos sucessivos da Pesquisa Ação.

Planejamento ⇒ Ação ⇒ Observação ⇒ Registros ⇒ Sistematização/Reflexão/Análise ⇒ Avaliação ⇒ Planejamento de novas ações ⇒ Novas ações ⇒ Novas observações ⇒ Novos registros ⇒ Novas análises e avaliações ⇒ e assim por diante

Fonte: Fiorentini (2006, p. 113).

A partir da sequência acima é possível entender a pesquisa-ação como um processo em que o investigador observa, reflete sobre a mesma, e por fim, intervém com o intuito de proporcionar o aperfeiçoamento do aprendizado dos estudantes. Em outras palavras, tal pesquisa está centrada na reflexão-ação. De acordo com Fiorentini (2012, p. 77), na pesquisa-ação a "[...] prática educativa, ao ser investigada produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas na transformação dessa mesma prática, gerando novas situações dessa mesma investigação [...]". Também, pretende-se planejar práticas que valorizem o diálogo, a construção coletiva de conceitos matemáticos por meio de debates, além da construção de significados daquilo que estiver sendo estudado e investigado.

Além disso, a pesquisa-ação que pode ser considerada uma técnica especial de coleta de dados também é uma modalidade de pesquisa que, segundo Fiorentini (2012, p. 79), "[...] torna o participante da ação um pesquisador de sua própria prática, e o pesquisador, um participante que intervém nos rumos da ação, orientada pela pesquisa que realiza [...]". Dessa forma, entende-se que durante essa modalidade de pesquisa, pesquisador e participantes possam alternar os "papéis". Há momentos em que os participantes da pesquisa (estudantes) se tornam o pesquisador refletindo sobre as práticas e investigando as mesmas – cenários de investigação. Em outros momentos, o professor–pesquisador se torna o participante, questionando, fazendo reflexões junto à turma, sugerindo outros possíveis caminhos a serem tomados pelos participantes estudantes–pesquisadores, enfim, instigando-os.

4.1 Contexto e Sujeitos da Pesquisa

O conjunto de atividades elaborado durante o estágio supervisionado do Mestrado Profissional foi aplicado em uma turma de nono ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental General Osório da cidade de Canoas. A turma era composta por 32 estudantes, predominantemente moradores do bairro Rio Brancos da cidade de Canoas. Não se pode afirmar que a mesma tinha problemas de indisciplina que interferisse de forma negativa no andamento das propostas de ensino, pelo contrário, de um modo geral mostrou-se participativa e engajada durante todo o desenvolvimento das atividades.

Já em relação ao tema sobre plotagem de pontos no plano cartesiano, os mesmos estavam tendo contato pela primeira vez na disciplina de matemática, mas havendo tido o primeiro contato com o tema de forma contextualizada às coordenadas geográficas estudadas na disciplina de geografia. Sendo assim, também não haviam tido contato com o tema funções, as relação entre grandezas, taxa de variação, nem tampouco o esboço de gráficos no plano cartesiano.

E como parte da pesquisa se deu de forma interdisciplinar, ao dialogar com o professor de ciências da referida turma, o mesmo afirmou que não havia trabalhado em aula ainda o tópico sobre movimentos, pretendendo fazê-lo no primeiro trimestre de 2018. A partir de tal diálogo iniciou-se uma intensa troca de idéias com o professor de ciências, bem como com o professor orientador cujo propósito foi o de traçar estratégias de abordagem dos referidos assuntos, de tal forma que a aprendizagem dos estudantes fosse proposta por meio de suas próprias ações, ou seja, da investigação em ambientes de aprendizagem propostos. Ademais, a realização das atividades práticas se deu em quinze encontros, dos quais, onze são analisados.

4.2 Coleta de Dados

Antes de iniciar a análise dos dados é importante dizer que em todas as atividades priorizou-se a discussão e apresentação das soluções obtidas pelos grupos de estudantes. E mesmo que algumas atividades tenham sido realizadas individualmente, os estudantes foram convidados a apresentar as suas anotações, construções de gráficos, enfim, os resultados obtidos.

Com o intuito de não se perder detalhe importante em relação aos caminhos trilhados pelos estudantes em busca de soluções optou-se por registrar a dinâmica das aulas por meio de gravações de áudio e vídeo, diário de campo, bem como os registros realizados pelos estudantes. Entende-se serem de fundamental importância tais registros já que durante as investigações realizadas pelos estudantes, por vezes, perdem-se aspectos da forma de pensar e de agir dos mesmos. Assim, de posse desse material, o professor-pesquisador pode analisar posteriormente o material coletado e realizar uma análise mais acurada da aula.

Como ponto de partida optou-se por realizar exercícios de plotagem de pontos no plano cartesiano utilizando coordenadas geográficas, já que tal habilidade seria requerida para a descrição de experimentos posteriores. Em seguida, foi proposto aos mesmos a interpretação da tabela da figura 14 que trata do preço pago para o envio de cartas. Nessa atividade realizamos a leitura junto à turma e a participação docente se limitou à leitura do problema e em formas de perguntas.

Em seguida deu-se início às atividades referentes aos experimentos físicos, nos quais, os estudantes tinham primordialmente a tarefa de observar o deslocamento do móvel (coluna d'água, deslocamento de moeda ou esfera em líquido) e os respectivos tempos em que atingiam determinadas marcas. E para que houvesse melhor organização foi orientado aos mesmos que organizassem os dados (pares ordenados) obtidos em tabelas para posterior construção dos gráficos.

Uma vez construídos os gráficos, os mesmos eram projetados na lousa por meio de *data show* para análise e observações por parte dos estudantes. Ou seja, após a construção dos gráficos referentes a determinados experimentos foi necessário que os mesmos fossem analisados e justificados pela turma.

Vale dizer ainda que sempre que nos referirmos aos estudantes, por questões de ética, o faremos por meio das iniciais de seus nomes. Por fim, cabe dizer que as atividades foram realizadas em sua maioria coletivamente, já que um dos objetivos das práticas propostas era o de observar como o conhecimento ia sendo construído a partir das trocas de argumentações entre eles durante os experimentos.

5. ANÁLISE DOS DADOS

Com base no referencial teórico explanado anteriormente, pretende-se realizar a análise dos dados obtidos por meio de uma sequência de atividades proposta aos estudantes de uma turma de nono ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental (EMEF) General Osório da cidade de Canoas (RS). Tais atividades tiveram o propósito de observar a evolução no aprendizado dos estudantes por meio da execução metodológica ocorrida na forma de um ateliê de matemática. Assim, as atividades relatadas e analisadas a seguir, fazem parte de uma tentativa de ensino a partir de situações-problema preferencialmente de caráter interdisciplinar, as quais estiveram inseridas na escola básica em que se atua.

De maneira que tal prática foi desenvolvida com o propósito de propiciar aos estudantes investigações em que os mesmos pudessem por meio da descrição e observação de experimentos, bem como debates em grupo, construir o próprio aprendizado. Aprendizado esse que teve como foco a representação gráfica de experimentos físicos, bem como a solução dos mesmos por meio da sua leitura e interpretação.

Além disso, a proposta de ensino a seguir tem como características a construção de conceitos matemáticos por meio da experimentação e diálogo entre os pares durante as práticas. Em outras palavras, pretendeu-se propor um ensino que não seguisse a tríade definição/exemplo/exercício, ou seja, um ensino dito e entendido no senso comum como "pronto e acabado" em que os estudantes têm o papel de reprodução das soluções propostas pelo professor ou pelo livro didático.

Assim, com a proposta desejou-se estimular a forma de pensar e agir dos estudantes e a ação dos mesmos em oposição a uma aprendizagem passiva. Ou seja, acreditou-se que os experimentos poderiam potencializar o fazer dos estudantes, os quais estiveram envolvidos e foram protagonistas no processo de construção do conhecimento. Tal fazer é descrito por Castro (1974, p. 5) como o mais velho dos princípios da Escola Nova e pode ser chamado de "princípio da atividade". Para ela, esse princípio introduz na vida escolar dos estudantes duas diretrizes que se inter-relacionam, a saber, "[...] a necessidade de ação efetiva e afirmação de que toda atividade decorre de uma necessidade [...]". Tais diretrizes trazem como consequência os seguintes tópicos:

> – a primeira levou à introdução na escola do apelo à ação efetiva do aluno, como movimento e manipulação de objetos, em atividades práticas exercidas sobre a própria realidade ou sua representação;

> – a segunda levou ao despertar da escola para o problema da motivação, à busca da conexão entre a atividade escolar e os impulsos e interesses dos alunos. (CASTRO, 1974, p. 5)

Com intuito de observar nos estudantes as diretrizes do trecho acima, foi proposta a primeira atividade aos estudantes que consistia na plotagem de pares ordenados no plano cartesiano, o que aproveitamos para relacionar com atividades da disciplina de geografia a qual utiliza o conceito de coordenadas cartesianas, porém, como coordenadas geográficas no globo terrestre. Também foi utilizado como inspiração o jogo batalha naval, ou seja, procurou-se contextualizar a matemática com uma situação em que eles pudessem visualizar a sua aplicação.

1º Encontro (2 períodos de 55 minutos): Plotagem de pares ordenados no plano cartesiano

A nossa expectativa era de que os estudantes exercitassem a plotagem de pares ordenados no plano cartesiano e que vislumbrassem a aplicação de tal conhecimento em outras áreas do conhecimento como na geografia, navegação, GPS, dentre outros. Procuramos trazer à consciência dos estudantes a importância de tal ciência no cotidiano dos mesmos por meio da verbalização e dos exercícios a seguir.

Umas das diversas aplicações que tem a representação de coordenadas no eixo cartesiano são as coordenadas geográficas. Nelas, no lugar dos eixos das abscissas (x) e das ordenadas (y), tem-se a linha do Equador (eixo x) e o meridiano de Greenwich (eixo y), ambos medidos em graus recebendo o nome de latitude e longitude. Nesse caso, também é necessário informar a orientação das coordenadas, ou seja, norte, sul, leste, oeste.

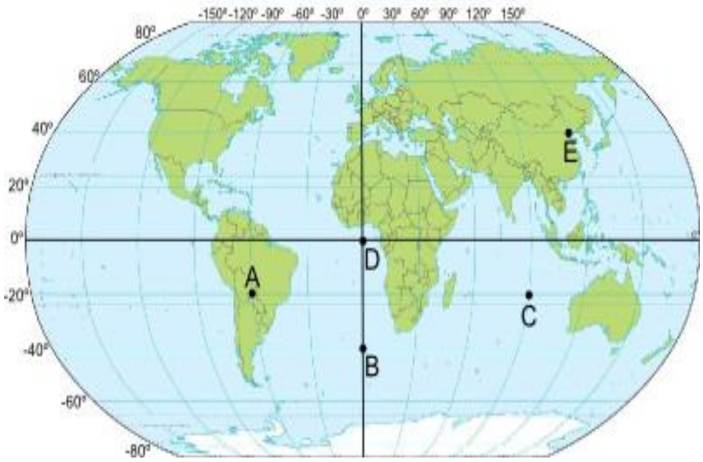
Latitudes: são as distâncias em graus de qualquer ponto da Terra em relação à linha do Equador. Suas medidas vão de – 90° à + 90°.
Longitude: são as distâncias em graus de qualquer ponto da Terra em relação ao meridiano de Greenwich. Suas medidas vão de – 180° à + 180°.

Figura 8: Mapa Mundi.

Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm (acesso em fevereiro de 2019)

Problema: O mapa a seguir fornece as coordenadas geográficas globais estabelecidas a partir da combinação das latitudes e longitudes.

Figura 9: Mapa Mundi com coordenadas geográficas.

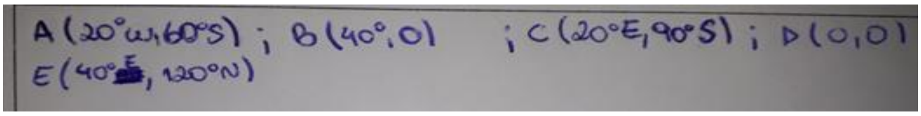


Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm (acesso em fevereiro de 2019)

Acima, temos a representação de cinco pontos diferentes. Observando as suas latitudes e longitudes, descreva a seguir as coordenadas geográficas de cada um deles, indicando os seus hemisférios (Norte: N. Sul: S. Leste: E. Oeste: W).

É possível sintetizar a *realidade* encontrada nessa atividade basicamente por meio de duas respostas diferentes que foram propostas pelos estudantes, conforme imagens a seguir.

Figura 10: Resposta estudante B.M

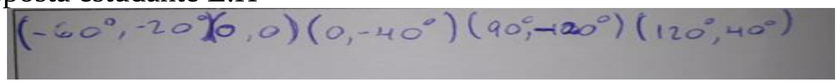


Fonte: acervo do pesquisador

A partir das respostas expostas acima, se pode perceber que a estudante comete alguns erros ao descrever, por exemplo, o ponto A como sendo (20º w, 60º s). Sendo que, os 20º são observados no eixo das ordenadas e os 60º no eixo das abscissas. Além disso, erra ao inverter o sentido oeste por sul e vice-versa.

Já o estudante L.H. expõe as coordenadas em sua ordem correta (x, y), mas se esquece de acrescentar o sentido de cada coordenada – norte, sul, leste e oeste. Porém, vale notar que, o uso do sinal positivo e negativo em alguns pontos como o A, por exemplo, sugerem essa orientação. Dessa forma, é possível perceber a associação que o mesmo faz com o plano cartesiano.

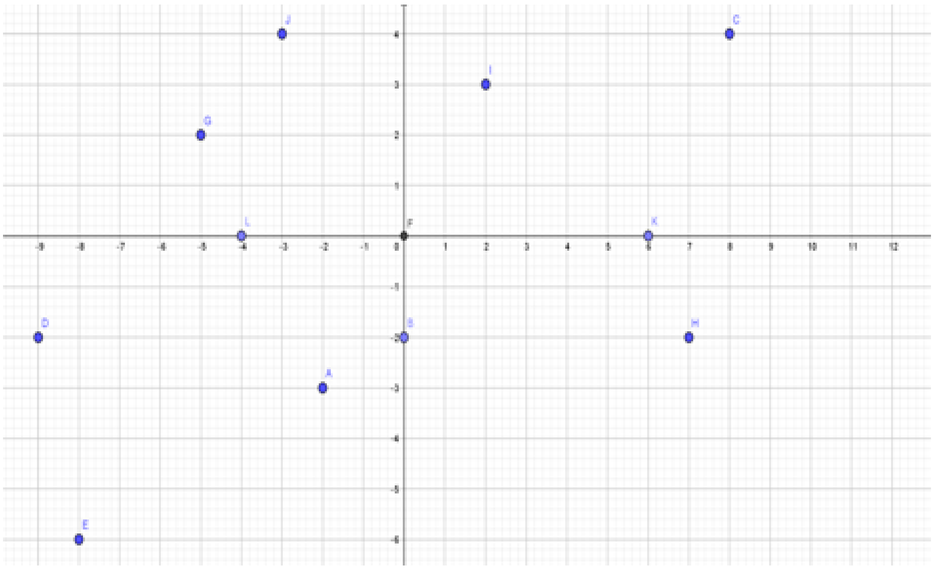
Figura 11: Resposta estudante L.H



Fonte: acervo do pesquisador

Além dessa atividade foi proposta aos estudantes a obtenção dos pares ordenados da seguinte malha quadriculada.

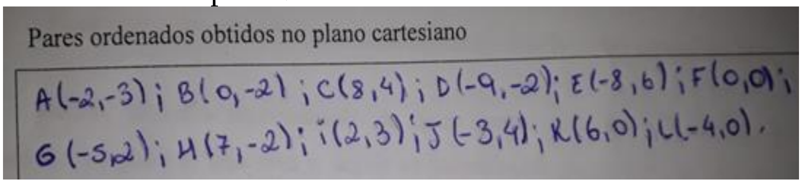
Figura 12: Pontos plotados no Plano Cartesiano



Fonte: acervo do pesquisador

Como essas atividades serviram apenas como suporte para traçar no plano cartesiano os experimentos que seriam observados posteriormente, não houve diálogos relevantes a serem relatados. Por isso, deixamos a seguir apenas as coordenadas cartesianas obtidas pela estudante B.M.

Figura 13: Coordenadas obtidas por B.M



Fonte: acervo do pesquisador

2° Encontro (2 períodos de 55 minutos): Introdução do conceito de funções

É importante dizer do cuidado que se deve ter em interpretar os princípios da Escola Nova citados na introdução dessa seção, pois de modo algum deve ser entendido como uma recomendação em trabalhar-se em sala de aula apenas com materiais concretos em detrimento ao desenvolvimento do pensamento formal. Pelo contrário, acredita-se que o trabalho manual se torna importante na medida em que por meio dele os estudantes podem construir conceitos preliminares que servirão como “trampolim” ao proporcionar que os mesmos testem conjecturas, percebam padrões matemáticos, formando assim teorias em relação a determinados fenômenos. Ocasionando assim, o desenvolvimento da atividade mental superior (educação intelectual). Nesse sentido, foram propostos os experimentos seguintes, cuja *expectativa* era de que os estudantes pudessem identificar conceitos de funções como:

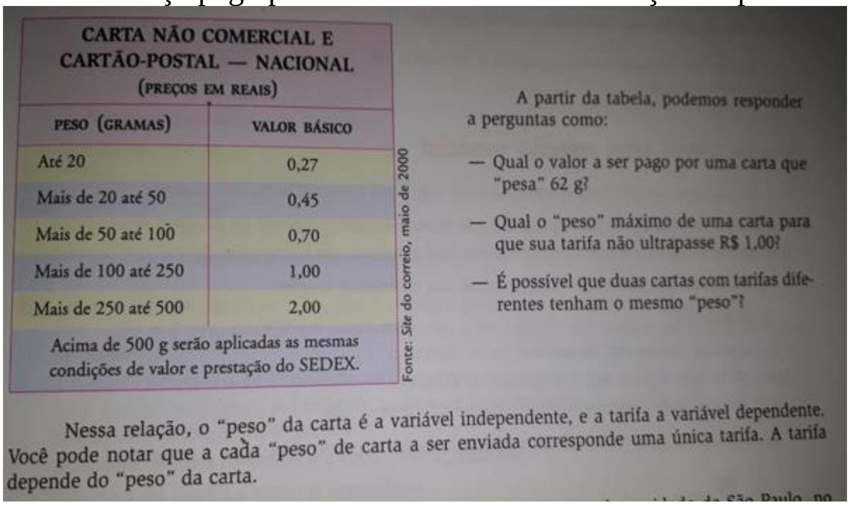
– Leitura e interpretação de tabelas;

– Conceito de variável dependente e variável independente;

– A necessidade de cada *elemento* $x \in A$ *participe de apenas um único par* $(x, y) \in f$.

Esse último procurou-se traduzir por meio de exemplos do cotidiano como: “uma mercadoria de um supermercado tem um único preço, mas um preço pode pertencer a mais de um produto do supermercado”. Ou ainda, uma temperatura corporal pode ser a mesma para duas pessoas, mas cada pessoa pode ter uma e somente uma temperatura corporal. A seguir, o desenvolvimento da aula proposta a qual foi introduzida por meio do exercício da figura 14.

Figura 14: Atividade – Preço pago para o envio de cartas em função do peso



CARTA NÃO COMERCIAL E CARTÃO-POSTAL — NACIONAL (PREÇOS EM REAIS)	
PESO (GRAMAS)	VALOR BÁSICO
Até 20	0,27
Mais de 20 até 50	0,45
Mais de 50 até 100	0,70
Mais de 100 até 250	1,00
Mais de 250 até 500	2,00
Acima de 500 g serão aplicadas as mesmas condições de valor e prestação do SEDEX.	

Fonte: Site do correio, maio de 2000

A partir da tabela, podemos responder a perguntas como:

— Qual o valor a ser pago por uma carta que "pesa" 62 g?

— Qual o "peso" máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00?

— É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo "peso"?

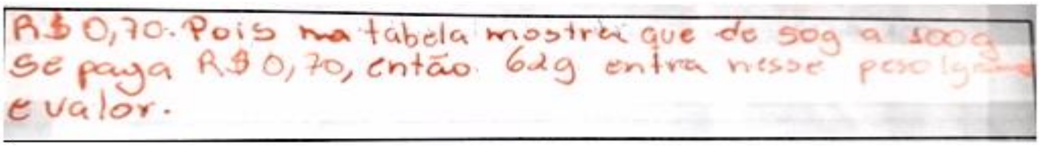
Nessa relação, o "peso" da carta é a variável independente, e a tarifa a variável dependente. Você pode notar que a cada "peso" de carta a ser enviada corresponde uma única tarifa. A tarifa depende do "peso" da carta.

Fonte: Giovanni, José Ruy – Matemática Fundamental: uma nova abordagem – São Paulo Ed. FTD, 2002.

A partir da tabela acima, pense nos seguintes questionamentos:

– Qual o valor a ser pago por uma carta que "pesa" 62 g? Explique.

Figura 15: Resposta estudante A.M

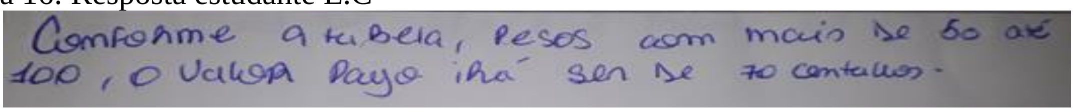


R$ 0,70. Pois na tabela mostra que de 50g a 100g se paga R$ 0,70, então 62g entra nesse peso [illegible] e valor.

Fonte: acervo do pesquisador

A maioria das respostas para essa questão se assemelha com a que a estudante A. M. propôs acima, porém vale notar que os estudantes fazem menção a intervalos de quantidades sem citá-los explicitamente. Ademais, também se pode afirmar que mesmo não citando o conceito de função, no qual, se tem para cada valor x um único y, mas um valor y pode ter mais que um valor x. Implicitamente, os estudantes se valem desse conceito para responderem com facilidade a questão.

Figura 16: Resposta estudante E.C



Conforme a tabela, pesos com mais de 50 até 100, o valor pago irá ser de 70 centavos.

Fonte: acervo do pesquisador

Também é importante destacar que os estudantes de uma das turmas que realizaram a tarefa em questão, em um primeiro momento, tiveram dificuldades para iniciar a atividade.

Tal fato deixa nítido que assim como a leitura de um texto e a interpretação de gráficos necessitam de uma determinada habilidade para a sua realização, também a leitura e interpretação de tabelas requerem o desenvolvimento de uma habilidade específica para tal.

Percebendo isso, realizamos a seguinte leitura em conjunto com a turma, ou seja, revezamos a leitura tanto das perguntas como a leitura da tabela, linha por linha. Conforme trechos a seguir:

– Professor: alguém pode ler a primeira linha da tabela pra nós?

– Aluna A.L.: cartas com até 20 gramas seu valor básico é 27 centavos

– Professor: todo mundo entendeu isso? E o que está dizendo a segunda linha da tabela?

– Aluna K.F.: mais de 20 gramas até 50, valor básico 45 centavos

– Professor: e a terceira linha o que está dizendo?

– Aluna N.A.: mais de 50 até 100, 70 centavos

– Professor: muito bem! Ou seja, 51, 52, eu vou pagar 70 centavos

– Aluna K.F.: mas sor, se for 50,2...?

– Professor: 50,2 eu vou pagar 70 centavos, 50 "cravadinho" eu vou pagar quanto?

– Alunos K.F. e M.S.: 45 centavos

– Professor: 45 né, diz ali na segunda linha que até 50 gramas eu vou pagar 45

– Professor: a gente começa a responder as perguntas a partir da tabela né gente, ela está ali pra nos dar uma informação

– Professor: Depois, mais de 100 até 250 eu pago?

– Aluno M.S: Um real

– Professor: mais de 250 até 500 gramas eu pago quanto?

– Aluno M.S.: Dois reais

A partir desse diálogo, os estudantes conseguiram desenvolver a tarefa pedida que continua a ser relatada a seguir. Também após fazermos a leitura da tabela em conjunto com a turma, a estudante B.M. afirmou o seguinte:

– Professor, em casa parecia um monstro essa atividade! Mas agora estou "vendo" que é bem fácil!

A afirmação da estudante B.M. demonstra bem o que o psicólogo russo afirma, ao dizer que "mais importante do que saber aquilo que o estudante pode realizar sozinho é saber o que ele pode realizar com a ajuda de alguém mais capacitado". Ou ainda, aquilo que o estudante resolve a partir de pistas de alguém mais capacitado é um indicativo de seu desenvolvimento mental e demonstra as potencialidades ainda não atingidas. Contudo, aquilo que ele consegue resolver atualmente somente com ajuda, posteriormente conseguirá realizar sozinho. (VYGOTSKY, 1994, p. 111)

E como dito anteriormente, após os diálogos e leituras realizadas em conjunto com os estudantes, não registramos dificuldades para realizar as demais questões propostas aos estudantes. A seguir, o registro dos mesmos às questões propostas.

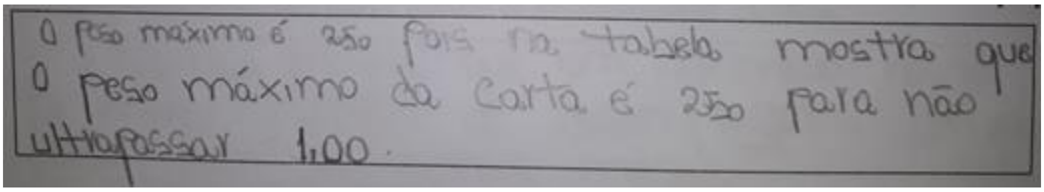
– Qual o “peso” máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00? Explique.

Figura 17: Resposta estudante A.M


250g. Pois acima de 250g custa R$ 2,00.

Fonte: acervo do pesquisador

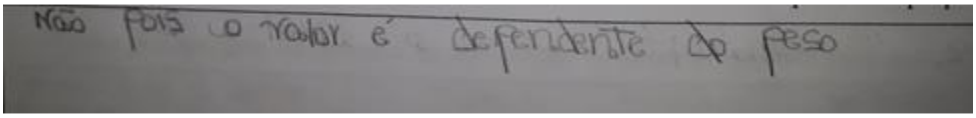
Figura 18: Resposta estudante: D.S


O peso máximo é 250 pois na tabela mostra que o peso máximo da carta é 250 para não ultrapassar 1,00.

Fonte: acervo do pesquisador

– É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo “peso”? Explique.

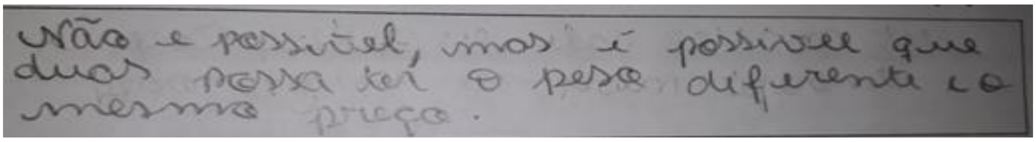
Figura 19: Resposta estudante D.S.


Não pois o valor é dependente do peso

Fonte: acervo do pesquisador

Vale destacar a escrita de D.S. a qual se refere, para responder a questão, a noção de variável dependente e variável independente. Assim sendo, pode-se perceber a noção desses conceitos importantes e presentes na teoria de funções sendo indiretamente construídos a partir do exercício proposto.

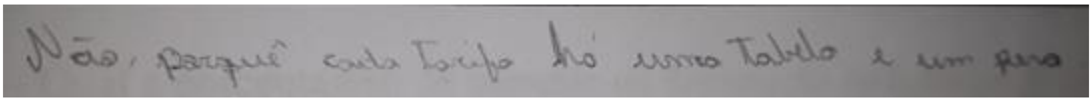
Figura 20: Resposta estudante N.A


Não e possível, mas é possível que duas pessa ter o peso diferente e o mesmo preço.

Fonte: acervo do pesquisador

Já a estudante N.A. apresenta outro conceito de função importante, a saber, a necessidade de cada *elemento* $x \in A$ *participe de apenas um único par* $(x, y) \in f$. E ainda, a possibilidade de $f(y)$ ser imagem de mais um valor $x \in A$. Dessa forma, entende-se que a expectativa da atividade foi atingida, haja vista que se deseja introduzir e construir conceitos presentes na teoria de funções sem seguir a tríade definição, exemplo e exercício.

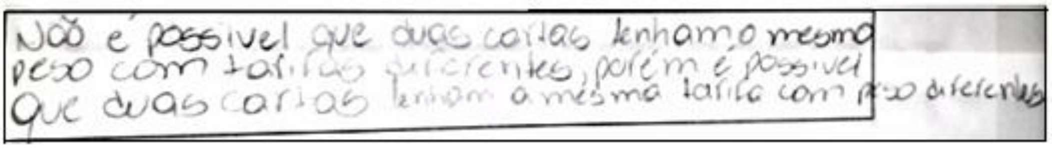
Figura 21: Resposta estudante A.G


Não, porquê cada Tarifa há uma Tabela e um peso

Fonte: acervo do pesquisador

Também a resposta do estudante A.G. pode ser interpretada da mesma forma, uma vez que, segundo ele, “para cada tarifa existe uma tabela” com um intervalo de valores de “pesos” em gramas. Ou seja, um valor $x \in A$ pode ter um único valor de $f(y)$, mas $f(y)$ pode ter mais do que um valor $x \in A$.

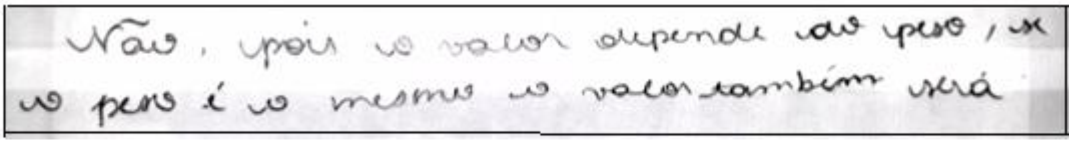
Figura 22: Resposta estudante I.L


Não é possível que duas cartas tenham o mesmo peso com tarifas diferentes, porém é possível que duas cartas tenham a mesma tarifa com peso diferentes

Fonte: acervo do pesquisador

Acima a estudante faz uma afirmação verdadeira, demonstrando bem a noção de intervalos de pesos e taxas cobradas para envio. Mesmo não tendo justificado a questão de cartas com tarifas diferentes não poderem possuir o mesmo peso.

Figura 23: Resposta estudante A.L. e M.S

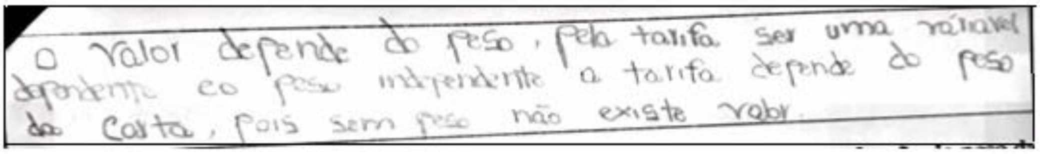

Não, pois o valor depende do peso, se o peso é o mesmo o valor também será

Fonte: acervo do pesquisador

Já A.L. e M.S. justificam a impossibilidade de cartas com tarifas diferentes possuírem o mesmo peso, trazendo novamente o conceito de variável dependente. Só que de forma diferente, pois alia o conceito de dependência a um raciocino simples e direto, pois conforme as palavras das mesmas, “se o valor depende do peso, e se o peso for o mesmo, o valor a ser pago também o será!”. E ainda, também respondem a questão a seguir.

– A partir dos dados expostos, você saberia dizer do que depende o valor pago para o envio de cada carta? Explique.

Figura 24: Resposta estudante D.S


o Valor depende do peso, pela tarifa ser uma váriavel dependente do peso independente a tarifa depende do peso da carta, pois sem peso não existe valor.

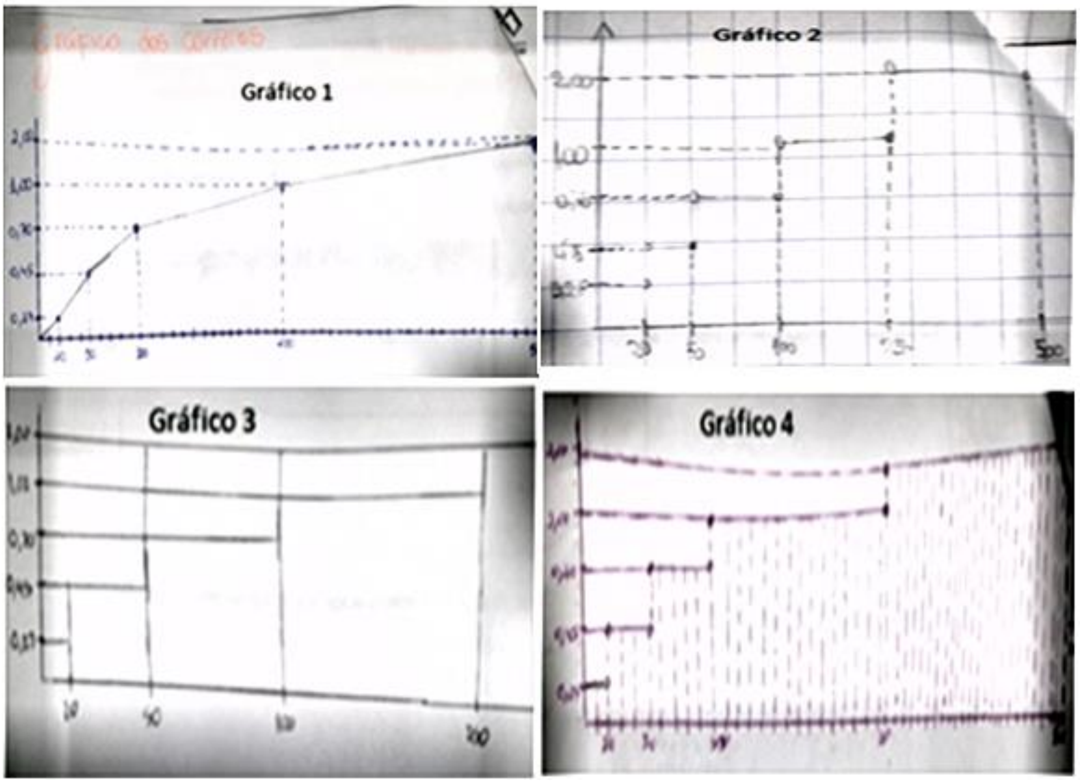
Fonte: acervo do pesquisador

Os estudantes de uma forma geral responderam de maneira semelhante à questão acima. Porém, não com a riqueza de detalhes como pode ser visualizado na resposta da estudante D.S.

– Esboce o gráfico da situação dos correios, ou seja, “o preço pago em função do peso das cartas”.

A seguir, alguns gráficos construídos pelos estudantes e que serviram de objeto de investigação e debates no grande grupo. Para isso, as construções realizadas por eles foram projetadas por meio de data show a fim de que se pudesse realizar a análise das mesmas pelos próprios estudantes, conforme imagens e diálogo a seguir.

Figura 25: Gráficos construídos – “Preço pago para o envio de cartas em função do peso”



Fonte: acervo do pesquisador

É importante dizer que, nosso debate para essa atividade teve como intuito encontrar o gráfico que melhor representa a situação dos correios – preço pago para o envio de cartas em função do peso que elas têm – e também o de justificar aqueles que não representam adequadamente a situação dada. Conforme poderá ser observado a seguir.

– Professor: eu quero que vocês me digam qual é o gráfico mais adequado pra representar a situação dos correios e justifiquem a escolha de vocês

– Professor: então, o que está determinando para o valor que eu pago para o envio de carta?

– Estudante B.D.: o peso!

– Professor: então é o preço que eu pago em função do...?

– Estudante A.L.: do peso!

– Estudante D.S.: acho que é o 2

– Estudante A.L.: pra mim é o 3

– Professor: mais algum palpite?

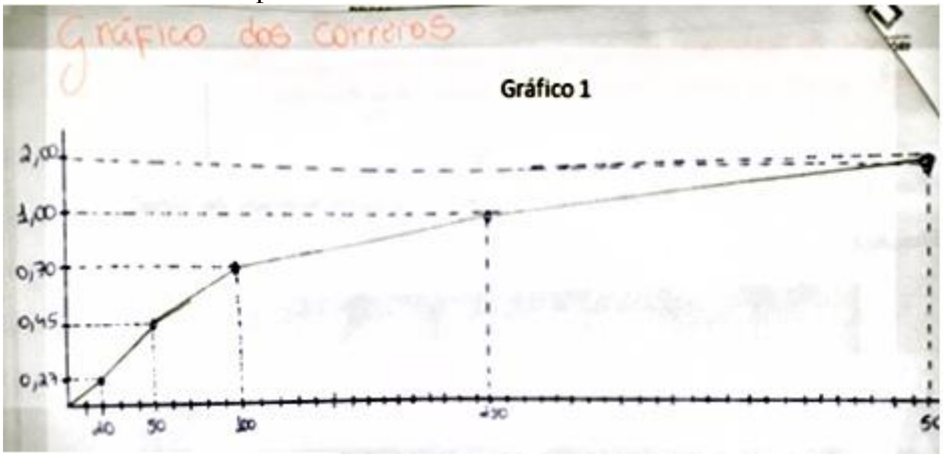
– Estudante M.S.: tá o 4

– Estudante A.L.: tá sor, mas o 3 e o 4 não é a mesma coisa?

– Professor: é né, tá parecido, tá parecido

A partir dessa parte inicial, propomos aos estudantes começarmos por analisar aspectos do gráfico 1.

Figura 26: Gráfico construído pela estudante A. M



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: tá, vamos começar pelo 1, porque vocês não acharam que era esse?

– Estudante D.S.: a linha tá torta (quis dizer não paralela ao eixo das abscissas)

– Professor: de 0 até 20 gramas eu pago R$ 0,27, e acima de 20 gramas até 50, R$ 0,45

– Professor: e se eu pegar o peso de 30 gramas, a partir do gráfico 1, quanto irei pagar?

– Professor: e se eu pegar o peso de 30 gramas, quanto o gráfico está me informando que eu vou pagar?

– Estudante G.: vai continuar pagando R$ 0,45

– Professor: tá, mas não tá no R$ 0,45, entre o R$ 0,27 e o R$ 0,45 tem um número aqui, o par ordenado de 30

– Estudante G.: Porém, tu vai continuar pagando pelo peso professor

– Professor: Sim, e pelo que tu sabe na tabela, acima de 20 até 50 gramas eu tenho que pagar?

– Estudante G.: R$ 0,45

– Professor: porém, se eu pegar o peso de 30 gramas e traçando até o par dele no "eixo y" eu vou pagar quanto?

– Estudante G.: vai ter que pagar em torno de uns R$ 0,30

– Professor: que não é o que está descrito na tabela não é?

– Estudante G.: e por isso está errado.

Vale notar que os gráficos foram construídos pelos estudantes e que os erros cometidos pelos mesmos foram importantes, pois são esses mesmos erros que proporcionaram o debate e consequentemente a construção do conhecimento junto à turma. Ademais, por meio do diálogo acima, se estava requerendo era que os estudantes validassem a construção dos gráficos por meio de justificativas coerentes aos dados expostos na tabela. Ou seja, estava-se querendo propor aos estudantes uma investigação e uma análise daquilo que eles mesmos haviam construído em aulas anteriores. Tal proposta está de acordo com as concepções de trabalho em grupo de Piaget, as quais são descritas por Castro (1974, p. 16) da seguinte maneira:

> A vida social, por introduzir o "outro" e sua perspectiva, obriga o indivíduo a distinguir-se dele (fisicamente, representativamente, socialmente) e a um esforço de reformulação de conjunto "eu-e-outro". Na conduta e no plano intelectual, é por meio de convívio no grupo que se desenvolve o "controle mútuo", ou seja, a necessidade de justificar e verificar, objetivamente, ações e pensamentos.
>
> É assim que modalidades específicas de atuação grupal, como a discussão, a troca de idéias, a colaboração no jogo e no trabalho, tornam-se importantes para o desenvolvimento do pensamento. A lógica, diz Piaget, é a "moral do pensamento", imposta e sancionada pelos outros (assim como, diz o Psicólogo, "a moral é a lógica da ação").
>
> O trabalho escolar em grupo, assume, na perspectiva piagetiana, papel mais amplo do que o usual. Não será somente um meio de adaptação do sujeito no plano da conduta e das relações humanas. Torna-se processo importante do desenvolvimento intelectual, pelo que apresenta de estímulo à reorganização cognitiva do indivíduo que deve ao mesmo tempo tornar objetivo e comunicável seu pensamento, assimilar o ponto de vista alheio e tudo coordenar numa perspectiva de conjunto. (CASTRO, 1974, p. 16)

Além disso, por meio do diálogo podem-se perceber características do aluno que, segundo David e Lopes (1998, p. 31), são considerados alunos preparados para um sucesso em matemática em longo prazo. Ou seja, não apenas um sucesso para as avaliações escolares, haja vista que na concepção delas, estes possuem uma compreensão mais global e significativa dos conceitos envolvidos. Em síntese, estudantes de sucesso em longo prazo possuem:

> Habilidades de planejar, monitorar, avaliar, fazer perguntas relevantes, refletir, explicar, levantar hipóteses e testá-las, justificar e provar, visualizar conexões entre diferentes linhas de pensamento, distinguir entre considerações relevantes e irrelevantes, avaliar linhas de ações conflitantes, pensarem analogicamente, detectar falácias num pensamento, ser capaz de apresentar justificativas/razões para as posições assumidas e as decisões tomadas, generalizar a partir de casos particulares, tirarem conseqüências do que é dito e feito, inferir, etc. (COLES, 1993; TANNER & JONES, 1995 *apud* DAVID & LOPES, 1998, p. 37)

Nesse sentido, é possível perceber um remanejo de perspectivas quando encontravam uma “incongruência” entre os gráficos produzidos pelos colegas com as informações contidas na tabela do problema dado. Ou seja, gráficos esboçados incorretamente não puderam ser validados com as informações da tabela e consequentemente não se pode chegar a “moral da ação por meio deles”. Como diz na citação, a “moral é a lógica da ação” (CASTRO 1974, p. 16). A seguir, a continuação dos debates em torno da atividade proposta.

– Professor: e se eu pegar o ponto entre 100 e 250 gramas, sei lá, 200 gramas ali, quanto eu irei pagar? Vou pagar R$ 1,00? O problema está me dizendo que sim, pela tabela

– Estudante G.: mas o gráfico está dizendo que tu vai pagar um pouco menos, vai pagar em torno de R$ 0,80.

– Professor: Ou seja, o gráfico não está representando adequadamente aquilo que a tabela está me dizendo.

– Professor: E esse próximo gráfico não está de todo errado, mas qual é o problema dele?

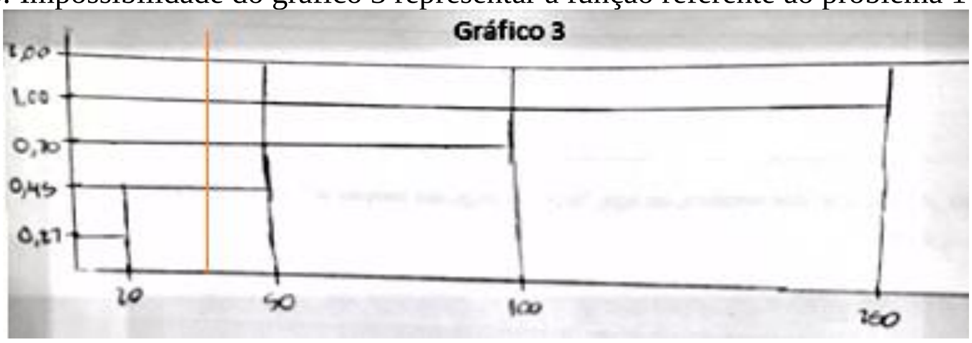
Figura 27: Gráfico construído pela estudante M. S

Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: é que ele não pode ter todas essas linhas contínuas aqui gente, se eu pegar um peso entre 20 e 50 gramas e fizer um pontilhado pra cima, quantos pontos correspondentes a esse peso de carta eu vou ter?

– Estudante S.B.: têm vários.

Figura 28: Impossibilidade do gráfico 3 representar a função referente ao problema 14



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: quando eu faço uma linha contínua, eu estou dizendo que tem um gráfico gente

– Professor: Ou seja, pra um envio de uma carta de aproximadamente 30 gramas eu posso pagar, se eu quiser, ou R$ 0,45 ou...

– Estudante G.C.: Ou R$ 0,70

– Professor: Ou eu pago R$ 0,70, ou eu pago R$ 1,00, ou eu pago R$ 2,00, eu que escolho. Pode isso?

– Estudante G.C.: então no caso, o gráfico 2 seria o mais correto sor

– Professor: sim, o gráfico 2 está adequado, pois no intervalo entre 20 e 50, qualquer valor de gramas, quanto é que eu to pagando?

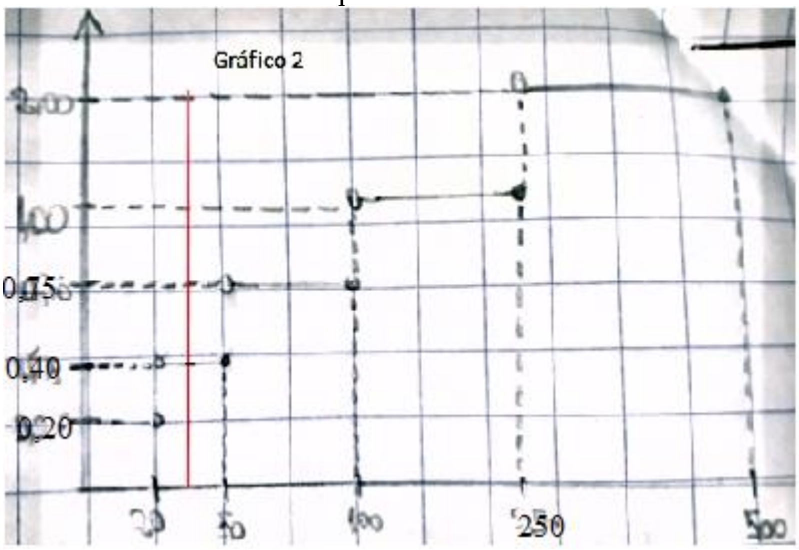
– Estudante G.C.: R$ 0,45

– Professor: Se eu pegar 25 gramas, R$ 0,45, se eu pegar 49 gramas, vou pagar R$ 0,45

– Professor: notem que se eu traçar uma linha vertical, a partir de que qualquer valor no eixo das gramas desse gráfico, em nenhum deles eu irei passar duas vezes no gráfico

A seguir, o gráfico que foi eleito pelos estudantes, por meio de análises e debates, como aquele que melhor representa a situação do custo para o envio de cartas em função de seu peso.

Figura 29: gráfico eleito como o mais adequado



Fonte: acervo do pesquisador

É importante destacar aspectos positivos que surtiram nessa segunda atividade proposta, a saber, a leitura e interpretação de gráficos, bem como seu esboço partindo do problema fornecido por meio da tabela do preço relativo ao envio de cartas de acordo com o seu peso. Por meio da referida atividade foi possível perceber, em primeiro lugar, que a leitura e posterior debate em relação à construção dos gráficos pelos estudantes, proporcionou a ação por parte dos mesmos, uma vez que puderam construir os gráficos e em seguida analisar as suas próprias construções.

De forma que por meio da análise em conjunto com os estudantes, também foi possível introduzir a técnica chamada de teste da reta vertical, a qual foi ilustrada na figura acima. Técnica essa que facilita consideravelmente a classificação de gráficos que representam uma função. Dessa forma, foi possível trazê-la aos estudantes não por imposição, porque “Deus quis”, mas porque logicamente não existe a possibilidade de escolha de valor pago pelo envio de cartas dentro de um intervalo de pesos.

Assim, torna-se importante citar as palavras de Mandarino (2004, p.7) quando afirma que “[...] resolver problemas não é apenas aplicar uma fórmula tal para encontrar um resultado. Não é simplesmente memorizar e resolver um algoritmo, sem que se saiba muito bem por que e para que [...]”. Ou seja, é importante que o estudante entenda porque tais e tais técnicas funcionam, entenda a lógica do algoritmo ou técnica, em síntese, entende-se ser parte importante do processo de construção do conhecimento dos aprendizes que a teorização (construção do conhecimento) seja construída a partir da experiência. De acordo com Fino (2001, p. 2), tais aspectos fazem parte dos estudos de Vygotsky chamados estudos de psicologia “cultural”, “histórica” ou “instrumental”, ou, teoria histórico-cultural da atividade em que:

> Os processos através dos quais o conhecimento é construído como resultado da experiência pessoal e subjetiva de uma atividade. Considera que a atividade precede o conhecimento, que é mediada por signos culturais (linguagem, utensílios, tecnologias, meios de comunicação, convenções, etc.). (FINO, 2001, p. 2)

Assim, é possível afirmar que o conhecimento relativo à técnica da reta vertical foi construído a partir de debates em turma, não por imposição, nem em “blocos acabados”, entregues ao estudante de maneira pronta e polida. Além disso, também é importante dizer que a ação a que se refere Fino (2001, p. 2) não se limita necessariamente a uma atividade manipulatória com materiais concretos. Ela pode ser também uma atividade verbal de troca de argumentos entre os estudantes pela qual os mesmos podem “construir o conhecimento”.

3º Encontro (2 períodos de 55 minutos)

Nessa atividade a nossa expectativa era a de que os estudantes conseguissem interpretar a tabela prestando atenção em detalhes como, por exemplo, a legenda que está posta bem acima. Além disso, identificar crescimento, decrescimento de taxas que estão diretamente relacionadas com a inclinação do gráfico. A seguir expomos as respostas dos estudantes.

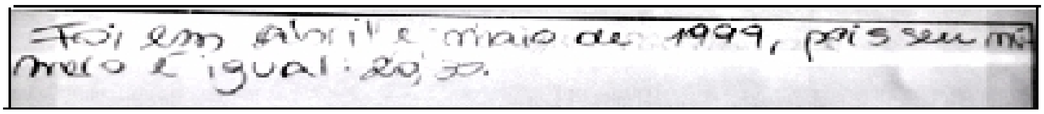
Antes, vale dizer que de uma forma geral os estudantes conseguiram desenvolver a atividade de interpretação do gráfico, porém foi possível perceber dificuldade para reconhecer e traduzir as porcentagens de crescimento e decrescimento do desemprego em números em seus respectivos meses. Dificuldade essa que por meio da troca de idéias com os colegas foi sanada e, de forma geral, os estudantes responderam as questões propostas conforme as imagens a seguir:

Figura 30: As taxas de emprego e desemprego dos meses do ano

Fonte: José Ruy Giovanni/José Roberto Bonjorno/ José Ruy Giovanni Jr. – Matemática Fundamental: uma nova abordagem – São Paulo Ed. FTD, 2002.

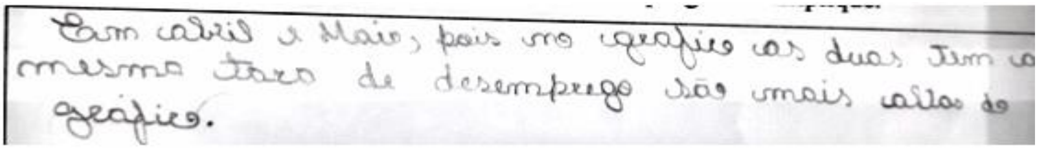
– Em que mês houve o maior número de desempregados? Explique.

Figura 31: Resposta aluna C.D



Fonte: acervo do pesquisador

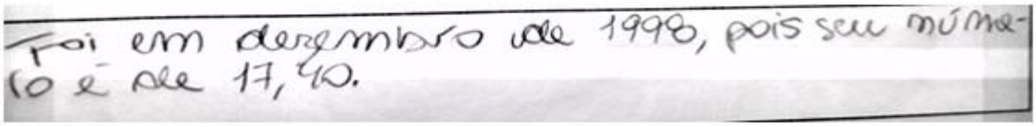
Figura 32: Resposta aluna S.B



Fonte: acervo do pesquisador

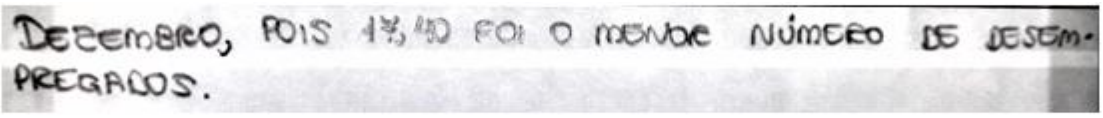
– Em que época houve o menor número de desempregados? Explique.

Figura 33: Resposta estudante C.D



Fonte: acervo do pesquisador

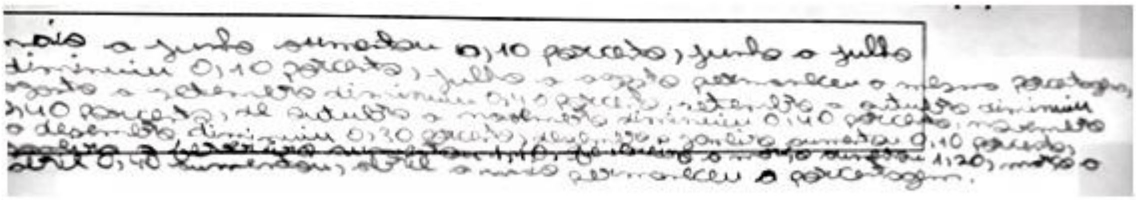
Figura 34: Resposta estudante M.P



Fonte: acervo do pesquisador

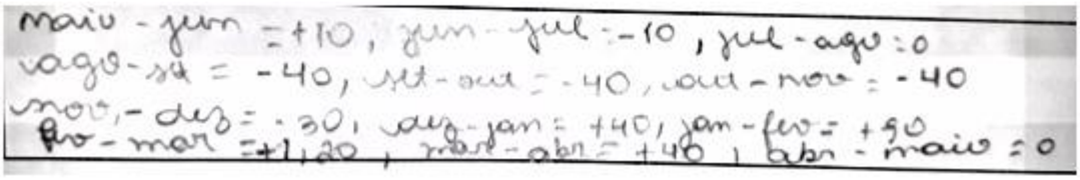
– Qual a porcentagem de aumento ou diminuição do desemprego entre cada mês do ano? Explique.

Figura 35: Resposta estudante B.M



Fonte: acervo do pesquisador

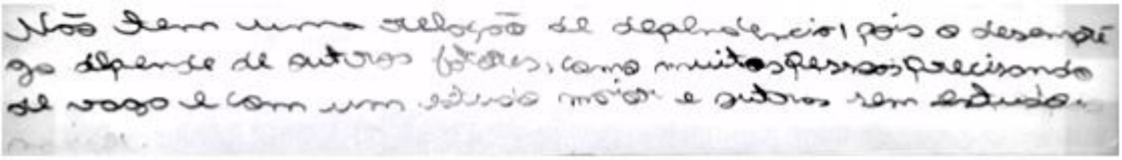
Figura 36: Resposta estudante A.L



Fonte: acervo do pesquisador

– Existe uma relação de dependência no exemplo acima? Se existe, qual é? Explique.

Figura 37: Resposta estudante B.M


Não tem uma relação de dependencia, pois o desempre-
go depende de outros fatores, como muitas pessoas precisando
de vaga e com um estudo maior e outros sem estudo.

Fonte: acervo do pesquisador

4º Encontro (2 períodos de 55 minutos): Experimento com tubo acrílico – altura da coluna d’água em função do tempo (aplicação à física)

Nesse experimento os estudantes deveriam observar o crescimento de uma coluna d’água e realizar anotações referentes aos tempos em que a coluna atingia determinadas marcas do tubo acrílico – pares ordenados referentes ao comprimento da coluna d’água e seu respectivo tempo. Primeiramente foi sugerido aos estudantes que gravassem por meio de vídeo o experimento, para que em seguida, pudessem retirar dos vídeos os tempos em que a coluna d’água atingisse tais marcas (10 em 10 centímetros). Porém, preferiram cronometrar e marcar os tempos relativos às marcas do tubo, que são mostradas na figura a seguir.

Figura 38: Experimento – crescimento da coluna d’água em função do tempo

Fonte: acervo do pesquisador

Essa atividade foi realizada por cinco vezes, aproximadamente, com diferentes velocidades de vazão de água. Considerando que, uma vez aberta a torneira a uma velocidade constante de vazão da água, esperava-se de fato a construção de um gráfico de uma função caracterizada por uma reta. Porém, não deixamos pista aos estudantes sobre características da construção dos gráficos que possivelmente surgiria por intermédio desse experimento, até porque, o experimento em questão estava sujeito as observações realizadas pelos estudantes, ou seja, o ponto de vista de cada um.

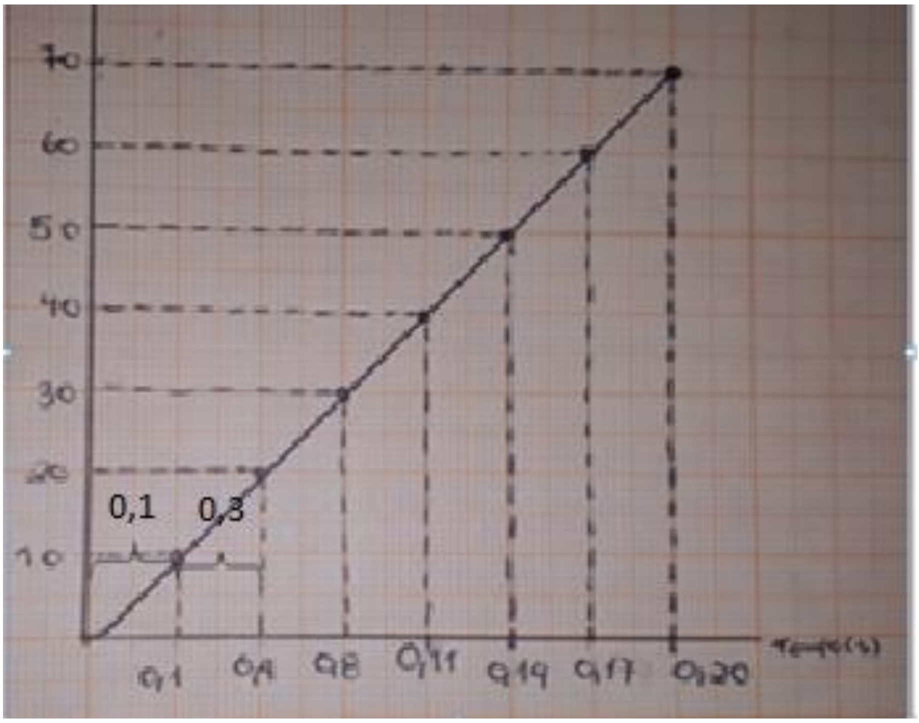
A nossa expectativa era de que os estudantes praticassem a plotagem de pares ordenados no plano cartesiano e também percebessem características peculiares de cada experimento, daí também o motivo de realizarmos o experimento com velocidades de vazões diferentes. Um dos aspectos peculiares de cada gráfico que esperávamos ser percebida pelos estudantes era a relação existente entre a inclinação do gráfico e a velocidade de crescimento de determinado fenômeno, neste caso, a coluna d'água. A seguir, são relatados alguns gráficos e diálogos que surgiram a partir do experimento.

Um dos primeiros tópicos que questionamos os estudantes foi sobre o porquê de utilizarmos apenas o primeiro quadrante do plano cartesiano para representar os gráficos dos experimentos. Ao que responderam da seguinte maneira.

– Porque não existem tempo nem comprimento negativos.

Além disso, vale citar que uma das dificuldades que os estudantes encontraram e que dificultou aos mesmos no reconhecimento de características peculiares de cada experimento e consequentemente de cada gráfico, foi o de manter a coerência nos espaços entre cada ponto no plano cartesiano. Ou seja, uma vez adotada uma distância na malha quadriculada para determinado valor de comprimento ou de tempo, tal distância deve servir de parâmetro para os demais pontos do plano cartesiano. O que não ocorre na figura a seguir, pois a distância (*) representa um intervalo de tempo de 0,1 segundos, e a mesma distância (*) está representando 0,3 segundos. Nesse sentido, chamamos a atenção dos estudantes para este "ponto" importante na construção dos gráficos.

Figura 39: Gráfico construído por G.K

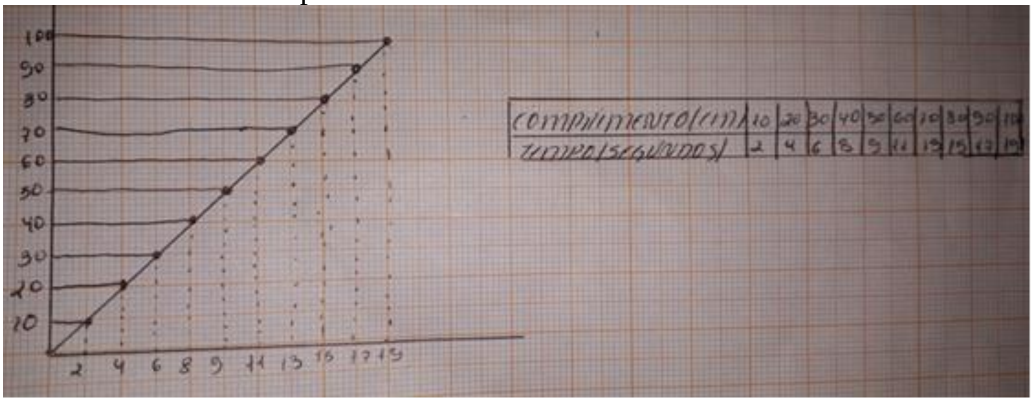


Fonte: acervo do pesquisador

Em nosso ver, a prática de construção de gráficos por meio dos experimentos contribuiu no aprendizado dos estudantes, uma vez que proporcionou que os mesmos cometessem os erros citados acima e consequentemente proporcionou as discussões sobre os mesmos, resultando assim em esclarecimentos e aprendizado. Ou seja, os erros cometidos por eles são parte importante do processo de aprendizado. É bom lembrar que os mesmos não ocorrem em uma aula na qual o professor “mostra como se faz” corretamente e o papel dos estudantes limitam-se a repetir corretamente o que foi corretamente exposto, mecanização do ensino. Ou seja, uma aula em que não existe espaço para a descoberta de relações existentes entre valores, tentativa de resolução por parte dos mesmos, criatividade, nem tampouco erros. Já em nosso entender, o erro dos estudantes apresenta-se como parte importante do processo de aprendizado.

A seguir, utilizamos o gráfico dos estudantes B.D. e N.L. para realização de debates e investigação com os estudantes, obviamente sem citar os referidos autores.

Figura 40: Gráfico construído pelos estudantes B.D. e N.L



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: como sabemos, realizamos o experimento com o tubo d'água em que tínhamos marcas de 10 em 10 centímetros no tubo, além disso, tínhamos que anotar o tempo em que a coluna atingia essas marcas, ou seja, anotar os pares ordenados

– Professor: Nesse experimento vimos que o gráfico dessa função é contínuo, já que o comprimento da coluna d'água não pula de 10 em 10 centímetros, nem tampouco o tempo pula de 2 em 2 segundos ou de 3 em 3 segundos

– Professor: Mas o que quero chamar a atenção é para o fato de que se eu adotar uma distancia no plano cartesiano como no gráfico acima, foi adotado para 2 um "espacinho" do plano cartesiano, para a metade desse espacinho vai ser?

– Aluna A.M.: um

– Professor: e pra metade da metade?

– Aluna N.O.: 0,5

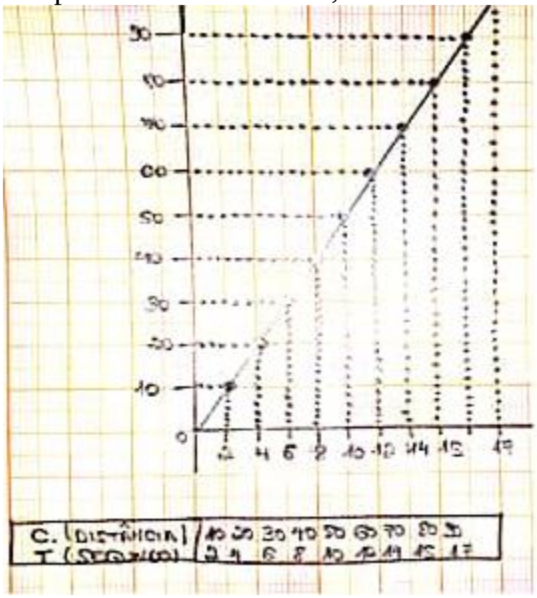
– Professor: e pra metade da metade da metade?

– Aluna N.O.: 0,25

– Professor: e pra metade da metade da metade da metade? 0,125

Após os debates descritos acima e mais algumas análises de outros grupos, os estudantes chegaram à conclusão de que o gráfico construído pelos colegas, descritos a seguir como autores, se mostrou como o mais coerente em se tratando de valores estabelecidos para tempo e comprimento da coluna d'água nos eixos coordenados. Note que os estudantes "pecaram" na construção apenas após o valor de 14 segundos, adotando a mesma distância no eixo dos tempos para o intervalo de 2 segundos e para o intervalo de 1 segundo.

Figura 41: Gráfico construído pelas estudantes N.A., M.P. e B.M



Fonte: acervo do pesquisador

Ainda nessa aula, salientamos aos estudantes que havendo coerência entre os valores adotados para tempo e comprimento nos eixos coordenados, poder-se-ia arredondar valores de tempo principalmente, uma vez se tratar de observações em que há registros de décimos e centésimos de segundos. Conforme a figura a seguir:

Figura 42: Tempos cronometrados pelos estudantes durante a prática

Fonte: acervo do pesquisador

5º Encontro (2 períodos de 55 minutos): Experimentos de observação da moeda percorrendo tubo acrílico contendo glicerina líquida

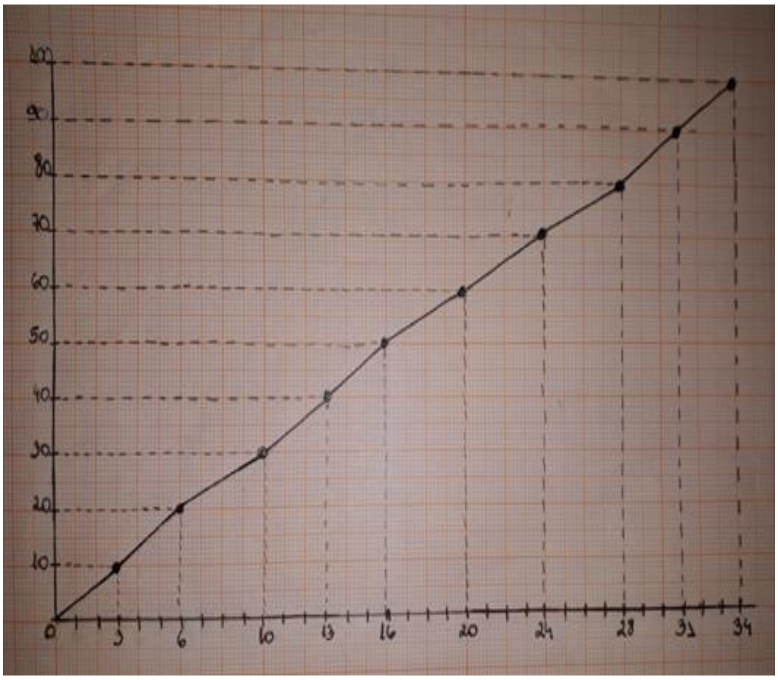
Esse experimento foi cronometrado pelos estudantes e seus dados foram expostos no quadro para os demais colegas, uma forma de organização dos estudantes. Acreditamos que a escolha por essa forma de organização se deu em razão de os estudantes perceberem que a maneira de organização em experimentos anteriores, em que vários estudantes cronometraram e compartilharam em redes sociais, se mostrou um tanto confusa. Já que ao realizarmos mais de um experimento por aula, por vezes, os dados se confundiam entre os experimentos e não se tinha garantia de que todos os estudantes teriam acesso aos dados. A seguir, os dados que foram cronometrados no experimento.

Figura 43: Tempos cronometrado pelos estudantes

Fonte: acervo do pesquisador

Vale destacar essa atividade, pois o desenvolvimento da mesma proporcionou aos estudantes compreenderem aspectos importantes na leitura e interpretação de gráficos. Haja vista, a relação intrínseca existente entre a velocidade de crescimento de determinado fenômeno observado ou construído nos gráficos, e a inclinação do mesmo. A seguir, um dos gráficos construídos pela estudante A.M..

Figura 44: Gráfico construído pela estudante A.M



Fonte: acervo do pesquisador

Tal relação foi percebida pelos estudantes durante as atividades de construção dos gráficos e também nos debates que realizamos sobre os gráficos construídos por eles, e em alguns problemas propostos à turma. Dessa forma, mesmo que de forma não explícita, pode-se perceber a formação do conceito de taxa de crescimento do gráfico, os quais, só puderam ser percebidos e interiorizados pelos estudantes por meio do "convite" que o próprio experimento estende aos mesmos, por meio dos erros cometidos, discussões em grupo, e não de maneira estanque – pronta e acabada.

De acordo com Lima (1976, p. 15), a inteligência "[...] verbal ou reflexiva tem por base uma inteligência prática ou sensório-motora, que se apóiam por vezes nos hábitos e associações adquiridos para combiná-los [...]". E foi por esse caminho também que, segundo ela, Piaget "[...] arquitetou todo um sistema psicológico, segundo o qual o comportamento humano é o resultado de um intercâmbio contínuo entre o sujeito e o meio na ordem natural da sucessão genética [...]".

Tal intercâmbio ocorre quando de um lado se tem um sujeito (estudante) atuante que percorre um caminho em busca das soluções, ou de maneira análoga, buscando adaptar-se ao objeto, e de outro, o objeto que faz um convite a este percorrer esse caminho. Dessa forma, as referidas trocas, ocorrem durante o percurso "trilhado" pelo sujeito, a fim de adaptar-se ao objeto. Esse processo define, segundo a autora citada (Lima 1976, p. 15), “o grau de inteligência necessária ao ato”. E ainda de acordo com ela:

> Em Piaget, a inteligência é, pois, concebida como “a adaptação mental mais avançada”, como “a forma de equilíbrio para a qual tendem todas as estruturas, cuja formação deve ser procurada através da percepção, do hábito e dos mecanismos sensório-motores elementares”. Assim, em diferentes obras ou em diversos momentos ele reitera a ideia de que os esquemas mentais se derivam dinamicamente uns dos outros, os de agora dos de ontem, os de amanhã dos de hoje, em busca da adaptação e do equilíbrio, que a operação expressa. (LIMA, 1976, p. 15-16)

Tal caminho a que se referem os autores foi percorrido pelos estudantes, e só podemos perceber isso, ou seja, *adaptação* por parte dos sujeitos (estudantes) em relação ao objeto em estudo, quando os mesmos passam a perceber aspectos peculiares desse objeto (assimilam-no). Reflexos dessa *assimilação* e *adaptação* a que se referem os autores são percebidos quando os estudantes percebem as relações existentes entre a velocidade do experimento e a inclinação dos respectivos gráficos, a impossibilidade do objeto estar em duas posições ao mesmo tempo, ou ainda, a impossibilidade de se pagar valores diferentes para o envio de cartas que estejam contidas em um mesmo intervalo de pesos estabelecidos, como no exercício realizado.

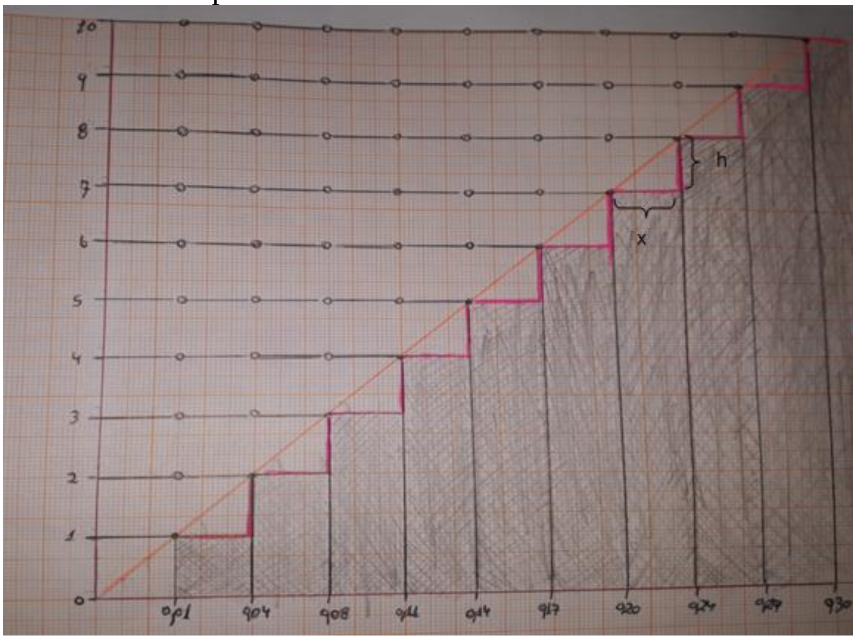
Os referidos aspectos podem ser observados a partir das respostas a seguir em que eles, mesmo que implicitamente, constroem conceitos matemáticos.

– Professor: Em quais trechos do gráfico o objeto está mais rápido e em quais está mais devagar?

– Estudante A.M.: De 0 a 6, de 10 à 16 e de 28 à 34 está mais devagar, pode ver pela reta que está menos “inclinadinho”

A partir da resposta da estudante A.M., é possível afirmar que foi construído pela estudante um conceito importante da matemática, a saber, a taxa de variação do crescimento do gráfico. A seguir, apresentamos à turma um dos gráficos construído pelo estudante M.L. com o propósito de realizar um breve debate no grande grupo. Nessa oportunidade destacamos mais uma vez a necessidade de se tomar cuidado no estabelecimento entre os números no eixo cartesiano, mas também aproveitamos alguns detalhes na construção para a realização da leitura do mesmo. Os referidos detalhes são os triângulos retângulos construído pelo estudante e que aproveitamos para realizar os seguintes questionamentos.

Figura 45: Gráfico construído pelo estudante M.L



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: Pessoal, alguém pode me dizer o que o colega fez aqui, o que significa, por exemplo, esse segmento marcado aqui por h? E esse que eu chamei de x, o que significa?

– Estudante D.S.: Tu tá falando das bolinhas ou da parte rosa?

– Estudante B.D.: Isso aí é o espaço entre uma distância e outra

– Professor: Perfeito né, esse é o mesmo segmento situado no eixo y entre 70 e 80 centímetros. É o espaço percorrido pela moeda na coluna d'água

– Professor: E a marca denotada por x ali que eu fiz, que marca é essa?

– Estudante B.D.: Essa é a marca exata entre 0,20 e 0,24 segundos

– Estudante B.D.: Essa é a distância dividida pelo tempo (referindo-se a velocidade da coluna d'água)

A partir dos diálogos realizados no grande grupo em relação aos experimentos anteriores, e as percepções dos estudantes, é possível perceber a construção de conceitos matemáticos presentes nos gráficos em questão e que são citados pelos mesmos. De acordo com Lima (1976, p. 16), para Piaget, tais processos fazem parte da dinâmica da busca da adaptação e do equilíbrio que a operação expressa, sendo:

> A inteligência adaptação e resultado esta do equilíbrio das já citadas trocas entre o sujeito e os objetos, ou seja, do equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, explicita-se que a função da inteligência é estruturar o universo, assim como o organismo estrutura o meio próximo. O autor entende por assimilação a ação do sujeito sobre os objetos e por

> acomodação, o inverso; chama de adaptação o aspecto externo do ciclo e de organização o aspecto interno. Acrescenta que a adaptação e a organização são inseparáveis e interdependentes, pois o pensamento se organiza ao adaptar-se aos objetos e ao mesmo tempo, ao organizar-se, estrutura-os também. Na base de todo funcionamento da inteligência está pois a ação, externa na prática ou sensório-motora, interna ou operação, na inteligência reflexiva ou verbal. (LIMA, 1976, p. 16)

Como pode ser visto na imagem a seguir, há dois gráficos no plano cartesiano, o de baixo construído por M.L. e o de cima, traçado por nós. Nosso objetivo era saber se os estudantes conseguiam fazer a leitura desses gráficos relacionando a velocidade de determinados experimentos com a inclinação da reta. Assim, lançamos os seguintes questionamentos à turma.

Figura 46: Debates sobre o Gráfico construído por M.L

Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: Se eu tivesse esses dois gráficos, qual deles é o mais rápido?

– Estudante E.C.: O azul (gráfico de cima)

– Professor: O azul? O azul está mais rápido?

– Estudante B.D.: Com certeza!

– Professor: Por quê?

– Estudante B.D.: Porque a inclinação é maior

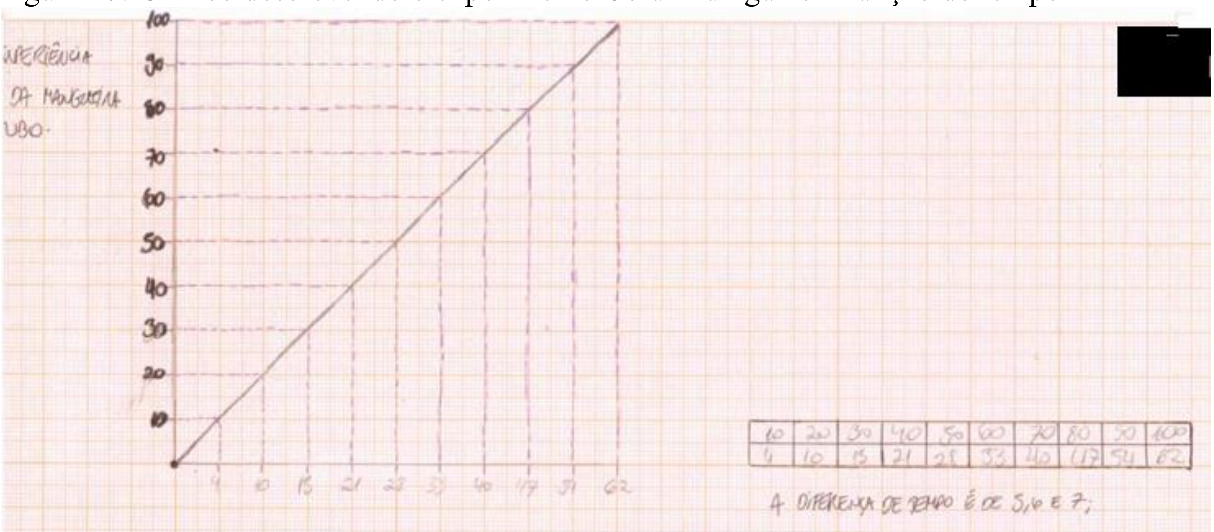
– Professor: Perfeito, porque a inclinação é maior né. Os dois estão certos

– Professor: E notem que no gráfico de cima o ponto móvel percorre o mesmo espaço de 90 centímetros em menos tempo. Logo, está mais rápido.

Vale dizer que não se está discutindo se os dados coletados pelos estudantes nos experimentos retratam fielmente o experimento observado, já que se trata de uma observação a olho nu de cada um, sujeito a percepção de cada um. Pelo contrário, nosso foco manteve-se na coerência entre a proporção entre os números no eixo cartesiano para a descrição do movimento e na leitura que eles faziam do gráfico relacionado ao experimento.

Vale comparar ainda o gráfico construído pelo grupo de estudantes E., S. e L.H. no experimento em que uma torneira é ligada a uma vazão constante enchendo o tubo acrílico e o experimento em que uma moeda percorre o tubo contendo glicerina líquida. Nesses dois experimentos, no primeiro os estudantes tinham que observar a coluna d'água atingindo determinadas marcas e no segundo a moeda atingia essas marcas. A seguir, os respectivos gráficos.

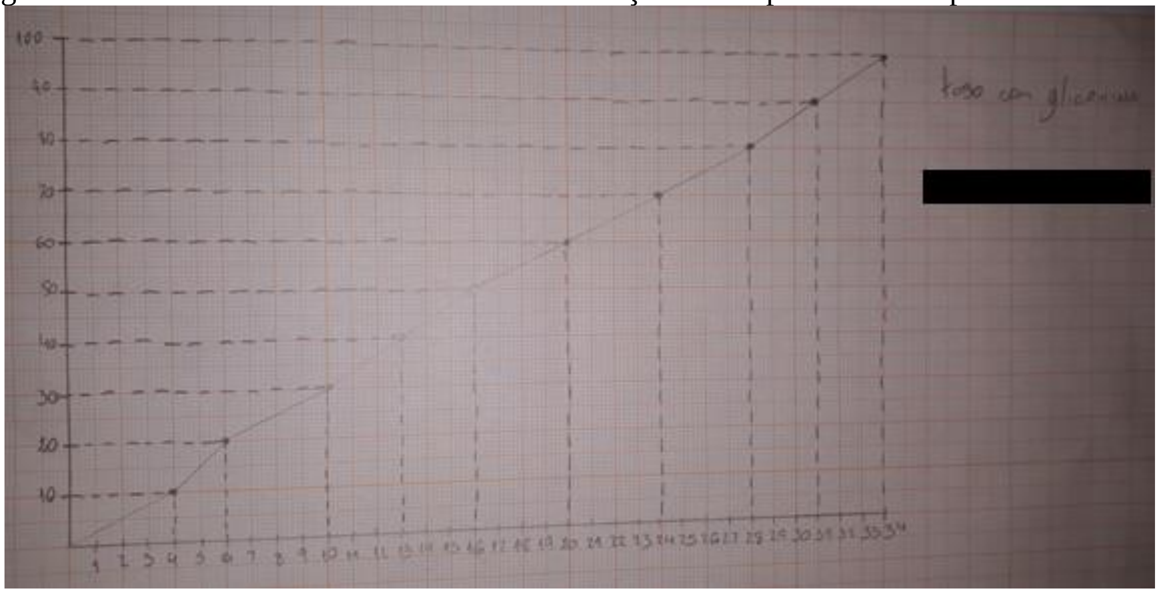
Figura 47: Gráfico descrevendo o experimento Coluna d'água em função do tempo



Fonte: acervo do pesquisador

Nesse primeiro experimento é possível perceber que embora, segundo a observação dos estudantes, os valores de tempo para percorrer 10 centímetros tenham uma variação de tempo entre as marcas de 5, 6 e 7 segundos na tabela e no eixo dos tempos, não se pode perceber essa variação de velocidade pela diferença na inclinação do gráfico, uma vez que os estudantes adotam a mesma distância no eixo dos tempos para valores de tempo diferentes. Já no experimento posterior, após debates e análises dos gráficos construídos anteriormente junto à turma, pode-se perceber um cuidado em relação a esses detalhes. E também, diferenças de velocidades perceptíveis por meio das inclinações em diferentes trechos do experimento, conforme ilustra a imagem a seguir.

Figura 48: Gráfico da velocidade da moeda em função do tempo construído por L.H



Fonte: acervo do pesquisador

Dessa forma, entende-se que a correção na construção dos gráficos realizada pelos estudantes permitiu que os mesmos fossem construindo noções em relação ao conceito de declividade das retas. Mas não somente isso, por meio da construção dos gráficos pelos mesmos, com posterior debate, propiciou poderem relacionar a angulação da declividade com suas respectivas velocidades em cada experimento. Com isso, foi possível introduzir o conceito de taxa de variação de crescimento do gráfico o qual está intrinsecamente relacionado à velocidade do ponto móvel – coluna d’água ou moeda, nos casos específicos.

6º Encontro (2 períodos de 55 minutos) – Atividade realizada no pátio da escola – gráfico dos deslocamentos de um colega

Nessa atividade um dos colegas foi convidado a percorrer um determinado percurso retilíneo no qual o mesmo deveria realizar a primeira parte caminhando, em seguida foi orientado a permanecer parado durante alguns segundos. Depois, a percorrer mais um percurso caminhando/correndo mais rapidamente, e por fim, o estudante foi convidado a realizar o final do percurso correndo o mais rápido possível.

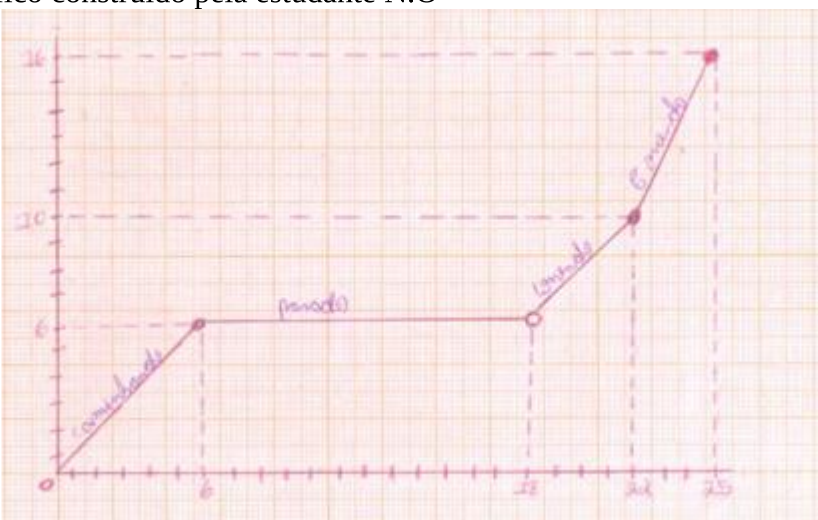
A nossa expectativa com essa atividade era de que os estudantes percebessem, por meio dos tempos e distâncias observadas no experimento, aspectos importantes para a leitura de um gráfico como a declividade de retas ou a ausência dela. E também, desejava-se saber qual a interpretação que os mesmos fariam da existência de declividade ou ausência da mesma. A *realidade* é relatada a seguir.

Figura 49: Descrição de percurso realizado no pátio

Fonte: acervo pesquisador

Acima, os estudantes cronometrando o percurso da colega que percorre uma distância de 25 metros, esse percurso é demarcado por folhas de ofício que distam uma da outra 2 metros e, por fim, um trecho de 1 metro. A seguir, um dos gráficos construídos pelos estudantes.

Figura 50: Gráfico construído pela estudante N.O



Fonte: acervo do pesquisador

Vale destacar a necessidade de auxílio que os estudantes tiveram para esboçar o gráfico dessa situação no intervalo de tempo entre 6 e 18 segundos, ou seja, no intervalo de tempo que o colega estava parado. Já para o esboço do gráfico nos demais intervalos de tempo, não houve dificuldade por parte dos mesmos.

Porém, embora os estudantes tenham necessitado de auxílio para esboçar essa parte do gráfico, não vemos isso de forma negativa, pois de acordo com Vygotsky, tal necessidade representa o estágio atual que os mesmos se encontravam. Em outras palavras, aquele estágio em que o indivíduo necessita de pistas, de ajuda, enfim, aquele estágio em que o estudante não consegue resolver sozinho determinado problema. Tal estágio é visto pelo psicólogo russo (Vygotsky 1994, p. 113) positivamente, haja vista que de acordo com ele "[...] aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã [...]". Ver-se-á mais adiante justamente isso, a saber, as funções que neste momento da pesquisa encontrava-se em estágio embrionário, desabrochar. Ademais, de acordo com Lev Vygostky (1994, p. 111):

> Por outro lado, se a criança resolve o problema depois de fornecermos pistas ou mostrarmos como o problema pode ser solucionado, ou se o professor inicia a solução e a criança a completa, ou, ainda, se ela resolve o problema em colaboração com outras crianças – em resumo, se por pouco a criança não é capaz de resolver o problema sozinho – a solução não é vista como um indicativo de seu desenvolvimento mental. Esta "verdade" pertencia ao senso comum e era por ele reforçada. Por mais de uma década, mesmo os pensadores mais sagazes nunca questionaram esse fato; nunca consideraram a noção de que aquilo que a criança consegue fazer com ajuda dos outros poderia ser, de alguma maneira, muito mais indicativo de seu desenvolvimento mental do que aquilo que consegue fazer sozinha. (VYGOTSKY, 1994, p. 111)

Vale lembrar que nessa atividade os estudantes também deveriam descrever matematicamente um movimento, ou seja, uma realidade observada. Assim, com a nossa ajuda questionando os mesmos, "que se o tempo passava e a colega permanecia parada, como seria o traçado do gráfico no seu respectivo intervalo de tempo?". Concluindo assim que o gráfico não teria inclinação alguma.

7º Encontro (2 períodos de 55 minutos) – Discussão sobre os gráficos construídos na aula anterior e experimento com água no tubo acrílico e glicerina líquida no tubo acrílico

Assim como no experimento em que os estudantes deviam observar o crescimento de uma coluna d'água no tubo acrílico para construção do gráfico. Nessa aula propomos primeiramente aos estudantes a observação de uma esfera e uma moeda percorrendo o tubo acrílico com água. Em seguida, propomos também o mesmo experimento só que agora com glicerina líquida no tubo acrílico, conforme imagem a seguir.

Figura 51: Experimento – ponto móvel percorrendo líquido em tubo acrílico

Fonte: acervo do pesquisador

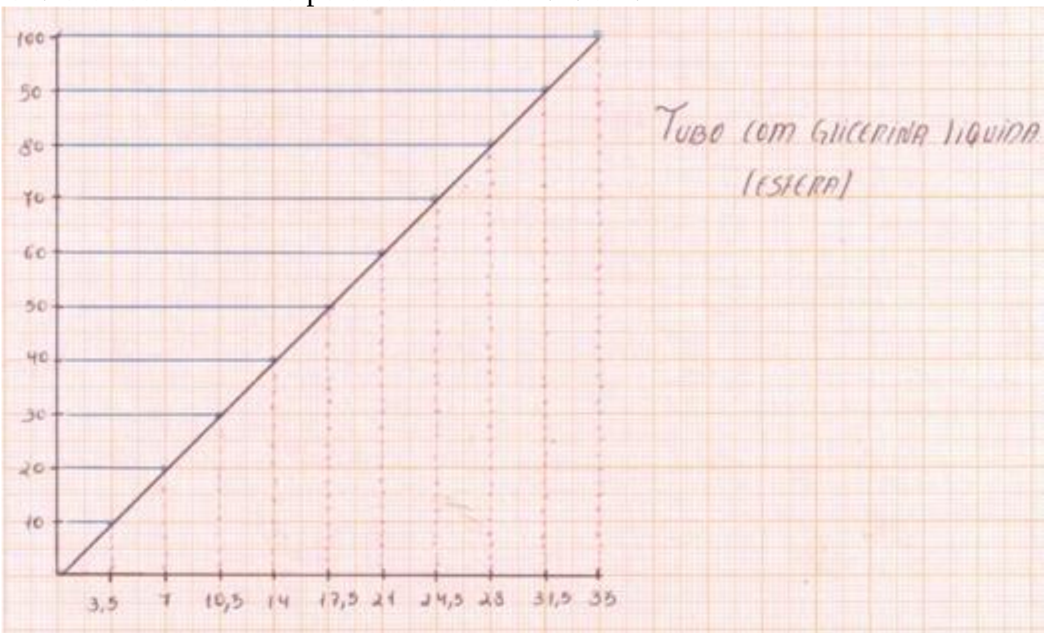
A nossa expectativa com esse experimento era de que os estudantes pudessem corrigir os erros cometidos nas construções anteriores e que pudessem perceber características de cada gráfico como, por exemplo, a relação existente entre a velocidade do objeto percorrendo o líquido contido no tubo e as inclinações dos gráficos. Ou seja, a percepção daquilo que chamamos de taxa de variação do gráfico.

Em primeiro lugar, pode-se perceber por meio das construções dos gráficos desse experimento uma coerência nos valores dos eixos e os espaços adotados pelos estudantes na malha quadriculada. Entende-se dessa forma, que além dos debates realizados nas aulas anteriores referentes às construções dos gráficos construídos anteriormente, um dos fatores que contribuiu para a qualidade dos gráficos que serão apresentados em seguida foi o de que o experimento observado oportunizou uma melhor visualização por parte dos estudantes. Tanto pela velocidade em que os objetos percorreram o líquido no tubo quanto pela posição de observação do experimento por parte dos estudantes.

Como dito anteriormente, a correção dos erros cometidos nos experimentos anteriores proporcionou aos estudantes realizarem relações entre aspectos importantes em cada gráfico como, por exemplo, a relação existente entre a inclinação da reta e a velocidade do experimento. Tudo isso, só pode ser percebido apenas quando as proporções entre as distancias foram adotadas coerentemente.

No gráfico a seguir, é possível perceber o cuidado tomado pelos estudantes ao adotarem o mesmo comprimento no “eixo x” o qual representa os tempos observados pelos estudantes. A saber, 3,5 para cada marca atingida no tubo pela esfera.

Figura 52: Gráfico construído pelos estudantes N.L. e B.D



Fonte: acervo do pesquisador

Vale notar também a estratégia adotada pelos estudantes para a construção do gráfico acima, uma vez que os mesmos fizeram um arredondamento do tempo para a construção do gráfico. Além disso, também se pode perceber durante a prática o diálogo de alguns deles relatando que a diferença de tempo entre uma marca e outra, atingida pela esfera era sempre o mesmo e que, por isso, a velocidade era constante. A seguir, o tempo cronometrado pelos estudantes no experimento.

Figura 53: Tempo observado para um ponto móvel percorrer a distância de 10 cm

Fonte: acervo do pesquisador

Assim, a partir da construção acima, projetamos o gráfico na lousa por meio de data show com o propósito de discutirmos sobre aspectos do gráfico construído, conforme dialogo a seguir.

– Professor: pessoal, esse é o experimento com o tubo de glicerina e que, segundo os colegas, as marcas de 10 em 10 centímetros foram atingidas em um intervalo de tempo igual. De 3,5 segundos...

– Estudante M.G.: 3,5 mais 3,5 que vai dá 7

– Estudante D.S.: Sor, só espaço ali do tempo que ficou um pouquinho maior né?

– Professor: Não, porque eles adotaram pra cada 3,5 de tempo o mesmo espaço no eixo dos tempos

Também aproveitamos o gráfico construído pelos estudantes para realizar o cálculo da velocidade, a qual foi introduzida a partir daquilo que eles já haviam visto nas placas que limitam a velocidade em vias públicas. Com a seguinte pergunta:

– Professor: quando vemos as placas em vias públicas 80 km/h, sobre o que isso está se referindo?

– Estudante B.D.: velocidade permitida

– Professor: mas quando eu digo 80 km por hora, eu estou dizendo que o veículo está percorrendo 80 km em uma hora, não é? 80 km/h!

– Professor: Ou seja, a velocidade é o espaço percorrido em um determinado tempo, ou ainda, 80 km/h = $\frac{80km}{h}$ *(escrito na lousa), que é uma divisão*

– Professor: Então gente, como eu calculo a velocidade nesse gráfico?

– Estudante D.S.: 50 dividido por 17,5?

– Professor: Sim, é uma maneira, teria outra maneira de calcular?

– Estudante A.L.: cinqüenta menos quarenta, dividido por 17,5 menos 14

– Professor: nesse caso o tempo inicial não é zero né porque eu estou pegando esse trecho entre 40 e 50, se fosse pegar a distância de 50 centímetros aí seria?

– Estudante A.L.: sim

– Estudante D.S.: 50 menos 40?

– Professor: 50 menos 40, dividido por?

– Estudante A.L.: 3,5 segundos

Vale à pena abrir um “parêntese” nesse ponto da discussão para salientar o domínio relativo aos pares ordenados que é demonstrado pelos estudantes ao relacionarem as distancias percorridas pelo objeto em seus respectivos intervalos de tempo. Tal relação se mostra importante para a realização de uma interpretação adequada do gráfico bem como a determinação de valores importantes que os gráficos fornecem como, por exemplo, a velocidade do objeto, ou descrevendo matematicamente, a taxa de variação do móvel.

A partir dos valores das distâncias percorridas pelo objeto e os respectivos tempos citados pelos estudantes, calculou-se juntamente à turma a velocidade desse experimento em diversos intervalos de tempo e suas respectivas distâncias.

$$Vm = \frac{50}{17{,}5} = \frac{50-40}{17{,}5-14} = \frac{100-60}{35-21} = 2{,}8 cm/s$$

– Professor: pessoal, se os números dos eixos do gráfico estiverem coerentes em relação a sua proporção e o gráfico for uma reta de fato, o que vai acontecer com a velocidade?

– Estudante A.L.: a velocidade é contínua (quis dizer constante – a mesma em todos os trechos do experimento)

A partir da participação da estudante A.L. em que a mesma conclui que a velocidade é constante, ou seja, é igual em qualquer parte do gráfico, é possível perceber aquilo que David e Lopes (1998, p. 31) chamam de características de estudantes de sucesso em matemática. Pois segundo elas, estes possuem capacidade de “[...] generalizar a partir de casos particulares [...]”.

Ademais, é importante mais uma vez ressaltar que de maneira alguma se deseja supervalorizar as práticas em detrimento das atividades mentais superiores (educação intelectual). Pois se entende que quando se utiliza apenas materiais concretos nas aulas de matemática, está-se preparando os estudantes apenas para aquilo que é aparente. Quando na verdade, uma das ferramentas poderosas que a ciência da matemática dispõe ao homem é a de imaginar a partir de experiências e, consequentemente, generalizar a partir delas. Enfim, adentrar o mundo das possibilidades!

Assim, dentre outros objetivos, o que se deseja é que os estudantes a partir de atividades práticas e diálogos em grupo (cooperação) consigam desenvolver as capacidades mentais superiores podendo, assim, fazer generalizações a respeito de determinados fenômenos. Tal capacidade tem a ver com aquilo que Piaget chama de reversibilidade, a qual é definida por Lima (1976, p. 18) como sendo a [...] “capacidade de executar uma mesma ação nos dois sentidos de percurso, mas tendo consciência de que se trata da mesma ação [...]”. Segundo ela, isso ocorre no período operatório em que:

> O pensamento capta não apenas as realidades físicas aparentes, mas também as suas transformações. A realidade é vista como um todo permanente, apesar das mudanças que afetam a percepção.
>
> Finalmente no limiar da adolescência o pensamento consegue sobrepujar a realidade concreta e atingir o mundo das possibilidades. Surgem as operações formais, alicerçadas no raciocínio hipotético-dedutivo. A inteligência se liberta do visível, do representável e atinge o seu auge, num equilibrio que não quer dizer repouso, mas ajuste das interações. Coincide com a fase messiânica, em que o adolescente, por uma volta ao egocentrismo, atribui ao seu pensamento o ilimitado poder de modificar o mundo, reformular valores, consertar a vida. (LIMA, 1976, p. 18)

Assim, percebe-se que por meio da experiência prática, a descrição da mesma, e consequentemente de sua análise, os estudantes puderam realizar constatações a respeito do movimento, formando assim teorias. De modo que, em relação ao movimento em questão, os aprendizes não dependem mais de uma experiência real (concreta) como, por exemplo, descobrir qual o deslocamento do móvel no instante de 3.567 segundos. Não necessitam observar fisicamente essa experiência para concluir que o ponto móvel deslocou-se 9.987,6 centímetros, ou 99,876 metros. Parafraseando as palavras de Lima (1976, p. 18), é “o pensamento conseguindo sobrepujar a realidade concreta e atingindo o mundo das possibilidades”.

– Professor: a velocidade é contínua, a velocidade é constante, é a mesma velocidade em qualquer trecho do gráfico, vai ser sempre a mesma velocidade

– Estudante A.L.: movimento uniforme

– Professor: é um movimento uniforme, exatamente! MU que eles chamam ou MRU que são movimento uniforme ou movimento retilíneo uniforme

– Estudante D.S.: retilíneo?

– Professor: retilíneo, esses experimentos que estamos fazendo são todos em uma linha reta, pra podermos ter a distância percorrida é melhor, como no tubo acrílico, e por isso é chamado movimento retilíneo.

– Estudante D.S.: professor, porque ele é uniforme?

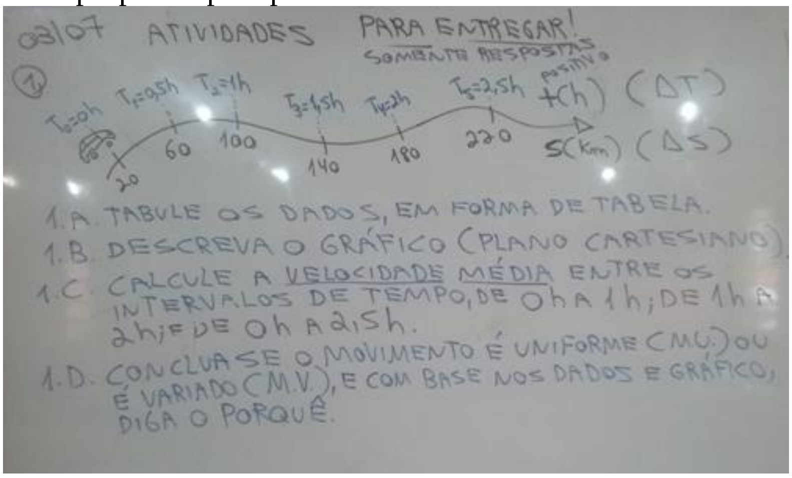
– Professor: ele é uniforme porque a velocidade não muda, ela é sempre a mesma

É importante dizer que o processo que levou os estudantes a realizarem as descobertas acima se deu por meio de uma série de experimentos em que os mesmos coletaram os dados e foram construindo os gráficos relativos a esses experimentos. Ou seja, o conhecimento sendo construído e descoberto a partir da ação deles. Na verdade, foi nesse sentido que se deu o nosso esforço desde o planejamento das atividades propostas, cujo objetivo era de que os estudantes não recebessem o conhecimento por meio de uma transmissão por parte do professor, em "blocos acabados". Mas que por meio da sua própria ação (experiência), fossem fazendo constatações. De acordo com Lima (1976, p. 18-19), tal processo tem a ver com a teoria piagetiana, haja vista que:

> A visão piagetiana é fundamentalmente estruturalista e dinâmica: tudo que o pensamento constrói hoje se deve à coordenação do que já estava construído, cada novo esquema engloba o anterior, integra-o e supera, numa progressiva estruturação de formas cada vez mais equilibradas, numa paulatina equilibração de estruturas cada vez mais flexíveis. Em todas as fases do seu desenvolvimento a própria criança é o agente, quer pela sua ação prática inicial, quer pela posterior ação simbólica e mental. (LIMA, 1976, p. 18-19)

E como as práticas propostas têm como um de seus objetivos observarem aspectos da construção do aprendizado dos estudantes, por meio de atividades interdisciplinares entre matemática e ciências, procuramos estar em sintonia com o professor de ciências. Este, em suas aulas, ministrava concomitantemente às nossas práticas, conceitos relativos ao estudo dos movimentos, conforme pode ser observado nas imagens a seguir.

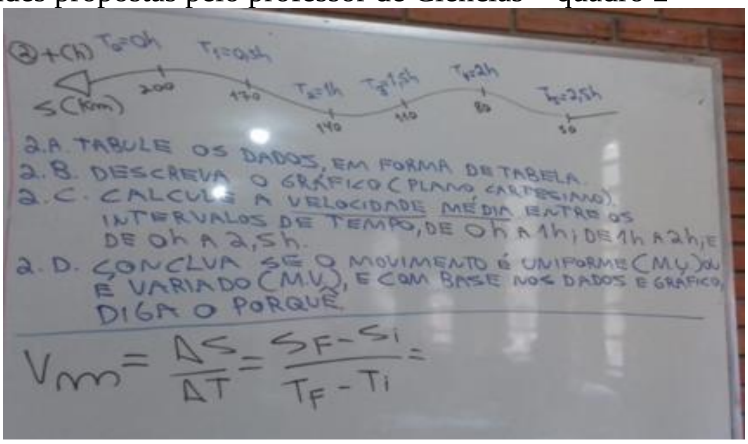
Figura 54: Atividades propostas pelo professor de Ciências



Fonte: acervo do pesquisador

Assim, aproveitamos o quadro deixado pelo mesmo para podermos realizar o cálculo das velocidades descritas anteriormente e utilizar a mesma relação matemática utilizada pela disciplina de ciências nas nossas práticas. Tais relações oportunizaram que os estudantes relacionassem o valor numérico da velocidade com as inclinações das retas, o que se poderá perceber mais adiante.

Figura 55: Atividades propostas pelo professor de Ciências – quadro 2

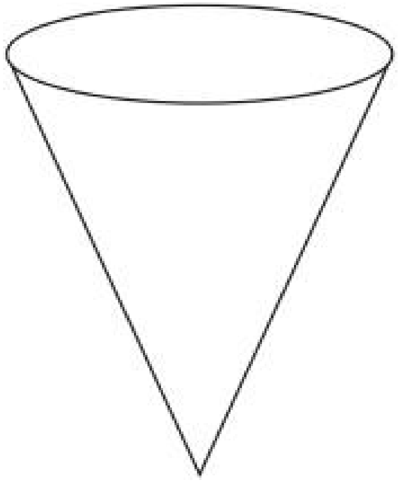


Fonte: acervo do pesquisador

Com o propósito de realizar mais um debate/diálogo, projetamos na lousa o seguinte problema de vestibular.

Problema do “Cone” (UFRGS 2016): Um recipiente tem a forma de um cone com o vértice para baixo, como na figura a seguir. Para encher de água esse recipiente, será aberto uma torneira com vazão constante de água.

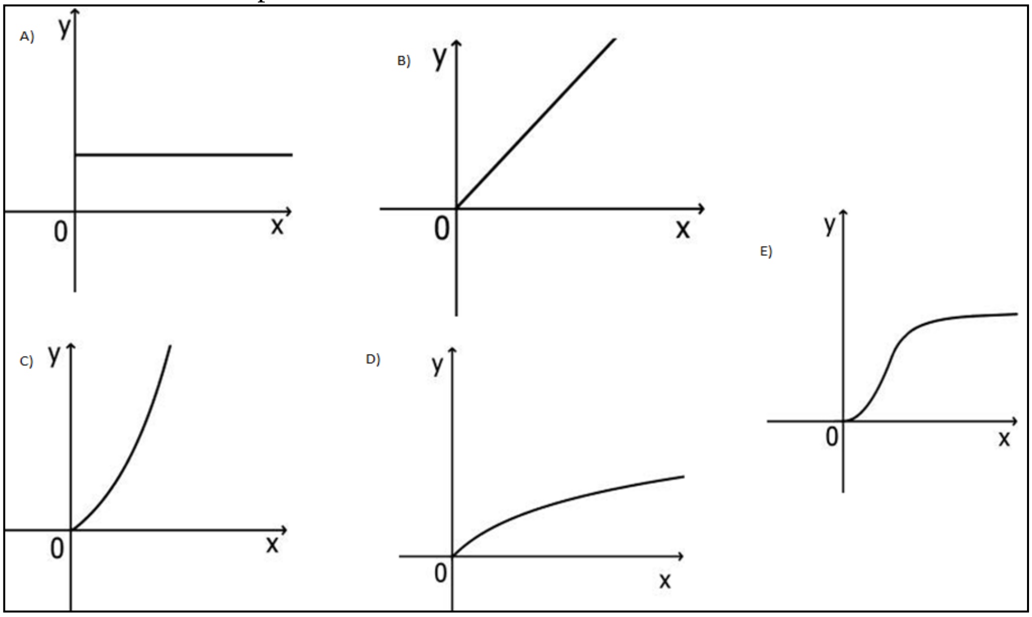
Figura 56: Cone



Fonte: http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/copy2_of_4DIAHISMAT.pdf

Assinale o gráfico abaixo que melhor representa a altura y que a água atinge, no recipiente, em função do tempo.

Figura 57: Alternativas do problema do Cone



Fonte: http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/copy2_of_4DIAHISMAT.pdf

Após leitura com a turma, segue o diálogo.

– Professor: na opinião de vocês então, qual é o gráfico

– Estudante B.D.: No caso, no começo vai ser bem mais rápido porque vai ser mais fino e no final vai ser mais demorado pra encher por que é mais largo

– Professor: faz sentido gente?

– Estudante A.L.: Sim!

– Estudante M.G.: Sim!

– Estudante K.F.: Sim!

– Professor: Faz né, porque é mais fininho aí vai encher rápido e quando ficar mais largo vai demorar mais

– Professor: Então vai começar com uma velocidade maior no início e depois vai diminuir é isso? Então qual seria o gráfico? Vamos ver um por um?

– Estudante A.L.: É a D né sor?

– Professor: É a D?

– Estudante G.: Não, acho que é a E porque ela começa subindo rápido e depois vai indo mais devagar

– Estudante B.D.: É a D sor, ele começa rápido e vai diminuindo a inclinação

– Professor: Vai diminuindo mais devagar né, porque na E ele vai aumentando muito rápido e diminui muito rápido, é meio brusco não é?

– Professor: E porque que o A não pode ser?

– Estudante G.: porque ele tá com uma velocidade contínua

– Estudante B.D.: Ela tá parada, na verdade não tem velocidade nenhuma

– Professor: É, e ele começa a partir de que ponto?

– Estudante M.G.: Ele não começa no zero

– Professor: Sim, ele já começa meio cheio que não é o que problema está dizendo

– Estudante B.D.: A "B" não é porque é uma velocidade contínua (constante), como se tivesse a mesma velocidade do início ao fim

– Professor: Sim, é como se fosse o nosso tubo, porque o nosso tubo tinha a mesma...

– Estudante B.D.: A mesma área (confundiu-se com volume)

– Professor: Sim, o mesmo volume né

– Professor: E a C?

– Estudante B.D: Esse aí começa devagarinho e depois vai indo muito rápido

É importante salientar aspectos importantes que foram percebidos durante o diálogo acima. Em primeiro lugar, vale dizer mais uma vez da importância da oportunidade que foi dada por meio do diálogo para cada participante justificar as suas posições para aquelas alternativas consideradas incorretas, bem como para a considerada correta por cada um. Haja vista que é dessa forma, ou seja, por meio da troca de idéias entre os participantes e de suas argumentações que foi possível perceber como cada um deles pensava e construía o seu próprio aprendizado.

Além disso, de acordo com Lima (1976, p. 22) em suas análises da escola piagetiana, a argumentação por parte dos jovens aprendizes nessa fase da pré-adolescência (período operatório) é favorecida. Uma vez que, o "[...] egocentrismo diminui, a justaposição também, as respostas lógicas aumentam, o pensamento se socializa: o choque entre as suas ideias e as dos outros traz a necessidade de argumentar e provar "[...]".

Mas não somente isso, também se pode perceber os estudantes fazendo uso de "teorizações" ou, de forma análoga, conceituações, e as utilizando para justificar as suas conclusões. De forma específica, é possível notar que os mesmos fazem uso do conceito de taxa de variação do crescimento e decrescimento do gráfico para justificar as suas posições.

Além disso, é importante salientar que nessa atividade não se tinha um cone diante deles para que pudessem observar e assim poder tirar suas conclusões a respeito, mas nota-se a capacidade imaginativa em ação. Também se pode perceber a demonstração de domínio em relação a pares ordenados e ponto de partida do móvel no experimento em questão, e foi baseado nesse conhecimento que a alternativa "A" foi "descartada". Já que não começava em zero (cone vazio). Também em relação a essa mesma alternativa pode-se perceber presente no diálogo, mesmo que implicitamente, o conceito de função constante ao se dizer que o tempo passava e o nível d'água no cone permanecia a mesma (ausência de velocidade).

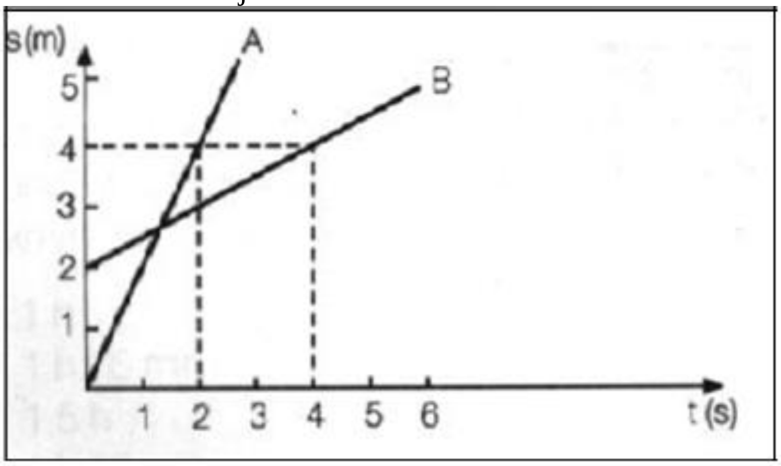
Em suma, pode-se perceber a mobilização de conhecimentos construídos em práticas anteriores sendo utilizado pelos estudantes, fato esse que é reiterado por Lima (1976, p. 16) quando afirma que "[...] os esquemas mentais se derivam dinamicamente uns dos outros, os de agora dos de ontem, os de amanhã dos de hoje, em busca da adaptação e do equilíbrio, que a operação expressa [...]". E por fim, salienta-se a capacidade imaginativa dos mesmos e a socialização de conhecimentos que, por sua vez, para serem validados exigiu a argumentação de seus interlocutores.

8º Encontro (2 períodos de 55 minutos): discussão sobre problemas envolvendo funções e gráficos

Nesse encontro foi proposto o seguinte problema para discussão.

Problema – Dois móveis, A e B, percorrem a mesma trajetória retilínea. A figura representa as posições (s), dadas em metros, em função do tempo (t), dado em segundos, desses dois móveis. No instante *t = 5s*, a distância entre A e B vale, em metros:

Figura 58: Dois móveis em uma trajetória



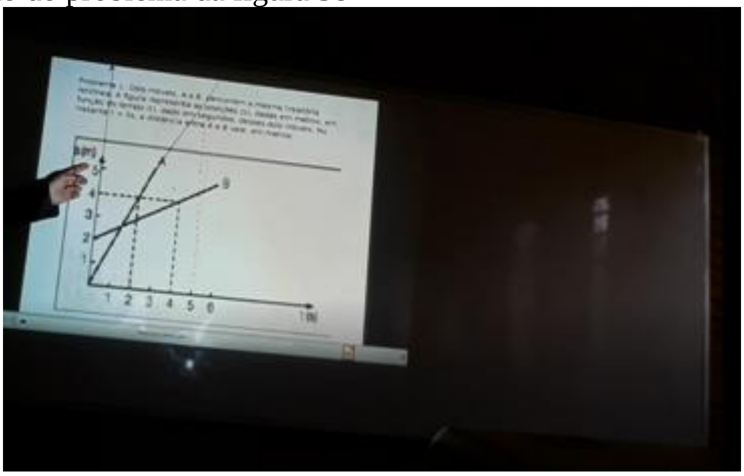
Fonte: http://muitafisica.blogspot.com/2009/03/cinematica-2-lista-movimento.html (acesso em fevereiro de 2019)

O gráfico acima foi projetado na lousa com o propósito de propor o diálogo aos estudantes. Ressaltou-se aos mesmos que o mais importante não era simplesmente encontrar a resposta certa, mas sim, que estávamos interessados em extrair do gráfico o máximo de informações possíveis. Em outras palavras, desejava-se que os estudantes realizassem a investigação matemática do gráfico em questão por meio de diálogo no grande grupo. Tais investigações e discussões são relatadas a seguir.

– *Professor: Então ele quer saber qual a distância entre os dois móveis no instante de 5 segundos? Vocês conseguem ver ali, interpretar? Aproximadamente?*

Para auxiliar os estudantes na investigação, damos prolongamento ao desenho do gráfico e dos eixos conforme imagem a seguir, com o propósito de ilustrar aos aprendizes que o movimento tinha continuidade além daquilo que estava visível.

Figura 59: Projeção do problema da figura 58



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: Uma boa estratégia é descobrir qual a posição de cada móvel no instante de 5 segundos. Alguém tem algum palpite da posição do móvel B?

– Estudante A.L.: Entre 4 e 5 metros

– Professor: entre 4 e 5 né gente...

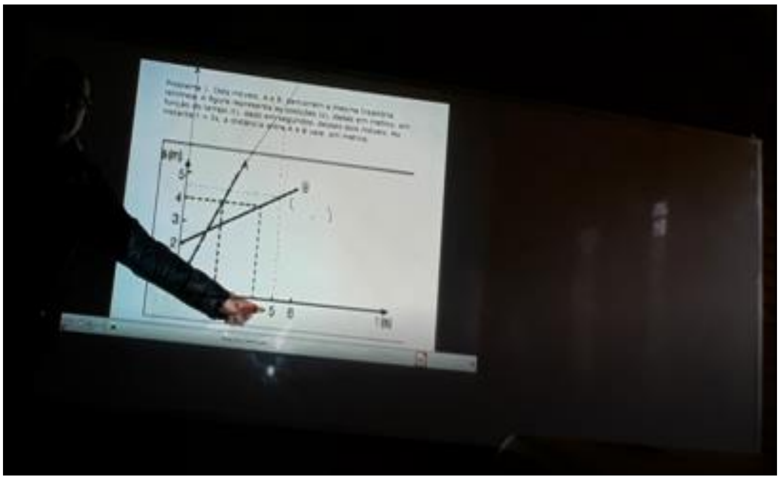
– Estudante B.D.: 4,5

Vale ressaltar que o nosso papel restringiu-se a auxiliar os estudantes na investigação realizando perguntas que os instigassem e, a cada interação dos mesmos, fazendo anotações na imagem projetada no quadro negro. Já para a solução do problema em questão, eles não poderiam se valer apenas do concreto, do visual, haja vista que no gráfico não está exposta a posição dos móveis descritos para o tempo de 5 segundos. Ou seja, o problema exige não apenas a ação de sistematizar dados obtidos por meio de um experimento real, como ocorreu no início da presente pesquisa. Contudo, as investigações nessas situações reais (experimentos) proporcionaram que os mesmos transformassem a experiência, por meio dos dados obtidos, em objetos de conhecimento. A partir disso, o estudante pode realizar deduções hipotéticas que o ajudaram a chegar à solução de problemas. Tal capacidade é atingida no período operatório e, segundo Castro (1974, p. 57), nele:

> O adolescente consegue vencer as dificuldades do período anterior, em dois aspectos complementares: a progressiva liberação do concreto e a combinação plena de todas as operações de que dispõe. É o que lhe dá acesso ao pensamento hipotético-dedutivo, permitindo-lhe proceder a partir de hipóteses, como proposições assumidas, mesmo que não encontrem base na realidade. (CASTRO, 1974, p. 57)

Assim, nesse princípio de diálogo e investigação por parte dos estudantes, percebe-se os mesmos desprendendo-se do concreto progressivamente ao realizarem deduções de qual seria a posição dos móveis no tempo pedido, a saber, de 5 segundos.

Figura 60: Anotações na projeção da figura 59



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: Então, esse ponto do gráfico do móvel B, não é um parzinho ordenado? Que parzinho ordenado é esse?

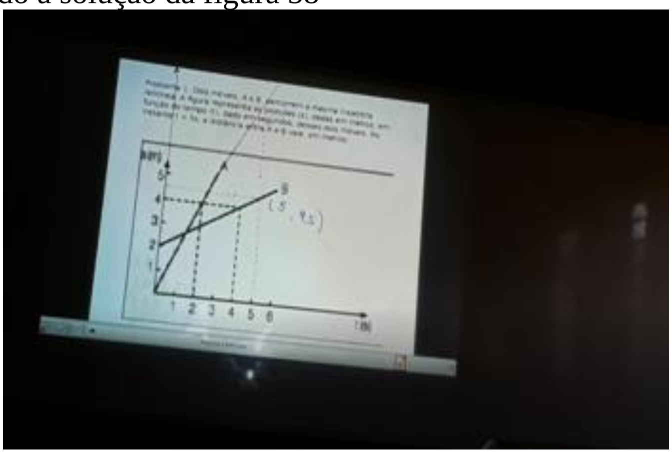
– Estudante B.D.: (5; 4,5).

Observação: Note que os estudantes realizam uma aproximação para a posição do móvel.

– Estudante A.L.: cinco e quatro e meio

– Professor: Exatamente, o tempo que é dado no eixo x é 5 e o espaço é, aproximadamente, 4,5. Parzinho ordenado (5; 4,5)

Figura 61: Construindo a solução da figura 58



Fonte: acervo do pesquisador

– Estudante D.S.: Sor, mas como tu sabe que quando o tempo é 5 segundos, o móvel parou em 4, 5 metros?

– Professor: O móvel não parou, e não temos certeza que é 4,5 por isso estamos dizendo que está, aproximadamente, em 4,5 metros

– Professor: E porque estamos interessados no tempo de 5 segundos?

– Estudante D.S.: Porque no texto está dizendo instante de 5 segundos

– Professor: No tempo igual a zero, qual a posição do móvel B? Qual é o "espaço" do móvel B no tempo igual a zero?

– Estudante G.: dois

– Professor: Dois gente?

– Estudante G.: Sim

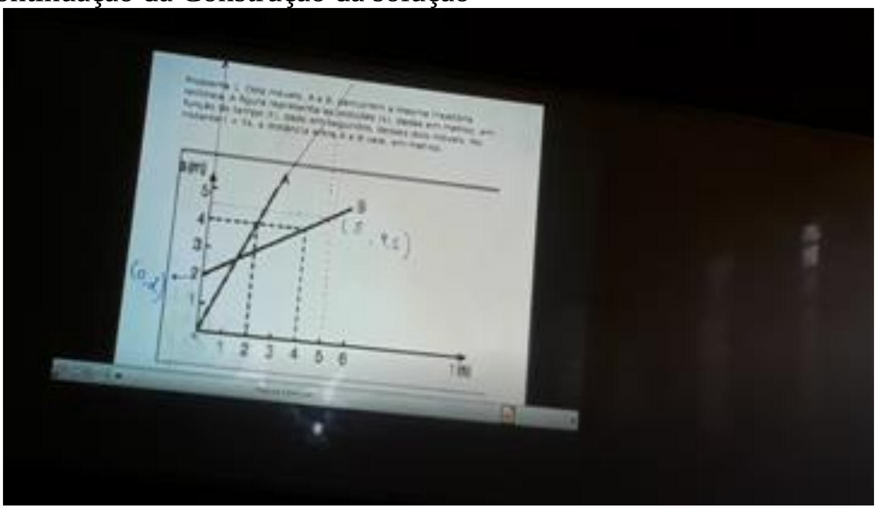
– Professor: Então quando o tempo é zero, onde está o móvel B?

– Estudante A. L.: No dois

– Professor: Está no dois né gente, ele parte do dois não é? Então eu tenho outro parzinho ordenado aqui não tenho? Que parzinho ordenado eu tenho aqui?

– Estudante A.L.: (0,2)

Figura 62: Continuação da Construção da solução



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: E no tempo igual a zero, onde está o móvel A?

– Estudante A.L.: No zero também

É importante notar a facilidade com que os estudantes identificam os pares ordenados de ambos os móveis no diálogo acima. Acredita-se que o fato do problema estar vinculado ou contextualizado em um problema em que se têm dois móveis em análise, pode ter contribuído para a estruturação e para a fácil descoberta por parte dos mesmos.

– Professor: Quem está mais rápido?

– Estudante B.D.: O "B"

– Professor: O "B" gente?

– Estudante M.G.: O "A"

– Estudante B.D.: Ah não, é o "A"

Note que o confronto entre opiniões levaram o estudante B.D. a reformular a sua opinião em relação à velocidade de cada móvel.

– Professor: O "A" está mais rápido? Por quê?

– Estudante M.G.: Porque está mais inclinado

– Professor: Porque ele está mais inclinado, ele está subindo mais rápido?

– Estudantes B.D. e A.L.: Sim!

O diálogo acima apresenta aspectos importantes referentes ao conhecimento construído pelos estudantes. Em primeiro lugar, é possível perceber que o diálogo proporciona que os estudantes participem ativamente em busca da solução do problema por intermédio da verbalização de seus respectivos pontos de vista. Porém, como sabido, para que as suas posições em relação ao problema dado fossem aceitas e validadas pelo grande grupo, era necessário que se justificasse por quais motivos levaram-nos a tais e tais conclusões. E caso não consiga convencer o seu interlocutor, os mesmos deveriam ter a capacidade de remanejar o seu pensamento assimilando as posições contrárias as suas.

É o que pode ser observado no diálogo anterior, já que primeiramente é cometido um equívoco por parte de um dos estudantes e dessa forma não teve a sua posição validada (aceita) pelos colegas de classe. Para Castro (1974), essa troca de idéias entre os participantes do grupo proporciona muito mais do que a socialização entre os participantes, o que também é importante, haja vista que os estudantes reúnem-se naturalmente e inicia-se a troca de idéias entre os mesmos. Mas para ela (1974 p. 56-57), em tais atividades há muito mais do que uma experiência de convívio ou comunicação ao afirmar que:

> O grupo atua também sobre o desenvolvimento cognitivo. É a oportunidade para a comparação dos pontos de vista de cada um com o do outro, para que sejam percebidas as várias perspectivas sob as quais objetos ou acontecimentos podem ser vistos ou interpretados e os conflitos que surgem das discrepâncias encontradas. As opiniões próprias, por outro lado, para que sejam aceitas devem ser justificadas, provadas, e apresentadas com clareza e precisão. Conseguindo aperfeiçoar suas próprias operações mentais, comparando seus esforços com os dos outros, e coordenando o conjunto do

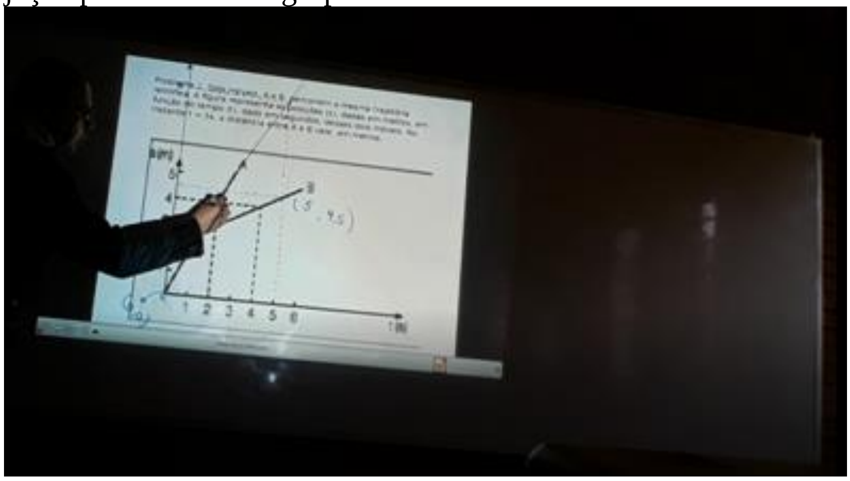
> processo, é que se aguça a mente crítica do aluno. O processo de discussão, do trabalho em comum, para Piaget, é mais que uma simples cooperação, é um esforço de “operar” em conjunto, uma “cooperação”. (CASTRO, 1974, p. 56-57)

– Estudante D.S.: Sor, tu sempre vai levar em conta a reta e não os números?

– Professor: Sim, a reta e os números, tudo! Eu vou pegar os pontos que eu sei pra trabalhar e aí eu vou começar a investigar

– Professor: E que ponto é esse (par ordenado na imagem a seguir)?

Figura 63: Projeção para debate em grupo



Fonte: acervo do pesquisador

– Estudante B.D.: (2,4)

– Professor: (2,4). E tem como eu descobrir a velocidade deles? Como eu descubro a velocidade deles? Como é a velocidade nas placas de trânsito?

– Estudante D.S.: É dividir a distancia pelo tempo né?

Vale notar a formação de um esquema mental que reconhece que a ação de obtenção da velocidade em um movimento retilíneo uniforme que foi realizada em problemas anteriores, pode ser novamente aplicada. Tal conceito de esquema, de acordo com Castro (1974, p.89), está ligado à atividade de assimilação, pois “[...] esta é que permite ao sujeito reconhecer certas atividades, reproduzi-las e generalizá-las, quando construídos os seus esquemas, pelo próprio funcionamento assimilador, geneticamente, pouco a pouco [...]”. A seguir, a continuação do diálogo.

– Professor: Sim, dividir a distância pelo tempo. Ou seja, velocidade é o espaço percorrido em determinado tempo. E ainda, por exemplo, se um móvel está andando com uma velocidade de 2 metros por segundo, em 5 segundos quanto ele andou?

– Estudante B.D e A.L.: 10 metros

– Professor: 10 metros

Ademais, é importante ressaltar a partir do diálogo acima que os estudantes não mais agiram em uma situação concreta, mas passaram a operar em uma realidade virtual, ou seja, sem os modelos diante de si, mas apenas com o apoio verbal. De acordo com Lima (1976, p. 23), tal fato demonstra que o adolescente "já atingiu o equilíbrio das operações abstratas".

– Estudante B.D: Alí ó sor, o "A" tá 4 metros a cada 2 segundos

– Professor: E se fosse calcular a velocidade por segundo

– Estudante B.D: 2 a cada 1!

É importante notar em princípio, nesse início de construção da solução por parte do estudante B.D., alguns aspectos presentes no raciocínio do mesmo que o levaram a deduzir que a velocidade do móvel era de 2 metros por segundo. Em primeiro lugar, menciona-se a compreensão por meio de leitura e interpretação do gráfico como um todo por parte dele. Ou seja, consegue ter uma visão do movimento como um todo, do problema em sua totalidade.

Nessas condições, e sabendo que o gráfico de um movimento representado por uma reta possui igual taxa de crescimento ou decrescimento em todo o percurso – velocidade constante, constatado nos primeiros experimentos. Dessa forma, o estudante consegue deduzir que o móvel percorre 2 metros a cada segundo (2m/s), já que, se o móvel percorre 4 metros em dois segundos, percorrerá a metade em um segundo.

O desenvolvimento dessa capacidade tem a ver com o conceito de reversibilidade de Piaget, que é caracterizada por Lima (1976, p. 18) como sendo "[...] a capacidade de executar uma mesma ação nos dois sentidos do percurso, mas tendo consciência de que se trata da mesma ação [...]". E acrescenta que nesse período o pensamento do indivíduo "[...] não capta apenas as realidades físicas aparentes, mas também as suas transformações [...]".

Além disso, de acordo com Castro (1974, p. 54-55), as "[...] operações lógicas resultam da coordenação das ações de combinar, dissociar, ordenar e estabelecer correspondências, que então (no período concreto) adquirem a forma de sistemas reversíveis [...]". Ademais:

> Classificar e seriar torna-se sistemas operatórios gradualmente mais complexos, que permitem, entre outras possibilidades, a aquisição da noção de numero e das operações numéricas.
>
> Operações "infralógicas" são construídas, paralelamente às já referidas, e que se fundamentam na coordenação de ações sobre objetos contínuos. A construção das noções de tempo, espaço, velocidade, movimento e a das diferentes relações geométricas (topológicas, projetivas e euclidianas) exigem a reunião de partes em totalidades hierárquicas, a

> colocação e o deslocamento, no tempo e no espaço. A capacidade de distinguir num todo suas partes, de reconstruí-lo, de considerar objetos em suas relações espaço-temporais requer operações desse tipo. (CASTRO, 1974, p. 55)

Tal capacidade pode ser percebida no discurso do estudante B.D., uma vez que o mesmo demonstra a interpretação correta do todo, mas reconstrói o movimento por meio de suas partes. Chegando assim, por meio da visão geral do movimento, a características do movimento em suas partes, em síntese, faz o caminho inverso. E como dito anteriormente, tal capacidade tem a ver com aquilo que o mestre de Genebra chama de reversibilidade. A seguir, mais trechos do diálogo.

– Professor: Perfeito, em 4 segundos então, quanto ele andou?

– Estudante B.D.: 8 metros!

– Professor: E o móvel "B", como eu descubro a velocidade do "B"? Quanto que ele andou?

– Estudante B.D.: O "B" tá "um a cada um"

– Estudante A.L.: 4 metros em quatro segundos

– Professor: 4 metros em quatro segundos?

– Estudante B.D.: O "B" tá um por um sor

– Professor: Vocês estão esquecendo um detalhe...

– Estudante A.L.: Sim sor...

– Estudante B.D.: Não peraí, é que ele começou no 2 então...

– Estudante A.L.: 2 metros em 4 segundos

– Estudante B.D.: 1 metro em 2 segundos (fração equivalente)

– Professor: 2 metros em 4 segundos que pode ser escrito como 1 metro em 2 segundos e que se formos dividir eles vai dar quanto?

– Estudante G.: Dá...0,5

Ao contrário daquele modelo de aula mecânica em que os estudantes não precisam explicar o porquê de tais e tais resultados, pois basta aplicar um determinado algoritmo sem saber "por que e para que?". Nas atividades propostas, para que suas posições sejam aceitas é preciso que eles atribuam coerência ao seu pensamento, e foi com esse intuito que sempre propomos diálogos sobre as atividades desenvolvidas. Haja vista que, abrindo esse espaço para a turma dialogar sobre possíveis soluções, acredita-se que o desenvolvimento de capacidades como observação, reflexão, criação, discriminação de valores, julgamento, comunicação, convívio, cooperação, decisão e ação podem ser potencializados.

De acordo com Castro, tais capacidades fazem parte do elenco piagetiano de operações concretas e formais, pois segundo ela:

> Todas elas são de um ou outro modo, modalidades de ação e operação, ora muito amplas e inclusivas (por exemplo, a reflexão) ora mais restritas (por exemplo, a observação, como forma determinada de ação), às vezes acentuando aspectos sociais da ação (convívio, cooperação, comunicação) às vezes aspectos individuais (ação).
>
> A procura da solução de problemas poderá mobilizar todo esse elenco de "capacidades" e pôr em ação, de modo mais preciso a operacionalidade do educando.
>
> O problema desafia a curiosidade, a atividade de descoberta e criatividade do aluno. Também nesse particular Piaget dá firmeza a antiga norma da Escola Nova. Pois que os esquemas assimiladores do sujeito são desafiados quando encontram dificuldade em assimilar a realidade. Quando uma incongruência, uma dificuldade, um conflito exigem sua mobilização para que essa realidade possa ser ativamente reconstruída pelo sujeito. (CASTRO, 1974, p. 52)

A partir disso, vale salientar que por meio do diálogo dos estudantes em busca das soluções e com base na citação acima, é possível perceber os mesmos reconstruindo a situação dada à sua maneira, expondo o seu raciocínio e o caminho trilhado em busca dessa solução. Ou seja, percebe-se uma construção de uma solução por parte deles que não foi nem o professor, nem o livro didático quem forneceu. E não seria exatamente o desenvolvimento de tal capacidade que se deseja ser desenvolvida nos aprendizes?

Ora, em uma época em que a internet democratiza o espaço para a opinião de todos em relação aos mais diversos temas da sociedade hodierna, de modo que dentre essas milhares de opiniões se torna indispensável que os estudantes desenvolvam uma mente crítica e não aceitem tudo que lhes seja oferecido como verdade. Ademais, vale lembrar os perigos existentes na veiculação de notícias falsas nos meios digitais, haja vista que com apenas um *click* boatos podem ser espalhados trazendo consequências sérias e, por vezes, irreparáveis na vida de pessoas inocentes. Nesse sentido, vale lembrar as palavras de Piaget trazidas por Castro (1974, p. 40), quando afirma que:

> Ora, Piaget afirmou, na Universidade de Cornell, que é um dos objetivos da educação "formar mentes que possam ser críticas, possam verificar e não aceitar tudo que lhes é oferecido", desde que o grande perigo hoje é dos *slogans*, opiniões coletivas, tendências "compradas feitas", de pensamento. (CASTRO, 1974, p. 40)

Além disso, a mobilização das modalidades de ação e operação que a investigação dos estudantes proporciona, conforme dito anteriormente, ela também “desafia a curiosidade e a criatividade” dos estudantes que buscam “assimilar o objeto”. Contudo, tal mobilização de habilidades, a saber, reflexão, ação, cooperação, convívio e comunicação entre os estudantes, só ocorrem quando o sujeito é desafiado pelo problema e encontra incongruências e dificuldades em assimilar a realidade exposta. A seguir mais trechos da investigação e diálogos entre os participantes.

– Professor: Fala B.M., dúvida?

– Estudante B.M.: Porque 2 metros em 4 segundos?

– Professor: Primeiramente, o que os colegas disseram...4 metros em 4 segundos.

– Estudante B.M.: Isso

– Professor: Porém, eles estavam esquecendo que o móvel B partiu de onde, partiu do zero?

– Estudante B.M.: Do “2”

– Professor: O móvel B partiu do zero?

– Estudante A.L.: Não

– Professor: Não, o móvel B não partiu do zero, o móvel B partiu à frente do móvel A né. Tipo assim ó, digamos que fossem dois corredores, o atleta A e o atleta B. O atleta A deixou o atleta B sair 2 metros à frente dele, ou seja, deu uma “luzinha” pro atleta B

– Estudante B.D.: Esse “A” é tri “passado”

Antes de dar continuidade na análise do diálogo vale à pena chamar a atenção para aspectos do diálogo que, a nosso ver, são consequências do desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas. Tais aspectos são percebidos quando os estudantes encontram uma “incongruência” ou uma incompatibilidade em suas argumentações ao descreverem o movimento do “móvel B”. De modo que ao serem convidados para observarem detalhes no movimento em questão que não estavam sendo contemplados na sua interpretação, os mesmos realizam um remanejamento de concepção sobre o movimento do móvel que inclui a sua velocidade e ponto de partida. O que segundo Castro (1974, p. 56), essa oportunidade de comparação dos diferentes pontos de vista promove um aguçamento da mente crítica do estudante:

> É a oportunidade para a comparação dos diferentes pontos de vista de cada um com o do outro, para que sejam percebidas as várias perspectivas sob as quais objetos ou acontecimentos podem ser vistos ou interpretados e os conflitos que surgem das discrepâncias encontradas. As opiniões próprias, por outro lado, para que sejam aceitas devem ser justificadas, provadas, e apresentadas com clareza e precisão. Conseguindo aperfeiçoar suas próprias

> operações mentais, comparando seus esforços com os dos outros, e coordenando o conjunto do processo, é que se aguça a mente crítica do aluno. (CASTRO, 1974, p. 56)

Mais uma vez se torna pertinente dizer que para os diferentes pontos de vista dos aprendizes serem observados, foi necessário oportunizar o espaço para que cada um fizesse as suas observações. Surgindo os conflitos, a nossa intervenção se deu em forma de indagações e não "mostrando como se faz", haja vista entender-se que a pergunta por parte do professor em sala de aula, seja mais enriquecedor da aula e do aprendizado do que as afirmações, ou o fornecimento das soluções aos estudantes.

Ao serem indagados sobre detalhes que estavam sendo esquecidos, os próprios voltam a observar o gráfico em questão, fazem uma nova investigação em relação ao movimento realizado pelo móvel, surtindo assim em uma nova troca de argumentos no grande grupo e, assim, reformulando as suas respostas. De acordo com Castro (1974, p. 14), tal investigação por parte dos estudantes tem a ver com o modelo de didática proposta por Piaget em relação à aprendizagem, quando disserta que:

> A premissa colocada por Piaget de que o importante e crucial em toda e qualquer metodologia será a provocação da atividade do aluno, levou-o a acentuar dois tipos de estratégias didáticas: a investigação pessoal e autônoma do aluno e a cooperação promovida pela troca intelectual em trabalho em grupo. A pesquisa, nesse caso, prende-se ao desenvolvimento de uma *didática operatória*. (CASTRO, 1974, p. 14)

A seguir, mais trechos da investigação realizada pelos estudantes.

– Professor: E se eu fosse montar uma equação do móvel B, como eu faria? Não é espaço em função do tempo?

Em seguida, seguimos questionando os estudantes em relação ao deslocamento do móvel em função do tempo com o propósito de identificar as constantes e as variáveis.

– Professor: Em um segundo, quanto o móvel A andou?

– Estudante N.A.: 2 metros

– Professor: E em 2 segundos?

– Estudante A.L.: 4 metros

– Professor: 4 metros né, porque a cada segundo ele está andando quanto?

– Estudante A.L.: 2 metros

E procedendo dessa forma construiu-se a seguinte tabela da figura a seguir:

Figura 64: A posição em função do tempo (móvel A)

$S_a = 2.1 = 2m$
$S_a = 2.2 = 4m$
$S_a = 2.3 = 6m$
$S_a = 2.4 = 8m$
$S_a = 2.5 = 10m$

Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: O que está variando aqui gente?

– Estudante A.L.: Os segundos...

– Professor: Sim, o tempo, e o que mais? E o que não está variando?

– Estudante A.L.: A velocidade

– Professor: A velocidade?

– Estudante A.L.: Ah é, a velocidade não está variando

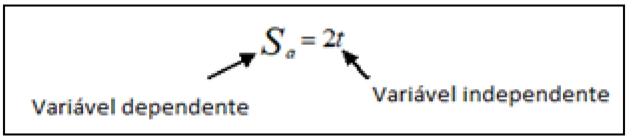
– Professor: A velocidade não está variando, a distância também está variando. Então quais são as minhas duas variáveis então?

– Estudante A.L.: A distância...

– Professor: E o tempo

E lembrando os estudantes que se representa uma variável por uma letra, já que pode assumir diversos valores, escrevemos a função referente ao móvel A. E com a ajuda deles, destacamos a variável dependente e a variável independente, conforme imagem a seguir.

Figura 65: A função horária do móvel A



Fonte: acervo do pesquisador

– Professor: Com isso, pra qualquer valor de tempo eu consigo determinar a distância percorrida pelo móvel

– Estudante G.: Isso é diretamente proporcional né sor?

– Professor: Sim, diretamente proporcional

A partir desse momento chamamos a atenção dos estudantes para a relação da disciplina de ciências (física) a qual foi utilizada por nós – estudantes e professor – sem citá-las ou escrevê-las explicitamente durante os cálculos da velocidade. Dessa forma, pode-se afirmar que somente após os estudantes obterem a velocidade em diversos problemas e experimentos, ou seja, a partir da ação dos mesmos de encontrarem a velocidade, é que se introduziu a expressão a seguir.

$$V_m = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i}$$

Também ressaltamos que tal relação é a mesma que determina a taxa de crescimento e decrescimento da função afim. Descrita como:

$$a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$$

Dessa forma passamos a utilizá-las para a obtenção das velocidades dos demais problemas, como pode ser observado a seguir no diálogo e análise em relação ao móvel B.

– Estudante B.M.: Como tu chegou na velocidade de 0,5 sor?

– Professor: 0,5/s é mesma coisa que 2m a cada 4 segundos. A gente dividiu 2 por 4

– Professor: Por exemplo, se um carro está a uma velocidade constante e percorre uma distância de 160 km em 2 horas, é a mesma coisa que dizer que ele está a uma velocidade de 80 km/h. O que fizemos foi dividir...

– Professor: Como calculamos a velocidade gente?

– Estudante A.L.: É espaço dividido pelo tempo

– Professor: E não foi isso que o professor de ciências falou pra vocês, não é a variação do espaço dividido pela variação do tempo?

– Estudante A.L.: Sim

– Professor: E isso não é o $\frac{\Delta_s}{\Delta_t}$ *(variação do espaço pela variação do tempo)?*

– Professor: Qual foi a variação do móvel B? Não foi 2? E como chegamos nisso? Não é a mesma coisa que fazer $\Delta_s = s_f - s_i = 4 - 2 = 2$ *?*

Chamamos a atenção dos estudantes que a velocidade obtida anteriormente pode ser obtida a partir da seguinte relação.

$$V_m = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{4-2}{4-0} = \frac{2}{4} = 0{,}5m/s$$

– Professor: Agora queremos montar uma equação referente ao móvel B, como eu faço isso? Qual é a posição do móvel B quando o tempo for zero?

– Estudante G.: Dois

– Professor: E quando o tempo é de um segundo, qual a posição do móvel B?

– Estudante M.S.: 4 metros

– Professor: Não, não..., tempo de um segundo gente onde vai estar o móvel B?

– Estudante A.L.: 2,5

– Professor: Sim, 2 + 0,5. E porque mais 2?

– Estudante B.D.: Começou em 2 e andou 0,5

– Professor: Tempo igual a 2 segundos, qual vai ser a posição do móvel B?

– Estudante M.S.: dois segundos, 4!

– Estudante A.L.: três, três...

– Professor: Por quê?

– Estudante A.L.: porque a cada segundo ele anda 0,5 metros

E partindo desse diálogo, fomos construindo a seguinte tabela.

Figura 66: A posição em função do tempo (móvel B)

$S_b = 0{,}5.0 + 2 = 2$
$S_b = 0{,}5.1 + 2 = 2{,}5$
$S_b = 0{,}5.2 + 2 = 3$
$S_b = 0{,}5.3 + 2 = 3{,}5$
$S_b = 0{,}5.4 + 2 = 4$

Fonte: acervo do pesquisador

Construída a tabela acima, seguimos o debate o qual é relatado a seguir.

– Professor: Agora pergunto pra vocês, o que está variando e o que não está variando?

– Estudante M.S.: Como assim?

– Estudante A.L.: Os segundos tão variando...

– Professor: O que mais tá variando?

– Estudante G.: A distância! O que não está variando é o ponto de partida

– Professor: O ponto de partida não tá variando, é sempre dois né?

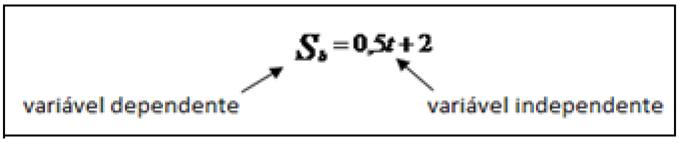
– Estudante A.L.: Sim!

– Professor: Então como eu consigo montar essa equação aqui? Quem é a variável dependente e a variável independente?

– Estudante G.: A variável dependente é o dois que não depende de nada (confundiu variável dependente com a constante b = 2)
– Professor: O 2 é uma constante
– Estudante A.L.: O tempo é a variável independente
– Professor: O tempo não depende de nada, perfeito!
– Estudante G.: 0,5
– Professor: 0,5 é a velocidade, é uma constante. Então quem vão ser as minhas variáveis?
– Estudante M.S.: O tempo...
– Estudante A.L.: E a distância
– Professor: Que é a mesma coisa que a primeira né, só que temos que adicionar 2 né
– Estudante M.S.: Que é de onde ele saiu

A partir do diálogo acima se pode chegar a equação referente ao móvel B exposta a seguir.

Figura 67: A função horária do móvel B



Fonte: acervo do pesquisador

Dessa forma, além da dedução da relação que dá a velocidade (na física), coeficiente angular na geometria analítica e taxa de crescimento ou decrescimento nas funções, chegamos também na relação da função afim, a saber:

$$y = ax + b$$

Vale a pena realizar uma breve síntese das atividades realizadas até este ponto da pesquisa e os caminhos percorridos pelos estudantes na construção da sua própria aprendizagem. Tal construção iniciou-se a partir da sistematização de dados obtidos por meio da observação de experimentos de caráter interdisciplinar, por exemplo: o crescimento de uma coluna d’água em um tubo cilíndrico em função do tempo, o caminho percorrido por um colega de classe no pátio e o deslocamento de uma moeda no tubo cilíndrico com glicerina líquida.

Como dito anteriormente, tais atividades se mostraram ser pertinentes para a observação de padrões matemáticos de cada movimento e a construção de conceitos matemáticos como, por exemplo, a velocidade de cada experimento e as respectivas inclinações de cada gráfico. Ou seja, conforme adquiriam experiência em cada experimento chegavam as suas conclusões próprias em relação a esse movimento bem como a sua representação gráfica – *assimilando* o objeto de estudo.

É importante dizer que a sistematização dos dados obtidos nos experimentos, e a percepção de características do objeto em estudo, oportunizaram aos estudantes concluírem que o objeto possui as mesmas características para quaisquer valores de tempo e distância. Ou seja, a generalização de tal movimento.

Em outras palavras, por meio de tais conclusões passam a operar hipoteticamente sem necessitarem do objeto real em si, ou seja, mesmo para tempos muito grandes, conseguem determinar qual a posição do móvel em estudo. Vide o problema dos dois moveis do exercício anterior – A e B. Em síntese, percebe-se o desenvolvimento do pensamento formal, ou ainda, pode-se afirmar que as atividades práticas de observação e sistematização de dados pelos estudantes culminaram nas atividades mentais superiores ou formais. Nesse sentido, Castro (1974, p. 8) explica como, gradualmente, teoria e prática se enriquecem mutuamente nesse tipo de processo:

> A partir de certo nível de desenvolvimento, diz Piaget, a mais autêntica atividade de investigação pode ser exercida por reflexão, abstração e manipulação verbal. O que não impede que as demais formas de atividade continuem sendo exercidas pelo indivíduo que já atingiu as formas superiores da vida mental. Sempre que nos faltam esquemas assimiladores adequados, ou não temos experiência suficiente acerca do objeto, recorremos à ação efetiva. É da realidade que retiramos, pela ação, os elementos, os dados para o exercício da atividade mental, mas também é da coordenação das ações exercidas que partimos para a nova atividade mental. As construções mentais, as combinações internas de esquemas, que explicam as atividades mais criativas, da descoberta à invenção, derivam, pois, seja geneticamente das ações elementares, seja, atualmente, do desafio que a atuação sobre a realidade oferece à mente humana. (CASTRO, 1974, p. 8)

Ora, a partir das conclusões e generalizações realizadas pelos estudantes, os mesmos poderão aplicar posteriormente o conhecimento construído em outros problemas em que encontrem situações semelhantes. Conclui-se dessa forma que foram construídos pelos estudantes conceitos matemáticos em relação a determinados fenômenos.

9º Encontro – Mais problemas propostos e a aplicação de conceitos

Em seguida, propomos aos estudantes os seguintes problemas.

Exercício 2. Um experimento de Agronomia mostra que a temperatura média da superfície do solo $t(x)$, em $°C$, é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela seguinte.

Figura 68: A temperatura em função do resíduo de planta e biomassa

$X(g/m^2)$	10	20	30	40	50	60	70
$t(x)(°C)$	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Fonte: www.portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cno0chndbyo8c.pdf (acesso em fevereiro de 2019)

Qual a lei de formação da função $t(x)$?

Para iniciarmos a discussão desse problema fizemos o seguinte questionamento:

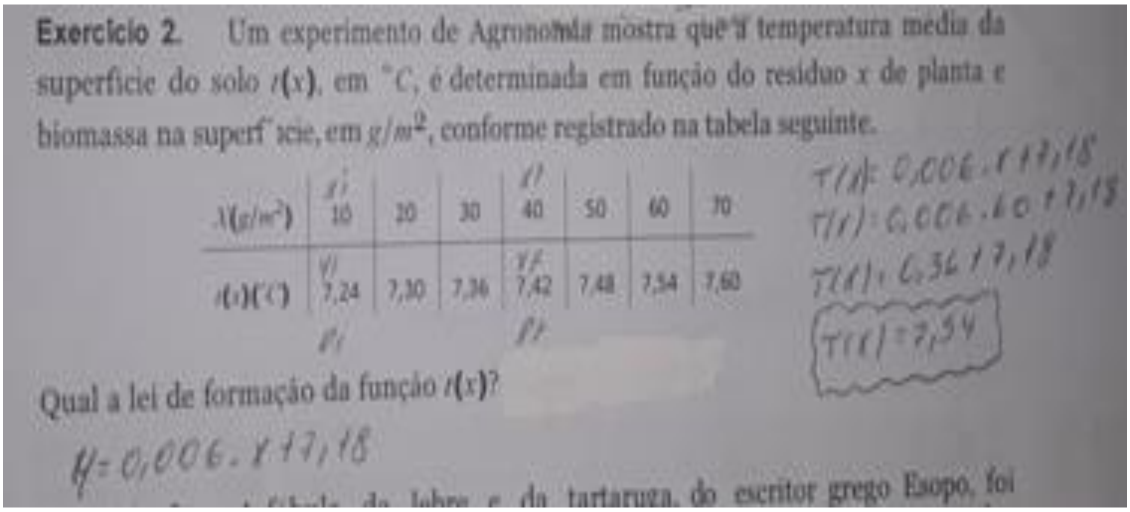
– Professor: Pergunto a vocês, quando não há resíduo x de planta e biomassa na superfície do solo, a temperatura será igual a zero? O solo estará congelado?

– Estudante M.L.: Pela lógica seria 7,18... se o resíduo de biomassa está diminuendo de 10 em 10 e a temperatura diminui 0,06 ºC

A partir da resposta do estudante Matheus pode-se perceber, em primeiro lugar, a realização de uma análise crítica por parte do mesmo, haja vista entender que não seria possível por falta de resíduo na superfície do solo o mesmo estar congelado! Também os demais colegas concordaram não fazer sentido o solo congelar por falta de um resíduo de biomassa.

Vale também considerar a solução apresentada a seguir, a qual demonstra a apropriação de técnicas de manipulação algébrica das equações, conceito de função em que há a correspondência unívoca entre valores de x e f(x), além da obtenção da taxa de crescimento da função por meio de relações vistas em problemas anteriores.

Figura 69: Solução proposta pela estudante D.S



Exercício 2. Um experimento de Agronomia mostra que a temperatura média da superfície do solo $t(x)$, em °C, é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela seguinte.

$x(g/m^2)$	10	20	30	40	50	60	70
$t(x)(°C)$	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

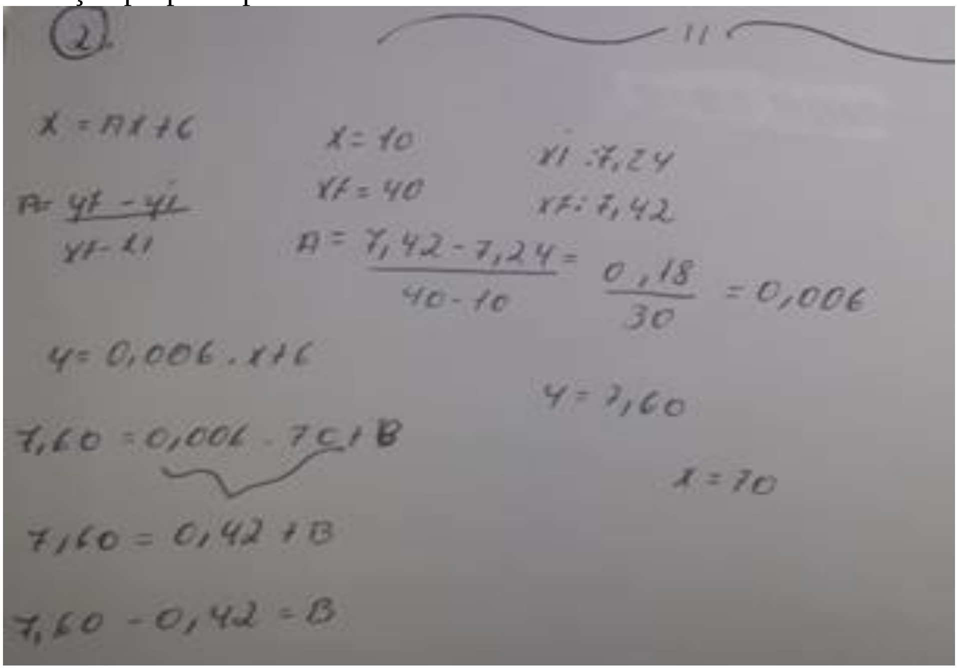
Qual a lei de formação da função $t(x)$?

Fonte: acervo do pesquisador

A partir do desenvolvimento da solução por D.S. é possível perceber não somente a demonstração de uma construção de conceitos matemáticos, mas também o desenvolvimento da operacionalidade algébrica, a qual oportuniza ao estudante a liberação do plano concreto e o introduz no mundo das possibilidades. O desenvolvimento de tais habilidades iniciou-se com as atividades práticas, na obtenção de dados, bem como na gradual percepção de características de cada gráfico. Por sua vez, essas percepções proporcionam à estudante a aplicação dos conceitos construídos, como por exemplo, a obtenção da taxa de variação da função em questão por meio de seus pares ordenados.

Já na contribuição dada por M.L. para a obtenção do ponto de coeficiente linear proposta por M.L., demonstra a flexibilidade de pensamento, pois não está preso a um algoritmo pré-determinado ou, em outras palavras, uma solução pronta ensinada pelo professor. Mas sim, a aplicação de conceitos construídos em práticas anteriores. A seguir, o desenvolvimento da solução proposta por D.S. em sua íntegra. A partir disso, vale trazer as palavras de Castro (1974, p. 46) ao afirmar que o “[...] conhecimento intelectual não permite apenas agir sobre os objetos, mas transformá-los em objetos de conhecimento; é o que revela a sua plena reversibilidade, e libera o pensamento das injunções da realidade [...]”.

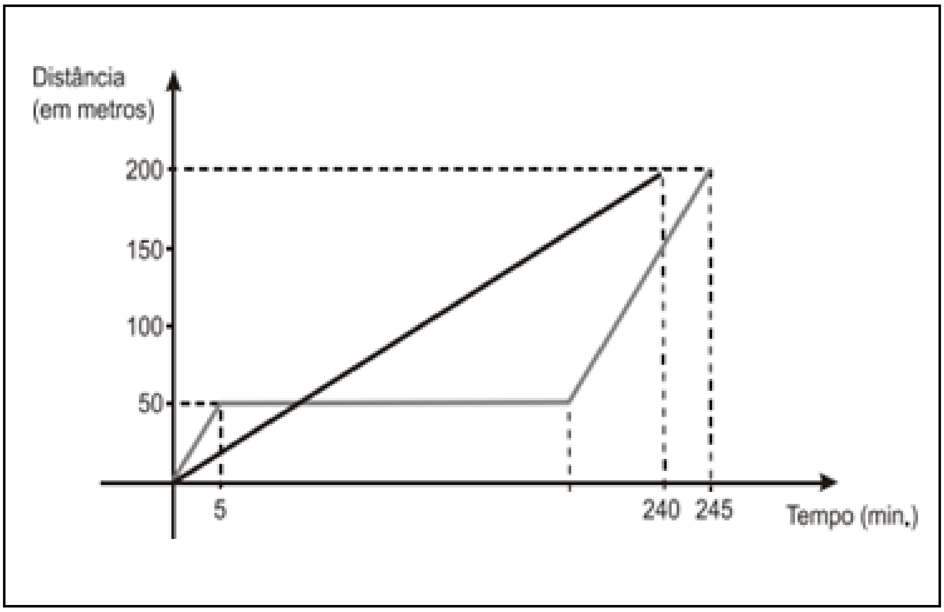
Figura 70: Solução proposta pela estudante D.S



Fonte: acervo do pesquisador

Exercício: A fábula da lebre e da tartaruga, do escritor grego Esopo, foi recontada utilizando-se o gráfico abaixo para descrever os deslocamentos dos animais.

Figura 71: Representação gráfica da fábula da lebre e da tartaruga



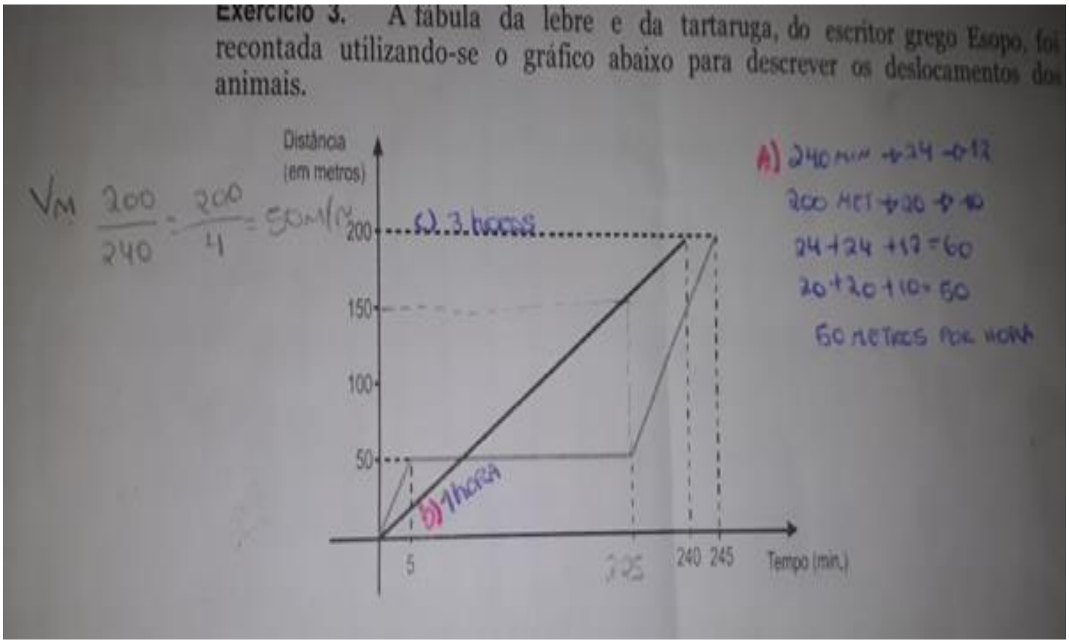
Fonte: www.portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cno0chndbyo8c.pdf (acesso em fevereiro de 2019)

Suponha que na fábula lebre e a tartaruga apostam uma corrida em uma pista de 200 metros de comprimento. As duas partem do mesmo local no mesmo instante. A tartaruga anda sempre com velocidade constante. A lebre corre por 5 minutos, para, deita e dorme por certo tempo. Quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, mas, quando completa o percurso, percebe que chegou 5 minutos depois da tartaruga.

Considerando essas informações,

a) Determine a velocidade média da tartaruga durante esse percurso, em metros por hora.
b) Determine após quanto tempo da largada a tartaruga alcançou a lebre.
c) Determine por quanto tempo a lebre ficou dormindo.

Figura 72: Solução proposta pelos estudantes: M.L. e G.K



Fonte: acervo do pesquisador

Em primeiro lugar, pode-se perceber por meio da solução proposta pelos estudantes que muito embora eles já tivessem tido contado com técnicas de obtenção da equação algébrica que descreve a função afim, propõem uma solução própria. Na solução deles, nota-se o uso do conceito de velocidade constante, ou seja, se o móvel percorre 200 metros em 240 minutos, e a velocidade é constante, pode-se afirmar que o mesmo percorrerá 20 metros em 24 minutos, 10 em 12, e assim sucessivamente. Ou ainda:

$$\frac{200m}{240\min} = \frac{20m}{24\min} = \frac{10m}{12\min}$$

Além disso, pode-se perceber a criatividade dos estudantes ao desenvolver o seu raciocínio por meio de uma espécie de tabela, a qual é transcrita da seguinte forma:

Figura 73: Estratégia de solução para o problema da figura 71

Distância (m)	200	20	10
Tempo (min.)	240	24	12

Fonte: acervo do pesquisador

Ou ainda:

Figura 74: Continuação da Estratégia de solução para o problema da figura 71

Distância (metros)	20 + 20 + 10 = 50 metros
Tempo (min.)	24 + 24 + 12 = 60 minutos (1 hora)

Fonte: acervo do pesquisador

Dessa forma, concluem que a tartaruga estava a uma velocidade de 50 metros por hora. De posse do valor da velocidade e a partir da interpretação do gráfico, o qual informa que o ponto de encontro entre a tartaruga e a lebre ocorre na posição de 50 metros, obtém também o tempo de encontro entre os dois, a saber, uma hora.

Vale destacar na solução apresentada pelos estudantes aspectos daquilo que Piaget chama de pensamento reversível que é quando o adolescente entende ser possível não apenas agir sobre a realidade, mas também operar sobre ela. Também nesse período, segundo Castro (1974, p. 44) o adolescente consegue “[...] ver sob nova luz os problemas de transformação e conservação, tendo consciência da totalidade do processo [...]”. E essa consciência da totalidade do processo de que fala Piaget, nas palavras de Castro, bem como as suas transformações podem ser percebidas quando os estudantes encontram a velocidade da tartaruga e, sabendo que a mesma é constante, decompõem-na até encontrarem uma unidade conveniente para realizar a investigação no problema como um todo.

Ou seja, partem do “todo” para terem uma melhor compreensão das “partes” do processo em sua totalidade novamente. Sobre essa mobilidade de pensamento, Lima (1976, p. 18) acrescenta que:

> A reversibilidade, “capacidade de executar uma mesma ação nos dois sentidos de percurso, mas tendo consciência de que se trata da mesma ação”, se inicia. O pensamento capta não apenas as realidades aparentes, mas também as suas transformações. A realidade é vista como um todo permanente, apesar das mudanças que afetam a percepção.

> Finalmente no limiar da adolescência o pensamento consegue sobrepujar a realidade concreta e atingir o mundo das possibilidades. Surgem as operações formais, alicerçadas no raciocínio hipotético-dedutivo. (LIMA, 1976, p. 18)

A seguir, trechos da discussão no grande grupo.

– Estudante G.: Dá pra ver a lebre é a vermelha (gráfico referente à lebre desenhado na lousa) porque ela dormiu

– Professor: Sim, ou seja, o tempo tá passando... e o que está acontecendo com ela?

– Estudante G.: Tá parada

– Professor: Tá parada, não tá subindo né. A lebre quando desperta, volta a correr com a mesma velocidade constante de antes, qual é a velocidade constante de antes? Tem como saber?

– Estudante B.D.: 10 metros por minuto

– Estudante A.L.: É

– Professor: É né, porque é distância dividida por tempo né, quanto é que ela percorreu aqui, 50 metros?

– Estudante A.L.: 50 metros em 5 minutos

– Estudante B.D.: Se eu soubesse quanto tempo ela dormiu ficaria muito mais fácil de resolver esse problema

– Professor: Ah sim, porque aí tu já saberia esse valor que é realmente o que ele quer saber

– Estudante B.D.: Porque aí eu descobriria a velocidade da tartaruga

– Professor: Mas não dá pra descobrir a velocidade da tartaruga?

– Estudante B.D.: É mais difícil

– Professor: Tá a velocidade da tartaruga também dá gente, quem é a tartaruga no gráfico?

– Estudante B.D.: É só dividir 200 por 240, que vai dar 0, 8...

– Professor: Sim, é espaço percorrido pelo tempo

– Estudante B.D.: Sor, e o problema também pergunta quanto tempo a tartaruga alcança a lebre

– Professor: Onde a tartaruga alcança a lebre?

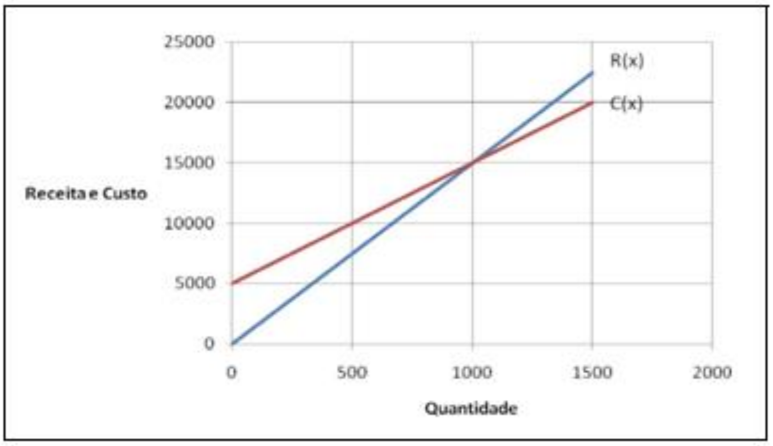
– Estudante B.D.: Onde se cruzam o vermelho e o azul

10º Encontro (2 períodos de 55 minutos)

Neste encontro foram propostos exercícios envolvendo funções relacionadas a diversos assuntos como, por exemplo, receita e custo de um empreendimento, uma corrida de taxi, dentre outros. A exemplo das atividades anteriores, durante essa a nossa postura como professor foi a de guiar o debate com a turma procurando, por meio de questionamentos, levá-los a perceber características semelhantes em problemas anteriores. A seguir, um dos problemas trabalhados nessa aula e diálogo ocorrido.

Exercício: Os gráficos abaixo representam as funções receita mensal R(x) e custo mensal C(x) de um produto fabricado por uma empresa, em que x é a quantidade produzida e vendida. Qual o lucro obtido ao se produzir e vender 1350 unidades por mês?

Figura 75: Funções Custo e Receita



Fonte: www.portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cno0chndbyo8c.pdf

Dica: A função lucro é definida como sendo a diferença entre a função receita total e a função custo total. Assim, uma forma de resolver é encontrar as *funções* ***Custo e Receita***

– *Professor: Porque vocês acham que o gráfico da função receita começa do zero?*

– *Estudante D.S.: Sei lá, porque ele não começou a ganhar dinheiro ainda?*

– *Professor: Porque será que ele não começou a ganhar dinheiro ainda?*

– *Estudante D.S.: Porque não começou a vender ainda*

– *Professor: Exatamente*

– *Professor: E esse outro porque começa no R$ 5.000,00?*

– *Estudante D.S.: Porque ele já tinha começado a vender?*

– *Professor: Não*

– Estudante D.S.: Não, o custo...não "pera"

– Professor: O custo?

– Estudante D.S.: É, o custo, ali é a linha do custo. Tá, esse (R) é igual a esse (C), tem a mesma relação...

– Professor: Não, um gráfico é uma coisa o outro gráfico é outra coisa, um não é igual ao outro...

– Estudante D.S.: O "C" não tem nada a ver com o "R"?

– Professor: Tá, o "C" quer dizer que ele teve que gastar o dinheiro

– Estudante D.S.: Tá, então ele gastou R$ 5.000,00

– Professor: Sim, só R$ 5.000,00?

– Estudante D.S.: Não, foi subindo

– Professor: Então seria interessante encontrar a equação das duas funções pra resolver o problema, não acham?

– Estudante D.S.: Tá, e o zero é o que? O zero é o "a"?

– Professor: Não...

– Estudante D.S.: Coeficiente angular

– Professor: E o coeficiente angular determina o que?

– Estudante D.S.: O ângulo da linha (gráfico)?

– Professor: É da linha, que é o gráfico. Como é que eu encontro o "a" e o "b"

– Estudante D.S.: Tá o "b" é o zero né

– Professor: O "b" é o zero em uma delas, qual delas?

– Estudante D.S.: Na receita

– Professor: Tem que encontrar o "a" ainda

– Estudante D.S.: O "a" é R$ 15.000,00?

– Professor: Por quê?

– Estudante D.S.: Sei lá porque as linhas se cruzam

– Professor: Não, o "a" não determina o ângulo da reta? Tá, e lá no caso do carro lá, o que determinava a inclinação da reta do gráfico?

– Estudante D.S.: O "a" era maior ou menor

– Professor: O que era maior ou menor?

– Estudante D.S.: Quanto mais inclinado, era maior

– Professor: Maior o que?

– Estudante D.S.: A velocidade?

– Professor: A "velocidade" né, e como se faz pra encontrar a "velocidade" (taxa de variação)?

– Estudante D.S.: Eu tenho que começar pelo espaço (variação no eixo y), é 2000 - 0

– Professor: De qual tu tá pegando? Tem que pegar os parzinhos ordenados de cada reta, lembra?

– Estudante D.S.: R$ 25.000,00 – R$ 15.000,00?

– Professor: Mas nem tem nada ali no R$ 25.000,00

– Estudante D.S.: R$ 20.000,00 – R$ 15.000,00?

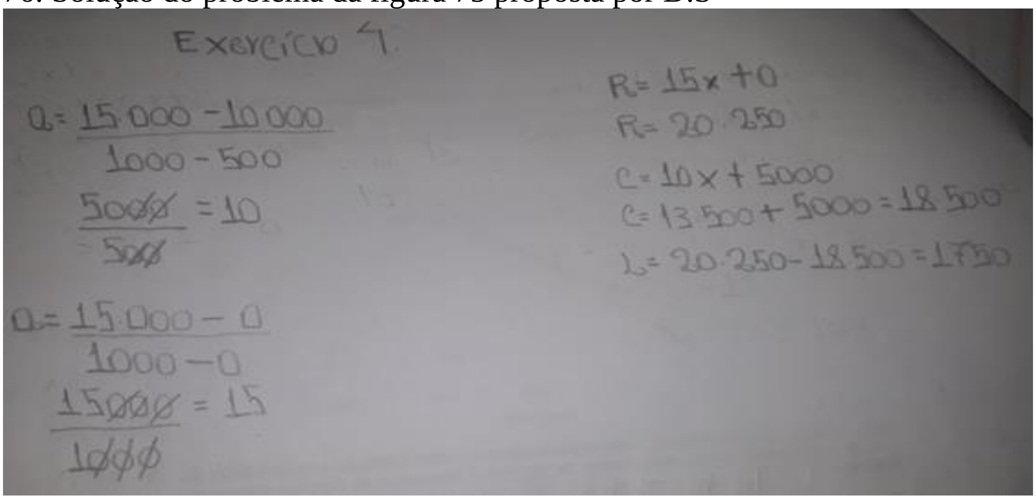
– Professor: De qual gráfico tu está pegando?

– Estudante D.S.: Do "R"

– Professor: Mas tu não sabes qual é par ordenado (x quantidade) do "R", de cada gráfico tu tens que pegar os pares ordenados que tu saibas

Após mais algumas discussões com a estudante, segue a resolução proposta por ela.

Figura 76: Solução do problema da figura 75 proposta por D.S



Fonte: acervo do pesquisador

Como observado, o diálogo demonstra dificuldades encontradas pela estudante na obtenção de pares ordenados, mas que aos poucos vão sendo superados pela estudante. Ao serem superadas, consegue relacionar o problema em questão com problemas resolvidos anteriormente – problemas envolvendo movimentos, por exemplo.

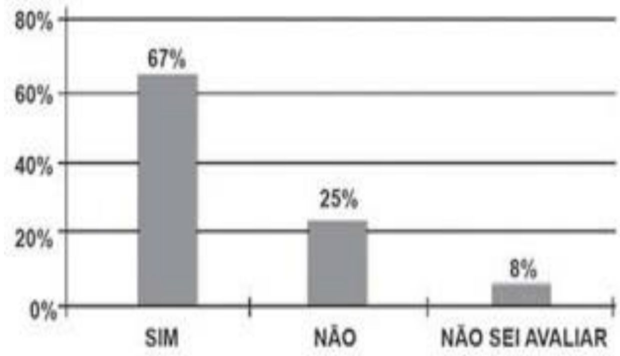
Nota-se dessa forma que as atividades anteriores servem de auxiliar na construção de uma solução por parte da estudante, pois relaciona o Custo e a Receita iniciais com os pontos de partida dos problemas envolvendo móveis, bem como a taxa de variação do lucro e da receita com a velocidade de móveis em problemas anteriores. Por fim, a estudante termina a solução dos problemas aplicando técnicas construídas anteriormente em problemas que não representam o movimento de móveis, mas que entende ser um problema semelhante.

11º Encontro – Apresentações de soluções de grupos de estudantes aos colegas

Nas atividades a seguir os estudantes são convidados a irem à lousa e apresentarem as soluções de alguns problemas que foram distribuídos à turma. Da mesma forma que as atividades anteriores, entende-se que a proposta proporciona o diálogo entre os estudantes, autonomia na busca de soluções, flexibilidade de pensamento, criatividade, e a reorganização da sua forma de pensar aos serem questionados pelos colegas. A seguir, os diálogos ocorridos durante a apresentação do grupo formado pelas estudantes A.L. e M.G.

12) (ENEM 2011) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.

Figura 77: Enquete aquecimento global



Fonte: Enem 2011

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "NÃO" à enquete?

a) menos de 23 b) mais de 23 e menos de 25 c) mais de 50 e menos de 75

d) mais de 100 e menos de 190 e) mais de 200

Após a estudante A.L. realizar a leitura da questão, segue o diálogo.

– Estudante A.L.: Foram 25%. E se era 279 internautas, tinham que ser 25% de 279. Como 1% de 279 é 2,79, daí eu fiz por 25 (multiplicou). E deu 69, 75, daí ali tinha as alternativas que é a "C" que é mais de 50 e menos de 75.

– Professor: Tu fez o cálculo de 1% como? Tu dividiu, ou que tu fez?

– Estudante B.D.: 1% é só simplificar Sor, passar a vírgula

– Estudante A.L.: É, é só colocar a vírgula

– Estudante B.D.: É que nem sor, eu faço diferente, eu divido por quatro pra descobrir 25%

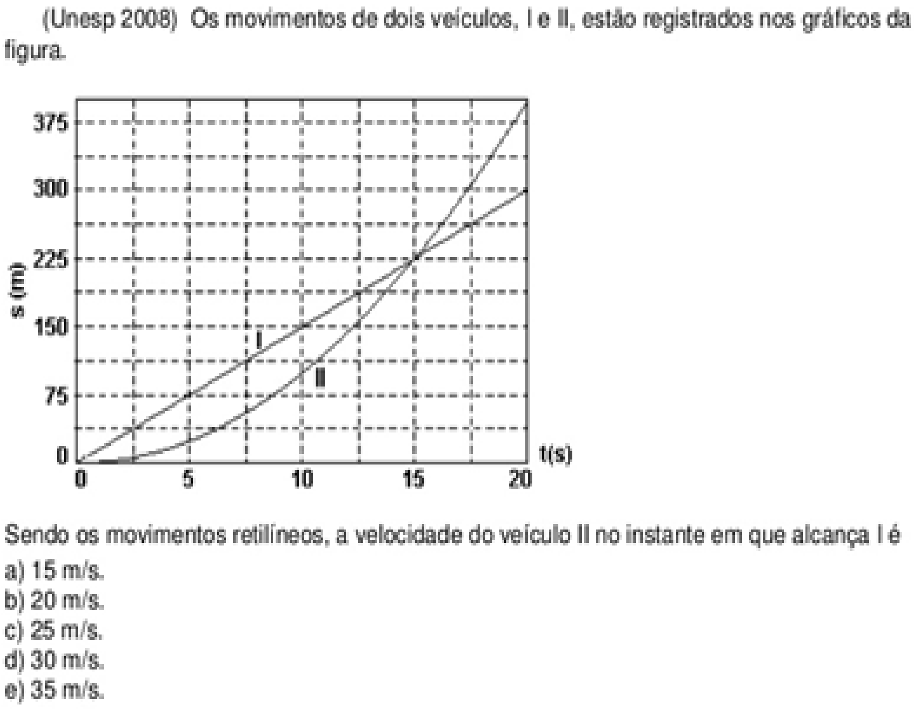
– Estudante A.L.: É, dá pra fazer também

– Professor: É, daria também porque é a quarta parte né

Vale notar alguns aspectos do diálogo ocorrido durante a apresentação, a saber: a cooperação entre os estudantes nas explicações de como se chegou ao resultado e a diversidade de formas de resolvê-lo. Ou seja, pode-se perceber a flexibilidade de pensamento dos estudantes ao resolverem o problema dado, bem como a cooperação entre eles.

Além disso, as apresentações contribuem no sentido de oportunizar o desenvolvimento da habilidade de comunicação das soluções dos estudantes à turma. Mas não somente isso, os estudantes que apresentam também devem ouvir as posições dos colegas, sendo elas sugestões ou objeções, reformulando por vezes a sua maneira de pensar. Tal fato pode ser percebido a seguir na apresentação realizada pela mesma dupla.

Figura 78: Movimento de dois veículos


(Unesp 2008) Os movimentos de dois veículos, I e II, estão registrados nos gráficos da figura.

Sendo os movimentos retilíneos, a velocidade do veículo II no instante em que alcança I é

a) 15 m/s.
b) 20 m/s.
c) 25 m/s.
d) 30 m/s.
e) 35 m/s.

Fonte: Unesp, 2008.

– Estudante M.G.: É a "A" que é 225 metros em 15 segundos, aí tem que fazer a conta

– Professor: Tá faz aí

– Estudante M.G.: Que dá 15 m/s

– Estudante B.D.: O sor, a gente não chegou na resposta "A", a gente chegou na resposta "D"

– Estudante A.L.: Por quê?

– Estudante B.D.: A gente pegou o pedaço do percurso na reta alí onde ele ultrapassou, no momento onde ele ultrapassou ele tava à 30m/s

– Professor: Por quê?

– Estudante A.L.: Por que, como tu chegou nessa conclusão?

– Estudante B.D.: Eu fiz assim, 225-150 = 75, ele levou 2,5 segundos pra ir de 150 até 225, e 75/2,5 dá 30

– Professor: Então, o que os colegas pegaram, eles pegaram um pedacinho do trecho do móvel II que dá pra dizer que é reto (entre 225 e 150 metros). Foi isso né gente?

– Estudante A.L.: Só que alí fala no exato instante, que é quando eles estão juntos...

– Professor: Sim, mas como começa a ser aproximadamente uma reta em 150 metros, podemos concluir que a velocidade em todo o percurso em que é uma reta é igual a do momento da ultrapassagem, ele tem a mesma velocidade desse percurso

– Estudante B.D.: Sim, é sor, na verdade elas calcularam a velocidade média e não a velocidade no momento da ultrapassagem

– Professor: Sim.

Em primeiro lugar, vale ressaltar que tanto o erro cometido pelas colegas que apresentaram como a intervenção do estudante B.D., trazendo a sua solução, proporcionou toda essa discussão e o levantamento de questionamentos e, por sua vez, a possibilidade de esclarecimento de tal situação. Mas, foi necessário que fosse aberto o espaço para que os estudantes pudessem demonstrar a sua maneira de construir uma possível solução em relação ao problema dado.

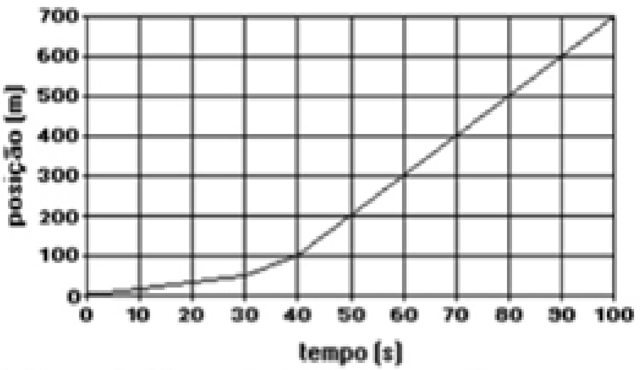
Em segundo lugar, evidenciam-se na discussão características do pensamento reversível, pois o estudante na busca da solução do problema utiliza o conceito de taxa de variação da função no intervalo de tempo de 15 segundos à 17,5 segundos. Já que, ao perceber que o gráfico é praticamente uma reta nesse intervalo de tempo, conclui que a velocidade (taxa de variação) nesse intervalo não se altera (constante), e se descobrir o valor da taxa de variação do gráfico no referido intervalo de tempo, saberá a taxa no exato instante que o automóvel II ultrapassa o automóvel I. Ou seja, por meio do diálogo pode-se perceber aquilo que Castro (1974, p. 15) chama de assimilação ativa de conteúdos, as quais incluem manipulação efetiva ou mental do objeto do conhecimento, e:

> Incentivam a mobilidade e reversibilidade do pensamento por meio de comparações, confrontos, relações; desafiam esquemas assimiladores por meio de situações-problema; promove a aptidão a descoberta, a criatividade do aluno. (CASTRO, 1974, p. 15)

Ademais, salienta-se que a atividade mostrou-se parte importante do processo de desenvolvimento intelectual dos estudantes, uma vez que durante elas os aprendizes tiveram que reorganizar o seu pensamento e “[...] tornar objetivo e comunicável seu pensamento, assimilar o ponto de vista alheio e tudo coordenarem numa perspectiva de conjunto [...]”. (CASTRO, 1974, p. 15-16). A seguir, a apresentação da estudante S.G.

Figura 79: Posição em função do tempo

2) (UFMG 95) O gráfico a seguir mostra como varia a posição em função do tempo para um carro que se desloca em linha reta.



No tempo t=60s, a velocidade do carro é

a) 5,0m/s b) 7,0m/s c) 10m/s

d) 12m/s

Fonte: https://pt.slideshare.net/capitao_rodrigo/fi95-b3r-09reimp

– Estudante S.G.: Eu peguei aqui o 60 s e aqui onde ele parou, deu 300m

A estudante toma como o espaço percorrido 300 metros e o tempo igual a 60 segundos.

– Professor: Tá

– Estudante S.G.: 300/60 que dá 5, então a resposta é a “A”

– Estudante B.D.: Velocidade média...

– Professor: Essa situação é a mesma coisa, é bem parecido que o que foi apresentado anteriormente

– Estudante B.D.: A velocidade não é...

– Professor: É complicado de tu pegar aqui (trecho de 0 à 300 m) porque tá variando a velocidade. Nota que ele começa devagar e depois começa a acelerar. Como eu sei que ele começa a acelerar gente?

– Estudante G.R.: A inclinação

– Estudante B.D.: Está mais inclinado

– Professor: Isso, começa devagarinho, devagarinho e depois começa a acelerar. Então qual seria o trecho mais interessante pra "pegarmos"?

– Estudante B.D.: O sor, pega do 100 ao 300 e divide por 20, porque ele foi do 40 ao 60

– Professor: Daria pra ser né? A gente tá vendo que é uma reta né?

– Estudante A.L.: Sim

– Estudante M.G.: E a parte de cima (300 à 700 m) não dá pra pegar?

– Professor: Também poderia

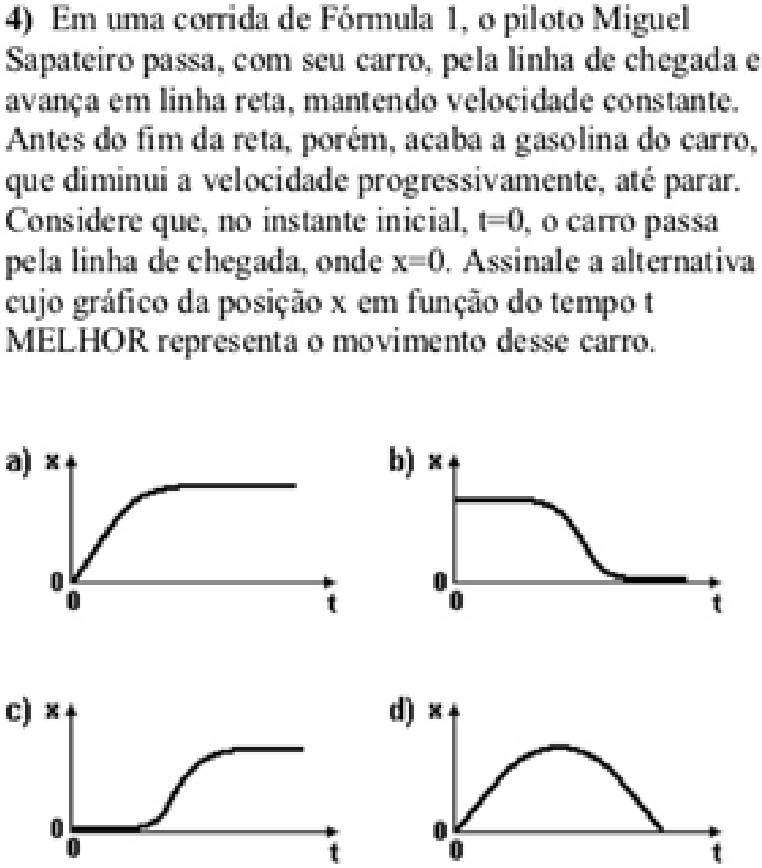
Mais uma vez os estudantes contribuem em uma ação coletiva para a resolução do problema apresentado pela estudante S.G. utilizando conceitos anteriormente construídos. De acordo com Castro (1974, p. 15-16), esse processo que conduz:

> Do egocentrismo à cooperação exige que o pensamento não mais permaneça centrado num só aspecto do problema que considera. Leva a um constante remanejamento de perspectivas. O egocentrismo sendo um estado de indiferenciação que ignora a multiplicidade de perspectivas opõe-se à objetividade que supõe, ao mesmo tempo, uma diferenciação e uma coordenação de pontos de vista. (CASTRO, 1974, p. 15-16).

Ou seja, no decorrer dos diálogos e das apresentações pode-se perceber um remanejamento de perspectivas por parte da estudante A.L. e M.G.. Entende-se que tal remanejamento tem a ver com a descrição que Vygostky (1994, p. 115) realiza em relação ao aprendizado do indivíduo quando este afirma que o "[...] aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daquelas que as cercam [...]"**.**

Assim, percebeu-se através da cooperação entre os estudantes aquilo que Vygotsky (1994, p. 117-118) chama de "processos internos do desenvolvimento". Segundo ele, tais processos são viabilizados quando os indivíduos cooperam com seus companheiros de tal forma que esses "[...] processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança [...]”. A seguir, trechos do diálogo da apresentação trazida pela estudante N.A.

Figura 80: Corrida Fórmula 1



4) Em uma corrida de Fórmula 1, o piloto Miguel Sapateiro passa, com seu carro, pela linha de chegada e avança em linha reta, mantendo velocidade constante. Antes do fim da reta, porém, acaba a gasolina do carro, que diminui a velocidade progressivamente, até parar. Considere que, no instante inicial, t=0, o carro passa pela linha de chegada, onde x=0. Assinale a alternativa cujo gráfico da posição x em função do tempo t MELHOR representa o movimento desse carro.

Fonte: https://docplayer.com.br/16207558-Estudo-grafico-dos-movimentos-grafico-posicao-x-tempo-x-x-t.html (acesso em fevereiro de 2019)

– Estudante N.A.: Eu acho que é a “B” porque começa com uma velocidade constante e depois vai caindo a velocidade até que acaba a gasolina

– Professor: O que vocês acham turma?

– Estudante G.R.: Eu acho que tá certo

– Professor: Porque tu acha que tá certo G.R.?

– Estudante B.D.: É a “A”

– Estudante G.R.: Porque como ela disse, ele começa com uma velocidade constante como está ali, aí decai por falta de gasolina e depois literalmente ele vai parar

– Professor: Porque tu acha que é a “A” B.D.?

– Estudante B.D.: Porque a reta tá inclinada ali, então o tempo tá andando e o carro também (existência de inclinação = movimento). Aí tipo, naquela “barriguinha” ali ele vai diminuir a

velocidade, e naquela reta o carro tá parado e o tempo tá andando. Então tipo, o carro tá parado

– Professor: De fato, quando o gráfico é uma reta paralela ao eixo do tempo, o tempo está passando e o carro está parado. E tem um outro detalhe que o problema deu no enunciado, qual é?

– Estudante B.D.: Começa no zero

– Professor: Começa no zero...e no caso da alterativa "B" ele não começa no zero, ele começa além da linha de chegada. Lembram que ele começou a observar na linha de chegada, quando o tempo era igual a zero?

– Professor: E o que está acontecendo na letra "C", alguém poderia interpretar?

– Estudante G.R.: O carro tá parado, ele anda e pára de novo

A partir do diálogo acima é importante pontuar o remanejamento de ponto de vista do estudante G.R. em relação ao problema em discussão. Evidencia-se em sua última fala aquilo que Vygotsky descreve como a zona de desenvolvimento potencial (ZDP), que é quando o estudante não consegue realizar uma determinada tarefa sozinho, mas com pistas fornecidas por colegas, obtém êxito.

Para o psicólogo russo (VYGOTSKY, 1994, p. 111), tal fato é um indicativo de seu desenvolvimento mental, haja vista que para ele "[...] aquilo que a criança consegue fazer com ajuda dos outros [...]" pode ser "[...] muito mais indicativo de seu desenvolvimento mental do que aquilo que consegue fazer sozinha [...]". Assim, mais uma vez vale lembrar as palavras de Vygotsky (1994, p. 113) quando afirma que "[...] aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã [...]". A seguir, mais trechos do diálogo.

– Estudante B.D.: Ele tá parado, acelera e falta gasolina de novo

– Estudante G.R.: E na letra "D" ele tá acelerando e começa a diminuir do nada

– Professor: E na letra "D" ele tá acelerando e depois?

– Estudante B.D.: Ele dá meia volta (retorna ao ponto de partida)

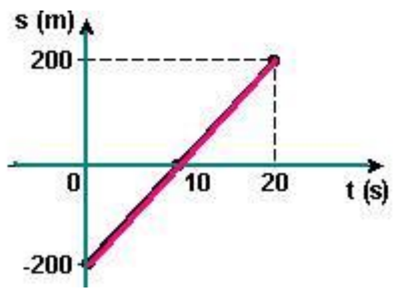
– Professor: Ele volta pro ponto de partida né gente

– Estudante M.G.: Sim

Por fim, vale salientar nas discussões acima aspectos importantes da construção da aprendizagem dos estudantes, a saber: a afirmativa, a contraposição de idéias, justificativas para as afirmações, leitura e interpretação de gráficos, conceitos de taxa de variação do movimento de cada veículo. Assim, as atividades proporcionaram por meio do convívio e da discussão a “[...] necessidade de justificar e verificar, objetivamente, ações e pensamentos [...]”. (CASTRO 1974, p. 15-16). Ou seja, observou-se ação dos estudantes que se deu por meio da mobilização de conceitos construídos em atividades anteriormente realizadas. Ainda de acordo com Castro (1974, p. 15-16), “[...] essas modalidades específicas de atuação grupal, como a discussão, a troca de ideias, a colaboração no jogo e no trabalho, tornam-se importantes para o desenvolvimento do pensamento [...]”, já que, para terem a sua opinião aceita pelos demais envolvidos deve-se justificar por meio de argumentos. A seguir, mais uma apresentação. A seguir, a apresentação da estudante D.S.

(PUC-PR) O gráfico mostra a variação da posição de uma partícula em função do tempo.

Figura 81: Posição em função do tempo 2



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/2713928 (acesso em fevereiro de 2019)

Analisando o gráfico, é correto afirmar:

a) É nulo o deslocamento da partícula de 0 a 15 s.

b) A velocidade da partícula é negativa entre 0 e 10 segundos.

c) A aceleração da partícula vale 20 m/s2.

d) A velocidade da partícula é nula no instante 10 s.

e) A velocidade da partícula é constante e vale 20 m/s.

– Estudante D.S.: A velocidade do gráfico é uma velocidade constante, ou seja, ela não possui aceleração, então a “C” tá errada. Eu também desconsiderei as alternativas “A” e “D”, porque elas dizem que tanto o deslocamento quanto a velocidade são nulas. Sendo que pra ser nula a linha do gráfico não pode ter inclinação, então essas duas não podem ser verdadeiras. Eu também desconsiderei a alternativa “B” porque para ser negativa, o gráfico teria que partir de cima e descer.

– Professor: Teria que ser o contrário?

– *Estudante D.S.: É, então a única que sobrou foi a alternativa "E" que diz que a velocidade é constante e vale 20 m/s. Que pra confirmar eu fiz a velocidade média (taxa de variação), aí eu peguei os pontos e fiz 200 – 0 e 20 – 10 e fiz:*

$$v = \frac{200-0}{20-10} = \frac{200}{10} = 20m/s$$

– *Professor: Tá certo, entre 10 e 20 segundos ele percorreu quanto?*

– *Estudante B.D.: 400*

– *Professor: Não*

– *Estudante B.D.: 200*

– *Professor: Isso, é a parte de cima ali do gráfico né*

– *Estudante B.D.: Tá eu fiz 400 dividido por 20*

– *Professor: Dá na mesma, também pode ser, e dá pra ver que a velocidade é constante pelo seguinte né*

– *Estudante D.S.: A linha é inclinada*

– *Professor: É, a linha é uma reta e ela tá percorrendo espaços iguais em tempos iguais, tipo de -200 até 0 quanto tempo ela levou?*

– *Estudante A.L.: 10 segundos*

– *Estudante G.R.: 10 segundos*

– *Professor: E de 0 até 200, mais 10 segundos, ou seja, tá mantendo a velocidade*

Por fim, vale dizer que as ações dos estudantes em relação aos experimentos e problemas anteriores contribuíram para que os mesmos construíssem propriedades do objeto por meio dos jogos de assimilação e acomodação, os quais fazem parte do ciclo adaptativo do sujeito nas teorias piagetianas. A partir dessas construções foi possível que os mesmos realizassem uma manipulação operatória em problemas posteriores, ou seja, são características generalizáveis do objeto e que podem ser aplicados em outros problemas. De acordo com Castro (1974, p. 99), caracteriza uma experiência *lógico-matemática*, já que tal experiência:

> Consiste em agir sobre os objetos de modo a descobrir propriedades que são abstraídas das próprias ações do sujeito. Em certo nível de abstração, a experiência sobre os objetos se torna inútil e a coordenação das ações é suficiente para engendrar uma manipulação operatória simplesmente simbólica e procedendo assim de modo puramente dedutivo. Nesse caso, os resultados obtidos estão vinculados às coordenações das ações, às estruturas do sujeito. (CASTRO, 1974, p. 99)

Valer notar na citação que em certo nível de abstração a experiência – agir fisicamente sobre um objeto concreto, por exemplo – já não é mais necessário. Antes, o indivíduo passa de uma ação externa para uma ação interna, de uma atividade prática para uma atividade intelectual. Ou seja, utiliza as propriedades do objeto de estudo obtidas por meio da ação prática em atividades anteriores.

Dessa forma, pode-se afirmar que a ação dos aprendizes está no centro do processo de construção de conhecimentos, sejam elas por ação direta sobre o objeto de estudo (experimentos), quando o indivíduo age sobre eles. Seja por ação interna em que o indivíduo mobiliza as propriedades construídas nas atividades anteriores (atividade do pensamento).

Assim, a nossa experiência de propor a ação aos estudantes a partir de atividades que consistem na observação de experimentos concretos, seguida da descrição desses experimentos, mostrou-se em primeiro lugar motivadora. Haja vista o envolvimento dos estudantes durante as práticas que se deu por meio das gravações de vídeo por parte deles, ou preferindo cronometrar a atividade ao invés de gravar em vídeo. Ou seja, tais aspectos demonstram uma estratégia planejada pelos mesmos e posta em ação de forma gradativa no decorrer das atividades.

Além disso, as práticas promoveram um ambiente de cooperação entre os estudantes, já que o desenvolvimento de parte das atividades se deu de forma coletiva, seja na hora de realizar a observação dos experimentos, nas análises dos gráficos construídos, e por fim, nas construções de soluções de problemas que foram projetados por meio de *data show*. Em resumo, as práticas promoveram uma intensa “troca de pontos de vista”.

Por fim, a partir das atividades práticas e dos conceitos construídos durante essas, pode-se perceber a mobilização desses conhecimentos para a resolução de problemas posteriores. Vale dizer ainda, que esses conceitos proporcionaram aos estudantes terem uma visão global dos problemas dados, ou seja, conseguiam entender o problema em seu “todo” a partir de suas partes, o que caracteriza o pensamento reversível.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entendo que a partir do fato da disciplina de estágio supervisionado estar vinculada ao projeto de pesquisa da dissertação do mestrado profissional em ensino de matemática, a mesma colaborou em nortear o desenvolvimento das atividades propostas aos estudantes. Durante o período de estágio, tanto o professor estagiário quanto o professor orientador da pesquisa pôde amadurecer e criar um melhor entendimento sobre a temática de pesquisa proposta.

Vale mencionar novamente a questão norteadora da pesquisa a qual se pretendeu lançar luz por meio do referencial teórico, estudos correlatos, documentos oficiais, e das contribuições dos estudantes durante as aulas, a saber: *"Como ocorre a construção de conceitos matemáticos entre estudantes imersos em um contexto de investigação durante a realização de atividades interdisciplinares e com a mediação do professor?"*

Dessa forma, partindo da leitura da questão norteadora da pesquisa e fundamentado nos aportes teóricos estudados, entendeu-se ser possível lançar luz às contribuições dos estudantes durante as práticas. Em primeiro lugar pode-se citar o envolvimento dos estudantes durante a prática, ou seja, existiu uma resposta por parte dos mesmos mediante o convite à investigação que cada prática estendeu. Ou seja, percebemos os estudantes motivados diante dos ambientes propostos.

Dessa ação, em primeiro momento identificamos a construção de conceitos matemáticos como, por exemplo, a plotagem de pontos (pares ordenados) no plano cartesiano que por mais simples que possa parecer, por vezes, causa certas confusões e equívocos aos estudantes. Para exemplificação, a plotagem do ponto (0,2), o qual é sabido que o mesmo localiza-se no eixo das ordenadas (y), com frequência estudantes apresentam dúvidas quanto à localização do mesmo no plano cartesiano.

No entanto, ao se contextualizar esse ponto a um movimento, percebeu-se facilidade de compreensão por parte dos aprendizes, haja vista que ele representa um ponto de partida do móvel. Tal compreensão ajudou os estudantes a interpretarem e construir os conceitos relacionados aos coeficientes de uma função afim, necessários ao estudo do movimento retilíneo uniforme – velocidade constante.

Vale lembrar novamente que as atividades por nós pretendidas e planejadas tinham o propósito de serem desenvolvidas por meio da observação e construção de conceitos matemáticos, partindo de experimentos ou atividades que proporcionassem a argumentação dos participantes. Em outras palavras, pretendeu-se propor um ensino que não seguisse a tríade definição/exemplo/exercício, ou seja, um ensino dito e entendido no senso comum como “pronto e acabado” em que os estudantes têm o papel de reprodução das soluções propostas pelo professor ou pelo livro didático.

Por sua vez, as atividades de plotagem de pontos no plano cartesiano seriam, mais adiante, úteis para a descrição dos experimentos que seriam propostos em que os estudantes deveriam descrever o mesmo no plano cartesiano. Mas não somente isso, se esperava que tais atividades proporcionassem a construção de propriedades importantes dos movimentos em questão como, por exemplo, a declividade da reta e as relações existentes entre a velocidade do móvel observado com a inclinação do gráfico.

No segundo encontro a atividade proposta consistia e interpretar uma tabela que determinava o preço cobrado para o envio de cartas em função do peso. Durante ela percebeu-se certa dificuldade na interpretação da mesma a qual tentamos sanar com a leitura conjunta com a turma. Por meio dessa leitura e diálogo, pode-se perceber reações de alguns estudantes demonstrando compreenderem melhor e com mais facilidade o que pedia a atividade.

Ou seja, o trabalho em grupo por meio de diálogo, desde os primeiros momentos se mostraram um fator facilitador na realização das tarefas pelos estudantes. Tal fato nos remonta as ideias de Vygotsky (1994, p. 111), uma vez que para ele, quando o estudante consegue realizar determinada tarefa com a ajuda de pistas ou de outros colegas, futuramente conseguirá realizar a mesma sozinha. E a diferença entre a capacidade de realização de tarefa sozinho, ou em companhia de colegas mais experientes, ou quando são dadas pistas, demonstra potencialidades ainda não atingidas pelo estudante, caracterizando assim a zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

Também foi possível perceber nessa mesma atividade a utilização do conceito de variável dependente e variável independente, haja vista alguns estudantes citarem ser impossível duas cartas com valores de envio diferentes possuírem o mesmo peso, já que os valores pagos dependiam do peso. Ademais, na mesma atividade foi proposto aos estudantes que construíssem o esboço do gráfico referente ao envio de carta e seus respectivos preços no plano cartesiano. Tais construções serviram de objeto de análises pelo grande grupo nas quais os estudantes deveriam escolher um dos gráficos construídos pelos colegas e validar a sua escolha e o motivo que os levou a descartar os demais.

De modo que os referidos debates no grande grupo contribuíram no processo de construção da aprendizagem dos estudantes, haja vista que os argumentos dos estudantes eram confrontados com os questionamentos dos demais. Ou seja, considerar a perspectiva do outro. De forma que mais uma vez recorremos às palavras de Castro (1974, p. 16) quando afirma que:

> A vida social, por introduzir o "outro" e sua perspectiva, obriga o indivíduo a distinguir-se dele (fisicamente, representativamente, socialmente) e a um esforço de reformulação de conjunto "eu-e-outro". Na conduta e no plano intelectual, é por meio de convívio no grupo que se desenvolve o "controle mútuo", ou seja, a necessidade de justificar e verificar, objetivamente, ações e pensamentos. (CASTRO, 1974, p. 16)

Assim, evidenciou-se que as atividades propostas possibilitaram a busca de soluções por meio de argumentação e cooperação entre os estudantes, tornando-se importante para o desenvolvimento do pensamento dos participantes envolvidos. Além disso, pode-se afirmar que desde o início das atividades, aos participantes foi exigido que ao mesmo tempo em que comunicavam o seu ponto de vista com o objetivo de convencer os seus colegas, tinham também que assimilar o ponto de vista alheio. Nesse "jogo de argumentações" entre os participantes, só tiveram as suas posições validadas pelos demais àqueles que conseguiam justificar as suas ações. O que para Piaget, é a "moral do pensamento", imposta e sancionada pelos outros. (Castro 1974, p. 16)

Já a atividade realizada no quarto encontro e que tinha por objetivo primeiro que os estudantes observassem um experimento – a altura da coluna d'água em função do tempo – e o descrevessem, exigiu em todo o tempo a ação por parte dos mesmos. Primeiramente, a ação se deu na observação dos estudantes, seguida da sistematização dos dados obtidos no experimento, bem como a construção dos gráficos e, por fim, os debates em relação à coerência de suas próprias construções.

Vale dizer que nesses primeiros experimentos, nos detivemos a debater aspectos como a coerência de valores adotados no plano cartesiano, uma vez que são importantes para a percepção de relações entre velocidade do crescimento da coluna d'água. Caso contrário, não é possível perceber relações entre a declividade do gráfico com as respectivas velocidades dos experimentos. Assim, a experiência serviu primordialmente como um exercício na descrição matemática de uma realidade observada pelos mesmos.

Contudo, desse intercâmbio entre os sujeitos e o objeto em que ocorreram erros e acertos, bem como os debates em relação a esses erros e acertos, entende-se ter formado a base para as atividades posteriores. De acordo com Lima (1976, p. 15-16) tal processo tem a ver com a concepção piagetiana de inteligência, pois segundo ela:

> Em Piaget, a inteligência é, pois, concebida como “a adaptação mental mais avançada”, como “a forma de equilíibrio para a qual tendem todas as estruturas, cuja formação deve ser procurada através da percepção, do hábito e dos mecanismos sensório-motores elementares”. Assim, em diferentes obras ou em diversos momentos da mesma obra, ele reitera a idéia de que os esquemas mentais se derivam dinamicamente uns dos outros, os de agora dos de ontem, os de amanhã dos de hoje, em busca da adaptação e do equilíbrio, que a operação expressa. (LIMA, 1976, p. 15-16)

Assim, a dinâmica descrita na citação acima pode ser percebida no decorrer da sequência de encontros. Nestes, a partir das construções dos gráficos referentes às velocidades de deslocamento da moeda em líquido contido no tubo acrílico, e nos diálogos, pode-se perceber a noção de taxa de variação da função sendo construída. Já que, nos momentos em que foram indagados em relação às velocidades dos experimentos, faziam relação com a inclinação dos gráficos construídos.

Ou seja, a partir da percepção de tal fato, os estudantes começaram a formar conjecturas. Ou ainda, nas palavras da estudante Alexia na referida aula, “está mais rápido porque está mais inclinadinho”. Assim, de acordo com Lima (1976, p. 16), a inteligência de cada estudante por meio da “[...] adaptação e resultado esta do equilíbrio das já citadas trocas entre o sujeito e os objetos, ou seja, do equilíbrio entre a assimilação e a acomodação [...]”, estrutura o “universo” de informações que os problemas traziam.

Dessa forma, no sétimo encontro perceberam-se mais uma vez essa dinâmica em que esquemas mentais formados em aulas anteriores, são mobilizados pelos estudantes de maneira mais aprimorada para compreender e descrever experimentos posteriores. Ora, tal fato ficou evidente uma vez que os mesmos fazem uso em primeiro lugar da sistematização dos dados observados nos experimentos com tubo acrílico, e a construção de seus respectivos gráficos.

A partir de tais construções é possível perceber uma intensa participação dos estudantes e a constatação em grupo (professor e estudantes) de que a velocidade era constante naquele experimento representado – agora corretamente esboçado – por uma reta. Também se pode perceber a noção de intervalos percorridos e seus respectivos tempos. Já que, ao serem indagados sobre a possibilidade de não se tomar a distância total e o tempo total para calculo de velocidade, mas outros intervalos de distâncias, as respostas em relação ao tempo desses pequenos intervalos de distâncias foram fornecidas corretamente. Em outras palavras, foi sendo construída, mesmo que de forma implícita, a relação muito utilizada na resolução de problemas de física e que, em aulas posteriores, seria formalizada explicitamente, a saber.

$$V_m = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i}$$

Dessa forma, pode-se perceber aos poucos o desenvolvimento de técnicas de cálculos da taxa de variação em gráficos que são representados por uma reta – que mais tarde receberá o nome de função Afim. Ora, evidenciou-se no decorrer das atividades propostas o desenvolvimento e formação de esquemas mentais por parte dos estudantes nos moldes da visão piagetiana, haja vista que:

> A visão piagetiana é fundamentalmente estruturalista e dinâmica: tudo que o pensamento constrói hoje se deve à coordenação do que já estava construído, cada novo esquema engloba o anterior, integra-o e supera, numa progressiva estruturação de formas cada vez mais equilibradas, numa paulatina equilibração de estruturas cada vez mais flexíveis. Em todas as fases do seu desenvolvimento a própria criança é o agente, quer pela sua ação prática inicial, quer pela posterior ação simbólica e mental. (LIMA, 1976, p. 18-19)

Além disso, as atividades do 7º encontro proporcionaram uma intensa troca de idéias bem como o esforço dos estudantes por apresentar a sua forma de pensar e que os levou a determinadas escolhas durante a construção da solução. Também se percebeu o desenvolvimento de capacidades imaginativas dos estudantes, pois no exercício final desse encontro não se tinha objetos físicos, mas uma representação projetada por meio de data show. Nas palavras de Lima (1976, p. 18), atingiu-se o período em que o "[...] pensamento capta não apenas as realidades físicas aparentes, mas também as suas transformações [...]", o pensamento sobrepujando as realidades aparentes.

Além disso, vale lembrar aspectos de cada gráfico que foram citados pelos estudantes para justificar a escolha pelo gráfico correto, e a "descartar" os gráficos que não representavam a situação dada. Começando por aqueles considerados em "discordância" com o problema dado.

Vê-se, portanto, a partir dos diálogos entre os estudantes conceitos sobre gráficos de funções construídos em atividades anteriores, ou seja, construídos por meio do interacionismo entre sujeito e objeto. Interacionismo esse que, segundo Castro (1974, p. 88), tem papel fundamental no entendimento da inteligência na teoria operatória de Piaget, conforme trecho a seguir:

> A inteligência também, na teoria de Piaget, é explicada pelas relações entre sujeito e objeto. No processo de interação, as operações intelectuais, cuja forma superior é "lógico-matemática", inciam-se da ação efetiva sob

> seu duplo aspecto de: uma produção própria do sujeito e uma experiência sobre a realidade.
> A evolução do processo conduz ao agrupamento das operações em sistemas de conjunto, que não são estáticos, mas dinâmicos, no duplo sentido de constante aperfeiçoamento e alta mobilidade. (CASTRO, 1974, p. 88)

Como dito anteriormente, quando se referiu à ação dos estudantes ou a experiência dos mesmos, não se tratava exclusivamente de uma ação/experiência na manipulação de materiais concretos. De outra forma, ao levar em conta apenas as atividades concretas, estar-se-á desprezando as atividades mentais superiores (educação intelectual).

Assim, considera-se em primeiro momento que as atividades proporcionaram percepções por meio da experiência física. Tal experiência faz parte da concepção piagetiana de aprendizagem e, segundo Castro (1974, p. 99), "[...] comporta ações diferenciadas em função dos objetos e consiste em agir sobre eles para descobrir as propriedades que são abstraídas desses próprios objetos. Os resultados da ação estão, nesse caso, vinculados às propriedades do objeto [...]". De modo que se notou que as atividades de observação direta dos experimentos físicos, bem como a sistematização dos mesmos em forma de tabela e plotagem no plano cartesiano, e ainda, o esboço dos gráficos referentes a esses experimentos, contribuíram para que os mesmos abstraíssem propriedades do próprio objeto de estudo. Tais propriedades foram aplicadas pelos aprendizes para resolver exercícios posteriores.

Seguindo a mesma proposta de atividades nas quais não se tem mais um experimento físico, mas um problema apresentado por meio de data show ou impresso à turma, para diálogo e investigação por parte dos mesmos. Percebeu-se uma progressiva liberação do concreto, ou seja, os estudantes sobrepujando a realidade para assumir, a partir de aspectos do problema dado, o campo das possibilidades. Em outras palavras, construindo hipóteses!

Ora, se no início das atividades os estudantes observavam uma realidade física com o propósito de abstrair propriedades do objeto de estudo, agora os mesmos utilizaram essas propriedades para agir virtualmente em relação aos problemas enfrentados. De acordo com Castro (1974, p. 57), tal fato caracteriza o período operatório em que:

> O adolescente consegue vencer as dificuldades do período anterior, em dois aspectos complementares: a progressiva liberação do concreto e a combinação plena de todas as operações de que dispõe. É o que lhe dá acesso ao pensamento hipotético-dedutivo, permitindo-lhe proceder a partir de hipóteses, como proposições assumidas, mesmo que não encontrem base na realidade. (CASTRO, 1974, p. 57)

Além disso, por intermédio das ações dos estudantes em busca de soluções para problemas "não físicos" evidenciou-se o desenvolvimento de esquemas mentais, os quais possibilitaram aos mesmos o reconhecimento da possibilidade de aplicação de conceitos generalizados em atividades semelhantes. Ou seja, a partir de casos particulares os estudantes chegaram a generalizações. Exemplo disso é a maneira de encontrar a velocidade (taxa de variação) em um movimento retilíneo uniforme e também a afirmativa dos aprendizes quando citam que 4m/2s = 2m/s (equivalência entre velocidades). Tal fato, de acordo com Castro (1974, p.89), evidencia a ação de assimilação por parte dos mesmos, haja vista que "[...] esta é que permite ao sujeito reconhecer certas atividades, reproduzi-las e generalizá-las [...]". E dessa forma, poder aplicar o conhecimento construído em outros problemas semelhantes.

Mas não somente isso, a habilidade de poder enxergar em um todo as suas partes também caracteriza o desenvolvimento do pensamento reversível que é definido por Lima (1976, p. 18) como sendo "[...] a capacidade de executar uma mesma ação nos dois sentidos do percurso, mas tendo consciência de que se trata da mesma ação [...]". Ou seja, o pensamento dos estudantes captando não somente o que é aparente, mas também as suas transformações. Tal conceito é ratificado por Castro (1974, p. 54-55), uma vez que afirma que as "[...] operações lógicas resultam da coordenação das ações de combinar, dissociar, ordenar e estabelecer correspondências, que então (no período concreto) adquirem a forma de sistemas reversíveis [...]".

Com base nisso, pode-se afirmar que houve o desenvolvimento do conhecimento intelectual por parte dos estudantes, haja vista que tal conhecimento, nas palavras de Castro (1974, p. 46), permite "não apenas agir sobre os objetos", mas também proporciona que os dados obtidos nessa ação passem a fazer parte de esquemas mentais, transformando-os em objetos de conhecimento e revelando assim, a sua plena reversibilidade. Desse modo, pode-se perceber o desenvolvimento do pensamento reversível nos estudantes, uma vez que os memos não apenas agiram sobre objetos concretos, mas essa ação resultou em conhecimentos que foram generalizados e posteriormente aplicados.

Contudo, perceberam-se dificuldades por parte dos estudantes na passagem da representação gráfica para a construção da representação algébrica dos problemas dados. O que poderia ser alvo de uma nova pesquisa, a saber: "as dificuldades apresentadas pelos estudantes na passagem da linguagem gráfica para a passagem algébrica".

Vale mencionar que se pretendeu desenvolver nos estudantes por meio da cooperação em grupo o espírito científico, tendo como instrumentos, as técnicas de observação, experimentação, verificação e argumentação. Também se procurou proporcionar a redescoberta de aspectos do objeto de estudo, bem como oportunizar a criatividade na resolução de problemas, ao invés de um conhecimento “acabado e polido” (D’AMBROSIO, 1989, p.16).

Ademais, chamamos a atenção para o enriquecimento da aula de matemática que oportuniza ao estudante expressar “o que o levou a determinados resultados em problemas dados?”. Já que, por intermédio desse “espaço” as possibilidades de conhecer e entender as dificuldades que encontram (se for o caso) será maiores. Ou ainda, Como superam essas dificuldades? São capazes de inventar novas soluções? Como reagem aos questionamentos do professor ou de colegas de turma ao serem questionados em relação a sua solução? Todos esses aspectos, por vezes, não são considerados e valorizados em uma aula estritamente expositiva.

Por fim, salienta-se que este trabalho apresenta-se como uma alternativa de ensino que procura valorizar a participação e o modo de pensar dos estudantes em oposição a um ensino que não oferece oportunidade alguma de conhecimento do aluno. Entende-se dessa forma que o ensino não deva seguir os moldes em que o professor é o elemento ativo da aula e o estudante o passivo, recebendo as noções prontas. Nem tampouco se propõe uma aula permissiva em que se invertem os papéis. Mas, propõe-se uma aula em que ambos, professor e estudantes, desempenham um papel ativo na construção de saberes, envolvendo-se no processo de ensinar e aprender. Ou ainda nas palavras de Castro (1974, p.132), que o “[...] professor esteja tão envolvido no processo quanto o aluno, animando-o a prosseguir, a fazer outras tentativas, e também o desafiando [...]”.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Adriana Correa. **Trabalhando matemática financeira em uma sala de aula do ensino médio da escola pública.** 2004. Dissertação de Mestrado em Educação. Campinas – SP, 2004. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253584>. Acesso em: 21/11/2017

ÁLVARES, Lívia Gomes. “Estudo Gráfico dos Movimentos”; **DOCPLAYER**. Disponível em:
< https://docplayer.com.br/16207558-Estudo-grafico-dos-movimentos-grafico-posicao-x-tempo-x-x-t.html>. Acesso em: 03 de abril de 2019.

BOCAFOLI, Francisco. **“**Exercícios Gráficos de um MU”; **Física e Vestibular – Aulas grátis de Física.** Disponível em:
<http://fisicaevestibular.com.br/novo/mecanica/cinematica/graficos-de-um-movimento-uniforme-mu/exercicios-graficos-de-um-mu/>. Acesso em: 03 de abril de 2019.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Autêntica Editora, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, MEC, CONSED, UNDIME. 2018. Disponível em:
<http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 01/04/2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.** Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em:
<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em 30 de maço. 2019.

BRASIL. MEC. ***Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª à 8ª série)***. Brasília: MEC/ SEF, 1998, 10 volumes. Disponível em:
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>**.** Acesso em: 03 de abril de 2019.

CASTRO, Amélia Domingues de. **Piaget e a Didática.** São Paulo: Saraiva, 1974.

CHAGAS, Elza Marisa Paiva de Figueiredo. **"Educação matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções**." (2004).

D’ AMBRÓSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

DAVID, M. M. M. S.; LOPES, M. D. P.. **Professores que explicitam a utilização de formas de pensamento flexível podem estar contribuindo para o sucesso em matemática de alguns de seus alunos**. Zetetiké: Revista de Educação Matemática, v. 6, n. 9, p. 31-58. 1998.

DILVA, Frazão. “Biografia de René Descartes”; **E Biografia**. Disponível em:
<https://www.ebiografia.com/rene_descartes>. Acessso em: 02 de abril de 2019.

DOERING, Claus Ivo; NÁCUL, Liana Beatriz Costi; DOERING, Luiza Rodríguez: **Pré-cálculo. – 3 ed**. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa**. Papirus editora, 1994.

FINO, Carlos Manuel Nogueira. **Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas**. Revista Portuguesa de educação, v. 14, p. 273-291, 2001.

FIORENTINI, Dario et al. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM-SP, v. 4, n. 7, 1990.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos**. Autores Associados, 2006.

FREIRE, Paulo – **Pedagogia da Autonomia – Saberes necessários à prática educativa, 7ª edição**. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1998.

GARCIA CAMEIRO, Vera Clotilde. **Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática**. Zetetike, v. 13, n. 23, p. 87-119, 2005.

GIOVANE, José Ruy. **Matemática Fundamental: uma nova abordagem: ensino médio: volume único**/José Rui Giovanni, José Roberto Bonjorno, José Rui Giovanni Jr. São Paulo: FTD, 2002.

HOLANDA, Francisco Bruno. "O Plano Cartesiano"; **Portal da Matemática OBMEP**. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/u49fw5fm9u0.pdf>**.** Acesso em: 06 de abril de 2019.

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e patologia do saber**. Imago Editora, 1976.

LIBRELON, Paulo. "Cinemática – Movimento Uniforme/ Gráficos"; **Exercitar é preciso....** Disponível em: <http://muitafisica.blogspot.com/2009/03/cinematica-2-lista-movimento.html>**.** Acesso em: 02 de abril de 2019

LIMA, Balina Bello. **Linguagem e pensamento em Piaget: conseqüências metodológicas para o ensino de línguas**. Editora Vozes, 1976.

LOPES, Janice P.; ANGOTTI, José AP; MORETTI, Méricles T**. Função afim e Conceitos Unificadores: o ensino de Matemática e Física numa Perspectiva Conceitual e Unificadora.** IV ENPEC (Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências)**, 2003.**

MANDARINO, Mônica Cerbella Freire; 2004. **Os professores e a arte de formular problemas contextualizados**. Disponível em:< www.bienasbm.ufba.br/OF12.pdf>. Acesso em: 01/04/2019

MIRANDA, Tiago; ASSIS, Cleber. “Módulo de Função Afim (noções básicas)”; **Portal da Matemática OBMEP**. Disponível em: < https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/cno0chndbyo8c.pdf >.Acesso em: 06 de abril de 2019.

MIRANDA, Tiago; ASSIS, Cleber. “O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações”; **Portal da Matemática OBMEP**. Disponível em: **<**https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/dhs3ww6v788cs.pdf**>**.Acesso em: 03 de abril de 2019.

PENA, Rodolfo F. Alves. "Coordenadas Geográficas"; ***Brasil Escola***. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm>. Acesso em: 02 de abril de 2019.

PENNA, Rodrigo. “UFMG Provas Antigas”; **SlideShare**. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/capitao_rodrigo/fi95-b3r-09reimp>. Acesso em: 06 de abril de 2019.

PIAGET, Jean. **Estudos Sociológicos**. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

PIAGET, Jean; BRAGA, Ivette. **Para onde vai a educação?** J. Olympio, 2011.

PIETROCOLA, Maurício. **A matemática como estruturante do conhecimento físico.** Caderno brasileiro de ensino de física, v. 19, n. 1, p. 93-114, 2002.

SILVA, Rodrigo Sychocki da; CAMPOS, Leandro Andrade. **Os Gráficos: Um Campo Fértil para o Desenvolvimento do Pensamento Autônomo**. In: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA (CIEM), 2017, Canoas (RS). Anais do VII CIEM - Canoas, ULBRA. Canoas: Editora da ULBRA, 2017. v. 1. p. 1-16.

SKOVSMOSE, Ole**. Cenários para investigação.** Bolema-Boletim de Educação Matemática**,** v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.
TRINDADE, J.A.O. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. Dissertação de Mestrado. UFSC, 1996.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.** – 5ª ed. – São Paulo: Martins Fontes, 1994.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. **Pensamento e linguagem, tradução**. Martins Fontes 1993.

VYGOTSKY, Lev Semenovich; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alexis N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem, tradução**. Maria da Penha Villalobos. São Paulo, 1988.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. **Comissão Permanente de Seleção (COPERSE)**. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/coperse/provas-e-servicos/baixar-provas/copy2_of_4DIAHISMAT.pdf>. Acesso em: 02/04/2019

8. APÊNDICES

APÊNDICE A – ATIVIDADES APLICADAS AOS ESTUDANTES

Nesta seção apresentamos uma sequência de atividades que poderá ser utilizada pelos professores em suas escolas. Ela se constitui de todas as atividades que foram aplicadas durante a pesquisa bem como sugestões de desenvolvimento em salas de aula. Já no apêndice B, foram feitos “acréscimos” e “subtrações” de atividades também acompanhadas de sugestões com o propósito de aprimorar as mesmas.

Vale dizer ainda que mesmo com as alterações realizadas por nós nessas sequencias de atividades, os professores poderão alterar a mesma sempre que julgarem necessário. Haja vista que cada turma tem as suas próprias peculiaridades, e isso torna indispensável a sensibilidade do mestre para o sucesso de toda e qualquer proposta didática. Dessa forma, ao “destacar” as atividades aqui sugeridas, o professor poderá adequar de acordo com as necessidades da sua turma.

No entanto, a partir de nossa experiência no desenvolvimento dessa pesquisa por meio da aplicação das atividades, deseja-se contribuir com o meio acadêmico e escolar, fazendo sugestões que poderão aperfeiçoar a dinâmica da aprendizagem dos estudantes. Dessa forma, cada “dia” (2 períodos 55 minutos) de atividades proposta é acompanhado de sugestões para o desenvolvimento das mesmas.

Dia 1 – Introdução da noção de pares ordenados por meio da interpretação de tabelas e gráficos

Sugestões aos professores: Primeiramente essa atividade tem como objetivo propor uma investigação por parte dos estudantes em relação às informações contidas na tabela a seguir. Dessa forma, para que haja a investigação por parte dos estudantes bem como o debate no grande grupo, sugere-se que se faça a projeção da imagem na lousa por meio de *data show*.

A partir disso, pode-se iniciar a investigação e os debates procurando responder as questões que acompanham a tabela. A participação do professor nesse caso pode ocorrer de forma a realizar mais perguntas que não estão sendo contempladas pelo problema, como por exemplo:

– Qual o valor pago por uma carta de 20 g?

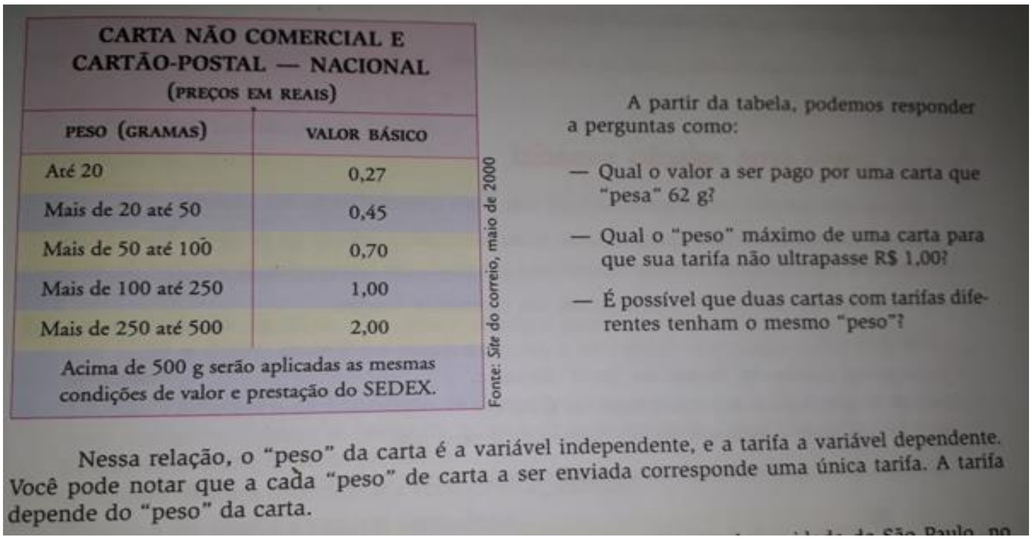
– É possível que cartas com mesma tarifa para envio, tenham pesos diferentes?

– Qual o valor pago para uma carta de 50 g? E de 51 g?

O professor pode seguir fazendo perguntas tanto em relação aos limites dos intervalos dos pesos das cartas, mas também pode seguir fazendo perguntas no tocante ao valor pago para o envio de cartas com os mais diversos pesos. E a partir disso, introduzir os pares ordenados relativos ao valor pago para o envio em função de seu peso $(peso, preço) = (x, y)$.

E por fim, pode-se fazer a plotagem dos pares ordenados no gráfico, chamando a atenção dos estudantes para os infinitos pesos que existem no intervalo entre 0 g e 500 g. Dessa forma, com a ajuda dos estudantes, pode-se esboçar o gráfico da situação dada.

Situação 1.



CARTA NÃO COMERCIAL E CARTÃO-POSTAL — NACIONAL (PREÇOS EM REAIS)

PESO (GRAMAS)	VALOR BÁSICO
Até 20	0,27
Mais de 20 até 50	0,45
Mais de 50 até 100	0,70
Mais de 100 até 250	1,00
Mais de 250 até 500	2,00
Acima de 500 g serão aplicadas as mesmas condições de valor e prestação do SEDEX.	

Fonte: Site do correio, maio de 2000

A partir da tabela, podemos responder a perguntas como:

— Qual o valor a ser pago por uma carta que "pesa" 62 g?

— Qual o "peso" máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00?

— É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo "peso"?

Nessa relação, o "peso" da carta é a variável independente, e a tarifa a variável dependente. Você pode notar que a cada "peso" de carta a ser enviada corresponde uma única tarifa. A tarifa depende do "peso" da carta.

Fonte: Ed. FTD, 2002

A partir da tabela acima, pense nos seguintes questionamentos:

– Qual o valor a ser pago por uma carta que "pesa" 62 g?

– Qual o "peso" máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00?

– É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo "peso"?

– A partir dos dados expostos, você saberia dizer do que depende o valor pago para o envio de cada carta?

Observação: A atividade a seguir também tem como finalidade proporcionar o espaço para a interpretação, a investigação e o debate no grande grupo. Dessa forma, sugere-se a projeção da imagem na lousa por meio de datashow. Também pode-se chamar a atenção para os pares ordenados (mês do ano, taxa de desemprego).

Situação 2.

Fonte: Folha de S. Paulo, 25/6/1999

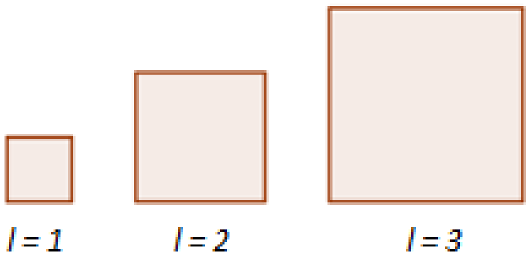
– Em que mês houve o maior número de desempregados?

– Em que época houve o menor número de desempregados?

– Qual a porcentagem de aumento ou diminuição do desemprego entre cada mês do ano?

– Existe uma relação de dependência no exemplo acima? Se existe, qual é?

Situação 3. Por meio da relação $A = l^2$ é possível calcular a área A de um quadrado de lado l. Conforme os exemplos a seguir:



Fonte: acervo do pesquisador

$A = 1^2 = 1$ $\qquad$ $A = 2^2 = 4$ $\qquad$ $A = 3^2 = 9$

– Existe uma relação de dependência? Qual é?

– É possível que um quadrado que possui um determinado valor de lado, possua mais de um valor de área?

Sugestões aos professores: Assim como nas situações 1 e 2 também pode-se encontrar os pares ordenados da situação dada, nesse caso, lado e área do quadrado (lado, área). Além disso, a partir da situação 3 pretende-se proporcionar a redescoberta por parte dos estudantes da relação de dependencia existente entre o lado de cada quadrado com a sua respectiva área.

Também nessa atividade, a partir de diversos valores para o lado do quadrado e suas respectivas áreas (pares ordenados), realizar a plotagem de pontos no plano cartesiano e o gráfico referente a essa função. Ademais, é possível introduzir o conceito de função, o qual trazemos por intermédio de Doering (2012, p. 33):

Conceito de Função: Em geral, dizemos que uma variável y é uma função de uma variável x se, para cada valor de x num conjunto D, estiver associado um único valor de y. Nesse caso, x é denominada variável independente e y variável dependente.

A seguir, outros exemplos de dependência que não são matemáticas como, por exemplo:

– A dependência que um alto executivo tem de seu smartphone para solucionar determinados problemas;

– A dependência que um motoboy tem da sua moto para fazer as entregas de lanches;

– A dependência que um pedreiro tem da sua colher de pedreiro pra erguer paredes, dentre outros.

Sobre as dependências entre grandezas matemáticas existentes entre elas, têm-se os seguintes exemplos:

Exemplo 1: O preço pago no caixa do supermercado depende dos quilos de determinada fruta que se deseja comprar;

Exemplo 2: O valor pago por uma corrida de taxi depende da quantidade de quilômetros de certo percurso;

Exemplo 3: A altura da coluna de um termômetro de mercúrio depende da temperatura de cada pessoa, de modo que “a cada temperatura está associado um único valor para o volume de mercúrio que o termômetro registra”.

Seria possível um doente ter duas febres diferentes?

Exemplo 4: Em um supermercado um produto pode ter dois preços?

A propósito, mais de um produto podem ter dois preços?

Quantos produtos podem ter o mesmo preço?

Exemplo 5: Quando os jornais dão destaque ao "gráfico" que mostra o crescimento da produção anual de automóveis no Brasil, estão ressaltando a relação entre o ano de produção e o número de automóveis produzidos nesse ano.

Tal situação representa uma *função*: A que associa a cada ano (elementos de um conjunto de A de anos) um *único* número de automóveis produzidos (que são elementos de um conjunto B de números inteiros).

Situação 4. Em uma rodovia, um carro mantém velocidade constante de 100 km/h. Complete a tabela a seguir que relaciona o tempo t (em horas) e a distância d (em quilômetros) percorrida nesse tempo.

Relação entre tempo e distância percorrida por um carro

Tempo (t) (em horas)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Distância (d) (em quilômetros)	50	100				

a) Que grandeza foi calculada em função da outra?

b) A cada instante de tempo corresponde uma única distância percorrida?

c) Qual é a variável dependente? O tempo depende da distância percorrida pelo automóvel ou a distância percorrida depende do tempo que o carro se desloca?

d) Escreva a lei que descreve essa função (expressão matemática).

Sugestões aos professores: Assim como nas atividades anteriores, essa atividade tem o propósito de promover a investigação individual e coletiva dos estudantes, torna-se importante que haja a projeção dos problemas na lousa, mas também que eles tenham em mãos os problemas impressos para facilitar a investigação individual. Já para as atividades que se esteja pedindo o esboço dos gráficos, que os mesmos tenham em mãos a folha quadriculada.

Além disso, é possível esboçar o gráfico por meio da obtenção de seus pares odenados e introduzir a noção do cálculo da velocidade de um móvel. Sugere-se que se faça uma discussão em relação ao que diz as placas de trânsito que delimitam a velocidade dos veículos e o que significa dizer que a velocidade de um automóvel tem um limite de 80km/h. O que optamos por definir que:

$$\boxed{80 \text{ km/h} = 80 \text{ km percorridos em um hora}}$$

Ou seja, que a velocidade de um móvel é igual ao espaço percorrido em um determinado tempo ou que se trata da razão (uma divisão) entre os quilômetros percorridos por um determinado tempo. A partir disso, pode-se sugerir aos estudantes calcularem a velocidade para diversos trechos descritos na tabela com o propósito de que os mesmos possam concluir por si mesmos se a velocidade é igual em todos os trechos ou não.

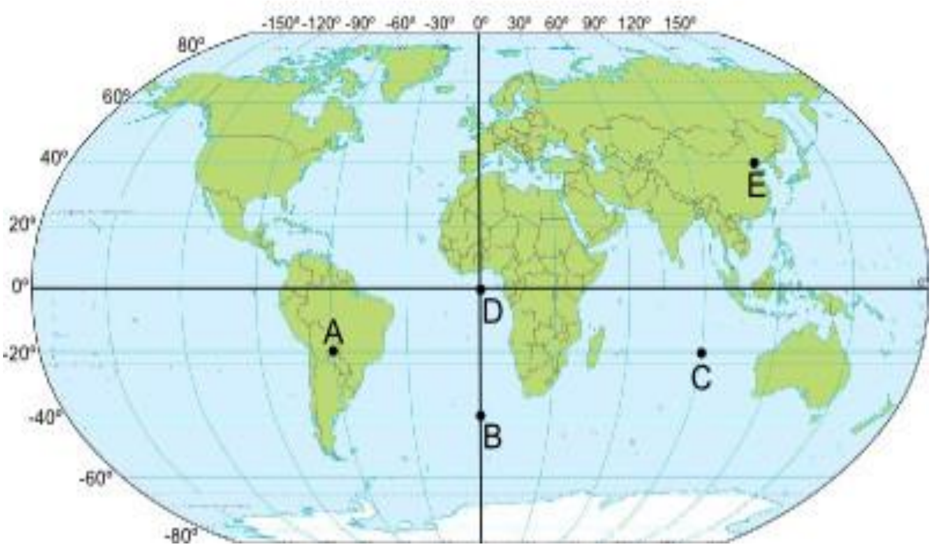
Dia 2 – A localização e plotagem de pares ordenados e construção de gráficos a partir de um experimento físico – descrição gráfica do experimento

Umas das diversas aplicações que possui a representação de coordenadas no eixo cartesiano são as coordenadas geográficas. Nelas, no lugar dos eixos das abscissas (x) e das ordenadas (y), tem-se a linha do Equador (eixo x) e o meridiano de Greenwich (y), ambos medidos em graus recebendo o nome de latitude e longitude.

Latitudes: são as distâncias em graus de qualquer ponto da Terra em relação à linha do Equador. Suas medidas vão de – 90° à + 90°.
Longitude: são as distâncias em graus de qualquer ponto da Terra em relação ao meridiano de Greenwich. Suas medidas vão de – 180° à + 180°.

Fonte: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm>

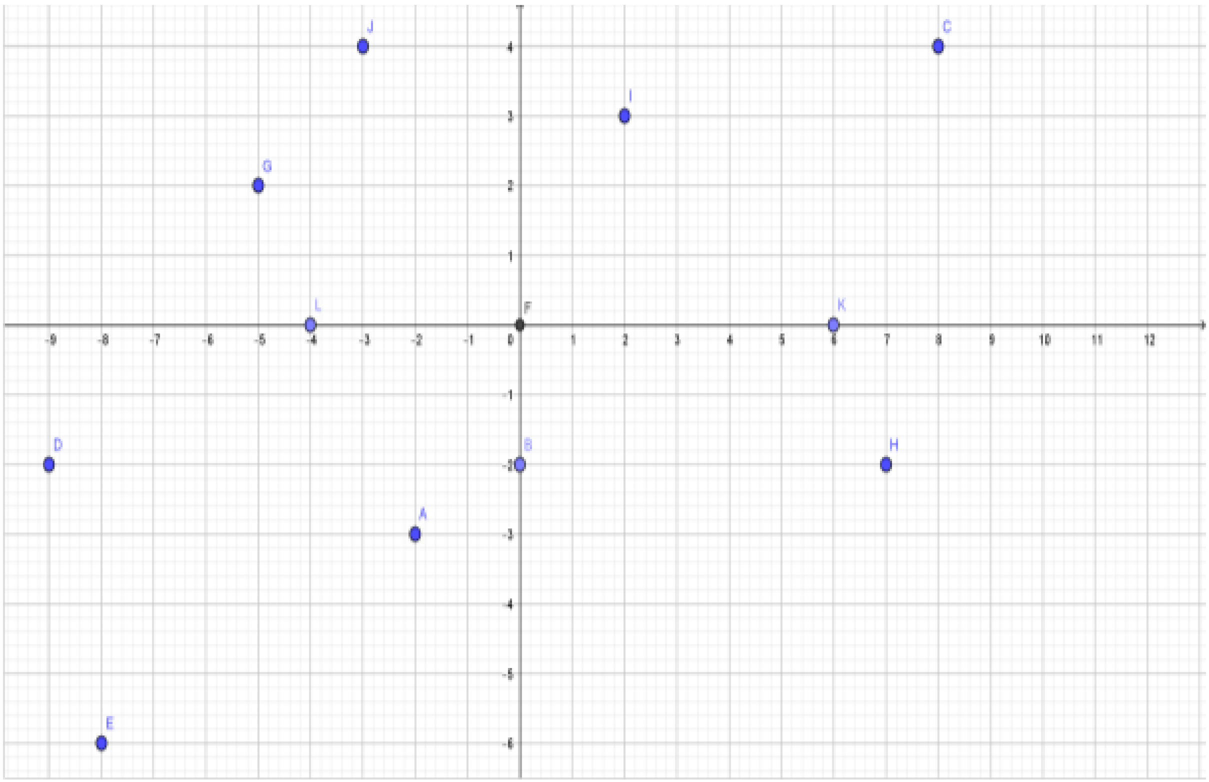
Problema: O mapa a seguir fornece as coordenadas geográficas globais estabelecidas a partir da combinação das latitudes e longitudes.



Fonte: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm>

Acima, temos a representação de cinco pontos diferentes. Observando as suas latitudes e longitudes, descreva as coordenadas geográficas de cada um deles, indicando os seus hemisférios (Norte: N. Sul: S. Leste: E. Oeste: W).

Problema: Determine os pontos plotados referentes às coordenadas a seguir:



Fonte: acervo do pesquisador

Mas voltando ao problema da situação 4. O que você pensa, o tempo decorre em 30 em 30 minutos? Em outras palavras, o tempo “pula” de meia em meia hora?

Ou existe uma continuidade? Com quais conjuntos numéricos pode-se representar o tempo? Naturais, Inteiros, Racionais ou Reais? (discussão)

Sugestão aos professores: Para as atividades de descrição de pontos dados no plano cartesiano sugere-se que os estudantes tenham em mãos os exercícios impressos e também que seja projetado por meio de *data-show* na lousa. Entende-se que dessa forma os estudantes poderão se engajar em resolver os problemas de forma individual e coletiva. Lembrando que tal exercício irá contribuir para as atividades a seguir.

Situação 5. (Experimento MRU)

Nessa atividade os estudantes irão realizar um experimento que se dará por intermédio da observação do deslocamento de uma bolha de ar em um tubo de acrílico transparente e cheio d’água, o qual estará inclinado (bolha subindo). Também será realizado o caminho inverso, só que dessa vez, poderá ser utilizada uma esfera e no tubo poderá ser utilizado óleo de soja ou glicerina líquida.

Alguns objetivos da atividade são:

– Observar se existe alguma regularidade no deslocamento da bolha nesse tubo como, por exemplo, o tempo que a bolha leva para percorrer diferentes distâncias, se ela é mais veloz em alguns trechos ou não;

– Ilustrar características de uma função, uma vez que a bolha nunca estará em dois lugares ao mesmo tempo;

– Organizar os dados em tabelas para uma melhor apresentação.

– Fazer a “plotagem” dos dados obtidos no sistema de eixo cartesiano e descobrir tanto a subida da bolha como a descida da esfera, o ponto de encontro de ambas. Note-se que são experimentos diferentes, mas que podem ser representados em um mesmo plano cartesiano;

– Determinar a expressão matemática que fornece a posição da bolha para qualquer instante, caso seja possível perceber um padrão no experimento como, por exemplo, a velocidade dos móveis seja constante.

– Sistematização de dados a partir de uma realidade dada e sua representação gráfica

A seguir, a imagem ilustrativa do experimento.

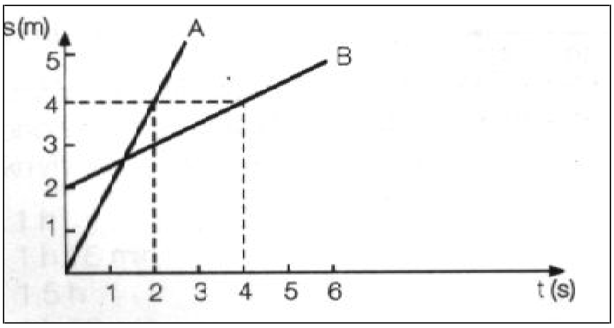
Fonte: acervo do pesquisador

Sugestões aos professores: Nessa atividade podem ser simulados movimentos com diferentes aspectos, pois a inclinação do tubo determinará a velocidade da bolha, se o tubo estiver mais inclinado, maior será a velocidade da bolha. Se o tubo estiver menos inclinado, menor será a velocidade da bolha. Sugere-se que o professor realize o experimento com diferentes inclinações poderá comparar as peculiaridades de cada gráfico, compará-los.

A partir dos esboços dos gráficos, sugere-se introduzir o cálculo das velocidades dos mesmos a partir de debate no grande sobre “o que querem dizer as placas de trânsito que limitam a velocidade dos veículos?” O que significa a grandeza velocidade (representado por km/h)? Ou pode-se tomar até mesmo um caso particular como, por exemplo, “o que quer dizer 80 km/h?”. Em aula posterior, os gráficos construídos pelos estudantes podem ser projetados para que haja uma discussão em torno dos possíveis erros, bem como fazer comparações entre a velocidade de cada experimento e a sua respectiva inclinação. Além disso, entende-se que a interatividade com o objeto de estudo pode contribuir para que os estudantes abstraiam do objeto as suas propriedades.

Dia 3 – Investigação sobre as informações contidas no gráfico e descrição de experimentos físicos

Dois móveis, A e B, percorrem a mesma trajetória retilínea. A figura representa as posições (s), dadas em metros, em função do tempo (t), dado em segundos, desses dois móveis. No instante t = 5s, a distância entre A e B vale, em metros:



Fonte: http://muitafisica.blogspot.com/2009/03/cinematica-2-lista-movimento.html (acesso em fevereiro de 2019)

a) 2,5 b) 3 c) 4 d) 5,5 e) 6

Sugestão aos professores: Sugere-se que o professor faça a projeção do problema na lousa por meio de datashow com o intuito de promover a solução do problema por parte dos estudantes por meio de debates no grande grupo. Como a intenção não é mostrar como se faz, mas que os mesmos consigam por si mesmos encontrar uma forma de resolver por meio da interpretação do gráfico.

Assim, o professor pode auxiliá-los com perguntas como: Qual o ponto de partida de cada móvel? Qual a velocidade de ambos os móveis? Em qual ponto os móveis se encontram? Qual deles está mais rápido? Enfim, que o professor auxilie na investigação do problema pela turma e, por fim, na obtenção na solução do mesmo. Além disso, de posse da velocidade de cada móvel e de seus respectivos pontos de partida, é possível obter a expressão algébrica que fornece a posição para qualquer instante de tempo.

Experimento. Nessa atividade os estudantes observarão a rapidez com que uma coluna d’água se eleva em função do tempo em um tubo em forma de cilindro que será cheio a uma vazão constante. A seguir, a imagem ilustrativa da atividade.

Fonte: acervo do pesquisador

Os objetivos da atividade consistem em:

– Observar regularidades no deslocamento d’água no tubo em relação ao tempo;

– Tabelar os dados obtidos;

– Plotar alguns pontos no sistema cartesiano e traçar o gráfico;

– Determinar a lei que expressa a altura da coluna d’água em função do tempo.

Materiais:

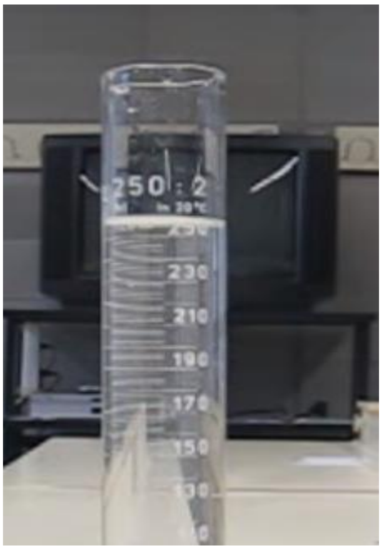
– Tubo acrílico;

– Mangueira (para encher o tubo com diferentes vazões d’água);

– Smartphones pra filmar ou cronometrar.

Sugestão aos professores: Para a obtenção dos ditos pares ordenados desse experimento, sugere-se que o professor peça aos seus alunos que marque os tempos em que a coluna d’água atinge as marcas (feitas com “canetão”) no tubo no cronômetro de seus *smartphone*. Além disso, sugere-se que o experimento seja realizado em diferentes velocidades de vazão da água, surgindo assim diferentes gráficos. Gráficos esses que podem ser objeto de análise no grande grupo em aula posterior.

Experimento. Dessa vez será utilizado o tubo acrílico com óleo de soja com o intuito de propor aos estudantes observarem o deslocamento de uma gota d'água percorrendo o óleo de soja ao longo do tubo. Tal prática tem o objetivo de observar possíveis regularidades na rapidez desse deslocamento, organizar os dados obtidos, bem como esboçar a determinada situação no plano cartesiano (fazer o gráfico).



Fonte: acervo do pesquisador

Sugestão aos professores: Embora seja sugerida a utilização de um tubo acrílico com óleo de soja, no qual a gota d'água irá percorrê-lo, sugere-se que seja realizado também com líquidos com diferentes densidades, pois assim, se terá gráficos com diferentes velocidades de deslocamento, o que proporcionará diferentes análises em relação às velocidades. Dessa forma, o tubo pode ser cheio com: água, óleo de soja ou glicerina líquida. Já para o ponto móvel pode ser adotado uma gota d'água – essa adicionada no experimento por meio de uma seringa, uma esfera ou moeda.

Sugere-se ainda que todas as construções de gráficos dos estudantes referentes aos experimentos sejam projetadas em aulas posteriores com o fim de proporcionar os debates, análises e observações dos mesmos. Além disso, a realização de constatações em relação as diferentes velocidades. Por fim, sugere-se que os estudantes sejam incentivados a obter a expressão matemática relativa a cada experimento.

Dias 4 e 5 – Apresentações de soluções pelos estudantes aos colegas

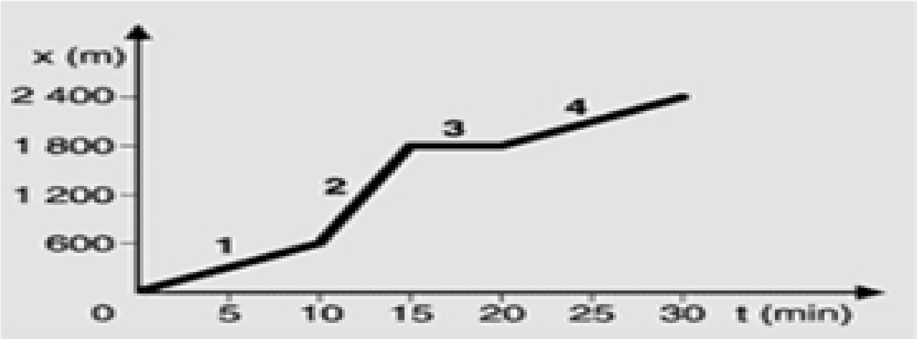
Sugestão aos professores: Sugere-se que o professor separe grupos compostos por 3 estudantes e distribua os problemas a seguir para que os mesmos se engajem na tarefa de resolvê-los me seus respectivos grupos. Porém, o objetivo não deve ser apenas encontrar as alternativas corretas, mas também justificar porque as demais não são corretas. Além disso, sugere-se que seja dispensado um tempo para que cada grupo apresente a sua solução aos colegas justificando os motivos que os levaram a assinalar a alterativa que julgaram correta e que os levaram a descartar as incorretas.

O objetivo de tais atividades é proporcionar não somente que os estudantes resolvam os problemas, mas também proporcionar:

– A comunicação da solução aos colegas;
– O debate entre os estudantes;
– O reposicionamento frente às posições contrárias dos colegas;
– O desenvolvimento da autoconfiança.

Já o professor pode contribuir com perguntas que levem o estudante que está apresentando a solução e os colegas expectadores a analisarem detalhes não percebidos nos problemas. A seguir os problemas sugeridos para a prática.

1) Uma pessoa passeia durante 30 minutos. Nesse tempo, ela anda, corre e também pára por alguns instantes. O gráfico representa a distância (x) percorrida por essa pessoa em função do tempo de passeio (t).

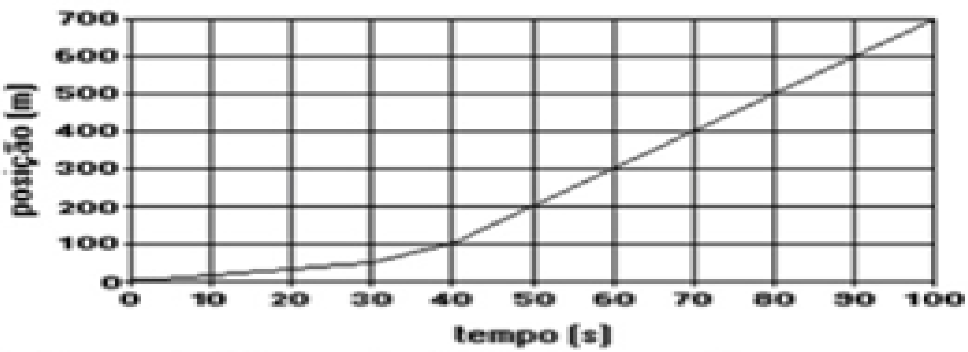


Pelo gráfico pode-se afirmar que, na seqüência do passeio da pessoa,ela:

a) andou (1), correu (2), parou (3) e andou (4).
b) andou (1), parou (2), correu (3) e andou (4).
c) correu (1), andou (2), parou (3) e correu (4).
d) correu (1), parou (2), andou (3) e correu (4).

Fonte: http://www.fisicafacil.net/curso/1em/cinematica/aula05/fixacao_aula05.pdf (acesso em fevereiro de 2019)

2) (UFMG 95) O gráfico a seguir mostra como varia a posição em função do tempo para um carro que se desloca em linha reta.



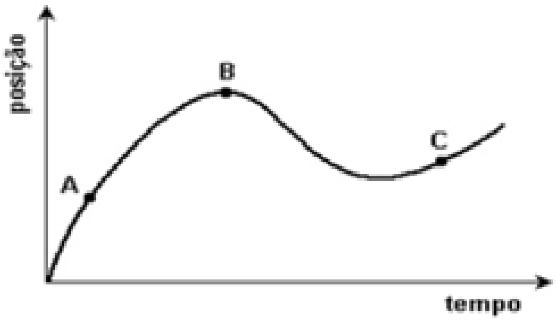
No tempo t=60s, a velocidade do carro é

a) 5,0m/s b) 7,0m/s c) 10m/s

d) 12m/s

Fonte: https://pt.slideshare.net/capitao_rodrigo/fi95-b3r-09reimp (acesso em fevereiro de 2019)

3) Um carro está andando ao longo de uma estrada reta e plana. Sua posição em função do tempo está representada neste gráfico:
Sejam V_A, V_B, V_C os módulos das velocidades do carro, respectivamente, nos pontos A, B e C, indicados nesse gráfico.

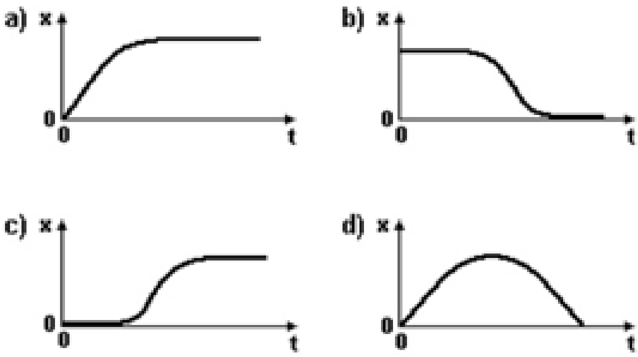


Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que

a) $V_B < V_A < V_C$.
b) $V_A < V_C < V_B$.
c) $V_B < V_C < V_A$.
d) $V_A < V_B < V_C$

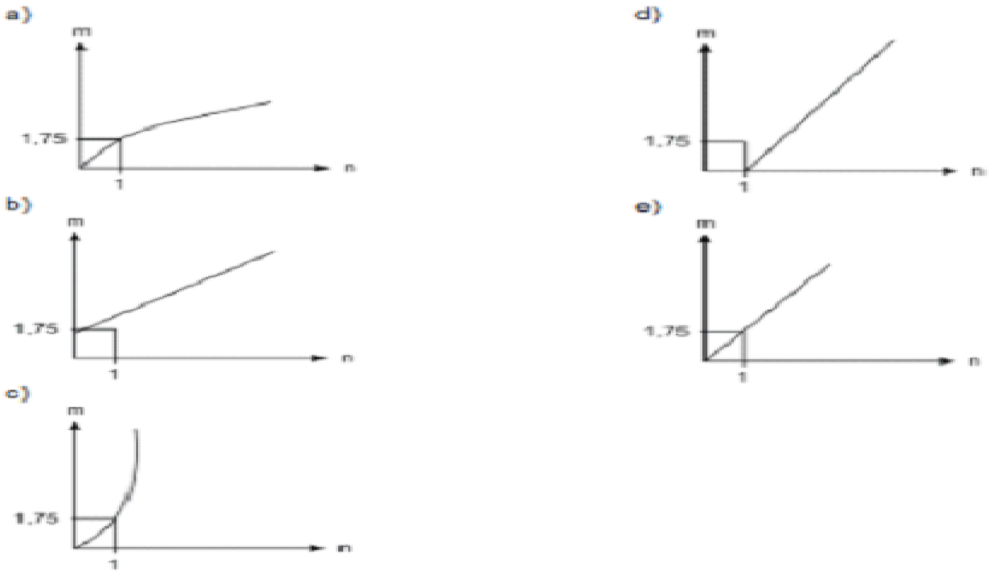
Fonte: http://pir2.forumeiros.com/t61898-questao-de-cinematica-da-ufmg (acesso em fevereiro de 2019)

4) Em uma corrida de Fórmula 1, o piloto Miguel Sapateiro passa, com seu carro, pela linha de chegada e avança em linha reta, mantendo velocidade constante. Antes do fim da reta, porém, acaba a gasolina do carro, que diminui a velocidade progressivamente, até parar. Considere que, no instante inicial, t=0, o carro passa pela linha de chegada, onde x=0. Assinale a alternativa cujo gráfico da posição x em função do tempo t MELHOR representa o movimento desse carro.



Fonte: https://docplayer.com.br/16207558-Estudo-grafico-dos-movimentos-grafico-posicao-x-tempo-x-x-t.html (acesso em fevereiro de 2019)

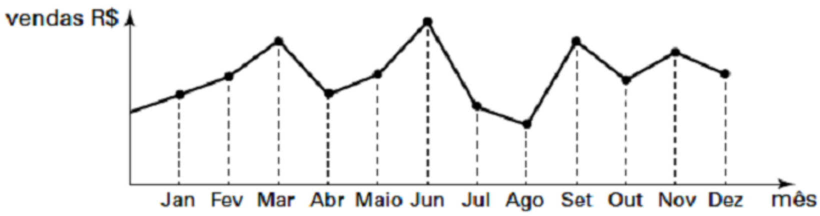
5 - ENEM 2011 - Questão 152 – Prova Azul. As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:



Fonte: Enem 2011

6 - ENEM 2012 - Questão 140 – Prova Amarela. O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.

De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram



a) março e abril.

b) março e agosto.

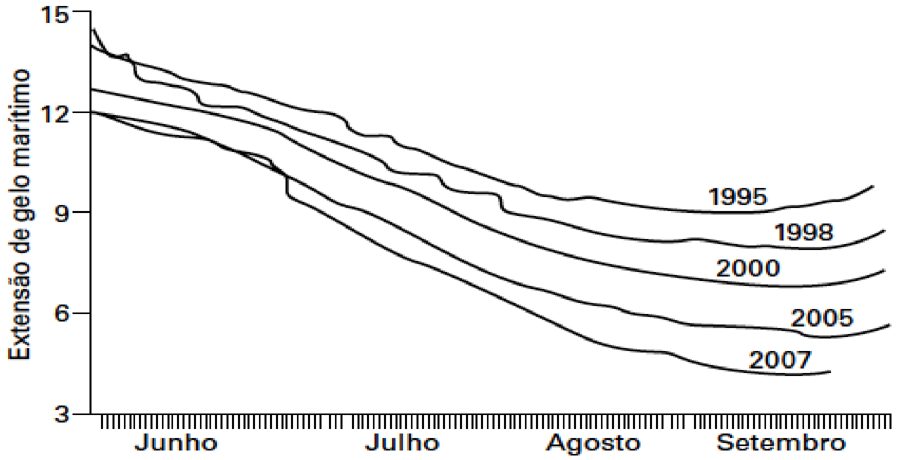
c) agosto e setembro.

d) junho e setembro.

e) junho e agosto.

Fonte: Enem 2012

7 - ENEM 2012 - Questão 143 – Prova Amarela. O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.



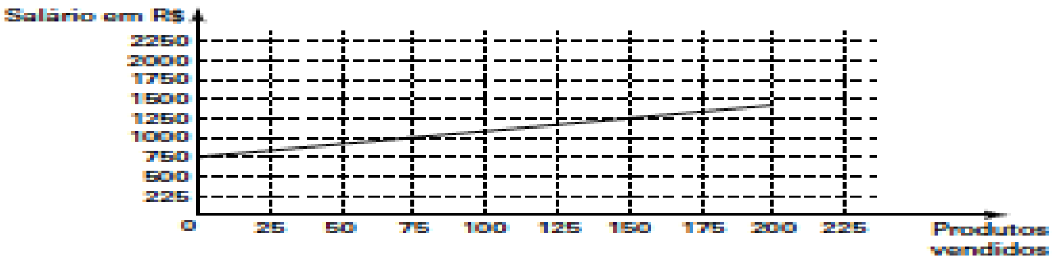
Fonte: Enem 2012

Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em

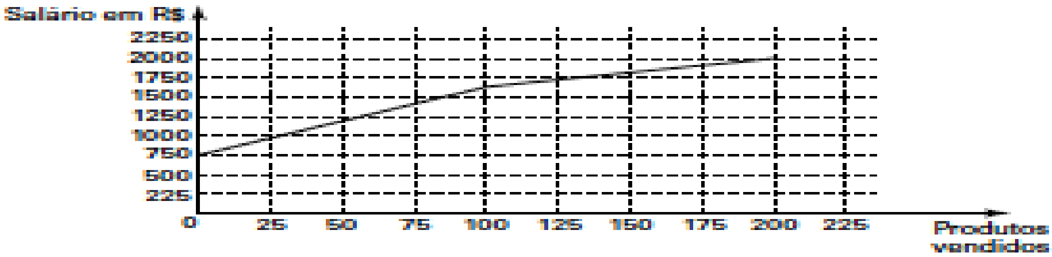
A) 1995. B) 1998. C) 2000. D) 2005. E) 2007.

8 - ENEM 2012 - Questão 145 – Prova Amarela. Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$ 750,00, mais uma comissão de R$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido. Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é

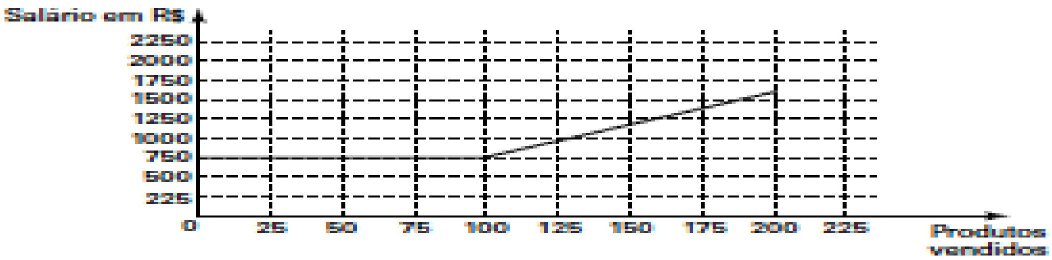
A)



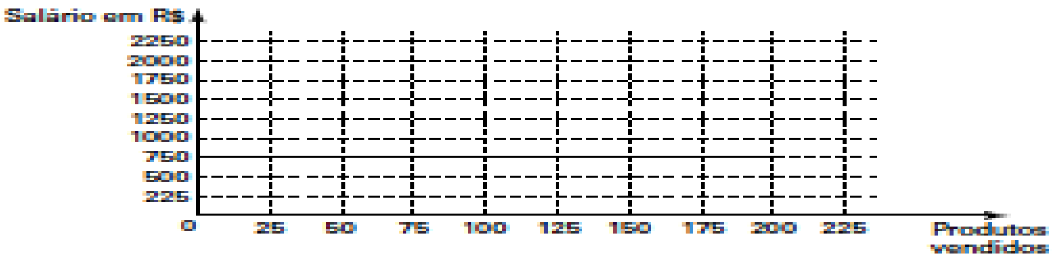
B)



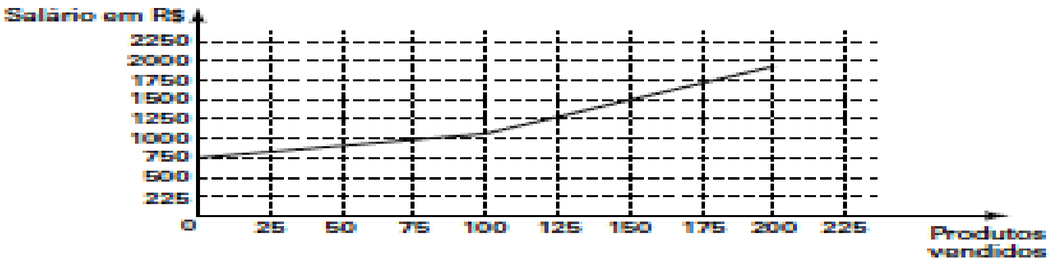
C)



D)



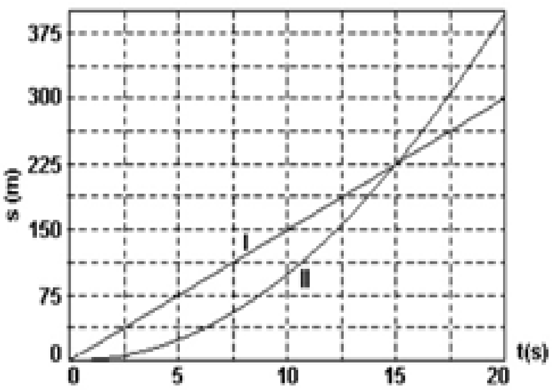
E)



Fonte: Enem 2012

9)

(Unesp 2008) Os movimentos de dois veículos, I e II, estão registrados nos gráficos da figura.



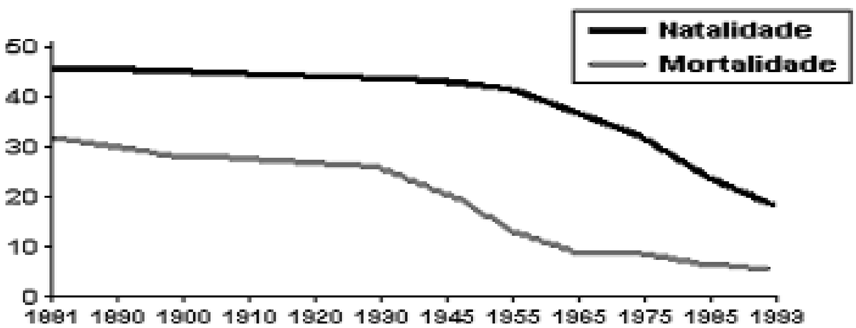
Sendo os movimentos retilíneos, a velocidade do veículo II no instante em que alcança I é

a) 15 m/s.
b) 20 m/s.
c) 25 m/s.
d) 30 m/s.
e) 35 m/s.

10) (UFRGS/2000) A taxa de crescimento natural de uma população é igual a diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade cujas evoluções estão representadas no gráfico abaixo.

Evolução das Taxas de Natalidade e Mortalidade

(por mil) Brasil, 1881-1993



Fontes: Censos Demográficos e PNADs

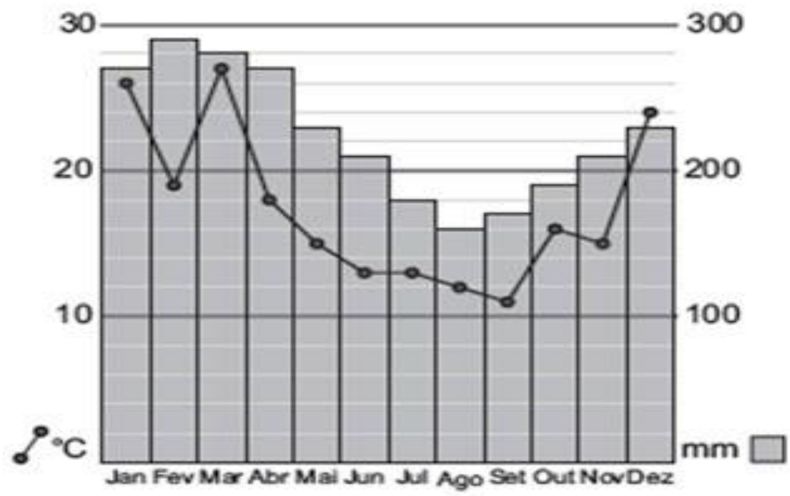
Fonte: UNICEF. "A Infância Brasileira nos Anos 90". Brasília, nov. 1998.

Fonte: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dentre as opções abaixo, a maior taxa de crescimento natural da população ocorreu no ano de

(A) 1881. (B) 1900. (C) 1930. (D) 1955. (E) 1993.

11) (OBMEP 2010) O gráfico mostra a temperatura média e a precipitação de chuva em Quixajuba em cada um dos meses de 2009. Qual das afirmativas abaixo está correta?



Fonte: Olimpíada brasileira das escolas públicas 2010

A) O mês mais chuvoso foi também o mais quente.

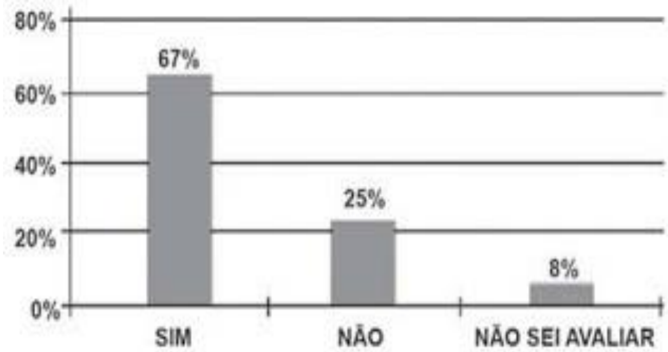
B) O mês menos chuvoso foi também o mais frio.

C) De outubro para novembro aumentaram tanto a precipitação quanto a temperatura.

D) Os dois meses mais quentes foram também os de maior precipitação.

E) Os dois meses mais frios foram também os de menor precipitação.

12) (ENEM 2011) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Fonte: Enem 2011

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam “NÃO” à enquete?

a) menos de 23 b) mais de 23 e menos de 25 c) mais de 50 e menos de 75

d) mais de 100 e menos de 190 e) mais de 200

APÊNDICE B – ROTEIRO DE ATIVIDADES COMPLEMENTARES – UMA FORMA ALTERNATIVA DE DESENVOLVIMENTO DAS PRÁTICAS

Dia 1 - Breve história sobre o surgimento do Plano Cartesiano e sua aplicações

René Descartes (1596 - 1650) foi um filósofo, físico e matemático francês. Autor da frase: "Penso, logo existo". É considerado o criador do pensamento cartesiano, sistema filosófico que deu origem à Filosofia Moderna. Sua preocupação era com a ordem e a clareza. Propôs fazer uma filosofia que nunca acreditasse no falso, que fosse fundamentada única e exclusivamente na verdade.

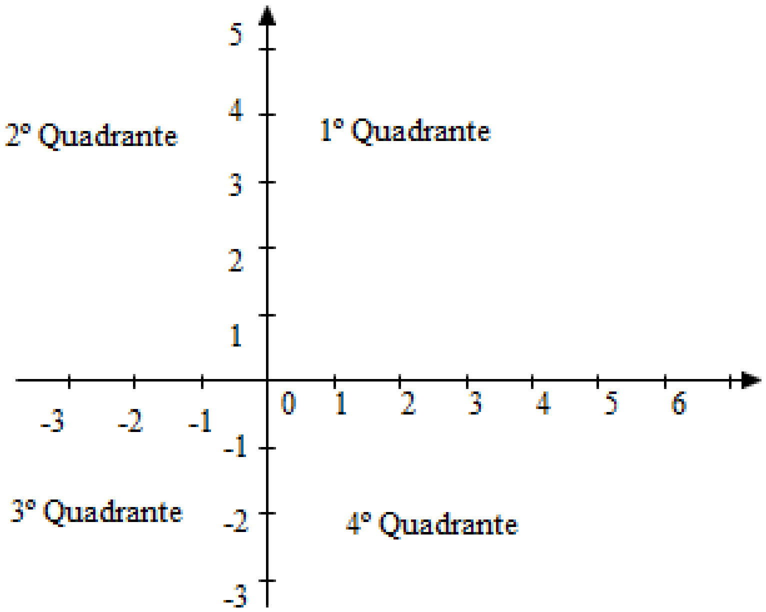
René du Perron Descartes nasceu em La Hayne, antiga província de Touraine, hoje Descartes, na França, no dia 31 de março de 1596. Descartes realizou diversos trabalhos na área da filosofia, ciências e matemática. Relacionou a álgebra com a geometria, fato que fez surgir a geometria analítica e o **sistema de coordenadas, conhecido hoje como "Plano Cartesiano"**. Aperfeiçoou a álgebra, sugerindo notações mais simples, fez diversas descobertas no terreno da física e criou a teoria das refrações da luz através das lentes. Dessa forma, o sistema de coordenadas no plano leva o nome de Plano Cartesiano em homenagem à René Descartes.

Fonte: https://www.ebiografia.com/rene_descartes. Acesso em: 26/01/2018

O Plano Cartesiano

O plano cartesiano consiste em um sistema de coordenadas no plano, as quais se situam em dois eixos perpendiculares. O primeiro deles se chama **abscissa x** (eixo horizontal) e o segundo chama-se a **ordenada y** (eixo vertical).

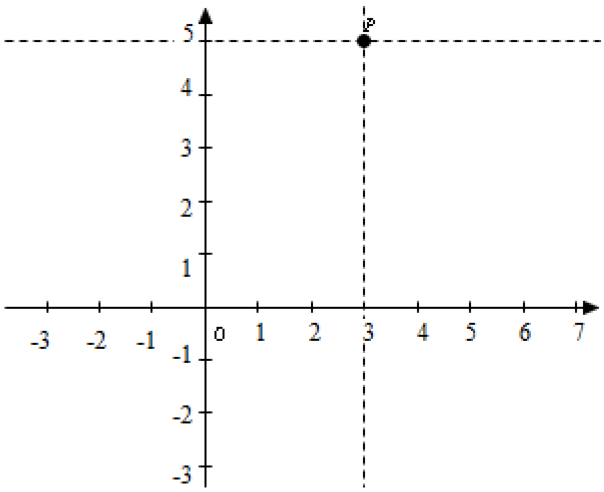
Em ambos os eixos destaca-se números inteiros de forma crescente da "esquerda para a direita" e de "baixo para cima". Conforme a seguir:



Fonte: acervo do pesquisador

Sugestões aos professores: É importante chamar a atenção dos estudantes durante a construção do plano cartesiano e dos gráficos para a equidistância que deve ter entre os números dispostos nos eixos, haja vista a importância de tal característica para a percepção de relações entre variáveis e também a velocidade de situações observadas.

A seguir destaca-se um ponto P (3,5) do primeiro quadrante do plano cartesiano, o qual também é chamado de **par ordenado**. O valor x = 3 representa o valor da primeira variável e o valor y = 5 representa o valor da segunda variável. Dessa forma podem-se encontrar todos os pontos dos quatro quadrantes do plano cartesiano, incluindo aqueles pontos em que as coordenadas são apresentadas por números reais, os quais não foram dispostos no sistema de eixos.



Fonte: acervo do pesquisador

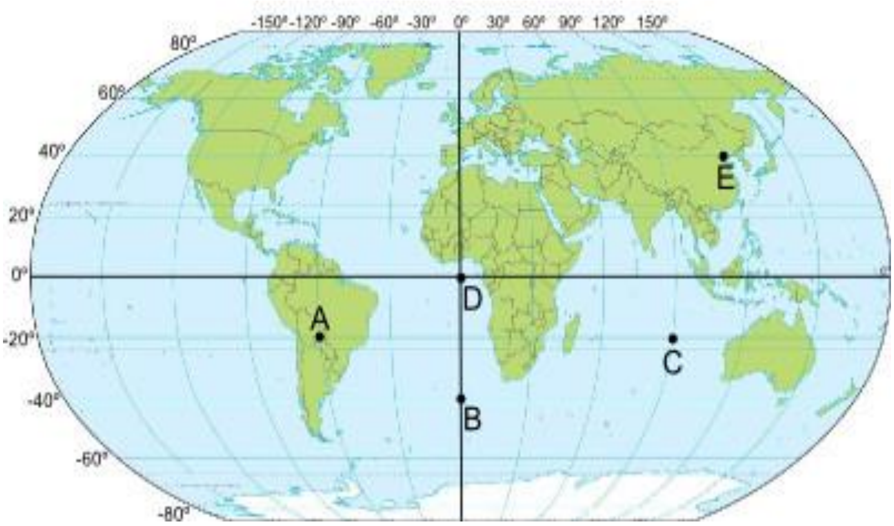
A seguir, destacam-se situações em que se pode perceber a aplicação do sistema de coordenadas cartesianas além do esboço de gráficos. Sejam elas:

Umas das diversas aplicações que possui a representação de coordenadas no eixo cartesiano são as coordenadas geográficas. Nelas, no lugar dos eixos das abscissas (x) e das ordenadas (y), tem-se a linha do Equador (eixo x) e o meridiano de Greenwich (y), ambos medidos em graus recebendo o nome de latitude e longitude.

Latitudes: são as distâncias em graus de qualquer ponto da Terra em relação à linha do Equador. Suas medidas vão de – 90° à + 90°.
Longitude: são as distâncias em graus de qualquer ponto da Terra em relação ao meridiano de Greenwich. Suas medidas vão de – 180° à + 180°.

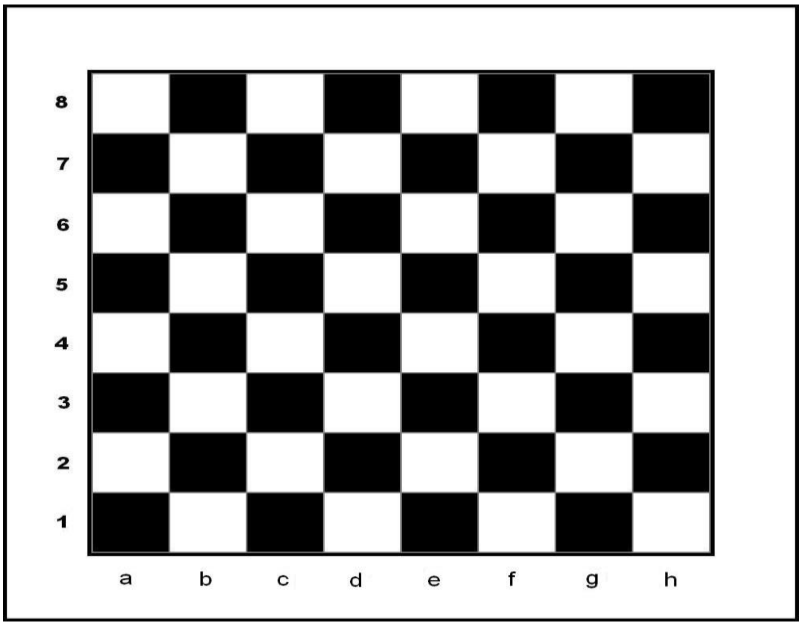
Fonte: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm> (acesso em fevereiro de 2019)

Problema: O mapa a seguir fornece as coordenadas geográficas globais estabelecidas a partir da combinação das latitudes e longitudes.



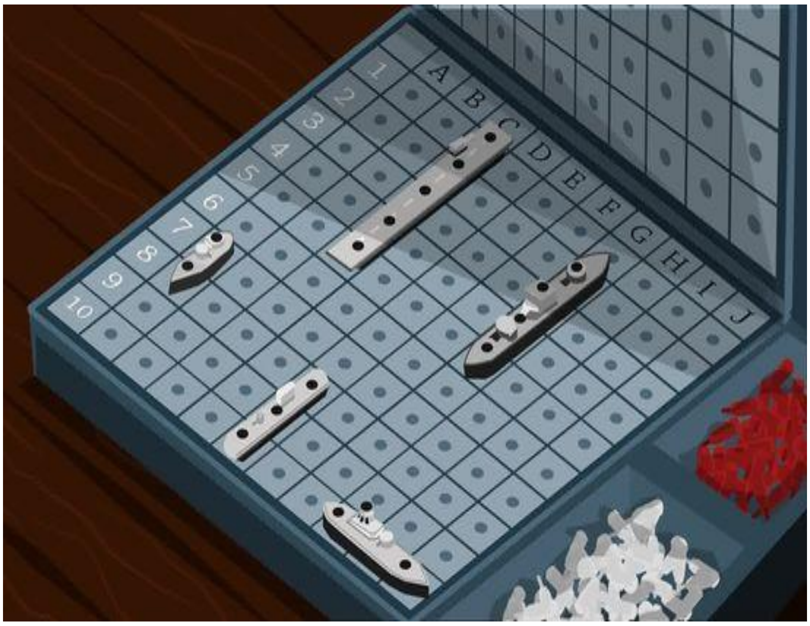
Fonte: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/coordenadas-geograficas.htm> (acesso em fevereiro de 2019)

Nos tabuleiros de xadrez vê-se números e letras que servem de coordenadas para os jogadores "cantarem" as suas jogadas.



Fonte: http://elementosdeteixeira.blogspot.com/2012/10/080-cor-de-uma-casa-em-coordenada.html. (acesso em fevereiro de 2019)

Semelhantemente, o jogo Batalha Naval também possui coordenadas em que os jogadores podem citar ao adversário, qual a localização de seus "disparos".

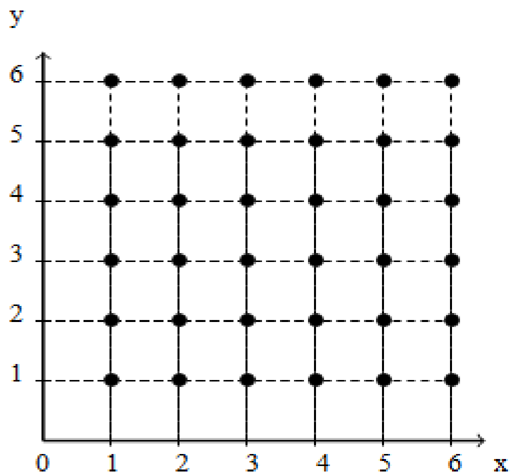


Fonte: https://pt.wikihow.com/Vencer-na-Batalha-Naval**.** (acesso em fevereiro de 2019)

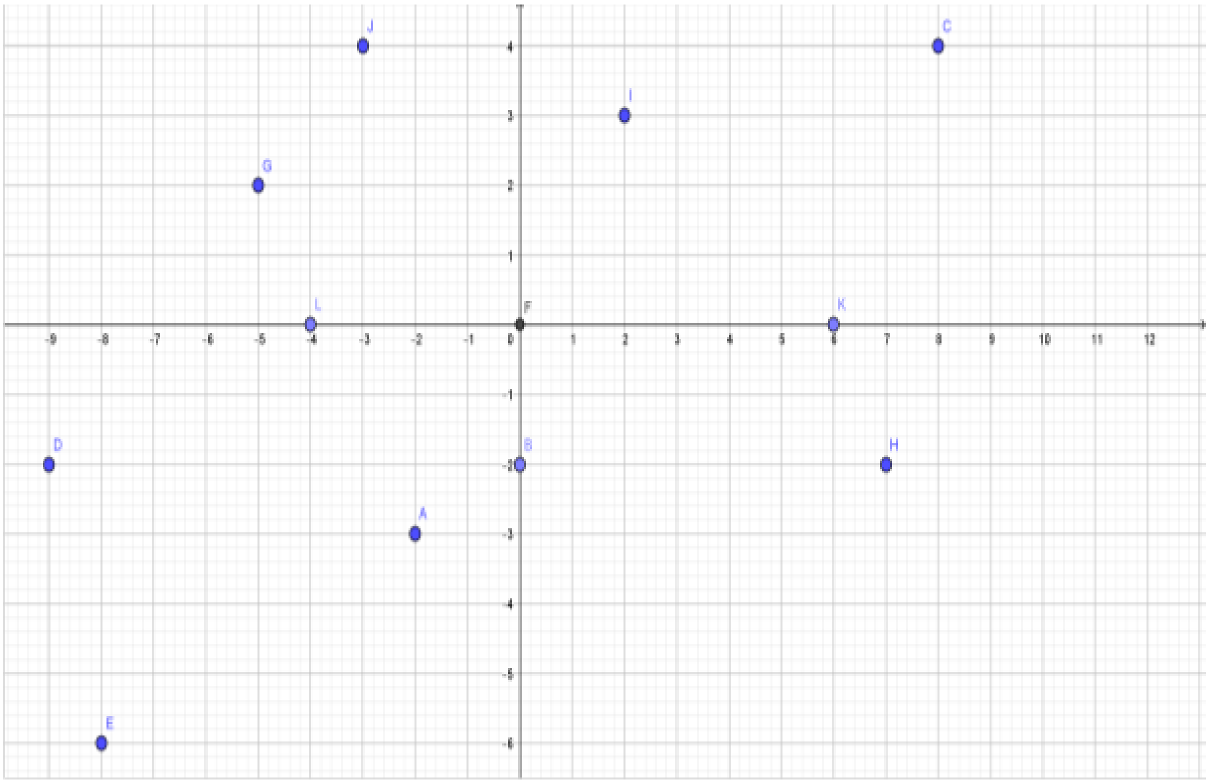
Além dessas aplicações pode-se citar a aplicação do sistema de coordenadas na aviação, navegação, bem como o tão conhecido GPS.

Sugestão aos professores: A apresentação da parte histórica do criador do plano cartesiano, bem como suas aplicações, e também os exercícios a seguir, podem ser apresentados e propostos por meio de *data-show*. Dessa forma, os estudantes podem ser encorajados à ir a frente e apresentar a resolução aos colegas de turma.

Exercício 1**.** Observe os planos cartesianos a seguir e escreva em qual quadrante estão todos os pontos e suas respectivas coordenadas.



Fonte: acervo do pesquisador



Fonte: acervo do pesquisador

Problema. João recebe todos os meses em sua casa a fatura da conta de água. Ele sabe que, quanto mais água consumir, maior será o valor da conta a ser paga. Porém, ele não sabe qual é a relação exata entre essas duas variáveis: *consumo* e *valor da conta*. Para descobri-la, ele montou uma tabela na qual escreveu os valores relevantes para sua análise. O resultado foi o seguinte:

Tabela 1: Consumo de água na casa do João.

Mês	**Consumo (m^3)**	**Valor da conta**
Janeiro	2	7 reais
Fevereiro	1	5 reais
Março	3	9 reais

Fonte: https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/u49fw5fm9u0.pdf (acesso em fevereiro de 2019)

Sugestão aos professores: Como visto no enunciado, o valor da conta depende do consumo da água, o que traz a noção do conceito de variável dependente e variável independente. Assim, sugere-se o lançamento do desafio de encontrar, a relação existente entre as variáveis valor da conta em função do consumo.

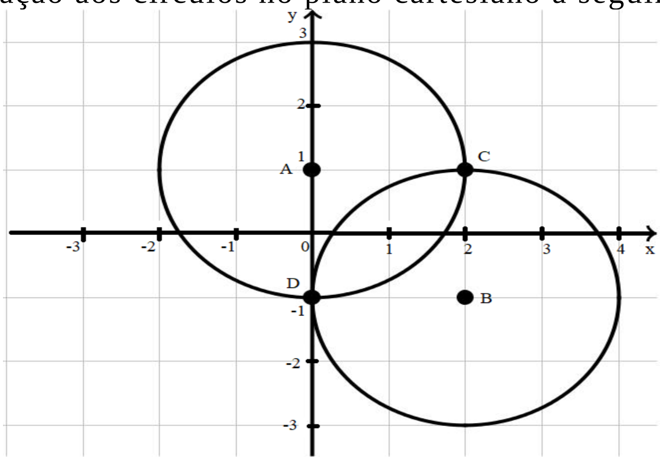
Para isso, pode-se pensar apenas a partir da tabela exposta, mas sugerimos também que os estudantes realizem a plotagem dos pares ordenados no plano cartesiano, considerando a equidistância entre os números dos eixos cartesianos. Salienta-se que a plotagem dos referidos pontos no plano (consumo, valor da conta) pode contribuir para uma solução geométrica (visual) desse problema, uma vez que os pontos são colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta. Além disso, pode-se pensar juntamente com a turma em uma relação algébrica que forneça o valor da conta em função de qualquer valor de consumo.

Problemas adicionais

Sugestões aos professores: As atividades a seguir podem ser entregues aos estudantes para serem trabalhadas em duplas ou trios.

Exercício 1. Construa um plano cartesiano em folha quadriculada e marque os seguintes pontos no plano cartesiano: A (1, 2), B (0 ,−2), C(1, −4), D(−2, 0), E(−3, −3) e F = (−2, 4).

Exercício 2.Com relação aos círculos no plano cartesiano a seguir, responda.



Fonte: portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/dhs3ww6v788cs.pdf (acesso em fevereiro de 2019)

a) Quais as coordenadas do ponto A e B?
b) Quais as coordenadas dos pontos de intersecção das circunferências?
c) Uma terceira circunferência tem centro em C e é tangente as outras duas circunferências exibidas, qual o valor do seu raio?

Dia 2 – Informações em gráficos e tabelas (Debates e discussões)

Sugestão aos Professores: Para o desenvolvimento da atividade a seguir, sugere-se que a imagem seja projetada por meio de *data-show* com o propósito de oportunizar a investigação em grupo por parte dos estudantes. Embora o problema não peça a construção do gráfico para esse problema, o professor pode explorar essa construção juntamente com a turma a partir da obtenção de pares ordenados (peso, valor do envio). Para isso, pode-se pedir aos estudantes que os mesmos venham a frente (ou verbalmente de sua carteira) e escolham um valor de peso e determine o seu respectivo peso. E a partir dos pares ordenados determinados pelos estudantes, é possível conferir com a turma características desse gráfico.

Problema 1.

CARTA NÃO COMERCIAL E CARTÃO-POSTAL — NACIONAL (PREÇOS EM REAIS)	
PESO (GRAMAS)	VALOR BÁSICO
Até 20	0,27
Mais de 20 até 50	0,45
Mais de 50 até 100	0,70
Mais de 100 até 250	1,00
Mais de 250 até 500	2,00
Acima de 500 g serão aplicadas as mesmas condições de valor e prestação do SEDEX.	

Fonte: *Site do correio*, maio de 2000

A partir da tabela, podemos responder a perguntas como:

— Qual o valor a ser pago por uma carta que "pesa" 62 g?

— Qual o "peso" máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00?

— É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo "peso"?

Nessa relação, o "peso" da carta é a variável independente, e a tarifa a variável dependente. Você pode notar que a cada "peso" de carta a ser enviada corresponde uma única tarifa. A tarifa depende do "peso" da carta.

Fonte: Ed. FTD, 2002

A partir da tabela acima, pense nos seguintes questionamentos:

– Qual o valor a ser pago por uma carta que “pesa” 62 g?

– Qual o “peso” máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 1,00?

– É possível que duas cartas com tarifas diferentes tenham o mesmo “peso”?

– A partir dos dados expostos, você saberia dizer do que depende o valor pago para o envio de cada carta?

Problema 2. Use o gráfico do consumo de cigarros na figura abaixo para responder as seguintes questões, fazendo aproximações razoáveis onde for necessário.

a) Quando o consumo anual de cigarros atingiu 3 mil por adulto pela primeira vez?

b) Quando o consumo anual de cigarros por adulto atingiu seu ponto mais alto e qual seu valor?

c) A partir do gráfico, pode-se saber quantos cigarros foram consumidos em um dado ano? Se não, quais informações adicionais você precisaria para fazer essa determinação?

d) Quais os fatores prováveis do aumento do consumo anual de cigarros por adulto?

e) Quais os fatores prováveis do declínio no consumo anual de cigarros por adulto?

CONSUMO ANUAL DE CIGARROS POR ADULTO – EUA

Fonte: U.S. Department of Health and Human Services

f) Quando o consumo anual de cigarros caiu para 3 mil por adulto?

g) Entre o ano do primeiro relatório do Departamento de Saúde e o ano de 1970, quando foi atingido o mínimo do consumo anual de cigarros por adulto?

h) O que foi maior, a taxa de crescimento do consumo *per capita* de cigarros durante a Segunda Guerra ou a taxa de crescimento entre o fim da Segunda Guerra e o começo da Guerra da Coréia?

i) Há indícios de que o consumo *per capita* de cigarros vá acabar caindo aos níveis anteriores da Segunda Guerra?

Sugestões ao professor: Da mesma forma sugere-se que o gráfico acima seja projetado por meio de *data-show* para promover a investigação por parte dos estudantes, bem como a troca de ideias/argumentações. Além disso, de maneira aproximada pode-se pedir que os mesmos encontrem alguns pares que entenderem conveientes parra a obtenção de respostas. Vale salientar que a intenção não é a de que o professor resolva ou mostre como se faz em nenhum dos problemas apresentados, mas que o auxilio aos aprendizes seja dado em forma de perguntas.

Problema 3. Em uma rodovia, um carro mantém velocidade constante de 100 km/h. Complete a tabela a seguir que relaciona o tempo t (em horas) e a distância d (em quilômetros) percorrida nesse tempo.

Relação entre tempo e distância percorrida por um carro

Tempo (t) (em horas)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Distância (d) (em quilômetros)	50	100				

a) Que grandeza foi calculada em função da outra?

b) A cada instante de tempo corresponde uma única distância percorrida?

c) Qual é a variável dependente? O tempo depende da distância percorrida pelo automóvel ou a distância percorrida depende do tempo que o carro se desloca?

d) É possível determinar a velocidade desse móvel? Se sim, qual é?

e) Escreva a lei que descreve essa função (expressão matemática).

f) Faça o esboço do gráfico referente ao movimento descrito na tabela, tomando o cuidado para a equidistância entre os valores nos eixos do plano cartesiano.

Sugestões ao professor: Assim como nas atividades anteriores, com o propósito de promover a investigação individual e coletiva dos estudantes, torna-se importante que haja a projeção dos problemas na lousa, mas também que eles tenham em mãos os problemas impressos para facilitar a investigação individual. Já para as atividades que se esteja pedindo o esboço dos gráficos, que os mesmos tenham em mãos a folha quadriculada.

Dias 3 e 4. – Construindo gráficos a partir de experimentos físicos

Atividade 1. Nessa atividade os estudantes irão realizar um experimento que se dará por intermédio da observação do deslocamento de uma bolha de ar em um tubo de acrílico transparente e cheio d’água, o qual estará inclinado (bolha subindo ou descendo).

Alguns objetivos da atividade são:

– Observar se existe alguma regularidade no deslocamento da bolha nesse tubo como, por exemplo, o tempo que a bolha leva para percorrer determinada distância;

– Ilustrar características de uma função, uma vez que a bolha nunca estará em dois lugares ao mesmo tempo;

– Organizar os dados em tabelas para uma melhor apresentação.

– Fazer a “plotagem” dos dados obtidos no sistema de eixo cartesiano.

– Determinar a expressão matemática que fornece a posição da bolha para qualquer instante.

A seguir, a imagem ilustrativa do experimento.

Fonte: acervo do pesquisador

Sugestões aos professores: Nessa atividade podem ser simulados movimentos com diferentes aspectos, pois a inclinação do tubo determinará a velocidade da bolha, se o tubo estiver mais inclinado, maior será a velocidade da bolha. Se o tubo estiver menos inclinado, menor será a velocidade da bolha. Sugere-se que o professor realize o experimento com diferentes inclinações poderá comparar as peculiaridades de cada gráfico, compará-los.

A partir dos esboços dos gráficos, sugere-se introduzir o cálculo das velocidades dos mesmos a partir de debate no grande sobre “o que querem dizer as placas de trânsito que limitam a velocidade dos veículos?” O que significa a grandeza velocidade (representado por km/h)? Ou pode-se tomar até mesmo um caso particular como, por exemplo, “o que quer dizer 80 km/h?”. Em aula posterior, os gráficos construídos pelos estudantes podem ser projetados para que haja uma discussão em torno dos possíveis erros, bem como fazer comparações entre a velocidade de cada experimento e a sua respectiva inclinação. Além disso, entende-se que a interatividade com o objeto de estudo pode contribuir para que os estudantes abstraiam do objeto as suas propriedades.

Atividade 2. Experimento com tubo acrílico – altura da coluna d’água em função do tempo (aplicação à física)

Proposta do experimento: Nesse experimento os estudantes devem observar o crescimento de uma coluna d’água e realizar anotações referentes aos tempos em que a coluna atinge determinadas marcas do tubo acrílico – pares ordenados referentes ao comprimento da coluna d’água e seu respectivo tempo. Sugere-se que os estudantes organizem os dados coletados em pares ordenados para a posterior construção dos gráficos.

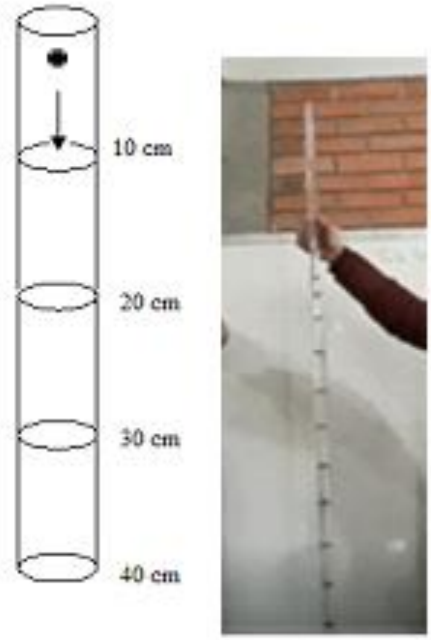
Sugestão aos professores: Para a obtenção dos ditos pares ordenados desse experimento, sugere-se que o professor peça aos seus alunos que marque os tempos em que a coluna d’água atinge as marcas (feitas com “canetão”) no tubo no cronômetro de seus *smartphone.* Além disso, sugere-se que o experimento seja realizado em diferentes velocidades de vazão da água, surgindo assim diferentes gráficos. Gráficos esses que podem ser objeto de análise no grande grupo em aula posterior. A seguir, a imagem ilustrativa do tubo acrílico utilizado.

Fonte: acervo do pesquisador

Materiais utilizados: tubo acrílico de 1,5 metros e mangueira para encher o tubo.

Dia 5 – Movimento de moeda ou esfera em gicerina Líquida ou água no tubo acrílico

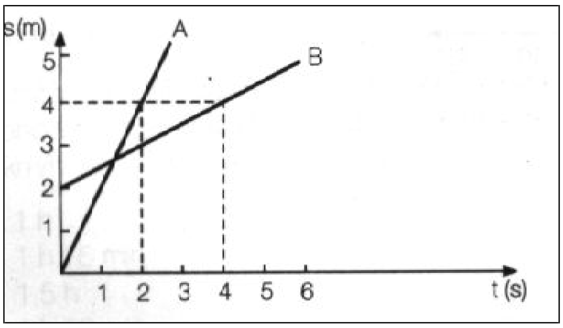
Experimento. Também utilizando o tubo acrílico com água ou glicerina líquida, será proposto aos estudantes observarem o deslocamento de uma moeda ou uma esfera em glicerina líquida ou em água. Note-se que ao se mudar os líquidos ou os móveis também as velocidades se alterarão, proporcionando diferentes gráficos. A seguir, a imagem ilustrativa do experimento.



Fonte: acervo do pesquisador

Sugestão aos Professores: Sugere-se que o referido experimento seja realizado tomando o ponto de partida como sendo a origem dos movimentos (distância = 0m). Em seguida, com um líquido diferente em um ponto móvel diferente do primeiro experimento, toma-se como referência o comprimento final do tubo acrílico o início como distância inicial (distância = 1,5m). Após o esboço dos respectivos gráficos que podem ser esboçados em planos cartesianos diferentes ou no mesmo plano cartesiano, sugere-se que o professor incentive os estudantes a encontrarem o instante em que os móveis se encontram na mesma posição.

Atividade. Dois móveis, A e B, percorrem a mesma trajetória retilínea. A figura representa as posições (s), dadas em metros, em função do tempo (t), dado em segundos, desses dois móveis. No instante *t = 5s*, a distância entre A e B vale, em metros:



Fonte: http://muitafisica.blogspot.com/2009/03/cinematica-2-lista-movimento.html (acesso em fevereiro de 2019)

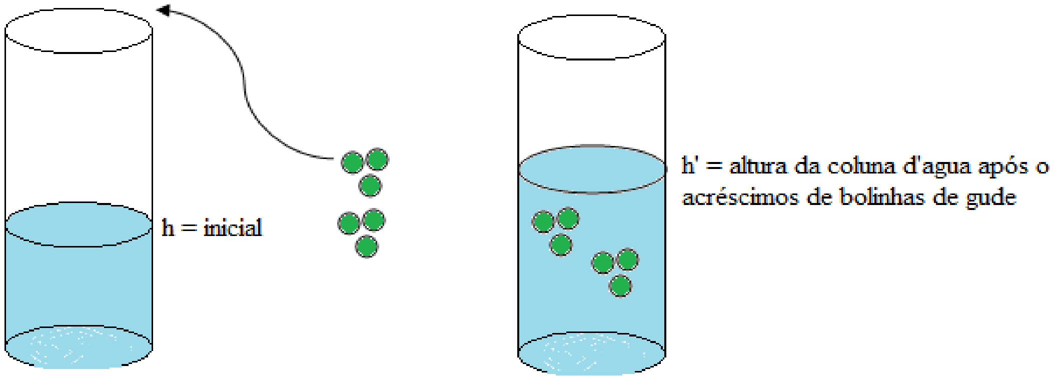
a) 2,5 b) 3 c) 4 d) 5,5 e) 6

Sugestão aos professores: Sugere-se que o professor faça a projeção do problema na lousa por meio de *data-show* com o intuito de promover a solução do problema por parte dos estudantes por meio de debates no grande grupo. Como a intenção não é mostrar como se faz, mas que os mesmos consigam por si mesmos encontrar uma forma de resolver por meio da interpretação do gráfico.

Assim, o professor pode auxiliá-los com perguntas como: Qual o ponto de partida de cada móvel? Qual a velocidade de ambos os móveis? Em qual ponto os móveis se encontram? Qual deles está mais rápido? Enfim, que o professor auxilie na investigação do problema pela turma e, por fim, na obtenção na solução do mesmo. Além disso, de posse da velocidade de cada móvel e de seus respectivos pontos de partida, é possível obter a expressão algébrica que fornece a posição para qualquer instante de tempo.

Experimento. O experimento a seguir consiste na observação da altura da coluna d'água no tubo acrílico em função do acréscimo de bolinhas de gude. Note que inicialmente o tubo acrílico já possui certa quantidade de água o qual se refere a um ponto de partida.

Sugestões aos professores: Aqui temos o primeiro desafio aos estudantes, a saber, esboçar no plano cartesiano o ponto de partida da coluna d'água, ou seja, a altura da coluna quando não há acréscimo de nenhuma bolinha de gude. Além disso, pode ser lançado aos estudantes o questionamento "qual a variável dependente e variável independente?".



Fonte: acervo do pesquisador

Após esse debate, o experimento continua com o acréscimo de bolinhas de gude. Sugere-se que essas sejam de mesmo tamanho, pois assim, a cada acréscimo de uma bolinha de gude a altura da coluna d’água será elevada de maneira uniforme, resultando assim em uma função afim.

Vale chamar a atenção para possíveis dúvidas que os estudantes poderão ter em relação à continuidade do gráfico desse experimento. Já que, os mesmos poderão alegar que após a inserção de uma bolinha de gude, a coluna d’água “saltará” de uma altura (h) para uma altura (h’). O que não ocorre, já que ao se inserir uma bolinha de gude em “câmera lenta”, a altura da coluna d’água irá percorrer todo o tubo até chegar a sua nova posição. É interessante, ter um tubo acrílico maior para que se possa inserir uma bola maior e, assim, os estudantes poderem observar tal fato.

A partir dos dados coletados pode-se partir para a etapa de construção dos gráficos e da construção da equação que descreve o comportamento desse experimento para quantias maiores de bolinhas inseridas. Note que não nos referimos a infinitas bolinhas de gude, pois não é possível tal ocorrência. Por fim, o experimento pode ser realizado de maneira contrária, ou seja, retirando-se bolinhas de gude do tubo.

APÊNDICE C – AUTORIZAÇÃO PELA SECRETARIA MUNICIPAL DE CANOAS PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA NA ESCOLA (SME)

Priscila Bier Da Silveira (Secretaria Municipal da Educação - SME - GABINETE DO SECRETÁRIO)	Cristiane Bernardes De Boite (Secretaria Municipal da Educação - SME - DIRETORIA PEDAGÓGICA)	Priscila Bier Da Silveira (Secretaria Municipal da Educação - SME - GABINETE DO SECRETÁRIO)	2018016614 **DATA** 09/04/2018

ASSUNTO: Mestrado

09/04/2018 - 17h24	**Para:** Cristiane Bernardes De Boite
Priscila Bier Da Silveira Chat: Secretaria Municipal da Educação - SME - GABINETE DO SECRETÁRIO	Prezada, Sou da escola Gal Osório, temos um professor Leandro Campos que está realizando o mestrado profissinal em educação matemática na UFRGS. O orientador dele apresentou solicitação para coleta de dados das aulas dele na nossa escola para completar estágio de pesquisa. Apresentou documentação de sigilo de identificação dos alunos. Gostaria de confirmar autorização. Obrigada! Att,

10/04/2018 - 21h06	**Para:** Priscila Bier Da Silveira
Cristiane Bernardes De Boite (DIRETORA) cristiane.boite@canoas.rs.gov.br	Prezada Priscila! Autorizado

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO – ESCOLA

UFRGS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem

Porto Alegre, 19 de março de 2018.

Senhora Diretora,

Venho, por meio desta, apresentar meus cumprimentos e as motivações para a realização de pesquisa em sala de aula da escola, por parte do professor Leandro de Andrades Campos, estudante deste Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Nosso Programa de Pós-Graduação tem como objetivo a melhoria do ensino de Matemática e o desenvolvimento profissional dos professores. A pesquisa realizada no âmbito do Mestrado visa, sobretudo, a experimentação e avaliação de propostas alternativas de ensino, que promova a aprendizagem e a autonomia dos estudantes.

A referida pesquisa é uma tarefa solicitada para a disciplina de Estágio Supervisionado, pela qual sou o professor supervisor responsável. A pesquisa envolve a coleta de dados, tais como registro em áudio e/ou vídeo de diálogos, produções escritas dos alunos, capturas de telas, fotografias de materiais manipulativos e de registros no quadro-negro ou quadro branco. Para essa coleta, será solicitado o consentimento dos pais ou responsáveis, conforme Termo em anexo.

Acreditando que a referida pesquisa seja, também, do interesse da instituição, solicito seu apoio, e fico a disposição para qualquer esclarecimento que se fizer necessário.

Cordiais saudações,

[redacted]

Rodrigo Sychocki da Silva
Docente do PPG Ensino de Matemática
IME-UFRGS

À
Profª. Raquel Alves Pires
Diretora da Escola Municipal de Ensino Fundamental General Osório

APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO – ALUNO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "***Ateliê de matemática: um espaço para diálogo e aprendizagem de matemática no Ensino Fundamental***", desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Leandro de Andrades Campos. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Rodrigo Sychocki da Silva, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 992-548-734 ou e-mail sychocki.rodrigo@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1. Analisar o desenvolvimento da aprendizagem por meio da proposta de cenários de investigação, os quais os estudantes são dispostos aos pares com o propósito de colaborarem entre si.
2. Observar como a matemática inserida em atividades interdisciplinares pode contribuir na conscientização ambiental e sócio-politica dos estudantes, ou seja, o desenvolvimento de uma matemática crítica.
3. Observar como propostas de caráter interdisciplinar podem contribuir para autonomia dos estudantes no tocante à resolução de situações-problema.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc., bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre "Como ocorre a construção de conceitos matemáticos por meio da *cooperação* entre estudantes imersos em um cenário de investigação durante a realização de atividades interdisciplinares com a mediação do professor?", a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Nelson Paim Terra nº 925, telefone (51)9930-99-696 e-mail leandromatemat@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Canoas, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:
Assinatura do(a) pesquisador(a): [redacted]
Assinatura do Orientador da pesquisa: