SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

XXVIII SIC

paz no plural

UFRGS PROPESQ

Evento	Salão UFRGS 2016: SIC - XXVIII SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2016
Local	Campus do Vale - UFRGS
Título	Tópicos de Probabilidade e Álgebra Linear
Autor	MARCUS VINÍCIUS DA SILVA
Orientador	JAIRO KRÁS MENGUE

Tópicos de Probabilidade e Álgebra Linear

Autor: Marcus Vinícius da Silva
Orientador: Jairo Krás Mengue
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Este trabalho consiste do estudo dos seguintes tópicos de probabilidade e álgebra linear: probabilidade invariante, jacobiano de uma probabilidade e entropia.

Um vetor $p = (p_1, ..., p_n)$ é dito de probabilidade se $p_1 + ... + p_n = 1$ e $p_i \geq 0$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Uma matriz $A_{n\times n} = (a_{ij})$ é dita coluna estocástica se todas suas colunas são vetores de probabilidade. Neste caso, Ap é vetor de probabilidade. A é dita positiva se $a_{ij} > 0$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Mostra-se que se a matriz A é positiva, $A^n p$ converge para um vetor estacionário $\bar{p}$, que é único e independe de qual vetor de probabilidade inicial p é escolhido.

Uma matriz $\pi_{n\times n} = (\pi_{ij})$ é uma probabilidade se $\sum_{i,j} \pi_{ij} = 1$ e $\pi_{ij} \geq 0$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Dizemos que ela é invariante se $\sum_{k=1}^{n} \pi_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \pi_{ki}$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$. O Jacobiano de uma probabidade invariante π é a matriz coluna-estocástica $J^\pi = (J^\pi_{ij})$ com

$$J^\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{\pi_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} \pi_{kj}} & \text{se } \sum_{k=1}^{n} \pi_{kj} > 0 \\ 1/n & \text{se } \sum_{k=1}^{n} \pi_{kj} = 0 \end{cases}$$

Dada uma matriz coluna-estocástica e positiva $A = (a_{ij})$ com vetor estacionário $\bar{p} = (p_i)$, a probabilidade $\pi = (\pi_{ij})$, com $\pi_{ij} = a_{ij} p_j$, é a autoprobabilidade de A.

Mostra-se que se J^π é o jacobiano de π positiva, então π é a autoprobabilidade de J^π. Similarmente, se π é a autoprobabilidade de uma matriz coluna-estocástica e positiva A, o jacobiano de π é a própria A.

A entropia de uma probabilidade invariante $\pi = (\pi_{ij})$ com jacobiano $J^\pi = (J^\pi_{ij})$ é definida como:

$$H(\pi) = -\sum_{i,j} \log(J^\pi_{ij}) \pi_{ij}$$

onde assume-se que $\log(J^\pi_{ij}) \pi_{ij} = 0$ se $J^\pi_{ij} = \pi_{ij} = 0$.

Pode-se mostrar que dada uma probabilidade invariante $\pi_{n\times n}$ tem-se que

$$H(\pi) = \inf\{-\sum_{i,j} \log(b_{ij}) \pi_{ij} \mid B = (b_{ij}) \text{ é coluna-estocástica e positiva}\}$$

e que

$$0 \leq H(\pi) \leq \log(n).$$