

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO AO LONGO DO TEMPO DE PEÇAS DE CONCRETO
ARMADO SUBMETIDAS A ESTADOS PLANOS DE TENSÃO, ATRAVÉS DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS

BERARDI SENSALÉ COZZANO

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre

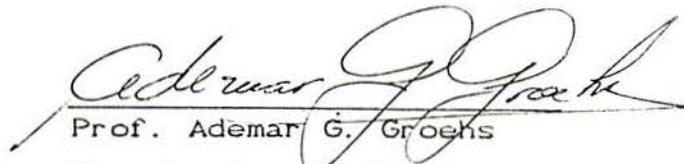
Mai 1991

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Américo Campos Filho

Orientador



Prof. Ademair G. Groehs

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Américo Campos Filho (Orientador)
D.Sc. pela EPUSP
- Prof. Guillermo J. Creus
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Francisco de P.S.L. Gastal
Ph.D. pela N.C. State University
- Prof. Marco Túllio M.B. de Vilhena
Dr. pela UFRGS

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Américo Campos Filho, pela atenciosa orientação deste trabalho.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo inestimável conhecimento transmitido; e aos funcionários pela colaboração cotidiana.

Aos colegas de Pós-Graduação, pelo convívio e amizade.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na pessoa de seu Coordenador, Professor Ademar G. Groehs, pela atenção recebida.

A Sra. Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

A Universidad de la República Oriental del Uruguay que tornou possível a realização deste Curso.

Aos órgãos que proporcionaram o auxílio financeiro.

A Universidade Federal de Rio Grande do Sul, onde este trabalho foi realizado.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	vii
RESUMO	xii
ABSTRACT	xiii
1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Generalidades	1
1.2 - Comportamento reológico	3
1.3 - Conteúdo do trabalho	6
2 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O ESTUDO DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO VISCOPLÁSTICO	9
2.1 - Comportamento elasto-viscoplástico	9
2.2 - Formulação elasto-viscoplástica para elementos finitos	11
2.2.1 - Deslocamentos	11
2.2.2 - Deformações	11
2.2.3 - Tensões	12
2.2.4 - Equações de equilíbrio	13
2.3 - Formulação Incremental	14
2.3.1 - Incremento de deformação viscoplástica ..	14
2.3.2 - Incremento de tensões	15
2.3.3 - Equações de equilíbrio na forma incremental	16
2.3.4 - Correção de equilíbrio	19
2.3.5 - Vetor de fluxo plástico de Nayak-Zienkiewicz	19
2.3.6 - Cálculo da matriz [H]	22
2.4 - Modelo de camadas superpostas	26
2.5 - Esquemas de integração no tempo	29
2.6 - Seleção do comprimento do passo de tempo	30

2.7 - Estudo da convergência	31
3 - ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E PARA A ARMADURA	32
3.1 - Elementos finitos para o concreto	32
3.2 - Elementos finitos para a armadura	34
3.2.1 - Modelo incorporado	35
3.2.2 - Funções de forma para os elementos finitos	36
3.2.3 - Matriz de rigidez para os elementos de armadura	38
4 - MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO ARMADO SUBMETIDO A CARGAS DE CURTA DURAÇÃO	42
4.1 - Características do comportamento do concreto armado submetido a cargas de curta duração	42
4.2 - Modelos constitutivos para o concreto	44
4.2.1 - Modelo material para o concreto não fissurado	44
4.2.1.1 - Superfície de escoamento para o concreto não fissurado	45
4.2.1.1.1 - Critério de plastificação de Ottosen	47
4.2.1.1.2 - Critério de plastificação proposto por Hinton e Owen	48
4.2.1.1.3 - Desempenho dos critérios propostos	50
4.2.1.2 - Velocidade de deformação vis-plástica	51
4.2.1.2.1 - Componentes do vetor de fluxo plástico para o critério de Ottosen	52
4.2.1.2.2 - Componentes do vetor de fluxo plástico para o critério proposto por Hinton e Owen	55

4.2.1.3 - Regra de endurecimento	56
4.2.1.4 - Critério de esmagamento	57
4.2.2 - Modelo para o concreto fissurado	58
4.2.2.1 - Critério de fissuração	60
4.2.2.2 - Consideração da colaboração do concreto entre fissuras	63
4.2.2.3 - Transferência de tensões de corte através da fissura	70
4.3 - Modelo constitutivo para o aço	72
5 - MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO SUBMETIDO A CARGA DE LONGA DURAÇÃO.	73
5.1 - Fluência e retração do concreto	73
5.2 - Inclusão da fluência no modelo	75
5.2.1 - O modelo reológico	75
5.2.2 - Modelos viscoelásticos lineares	77
5.2.3 - Determinação dos parâmetros do modelo ...	79
5.3 - Inclusão da retração no modelo	82
5.4 - Valores adotados para as deformações por fluência e retração	83
5.4.1 - Modelo para a fluência conforme o Código Modelo do CEB-FIP 1990 (MC90)	83
5.4.2 - Modelo para a retração, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990	85
6 - EXEMPLOS	87
6.1 - Introdução	87
6.2 - Exemplo 1	87
6.3 - Exemplo 2	92
6.4 - Exemplo 4	95
7 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	101
BIBLIOGRAFIA	103

LISTA DE SIMBOLOS

I. LETRAS MAIÚSCULAS LATINAS COMO SIMBOLOS PRINCIPAIS

- A - área, coeficiente auxiliar.
- A_{jk} - definido em (5.2.3.8).
- B - matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais; coeficiente auxiliar.
- B_j - definido em (5.2.3.6).
- C - matriz definida em (2.3.1.5); constante.
- C_1, C_2, C_3 - coeficientes do vetor de NAYAK-ZIENKIEWICZ.
- D - matriz de elasticidade.
- \hat{D} - matriz definida em (2.3.2.4).
- E - módulo de elasticidade longitudinal.
- E_c - módulo de elasticidade tangente.
- E_o - módulo de elasticidade inicial do concreto.
- F - função de plastificação.
- G_c - módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado.
- G_o - módulo de elasticidade transversal do concreto.
- H - taxa de endurecimento; matriz definida em (2.3.1.3); função de interpolação.
- I - matriz identidade.
- I_1, I_2, I_3 - invariantes do tensor de tensões.
- J - matriz jacobiana; função de fluencia.
- J_2' - segundo invariante do tensor desviador de deformações.
- J_1, J_2, J_3 - invariantes do tensor desviador de tensões.
- K - matriz de rigidez.
- K_1, K_2 - parâmetros.
- L - operador linear; comprimento de barra de aço.
- M - matriz auxiliar.
- N - função de interpolação; número de unidades em cadeia de

Maxwell.

- P - vetor cargas nodais equivalentes.
- Q - função de potencial plástico.
- R - função de relaxação.
- \bar{R} - função de relaxação dada em pontos discretos.
- RH - umidade relativa do ambiente.
- V - vetor de cargas nodais totais.

II. LETRAS LATINAS MINÚSCULAS COMO SÍMBOLOS PRINCIPAIS

- a - parâmetro que depende do diâmetro máximo de agregado.
- a_1, a_2, a_3 - componentes do vetor de NAYAK-ZIENKIEWICZ.
- e - espessura.
- h_0 - espessura fictícia.
- k - número de camadas.
- l_c - comprimento característico.
- t_0 - tempo de começo do carregamento.
- t - tempo.
- t_a - idade do concreto no começo da retração.
- u - perímetro em contato com a atmosfera.
- \bar{u} - deslocamento prescrito.
- w - abertura de fissura.

III. LETRAS MAIÚSCULAS ITÁLICAS COMO SÍMBOLOS PRINCIPAIS.

- C* - corpo contínuo.
-
- C* - aproximação de *C*.
- G_f - energia de fratura do concreto.
- S* - superfície de contorno.
- S_u - parte do contorno com deslocamentos prescritos.
- S_o - parte do contorno com forças de superfície.
- V* - volume.
- X* - vetor que contém as coordenadas de um ponto.

IV. LETRAS ITÁLICAS MINÚSCULAS COMO SÍMBOLOS PRINCIPAIS.

- a - vetor de NAYAK-ZIENKIEWICZ.
- b - forças de volume.
- f - função definida em (5.2.2.1); forças de superfície; resistência.
- g - função definida em (5.2.2.1).
- h - fluência rápida.
- k - parâmetro de endurecimento.
- m - coeficiente auxiliar.
- n - coeficiente auxiliar.
- s - tensor desviador; coordenada uniaxial do elemento de barra.
- u - deslocamento.
- v - deslocamento de um ponto da barra de aço; volume do aço.
- w - deslocamento na direção da barra.
- x - coordenada cartesiana.
- y - coordenada cartesiana.

V. LETRAS GREGAS COMO SÍMBOLOS PRINCIPAIS.

- α - ângulo de retração; parâmetro em HINTON-OWEN; coeficiente do limite de elasticidade.
- β - parâmetro em HINTON-OWEN.
- $\beta_c, \beta_{RH}, \beta_s, \beta_{SRH}$ - coeficientes definidos em 5.4.1.
- γ - coeficiente de fluidez.
- γ_{xy} - distorção angular.
- ϵ - deformação.
- ϵ_c - deformação equivalente na fissura.
- ϵ_o - deformação total correspondente f_t ou f_c .
- ϵ_t - alongamento médio normal ao plano da fissura.
- ϵ_{cc} - deformação relativa a fluência.
- ϵ_{cso} - coeficiente de retração nominal.
- ψ - forças residuais.
- η - coeficiente de viscosidade; coordenada generalizada; coeficiente.

- θ - parâmetro do esquema de integração no tempo; ângulo de Lode.
- x - coordenada normalizada.
- λ - coeficiente auxiliar no critério de Ottosen.
- ν - coeficiente de Poisson.
- ξ - coordenada generalizada.
- π - energia dissipada.
- ρ - distância sobre o eixo hidrostático.
- σ - tensão.
- σ_a - tensão no elemento de atrito.
- σ_ρ - tensão de plastificação.
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - tensões principais.
- τ - fator de controle do passo de tempo; tempo de relaxação.
- τ_{xy} - tensão tangencial.
- ϕ - soma de quadrados de desvios; coeficiente de fluência.
- ϕ^* - minimização da somas de quadrados de desvios.

VI. LETRAS MINÚSCULAS GREGAS COMO SÍMBOLOS PRINCIPAIS.

- Φ - função de fluxo plástico.
- Π - termo residual.

VII. LETRAS LATINAS MINÚSCULAS COMO ÍNDICES.

- c - à compressão.
- cb - à compressão biaxial.
- ca - relativo a retração.
- ck - característica de compressão.
- cm - média de compressão.
- e - elástico.
- i - referido ao elemento i .
- j - referido ao elemento j .
- n - referido ao instante t_n .
- p - plástico.
- ref - referência.
- s - aço.

- t - de tração.
- u - último.
- vp - viscoplástico.
- vps - viscoplástico no aço.
- x - componente conforme x
- y - componente conforme y; de escoamento no aço.

VIII. SÍMBOLOS ESPECIAIS COMO PRINCIPAIS.

- δu - trabalho virtual interno na armadura.
- ω - fator de peso.
- w - pesos.

IX. SÍMBOLOS ESPECIAIS COMO ÍNDICES.

- o - inicial.
- - nodal.

X. SÍMBOLOS MATEMÁTICOS.

- $\langle \rangle$ - vetor.
- [] - matriz.
- $\langle \rangle$ - colchete de Macauley.
- $\frac{\partial}{\partial x}$ - derivada parcial com relação a x.
- δ - variação.
- Δ - incremento.
- Σ - somatório.
- \int - integral.
- []^T - matriz trasposta.
- []⁻¹ - matriz inversa.
- det - determinante.
- .
- - derivada em relação ao tempo.
- ∞ - infinito.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é formular um modelo, que permita a simulação do comportamento de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão.

O modelo proposto é baseado no método dos elementos finitos.

São analisados estados de carga de curta e longa duração.

O concreto é modelado como um material elasto-viscoplástico. Usa-se o conceito de camadas superpostas (Coverlay models). Deste modo, admite-se, por conveniência matemática, que o concreto é formado de várias camadas superpostas, que apresentam a mesma deformação. Considerando-se diferentes propriedades para cada camada, obtém-se um comportamento composto que pode simular o funcionamento real do concreto.

Para a fissuração do concreto, usa-se um modelo de fissuras distribuídas, que leva em conta a contribuição do concreto entre fissuras.

A armadura é introduzida no modelo como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. Os deslocamentos ao longo do elemento de armadura são referidos aos deslocamentos nodais do elemento de concreto. Assim, obtém-se uma matriz de rigidez para a armadura com as mesmas dimensões que a matriz de rigidez do elemento de concreto. A matriz de rigidez do elemento de concreto armado é a soma destas duas matrizes de rigidez.

Os resultados obtidos com este programa computacional são comparados com valores determinados experimentalmente, indicando uma boa aproximação.

ABSTRACT

The purpose of this work is to formulate a model which allows the simulation of reinforced concrete structures behavior under plane stress state.

The model is based on a finite element method.

Shorts and long-term loadings has been analysed.

The concrete is modelled as a elasto-viscoplastic material. The concept of overlay models has been used as a mathematical convenience that allows to consider the concrete as composed by layers which present the same deformation. Considering different properties for each layer, a composed behaviour which can simulate the real performance of concrete it's obtained.

A smeared model has been used for the cracking of reinforcement concrete, which considers the contribution of concrete between cracks.

The reinforcement is introduced as a more stiff material line inside the concrete element. The displacements along the reinforcement element are referred to the nodal displacements of the concrete element. That allows to obtain a stiffness array for the reinforcement with the same dimension of the stiffness array of the concrete element. Thus, the stiffness matrix of the reinforced concrete element is obtained by addition.

The results obtained through this computational program were compared with experimental values, showing a good approximation.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

O comportamento das estruturas submetidas a cargas externas tem sido objeto de intensos estudos desde o começo deste século. Pela grande complexidade que apresenta este tipo de análise, através da "mecânica teórica", recorria-se, frequentemente, a procedimentos baseados em hipóteses que simplificavam muito os princípios desta ciência. Estes procedimentos eram combinados com formulações empíricas, feitas a partir de uma grande quantidade de resultados experimentais. Assim, num passado recente (primeira metade deste século), com estes procedimentos simplificados, só podiam ser resolvidos alguns dos inumeráveis problemas encontrados no projeto estrutural. Estas técnicas, ainda hoje, têm sido aplicadas na resolução de problemas triviais, onde as hipóteses não são tão rigorosas e o volume de conhecimentos, adquiridos experimentalmente sob o tema de análise, é muito amplo.

Mas, na atualidade, existe, entre outras, uma técnica baseada em procedimentos numéricos de aproximação de funções, conhecida pelo nome de "Método dos Elementos Finitos". Esta técnica é, para alguns casos de projeto e verificação estrutural, uma necessidade de uso antes do que uma alternativa. Esta potente técnica numérica permite desenvolver estudos mais realistas sobre o comportamento das estruturas, do que os realizados no passado, com inúmeras simplificações.

A investigação baseada em qualquer técnica numérica, nutre-se necessariamente de análises experimentais, que corroboram sua validade. Desta forma, os estudos numéricos

tratam de reproduzir os resultados experimentais desenvolvidos em pequena escala (ensaios de laboratório), e os extrapolam a uma escala maior (nível estrutural). Esta possibilidade de estender o conceito de um comportamento físico simples a um complexo é possível graças ao uso de uma formulação matemática, capaz de descrever o funcionamento físico macroscópico dos sólidos, que recebe o nome de "modelo constitutivo de um material". Os fundamentos da aplicação prática destes modelos de simulação de comportamento, encontram-se na união da "mecânica teórica" com as "técnicas numéricas". Esta união de conhecimentos ,teóricos e numéricos, compreende o que na atualidade se conhece com o nome de "mecânica computacional" [54].

Os modelos constitutivos destinados a simular o comportamento do concreto tiveram um grande desenvolvimento nos últimos anos. A razão de ser destas formulações matemáticas e de sua constante evolução encontra-se na insuficiência que apresentam as teorias constitutivas mais simples (como a lei elástica-linear) para reproduzir o comportamento físico do concreto em todas as suas situações de utilização. Em geral, formulam-se diversos tipos de modelos constitutivos que vão desde os que reproduzem comportamentos elásticos lineares ou não-lineares, até aqueles que reproduzem comportamentos inelásticos dependentes (ou não) do tempo.

Para o caso particular do material estrutural chamado "concreto armado", existem distintas alternativas que permitem a simulação de sua resposta. Nestas é necessário definir dois modelos constitutivos distintos, um para o aço (comportamento uniaxial) e outro para o concreto (comportamento multiaxial). O método dos elementos finitos possibilita, então, a obtenção do comportamento composto dos dois materiais.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação, apresenta um modelo que permite simular o comportamento de peças de concreto armado, sob estados planos de tensão, submetidas a cargas de curta e longa duração.

Para aplicar a formulação teórica do modelo, e poder resolver os exemplos de verificação, foi necessário utilizar

soluções numéricas. Este trabalho teórico-numérico foi introduzido num programa de elementos finitos, desenvolvido especialmente com esta finalidade.

1.2 - Comportamento reológico

Como, em repetidas ocasiões, far-se-á referência ao comportamento reológico dos materiais, apresenta-se, neste capítulo, um breve resumo sobre o tema.

O comportamento reológico de um material é conforme [39], a maneira como as deformações de um corpo respondem às tensões a ele impostas.

Por combinação de três comportamentos reológicos básicos (elástico, viscoso e plástico), pode-se representar comportamentos complexos de materiais reais.

Elasticidade é a propriedade que um material apresenta de recuperar, instantaneamente, a forma e dimensões que tinha antes de ser exposto a um conjunto de forças, quando estas são retiradas.

Para um caso de estado uniaxial de tensão, este comportamento pode ser representado por meio de um modelo mecânico simples como a mola, conforme a FIGURA 1.2.1. Um material de comportamento elástico linear, segue a lei de Hooke $\sigma = E \epsilon$, onde E é o módulo de Young, σ é a tensão e ϵ é a deformação uniaxial.

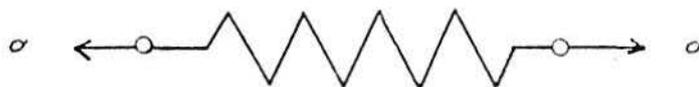


FIGURA 1.2.1 - Modelo elástico

Viscosidade é a propriedade física de um material de se deformar ao longo do tempo, quando submetido a uma força. O comportamento viscoso pode ser representado por um amortecedor,

como mostra a FIGURA 1.2.2. Esta propriedade é expressa pela relação entre o esforço e a velocidade de deformação. Um material viscoso segue a lei de Newton de viscosidade $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$, onde η é o coeficiente de viscosidade.

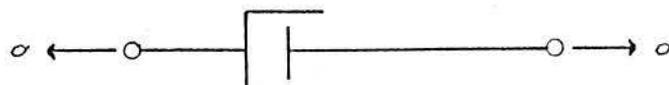


FIGURA 1.2.2 - Modelo viscoso

Plasticidade é a propriedade de um material de apresentar deformações instantâneas permanentes. Ou seja, deformações que não desaparecem uma vez removidas as forças que lhes deram origem.

Neste modelo, chama-se tensão de plastificação σ_0 , a tensão, a partir da qual aparecem deformações permanentes.

Um corpo rigidoplástico perfeito não se deforma para tensões menores que a tensão de plastificação. Este comportamento pode ser representado por um bloco sobre uma superfície com atrito ("slider"), conforme a FIGURA 1.2.3.

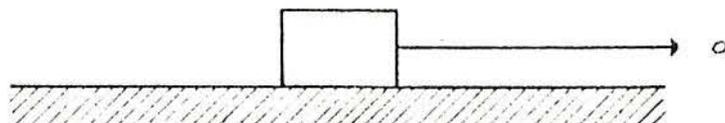


FIGURA 1.2.3 - Modelo rigidoplástico

Por combinação dos modelos elástico e plástico, obtém-se o modelo do material elastoplástico. Este apresenta um comportamento elástico para tensões menores que a tensão de plastificação, e um comportamento plástico após se alcançar esta tensão.

Neste modelo, chama-se de endurecimento por deformação plástica ao aumento de tensão de plastificação com a deformação plástica ϵ_p . Este endurecimento é caracterizado por sua taxa $H(\epsilon_p) = d\sigma/d\epsilon_p$. Se $H(\epsilon_p) = 0$, tem-se o material elastoplástico

perfeito; se $H(\varepsilon_p)$ é constante, tem-se um material elastoplástico com endurecimento linear.

O material elastoplástico perfeito e o elastoplástico com endurecimento linear podem ser representados pelos modelos mecânicos da FIGURA 1.2.4.

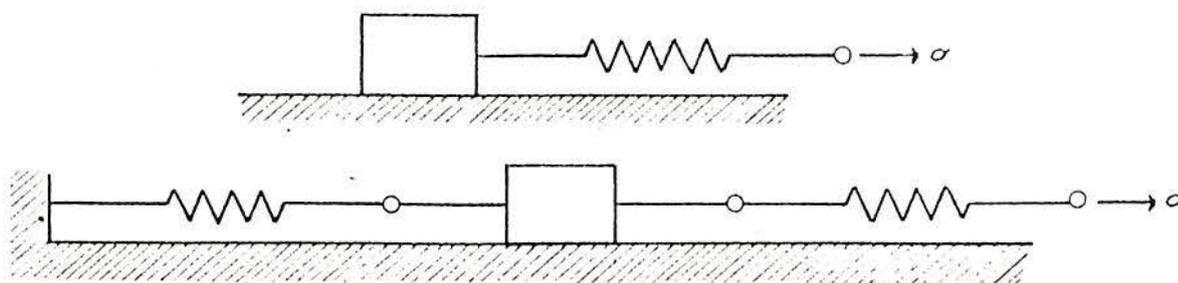


FIGURA 1.2.4 - Modelos elastoplásticos

a) perfeito

b) com endurecimento linear.

Combinando-se elementos elásticos e viscosos podem-se obter distintos comportamentos viscoelásticos. Estes são caracterizados por apresentarem deformações instantâneas e diferidas. Em particular, interessa, neste trabalho, o modelo viscoelástico de Maxwell que pode ser representado por uma mola em série com um amortecedor, como mostra a FIGURA 1.2.5.

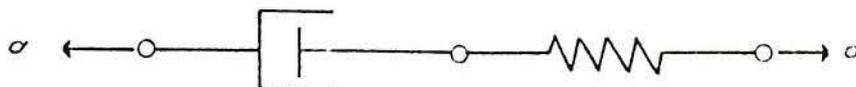


FIGURA 1.2.5 - Modelo de Maxwell

Este modelo, por ser simples, permitiu a Bazant [6], trabalhando com cadeias de elementos Maxwell em paralelo, representar adequadamente o comportamento do concreto sob cargas de serviço.

O comportamento de um material elasto-viscoplástico

pode ser descrito por meio de um modelo reológico unidimensional como mostra a FIGURA 1.2.6.

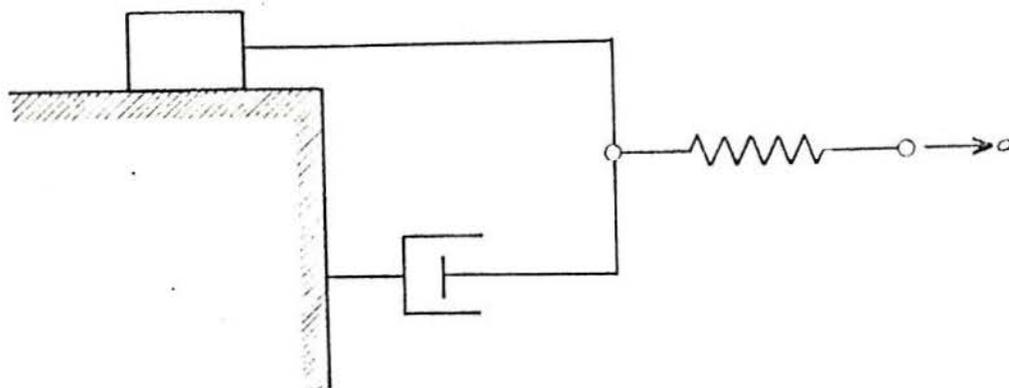


FIGURA 1.2.6 - Modelo elasto-viscoplástico

O elemento de atrito suporta uma tensão σ_a . O amortecedor viscoso, torna-se ativo, somente quando a tensão total aplicada σ é maior que a tensão de plastificação σ_o . A partir daí, a tensão excedente ($\sigma - \sigma_a$) é levada pelo amortecedor.

A resposta elástica instantânea é, evidentemente, definida pela mola linear.

A presença do amortecedor faz com que o nível de tensões exceda instantaneamente, o valor previsto pela teoria da plasticidade. A solução tenderá a este nível de tensão, quando o sistema alcançar as condições de estado estável [58]. Isto permite representar, através do modelo elasto-viscoplástico, caso sejam atingidas as condições de estado estável, um comportamento elastoplástico.

Quando a tensão de platificação $\sigma_o = 0$, o modelo elasto-viscoplástico, reduz-se ao modelo de Maxwell de viscoelasticidade (FIGURA 1.2.5), podendo-se assim, também representar um comportamento viscoelástico.

1.3 - Conteúdo do trabalho

Este trabalho formula um modelo para a simulação do

comportamento de estruturas de concreto armado submetidas a estados planos de tensão.

Para representar o comportamento do concreto armado, usar-se-á um modelo elasto-viscoplástico, pois como mencionou-se no item anterior, este modelo tem como casos particulares o elastoplástico e o viscoelástico.

Desta forma, se a estrutura está submetida a cargas de curta duração, o modelo fornece, quando alcançado o estado estável, a solução do modelo elastoplástico.

Neste caso, obtém-se um modelo equivalente ao elastoplástico com endurecimento, que já foi empregado com bons resultados por diferentes autores [16, 21, 43, 48].

Se a estrutura está submetida a cargas de longa duração, este modelo pode representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto. Trabalha-se, então, com uma cadeia de elementos Maxwell em paralelo, com coeficientes dependentes da idade do concreto, da forma proposta por Bazant nas referências [5,6,7,13].

Além disso, o modelo proposto permite trabalhar com um comportamento elastoplástico, no momento de aplicar ou retirar as cargas, e, logo que for atingido o estado estável, passar a trabalhar com um comportamento viscoelástico com envelhecimento, mantidas as cargas constantes no tempo.

O modelo desenvolvido é apresentado neste trabalho ao longo de sete capítulos dos quais esta introdução é o primeiro.

No segundo capítulo, faz-se o desenvolvimento da formulação de elementos finitos para uma estrutura composta por um material de comportamento viscoelastoplástico. Esta formulação permite a representação do concreto armado sob cargas de curta e longa duração.

No terceiro capítulo, são apresentados os elementos finitos empregados para o concreto e para a armadura.

No quarto capítulo, apresenta-se a idealização a nível de material para o concreto armado, submetido a cargas de curta duração. O concreto não fissurado é modelado como um

material elastoplástico com endurecimento. O concreto fissurado é representado por um modelo de fissuras distribuídas. O aço da armadura é representado através de um modelo para um material elastoplástico com endurecimento.

No quinto capítulo, estabelece-se um modelo de comportamento, ao longo do tempo, de estruturas de concreto armado, considerando efeitos da fluência e da retração do concreto. O concreto não fissurado é modelado como um material viscoelástico linear, enquanto para o concreto fissurado e o aço são mantidos os modelos descritos no capítulo anterior.

No sexto capítulo, estudam-se diversas vigas de concreto armado usando o modelo desenvolvido, e confrontam-se os resultados do modelo com valores obtidos experimentalmente.

No sétimo capítulo, apresentam-se as considerações finais e sugestões sobre os resultados obtidos com a aplicação do modelo.

CAPÍTULO 2
MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O ESTUDO
DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

2.1 - Comportamento elasto-viscoplástico

Usando a teoria da elasto-viscoplasticidade, pode-se obter uma aproximação unificada para os problemas de fluência e plasticidade. Esta teoria também pode ser utilizada para resolver um problema elastoplástico, já que a solução do estado estável do problema elasto-viscoplástico é idêntica à solução convencional elastoplástica. Além disto, reduzindo-se a tensão de escoamento do material a zero, resolvem-se os problemas de viscoelasticidade.

Adicionalmente, empregando-se um modelo de camadas superpostas, pode-se representar de forma bastante genérica o comportamento de materiais reais. Neste modelo, apenas por uma conveniência matemática, admite-se que o sólido é composto por várias camadas superpostas, em que cada uma delas sofre a mesma deformação. Por meio da atribuição de diferentes propriedades físicas a cada uma destas camadas, pode-se obter um comportamento composto que exhibe todas as características essenciais da resposta viscoelastoplástica de muitos materiais reais.

Conforme TAROCO e FEIJOO [65], na formulação usual para problemas contínuos não lineares, admite-se que as componentes de deformação total, em um dado ponto, são compostas por uma parcela elástica $\langle \epsilon \rangle$ e outra viscoplástica $\langle \epsilon_{vp} \rangle$. Deste modo, a taxa de deformação total é expressa como

$$\dot{\langle \epsilon \rangle} = \dot{\langle \epsilon \rangle} + \dot{\langle \epsilon_{vp} \rangle} \quad (2.1.1)$$

A taxa de tensão total depende da taxa de deformação elástica através da relação

$$\langle \dot{\sigma} \rangle = [D] \langle \dot{\epsilon} \rangle \quad (2.1.2)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade.

No espaço das tensões, tem-se uma superfície de plastificação expressa analiticamente por

$$F(\langle \sigma \rangle, \langle \epsilon_{vp} \rangle, k) - \sigma_0 = 0 \quad (2.1.3)$$

onde σ_0 é a tensão de plastificação uniaxial, a qual pode ser uma função de um parâmetro de endurecimento k . Se $F < \sigma_0$ tem-se um comportamento elástico, se $F = \sigma_0$, plástico e, se $F > \sigma_0$, viscoplástico.

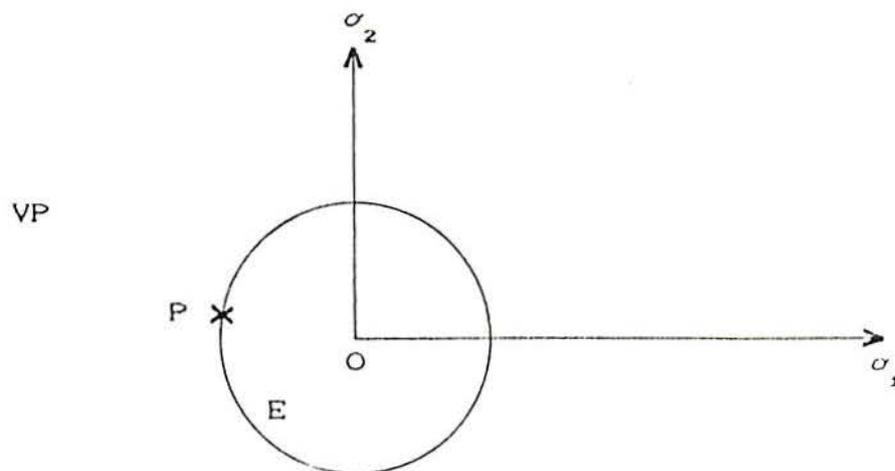


FIGURA 2.1.1 - Esquema de comportamento viscoelastoplástico

É necessário, estabelecer uma lei específica para determinar as deformações viscoplásticas a partir do estado de tensões. Uma forma explícita, que tem larga aplicação é dada por

$$\langle \dot{\epsilon}_{vp} \rangle = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \partial Q / \partial \langle \sigma \rangle \quad (2.1.4)$$

onde γ é o coeficiente de fluidez, $\Phi(F)$ é uma função, chamada de função de fluxo plástico, positiva monótona crescente para $F > 0$, e a notação $\langle \rangle$ (dita colchete de Macauley) é tal que $\langle u \rangle = 1/2(u + |u|)$. $Q = Q(\langle \sigma \rangle, \langle \epsilon_{vp} \rangle, k)$ é chamada função de

potencial plástico. Como ocorre em plasticidade, [65], no caso em que $F = Q$ tem-se viscoplasticidade associada e a equação (2.1.4) reduz-se a

$$\langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \partial F / \partial \langle \sigma \rangle \quad (2.1.5)$$

2.2 - Formulação elasto-viscoplástica para elementos finitos

Seja um corpo contínuo C , com uma superfície de contorno S . Nos pontos interiores a C , atuam forças de volume b . Uma parte da superfície S , S_u , tem deslocamentos prescritos \bar{u} e sobre o resto de S , S_σ , atuam forças de superfície f .

Para cada ponto de coordenadas $\langle X \rangle$ de C , pode-se definir um campo de deslocamentos dependentes do tempo $u(\langle X \rangle, t)$ e os correspondentes campos de deformações $\varepsilon(\langle X \rangle, t)$ e de tensões $\sigma(\langle X \rangle, t)$.

2.2.1 - Deslocamentos

Usando a técnica dos elementos finitos, substitui-se o corpo C por uma aproximação \bar{C} , composta por m elementos finitos com domínio C^i , volume V^i e superfície S^i .

O campo de deslocamentos $u(\langle X \rangle, t)$, dentro de cada elemento, é aproximado mediante funções de interpolação $N(\langle X \rangle)$, tais que

$$\langle u(\langle X \rangle, t) \rangle = [N(\langle X \rangle)] \langle \bar{u}^i(t) \rangle; \quad \forall X \in V^i, \quad i=1, \dots, m \quad (2.2.1.1)$$

onde $\langle \bar{u}^i(t) \rangle$ é um vetor que contém os valores dos deslocamentos, em duas direções ortogonais fixas x e y ; em n pontos fixos de coordenadas x^j, y^j (com $j = 1, \dots, n$), que são os nós do elemento i .

2.2.2 - Deformações

Uma vez conhecidos os deslocamentos nos nós do

elemento, podem ser determinadas as deformações, em qualquer ponto de seu interior, através da relação

$$\langle \varepsilon(\langle X \rangle, t) \rangle = [L] \langle u(\langle X \rangle, t) \rangle \quad (2.2.2.1)$$

onde [L] é um operador linear apropriado.

Utilizando-se a equação (2.2.1.1), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\langle \varepsilon(\langle X \rangle, t) \rangle = [B] \langle \bar{u}(t) \rangle \quad (2.2.2.2)$$

onde [B] = [L] [N].

No caso de estado plano de tensões, as deformações, que aparecem no plano, são determinadas a partir dos deslocamentos como

$$\langle \varepsilon \rangle = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (2.2.2.3)$$

2.2.3 - Tensões

No estado plano de tensões, tem-se que

$$\langle \sigma \rangle = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3.1)$$

Quando se tem um comportamento elástico linear, a relação entre tensões e deformações é expressa por

$$\langle \sigma \rangle = [D] \langle \varepsilon \rangle \quad (2.2.3.2)$$

onde [D] é a matriz de elasticidade, que para um meio isótropo, é dada por

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2.3.3)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e ν é o coeficiente de Poisson.

2.2.4 - Equações de equilíbrio

Para estabelecer-se as equações de equilíbrio, aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais. A equação a ser satisfeita, em um instante t_n , é

$$\int_C \langle \delta \varepsilon_n \rangle^T \langle \sigma_n \rangle dV = \int_C \langle \delta u_n \rangle^T \langle b_n \rangle dV + \int_S \langle \delta u_n \rangle^T \langle f_n \rangle dS \quad (2.2.4.1)$$

Esta expressão representa uma exigência para o equilíbrio, que é independente do comportamento material.

Conforme referido anteriormente, pode-se escrever que

$$\text{de (2.2.1.1):} \quad \langle u_n \rangle = [N] \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle$$

$$\text{de (2.2.2.2):} \quad \langle \varepsilon_n \rangle = [B_n] \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle$$

$$\text{de (2.1.2):} \quad \langle \sigma_n \rangle = [D] \langle \varepsilon_n \rangle = [D] \langle \varepsilon_n - \langle \varepsilon_{vp} \rangle_n \rangle$$

Substituindo em (2.2.4.1), tem-se, para o elemento i

$$\begin{aligned} \int_{V^i} \langle \delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [B_n]^T [D] [B_n] \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle dV &= \\ &= \int_{V^i} \langle \delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [B_n]^T \langle \varepsilon_{vp} \rangle_n dV + \int_{V^i} \langle \delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [N]^T \langle b_n \rangle dV + \\ &+ \int_{S^i} \langle \delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [N]^T \langle f_n \rangle dS \end{aligned} \quad (2.2.4.2)$$

Como $\langle \bar{u}_n^{-i} \rangle$ e $\delta \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle$ são independentes da posição X , pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \delta \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle^T \int_{V^i} [B_n]^T [D] [B_n] dV \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle &= \delta \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle^T \left(\int_{V^i} [B_n]^T \langle \varepsilon_{vp} \rangle_n dV + \right. \\ &+ \left. \int_{V^i} [N]^T \langle b_n \rangle dV + \int_{S^i} [N]^T \langle f_n \rangle dS \right) \end{aligned} \quad (2.2.4.3)$$

A expressão anterior pode, simplificada, ser representada por

$$[K_i] \langle \bar{u}_n^{-i} \rangle = \langle V_i \rangle \quad (2.2.4.4)$$

onde

$$[K_i] = \int_{V^i} [B_n]^T [D] [B_n] dV \quad (2.2.4.5)$$

é a matriz de rigidez do elemento, e

$$\begin{aligned} \langle V_i \rangle = & \int_{V^i} [B_n]^T \langle \epsilon_{vp_n} \rangle dV + \int_{V^i} [N]^T \langle b_n \rangle dV + \\ & + \int_{S^i} [N]^T \langle f_n \rangle dS = \langle P_{vp}^i \rangle + \langle P^i \rangle \end{aligned} \quad (2.2.4.6)$$

é o vetor das cargas nodais totais equivalentes, que estão relacionadas às contribuições das cargas de volume b , das de superfície f e das deformações viscoplásticas ϵ_{vp} .

A solução global exige que, para o conjunto de elementos do corpo, se tenha

$$[K] \langle \bar{u} \rangle = \langle V \rangle \quad (2.2.4.7)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global, $\langle \bar{u} \rangle$ é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura e $\langle V \rangle$ é o vetor de cargas totais, que contém os efeitos viscoplásticos.

2.3 - Formulação incremental

Surge aqui o problema para a determinação de $\langle \epsilon_{vp} \rangle$ em (2.2.4.6), a partir da taxa de deformação viscoplástica dada pela expressão (2.1.4). Esta dificuldade leva a que se trabalhe com um procedimento incremental.

2.3.1 - Incremento de deformação viscoplástica

Com a lei para taxa de deformação viscoplástica expressa por (2.1.4), pode-se definir um incremento de deformação viscoplástica $\langle \Delta \epsilon_{vp_n} \rangle$ que aparece em um intervalo de tempo $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, usando um esquema de integração no tempo implícito, como

$$\langle \Delta \epsilon_{vp_n} \rangle = \Delta t_n [(1 - \theta) \langle \dot{\epsilon}_{vp_n} \rangle + \theta \langle \dot{\epsilon}_{vp_{n+1}} \rangle] \quad (2.3.1.1)$$

Para $\theta = 0$, obtém-se o esquema de integração no tempo de Euler, que também é conhecido por "completamente explícito", uma vez que o incremento de deformação fica totalmente determinado pelas condições existentes no instante t_n .

Para $\theta = 1$, tem-se o esquema de integração no tempo

dito "completamente implícito", com o incremento de deformação sendo determinado pela taxa de deformação correspondente ao fim do intervalo de tempo.

Para $\theta = 0,5$, o esquema de integração é chamado implícito trapezoidal, sendo também conhecido por regra de Crank-Nicolson no contexto das equações lineares.

Para definir $\langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_{n+1}$ na equação (2.3.1.1), pode-se usar um desenvolvimento limitado em série de Taylor e escrever

$$\langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_{n+1} = \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n + [H_n] \langle \Delta \sigma \rangle_n \quad (2.3.1.2)$$

onde

$$[H_n] = \partial \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle / \partial \langle \sigma \rangle_n \quad (2.3.1.3)$$

e $\langle \Delta \sigma \rangle_n$ é a variação das componentes da tensão no intervalo $(\Delta t)_n$.

Substituindo-se a equação (2.3.1.2) em (2.3.1.1), chega-se a

$$\langle \Delta \varepsilon_{vp} \rangle_n = \Delta t_n \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n + \theta [H_n] \langle \Delta \sigma \rangle_n \quad (2.3.1.4)$$

Definindo-se que

$$[C_n] = \theta \Delta t_n [H_n] \quad (2.3.1.5)$$

fica-se com

$$\langle \Delta \varepsilon_{vp} \rangle_n = \Delta t_n \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n + [C_n] \langle \Delta \sigma \rangle_n \quad (2.3.1.6)$$

A matriz $[H_n]$ depende do nível de tensões e sua forma específica será desenvolvida na seção seguinte.

2.3.2 - Incrementos de tensões

Usando as equações (2.1.1) e (2.1.2), pode-se escrever que

$$\langle \Delta \sigma \rangle_n = [D] \langle \Delta \varepsilon \rangle_n = [D] (\langle \Delta \varepsilon \rangle_n - \langle \Delta \varepsilon_{vp} \rangle_n) \quad (2.3.2.1)$$

Expressando o incremento de deformação total em função do incremento de deslocamentos obtém-se

$$\langle \Delta \varepsilon \rangle_n = [B_n] \langle \Delta \bar{u} \rangle_n \quad (2.3.2.2)$$

Substituindo a expressão de $\langle \Delta \varepsilon_{vp} \rangle_n$, obtida em (2.3.1.6), em

(2.3.2.1), resulta

$$\begin{aligned} \langle \Delta \sigma \rangle_n &= [D] \langle \Delta \varepsilon \rangle_n - [D] \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n \Delta t_n - [D] [C_n] \langle \Delta \sigma \rangle_n \rightarrow \\ &\rightarrow ([I] + [D] [C_n]) \langle \Delta \sigma \rangle_n = [D] (\langle \Delta \varepsilon \rangle_n - \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n \Delta t_n) \end{aligned}$$

Substituindo a expressão (2.3.2.2), tem-se

$$\begin{aligned} ([I] + [D] [C_n]) \langle \Delta \sigma \rangle_n &= [D] ([B_n] \langle \Delta \bar{u} \rangle_n - \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n \Delta t_n) \rightarrow \\ \rightarrow \langle \Delta \sigma \rangle_n &= ([I] + [D] [C_n])^{-1} [D] ([B_n] \langle \Delta \bar{u} \rangle_n - \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n \Delta t_n) \rightarrow \end{aligned}$$

E, finalmente, obtém-se

$$\langle \Delta \sigma \rangle_n = [\hat{D}_n] ([B_n] \langle \Delta \bar{u} \rangle_n - \langle \dot{\varepsilon}_{vp} \rangle_n \Delta t_n) \quad (2.3.2.3)$$

onde

$$[\hat{D}_n] = ([I] + [D] [C_n])^{-1} [D] = ([D]^{-1} + [C_n])^{-1} \quad (2.3.2.4)$$

pois

$$\begin{aligned} ([I] + [D] [C_n])^{-1} [D] &= [M] \rightarrow \\ \rightarrow [D] &= ([I] + [D] [C_n]) [M] \rightarrow \\ [I] &= ([D]^{-1} + [C_n]) [M] \rightarrow [M] = ([D]^{-1} + [C_n])^{-1} \end{aligned}$$

A matriz $[\hat{D}_n]$ é simétrica quando a lei viscoplástica é associada. Para o caso não associado, a matriz $[C_n]$ não é simétrica, exigindo esquemas especiais para a análise, como o proposto por MARTINS, BARROS & DINIS [49]. Este apresenta um procedimento numérico que permite usar um esquema implícito de integração, mantendo soluções simétricas.

2.3.3 - Equações de equilíbrio

Usando uma formulação incremental para o princípio dos trabalhos virtuais, tem-se :

$$\int_C \delta \langle \Delta \varepsilon \rangle_n^T \langle \Delta \sigma \rangle_n dV = \int_C \delta \langle \Delta u \rangle_n^T \langle \Delta b \rangle_n dV + \int_S \delta \langle \Delta u \rangle_n^T \langle \Delta f \rangle_n dS \quad (2.3.3.1)$$

Para cada elemento, tem-se

$$\text{de (3.2.1.1) que } \langle \Delta u_n \rangle = [N(X)] \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle$$

$$\text{de (3.2.2.2) que } \langle \Delta \varepsilon_n \rangle = [B_n] \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle$$

$$\text{de (3.2.6.3) que } \langle \Delta \sigma_n \rangle = [\hat{D}_n] ([B_n] \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle - \langle \dot{\varepsilon}_{vp_n} \rangle \Delta t_n)$$

Pode-se escrever que

$$\langle \Delta \varepsilon_n \rangle^T = \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [B_n]^T \rightarrow \delta \langle \Delta \varepsilon_n \rangle^T = \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [B_n]^T \quad (2.3.3.2)$$

Logo vem que

$$\begin{aligned} & \int_{V^i} \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [B_n]^T [\hat{D}_n] [B_n] \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle dV - \\ & - \int_{V^i} \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [B_n]^T [\hat{D}_n] \langle \dot{\varepsilon}_{vp_n} \rangle \Delta t_n dV = \\ & = \int_{V^i} \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [N]^T \langle \Delta b_n \rangle dV + \int_{S^i} \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T [N]^T \langle \Delta f_n \rangle dS \end{aligned} \quad (2.3.3.3)$$

Como $\langle \bar{u}_n^{-i} \rangle$ e, portanto, $\delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle$ são valores constantes, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T \left(\int_{V^i} [B_n]^T [\hat{D}_n] [B_n] dV \right) \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle - \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T \int_{V^i} [B_n]^T [\hat{D}_n] \langle \dot{\varepsilon}_{vp_n} \rangle \Delta t_n dV = \\ & = \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T \int_{V^i} [N]^T \langle \Delta b_n \rangle dV + \delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle^T \int_{S^i} [N]^T \langle \Delta f_n \rangle dS \end{aligned} \quad (2.3.3.4)$$

Pelo fato de $\delta \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle$ ser arbitrário, tem-se

$$\begin{aligned} & \left(\int_{V^i} [B_n]^T [\hat{D}_n] [B_n] dV \right) \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle \\ & = \int_{V^i} [B_n]^T [\hat{D}_n] \langle \dot{\varepsilon}_{vp_n} \rangle \Delta t_n dV + \int_{V^i} [N]^T \langle \Delta b_n \rangle dV + \\ & + \int_{S^i} [N]^T \langle \Delta f_n \rangle dS \end{aligned} \quad (2.3.3.5)$$

De forma simplificada, a equação (2.3.3.5) pode ser escrita como

$$[K^i] \langle \Delta \bar{u}_n^{-i} \rangle = \langle \Delta P_{vp}^i \rangle + \langle \Delta P^i \rangle = \langle \Delta V^i \rangle \quad (2.3.3.6)$$

onde:

$$[K^i] = \int_{V^i} [B_n]^T [\hat{D}_n] [B_n] dV \quad (2.3.3.7)$$

é a matriz de rigidez do elemento e

$$\langle \Delta V^i \rangle = \langle \Delta P_{vp}^i \rangle + \langle \Delta P^i \rangle = \int_{V^i} [B_n]^T [\hat{D}_n] \langle (\Delta \varepsilon_{vp})_n \rangle \Delta t_n dV + \\ + \int_{V^i} [N]^T \langle \Delta b_n \rangle dV + \int_{S^i} [N] \langle \Delta f_n \rangle dS \quad (2.3.3.8)$$

é o valor do incremento de cargas nodais totais equivalentes. Na equação (3.3.3.8) é fácil identificar as contribuições das forças de superfície f , das forças de volume b e das deformações viscoplásticas ε_{vp} .

A solução global requer que, para o conjunto de elementos do corpo, tenha-se

$$[K] \langle \Delta \bar{u} \rangle = \langle \Delta P_{vp} \rangle + \langle \Delta P \rangle = \langle \Delta V \rangle \quad (2.3.3.9)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global, $\langle \Delta \bar{u} \rangle$ é o vetor que contém os incrementos de deslocamentos nodais, e $\langle \Delta P_{vp} \rangle + \langle \Delta P \rangle$ é o vetor de incrementos de cargas nodais equivalentes de toda a estrutura.

Antes de resolver o sistema de equações (2.3.3.9), devem-se introduzir as condições de contorno. Substituindo os valores de $\langle \Delta \bar{u}_n \rangle$, encontrados em (2.3.3.9), em (2.3.2.3) obtém-se o vetor de incremento das componentes de tensões $\langle \Delta \sigma_n \rangle$ e assim

$$\langle \sigma_{n+1} \rangle = \langle \sigma_n \rangle + \langle \Delta \sigma_n \rangle ; \quad \langle u_{n+1} \rangle = \langle u_n \rangle + \langle \Delta u_n \rangle \quad (2.3.3.10)$$

Usando as equações (2.3.2.1) e (2.3.2.3), vem

$$\langle \Delta \sigma_n \rangle = [D] \langle (\Delta \varepsilon_n) - \langle (\Delta \varepsilon_{vp})_n \rangle \rangle = \\ = [D] \langle ([B_n] \langle \Delta \bar{u}_n \rangle - \langle (\Delta \varepsilon_{vp})_n \rangle) \rangle \rightarrow \\ \rightarrow \langle (\Delta \varepsilon_{vp})_n \rangle = [B_n] \langle \Delta \bar{u}_n \rangle - [D]^{-1} \langle \Delta \sigma_n \rangle \quad (2.3.3.11)$$

com o que

$$\langle (\varepsilon_{vp})_{n+1} \rangle = \langle (\varepsilon_{vp})_n \rangle + \langle (\Delta \varepsilon_{vp})_n \rangle \quad (2.3.3.12)$$

Examinando a taxa de deformação, determina-se quando se chega a um estado estacionário. Em particular, a taxa de deformação viscoplástica $\langle \varepsilon_{vp} \rangle$, dada pela equação (2.1.4), é calculada em cada intervalo de tempo, e a convergência é alcançada quando esta quantidade torna-se adequadamente pequena.

2.3.4 - Correção de equilíbrio

O cálculo do incremento de tensões está baseado em uma forma linearizada das equações de equilíbrio incremental. Portanto, a tensão total $\langle \sigma_{n+1} \rangle$, obtida pela acumulação de cada um dos incrementos de tensões, não é estritamente correta e não serão exatamente satisfeitas as equações de equilíbrio. Há vários procedimentos disponíveis para efetuar as correções necessárias. A aproximação mais simples é avaliar $\langle \sigma_{n+1} \rangle$ conforme apresentado no item anterior e, logo, calcular as forças residuais ψ como

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} = & \int_V [B_{n+1}]^T \langle \sigma_{n+1} \rangle dV + \int_V [N]^T \langle b_{n+1} \rangle dV + \\ & + \int_S [N]^T \langle f_{n+1} \rangle dS \neq 0 \end{aligned} \quad (2.3.4.1)$$

Esta força residual é adicionada ao incremento de força aplicada no próximo passo de tempo, como uma técnica de evitar o processo de iteração e ao mesmo tempo alcançar uma redução do erro.

2.3.5 - Vetor de fluxo plástico de Nayak-Zienkiewicz

Na equação (2.1.5) para calcular o vetor $\langle \varepsilon_{vp} \rangle$ necessita-se conhecer $\partial F / \partial \langle \sigma \rangle$.

No caso particular em que o tensor de tensões é simétrico, pode-se definir o vetor de fluxo plástico como um vetor que contém somente a parte simétrica do correspondente tensor. Isto é,

$$\frac{\partial F}{\partial \langle \sigma \rangle} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial F}{\partial \langle \sigma \rangle} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \end{Bmatrix} \quad (2.3.5.1)$$

Esta notação, é uma forma especial de representar a parte simétrica do tensor de fluxo plástico. Sua utilização simplifica o tratamento dos problemas numéricos.

Podem-se definir distintos procedimentos que permitem obter o vetor de fluxo plástico de uma forma simples. A seguir, mostra-se o desenvolvimento deste vetor, apresentado originalmente por NAYAK-ZIENKIEWICZ [51,67]. Este procedimento é muito usado por sua simplicidade e generalidade.

Admite-se que o vetor de fluxo plástico resulte da contribuição de três outros vetores, definidos, respectivamente, em função do primeiro invariante do tensor de tensões I_1 , do segundo invariante do tensor desviador de tensões J_2 e do ângulo de similaridade de Lode θ . Deste modo, tem-se

$$\langle \sigma \rangle^T = \frac{\partial F}{\partial \langle \sigma \rangle} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \langle \sigma \rangle} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \langle \sigma \rangle} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \langle \sigma \rangle} \quad (2.3.5.2)$$

para

$$\text{sen}(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \text{ com } -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (2.3.5.3)$$

onde J_3 é o terceiro invariante do tensor desviador de tensões.

Tem-se, ainda que,

$$\frac{\partial \theta}{\partial(\sigma)} = - \frac{\sqrt{3}}{2\cos(3\theta)} \left[\frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial(\sigma)} - \frac{3J_3}{(J_2)^{5/2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial(\sigma)} \right] \quad (2.3.5.4)$$

Substituindo esta equação na (2.3.5.2) e operando algebricamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} &= \frac{\partial F}{\partial I_2} \frac{\partial I_1}{\partial(\sigma)} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial(\sigma)} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \left[\frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial(\sigma)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{3J_3}{(J_2)^{5/2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial(\sigma)} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} &= \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial(\sigma)} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial(\sigma)} - \\ &\quad - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial(\sigma)} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2\cos(3\theta)} \frac{J_3}{(J_2)^{5/2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial(\sigma)} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} &= \frac{\partial I_1}{\partial(\sigma)} \left[\frac{\partial F}{\partial I_1} \right] + \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial(\sigma)} \left[\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{1}{\cos 3\theta} \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{J_2}} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial J_3}{\partial(\sigma)} \left[- \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2\cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \right] \quad (2.3.5.5) \end{aligned}$$

Usando a relação (2.3.5.3), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial(\sigma)} &= \frac{\partial I_1}{\partial(\sigma)} \left[\frac{\partial F}{\partial I_1} \right] + \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial(\sigma)} \left[\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\tan 3\theta}{(\sqrt{J_2})} \right] + \frac{\partial J_3}{\partial(\sigma)} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2\cos(3\theta)} \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \right] \quad \text{com } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (2.3.5.6) \end{aligned}$$

Pode-se expressar (2.3.5.6) da seguinte forma

$$\frac{\partial F}{\partial \langle \sigma \rangle} = \langle \alpha \rangle^T = C_1 \langle \alpha_1 \rangle^T + C_2 \langle \alpha_2 \rangle^T + C_3 \langle \alpha_3 \rangle^T \quad (2.3.5.7)$$

onde

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1}; \quad C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\tan(3\theta)}{\sqrt{J_2}}; \quad C_3 = - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\sqrt{3}}{2 \cos(3\theta) (J_2)^{3/2}}$$

e

$$\langle \alpha_1 \rangle^T = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma}, \quad \langle \alpha_2 \rangle^T = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma}, \quad \langle \alpha_3 \rangle^T = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma}$$

No caso particular de estado plano de tensões, tem-se

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rangle^T \Rightarrow I_1 = \sigma_x + \sigma_y \Rightarrow \langle \alpha_1 \rangle^T = \langle 1, 1, 0 \rangle \quad (2.3.5.8)$$

A matriz associada ao tensor desviador $\langle s \rangle$ tem na sua diagonal principal as componentes

$$s_x = (2\sigma_x - \sigma_y)/3; \quad s_y = (2\sigma_y - \sigma_x)/3; \quad s_z = -(\sigma_x + \sigma_y)/3$$

e assim

$$J_2 = (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2)/2 + \tau_{xy}^2 \Rightarrow \langle \alpha_2 \rangle^T = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} (s_x, s_y, 2\tau_{xy}) \quad (2.3.5.9)$$

$$J_3 = \det \langle s \rangle = s_z (s_x s_y - \tau_{xy}^2) \Rightarrow \langle \alpha_3 \rangle^T = s_z (s_y, s_x, -2\tau_{xy}) + \frac{J_3}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \quad (2.3.5.10)$$

Trabalhando desta maneira, para cada função de plastificação F , só é necessário definir as constantes C_1 , C_2 e C_3 para determinar o vetor de fluxo plástico.

2.3.6 - Cálculo da matriz [H]

Para soluções pelo esquema completamente implícito ou semi-implícito (trapezoidal) de incremento no tempo, necessita-se conhecer a matriz $[C_n]$. Esta pode ser expressa em

termos da matriz $[H_n]$, conforme (2.3.1.5) da seguinte forma

$$[C_n] = \theta \Delta t_n [H_n] \quad (2.3.6.1)$$

A matriz $[H_n]$ deve ser explicitamente determinada, para cada função de plastificação, adotada para o comportamento do material.

Das equações (2.1.5) e (2.3.1.3), suprimindo, momentaneamente, os símbolos $\langle \rangle$ e o sub-índice n , tem-se:

$$[H] = \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial \langle \sigma \rangle} \nu^p = \gamma \left(\Phi \frac{\partial \langle a \rangle^T}{\partial \langle \sigma \rangle} + \frac{d\langle \Phi \rangle}{dF} \langle a \rangle \langle a \rangle^T \right) \quad (2.3.6.2)$$

Da equação (2.3.5.7), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \langle a \rangle^T &= C_1 \langle a_1 \rangle^T + C_2 \langle a_2 \rangle^T + C_3 \langle a_3 \rangle^T \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial \langle a \rangle^T}{\partial \langle \sigma \rangle} &= \frac{\partial C_1}{\partial \langle \sigma \rangle} \langle a_1 \rangle^T + \frac{\partial C_2}{\partial \langle \sigma \rangle} \langle a_2 \rangle^T + \frac{\partial C_3}{\partial \langle \sigma \rangle} \langle a_3 \rangle^T \\ &+ C_1 \frac{\partial \langle a_1 \rangle^T}{\partial \langle \sigma \rangle} + C_2 \frac{\partial \langle a_2 \rangle^T}{\partial \langle \sigma \rangle} + C_3 \frac{\partial \langle a_3 \rangle^T}{\partial \langle \sigma \rangle} \end{aligned} \quad (2.3.6.3)$$

Expressando

$$\frac{\partial C_i}{\partial \langle \sigma \rangle} = C_{i1} \langle a_1 \rangle^T + C_{i2} \langle a_2 \rangle^T + C_{i3} \langle a_3 \rangle^T \quad \text{para } i=1,2,3 \quad (2.3.6.4)$$

e fazendo para C_i o mesmo desenvolvimento feito para F na seção 2.3.5, tem-se que

$$\begin{aligned} C_{i1} &= \frac{\partial C_i}{\partial I_1} ; & C_{i2} &= \frac{\partial C_i}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\partial C_i \tan(3\theta)}{\partial \theta \sqrt{J_2}} ; \\ C_{i3} &= - \frac{\partial C_i}{\partial \theta} \frac{\sqrt{J_3}}{2 \cos(3\theta) J_2^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.3.6.5)$$

É imediato que

$$\frac{\partial \langle a_1 \rangle^T}{\partial \langle \sigma \rangle} = \frac{\partial^2 I_1}{\partial \langle \sigma \rangle^2} = 0 \quad (2.3.6.6)$$

Analogamente, tem-se que

$$\frac{\partial \langle a_2 \rangle^T}{\partial \langle o \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} [M_{o1}] - \frac{1}{\sqrt{J_2}} \langle a_2 \rangle \langle a_2 \rangle^T \quad (2.3.6.7)$$

onde

$$[M_{o1}] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.3.6.8)$$

Da mesma forma, tem-se que

$$\frac{\partial \langle a_3 \rangle^T}{\partial \langle o \rangle} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} s_x & -1/3(s_x + s_y) & \tau_{xy} \\ & s_y & \tau_{xy} \\ \text{Simétrica} & & s_x + s_y \end{bmatrix} = [M_{o2}] \quad (2.3.6.9)$$

Logo :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle a \rangle^T}{\partial \langle o \rangle} &= C_{11} \langle a_1 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_{12} \langle a_2 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_{13} \langle a_3 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_{21} \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle^T + \\ &+ C_{22} \langle a_2 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_{23} \langle a_3 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_{31} \langle a_1 \rangle \langle a_3 \rangle^T + C_{32} \langle a_2 \rangle \langle a_3 \rangle^T + \\ &+ C_{33} \langle a_3 \rangle \langle a_3 \rangle^T + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} [M_{o1}] - \frac{1}{\sqrt{J_2}} \langle a_2 \rangle \langle a_2 \rangle^T + [M_{o2}] \end{aligned}$$

$$[H] = \gamma (\Phi \partial \langle a \rangle^T / \partial \langle o \rangle + d\Phi/dF \langle a \rangle \langle a \rangle^T) =$$

$$\begin{aligned} &= \gamma [\Phi (C_{11} \langle a_1 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_{12} \langle a_2 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_{13} \langle a_3 \rangle \langle a_1 \rangle^T + \\ &+ C_{21} \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_{22} \langle a_2 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_{23} \langle a_3 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_{31} \langle a_1 \rangle \langle a_3 \rangle^T + \\ &+ C_{32} \langle a_2 \rangle \langle a_3 \rangle^T + C_{33} \langle a_3 \rangle \langle a_3 \rangle^T - C_2/\sqrt{J_2} \langle a_2 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_2/(2\sqrt{J_2}) \times \\ &\times [M_{o1}] + C_3 [M_{o2}]) + d\Phi/dF (C_1^2 \langle a_1 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_1 C_2 \langle a_1 \rangle \langle a_2 \rangle^T + \\ &+ C_1 C_3 \langle a_1 \rangle \langle a_3 \rangle^T + C_2 C_1 \langle a_2 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_2^2 \langle a_2 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_2 C_3 \langle a_2 \rangle \langle a_3 \rangle^T + \\ &+ C_3 C_1 \langle a_3 \rangle \langle a_1 \rangle^T + C_3 C_2 \langle a_3 \rangle \langle a_2 \rangle^T + C_3^2 \langle a_3 \rangle \langle a_3 \rangle^T)] \rightarrow \end{aligned}$$

Chamando $[M_{ij}] = \langle a_i \rangle \langle a_j \rangle^T$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 [H] = \gamma \left\{ \Phi C_2 / (2\sqrt{J_2}) [M_{01}] + \Phi C_3 [M_{02}] + (\Phi C_{11} + d\Phi/dF C_1^T) [M_{11}] + \right. \\
 + [\Phi(C_{22} - C_2/\sqrt{J_2}) + d\Phi/dF C_2^2] [M_{22}] + (\Phi C_{33} + d\Phi/dF C_3^2) [M_{33}] + \\
 + (\Phi C_{21} + d\Phi/dF C_1 C_2) [M_{12}] + (\Phi C_{12} + d\Phi/dF C_1 C_2) [M_{21}] + \\
 + (\Phi C_{31} + d\Phi/dF C_1 C_3) [M_{13}] + (\Phi C_{13} + d\Phi/dF C_1 C_3) [M_{31}] + \\
 \left. + (\Phi C_{23} + d\Phi/dF C_3 C_2) [M_{32}] + (\Phi C_{32} + d\Phi/dF C_3 C_2) [M_{23}] \right\}
 \end{aligned}$$

Como verifica-se que

$$[C_{ij}] = [C_{ji}]$$

reagrupando-se, convenientemente, e chamando

$$[\bar{M}_{ij}] = [M_{ij}] + [M_{ji}]$$

quando $i \neq j$ e restabelecendo-se o símbolo $\langle \rangle$, fica-se com

$$\begin{aligned}
 [H] = \gamma \left\{ \langle \Phi \rangle C_2 / (2\sqrt{J_2}) [M_{01}] + \langle \Phi \rangle C_3 [M_{02}] + (\langle \Phi \rangle C_{11} + d\langle \Phi \rangle / dF C_1^2) [M_{11}] + \right. \\
 + [\langle \Phi \rangle (C_{22} - C_2/\sqrt{J_2}) + d\langle \Phi \rangle / dF C_2^2] [M_{22}] + (\langle \Phi \rangle C_{33} + d\langle \Phi \rangle / dF C_3^2) [M_{33}] + \\
 + (\langle \Phi \rangle C_{12} + d\langle \Phi \rangle / dF C_1 C_2) [\bar{M}_{12}] + (\langle \Phi \rangle C_{13} + d\langle \Phi \rangle / dF C_1 C_3) [\bar{M}_{13}] + \\
 \left. + (\langle \Phi \rangle C_{23} + d\langle \Phi \rangle / dF C_2 C_3) [\bar{M}_{23}] \right\}
 \end{aligned}$$

onde

$$[M_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Simétrica} & & 0 \end{bmatrix} ; [M_{22}] = \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & 2s_x \tau_{xy} \\ & s_y^2 & 2s_y \tau_{xy} \\ \text{Simétrica} & & 4\tau_{xy}^2 \end{bmatrix}$$

$$[M_{33}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ & m_{22} & m_{23} \\ \text{Simétrica} & & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{sendo } m_{11} = s_y s_z + 2/3 s_y s_z J_2 + J_2^2/9 ; \quad m_{12} = s_x s_y s_z^2 + J_2/3 s_z (s_x + s_y) + J_2^2/9$$

$$m_{13} = -2s_y s_z^2 \tau_{xy} - 2s_z \tau_{xy} J_2/3 ; \quad m_{22} = s_x^2 s_z^2 + 2/3 s_x s_z J_2 + J_2^2/9$$

$$m_{23} = -2s_x s_z^2 \tau_{xy} - 2s_z \tau_{xy} J_2/3 ; \quad m_{33} = 4s_z^2 \tau_{xy}^2$$

$$[\bar{M}_{12}] = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} s_x & (s_x + s_y)/2 & \tau_{xy} \\ & s_y & \tau_{xy} \\ \text{Simétrica} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}_{13}] = \begin{bmatrix} 2s_y s_z + 2J_2/3 & s_z (s_x + s_y) + 2J_2/3 & -2s_z \tau_{xy} \\ & 2s_x s_z + 2J_2/3 & -2s_z \tau_{xy} \\ \text{Simétrica} & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}_{23}] = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ & n_{22} & n_{23} \\ \text{Simétrica} & & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{e } n_{11} = 2s_x s_y s_z + 2/3 s_x J_2 ; \quad n_{12} = s_z (s_x^2 + s_y^2) + J_2/3 (s_x + s_y)$$

$$n_{13} = 2\tau_{xy} s_z (s_y - s_x) + 2\tau_{xy} J_2/3 ; \quad n_{22} = 2s_x s_y s_z + 2/3 s_y J_2$$

$$n_{23} = 2\tau_{xy} s_z (s_x - s_y) + 2\tau_{xy} J_2/3 ; \quad n_{33} = -8s_z \tau_{xy}^2$$

2.4 - Modelo de camadas superpostas

O modelo reológico, correspondente ao comportamento viscoelastoplástico descrito no item 2.1, é composto por uma mola em série com um elemento formado por um amortecedor viscoso em paralelo com um elemento de atrito (slider). O comportamento real de vários materiais, entre eles o do concreto, não pode ser representado por este modelo viscoelastoplástico simples.

Uma resposta do material, mais elaborada pode ser obtida pelo método das camadas superpostas, conforme PANDE, OWEN & ZIENKIEWICZ [59], no qual o sólido analisado é suposto como sendo composto por várias camadas, cada uma das quais

apresentando a mesma deformação. O campo de tensões totais é obtido pela soma das contribuições de cada camada.

Mediante a introdução de um número conveniente de camadas superpostas, e atribuindo diferentes características materiais a cada uma, pode-se reproduzir o comportamento experimental de muitos materiais reais.

No caso mais geral, o modelo reológico é formado por um conjunto de elementos tipo Maxwell generalizado em paralelo. Tem-se como parâmetros as espessuras das camadas, os módulos de elasticidade das molas E , as constantes dos amortecedores γ e as tensões de escoamento, na qual começam a atuar os elementos de atrito. A dificuldade fundamental está na determinação dos parâmetros para ajustar o modelo ao comportamento experimental do material.

Para o concreto, aplicar-se-á o modelo das camadas superpostas para representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento, conforme será descrito no item 5.2

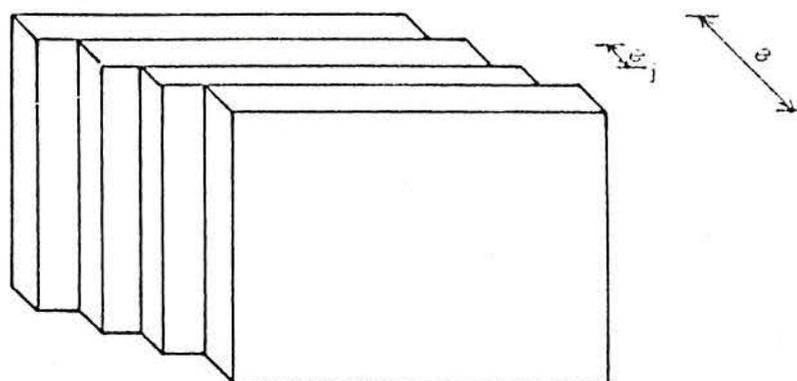


FIGURA 2.4.1 - Modelo de camadas superpostas

Na FIGURA 2.4.1, ilustra-se esquematicamente a situação de um modelo de camadas superpostas em duas dimensões.

Cada camada pode ter uma espessura diferente e um

comportamento material também diferente. Como os nós em todas as camadas coincidem, em cada uma delas tem-se a mesma deformação. Isto resulta em um campo de tensões σ_j diferente em cada camada. A contribuição de cada camada para o campo de tensões total σ , conforme sua espessura e_j , é dada por

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^k \langle \sigma_j \rangle e_j \quad (2.4.1)$$

onde k é o número de camadas do modelo e e é a espessura total do elemento dada por

$$e = \sum_{j=1}^k e_j \quad (2.4.2)$$

A equação de equilíbrio, dada pela expressão (2.3.3.1), fica da seguinte forma para um elemento com k camadas

$$\begin{aligned} \int_V \delta \langle \Delta \varepsilon_n \rangle^T \sum_{j=1}^k \langle \Delta \sigma_n \rangle_j \frac{e_j}{e} dV = \\ = \int_V \delta \langle \Delta u_n \rangle^T \langle \Delta b_n \rangle dV + \int_S \delta \langle \Delta u_n \rangle^T \langle \Delta f_n \rangle dS \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Trabalhando de forma análoga à empregada na seção 2.3.3 e levando em conta que a tensão em cada camada é dada por

$$\langle \Delta \sigma_n \rangle_j = [\hat{D}]_j [B]_n \langle \Delta \bar{u}_n \rangle - \langle \langle \varepsilon_{vp} \rangle \rangle_j \Delta t_n \quad (2.4.4)$$

chega-se a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k \int_V \frac{e_j}{e} [B]_n^T [\hat{D}]_j [B]_n dV \right) \langle \Delta \bar{u}_n \rangle = \\ = \sum_{j=1}^k \frac{e_j}{e} \int_V [B]_n^T [\hat{D}]_j \langle \langle \varepsilon_{vp} \rangle \rangle_j \Delta t_n dV + \\ + \int_V [N]^T \langle \Delta b_n \rangle dV + \int_S [N]^T \langle \Delta f_n \rangle dS \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Assim, a matriz de rigidez de cada elemento será a soma da contribuição de cada camada, isto é

$$[K]_n = \sum_{j=1}^k \frac{e_j}{e} \int_V [B]_n^T [\hat{D}]_j [B]_n dV \quad (2.4.6)$$

onde $[\hat{D}]_j$ é a matriz $[\hat{D}]$ calculada para cada camada.

A matriz $[D]_n$ será diferente para cada camada dependendo de suas propriedades materiais. O processo de solução, então, é idêntico ao descrito nas seções anteriores. As deformações e tensões serão calculadas para cada camada separadamente. É bom observar que, embora as deformações viscoplásticas em cada camada possam ser diferentes, devido aos diferentes valores das tensões de escoamento, a deformação total deve ser a mesma.

2.5 - Esquemas de integração no tempo

OWEN & HINTON, em [58], afirmam que a solução pelo método implícito, aumenta o tempo de computação em aproximadamente quatro ou cinco vezes, em comparação com o procedimento explícito, para o mesmo fator de tolerância da solução (ou comprimento do passo de tempo). Este custo adicional, pode ser compensado por o maior comprimento do passo de tempo, permitido pelo método implícito, pois este é incondicionalmente estável. Deve-se observar que um acréscimo no comprimento do passo de tempo, além dos limites recomendados, resulta na deterioração da precisão da solução.

Quando uma aproximação de rigidez variável deve ser empregada por quaisquer razões, a solução pelo esquema implícito impõe pequeno ou nenhum esforço computacional adicional e este procedimento torna-se particularmente vantajoso. Esta situação é encontrada na modelagem do comportamento do concreto, onde as propriedades do material são dependentes do tempo.

Para a solução de problemas elastoplásticos, como no estudo do comportamento de peças de concreto sob cargas de curta duração, através do uso de um algoritmo viscoelastoplásticos, tanto o esquema implícito como o explícito, conduzem à solução do estado estável de forma precisa.

2.6 - Seleção do comprimento do passo de tempo

Conforme OWEN & HINTON [58], pode-se demonstrar que o esquema de integração no tempo é incondicionalmente estável para valores de $\theta \geq 0,5$. Isto implica que o sistema de integração no tempo é numericamente estável, mas não dá garantia da exatidão da solução para qualquer etapa. Na prática, mesmo para valores de $\theta \geq 0,5$, devem-se escolher limites para o comprimento do passo de tempo, a fim de obter uma solução válida.

Para $\theta < 0,5$, o processo de integração é somente condicionalmente estável e devem-se estabelecer regras para a escolha do comprimento do passo de tempo.

Podem-se empregar esquemas nos quais o comprimento do passo de tempo é constante ou variável em cada intervalo de tempo. No esquema variável, a magnitude do passo de tempo é controlada por um fator τ , que é limitado pelo incremento de deformação viscoplástica efetiva máxima $\Delta \bar{\epsilon}_{vp}^n$, como uma fração da deformação efetiva total $\bar{\epsilon}^n$, tal que

$$\Delta \bar{\epsilon}_{vp}^n = \sqrt{2/3} [(\dot{\epsilon}_{ij}^n)_{vp} (\dot{\epsilon}_{ij}^n)_{vp}]^{1/2} \Delta t_n \leq \tau \bar{\epsilon}^n \quad (2.6.1)$$

Para elementos isoparamétricos, todas as deformações são calculadas nos pontos de integração de Gauss. Portanto, Δt_n pode ser determinado para satisfazer a equação (2.6.1) em cada ponto, tomando-se o valor mínimo para a análise. Para os valores de τ , OWEN afirma que para esquemas explícitos obtêm-se resultados exatos para $0,01 < \tau < 0,15$. Já para esquemas implícitos, até para valores de τ maiores do que 10, tem-se estabilidade, ainda que com prejuízo na precisão.

Outro limite útil pode ser imposto, quando se usa o esquema de passo de tempo variável. O comprimento variável do passo de tempo entre dois intervalos deve ser limitado por

$$\Delta t_{n+1} \leq k \Delta t_n \quad (2.6.2)$$

onde k é uma constante especificada. OWEN sugere que o valor $k = 1.5$ é apropriado, embora não apresente um critério fixo para esta escolha.

Os valores limites do passo de tempo inicial são basicamente empíricos.

Restrições teóricas sobre o comprimento do passo de tempo foram apresentadas por CORMEAU [30] para formas específicas da regra de fluxo viscoplástico e para procedimentos de integração explícitos. Obtém-se expressões simples para os sólidos de Tresca, Von Mises e Mohr-Coulomb. Para os modelos empregados neste trabalho, isto não ocorre.

2.7 - Estudo da convergência

A obtenção das condições de estado estável, que permite a resolução de problemas elastoplásticos, pode ser controlada por um somatório vinculado a taxa de deformação viscoplástica para todos os pontos de integração da estrutura. No estado estável, esta quantidade torna-se nula.

O grau de fluxo viscoplástico total é melhor controlado pelo cálculo da taxa de deformação viscoplástica efetiva total $\bar{\epsilon}_{vp}$, em todos os pontos de Gauss, por

$$\bar{\epsilon}_{vp} = \sqrt{2/3} [(\dot{\epsilon}_{ij})_{vp} (\dot{\epsilon}_{ij})_{vp}]^{1/2} \quad (2.7.1)$$

Alcançam-se as condições de estado estável, no fim do passo n , quando

$$100 (\Delta t_{n+1} \sum_{k=1}^g (\bar{\epsilon}_{vp}^{n+1})_k) / (\Delta t_1 \sum_{k=1}^g (\bar{\epsilon}_{vp}^1)_k) \leq \text{TOLER} \quad (2.7.2)$$

onde g é o número de pontos de integração de Gauss e TOLER um valor de tolerância para a convergência.

CAPITULO 3
ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA
O CONCRETO E A ARMADURA

3.1 - Elementos finitos para o concreto

Para modelar o concreto são utilizados elementos quadrangulares isoparamétricos da família Serendipity, linear ou quadrático. Estes possuem 4 e 8 nós, respectivamente, com 2 graus de liberdade em cada nó, na direção dos eixos do sistema global de coordenadas (FIGURA 3.1.1).

Para o elemento linear, o campo de deslocamentos possui variação linear e os de tensões e deformações são constantes ao longo dos lados do elemento. Para o elemento quadrático, o campo de deslocamentos possui variação quadrática e os de tensões e deformações variações lineares.

As funções de interpolação, tendo como variáveis independentes as coordenadas naturais (ξ, η) e nós numerados conforme a FIGURA 3.1.1, são apresentadas por ZIENKIEWICZ [66] como :

a) Caso do elemento linear:

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_o) (1 + \eta_o) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.1.1)$$

onde $\xi_o = \xi / \xi_i$, $\eta_o = \eta / \eta_i$ e (ξ_i, η_i) representam as coordenadas do nó em consideração.

b) Caso do elemento quadrático:

- para os nós de canto

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_o) (1 + \eta_o) (\xi_o + \eta_o - 1) \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (3.1.2)$$

- para os nós de meio de lado

$$\begin{aligned} \xi_i = 0 \quad , \quad N_i &= 1/2 (1 - \xi^2) (1 + \eta_0) \\ \eta_i = 0 \quad , \quad N_i &= 1/2 (1 + \xi_0) (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Trabalhando com elementos isoparamétricos, pode-se usar a seguinte representação para as coordenadas x e y dentro do elemento

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3.1.4)$$

na qual N_i são as funções de forma empregadas na representação dos deslocamentos; x_i, y_i são as coordenadas representação dos deslocamentos; x_i, y_i são as coordenadas nodais do elemento; k é o número de nós do elemento.

Pode-se avaliar a matriz jacobiana como

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^k \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^k \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^k \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

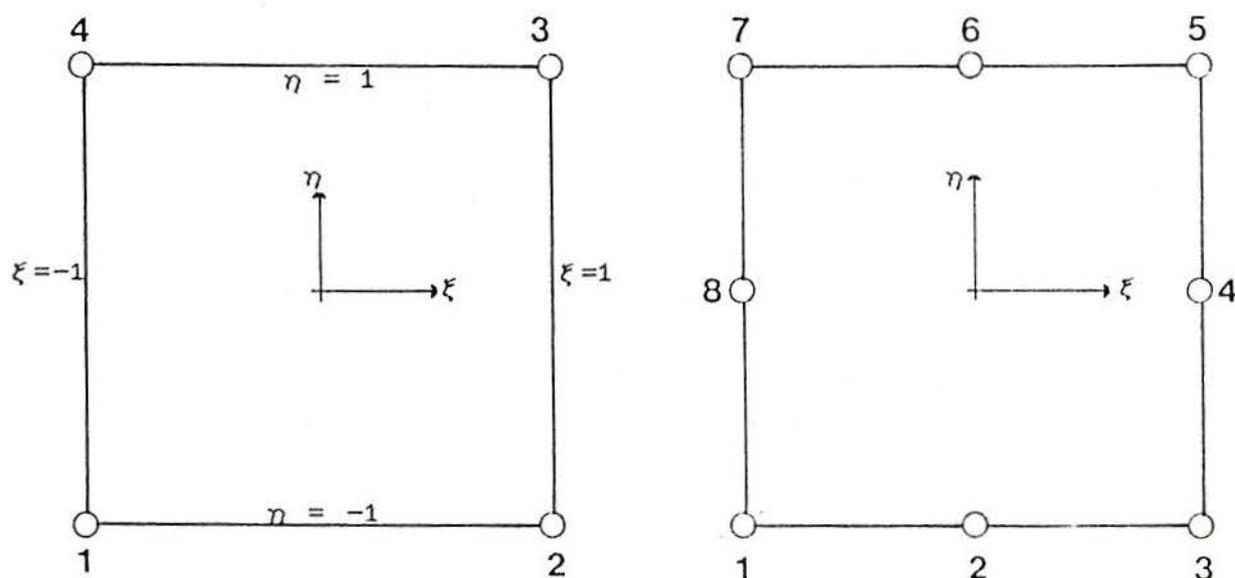


FIGURA 3.1.1 - Elementos quadrangulares da família Serendipity
(a) linear e (b) quadrático.

Da equação (2.3.3.7), tem-se que a matriz de rigidez do elemento de concreto é dada por

$$[K_c] = \int_V [B]^T [\hat{D}] [B] dV \quad (3.1.6)$$

onde $[B]$ é obtida no caso de estado plano de tensões das relações (2.2.2.1), (2.2.2.2) e (2.2.2.3), e $[\hat{D}]$ da equação (2.3.2.4).

A matriz de rigidez da equação (2.3.3.7) é determinada numericamente através de

$$[K_c] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B_{ij}]^T [\hat{D}] [B_{ij}] w_i w_j e_{ij} \det J \quad (3.1.7)$$

onde N = número de pontos de integração em cada direção do elemento plano.

$[B_{ij}]$ = matriz $[B]$ aplicada ao ponto de integração com coordenadas naturais (ξ_i, η_j) .

w_i, w_j = fatores de peso

e_{ij} = espessura no ponto de integração

$\det J$ = determinante da matriz jacobiana do elemento

As coordenadas naturais dos pontos de integração e os fatores de peso podem ser encontrados nas referências [3], [66].

3.2 - Os elementos finitos para a armadura

Existem basicamente três formas de incluir a armadura de aço em um modelo de elementos finitos para estruturas de concreto armado :

a) Modelo distribuído , em que considera-se o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto. Admite-se aderência perfeita entre aço e o concreto. É um modelo conveniente para situações em que a armadura é composta por uma série de barras pouco espaçadas. Por outro lado, quando as barras estão colocadas de forma espaçada, os modelos incorporado e discreto tornam-se mais efetivos.

b) Modelo incorporado, onde a geometria das armaduras

é consistente com a geometria do elemento isoparamétrico em que se encontra disposta. Isto resulta em um único campo de deslocamentos no domínio do elemento, com uma relação constitutiva obtida pela soma das matrizes de rigidez do aço e do concreto. Desta forma, as barras de armadura não necessitam estar distribuídas uniformemente. A localização e direção das barras de armadura podem ser arbitrárias. Admite-se, também, que exista aderência perfeita entre o aço e o concreto.

c) **Modelo discreto**, é realizado com um elemento unidimensional de barra, que se integra à malha de elementos finitos bidimensionais, utilizada para a representação do concreto. Apesar da simplicidade deste conceito, o modelo discreto tem a desvantagem de que a malha de elementos finitos fica restringida pela localização da armadura. Conforme CHANG-TANIGNCHU-CHEN [22], o modelo discreto é numericamente menos efetivo que o modelo incorporado.

No presente estudo, optou-se pelo modelo incorporado para representar a armadura.

3.2.1 - Modelo incorporado

No modelo incorporado, a barra de aço é considerada como uma linha dentro do elemento de concreto, de maneira que seus deslocamentos sejam compatíveis com os deslocamentos do elemento de concreto que a circunda.

Nesta aproximação não há limitação para representar a localização ou distribuição de armadura de aço.

A contribuição da armadura, a rigidez de cada elemento, pode ser avaliada independentemente para cada barra de aço. A matriz de rigidez pode ser obtida usando o princípio dos trabalhos virtuais com as seguintes hipóteses:

- 1) As barras de aço contribuem para a rigidez só no sentido longitudinal.
- 2) As barras são retas, e sua seção longitudinal tem seção constante.

A expressão final da matriz de rigidez do elemento é $[K] = [K_c] + [K_s]$, [22], na qual $[K_s] = E_s A_s \int \langle B_s^T \rangle \langle B_s \rangle ds$ onde $[K]$, $[K_c]$ e $[K_s]$ são as matrizes de rigidez do concreto armado, concreto e aço respectivamente; A_s , a área da armadura, E_s seu módulo de elasticidade longitudinal e $\langle B_s \rangle$, o vetor que dá a relação deformação-deslocamento nodal para a armadura.

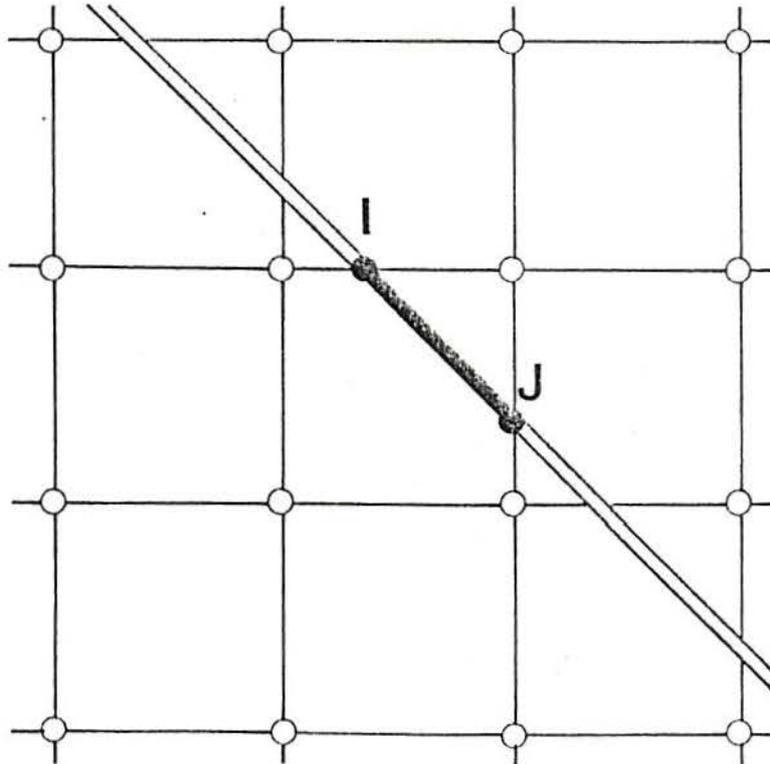


FIGURA 3.2.1 - Elemento de armadura no modelo incorporado

3.2.2 - Funções de forma para os elementos finitos

Consideram-se elementos finitos unidimensionais lineares ou quadráticos, que possuem 2 ou 3 nós, respectivamente, com 2 graus de liberdade em cada nó, na direção dos eixos do sistema global de coordenadas.

O elemento pode ter uma posição arbitrária no interior do elemento de concreto. A hipótese de aderência perfeita entre o concreto e o aço, torna possível uma disposição arbitrária da armadura sem que se introduzam incógnitas

adicionais no sistema de equações de equilíbrio. Para isto, os deslocamentos nos pontos nodais do elemento de armadura devem ser expressos em função dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto correspondentes.

As funções de interpolação e suas derivadas, conforme a ordem dos nós da FIGURA 3.2.2.1, podem ser escritas em função da coordenada natural κ da forma

a) Caso do elemento linear:

$$H_1(\kappa) = \frac{1 - \kappa}{2} \rightarrow \frac{\partial H_1}{\partial \kappa} = -\frac{1}{2} \quad (3.2.2.1)$$

$$H_2(\kappa) = \frac{1 + \kappa}{2} \rightarrow \frac{\partial H_2}{\partial \kappa} = \frac{1}{2}$$

b) caso do elemento quadrático:

$$H_1(\kappa) = \frac{\kappa^2 - \kappa}{2} \rightarrow \frac{\partial H_1}{\partial \kappa} = \kappa - \frac{1}{2}$$

$$H_2(\kappa) = 1 - \kappa^2 \rightarrow \frac{\partial H_2}{\partial \kappa} = -2\kappa \quad (3.2.2.2)$$

$$H_3(\kappa) = \frac{\kappa^2 + \kappa}{2} \rightarrow \frac{\partial H_3}{\partial \kappa} = \kappa + \frac{1}{2}$$

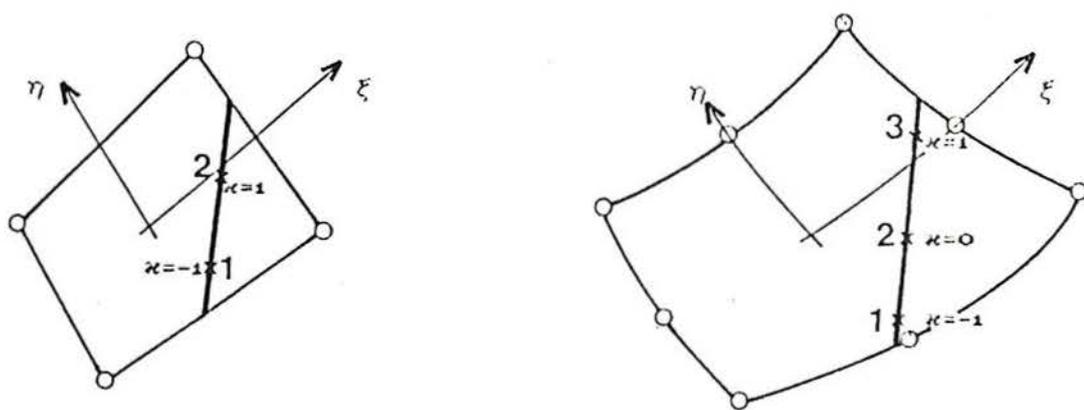


FIGURA 3.2.2.1. - Elemento unidimensional (armadura) no interior do seu respectivo elemento plano (concreto)

3.2.3 - Matriz de rigidez para os elementos de armadura

A matriz de rigidez de um elemento de concreto armado é obtida pela adição de duas matrizes de rigidez de mesma dimensão, uma correspondente à armadura e outra correspondente ao concreto. Estas matrizes são determinadas em cada etapa, em função do estado de deformação que o elemento apresenta.

Seja um elemento de armadura dentro de um elemento de concreto. O deslocamento w na direção axial do elemento, em um ponto arbitrário, é dado por

$$w = \{r\}^T \{v\} \quad (3.2.3.1)$$

onde : $\{r\}^T = \{ \cos\alpha \quad \sin\alpha \}$

e $\{v\}^T = \{ v_x \quad v_y \}$

são as componentes do deslocamento nas direções dos eixos x e y do sistema global e, conforme a FIGURA 3.2.3.1, α é a inclinação do eixo do elemento.

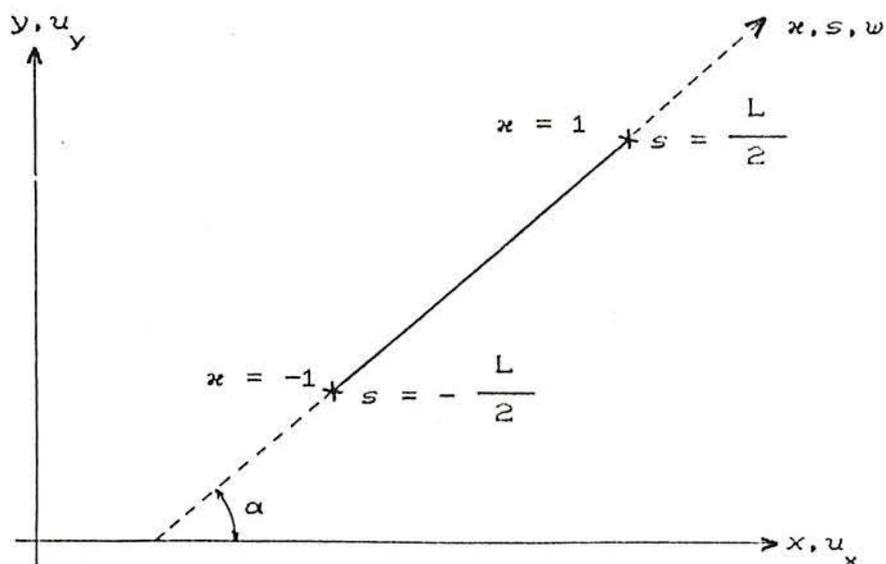


FIGURA 3.2.3.1 - Sistemas de coordenadas do elemento de armadura dentro de um elemento de concreto.

Usando a hipótese de compatibilidade de deslocamentos entre concreto e aço, pode-se expressar o deslocamento $\{v\}$ de um ponto da barra, como se fosse o de um ponto do elemento de

concreto, em função dos deslocamentos nodais deste elemento.

Os deslocamentos podem ser escritos na forma da equação (2.2.1.1) como

$$\langle v \rangle = [N] \langle \bar{u} \rangle \quad (3.2.3.2)$$

onde $\langle \bar{u} \rangle$ é o vetor que contém os deslocamentos nodais do elemento de concreto.

Sustituindo-se a expressão anterior em (3.2.3.1), tem-se

$$\langle w \rangle = \langle r \rangle^T [N] \langle \bar{u} \rangle \quad (3.2.3.3)$$

Expressa-se a deformação axial do segmento da barra por :

$$\epsilon_L = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (3.2.3.4)$$

onde s é a coordenada que descreve a barra de aço.

A FIGURA (3.2.3.1) mostra a relação entre a coordenada s e a coordenada natural κ correspondente. Sendo L o comprimento do segmento da barra dentro do elemento de concreto, tem-se

$$s = \frac{1 + \kappa}{2} L \rightarrow ds = \frac{L}{2} d\kappa \quad (3.2.3.5)$$

Assim, pode-se expressar ϵ_L em função de κ como

$$\epsilon_L = \frac{\partial w}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial \kappa} \cdot \frac{2}{L} \quad (3.2.3.6)$$

De (3.2.3.3), como $\langle r \rangle$ e $\langle \bar{u} \rangle$ são independentes de κ , derivando-se, tem-se que

$$\frac{\partial w}{\partial \kappa} = \langle r \rangle^T \frac{\partial [N]}{\partial \kappa} \langle \bar{u} \rangle \rightarrow \epsilon_L = \frac{2}{L} \langle r \rangle^T \frac{\partial [N]}{\partial \kappa} \langle \bar{u} \rangle \quad (3.2.3.7)$$

As funções de interpolação do elemento de concreto têm como variáveis ξ e η :

$$[N] = [N(\xi, \eta)] \rightarrow \frac{\partial [N]}{\partial x} = \frac{\partial [N]}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.2.3.8)$$

Para calcular $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ pode-se expressar

$$\xi = \langle H \rangle^T \langle \bar{\xi} \rangle \quad \text{e} \quad \eta = \langle H \rangle^T \langle \bar{\eta} \rangle \quad (3.2.3.9)$$

sendo $\langle H \rangle^T = (H_1, H_2, \dots, H_m)$ um vetor de m componentes onde m é o número de nós do elemento de armadura que contém as funções de interpolação do elemento de barra e $\langle \bar{\xi} \rangle = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_m)$, $\langle \bar{\eta} \rangle = (\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_m)$ dois vetores de m componentes, que contém as coordenadas normalizadas $\bar{\xi}_j$, $\bar{\eta}_j$ dos nós do elemento de armadura.

Derivando as Eqs. (3.2.3.9) em relação a x obtém-se

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left[\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x} \right]^T \langle \bar{\xi} \rangle \quad (3.2.3.10)$$

e

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left[\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x} \right]^T \langle \bar{\eta} \rangle \quad (3.2.3.11)$$

Então

$$\varepsilon_L = \frac{2}{L} \langle r \rangle^T \left[\frac{\partial [N]}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x} \right]^T \langle \bar{\xi} \rangle + \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x} \right]^T \langle \bar{\eta} \rangle \right] \langle \bar{u} \rangle \quad (3.2.3.12)$$

que pode-se escrever como

$$\varepsilon_L = \langle B_S \rangle \langle \bar{u} \rangle \quad (3.2.3.13)$$

onde

$$\langle B_S \rangle = \frac{2}{L} \langle r \rangle^T \left[\frac{\partial [N]}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x} \right]^T \langle \bar{\xi} \rangle + \frac{\partial [N]}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial x} \right]^T \langle \bar{\eta} \rangle \right] \quad (3.2.3.14)$$

é um vetor que relaciona as deformações no elemento de barra com os deslocamentos nodais do elemento de concreto.

Pode-se escrever que

$$\delta U = \int_V (\delta \varepsilon_L)^T \sigma_L dV = \int_A \int_L (\delta \varepsilon_L)^T \sigma_L ds dA = A_S \int_L (\delta \varepsilon_L)^T \sigma_L ds \quad (3.2.3.15)$$

onde δU é o trabalho virtual interno na armadura, A_S a área da seção e σ_L , ε_L a tensão e deformação longitudinal na armadura.

$$\text{De (3.2.3.13)} \quad \delta \varepsilon_L^T = \delta \langle \bar{u} \rangle^T \langle B_S \rangle^T \quad (3.2.3.16)$$

$$\text{Também } \sigma_L = E_S \varepsilon_L = E_S \langle B_S \rangle \langle \bar{u} \rangle \quad (3.2.3.17)$$

Substituindo (3.2.3.16) e (3.2.3.17) em (3.2.3.15), obtém-se que

$$\delta U = E_S A_S \delta \langle \bar{u} \rangle^T \left(\int_L \langle B_S \rangle^T \langle B_S \rangle ds \right) \langle \bar{u} \rangle \quad (3.2.3.18)$$

pelo que a matriz de rigidez para a representação incorporada, pode ser expressa como

$$[K_S] = E_S A_S \int_L \langle B_S \rangle^T \langle B_S \rangle ds \quad (3.2.3.19)$$

Da relação (3.2.5) entre s e κ : $s = \frac{1 + \kappa}{2} L$, tem-se que $\kappa = 2s/L - 1$, e fazendo esta mudança de variáveis em em (3.2.3.19) chega-se a

$$[K_S] = E_S A_S \int_{-1}^1 \langle B_S \rangle^T \langle B_S \rangle d\kappa \quad (3.2.3.20)$$

A integração da equação (3.2.3.20) é realizada numericamente, de forma semelhante a utilizada nos elementos de concreto. A diferença agora, é que a integração é feita em uma direção, usando-se as mesmas coordenadas e fatores de peso aplicados anteriormente.

Deve-se observar que a dimensão da matriz de rigidez é a mesma que a do elemento de concreto, no interior do qual o elemento de barra encontra-se disposto. A matriz de rigidez do elemento de concreto armado resulta, então, da adição, termo a termo, das matrizes do concreto e da armadura.

CAPÍTULO 4
MODELOS CONSTITUTIVOS
PARA O CONCRETO ARMADO
SUBMETIDO A CARGAS DE CURTA DURACÃO

4.1 - Características do comportamento do concreto armado submetido a cargas de curta duração

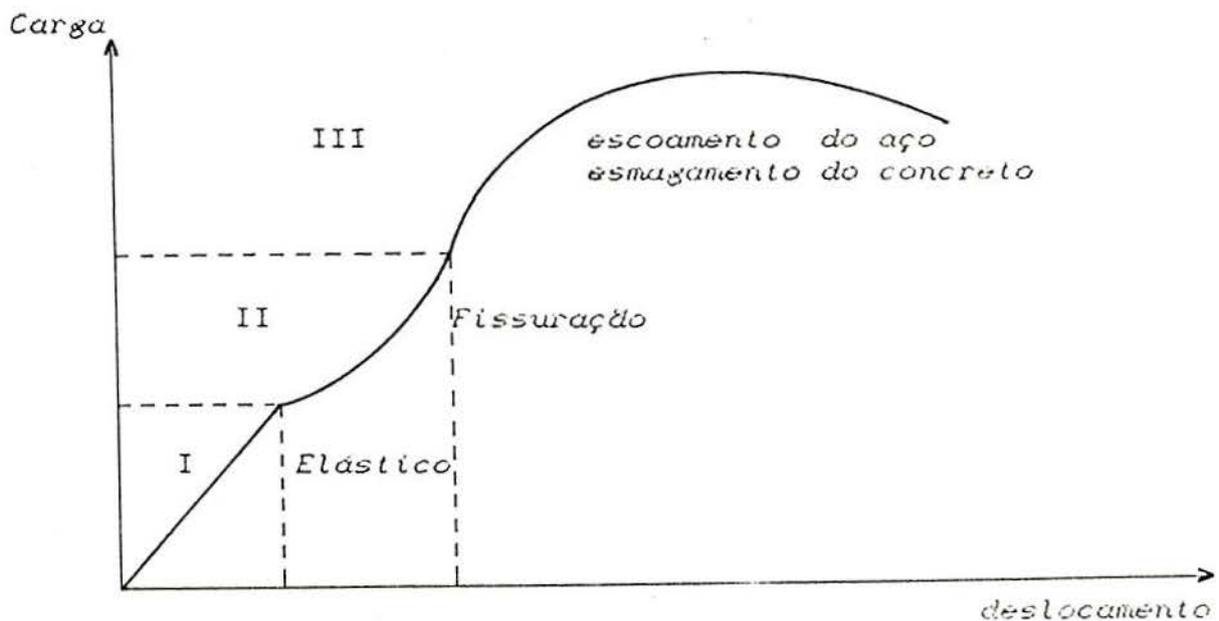


FIGURA 4.1.1 - Diagrama carga-deslocamento típico

Os estados característicos do comportamento do concreto armado podem ser ilustrados por um diagrama carga-deslocamento típico, conforme apresenta a FIGURA 4.1.1.

Este diagrama pode ser, por exemplo, o resultado do ensaio de uma viga. Esta relação, altamente não-linear, pode ser dividida genericamente em três intervalos: uma etapa elástica, com o concreto não fissurado, uma etapa de formação de fissuras e uma etapa plástica. A resposta não linear e

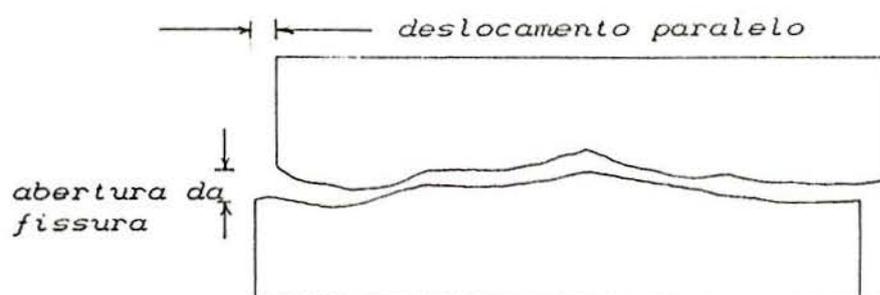


FIGURA 4.1.2 - Engrenamento dos agregados

causada principalmente, por dois efeitos materiais: a fissuração do concreto e a plastificação do aço e do concreto comprimido.

Outras não linearidades, independentes do tempo, surgem a partir dos elementos constitutivos do concreto armado como o deslizamento das barras de aço na matriz do concreto, o engrenamento dos agregados (FIGURA 4.1.2), o efeito de pino das barras de aço (FIGURA 4.1.3). Os efeitos dependentes do tempo, tais como a fluência e a retração do concreto, também contribuem para a resposta não-linear, mas serão tratados no próximo capítulo.

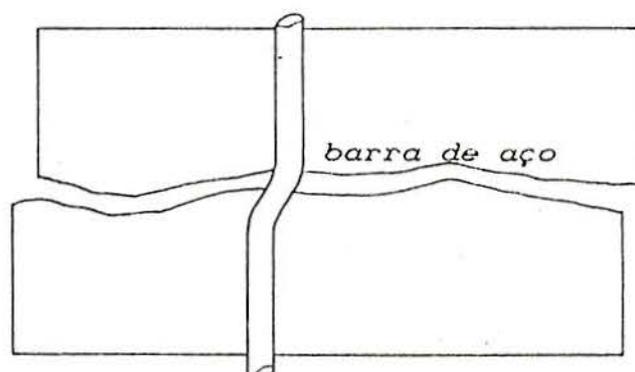


FIGURA 4.1.3 - Efeito de pino da armadura

4.2 - Modelos constitutivos para o concreto

Evidências experimentais indicam que a deformação não-linear do concreto é basicamente de natureza inelástica e, portanto, o comportamento tensão-deformação pode separar-se em uma componente recuperável e outra irrecuperável. A componente irrecuperável da deformação pode ser tratada dentro da teoria clássica da plasticidade ou usando um modelo viscoplástico dependente do tempo. Além disso, a solução estável do problema viscoplástico coincide com a solução do problema plástico.

Os modelos plásticos dão uma base adequada para a descrição da deformação inelástica, sem envolver as dificuldades dos modelos de fratura ou da teoria endocrônica, e necessitam para sua definição poucos parâmetros materiais. Por esta razão, no presente trabalho, usar-se-á, para modelar o concreto não fissurado, um modelo elastoplástico com endurecimento. Este modelo será obtido mediante a solução estável de um modelo elasto-viscoplástico com endurecimento.

Em princípio, trabalhando com plasticidade não-associada, podem-se modelar [29] todos os fenômenos importantes observados no concreto. Entretanto, esta vantagem é alcançada com uma formulação muito mais complexa, como foi indicado ao final do item (2.3.2) no presente trabalho, optou-se por um modelo com plasticidade associada.

4.2.1 - Modelo material para o concreto não fissurado

O modelo material para o concreto não fissurado envolve a definição das seguintes relações: uma superfície de plastificação, uma superfície de ruptura, uma lei para determinar a velocidade de deformação plástica e uma regra de endurecimento. As relações, que serão utilizadas neste trabalho, serão apresentadas a seguir.

4.2.1.1 - Superfície de plastificação para o concreto não fissurado

Admitindo que o concreto não fissurado é um material de comportamento isotrópico, sua superfície de plastificação pode ser descrita como

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_0 \quad (4.2.1.1.1)$$

onde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ são as tensões principais (tensões de tração são consideradas positivas). Em vez de expressar a função de plastificação F a partir das tensões principais, pode-se escrevê-la como uma função de três invariantes de tensões. É particularmente conveniente usar o primeiro invariante do tensor de tensões I_1 , o segundo invariante do tensor desviador de tensões J_2 e o ângulo de similaridade de Lode θ . Com isto tem-se

$$F(I_1, J_2, \theta) = \sigma_0 \quad (4.2.1.1.2)$$

A forma geral da superfície de plastificação, no espaço tridimensional de tensões, pode ser visualizada por suas seções em planos desviadores e meridianos. Os primeiros são planos perpendiculares ao eixo hidrostático, de equação $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$; enquanto que os segundos são planos que contêm este eixo.

Para um material isotrópico, os subíndices 1, 2 e 3, que caracterizam os eixos de coordenadas no espaço tridimensional de tensões, são arbitrários. Assim, as seções em planos desviadores devem ter três eixos de simetria, como na seção apresentada na FIGURA 4.2.1.1.1. Desta forma, só é necessário estudar um setor de 60 graus, como o varrido, pelo ângulo α , completando-se o resto da seção por simetria.

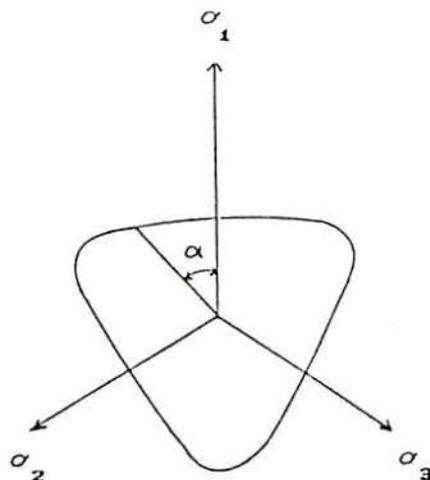


FIGURA 4.2.1.1.1 - Seção da superfície de plastificação por um plano desviador

Observa-se que como o concreto tem menor resistência à tração do que à compressão, a seção transversal da superfície de plastificação não pode admitir a origem O como centro de simetria. Além disto, o setor a estudar não se reduz aos 30 graus, como ocorre com materiais dúteis, como os metais.

Os resultados experimentais [23] indicam que a superfície de plastificação para o concreto apresenta as seguintes características:

- os meridianos são suaves, convexos e a distância do eixo hidrostático à superfície de plastificação, $\rho = \sqrt{2J_2}$, cresce com o aumento da tensão hidrostática;
- a razão ρ_t/ρ_c , na qual t corresponde ao meridiano de tração e c ao meridiano de compressão, aumenta com a pressão hidrostática, desde cerca de 0,5 mas sempre menor do que 1;
- as seções em planos desviadores são suaves e convexas, tendo uma forma aproximadamente triangular, para tensões baixas, passando a outra mais ou menos circular, para altas tensões hidrostáticas; isto significa que para baixas tensões hidrostáticas a forma da seção transversal depende do terceiro invariante do tensor de tensões, e vai se tornando independente a ele, a medida que estas tensões aumentam.

Além disso, para materiais com atrito interno como o

concreto, é necessário levar em conta que as forças de atrito entre as partículas aumentam com a tensão hidrostática. Por isto a resistência destes materiais cresce com o aumento das forças de atrito interno, que também são influenciadas pela tensão hidrostática (primeiro invariante do tensor de tensões I_1).

No presente trabalho, usam-se, alternativamente, dois critérios de plastificação: um que deriva do critério proposto por OTTOSEN [55] e que foi adotado pelo Código Modelo do CEB de 1990 [26] e outro, proposto por HINTON e OWEN [42].

4.2.1.1.1 - Critério de plastificação de Ottosen

Ottosen, em 1977, sugeriu o seguinte critério de plastificação para o concreto, que utiliza quatro parâmetros e que envolve os três invariantes I_1, J_2 e θ :

$$F(I_1, J_2, \theta) = A J_2 / \sigma_0 + \lambda \sqrt{J_2} + B I_1 = \sigma_0 \quad (4.2.1.1.1)$$

onde σ_0 é a tensão efetiva equivalente, tomada como a tensão de plastificação em um ensaio uniaxial, A e B são parâmetros e λ é uma função dada por

$$\begin{cases} \lambda = K_1 \cos [1/3 \arccos(K_2 \sin 3\theta)] & \forall \theta / \sin 3\theta \geq 0 \\ \lambda = K_1 \cos [\pi/3 - 1/3 \arccos(-K_2 \cos 3\theta)] & \forall \theta / \sin 3\theta < 0 \end{cases} \quad (4.2.1.1.1.2)$$

na qual K_1 e K_2 são parâmetros ($0 \leq K_2 \leq 1$).

Esta superfície, foi originalmente obtida pela analogia da membrana, com $\rho = 1/\lambda$ correspondendo a uma curva suave e convexa dada pela deformada de uma membrana carregada por uma pressão lateral e apoiada nos lados de um triângulo equilátero. Desta forma, $\rho = 1/\lambda$ pode representar curvas convexas e suaves, tendo o triângulo equilátero e o círculo como casos limites.

As características desta superfície de plastificação, definida pelas relações (4.2.1.1.1.1) e (4.2.1.1.1.2), são as

seguintes:

- (a) só são usados quatro parâmetros para definir a superfície;
- (b) usam-se os invariantes de tensões, tornando-se desnecessário o cálculo das tensões principais;
- (c) a superfície é suave e convexa, menos no seu vértice;
- (d) os meridianos são paralelos e não interceptam a parte negativa do eixo hidrostático;
- (e) as seções transversais, nos planos desviadores, variam de uma forma triangular a outra circular com o aumento da tensão hidrostática;
- (f) abrange como casos particulares os critérios de Drucker-Prager, para $A = 0$ e $\lambda = \text{constante}$, e de Von Mises, para $A = 0$, $B = 0$ e $\lambda = \text{constante}$.

Os quatro parâmetros do modelo podem ser determinados a partir da resistência à compressão uniaxial do concreto f_c e da resistência à tração uniaxial do concreto f_t , conforme as seguintes relações, apresentadas pelo Código Modelo do CEB 1990 [26]

$$k = |f_t/f_c| \quad (4.2.1.1.1.3)$$

$$A = 1/(19 k^{1,4}) \quad (4.2.1.1.1.4)$$

$$B = 1/(3,7 k^{1,1}) \quad (4.2.1.1.1.5)$$

$$K_1 = 1/(0,7 k^{0,9}) \quad (4.2.1.1.1.6)$$

$$K_2 = 1 - 6,8(k - 0,07)^2 \quad (4.2.1.1.1.7)$$

4.2.1.1.2 - Critério de plastificação proposto por Hinton e Owen

Para que se possa representar adequadamente o comportamento real do concreto em uma situação de solicitações tridimensional, é necessário que a função que define a sua superfície de plastificação dependa dos três invariantes de tensões: I_1 , J_2 e J_3 . Uma superfície de plastificação, função

somente dos invariantes I_1 e J_2 , pode ser adequada para descrever várias situações, entre as quais estados planos de tensão. Assim, neste trabalho, adota-se um critério formulado em termos dos dois primeiros invariantes de tensões, onde só dois parâmetros do material estão envolvidos na sua definição. Desta forma, tem-se

$$F(I_1, J_2) = \sqrt{(\alpha/\sigma_0) I_1 + 3\beta J_2} = \sigma_0 \quad (4.2.1.1.2.1)$$

onde α e β são parâmetros do material e σ_0 é a tensão efetiva equivalente, tomada como a tensão de plastificação em um ensaio uniaxial. Este critério, para $\alpha=0$ e $\beta=1$, reduz-se ao de Von Mises.

Os dois parâmetros são determinados a partir de um ensaio de compressão uniaxial e de um ensaio de compressão biaxial com $\sigma_1 = \sigma_2$.

Para propósitos práticos, o quociente entre a resistência à compressão biaxial f_{cb} e a resistência à compressão uniaxial f_c pode ser admitida como constante e igual a 1,16. Assim

$$f_{cb} = 1,16 f_c \quad (4.2.1.1.2.2)$$

Desta forma, a superfície de plastificação depende de um único parâmetro material, que é a resistência à compressão do concreto f_c . Este valor pode ser facilmente determinado a partir de ensaios experimentais.

A equação (4.2.1.1.2.1), para $\sigma_2/\sigma_1 = 0$ (teste de compressão uniaxial), resulta

$$\beta + \alpha = 1 \quad (4.2.1.1.2.3)$$

Já para $\sigma_2/\sigma_1 = 1$ (teste de compressão biaxial), obtém-se:

$$1,16\beta + 2\alpha = 0,862 \quad (4.2.1.1.2.4)$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas equações (4.2.1.1.2.3) e (4.2.1.1.2.4), obtém-se $\alpha = 0,355$ e $\beta = 1,355$.

Com estes valores de α e β , pode-se escrever (4.3.1.2.1), em termos das componentes de tensões, para o caso

de estado plano de tensão, da forma

$$F(\sigma) = \left[1,355(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2) + 0,355\sigma_o(\sigma_x + \sigma_y) \right]^{1/2} = \sigma_o \quad (4.2.1.1.2.5)$$

4.2.1.1.3 - Desempenho dos critérios propostos

Na FIGURA (4.2.1.1.3.1) comparam-se os critérios anteriores com os resultados experimentais de KUPFER [46] no espaço de tensões biaxial.

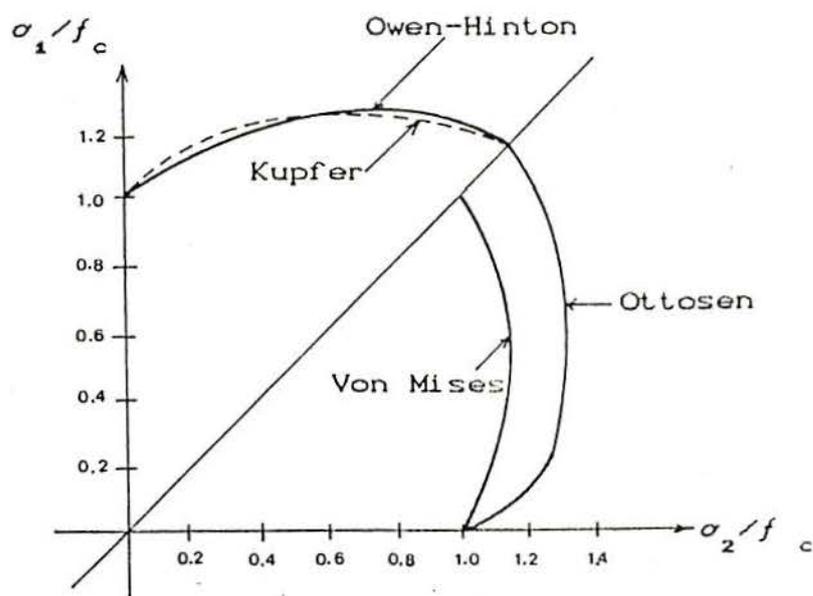


FIGURA 4.2.1.1.3.1 - Critérios propostos no espaço biaxial de tensões

Em um modelo elastoplástico perfeito, σ_o é tomada como a resistência à compressão do concreto f_c , obtida em um ensaio de compressão uniaxial. Admite-se uma resposta elástica até o valor da tensão efetiva $\sigma_o = f_c$, depois da qual se segue uma resposta perfeitamente plástica até que a superfície de ruptura seja alcançada.

No modelo elastoplástico com endurecimento, a

superfície de plastificação inicial é alcançada quando a tensão efetiva é da ordem do 30% da tensão de esmagamento f_c . As subsequentes superfícies de carga, $F(\sigma) = \sigma_0(k)$, são funções do parâmetro de endurecimento k . Este parâmetro é definido pela regra de endurecimento, expressa em termos da deformação plástica efetiva, como será mostrado na seção 4.2.1.2. Quando a tensão efetiva alcança a resistência à compressão do concreto f_c , admite-se uma resposta perfeitamente plástica, até que a superfície de ruptura seja encontrada.

4.2.1.2 - Velocidade de deformação viscoplástica

A velocidade de deformação viscoplástica, é dada conforme (3.1.5), por

$$\langle \dot{\epsilon}_{vp} \rangle = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \partial F / \partial \langle \sigma \rangle \quad (4.2.1.2.1)$$

trabalhando-se, como já foi mencionado, com viscoplasticidade associada. Na equação (4.2.1.2.1), tem-se que :

γ é o coeficiente da fluidez, suposto constante no modelo; $\Phi(F)$ é a função de fluxo plástico; adotou-se, neste trabalho, a função recomendada por HINTON [41]

$$\Phi(F) = (F - \sigma_0) / \sigma_0 \quad (4.2.1.2.2)$$

$\langle \sigma \rangle = \partial F / \partial \langle \sigma \rangle$ é um vetor, normal à superfície de plastificação, que define a direção do fluxo viscoplástico.

As derivadas da função de plastificação, que definem o vetor de fluxo plástico $\langle \sigma \rangle$, serão calculadas para os critérios de plastificação propostos nas seções seguintes.

Além disso, para a solução dada pelo esquema de passo de tempo implícito ou semi-implícito, é necessário determinar a matriz [H], definida na seção 2.3.6. Para determinar esta matriz é preciso calcular os coeficientes C_{ij} , que dependem das derivadas segundas da função de plastificação.

4.2.1.2.1 - Componentes do vetor de fluxo plástico para o critério de Ottosen

Calculando-se σ_o , em (4.2.1.1.1.1), tem-se

$$F = 1/2 \left[\lambda \sqrt{J_2} + B I_1 + [B^2 I_1^2 + 2B\lambda I_1 \sqrt{J_2} + (4A + \lambda^2) J_2]^{1/2} \right] = \sigma_o \quad (4.2.1.2.1.1)$$

Derivando-se e definindo-se que

$$DEN = [B^2 I_1^2 + 2 B \lambda I_1 \sqrt{J_2} + (4 A + \lambda^2) J_2]^{1/2} \quad (4.2.1.2.1.2)$$

obtem-se

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{1}{2} \left[B + (B^2 I_1 + \lambda \sqrt{J_2}) / DEN \right] \quad (4.2.1.2.1.3)$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left[\lambda + [B \lambda I_1 + (4 A + \lambda^2) \sqrt{J_2}] / DEN \right] - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{1}{2} \left[\sqrt{J_2} + [B I_1 \sqrt{J_2} + \lambda J_2] / DEN \right] \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \quad (4.2.1.2.1.4)$$

onde

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \begin{cases} -\frac{K_1 K_2 \cos 3\theta}{(1 - K_2^2 \sin^2 3\theta)^{1/2}} \text{sen} \left[1/3 \arccos(-K_2 \text{sen} 3) \right] & \text{se } \text{sen } 3\theta \leq 0 \\ -\frac{K_1 K_2 \cos 3\theta}{(1 - K_2^2 \sin^2 3\theta)^{1/2}} \text{sen} \left[\pi/3 - 1/3 \arccos(K_2 \text{sen} 3\theta) \right] & \text{se } \text{sen} 3\theta \geq 0 \end{cases} \quad (4.2.1.2.1.5)$$

Operando, tem-se

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[\lambda + [B \lambda I_1 + (4 A + \lambda^2) \sqrt{J_2}] / DEN \right] - \frac{1}{2} \text{sen} 3\theta \left[1 + (B I_1 + \lambda \sqrt{J_2}) / DEN \right] \text{FAT} \quad (4.2.1.2.1.6)$$

onde

$$FAT = \begin{cases} -\frac{K_1 K_2}{(1 - K_2^2 \sin^2 3\theta)^{1/2}} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{3} \arccos(-K_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right] & ; \text{ se } \operatorname{sen} 3\theta \geq 0 \\ -\frac{K_1 K_2}{(1 - K_2^2 \sin^2 3\theta)^{1/2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(K_2 \operatorname{sen} 3\theta) \right] & ; \text{ se } \operatorname{sen} 3\theta < 0 \end{cases}$$

(4.2.1.2.1.7)

$$C_a = -\sqrt{3} / (2 \sqrt{J_2}^3 \cos 3\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{4J_2} \left[1 + (B I_1 + \lambda \sqrt{J_2}) / DEN \right] FAT \quad (4.2.1.2.1.8)$$

Calculando-se as derivadas segundas de F, determinam-se os coeficientes da matriz [H]. Assim

$$C_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial I_1^2} = \frac{2 A B^2 J_2}{DEN^3} \quad (4.2.1.2.1.9)$$

$$C_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial I_1 \partial \sqrt{J_2}} - \frac{\operatorname{tag} 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial^2 F}{\partial I_1 \partial \theta} \quad (4.2.1.2.1.10)$$

onde

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_1 \partial \sqrt{J_2}} = \frac{2 A B^2 I_1 \sqrt{J_2}}{DEN^3} \quad (4.2.1.2.1.11)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_1 \partial \theta} = \frac{2 A B (\sqrt{J_2}^3)}{DEN^3} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \quad (4.2.1.2.1.12)$$

$$C_{13} = -\frac{\sqrt{3}}{2(\cos 3\theta)(\sqrt{J_2}^3)} \frac{\partial^2 F}{\partial I_1 \partial \theta} \quad (4.2.1.2.1.13)$$

$$C_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{\text{tag}^3 3\theta}{J_2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{2\text{tag} 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial^2 F}{\partial \sqrt{J_2} \partial \theta} + \left(1 + \frac{3}{\cos^2 3\theta}\right) \frac{\text{tag} 3\theta}{J_2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (4.2.1.2.1.14)$$

onde

$$\frac{\partial^2 F}{(\partial \sqrt{J_2})} = \frac{4 A B^2 I_1}{\text{DEN}^3} \quad (4.2.1.2.1.15)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \sqrt{J_2} \partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \left\{ 1 + \frac{1}{\text{DEN}^3} \left[3B^2 I_1^2 \sqrt{J_2} \lambda + 3B \lambda^2 I_1 J_2 + B^3 I_1^3 + (4A + \lambda^2) \lambda J_2^{3/2} \right] \right\}$$

(4.2.1.2.1.16)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)^2 \frac{2 A J_2^2 \sqrt{J_2}}{\text{DEN}^3} + \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left(1 + (C B I_1 + \lambda \sqrt{J_2}) / \text{DEN} \right) \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2}$$

(4.2.1.2.1.17)

sendo

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3K_1 K_2 (1 - K_2^2 \text{sen} 3\theta) \text{sen} 3\theta}{\text{DIV}^{3/2}} \text{sen} \left[\frac{1}{3} \arccos (-K_2 \text{sen} 3\theta) \right] - \\ - \frac{K_1 K_2 \cos^2 3\theta}{\text{DIV}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos (-K_2 \text{sen} 3\theta) \right] ; \text{ se } \text{sen} 3\theta \leq 0 \\ \\ \frac{3K_1 K_2 (1 - K_2^2 \text{sen} 3\theta) \text{sen} 3\theta}{\text{DIV}^{3/2}} \text{sen} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos (K_2 \text{sen} 3\theta) \right] - \\ - \frac{K_1 K_2 \cos^2 3\theta}{\text{DIV}} \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos (K_2 \text{sen} 3\theta) \right] ; \text{ se } \text{sen} 3\theta \leq 0 \end{array} \right.$$

(4.2.1.2.1.18)

onde

$$\text{DIV} = 1 - K_2^2 \text{sen}^2 3\theta \quad (4.2.1.2.1.19)$$

$$C_{23} = - \frac{\sqrt{3}}{2 J_2^{3/2} \cos 3\theta} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \sqrt{J_2} \partial \theta} - \frac{\text{tag} 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{3}{\sqrt{J_2} \cos^2 3\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right] \quad (4.2.1.2.1.20)$$

$$C_{33} = \frac{3}{4 J_2^3 \cos^2 3\theta} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + 3 \text{tag} 3\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right] \quad (4.2.1.2.1.21)$$

4.2.1.2.2 - Componentes do vetor de fluxo plástico para o critério proposto por Hinton e Owen

Como no caso anterior, calculando σ_0 em (4.2.1.1.2.1) tem-se

$$F = I_1 \alpha / 2 + (\alpha^2 I_1^2 / 4 + 3 \beta J_2)^{1/2} = \sigma_c \quad (4.2.1.2.2.1)$$

Derivando-se e definindo-se que

$$\text{DEN} = (\alpha^2 I_1^2 / 4 + 3 \beta J_2)^{1/2} \quad (4.2.1.2.2.2)$$

obtem-se

$$C_1 = \partial F / \partial I_1 = \alpha / 2 + \alpha^2 I_1 / (4 \text{DEN}) \quad (4.2.1.2.2.3)$$

$$C_2 = \partial F / \partial \sqrt{J_2} - (\text{tag} 3\theta / \sqrt{J_2}) (\partial F / \partial \theta) = (3 \beta \sqrt{J_2}) / \text{DEN} \quad (4.2.1.2.2.4)$$

$$C_3 = - [\sqrt{3} / (2 \sqrt{J_2}^3 \cos 3\theta)] (\partial F / \partial \theta) = 0 \quad (4.2.1.2.2.5)$$

Calculando as derivadas segundas de F, determinam-se os coeficientes da matriz [H]. Estes coeficientes são os seguintes

$$C_{11} = 3 \beta \alpha^2 J_2 / (4 \text{DEN}^3) \quad (4.2.1.2.2.6)$$

$$C_{12} = -3 \beta \alpha^2 I_1 \sqrt{J_2} / (4 \text{DEN}^3) \quad (4.2.1.2.2.7)$$

$$C_{22} = 3 \beta \alpha^2 I_1^2 / (4 \text{ DEN}^3) \quad (4.2.1.2.2.8)$$

$$C_{13} = C_{23} = C_{33} = 0 \quad (4.2.1.2.2.9)$$

4.2.1.3 - Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das subsequentes superfícies de plastificação (superfície de carga), durante a deformação plástica.

Esta regra dá a relação entre a superfície de carga $F(\sigma, k)$ (por meio da tensão efetiva) e a deformação plástica acumulada (por meio da deformação plástica efetiva). Os conceitos de tensão efetiva e deformação plástica efetiva são uma extrapolação do ensaio uniaxial, para a situação multiaxial.

A relação entre a tensão efetiva e a deformação plástica efetiva é extrapolada a partir de um diagrama tensão-deformação uniaxial. Neste trabalho, adotou-se para este diagrama a "Parábola de Madrid", proposta por CERVERA & HINTON [20], que é dada pela relação

$$\sigma = E_0 \varepsilon - E_0 / (2 \varepsilon_0) \varepsilon^2 \quad (4.2.1.3.1)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade inicial do concreto;

ε é a deformação total;

ε_0 é a deformação total correspondente a tensão máxima f_c .

Substituindo a componente de deformação elástica $\varepsilon_e = \sigma / E_0$ em (4.3.3.1), obtém-se

$$\sigma = - E_0 \varepsilon_p + (2 E_0 \varepsilon_0 \varepsilon_p)^{1/2} ; \quad \alpha_1 f_c < \sigma \leq f_c \quad (4.2.1.3.2)$$

onde ε_p é a componente de deformação plástica.

Tomando-se valores de $\alpha_1 = 0,3$ e $\varepsilon_0 = 2f_c / E_0$, obtém-se uma boa aproximação com relação a resultados experimentais de KUPFER & GERSTLE [46], como mostra a FIGURA (4.2.1.3.1).

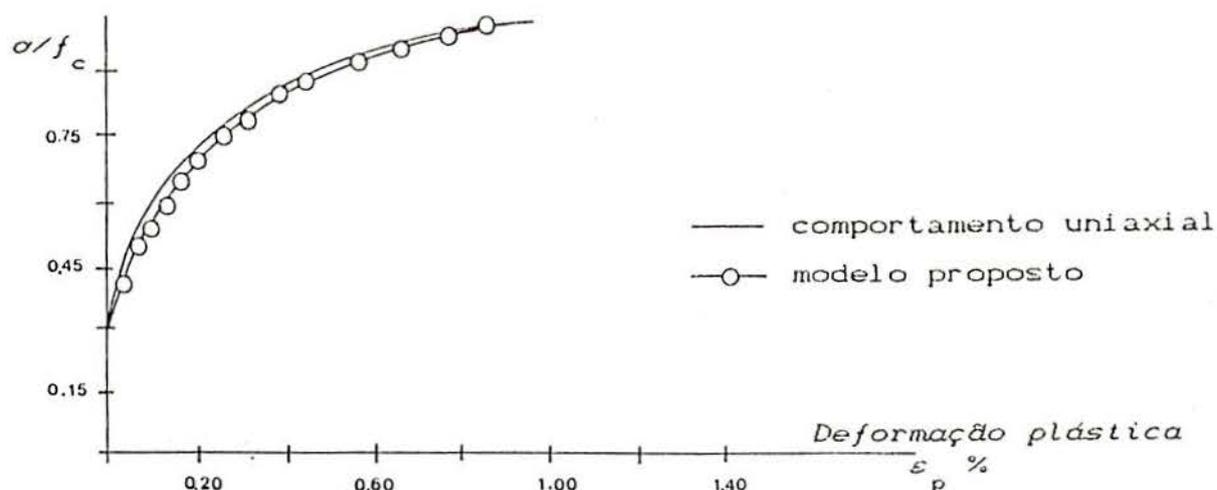


FIGURA 4.2.1.3.1 - Regra de endurecimento

Usando a deformação plástica efetiva atual na expressão (4.2.1.3.2), com o nível de tensão efetiva $\sigma = \sigma_0$, define-se a posição da superfície de carga.

4.2.1.4 - Critério de esmagamento

O modelo elastoplástico com endurecimento, descrito até agora, define o aumento de deformação inelástica do concreto, quando submetido a tensões de compressão.

A deformação inelástica cresce continuamente até que ocorra o esmagamento. Deve-se definir uma superfície de ruptura no espaço de deformações, de maneira que este tipo de ruptura possa ser determinado. Uma forma simples de fazer-se isto, na falta de dados experimentais disponíveis da capacidade de deformação última do concreto submetido a carregamentos multiaxiais, é supor que a superfície de esmagamento no espaço de deformações é dada pela máxima deformação equivalente, extrapolada de ensaios uniaxiais.

A seguinte superfície de esmagamento, usada na referência [21], é adotada no presente trabalho

$$3 J'_2 = \epsilon_u^2 \quad (4.2.1.4.1)$$

onde J'_2 é o segundo invariante do tensor desviador de

deformações e ϵ_u o valor da deformação total última, obtida de ensaios uniaxiais.

Quando o concreto alcança a superfície de esmagamento, admite-se que anulam-se todas as tensões no concreto e desaparece toda a rigidez.

4.2.2 - Modelo para o concreto fissurado

Provavelmente, o fato mais marcante para o comportamento material do concreto é a sua baixa resistência à tração frente à sua resistência à compressão. Este fato tem por consequência o aparecimento de fissuras já para tensões muito baixas. A fissuração do concreto é significativa para a análise da maioria das estruturas de concreto armado, pois introduz um acentuado comportamento não-linear.

Devido à natureza localizada das fissuras, modelar corretamente a fissuração é uma tarefa difícil, visto que são introduzidas descontinuidades no campo de deslocamentos.

Geralmente, os modelos para o concreto fissurado concentram-se nas perdas da capacidade de carga causadas pelas fissuras. No contexto dos elementos finitos [64], basicamente dois procedimentos são utilizados para representar a fissuração:

- (a) um modelo de fissuras discretas;
- (b) um modelo de fissuras distribuídas.

O modelo de fissuras discretas representa cada fissura individualmente como uma descontinuidade real na malha de elementos finitos. Esta aproximação foi primeiramente usada por NGO e SCORDELIS [53] para analisar uma viga de concreto armado, simplesmente apoiada. Neste estudo, as fissuras eram modeladas por separação de nós, que inicialmente ocupavam a mesma posição no espaço.

Uma restrição óbvia deste modelo é que as fissuras deveriam se formar ao longo da borda dos elementos. Por esta razão a resposta é fortemente dependente da malha. De

qualquer maneira, quando se forma uma fissura, a topologia da malha muda e os procedimentos computacionais consomem mais tempo.

Mais tarde, a aproximação de fissuras discretas foi desenvolvida [45], usando métodos mais adequados, introduzindo-se elementos de fronteira conforme a propagação das fissuras. Este procedimento diminui a dependência dos resultados da malha adotada para o modelo. Contudo é necessária uma redefinição da malha e os novos elementos introduzidos fazem a análise ficar muito mais extensa. Estas dificuldades resultaram em uma limitada aceitação deste procedimento, em aplicações estruturais gerais. Entretanto o método mostrou-se apropriado para problemas que envolvem somente umas poucas fissuras dominantes.

Já o modelo das fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade real da malha. Pelo contrário, supõe-se que o concreto fissurado mantém-se contínuo e as propriedades do material são modificadas de maneira a considerar-se o dano devido à fissuração.

O concreto é inicialmente isotrópico, porém a fissuração induz-lhe anisotropia. Depois de fissurado, admite-se que o concreto torna-se ortotrópico, com os eixos principais materiais orientados conforme as direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformações e tensões. O módulo de elasticidade longitudinal reduz-se na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal ao plano da fissura é também reduzido. A aproximação das fissuras distribuídas é computacionalmente atrativa, já que a topologia da malha não é mudada na análise e somente é necessário atualizar a relação tensão-deformação quando ocorre a fissuração.

A aproximação de fissuras distribuídas é usada na maioria das aplicações da Engenharia Estrutural. Esta aproximação foi usada por BAZANT & OH [9], CAMPOS FILHO [17], CERVENKA [19], De BORST [33], MARTINS [48], entre outros.

Entretanto, alguma preocupação surge na constatação da dificuldade do modelo em representar mecanismos de ruptura com poucas fissuras discretas dominantes. Ainda que, para estes casos, o modelo de fissura discreta seja mais adequado, usando a aproximação distribuída, com malhas finas de elementos de baixa ordem, é possível representar satisfatoriamente os mecanismos que levam à ruptura.

A FIGURA 4.2.2.1 mostra os dois modelos alternativos descritos para modelar as fissuras para uma direção de fissuração não conhecida "a priori".

Sem refinamento na malha

Com malha adaptativa

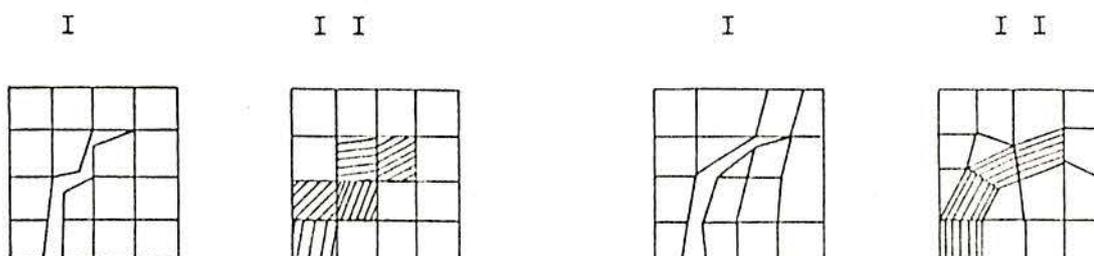


FIGURA 4.2.2.1 - Modelos alternativos para modelar a fissuração
 I) Aproximação de fissuras discretas
 II) Aproximação de fissuras distribuídas

Um modelo de fissuras distribuídas será adotado neste trabalho. A seguir faz-se a descrição deste modelo, abrangendo os seguintes itens:

- (a) um critério de fissuração;
- (b) uma regra para a consideração da colaboração do concreto entre fissuras (tension stiffening);
- (c) um modelo para a transferência de tensões de corte.

4.2.2.1 - Critério de fissuração

A resistência à tração do concreto pode ser obtida a partir de ensaios em laboratório. Na presença de armadura, a previsão do aparecimento da primeira fissura e da sua direção

apresenta uma maior dificuldade. A maioria das análises utiliza critérios simples para prever a fratura em tração do concreto. Correntemente, é usado, para este fim, o critério da máxima tensão de tração ou da máxima deformação de tração.

No presente trabalho, empregam-se dois modelos diferentes para descrever o comportamento do concreto em tração, conforme se trabalhe com o critério de plastificação de OTTOSEN [55] ou de HINTON & OWEN [42]. Isto torna-se necessário, já que o primeiro critério ajusta-se ao comportamento do concreto tanto em tração como em compressão, mas o último critério só trata do comportamento do concreto em compressão.

No modelo de Ottosen, o concreto tracionado é considerado como um material elástico linear até que seja alcançada a superfície de ruptura. Neste instante, se a maior tensão principal de tração for pelo menos igual a metade da resistência uniaxial à tração do concreto f_t , forma-se uma fissura num plano normal à direção desta tensão principal [27].

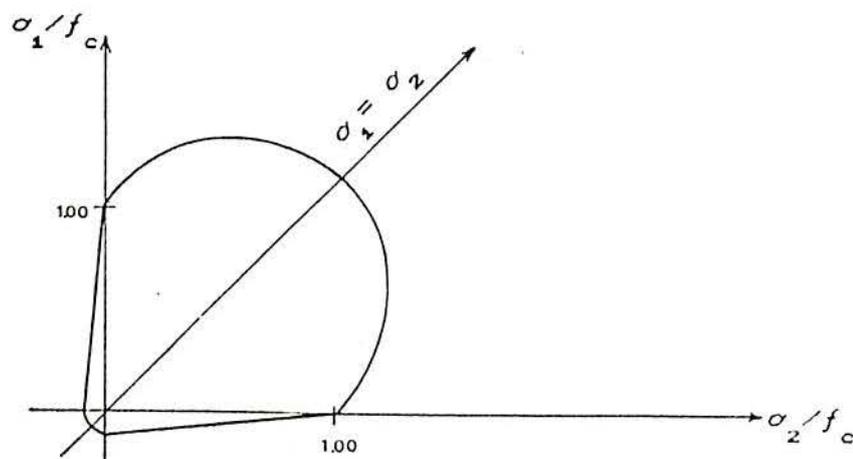


FIGURA 4.2.2.1.1- Modelo de Ottosen

No modelo de Hinton e Owen, o concreto em tração é tomado como um material elástico linear e utiliza-se o critério da máxima tensão de tração. Para um ponto de integração, previamente não fissurado, é avaliada a tensão principal e sua direção. Se a máxima tensão principal supera um valor limite, forma-se uma fissura em um plano ortogonal à dita tensão.

Os valores limites necessários para definir o começo da fissuração são:

(i) zona de tração biaxial:

$$\sigma_i = f_t \quad \forall i=1,2 \quad (4.2.2.1.1)$$

pois existe evidências experimentais que mostram que a resistência a tração biaxial do concreto é quase independente da relação entre as componentes de tensão;

(ii) zona de tração-compressão:

$$\sigma_i = f_t (1 + \sigma_j / f_t) \quad \forall i,j=1,2 \text{ com } i \neq j \quad (4.2.2.1.2)$$

onde esta expressão incorpora o fato de que a compressão em uma direção favorece a microfissuração na direção ortogonal, reduzindo sua capacidade em tração.

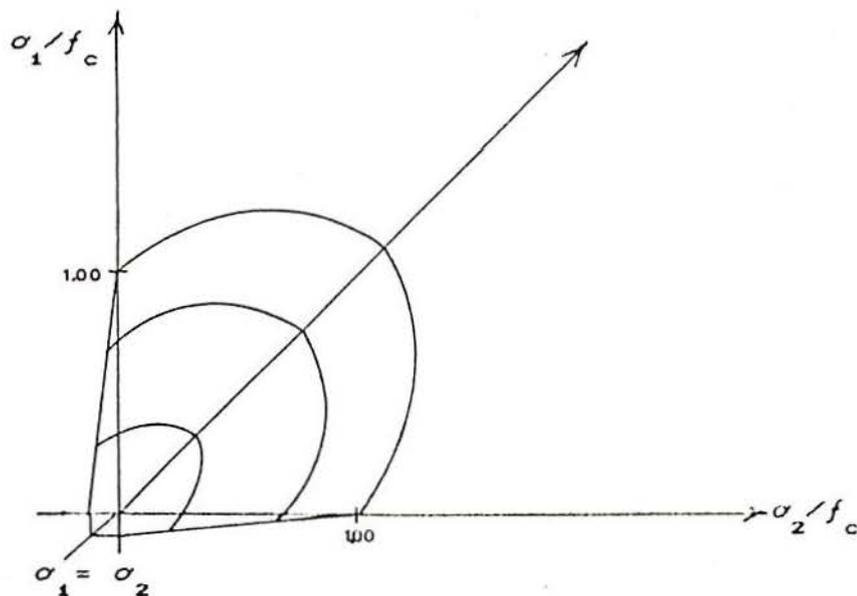


FIGURA 4.2.2.1.2 - Modelo de Hinton e Owen

Depois disto, admite-se que em ambos os modelos o comportamento do concreto deixa de ser isotrópico; torna-se ortotrópico e os eixos materiais locais coincidem com as direções das tensões principais. É necessário observar que a direção da fissura fica fixa a partir daí. Este procedimento é conhecido como o método da fissura fixa.

Permite-se que um máximo de dois conjuntos de

fissuras possam se formar em cada ponto de integração. Por simplicidade, supõe-se que a direção das fissuras são ortogonais.

Para cargas posteriores, podem ocorrer fissuras secundárias em um ponto de integração que já fissurou em uma direção. Há três variantes disponíveis para a determinação do segundo conjunto de fissuras:

- (a) Os eixos principais materiais podem ser rotacionados até coincidir com a direção da tensão principal atual (ou deformação). Este procedimento é conhecido como o modelo da fissura rotacionada. Na bibliografia [41], informa-se que este método permite que se obtenha resultados com um boa aproximação a resultados experimentais.
- (b) Os eixos materiais são fixados nas direções correspondentes às direções das tensões principais, que ocorreram as fissuras primárias, independentemente da possível rotação das tensões.
- (c) Mantendo a direção do primeiro conjunto de fissuras fixo, realiza-se uma busca para determinar a tensão máxima no plano paralelo à fissura existente. Para isto, calculam-se as tensões normais e de corte atuantes sob o plano considerado. Se a tensão máxima superar um valor limite, forma-se um novo conjunto de fissuras perpendicular ao anterior e os eixos materiais locais são fixados. Neste trabalho esta é a opção usada.

4.2.2.2- Consideração da colaboração do concreto entre fissuras

Os primeiros estudos de análise numérica de estruturas de concreto armado admitiam que o concreto é um material elástico e frágil em tração. Quando a fissura ocorre a tensão normal à direção da fissura é imediatamente reduzida a zero. Após, foi descoberto que este procedimento introduzia grandes dificuldades na convergência e, o que é mais importante, os resultados são fortemente dependentes do tamanho

dos elementos finitos usados na análise.

Tem-se, ainda, que devido as tensões de aderência entre o concreto e o aço, o concreto fissurado suporta entre fissuras certa porcentagem da tensão de tração normal ao plano fissurado. O concreto, aderido à armadura, contribui ativamente na rigidez total da estrutura. Este fenômeno é conhecido como "efeito da rigidez à tração" (tension stiffening effect). Pode ser incorporado ao modelo computacional de duas formas indiretas:

- (a) sob a suposição que as perdas de resistência à tração no concreto ocorrem gradualmente depois da fissuração;
- (b) modificando a curva tensão-deformação do aço.

A primeira opção é equivalente a considerar o concreto, como um material com amolecimento em tração, e foi muito usada na análise computacional de estruturas de concreto armado.

Contudo, ficam sem solução dois problemas fundamentais. O primeiro é que este não é um modo objetivo de medir a quantidade de tensão enrijecedora que será incluída no modelo. É fácil escolher de uma curva tensão-rigidez que seja adequada a dados experimentais, mas é muito difícil fazer a previsão "a priori". Em segundo lugar, o resultado se justifica em termos de um vínculo de interação com a armadura de aço, não podendo ser aplicado para concreto simples, ou, para o concreto afastado de uma certa distância da armadura.

Recentemente, grande quantidade de pesquisas experimentais orientaram-se ao estudo do comportamento pós-pico do concreto. Modelos de mecânica da fratura foram aplicados ao estudo do concreto simples.

O conceito principal, aceito pela mecânica da fratura, no desenvolvimento destes modelos, é a hipótese de que a taxa de energia de fratura liberada, G_f , é uma propriedade material, anterior a curva tensão-deformação local. A implementação do conceito " $G_f = \text{const.}$ " conduz a uma lei de amolecimento local, dependente do comprimento característico l_c , função da malha de elementos finitos. Como resultado, o

conceito de energia de fratura, conduz a uma forma não local da relação de amolecimento equivalente, a qual é fundamentalmente diferente das formas constitutivas locais de "strain-softening" em plasticidade e mecânica do dano contínuo.

Para a definição de uma curva, para o modelo com efeito de "strain-softening", devem-se considerar dois aspectos: a forma da curva adotada e o valor dos parâmetros necessários para a definição. Distintas formas dos ramos descendentes da curva tensão-deformação são usadas por diferentes autores.

Na maioria dos casos, é usada uma linha reta ou uma curva bilinear. A forma bilinear foi recomendada por PETERSSON [60], no contexto da mecânica da fratura, com base em ensaios experimentais. Curva não-linear é usada por CERVERA & HINTON [20, 21].

As hipóteses usadas para selecionar os parâmetros, que definem a curva, são mais importantes do que a forma da curva de amolecimento eleita. Com isto é fácil de aceitar que a curva de amolecimento deve estar relacionada com a energia de fratura do concreto.

Sob a suposição de que a tensão σ , transmitida através da fissura, é uma função de sua abertura da fissura w , a energia de fratura é definida como

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw. \quad (4.2.2.2.1)$$

onde G_f representa a energia necessária para propagar uma fissura de tração de área unitária. Neste trabalho, calcula-se G_f conforme a fórmula proposta por o Código Modelo do CEB-1990 [26], onde

$$G_f = a (f_{ck}^{0,7}) \quad (4.2.2.2.2)$$

sendo:

f_{ck} [N/mm²] a resistência característica do concreto à compressão
a um parâmetro dependente do diâmetro máximo do agregado, dado pela tabela

d'_{max} [mm]	a
8	4
16	6
32	12

e G_f [$N\ m/m^2$] a energia de fratura do concreto.

O procedimento da fissuração distribuída não representa fissuras individuais. Desta forma, a abertura de fissura w deve ser distribuída, ao longo de um certo comprimento, na forma de uma deformação de fissura equivalente, ϵ_c . Esta deformação está relacionada ao quociente da abertura de fissura física pelo seu comprimento característico, l_c . Obtém-se esta relação considerando um volume de controle V contendo uma fissura com área S (FIGURA 4.2.2.2.1).

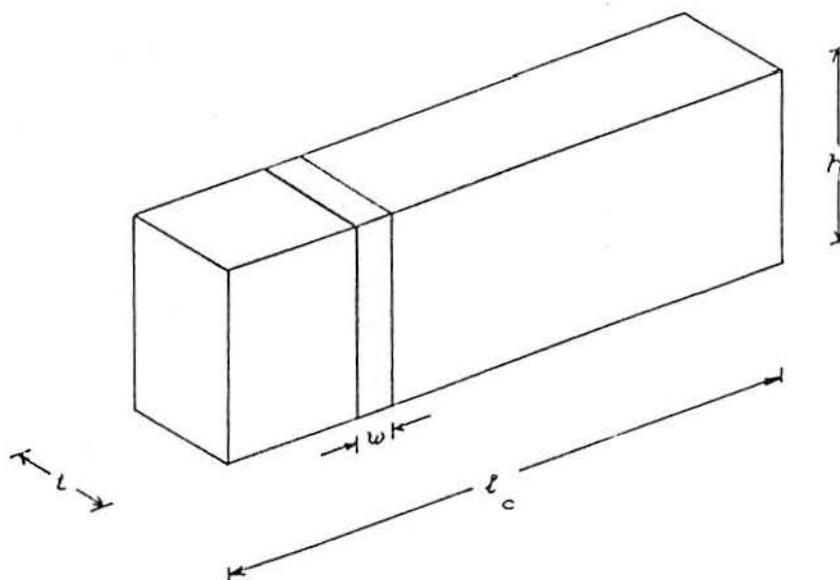


FIGURA 4.2.2.2.1 - Ilustração do comprimento característico para um volume de controle prismático.

Admite-se que, uma vez formada a fissura, toda deformação inelástica, sob o volume de controle, ocorre na fissura e o resto do volume mantém-se elástico.

A taxa de energia dissipada na fissura é dada por

$$\pi_S = \int_S \sigma w dS \quad (4.2.2.2.3)$$

Pela hipótese de que o volume de controle fica submetido ao mesmo estado de tensões que a fissura, mas afetado pela deformação equivalente ε_c , a taxa de dissipação de energia no volume é

$$\dot{\pi}_V = \int_V \sigma \dot{\varepsilon}_c dV \quad (4.2.2.2.4)$$

Supõe-se que a tensão, taxas de deformação e de abertura de fissura são constantes no volume a considerar. E, então, as equações da taxa de energia dissipada na fissura (4.2.2.2.3) e no volume de controle (4.2.2.2.4) dão a relação entre a taxa de abertura de fissura e a taxa de deformação de fissura fictícia

$$\dot{w} S = \dot{\varepsilon}_c V \rightarrow dw = (V/S) d\varepsilon_c = \ell_c d\varepsilon_c \quad (4.2.2.2.5)$$

Esta relação define o comprimento característico como o quociente entre o volume de controle e a superfície da fissura

$$\ell_c = V / S \quad (4.2.2.2.6)$$

Aqui, é usada uma função exponencial para simular o efeito de amolecimento, de modo que

$$\sigma = E_0 \varepsilon_0 (\exp(-(\varepsilon - \varepsilon_0) / \alpha)) \quad (4.2.2.2.7)$$

onde E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal; ε é a deformação na fissura; α é o parâmetro de amolecimento e $\varepsilon_0 = f_t / E_0$ é a deformação de tração nominal na zona fissurada. A curva adotada é mostrada na FIGURA 4.2.2.2.2.

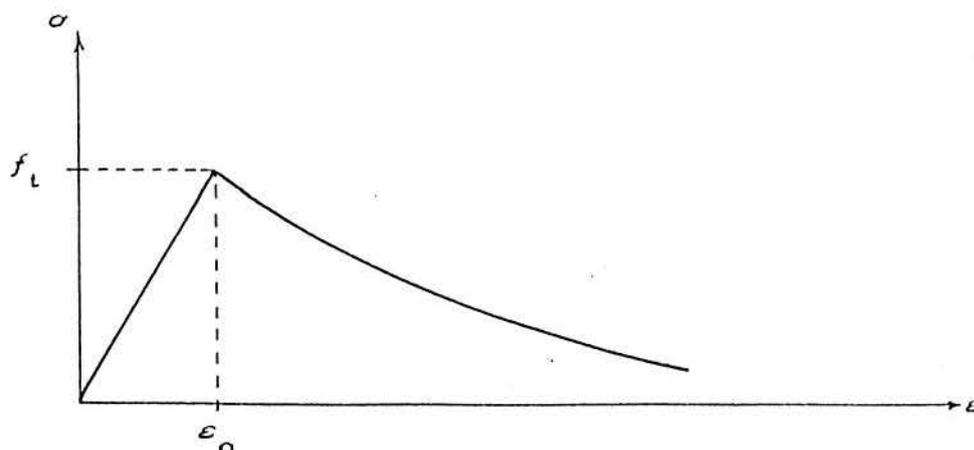


FIGURA 4.2.2.2.2 - Curva tensão-deformação adotada

O parâmetro de amolecimento α fica determinado pelo cálculo da integral da equação (4.2.2.2.1) e pela introdução da relação entre a abertura de fissura w e a deformação de fissura fictícia ε_c . Isto conduz a

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma l_c d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_0} \sigma l_c d\varepsilon + \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \sigma l_c d\varepsilon \quad (4.2.2.2.8)$$

Sustituindo (4.2.2.2.7), na última parcela da equação (4.2.2.2.8), obtém-se

$$G_f = l_c E_0 \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon d\varepsilon + l_c E_0 \varepsilon_0 \int_{\varepsilon_0}^{\infty} e^{-(\varepsilon-\varepsilon_0)/\alpha} d\varepsilon \quad (4.2.2.2.9)$$

Calculando a primeira integral da equação (4.2.2.2.9) e fazendo a troca de variáveis $x = -(\varepsilon-\varepsilon_0)/\alpha$ na segunda integral, tem-se

$$G_f = l_c E_0 \varepsilon_0^2 / 2 - \alpha l_c E_0 \varepsilon_0 \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_0^z e^x dx \rightarrow$$

$$\rightarrow G_f = l_c E_0 \varepsilon_0^2 / 2 + \alpha l_c E_0 \varepsilon_0 \quad (4.2.2.2.10)$$

Isolando α na equação (4.2.2.2.10), obtém-se

$$\alpha = (G_f - E_0 \varepsilon_0^2 l_c / 2) / E_0 \varepsilon_0 l_c > 0 \quad (4.2.2.2.11)$$

No cálculo por elementos finitos, o volume de controle, correspondente à fissura, é o volume associado com o ponto de integração em um dado elemento. No presente trabalho, o comprimento característico é determinado, para cada ponto de integração, por $l_c = dV^{1/3}$, onde dV é o volume de concreto representado pelo ponto de integração. Deve-se observar que esta definição não leva em conta a direcionalidade da fissuração ou a distorção do elemento, mas pode ser usado como uma aproximação de primeira ordem do comprimento de controle real.

É importante observar que este procedimento de cálculo do ramo descendente da curva tensão-deformação é aplicável somente ao concreto simples. O clássico efeito de tensão enrijecedora devido à presença da armadura não foi

levado em conta. Contudo, a vantagem desta aproximação encontra-se em que a objetividade da malha para modelar a fratura localizada é inquestionável. O efeito da armadura pode ser incluído admitindo-se uma maior energia de fratura para concreto armado que para concreto simples.

A redistribuição de tensões devida à fissuração em outros pontos de integração, ou cargas posteriores, pode produzir que algumas das fissuras previamente abertas, fechem-se parcial ou totalmente. Esta possibilidade é considerada no presente modelo. Se a deformação atual ϵ é pequena comparada com a deformação ϵ_{ref} , armazenada como a máxima deformação de tração alcançada através da fissura antes considerada, a tensão normal à fissura, σ , é calculada como $\sigma = (\sigma_{ref} / \epsilon_{ref}) \epsilon$, onde σ_{ref} é a tensão interpolada correspondente à deformação ϵ_{ref} . A trajetória desta "descarga" secante é mostrada na FIGURA 4.2.2.2.3.

A reabertura da fissura segue a mesma trajetória até que ϵ_{ref} é excedida. Então tensão é interpolada desde (4.2.2.2.7).

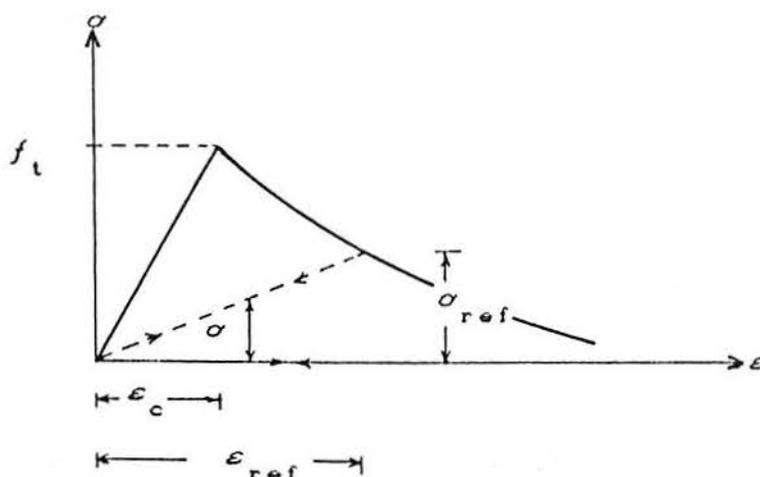


FIGURA 4.2.2.2.3 - Curva de deformação com amolecimento com descarga e recarga secante

4.2.2.3 - Transferência de tensões de corte através da fissura

As experiências mostram que no concreto uma considerável quantidade da tensão de corte pode ser transferida através da superfície rugosa da fissura. Em concreto simples, o principal mecanismo de transferência de corte é o "engrenamento dos agregados" e as principais variáveis envolvidas são o diâmetro e a granulometria dos agregados.

No concreto armado, o efeito de pino da armadura ("dowell effect") desempenha também um papel significativo. As principais variáveis, envolvidas neste fenômeno, são a taxa de armadura, o diâmetro das barras de aço e o ângulo entre a fissura e as barras. Ambos mecanismos são controlados pela abertura da fissura. A capacidade de transferência de corte é reduzida com o aumento da abertura de fissuras.

O mecanismo antes mencionado, não pode ser diretamente incluído no modelo de fissuras distribuídas. Uma aproximação simplificada é geralmente empregada para levar em conta a capacidade de transferência de corte no concreto fissurado. O processo consiste em atribuir ao módulo de elasticidade transversal, correspondente ao plano fissurado, um valor reduzido, G_c , definido como

$$G_c = \beta G_o \quad (4.2.2.3.1)$$

onde G_o é o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado e β é um fator de redução compreendido entre 0 e 1.

Um valor constante para o fator de redução foi usado em várias análises. Contudo, é mais fácil, relacionar o valor de β com a deformação de tração, normal ao plano da fissura, uma medida distribuída da abertura da fissura. No presente trabalho, usa-se a seguinte expressão

$$\beta = 1 - (\epsilon_t / 0,005)^{k_1} \quad (4.2.2.3.2)$$

onde ϵ_t é a deformação de tração fictícia normal ao plano da fissura e k_1 é um parâmetro no intervalo 0,3 até 1,0 [19].

A Figura 4.2.2.3.1 mostra a variação de β com ϵ_t para

diferentes valores de κ_1 , conforme CERVENKA [19].

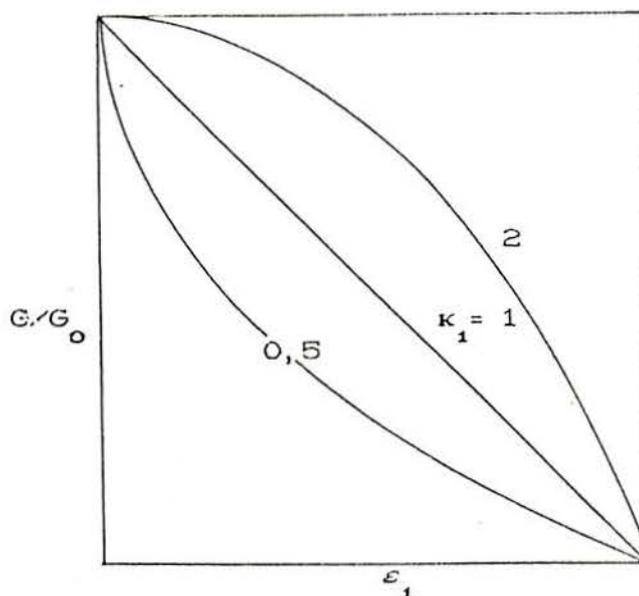


FIGURA 4.2.2.3.1 - Variação do módulo de corte com a deformação de tração através da fissura.

4.2.2.4 - Estudo da convergência

O teste de convergência formulado em 2.7 é controlado pela taxa de deformação viscoplástica efetiva $\dot{\varepsilon}_{vp}$. Este critério não é aplicável para o concreto fissurado, pois, neste caso pode não alcançar um estado estável e ter-se, contudo $\dot{\varepsilon}_{vp} = 0$. Portanto, é necessário formular um novo teste. No presente trabalho optou-se por controlar as forças residuais ψ^{n+1} conforme

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k (\psi_i^{n+1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^k (P_i^{n+1})^2}} \cdot 100 \leq \text{TOLER} \quad (4.2.2.4.1)$$

onde k é o número de pontos de integração; P^{n+1} o vetor de forças nodais equivalentes no instante t_{n+1} e TOLER a tolerância admitida.

4.3 - Modelo constitutivo para o aço

Conforme já foi mencionado, para estabelecer o modelo do concreto armado, é suficiente conhecer o comportamento uniaxial do aço.

No modelo, o aço é idealizado como apresentado no diagrama bilinear, da FIGURA 4.3.1.1. Desta forma o aço é tomado como um material elastoplástico. O aço do tipo A é considerado como elastoplástico perfeito e o do tipo B, como elastoplástico com endurecimento.

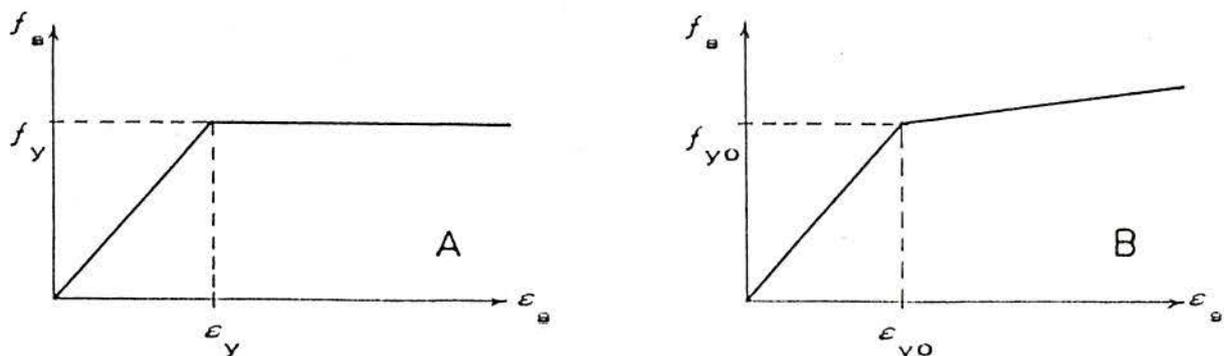


FIGURA 4.3.1.1 -Diagrama adotado para o comportamento do aço

Admite-se que o aço tem um comportamento elastoviscopoplástico definido por

$$\dot{\epsilon}_{vps} = \frac{+}{-} \gamma (|\sigma_s| - f_y) / f_y \quad (4.3.1)$$

onde σ_s é o nível de tensão atual no aço e f_y é a tensão de escoamento do material.

O coeficiente de fluidez γ é tomado como constante.

O valor de H^n , necessário para utilizar o esquema implícito de integração no tempo, é obtido a partir da equação (4.3.1) como

$$H^n = \frac{\partial \epsilon_{vps}}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{+}{-} \gamma \frac{|\sigma_s| - f_y}{f_y} \right) = \frac{\gamma}{f_y} \quad (4.3.2)$$

CAPÍTULO 5
MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO SUBMETIDO A CARGA
DE LONGA DURAÇÃO

5.1 - Fluência e retração do concreto

Se o concreto é submetido a cargas de longa duração, a deformação instantânea é seguida pelo aumento contínuo da deformação com o tempo. Este fenômeno, descoberto em 1907 por Ratt [4], é referido como fluência (creep).

A fluência, então, é uma deformação do concreto no tempo, que ocorre quando está submetido a tensões. Trata-se, portanto, de uma deformação tensional, que manifesta-se mais acentuadamente nos momentos imediatamente posteriores ao aparecimento da tensão, encontrando-se ligada a fenômenos físicos de tipo diverso relacionados com a circulação de água na massa do concreto e com a dissipação para o exterior da mesma (variando, deste modo, de forma apreciável em função das condições de drenagem). Por isto, em sua magnitude e desenvolvimento no tempo influem fundamentalmente o grau de umidade ambiente, o valor da tensão e sua variação no tempo e a idade do concreto t_0 de início do processo. Influem, também a temperatura ambiente, a composição do concreto, o tipo de peça e, sendo um fenômeno progressivo, o tempo transcorrido desde a aplicação da tensão. Assim, para tensão constante, aplicada em t_0 , a deformação ϵ_c evolue com uma curva crescente e assintótica da forma apresentada na FIGURA 5.1.1.

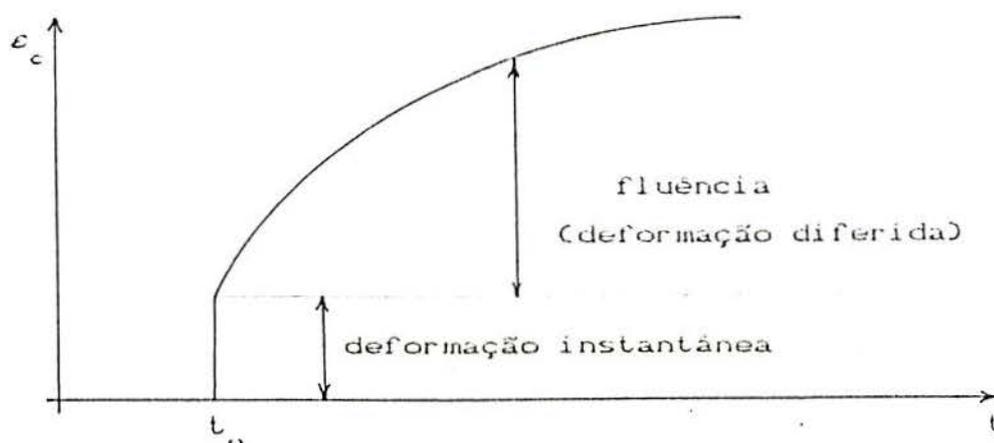


FIGURA 5.1.1 - Evolução da fluência para tensão constante aplicada em t_0 .

A retração (shrinkage) é uma deformação independente da tensão aplicada, de contração da massa do concreto, que manifesta-se em especial no período de endurecimento. Está muito ligada a fenômenos físico-químicos relacionados com a água, que em parte hidrata os componentes do cimento e, em parte, fica livre dentro da massa. Em sua magnitude e desenvolvimento, influem, fundamentalmente, o grau de umidade ambiente, a composição do concreto, o tipo (forma e tamanho) da peça, a temperatura do concreto, e, sendo um fenômeno progressivo, o tempo transcorrido, conforme uma curva crescente e assintótica, como mostra a FIGURA 5.1.2.

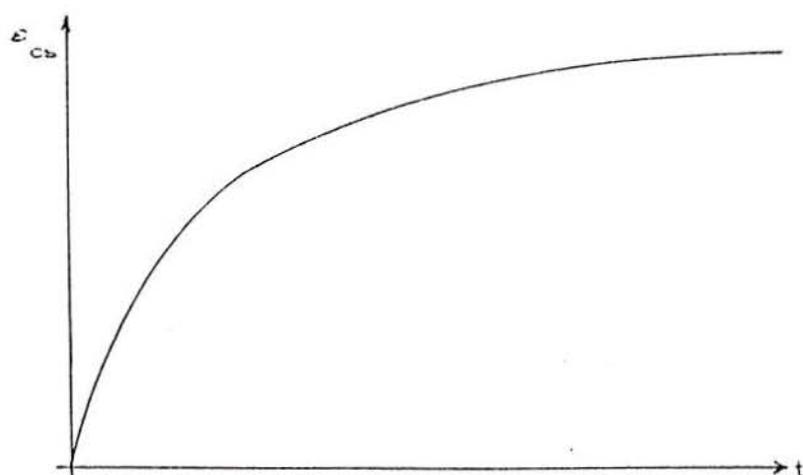


FIGURA 5.1.2 - Curva de retração

A fluência, mais a chamada deformação elástica ou instantânea, produzem um aumento de deformação em um corpo de prova carregado em relação a outro idêntico, sem carga e exposto as mesmas condições ambientais (FIGURAS 5.1.3 e 5.1.4).

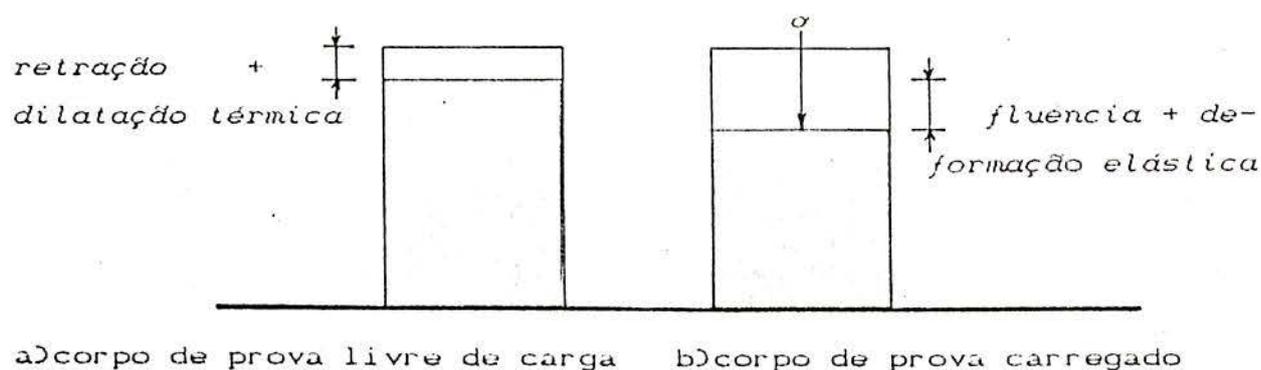


FIGURA 5.1.3 - Corpos de prova com e sem carga

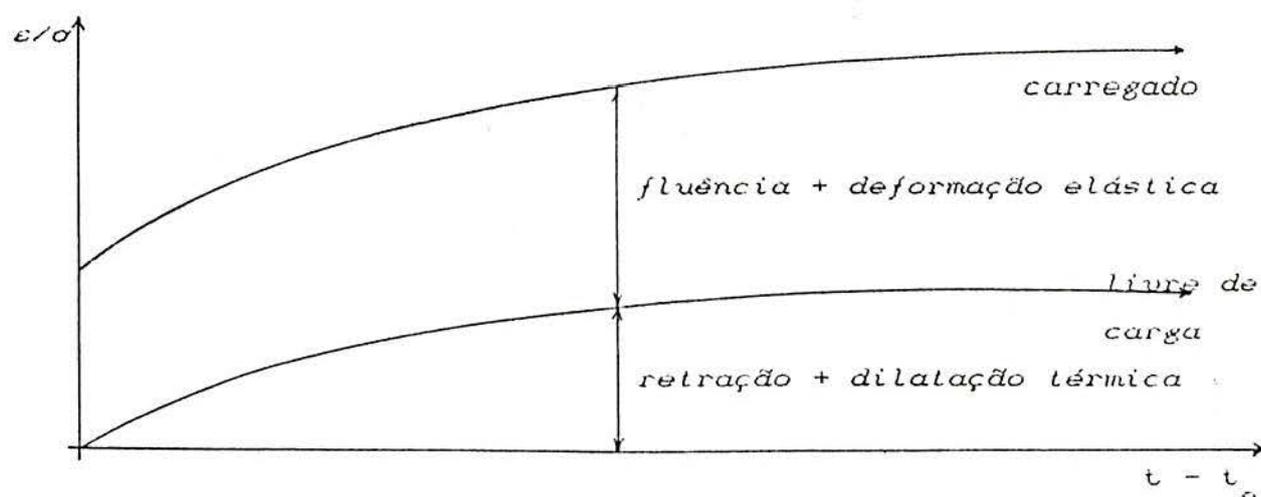


FIGURA 5.1.4 - Evolução das deformações no tempo

5.2 - Inclusão da fluência no modelo

5.2.1 - O modelo reológico

O modelo reológico, para representar o comportamento dependente do tempo do concreto não fissurado, foi adotado como sendo uma cadeia de elementos Maxwell, constituída por uma associação em paralelo de elementos compostos por uma mola em

série com um amortecedor viscoso (FIGURA 5.2.1)

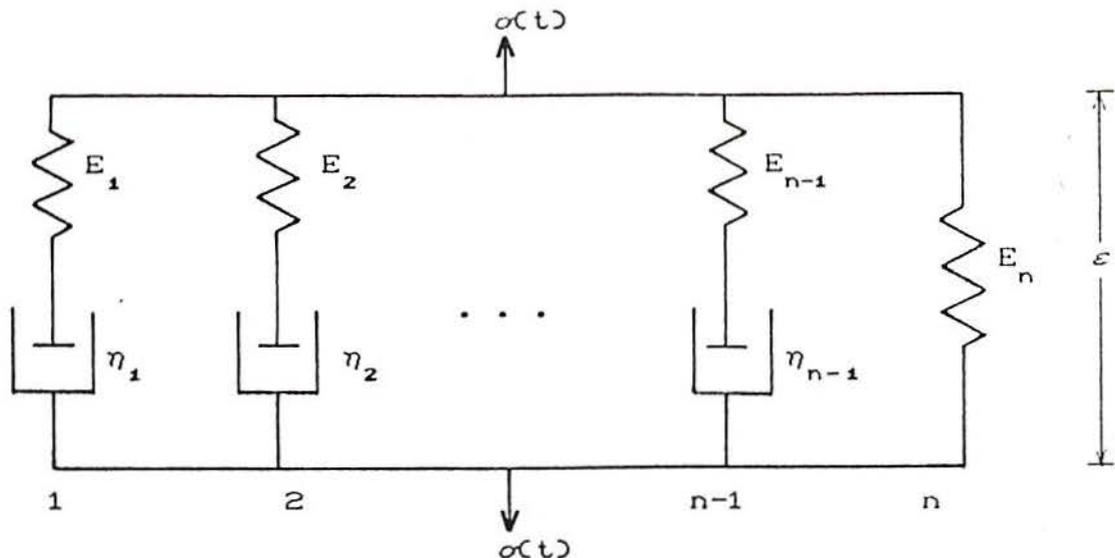


FIGURA 5.2.1 - Modelo de Maxwell

Este modelo pode ser obtido, como um caso particular do modelo elasto-viscoplástico, admitindo-se que todos os elementos de atrito (slider) da cadeia de elementos Maxwell generalizada têm tensão de plastificação nula.

As molas da cadeia têm módulos de elasticidade dependentes da idade t do concreto $E_n(t)$, onde os índices n referem-se à unidade na cadeia ($n = 1, N$). Os amortecedores são caracterizados pelo tempo de relaxação da unidade τ_n (considerado como constante no tempo). O coeficiente de viscosidade é dado por $\eta_n = E_n \tau_n$.

BAZANT, em [6-13] desenvolve um modelo deste tipo para representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto, sob baixos níveis de tensão. Além disto, apresenta o caminho para determinar os parâmetros do modelo a partir de dados de ensaios ou informações de normas para estruturas de concreto.

5.2.2 - Modelos viscoelásticos lineares

Os parâmetros do modelo podem ser determinados a partir de ensaios ou de informações de normas para concreto.

O comportamento viscoelástico de um material, pode ser linear ou não linear. Define-se como linear [31] quando para uma história de tensões $\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t)$, obtém-se uma história de deformações $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$, onde $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$ são as histórias de deformações correspondentes as histórias de tensões $\sigma_1(t)$ e $\sigma_2(t)$.

A hipótese de linearidade, para o concreto, é aceitável somente em baixas tensões, em torno da metade da resistência do concreto. Neste estudo, por trabalhar-se dentro desta faixa de tensões, adotou-se o modelo linear.

Devido a sua diferente formulação matemática, conforme o CEB [28], podem-se subdividir os modelos de previsão da fluência linear em dois grupos: modelos de soma e modelos de produto.

A característica do modelo de produto, também chamado de *fluência com envelhecimento*, é que a expressão da deformação de fluência ε_{cc} (ou função de fluência J) contém o produto de uma função que considera o efeito da idade de aplicação da carga t_0 , e uma função, que descreve o desenvolvimento da fluência no período carregado $(t - t_0)$:

$$\varepsilon_{cc} \sim g_1(t_0) \cdot f_1(t - t_0) \quad (5.2.2.1)$$

onde $g_1(t_0)$ é uma função monotonamente crescente com a idade e $f_1(t - t_0)$ é uma função monotonamente crescente representativa do tempo de desenvolvimento da fluência. Os métodos de previsão dados pelo ACI [1] e do Código Modelo do CEB de 1990 [26] pertencem a este grupo. Este também é o caso do modelo de BAZANT & PANULA [10,11,12], embora este separe a deformação dependente da carga total em componentes aditivas, vinculadas aos diferentes mecanismos de fluência.

A característica dos modelos de soma, também chamados modelos de taxa de fluxo ou de *Dischinger melhorado*, é a

separação da fluência em parcelas reversível (elasticidade diferida) e irreversível

$$\varepsilon_{cc} = g_2(t - t_0) + [f_2(t) - f_2(t_0)] \quad (5.2.2.2)$$

onde $g_2(t - t_0)$ é uma função monotonamente crescente, que representa a elasticidade diferida e o termo $[f_2(t) - f_2(t_0)]$, também crescente com o tempo t , representa a parte irreversível da deformação de fluência. A formulação deste segundo termo, onde o efeito da idade de carga e o tempo desenvolvido são expressos por uma função única do tempo, revela uma característica adicional do modelo de soma. Este tipo de modelo de previsão de fluência é usado pelos procedimentos da norma DIN 4227 [34] e também pelo Código Modelo do CEB de 1978 [25], embora, neste último, exista uma componente adicional $h(t_0)$ que representava a fluência rápida.

Em todos estes modelos, podem ser introduzidas funções adicionais para considerar o efeito de outros parâmetros que influem sobre a fluência do concreto, tais como a umidade relativa do ar, o tamanho da peça, a composição do concreto, etc.

Como em todos estes modelos, faz-se a hipótese de linearidade de tensões, para determinar a deformação por fluência sob tensões variáveis, pode-se aplicar o princípio da superposição.

A diferença entre os dois tipos de modelos lineares torna-se evidente quando são usados para prever o efeito de tensões variáveis. O modelo do produto dá previsões corretas para tensões constantes. Frequentemente, não dá bons resultados, para histórias de cargas variáveis, particularmente, para diminuição de tensões e para a relaxação de concretos carregados com pouca idade.

Os modelos de soma não têm frequentemente boas previsões para tensões constantes, pelo acoplamento dos efeitos da idade de carga e do desenvolvimento da fluência no tempo na expressão da fluência irreversível. Estes modelos são geralmente mais apropriados para a previsão da fluência para tensões variáveis. De qualquer forma, os defeitos nas

previsões dos modelos de fluência linear resultam principalmente do fato de que a fluência do concreto é na realidade um processo não-linear que requer um modelo constitutivo não linear.

5.2.3 - Determinação dos parâmetros do modelo

Neste trabalho, a determinação dos parâmetros do modelo é feita como sugere BAZANT [5,13] e apresentado por FAIRBAIRN [35]. A seguir, descreve-se este procedimento.

Primeiramente, fixa-se o número N de unidades, que compõem a cadeia de elementos Maxwell, e os tempos de relaxação τ_n de cada unidade, de acordo com a faixa de tempo que se deseja cobrir após a aplicação da carga.

Cada unidade, com tempo de relaxação τ_n , pode ser considerada responsável pelo intervalo de tempo compreendido entre $0,3 \tau_n$ e $3,3 \tau_n$. Isto significa que, por exemplo, um modelo composto por quatro unidades com tempos de relaxação de 3, 30, 300, e 3000 dias, podem garantir uma resposta precisa para um período entre 1 e 10000 dias (27 anos aproximadamente) depois de aplicada a carga. Uma unidade adicional, com somente uma mola (na prática, toma-se um τ_n muito grande), pode ser conveniente para aumentar a aplicabilidade do modelo.

A função de relaxação, ou seja, a tensão $\sigma(t)$ resultante de uma deformação unitária imposta em $t=t_0$, e mantida constante em $t>t_0$, para o modelo da cadeia de elementos Maxwell, é dada por.

$$R(t, t_0) = \sum_{r=1}^n E_r(t_0) \exp[-(t-t_0)/\tau_r] \quad (5.2.3.1)$$

Esta equação traduz o desenvolvimento da função de relaxação $R(t, t_0)$ em série de Dirichlet.

A determinação dos termos $E_r(t_0)$ é feita a partir de pontos discretos de uma função de relaxação $R(t_i, t_0)$, onde t_i representa os instantes em que a função de relaxação é conhecida.

Estes pontos discretos $\underline{g}(t_i, t_0)$ são obtidos, a partir de funções de fluência $J(t, t_0)$, através da resolução numérica da equação integral de Volterra para uma história de deformações conhecida.

A obtenção da função de relaxação $\underline{g}(t_i, t_0)$, a partir da função de fluência $J(t, t_0)$ é mais usual, pois muitos pesquisadores, desenvolveram expressões analíticas baseadas em ensaios de laboratório.

Os pontos discretos $\underline{g}(t_i, t_0)$ também podem ser obtidos diretamente de ensaios de relaxação.

Uma vez conhecidos os pontos $\underline{g}(t_i, t_0)$, os módulos de elasticidade E_r , para cada idade t_0 , podem ser determinados pelo método dos mínimos quadrados. A aplicação deste método é feita através da minimização da soma dos quadrados dos desvios

$$\psi = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{r=1}^n E_r(t_0) \exp[-(t_i - t_0)/\tau_r] - \underline{g}(t_i, t_0) \right)^2 + \Pi \quad (5.2.3.2)$$

sendo Π um termo residual para melhorar o ajuste da função. Este termo é calculado pela seguinte expressão

$$\Pi = w_1 \sum_{r=1}^{m-1} (E_{r+1} - E_r)^2 + w_2 \sum_{r=1}^{m-2} (E_{r+2} - 2E_{r+1} + E_r)^2 \quad (5.2.3.3)$$

onde w_1 e w_2 são os pesos dos termos residuais e $m=n-1$.

As incógnitas $E_r(t_0)$ são obtidas das funções de minimização

$$\partial\psi / \partial E_r = 0 \quad , \text{ com } r=1, 2, \dots, n. \quad (5.2.3.4)$$

Estas equações formam um sistema de n equações com n incógnitas. A resolução deste sistema conduz a valores positivos de $E_r(t_0)$, pois a inclinação da curva de relaxação é sempre negativa.

Desenvolvendo a equação j do sistema anterior, tem-se

$$\sum_{i=1}^P \left(\sum_{r=1}^n E_r(t_0) \exp[-(t_i - t_0)/\tau_r] - \underline{R}(t_i, t_0) \right) \sum_{j=1}^P \exp[-(t_i - t_0)/\tau_j] = 0 \quad (5.2.3.5)$$

Esta expressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^P \left(\sum_{r=1}^n \exp[(t_0 - t_i)/\tau_r + (t_0 - t_i)/\tau_j] E_r(t_0) \right) = \sum_{i=1}^P \underline{R}(t_i, t_0) \exp[(t_0 - t_i)/\tau_j] \quad (5.2.3.6)$$

Sob forma matricial, o sistema pode ser escrito como

$$[A] \langle E \rangle = \langle B \rangle \quad (5.2.3.7)$$

sendo que os elementos deste sistema são os seguintes

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^P \exp[-[(t_i - t_0)/\tau_j + (t_i - t_0)/\tau_k]] \quad (5.2.3.8)$$

$$B_j = \sum_{i=1}^P \underline{R}(t_i, t_0) \exp[-(t_i - t_0)/\tau_j] \quad (5.2.3.9)$$

$$E_j = E_j(t) \quad (5.2.3.10)$$

Introduzindo-se o termo residual Π nas equações do sistema, os elementos A_{jk} da matriz $[A]$ devem ser somados ao seguinte valor

$$\begin{aligned} \Pi_{jk} = & w_1 \sum_{r=2}^m (E_r - E_{r-1}) (\delta_i^k - \delta_i^{k+1}) + \\ & + w_2 \sum_{r=3}^m (E_r - 2E_{r-1} + E_{r-2}) (\delta_i^k - \delta_i^{k-1} + \delta_i^{k-2}) \end{aligned} \quad (5.2.3.11)$$

sendo $\delta_i^k = 1$ se $i=k$, e $\delta_i^k = 0$ se $i \neq k$.

Desta maneira, resolvendo o sistema anterior, pode-se determinar os valores de $E_r(t_0)$, para os valores de t_0 nos quais são dados os pontos discretos $\underline{R}(t, t_0)$. Os valores de E_r , para qualquer idade t_0 , podem ser interpolados pela equação.

$$\underline{E}_r(t_o) = E_{or} + E_{1r} \log(1+t_o) + E_{2r} \log^2(1+t_o) + E_{3r} \log^3(1+t_o) \quad (5.2.3.12)$$

Os coeficientes E_{ir} podem ser calculados pelo método dos mínimos quadrados, minimizando a soma dos desvios ϕ^* , onde

$$\phi^* = \sum_{k=1}^n [E_r(t_k) - E_r(t_k)]^2 \quad (5.2.3.13)$$

As condições de minimização formam um sistema de equações da forma

$$\partial \phi^* / \partial E_{ir} = 0 \quad (5.2.3.14)$$

sendo $r = 1, \dots, 4$. Este sistema de equações fornecerá, então os coeficientes E_{ir} procurados.

Como resultado, cada função $E_r(t)$ pode ser determinada numericamente, como uma seqüência de valores para certas idades t_o , e a cadeia de elementos Maxwell fica completamente definida.

5.3 - Inclusão da retração no modelo

O efeito da retração, representada pelo vetor de deformação

$$\langle \varepsilon_{ca} \rangle = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ca}(x, y, t) \\ \varepsilon_{ca}(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.3.1)$$

é incluído através de um vetor de carregamento nodal equivalente, vetor este de forças autoequilibrantes.

A transformação das deformações devido à retração em carregamento nodal equivalente, é feita através da expressão

$$\Delta P_{ca}(t + \Delta t) = \int_V [B]^T [\hat{D}] \langle \Delta \varepsilon_{ca} \rangle dV \quad (5.3.2)$$

5.4 - Valores adotados para as deformações por fluência e retração

Na falta de dados experimentais, neste trabalho adotaram-se os modelos de fluência, e retração propostos pelo Código Modelo do CEB - FIP 1990 [28].

5.4.1 - Modelo para a fluência conforme o Código Modelo do CEB-FIP 1990 (MC90)

Segundo o CEB, tem-se que a função de fluência $J(t, t_0)$ que representa a deformação por unidade de tensão vem dada por

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_c} \quad (5.4.1.1)$$

onde

E_c = módulo de elasticidade tangente do concreto na idade de 28 dias que pode ser calculado pela equação (5.4.1.2)

$E_c(t_0)$ = módulo de elasticidade na idade de carga t_0 [em dias], dado pela equação (5.4.1.3)

$\phi(t, t_0)$ = coeficiente de fluência conforme a equação (5.4.1.4).

O módulo de elasticidade tangente E_c é obtido de

$$E_c = 10000 \cdot (f_{cm})^{1/3} \quad \text{em [N/mm}^2] \quad (5.4.1.2)$$

sendo f_{cm} a resistência média à compressão do concreto na idade de 28 dias [N/mm²].

O módulo de elasticidade na idade de carga t_0 [em dias] é dado por

$$E_c(t_0) = e^{\frac{\epsilon}{2} \cdot (1 - \sqrt{28/t_0})} \quad (5.4.1.3)$$

sendo $\epsilon = 0.2$ para concreto de endurecimento rápido ou de alta resistência

$\epsilon = 0.25$ para concreto de endurecimento normal ou rápido

$\epsilon = 0.38$ para concreto de endurecimento lento.

O coeficiente de fluência $\phi(t, t_0)$ é calculado como

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \cdot \beta_c(t-t_0) \quad (5.4.1.4)$$

onde ϕ_0 é o coeficiente de fluência nominal, conforme a equação (5.4.1.5)

β_c é um coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência no tempo, conforme a equação (5.4.1.10)

t é a idade do concreto [em dias] no instante considerado.

O coeficiente de fluência nominal, é calculado a partir de

$$\phi_0 = \phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (5.4.1.5)$$

com

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 + \frac{RH}{100}}{0.1 + \sqrt[3]{h_0}} \quad (5.4.1.6)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (5.4.1.7)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0.1 + t_0^{0,2}} \quad (5.4.1.8)$$

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} \quad (5.4.1.9)$$

onde RH é a umidade relativa do ar em [%], h_0 é a espessura fictícia em [mm], com A_c sendo a área da seção transversal e u o perímetro em contato com a atmosfera.

O desenvolvimento da fluência no tempo é dado por

$$\beta(t-t_0) = \left[\frac{t-t_0}{\beta_H + t - t_0} \right]^{0,3} \quad (5.4.1.10)$$

com $\beta_H = 1,5 [1 + (0,012 RH)^{10}] h_0 + 250 \leq 1500$ dias (5.4.1.11)

No modelo apresentado pelo CEB, os efeitos do tipo de cimento e de variações de temperatura sobre as deformações por fluência são considerados através de correções dos coeficientes e funções definidos acima.

5.4.2 - Modelo para a retração, conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990

A deformação devida a retração pode ser calculada com

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cs0} \beta_s (t - t_s) \quad (5.4.2.1)$$

onde

ε_{cs0} = coeficiente de retração nominal conforme a equação (5.4.2.2)

β_s = coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração no tempo conforme a equação (5.4.2.6)

t = idade do concreto em [dias]

t_s = idade do concreto em [dias] no começo da retração

O coeficiente de retração nominal pode ser obtido de

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s(f_{cm}) \beta_{RH} \quad (5.4.2.2)$$

com

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = [160 + \beta_{sc}(90 - f_{cm})] \cdot 10^{-6} \quad (5.4.2.3)$$

onde

β_{sc} é um coeficiente que depende do tipo de cimento

$$\beta_{sc} = \begin{cases} 4 & \text{para cimento de endurecimento lento} \\ 5 & \text{para cimento de endurecimento normal ou rápido} \\ 8 & \text{para cimento de alta resistência com end. rápido} \end{cases}$$

e

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \cdot \beta_{sRH} & \text{para } 40\% \leq RH < 99\% \\ +0,25 & \text{para } RH \geq 99\% \end{cases} \quad (5.4.2.4)$$

onde

$$\beta_{sRH} = 1 - \left[\frac{RH}{100} \right]^3 \quad (5.4.2.5)$$

Nas equações (5.4.2.3) e (5.4.2.5), f_{cm} é a resistência média à compressão em $[N/mm^2]$ e RH é a umidade relativa do ar média em [%].

O desenvolvimento da retração no tempo é dado por

$$\beta_s(t - t_s) = \left[\frac{t - t_s}{\beta_{SH} + t - t_s} \right]^{0,5} \quad (5.4.2.6)$$

com

$$\beta_{SH} = 0,035 h_o^2 \quad (5.4.2.7)$$

onde o valor de $h_o = 2A_c/u$ (5.4.1.7) está em [mm].

Os efeitos de variações de temperatura sobre as deformações por retração do concreto são, também, considerados através de correções para as expressões acima.

CAPITULO 6

EXEMPLOS

6.1 - Introdução

Neste capítulo, apresentam-se comparações entre os resultados fornecidos pelo programa computacional e os resultados experimentais de vigas de concreto armado, visando ilustrar a validade do modelo para a análise deste tipo de peça estrutural.

6.2 - Exemplo 1

Conforme a expressão (4.2.2.2.2), proposta pelo CEB-90 [26], a energia de fratura G_f é função do tamanho máximo dos agregados. Com o fim de testar a influência da variação de G_f , no modelo proposto, analisa-se uma viga ensaiada por RAMAKRISHNAN e ANANTHANARAYANA [63]. Faz-se G_f variar entre os valores máximos dados pela fórmula (4.2.2.2.2), para o valor de f_c obtido experimentalmente. O comportamento da viga é fortemente influenciado pela fissuração, devido a baixa percentagem de armadura de tração e pela ausência de armadura transversal. O modo de ruptura experimental foi de flexão, mas a posição das fissuras dominantes no colapso sugerem que o corte influenciou sobre o comportamento de ruína.

Vigas similares, no mesmo programa experimental, apresentaram acentuadas fissuras de corte no colapso, embora a fissuração flexional fosse dominante.

Como o comportamento não-linear do concreto em compressão e o seu esmagamento não têm maior importância nesta

análise, esta viga torna-se particularmente interessante para o estudo do efeito de G_f no modelo de fissuração proposto.

Os detalhes da viga de espessura $t=72\text{mm}$ estão dados na FIGURA 6.2.1. Devido à simetria, somente a metade da viga foi analisada. Tomou-se uma discretização de 16 elementos quadráticos, como mostra-se na FIGURA 6.2.2.

Um resumo das propriedades materiais usadas para a viga são dadas a seguir

CONCRETO :	Módulo de deformação inicial	$E_o = 20600$	MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,15$	
	Resistência à Compressão	$f_c = 24,7$	MPa
	Resistência à Tração	$f_t = 3,1$	MPa
	Tensão de Plastificação	$\sigma_o = 7,41$	MPa
	Critério de Plastificação	Hinton & Owen	
AÇO :	Módulo de deformação	$E_s = 207000$	MPa
	Tensão de escoamento	$f_y = 345$	MPa
	Módulo de endurecimento	$H'_s = 3450$	MPa
	Área	$A_s = 71$	mm^2

Diferentes curvas carga-deslocamento, usando valores de G_f iguais a 0,108; 0,64 e 0,28 [N/mm] e um valor de $k_1=0,65$ são, comparadas na FIGURA 6.2.3, com a curva obtida experimentalmente.

Na FIGURA 6.2.4, mostram-se as fissuras apresentadas pelo modelo, para os distintos valores de G_f , para uma carga $P = 80$ kN.

Pode-se observar que a variação de G_f tem um forte efeito sobre a forma da curva carga-deslocamento, o desenvolvimento da fissuração, o início da plastificação no concreto e nas barras de aço e na previsão da carga última.

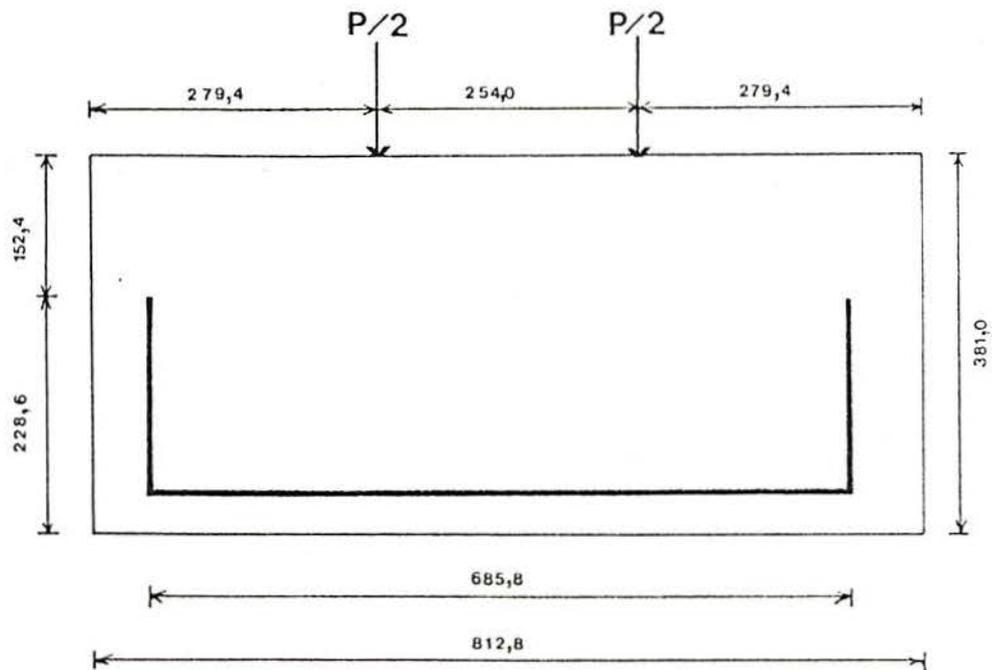


FIGURA 6.2.1 - Detalhe da viga

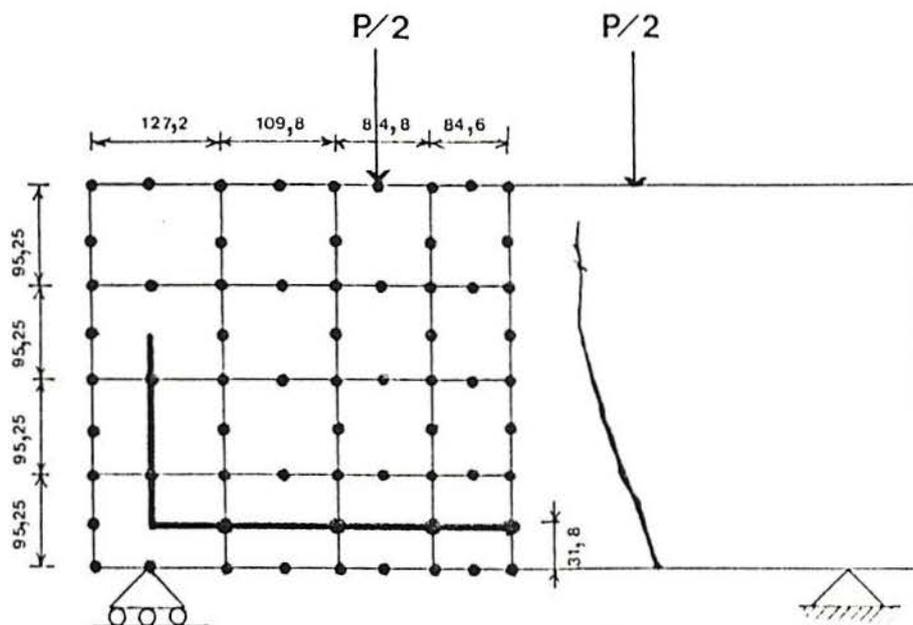


FIGURA 6.2.2 - Malha empregada e fissura experimental

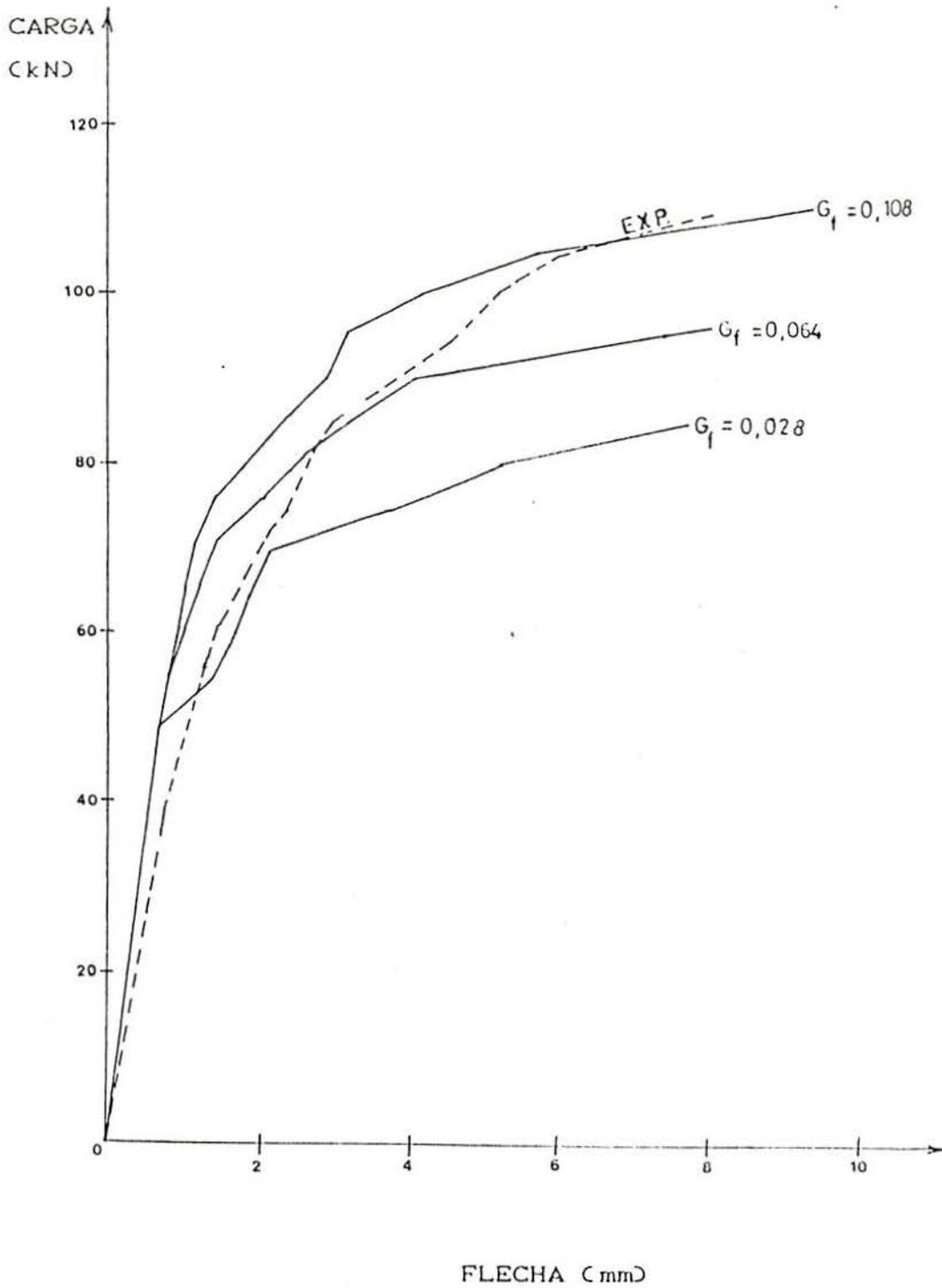


FIGURA 6.2.3 - Flechas instantâneas na seção central da viga em função da carga

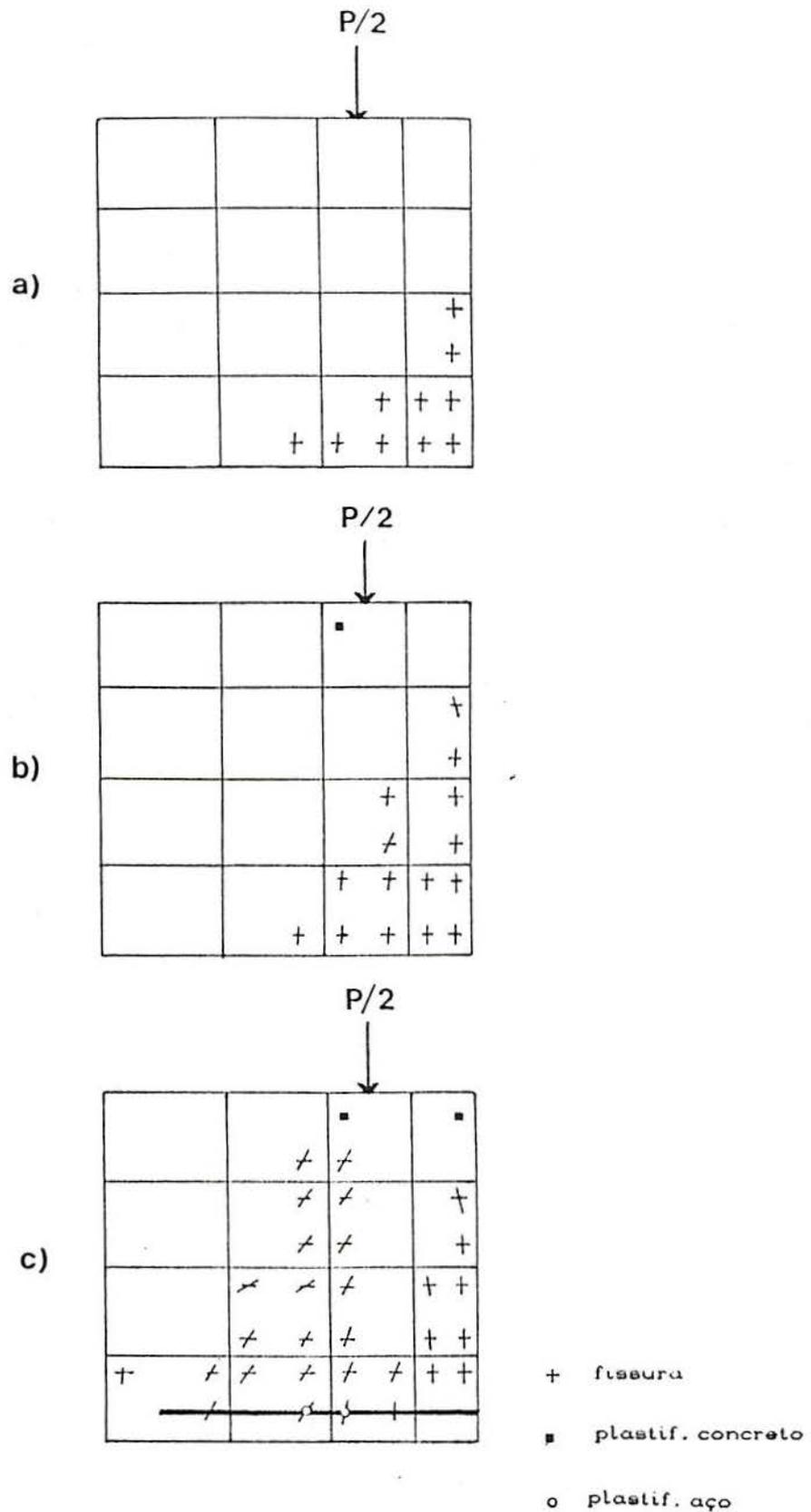


FIGURA 6.2.4 - Fissuras para cargas $P = 80$ kN e valores de G_f
 a) $G_f = 0,108$ N/mm b) $G_f = 0,064$ N/mm c) $G_f = 0,028$ N/mm

6.3 - Exemplo 2

Neste item, apresenta-se uma comparação entre os resultados fornecidos pelo programa computacional e os resultados experimentais da viga de concreto armado ET4 obtidos por LEONHARDT e WALTHER [47].

Na FIGURA 6.3.1, mostra-se o detalhamento da viga. A viga foi submetida a duas cargas concentradas.

A armadura longitudinal consiste, inferiormente, de quatro barras de 20 mm de diâmetro e, superiormente, de duas barras de 8 mm de diâmetro. Todas as barras são de aço de classe B.

Os estribos verticais são de 6 mm de diâmetro, de aço classe A, uniformemente espaçados.

Calcula-se G_f conforme a expressão (4.2.2.2) com um $d_{\max} = 19\text{mm}$, e obtém-se $G_f = 0,05\text{N/mm}$. A seguir estão descritos os parâmetros dos materiais para a análise desta viga.

CONCRETO :	Módulo de deformação inicial	$E_o = 27500$	MPa
	Coeficiente de Poisson	$\nu = 0,2$	
	Resistência à Compressão	$f_c = 24,2$	MPa
	Resistência à Tração	$f_t = 2,33$	MPa
	Tensão de Plastificação	$\sigma_o = 7,26$	MPa
	Energia de Fratura	$G_f = 0,05$	N/mm
	Critério de Plastificação	Hinton & Owen	
		ou Ottosen ($\sigma_o = f_c$)	
AÇO :	Módulo de deformação longitudinal	$E_s = 210000$	MPa
	Tensão de escoamento :		
	barras de 20mm (classe B)	$f_y = 300$	MPa
	barras de 8mm (classe B)	$f_y = 325$	MPa
	barras de 6mm (classe A)	$f_y = 320$	MPa
	Módulo de endurecimento :		
	barras de 20 mm (classe B)	$H'_o = 16127$	MPa
	barras de 8 mm (classe B)	$H'_o = 17917$	MPa
	barras de 6 mm (classe A)	$H'_o = 0$	MPa

Como a viga apresenta simetria de carga e de geometria a discretização foi efetuada somente na sua metade. Utilizou-se a malha de vinte elementos finitos de 8 nós, conforme mostra a FIGURA 6.3.2.

Na FIGURA 6.3.3, mostra-se a evolução das flechas ao longo do carregamento para a viga, segundo os resultados experimentais e os obtidos através do modelo computacional.

Na FIGURA 6.3.4, comparam-se as tensões nos estribos, valores obtidos através do modelo e experimentais para a viga. Os valores analisados são as tensões médias, na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 38 e 71 cm a partir do apoio.

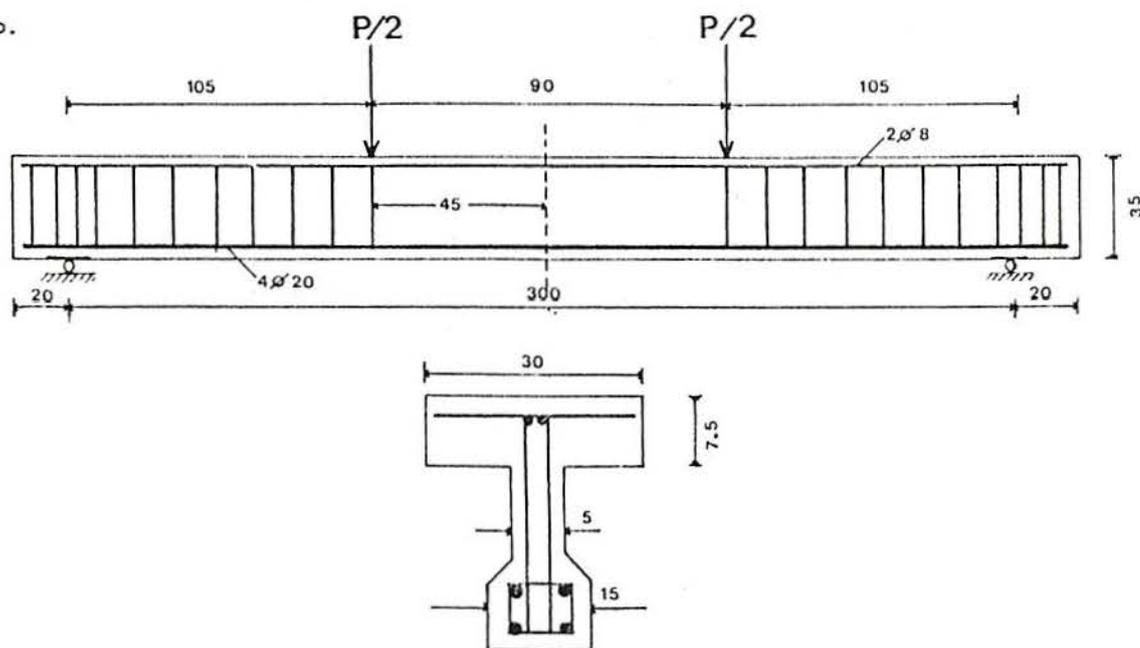


FIGURA 6.3.1 - Detalhamento da viga

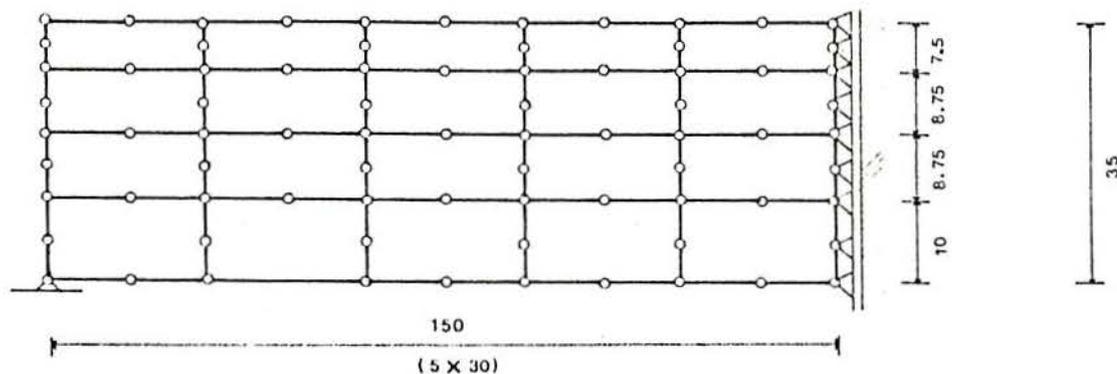


FIGURA 6.3.2 - Discretização adotada para a análise por elementos finitos da viga.

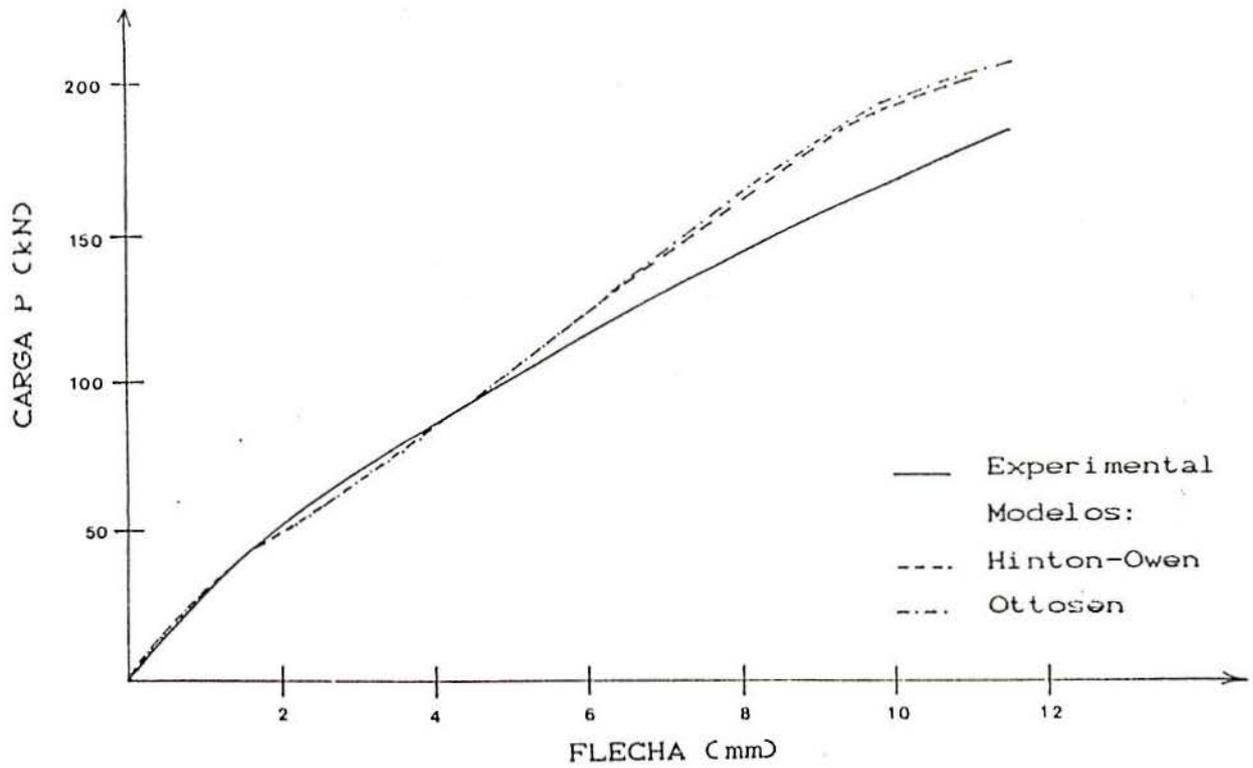


FIGURA 6.3.3 - Comparação entre as flechas obtidas pelo ensaio e pelo modelo computacional para a viga.

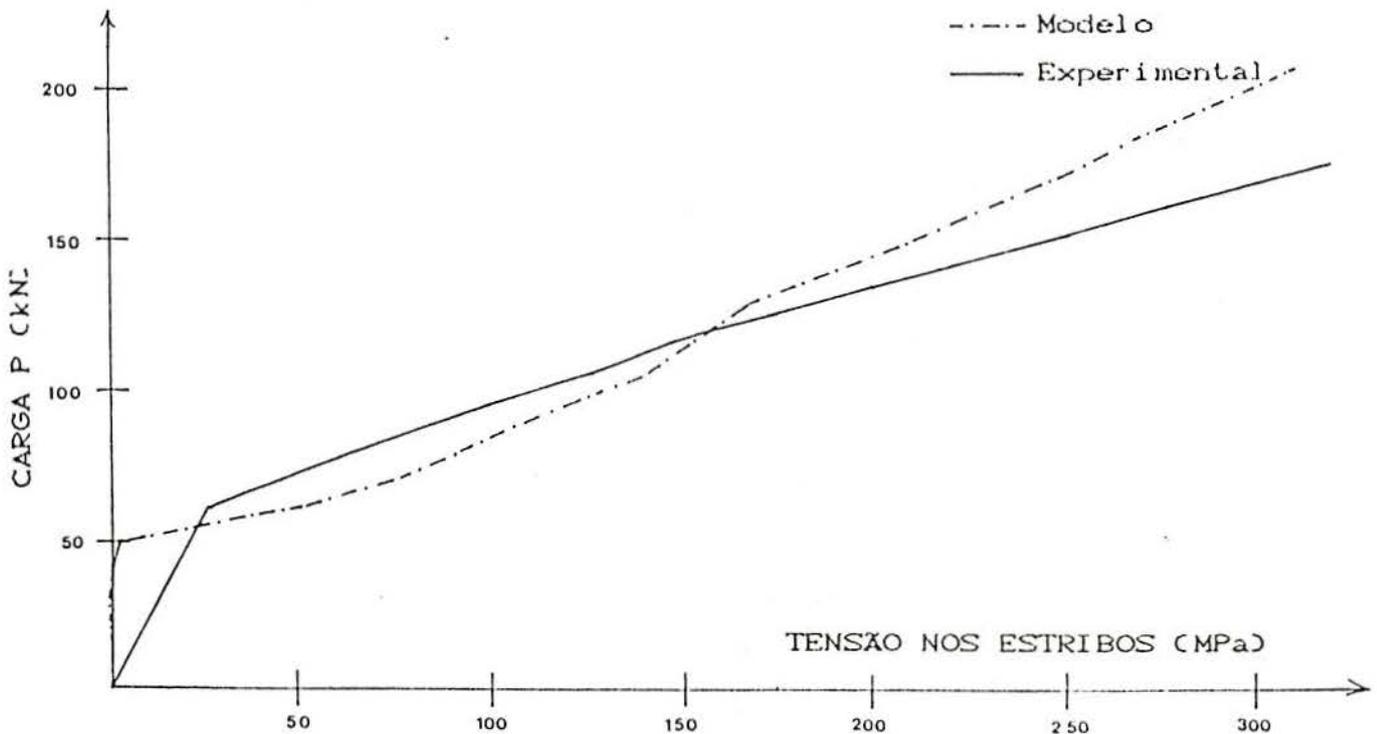


FIGURA 6.3.4 - Comparação das tensões nos estribos obtidas no ensaio e pelo modelo computacional para a viga.

6.4 - Exemplo 3

Para ilustrar a aplicação do modelo, confrontam-se neste item os valores determinados através dele, como os resultados experimentais obtidos por GOBETTI, CAMPOS e CAMPAGNOLO [37] para vigas de concreto armado, submetidas a um carregamento uniformemente distribuído de curta e longa duração.

Comparam-se, aqui, os resultados correspondentes a duas vigas, referenciadas no trabalho original por V7 e V8. As vigas eram simplesmente apoiadas, com um vão de 3,72 m e seção transversal de 7,5 x 20 cm. A armadura longitudinal era composta, inferiormente, por duas barras de 8 mm de diâmetro de aço CA-60B. Adicionalmente, foram colocadas, nas faces das vigas, mais duas barras de 3,4 mm de diâmetro. A armadura transversal consistia de estribos de 3,4 mm de diâmetro, espaçados de 10 cm.

As vigas foram concretadas e ensaiadas simultaneamente. Na data do ensaio (16 dias após a concretagem), cada viga foi submetida a um carregamento uniformemente distribuído de 2,36 kN/m, além do peso próprio, sendo esta carga mantida constante por mais setenta dias.

A resistência cilíndrica à compressão e a resistência à tração do concreto foram medidas na data do ensaio.

Os valores médios da umidade relativa do ar e da temperatura foram considerados como sendo, respectivamente, 75% e 20°C. Os efeitos da retração e da fluência do concreto foram considerados a partir do sétimo dia após a concretagem.

A seguir estão descritos os parâmetros dos materiais adotados para a análise desta viga.

CONCRETO :	Módulo de deformação inicial	$E_o = 26475$ MPa
	Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,2$
	Resistência à Compressão	$f_c = 19,5$ MPa
	Resistência à Tração	$f_t = 2,2$ MPa
	Energia de Fratura	$G_f = 0,05$ N/mm
	Critério de Plastificação	Ottosen

AÇO :	Módulo de deformação longitudinal	$E_o = 210000$	MPa
	Tensão de escoamento :		
	barras de 8 mm	$f_y = 325$	MPa
	barras de 3,4 mm	$f_y = 320$	MPa
	Módulo de endurecimento :		
	barras de 8 mm	$H'_a = 17917$	MPa
	barras de 3,4 mm	$H'_a = 0$	MPa

Deve-se observar, que neste exemplo são feitas duas análises distintas. A primeira estuda o comportamento da viga sob a carga de curta duração. Nesta análise, considera-se um modelo elastoplástico. Na segunda, analisa-se o funcionamento da viga ao longo do tempo, através do modelo viscoelástico. O programa computacional desenvolvido realiza estas duas análises automaticamente a partir do modelo viscoelastoplástico.

As propriedades do concreto, para a análise viscoelástica, foram determinadas a partir das expressões do CEB 1990 [26], usando o programa descrito no item 5.2.3.

Para modelar o comportamento no tempo, usaram-se 5 camadas, como mencionou-se no capítulo 5, e trabalhou-se com um intervalo de tempo constante de 0,5 dias. Considerou-se o coeficiente de Poisson como constante no tempo, como indica Bazant [14], e se diminuiu o valor de 0,2, para o ensaio de curta duração, ao valor 0,17, para o ensaio de longa duração.

A análise computacional foi realizada com o emprego de uma malha de elementos finitos, composta por quinze elementos quadrangulares quadráticos para estado plano de tensão. Esta malha representava, apenas, a metade das vigas, por estas apresentarem simetria.

Os detalhes da viga estão dados na FIGURA 6.4.1 e a discretização adotada mostra-se na FIGURA 6.4.2.

A FIGURA 6.4.3 compara as flechas das vigas, segundo o ensaio e o modelo computacional, para o carregamento instantâneo, bem como a evolução destas flechas com o decorrer do tempo.

A FIGURA 6.4.4 confronta os resultados experimentais e computacionais, para as deformações na armadura tracionada e na

borda comprimida, na seção central das vigas. Estes valores correspondem ao carregamento instantâneo.

A FIGURA 6.4.5 mostra as deformações na seção central da viga, no instante de aplicação de carga e setenta dias após, segundo as medições do ensaio e os resultados da análise computacional. Nesta figura os resultados experimentais são a média dos valores obtidos para as vigas V7 e V8. A figura mostra que tanto pelo procedimento teórico como pelos ensaios, o ponto de incremento nulo das deformações relativas ao longo do tempo situa-se acima do eixo da armadura tracionada, contrariando a hipótese de critérios simplificados, que supõem $\Delta \varepsilon = 0$ ao longo do tempo.

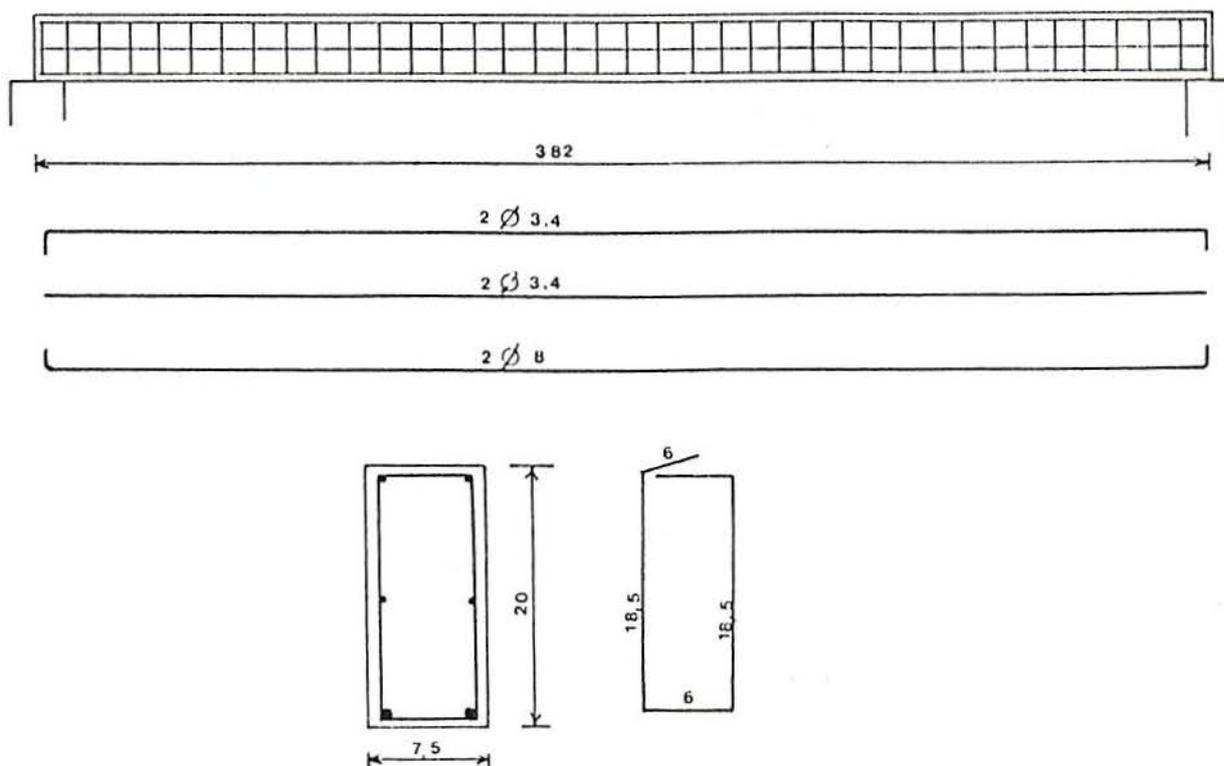


FIGURA 6.4.1 - Detalhamento da viga

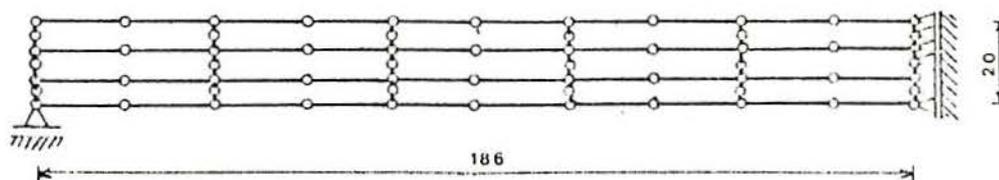
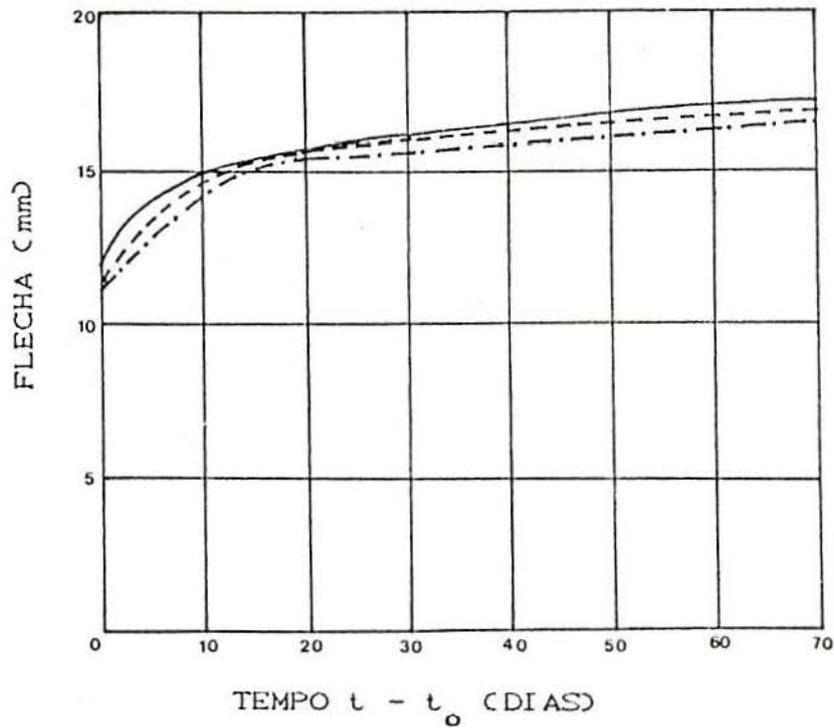
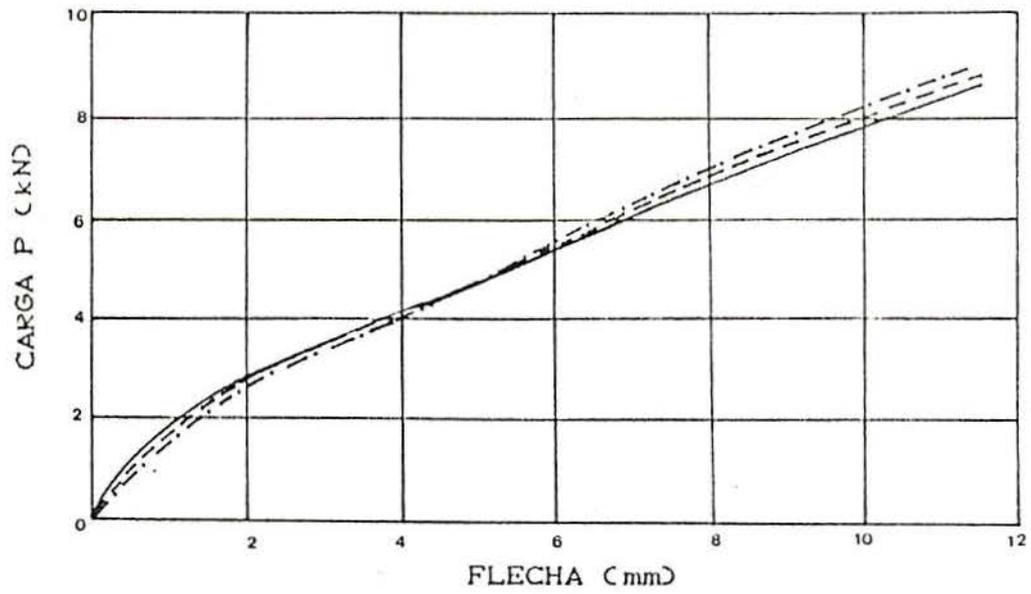
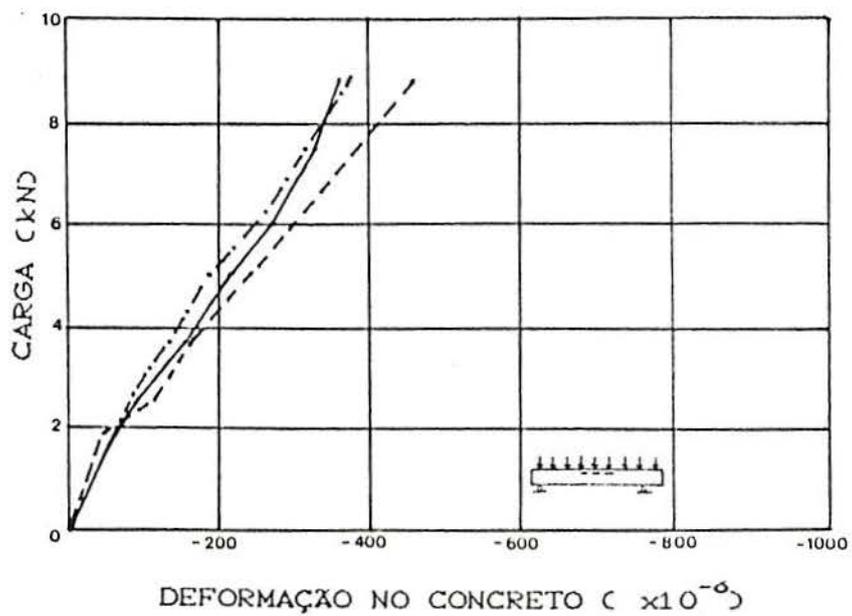
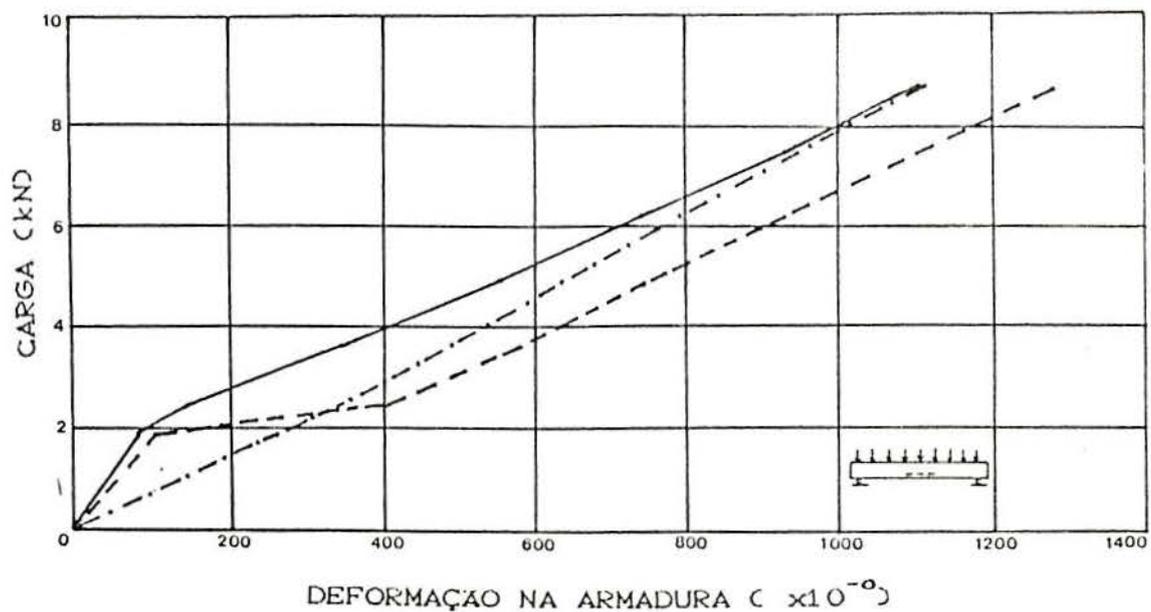


FIGURA 6.4.2 - Discretização adotada para a análise da viga



- - - - Experimental V7
 - · - · - Experimental V8
 ——— Modelo

FIGURA 6.4.3 - Evolução das flechas com o carregamento e ao longo do tempo.



----- Experimental V7
 -.-.-.- Experimental V8
 ——— Modelo

FIGURA 6.4.4 - Deformações instantâneas na seção central das vigas em função das cargas.

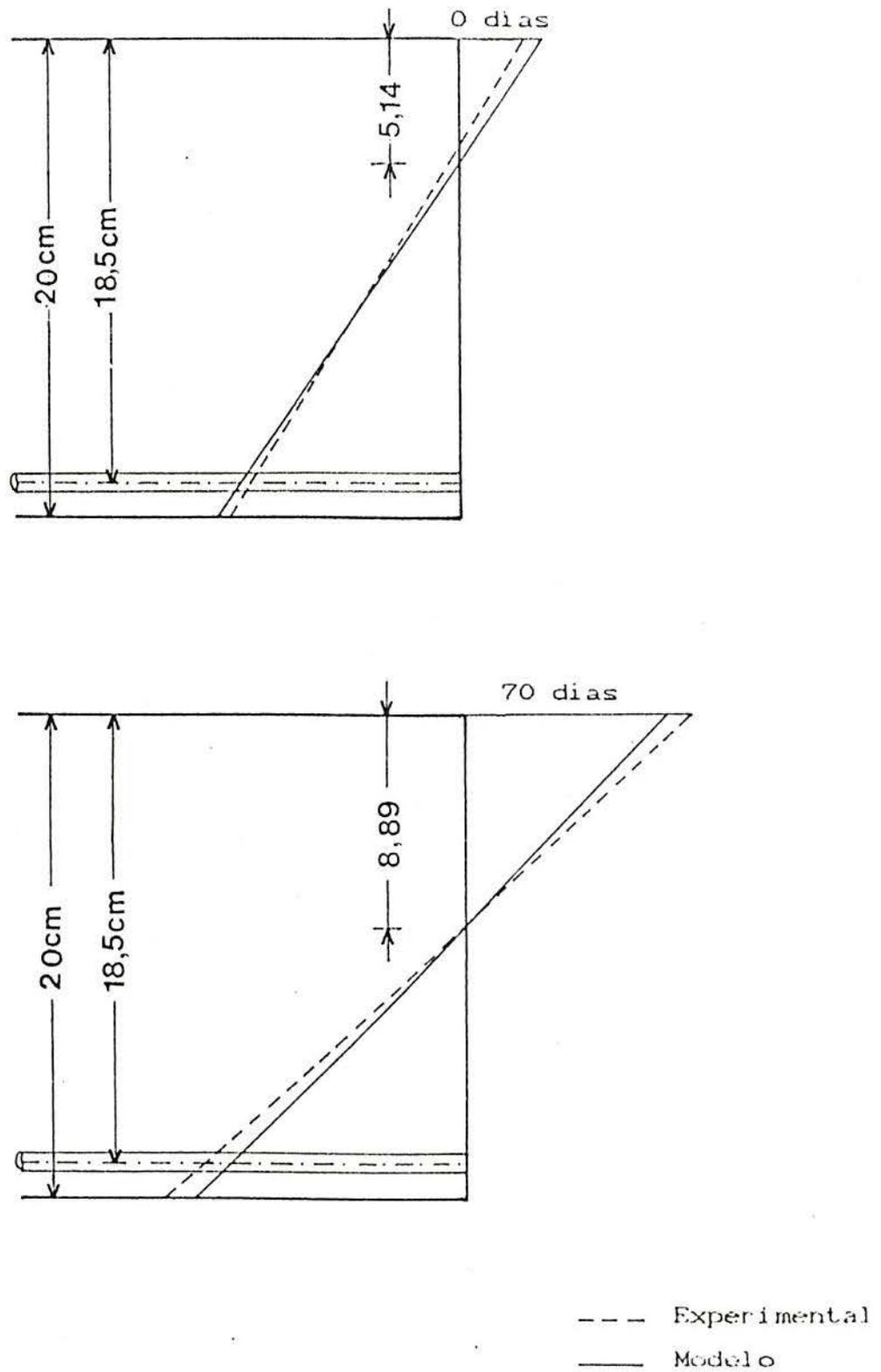


FIGURA 6.4.5 - Deformações na seção central das vigas para o carregamento instantâneo e de longa duração.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho, formula-se um modelo que permite a simulação do comportamento, ao longo do tempo, de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão através do método dos elementos finitos.

De sua formulação podem-se destacar as conclusões seguintes:

Trabalhando com um modelo constitutivo elasto-viscoplástico, que incorpora como casos particulares a elastoplasticidade e a viscoelasticidade, pode-se tratar com uma mesma formulação o comportamento do concreto sob cargas de curta e longa duração. Além disso, com uma calibragem conveniente dos parâmetros, pode-se estender ao estudo à fluência não linear do concreto.

Para cargas de curta duração, o modelo é equivalente ao elastoplástico com endurecimento e, como mostram os exemplos 1 e 2, fornece uma aproximação aceitável quando se faz a comparação com os resultados experimentais.

Para cargas de longa duração, trabalha-se com um modelo viscoelástico com envelhecimento, com a calibragem de seus parâmetros conforme dados experimentais ou formulações dadas por normas. Como mostra o exemplo 3, o modelo obtido alcançou excelente aproximação confrontado aos resultados experimentais analisados.

Para a armadura optou-se por um modelo incorporado, o qual sem a complexidade do modelo discreto, possibilita representar armaduras com localização e direção arbitrárias.

Trabalhou-se com um modelo de fissuras distribuídas, fixas e ortótropas. Como mostra o exemplo 1, o valor da energia de fratura G_f afeta significativamente a variação da curva carga-flecha, a carga de fissuração e a carga de ruptura.

Utilizaram-se dois critérios de plastificação, um proposto por HINTON & OWEN e outro por OTTOSEN, obtendo-se resultados similares, como mostra o exemplo 2.

Como sugestões para trabalhos futuros apresenta-se:

- 1) Analisar o critério de convergência do modelo; em alguns exemplos o número de iterações, antes de atingir a condição de convergência, parece ter sido exagerado.
- 2) Incorporar ao modelo a não-linearidade geométrica.
- 3) Estender o modelo para concreto protendido.
- 4) Empregar plasticidade não-associada.

BIBLIOGRAFIA

1. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 209. Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures. In: ADRAIN PAUW SYMPOSIUM ON DESIGNING FOR CREEP AND SHRINKAGE IN CONCRETE, 1978, Houston, Texas. Papers ... Detroit: ACI, 1982. p.193-300. (ACI. Special Publication, 76)
2. BAHLLIS, J.B., MIRZA, M. SAEED. Nonlinear analysis of planar reinforced concrete structures. Canadian Journal of Civil Engineering, v.14, n.6, p.771-779, Dec. 1987.
3. BATHE, K.J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982. 735p.
4. BAZANT, Z.P. Advanced topics in inelasticity and failure of concrete. Stockholm: CBI, 1979.
5. _____. Input of creep and shrinkage characteristics for a structural analysis program. Materiaux et Constructions, v.15, n.88, p. 283-290, juil./août 1982.
6. _____. Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FUNDAMENTAL RESEARCH ON CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE, 1980, Lausanne Papers ...Chichester: John Wiley, 1982. cap.7, p.163-256.
7. BAZANT, Z.P., ASGHARI, A. Computation of age-dependent relaxation spectra. Cement and Concrete Research, v.4, n.4, p.567-579, July 1974.

8. _____. Constitutive law for nonlinear creep of concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.103, n.1, p.113-124, Feb.1977.
9. BAZANT, Z.P., OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*, v.16, n.93, p.155-177, mai./juin. 1983.
10. BAZANT, Z.P., PANULA, L. Practical prediction of time-dependent deformations of concrete. Part I e II: Shrinkage. *Matériaux et Constructions*, v.11, n.65, p.307-328, sept./oct. 1978.
11. _____. _____. Part III e IV: Drying creep. *Matériaux et Constructions*, v.11, n.66, p.415-434, nov./déc.
12. _____. _____. Part V e VI: Temperature effect on drying creep. *Matériaux et Constructions*, v.12, n.69, p.169-183, mai/jun 1979.
13. BAZANT, Z.P., ROSSOW, E.C., HERRIGMOE, G. Finite element program for creep analysis in concrete structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL MECHANICS IN REACTOR TECHNOLOGY, 6, 1981, Paris. *Transactions ... Amsterdam: North-Holland, 1981. v. H 3/4.*
14. BAZANT, Z.P., WU, S.T. Dirichlet Series Creep Function for Aging Concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.99, n.2, p.367-387, Apr. 1973.
15. BICANIC, N., ZIENKIEWICZ, O.C. Constitutive model for concrete under dynamic loading. *Earthquake engineering and structural dynamics*, v.11, n.5, p. 689-710, sept./oct. 1983.
16. BUYUKOZTURK, O., SHAREEF, S.S. Constitutive modeling of concrete in finite element analysis. *Computers and Structures*, v.21, n.3, p.581-610, 1985.

17. CAMPOS FILHO, A. Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático. São Paulo: USP, 1987, 293 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil).
18. CAROL, I., MURCIA, J. A model for non-linear time-dependent behaviour of concrete in compression based on a Maxwell chain with exponential algorithm. *Materiaux et Constructions*, v.22, pp.176-184, 1989.
19. CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, v.82, n.6, pp.877-82, 1985.
20. CERVERA, M., HINTON, E., HASSAN, O. Non linear analysis of reinforced plate and shell structures using 20-nodes isoparametric brick elements. *Computers and Structures*, v.25, n.6, pp.845-869, 1987.
21. _____. Recent Developments in the nonlinear analysis of reinforced concrete structures using three dimensional finite elements models. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS FOR NONLINEAR PROBLEMS, 1986, Dubrovnik, Yugoslavia. *Proceedings...Swansea: Pineridge Press*, 1986. v.3, pp.323-43.
22. CHANG, I.Y., TANIGUCHI, H., CHEN, W.F. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete panels. *Journal of Structural Engineering*, v.113, n.1, pp.122-140, Jan. 1987.
23. CHEN, W.F. *Plasticity in reinforced concrete*. New York: McGraw-Hill, 1982.
24. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. Application of the finite element method to two-dimensional reinforced concrete structures. Paris, 1983. 89p. (Bulletin d'Information, 159).

25. _____. CEB design manual on structural effects of time-dependent behavior of concrete. Paris, 1984. Bulletin d'Information, 142/142Bis).
26. _____. CEB-FIP model code 1990. Paris, 1990. (Bulletin d'Information, 195/196).
27. _____. Concrete under multiaxial states of stress constitutive equations for practical design. Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 156).
28. _____. Evaluation of the time dependent behavior of concrete. Paris, 1990. 201p. (Bulletin d'Information, 199).
29. _____. Modelling of structural reinforced and prestressed concrete in computer programs. Paris, 1990. 166p. (Bulletin d'Information, 194).
30. CORMEAU, I. Numerical stability in quasistatic elasto-visco-plasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.9, n.1, p.109-127, 1975.
31. CREUS, G.J. Viscoelasticity: basic theory and applications. Berlin: Springer, 1986. 169p.
32. DANTAS, G.V. Análise bidimensional de estruturas de concreto protendido pelo método dos elementos finitos Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 1980. 293p. Dissertação de Mestrado.
33. De BORST, R. Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading - a unified approach. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, v.62, n.1, p.89-110, May 1987.
34. DEUTSCHES INSTITUT FOR NORMUNG. Spannbeton: DIN 4227. Berlin, 1988.

35. FAIRBAIRN, E.M.R., LONGO, H.I., ZHENG, R. Formulação diferencial do problema da relaxação do concreto - estudo teórico experimental. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 24, 1987, Porto Alegre. Anais... Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1987. v.2, p.103-117.
36. FLÜGGE, W. Viscoelasticity. 2.ed.rev. Berlin: Springer, 1975. 194p.
37. GOBETTI, L.C.W., CAMPOS FILHO, A., CAMPAGNOLO, J.L. Análise teórico-experimental das deformações em vigas de concreto armado. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1983. 56p. (Cadearno técnico, 48).
38. GROOTENBOER, H.J., LEIJTEN, S.F.C.H., BLAAUWENDRAAD, J. Numerical models for reinforced concrete structures in plane stress. Heron, v.26, n.1c, 1981. 83p.
39. GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE. Dictionnaire de Rheologie. Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, n.487, p.3-56, 1990.
40. GUPTA, A.K., AKBAR, H. Cracking in reinforced concrete analysis. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.110, n.8, p.1735-1746, Aug. 1984.
41. HINTON, E. Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells. Swansea: Pineridge Press, 1988. 550p.
42. HINTON, E., OWEN, D.R.J. Finite element software for plates and shells. Swansea: Pineridge Press, 1984. 403p.
43. HSIEH, S.S., TING, E.C., CHEN, W.F. Applications of a plastic-fracture model to concrete structures. Computers Structures, v.28, n.3, p.373-393, 1988.
44. _____. A plastic-fracture model to concrete structures.

International Journal of Solids and Structures, v.18, n.3,
p.181-197, Mar. 1982.

45. INGRAFFEA, A.R., SAOUMA, V.E. Fracture mechanics analysis of discrete cracking. IN: COLLOQUIUM ON ADVANCED MECHANICS OF REINFORCED CONCRETE, 1981, Delft. Final report. Zürich: IABSE, 1981. p.393-416.
46. KUPFER, H.B., GERSTLE, K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v.99. n.4, p.853-866, Aug. 1973.
47. LEONHARDT, F., WALTHER, R. Beiträge zur behandlung der schubprobleme im stahlbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau, v.57, n.6, p.141-149, Juni 1962; v.57, n.7, p.161-173, Juli 1962.
48. MARTINS, A.S.F. Estudo do comportamento de estruturas compostas por peças laminares de concreto armado, solicitadas por caargas paralelas e normais ao seu plano médio, através do método dos elementos finitos. Porto Alegre: CPGEC, 1989 131p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)- Escola de Engenharia, UFRGS.
49. MARTINS, R.A.F., BARROS, M.H.F., DINIS, L.M.J.S. Non - associated viscoplasticity- a symmetric algorithm for implicit solutions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS FOR NON-LINEAR PROBLEMS, 1986, Dubrovnik, Yugoslavia. Proceedings... Swansea: Pineridge Press, 1986. v.3, p.130-139.
50. MURCIA, J. Estructuras de hormigón armado y pretensado: Fundamentos para el análisis. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1987. 301 p.
51. NAYAK, G., ZIENKIEWICZ, O.C. Elasto-plastic stress analysis; a generalization for various constitutive relations including strain softening. International

- Journal for Numerical Methods in Engineering, v.5, n.1, p.113-135, Sept./Oct. 1972.
52. NEVILLE, A.M., DILGER, W.H., BROOKS, J.J. Creep of plain and structural concrete. London: Construction Press, 1983. 361p.
53. NGO, D., SCORDELIS, A.C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute, v.64, n.3, p.152-163, Mar. 1967.
54. OLLER, S.H.C. Un modelo de daño continuo para materiales friccionales. Catalunya: Universitat Politècnica de Catalunya, 1988. 471p. Tese de Doctorado.
55. OTTOSEN, N.S. A failure criterion for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.103, n.4, p.527-535, Aug. 1977.
56. OTTOSEN, N.S., DAHLBLOM, O. Smearred crack analysis using a nonlinear fracture model for concrete. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS FOR NON-LINEAR PROBLEMS, 1986, Dubrovnik, Yugoslavia. Proceedings... Swansea: Pineridge Press, 1986. v.3, p.363-376.
57. OLIVER, J., FERNANDEZ ROURE, J.R. Consideraciones sobre los modelos numéricos de distribución para el análisis de la fisuración del hormigón. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v.3/4, p.343-368, 1987.
58. OWEN, D.R.J., HINTON, E. Finite Element in Plasticity: Theory and Practice. Swansea: Pineridge Press, 1980. 549p.
59. PANDE, G.N., OWEN, D.R.J., ZIENKIEWICZ, O.C. Overlay models in time-dependent non-linear material analysis. Computers and Structures, v.7, n.3, p.435-443, 1977.

60. PETERSSON, P.E. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar material . Lund, Sweden: Institute of Technology, Division of Building Materials. (Report TVBM, 1006).
61. PHILLIPS, D.V., AL-MANASEER, A.A. Numerical study of some post-cracking material parameters affecting nonlinear solutions in reinforced concrete deep beams. Canadian Journal of Civil Engineering, v.14, p.655-666, 1987.
62. PINTO, J.D.S. Adaptação do programa NONSAP de um elemento de armadura para análise de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro: PUC, 1982. 126p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
63. RAMAKRISHNAN, V., ANANTHANARAYANA, Y. Ultimate strength of deep beams in shear. Journal of the American Concrete Institute, v.65, n.2, p. 87-98, Feb. 1968.
64. ROOTS, J.G., BLAAUWENDRAAD, J. Cracks models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? Heron, v.34, n.1, 59p., 1989.
65. TAROCO, E., FEIJÓO, R.A. Viscoplasticidad y su formulación variacional; métodos variacionais em mecânica de sólidos. Rio de Janeiro: Laboratório do Cálculo, 1980. v.2, p.157-331. (Escola de Matemática Aplicada, 2).
66. ZIENKIEWICZ, O.C. El método de los elementos finitos. Barcelona: Editorial Reverté, 1982.
67. ZIENKIEWICZ, O.C., PHILLIPS, D.V., OWEN, D.R.J. Finite element analysis of some concrete nonlinearities; theory and examples. In: SEMINAR ON CONCRETE STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESSES, 1974, Bergamo, Italy. Papers... Bergamo: IABSE, 1974. p.1-21.