Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Sobre Soluções de Derivações em k-Álgebras Noetherianas e Simplicidade

Tese de Doutorado

Rene Baltazar

Porto Alegre, 6 de junho de 2014

Tese submetida por Rene Baltazar*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Ivan Edgardo Pan Perez

Banca examinadora:
Prof. Dr. Ivan Edgardo Pan Perez (UFRGS - UDeLaR, Orientador)
Prof. Dr. Alvaro Enrique Rittatore Calvo (UDeLaR)
Prof. Dr. Daniel Levcovitz (ICMC-USP)
Prof. Dr. Yves Albert Emile Lequain (Professor aposentado do IMPA)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Escrever algumas palavras para agradecer as pessoas que estiveram presente em minha vida nessa jornada de quase 10 anos é um tarefa comparável ao desafio de entrar nesse mundo da Matemática.

Em primeiro lugar, agradeço meus pais e irmão pelo total apoio e dedicação; minha eterna gratidão e sou muito feliz de estar chegando nesse momento graças ao esforço e carinho de cada um de vocês. Sei de quantas coisas vocês privaram-se para que isso fosse possível: sinto orgulho de pertecer a essa família.

À Danielle, por imenso carinho e dedicação nesses últimos anos. Agradeço muito sua força e sua fé em que esse dia chegaria, além de que jamais me senti só mesmo estando longe dela. Espero poder retribuir cada um desses momentos de ausência: muito obrigado.

À minha família e a família da Danielle de maneira geral.

Aos amigos da UFRGS: são inúmeros e não devo citar nomes para não esquecer de algum. Em especial ao par Felipe e Glauber. Um muito obrigado por tudo à Rosane, Francielly e Henrique pelos bons papos e auxílios quase que diários.

Ao CMAT-Uruguay, fui muito bem recebido por todos. Em especial aos amigos pelo apoio nesses dois anos: Javier Coppola, Diego Silvera, Ernesto Mordecki, Martín Sambarino, Gustavo Mata, Bruno Yemini, Gabriel Illanes, Eugenia Ellis, Alejandro Cholaquidis, Joaquín Brum, Juan Alonso, Rafael Potrie, Ángel Pereyra, Richard Muñiz, Ezequiel Maderna, Mariana Haim, Fabián Crocce, Diego Armentano, Andrés Abella, Alvaro Rovella, Alvaro Rittatore, Fernando Abadie, Ana

González, Rodrigo Andrade, Sandra, Lídia e Cláudia.

Ao meu orientador Ivan Pan, uma pessoa que admiro como amigo e pesquisador: muito obrigado.

Aos professores da UFRGS: Ada Doering, Alveri Sant'Ana e Luisa Doering.

Aos professores que aceitaram participar da banca: Alvaro Rittatore, Daniel Levcovitz e Yves Lequain.

À CAPES pelo concessão da bolsa de doutorado.

Resumo

Estudamos nesta tese, de modo geral, o conceito de simplicidade de derivações em k-álgebras de tipo finito, onde k é algebricamente fechado. A princípio iremos introduzir uma noção de solução associada a uma derivação em k-álgebras abstratas, consequentemente, generalizamos o critério para a simplicidade de Brumatti-Lequain-Levcovitz junto com uma caracterização geométrica e obtemos aplicações.

Fixada D uma derivação simples de $k[x, y]$, vamos estudar o subgrupo dos k-automorfismos de $k[x, y]$ que comutam com esta derivação. Mostramos, por exemplo, que sendo D uma derivação simples de Shamsuddin este subgrupo é trivial. No caso geral de uma derivação simples qualquer, obtemos propriedades para os elementos deste subgrupo.

Por último, tratamos de bases comutativas de derivações e simplicidade em $k[x_1, \dots, x_n]$ e $k[[x_1, \dots, x_n]]$; mais explicitamente, generalizamos um resultado de Retert que relaciona a noção de simplicidade com derivações que comutam; em consequência, obtemos corolários baseados em um trabalho de Nowicki.

Abstract

In this work we study the concept of simplicity of derivations in k-algebras of finite type, where k is an algebraically closed field. Initially, we introduce a notion of solution associated with a derivation in abstract k-algebras, hence generalizing a simplicity criterion due to Brumatti-Lequain-Levcovitz. We also give a geometric characterization of that criterion and obtain applications.

Next, we study the subgroup of k-automorphisms of $k[x, y]$ which commute with a simple derivation D of $k[x, y]$. We prove, for example, that this subgroup is trivial when D is a Shamsuddin simple derivation. In the general case of simple derivations, we obtain properties for the elements of this subgroup.

Finally, we address the simplicity and commutative bases of derivations in polynomial and power series rings. More precisely, we generalize the result of Retert that creates a relationship between simplicity and commuting derivations, and, as applications, we obtain corollaries to a work of Nowicki.

Índice

Introdução

Sejam k um corpo algebricamente fechado de caraterística zero e R uma k-álgebra. Uma *derivação* de R é uma aplicação k-linear $D : R \to R$ tal que $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ para todos $a, b \in R$. A derivação D é chamada *simples* se deixa invariante somente os ideais trivias de R. Este trabalho é basicamente dedicado ao estudo destas derivações simples; ora mudando a estrutura de R, ora mudando a derivação.

No primeiro capítulo, apresentamos os conceitos principais utilizados ao longo do trabalho.

No capítulo 2, introduzimos e estudamos uma noção algébrica de solução de uma derivação associada a uma k-álgebra qualquer (ver Definição 5). Mais precisamente, analizamos condições sobre certas k-álgebra Noetherianas para uma tal solução existir e ser única (Teorema 11); por exemplo, mostramos que sendo R de tipo finito ou da forma $k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$, uma solução passando por um maximal será unicamente determinada.

Em §3.1, usando a noção de solução de uma derivação já definida, generalizamos o critério de simplicidade dado em [BLL2003] e, além disto, apresentamos uma caracterização geométrica para o mesmo (Teorema 18 e Corolário 19); uma consequência direta disto será dada no Exemplo 21, onde obtemos um resultado sobre a simplicidade de uma derivação D localmente nilpotente em uma k-álgebra Noetheriana local. No que segue, apresentamos uma nova prova de um teorema de caracterização da simplicidade local [Ha1974, Thm. 2] e, também, caracterizamos, em termos de soluções, o fato de uma derivação ser simples em k-álgebras da forma $k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$ (Corolário 22 e Teorema 24).

As seções §3.2 e §3.3 são dedicadas ao estudo da seguinte conjectura proposta por I.Pan.

Sejam D uma derivação de $k[x, y]$, $\mathrm{Aut}(k[x, y])$ o grupo constituido pelos k-automorfismos de $k[x, y]$ e $\mathrm{Aut}(k[x, y])_D$ o subgrupo dos k-automorfismos que comutam com a derivação D. Se a derivação D é simples, então $\mathrm{Aut}(k[x, y])_D$ é finito.

Em primeiro lugar, na parte §3.2, vamos mostrar que a conjectura é verdadeira em uma família de derivações denominadas de derivações de Shamsuddin (Teorema 31). Para isto, usamos um teorema presente na tese de Shamsuddin [Sh1977], citado em [No1994, Theorem 13.2.1.], que oferece uma condição para que se preserve a simplicidade ao estender, de uma certa maneira, a derivação para $R[t]$, com t uma indeterminada. Como curiosidade, lembramos que Y.Lequain [Leq2011] mostrou que estas derivações de Shamsuddin verificam a seguinte conjectura sobre $\mathbb{A}_n$, a n-ésima Álgebra de Weyl sobre k.

Conjectura 1. *Dada uma derivação simples d de $k[x_1, \ldots, x_n]$, podemos encontrar $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $\mathbb{A}_n(d + g)$ é um ideal principal maximal à esquerda.*

Com a finalidade de entender a isotropia de uma derivação simples em $k[x, y]$, na seção §3.3 analizamos condições necessárias para um automorfismo pertencer à isotropia de uma derivação simples. Em um primeiro momento, provamos que se um tal automorfismo tem algum ponto fixo, então é a identidade (Proposição 32). Na sequência, apresentamos a definição de *grau dinâmico* de uma aplicação polinomial e com isto provamos que, no caso $k = \mathbb{C}$, os elementos em $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}[x,y])_D$ de uma derivação simple D tem grau dinâmico 1 (Corolário 36).

Finalmente, no capítulo 4, vamos generalizar um resultado recente de K. Retert em ([Ret2006]) para $k[x_1,\ldots,x_n]$ e $k[[x_1,\ldots,x_n]]$. Mais precisamente, se $\mathfrak{D}$ é um conjunto de derivações de $k[x,y]$ que comutam tal que $\partial_x \in \mathfrak{D}$ e o anel é $\mathfrak{D}$-simples, então existe $d \in \mathfrak{D}$ tal que $k[x,y]$ é $\{\partial_x, d\}$-simples ([Ret2006, Theorem 3.6.]). No Teorema 39, generalizamos este resultado para $k[x_1,\ldots,x_n]$ e $k[[x_1,\ldots,x_n]]$. Como aplicação, damos alguns corolários vinculados com resultados conhecidos de A. Nowicki sobre bases comutativas de $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ e, também, com derivações locamente nilpotentes.

Capítulo 1

Generalidades

1.1 Definições Básicas e Derivações

Seja A um anel comutativo com unidade. O conjunto dos ideais primos de A é chamado *espectro primo* ou simplesmente *espectro*, e é denotado por $\mathrm{Spec}(A)$. Ideais primos são chamados pontos em $\mathrm{Spec}(A)$

A *dimensão de Krull* de um anel A, denotada por $\dim(A)$, é o número máximo n dos comprimentos de todas cadeias de ideais primos de A.

Um anel é chamado *Noetheriano* se satisfaz a condição de cadeia ascendente; isto é, dada qualquer cadeia de ideais

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} \subseteq \ldots$$

existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+l}$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Dado um subconjunto E qualquer de A, denotamos $V(E) \subset \mathrm{Spec}(A)$ o conjunto dos ideais primos $\mathfrak{p}$ tais que $E \subset \mathfrak{p}$. Note as seguintes relações

$$V(\cup_\alpha E_\alpha) = \cap_\alpha V(E_\alpha),$$

$$V(I) = V(E') \cup V(E''),$$

onde E_α são subconjuntos quaisquer de A e $I = (E') \cap (E'')$; isto é, I é a intersecção dos ideais gerados por E' e E''. Com isto, mostra-se que os conjuntos da forma $V(E)$ satisfazem os axiomas para um sistema de conjuntos fechados de um espaço topológico.

A topologia em $\mathrm{Spec}(A)$ onde os conjuntos da forma $V(E)$ são os fechados é chamada de *topologia de Zariski*.

Dado um homomorfismo de aneis $\varphi : A \to B$, sabemos que a imagem inversa de um ideal primo de B também é um ideal primo em A. Enviando um ideal primo de B na sua imagem inversa, definimos uma aplicação

$$\varphi^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A);$$

ou seja, $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^c := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Note que

$$(\varphi^*)^{-1}(V(E)) = V(\varphi(E));$$

o que mostra que φ^* é contínua com respeito a topologia de Zariski.

Seja k um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Lembramos que a correspondência $A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$ e $\varphi \mapsto \varphi^*$ induz uma equivalência de categorias entre as k-álgebras de tipo finito e variedades afins sobre $\mathrm{Spec}(k)$, pois k é algebricamente fechado ([Hulek, Chap.1.]).

Seja R uma k-álgebra. Denotamos por $\mathrm{trdeg}_k R$ o *grau de transcendência* de R sobre k; isto é, o número máximo de elementos em R algebricamente independentes sobre k.

Uma k-álgebra R é de *tipo finito* se existem $r_1, \ldots, r_s \in R$ tais que

$$R = k[r_1, \ldots, r_s].$$

Teorema 1. *Se R é uma k-álgebra de tipo finito, então*

$$\dim(R) = \mathrm{trdeg}_k R.$$

Demonstração. Ver [Eisen95, Chap. 8.2.1]. □

Exemplo 2. A hipótese de finitude do Teorema anterior é necessária; com efeito, se $R = k(x_1, \ldots, x_n)$, temos que

$$\dim(R) = 0 < n = \mathrm{trdeg}_k R.$$

Seja $k[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios. Uma aplicação $F : k^n \to k^n$ é chamada *polinomial* se é da forma:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$$

onde $F_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Uma tal aplicação é dita *invertível* se existe uma aplicação polinomial $G = (G_1, \ldots, G_n) : k^n \to k^n$ tal que $x_i = G_i(F_1, \ldots, F_n)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Pode-se mostrar que se uma aplicação polinomial F tem uma inversa polinomial a esquerda G, então G também é uma inversa a direita de F (ver [Van00, Proposição 1.1.6]). Denotamos por $\mathrm{Aut}_k(k^n)$ o conjunto das aplicações polinomiais invertíveis.

As aplicações polinomiais invertíveis correspondem bijetivamente com os k-automorfismos do anel de polinômios $k[x_1, \ldots, x_n]$ da seguinte forma:

$$F \longrightarrow F^*$$

onde $F^* : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$ é dada por $g \mapsto F^*(g) = g(F)$. O grupo de todos os k-automorfismos de $k[x_1, \ldots, x_n]$ é denotado por $\mathrm{Aut}_k(k[x_1, \ldots, x_n])$.

Seja R uma k-álgebra. Uma k-*derivação* $d : R \to R$ de R é uma aplicação k-linear tal que

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

para todos $a, b \in R$; muitas vezes diremos apenas que d é uma derivação de R. Denota-se $\mathrm{Der_k}(R)$ o conjunto de todas as k-derivações de R.

O grupo $\mathrm{Aut}(k[x_1, \ldots, x_n])$ age em $Der_k(k[x_1, \ldots, x_n])$ da seguinte maneira:

$$(\rho, D) \mapsto \rho^{-1} \circ D \circ \rho = \rho^{-1} D \rho.$$

O subgrupo de isotropia de $D \in Der_k(k[x_1, \ldots, x_n])$, com respeito a essa ação, é

$$\mathrm{Aut}(k[x_1, \ldots, x_n]])_D := \{\rho \in \mathrm{Aut}(k[x_1, \ldots, x_n])/\rho D = D\rho\}.$$

Seja d uma k-derivação de uma k-álgebra R. Um ideal I de R é chamado d-*invariante*, ou *estável* por d, se $d(I) \subset I$. Por exemplo, os ideais triviais 0 e R são sempre d-invariantes. Se R não possui outros ideais d-invariantes, além dos triviais, R é chamado d-*simples*; ou simplesmente dizemos que d é uma derivação *simples*.

Se a k-álgebra R é o anel de polinômios $k[x_1, \ldots, x_n]$, para cada $i = 1, \ldots, n$ a aplicação ∂_{x_i} é a única derivação de R tal que $\partial_{x_i}(x_i) = 1$ e $\partial_{x_i}(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$ ([No1994, Prop. 1.1.2]).

O seguinte resultado é bem conhecido (ver por exemplo [No1994, Thm. 1.2.1]): fornece informações da estrutura do R-módulo $\mathrm{Der_k}(R)$.

Teorema 3. *Seja $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios sobre um corpo k.*

(1) *Se $f_1, \ldots, f_n \in R$, então existe uma única derivação d de R tal que $d(x_1) = f_1, \ldots, d(x_n) = f_n$; esta derivação é da forma*

$$d = f_1\partial_{x_1} + \ldots + f_n\partial_{x_n}.$$

(2) $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ *é um* R*-módulo livre com base* $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$.

(3) $\partial_{x_i}\partial_{x_j} = \partial_{x_j}\partial_{x_i}$, *para todos* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(4) *Se* $d \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ *e* $f \in R$, *então* $d(f) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(f)d(x_i)$.

Exemplo 4. Seja $R = k[x]$. Pelo teorema anterior, sabemos que todas as derivações de R são da forma $d = f\partial_x$, com $f \in R$. Pórem, vamos verificar que as únicas derivações simples de R são da forma $d' = c\partial_x$, com $c \in k^*$. De fato, seja $d = f\partial_x \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ um derivação simples não nula com $\deg(f) \geqslant 1$. Note que o ideal gerado por f é invariante por definição. Logo, $f \in k$, uma contradição.

Reciprocamente, sejam $d = c\partial_x$, com $c \in k^*$ e I um ideal não-nulo invariante de R. Sabemos que existe $g \in R$ tal que $I = \langle g \rangle$ e $\deg g = n \geq 0$. Suponhamos que $n \geq 1$, e como I é invariante por d, temos que $d(g) \in I$. Logo, existe $h \in R$ tal que $d(g) = gh$; assim,

$$\deg d(g) \geq \deg g = n.$$

Porém, note que

$$\deg d(g) = \deg(c\partial_x(g)) = \deg c + \deg g' = \deg g' = n - 1.$$

Resultando assim em uma contradição. Portanto, $I = R$ e, então, d é simples.

Capítulo 2

Soluções de Derivações

2.1 Existência e Unicidade

Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica 0, R uma k-álgebra e $\mathrm{Der_k}(R)$ o k-espaço vetorial das k-derivações de R. Se $R = k[[t]]$ é a k-álgebra das séries de potências, denotamos por ∂_t a derivação canônica em $\mathrm{Der_k}(k[[t]])$.

O Teorema de Existência e Unicidade da clássica teoria de equações diferenciais ordinárias complexas afirma que se D é um campo de vetores analítico sobre $\mathbb{C}^n$ e $P \in \mathbb{C}^n$ é um ponto onde o campo não se anula, então existe uma aplicação analítica $\gamma : \Delta \to \mathbb{C}^n$, onde $\Delta \subset \mathbb{C}$ é um aberto contendo 0, tal que $\gamma(0) = P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $\gamma'(t) = D(\gamma(t)), t \in \Delta$.

Vamos denotar por $\mathcal{O}_{n,P}$ o anel dos germes das funções analíticas em $P \in \mathbb{C}^n$ e iremos pensar D como uma derivação do anel; ou seja, $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial_{z_i}$, em que $f_i \in \mathcal{O}_{n,P}$ e $z_1, \ldots, z_n$ são funções coordenadas de $\mathbb{C}^n$. Uma solução, como acima, é dada por n funções $z_1(t), \ldots, z_n(t)$, que são analíticas em uma vizinhança de 0, tais que

$$z_i'(t) = f_i(z_1(t), \dots, z_n(t)), z_i(0) = p_i, i = 1, \dots, n.$$

Como um elemento em $\mathcal{O}_{n,P}$ pode ser representado como uma série de potências em $z_1 - p_1, \dots, z_n - p_n$, com raio de convergência positivo, obtemos um único $\mathbb{C}$-homomorfismo $\varphi : \mathcal{O}_{n,P} \to \mathcal{O}_{1,0}$ que leva z_i em $z_i(t)$; para um elemento $g \in \mathcal{O}_{n,P}$ temos $\varphi(g)(0) = 0$ se, e somente se, $g(P) = 0$. Note que, reciprocamente, um dado $\mathbb{C}$-homomorfismo que satisfaz $\varphi \circ D = \partial_t \circ \varphi$, onde $\partial_t : \mathcal{O}_{1,0} \to \mathcal{O}_{1,0}$ é a derivada com relação a t, determina uma única solução. Motivados por isso, consideramos D uma k-derivação de uma k-álgebra abstrata R e definimos a noção de solução de D.

Definição 5. *Sejam $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ uma derivação e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ um ideal primo de R; denote por $k(\mathfrak{p})$ o corpo de resíduos de $\mathfrak{p}$. Um k-homomorfismo $\varphi : R \to k(\mathfrak{p})[[t]]$ é dito uma solução de D passando por $\mathfrak{p}$ se $\varphi \circ D = \partial_t \circ \varphi$ e $\varphi^{-1}((t)) = \mathfrak{p}$. Quando $\varphi(R) \not\subset k(\mathfrak{p})$, dizemos que a solução é não trivial.*

Lembramos que um elemento $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ estende-se de maneira única a uma k-derivação no anel total de frações de R pela fórmula

$$D(a/s) = D(a)s^{-1} - as^{-2}D(s),$$

assim, estende-se também a qualquer localização de R.

Dada uma solução $\varphi : R \to K[[t]]$ como acima, com $K = k(\mathfrak{p})$, através da aplicação localização $R \to R_{\mathfrak{p}}$, obtemos uma solução $\varphi_{\mathfrak{p}} : R_{\mathfrak{p}} \to K[[t]]$ passando por $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ (D sendo uma derivação $D : R_{\mathfrak{p}} \to R_{\mathfrak{p}}$).

Se $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$, como em [Sei1967], podemos estender D a um elemento em $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R[[t]])$:

$$D(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i) = \sum_{i=0}^{\infty} D(a_i) t^i$$

com $a_i \in R$ e, com isto, definir o R-automorfismo chamado exponencial $e^{tD} : R[[t]] \to R[[t]]$ dado por

$$\alpha \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D^n(\alpha),$$

onde $D^n = D^{n-1} \circ D$, para $n \geq 0$, e $D^0 = Id$. Note que e^{tD}, retrito a R, produz um k-homomorfismo $R \to R[[t]]$.

No decorrer deste texto, vamos pensar D como um elemento em $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ ou $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R[[t]])$ conforme conveniente.

Denote por $\epsilon_{\mathfrak{p}} : R \to k(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ a aplicação canônica e seja $\epsilon_{\mathfrak{p}} \otimes 1 : R \otimes_k k[[t]] = R[[t]] \to k(\mathfrak{p}) \otimes_k k[[t]] = k(\mathfrak{p})[[t]]$ sua extensão ao anel de séries de potências.

Lema 6. *A aplicação* $(\epsilon_{\mathfrak{p}} \otimes 1) \circ e^{tD}|_R : R \to k(\mathfrak{p})[[t]]$ *define uma solução de* D *passando por* $\mathfrak{p}$*. Além disto, esta solução é não trivial se, e somente se,* $\epsilon_{\mathfrak{p}} \circ D \neq 0$.

Demonstração. Para $\alpha \in R$, temos que

$$\begin{aligned}
((\epsilon_{\mathfrak{p}} \otimes 1) \circ e^{tD} \circ D)(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \epsilon_{\mathfrak{p}}(D^{n+1}(\alpha)) \\
&= \partial_t \left(\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \epsilon_{\mathfrak{p}}(D^{n+1}(\alpha)) \right) \\
&= \left(\partial_t \circ (\epsilon_{\mathfrak{p}} \otimes 1) \circ e^{tD} \right)(\alpha).
\end{aligned}$$

Claramente $(\epsilon_{\mathfrak{p}} \otimes 1) \circ e^{tD}(\alpha) \in tk(\mathfrak{p})[[t]]$ se e somente se $\epsilon_{\mathfrak{p}}(\alpha) = 0$, isto é, se e somente se $\alpha \in \mathfrak{p}$. Além do mais, se para um elemento $\alpha \in R$ obtemos $\epsilon_{\mathfrak{p}}(D(\alpha)) \neq 0$, então o termo linear na série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \epsilon_{\mathfrak{p}}(D^n(\alpha))$ não se anula; note que $\epsilon_{\mathfrak{p}} \circ D = 0$ implica $\epsilon_{\mathfrak{p}} \circ D^n = 0$, $\forall n > 0$. Desta maneira, obtemos a prova. $\square$

Observação 7. Toda derivação admite pelo menos uma solução passando através de um dado ideal primo pelo Lema 6. Porém, como mostraremos no Exemplo 13, para certas derivações todas as soluções podem ser triviais.

Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de aneis comutativos, então lembramos que $f^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ denota a aplicação $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^c := f^{-1}(\mathfrak{p})$, que é contínua com respeito a topologia de Zariski.

Definição 8. *Dois k-homomorfismos $\varphi, \psi : R \to K[[t]]$ são ditos iguais topologicamente se $\varphi^* = \psi^*$.*

Exemplo 9. Para $n \geq 1$, defina o k-homomorfismo $f_n : k[x] \to k[[t]]$ dado por $x \mapsto t^n$. Então $f_n = f_m$ implica $n = m$, mas $f_n^* = f_m^*$ para todos $m, n \geq 1$.

Lema 10. *Sejam R uma k-álgebra Noetheriana, D uma derivação de R e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Então, existe um único ideal primo $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ que é maximal entre os ideais de R satisfazendo $D(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$.*

Demonstração. Se $D(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ é o maximal com esta propriedade. Suponhamos, então, $D(\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{p}$. Seja $\mathfrak{F}$ a família dos ideais $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{p}$ satisfazendo $D(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$. Esta família $\mathfrak{F}$ é não vazia, pois o ideal trivial nulo é invariante. Toda família $\mathfrak{F}'$ totalmente ordenada possui uma cota superior $\mathfrak{q}_{\mathfrak{F}'}$ em $\mathfrak{F}$, pois R é Noetheriana. Pelo Lema de Zorn, existe $\mathfrak{q}$ um elemento maximal. Afirmamos que este elemento é unicamente determinado. De fato, sejam q_1 e q_2 dois tais ideais. Então o ideal gerado pela soma de q_1 com q_2 é um ideal contido em $\mathfrak{p}$ que contém ambos q_1 e q_2 e, além disso, é invariante por D; ou seja, uma contradição com a maximalidade.

Para terminar, provemos que $\mathfrak{q}$ é primo. Em primeiro lugar consideremos a decomposição (irredundante) primária $\mathfrak{q} = \bigcap_{i=1}^t \mathfrak{q}_i$, com $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$. Como $\mathfrak{q}$ é invariante, por ([Sei1967, Thm.1]), cada $\mathfrak{p}_i$ é invariante por D para $i = 1, \ldots, t$. Suponhamos que $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}$ para todo $i = 1, \ldots, t$, então existe $p_i \in \mathfrak{p}_i$ tal que $p_i \notin \mathfrak{p}$ para todo $i = 1, \ldots, t$. Seja $x = \prod_{i=1}^t p_i \in \bigcap \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}}$ e, assim, $x \notin \mathfrak{p}$. Dessa maneira, $x^n \notin \mathfrak{p}$, para todo n inteiro positivo. Porém, sabemos que existe k um inteiro positivo tal que $x^k \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, uma contradição. Logo, existe $j \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}_j$ é invariante por D, $\mathfrak{p}$ não é invariante por D e $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}_j$, pela maximalidade temos que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_i$; ou seja, $\mathfrak{q}$ é primo.

$\square$

Denotamos por $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ a k-álgebra das séries de potências em n indeterminadas.

Teorema 11. *Suponhamos que R é uma k-álgebra Noetheriana e seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Se $D \in \mathrm{Der_k}(R)$ é uma derivação, então:*

a) D admite uma solução passando por $\mathfrak{p}$. Além disso, esta solução é não trivial se, e somente se, $\epsilon_{\mathfrak{p}} \circ D \neq 0$.

b) Duas soluções de D passando por $\mathfrak{p}$ são iguais topologicamente; além disso, se uma é trivial, então a outra também é trivial.

c) Se, adicionalmente, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ é um ideal maximal e R é de tipo finito ou um quociente de uma álgebra da forma $k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$, onde I é um ideal do anel de séries de potências, então D admite uma única solução passando por $\mathfrak{m}$.

Demonstração. A afirmação (a) segue do Lema 6.

Para provar (b), considere uma solução $\varphi : R \to k(\mathfrak{p})[[t]]$ cuja existência é garantida pela parte (a). Em primeiro lugar, note que se $\alpha \in R$ é tal que $\varphi(\alpha) = 0$, então

$$\varphi(D(\alpha)) = \partial_t(\varphi(\alpha)) = 0.$$

Consequentemente, $D(\ker \varphi) \subset \ker \varphi$. Observe também que $\ker \varphi \subset \mathfrak{p}$, pois sabemos que $\varphi^{-1}((t)) = \mathfrak{p}$.

Por outro lado, como R é Noetheriana existe um único ideal primo $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ que é maximal entre os ideais $\mathfrak{a} \subset R$ satisfazendo $D(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ (Lema 10). Do fato que $D(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{q}$, deduzimos $\partial_t(\varphi(\mathfrak{q})) \subset \varphi(\mathfrak{q})$, que está contido em $tK[[t]]$. Como a derivação ∂_t não estabiliza ideais não triviais, obtemos $\mathfrak{q} \subset \ker \varphi$. Portanto, concluímos que $\mathfrak{q}$ é o núcleo de qualquer solução de D passando por $\mathfrak{p}$. Por definição, qualquer solução contrai $tk[[t]]$ em $\mathfrak{p}$, assim a afirmação (b) é verificada.

Vamos provar (c) no caso $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$; o outro é exatamente análogo. Pelo Lema 6, somente precisamos mostrar a unicidade da solução.

Por hipótese, D provém de um elemento $D_1 \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(k[[x_1, \ldots, x_n]])$ tal que $D_1(I) \subset I$. Escrevendo $D_1 = \sum_{i=1}^n f_i \partial/\partial x_i$, com $f_i \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$, $i = 1, \ldots, n$. Seja $\varphi : k[[x_1, \ldots, x_n]] \to k[[t]]$ uma solução de D_1 passando por um ideal maximal M com $M/I = \mathfrak{m}$, e escrevemos $x_i(t) := \varphi(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Logo $M = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n)$ onde $p_i = x_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$.

Considere o k-homomorfismo truncamento $[\ \ ]_r : k[[t]] \to k[t]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, que a uma série de potências $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ associa $\sum_{i=0}^{r} a_i t^i$.

Lembramos que uma série de potências $f \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$ admite um série de Taylor em $p = (p_1, \ldots, p_n)$, como

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (x - p),$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n), \lambda^0(x - p) = f(p)$ e $\lambda^j \in k[x_1, \ldots, x_n]$ é um adequado polinômio homogêneo de grau j, para $j \geq 1$. Portanto,

$$f(x(t)) \equiv \sum_{j=0}^{r} \lambda^j([x_1(t) - p_1]_r, \ldots, [x_n(t) - p_n]_r) \bmod(t^{r+1}). \tag{2.1}$$

Agora, de $\varphi \circ D_1 = \partial_t \circ \varphi$ segue

$$f_i(x(t)) = \partial_t x_i(t),\ i = 1, \ldots n.$$

Ao aplicar (2.1) em $f_1, \ldots, f_n$ deduzimos que o coeficiente de grau r de $\partial_t x_i(t)$ é determinado por um número finito de coeficientes de f_i e os coeficientes de $[x_1(t) - p_1]_r, \ldots, [x_n(t) - p_n]_r$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Isto prova que φ é unicamente determinado pelos $f_j's$ e p. Como D_1 estabiliza I, facilmente obtemos que φ fatoriza através de $k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$ e obtemos uma única solução de D passando por $\mathfrak{m} = M/I$. Isto completa a prova.

$\square$

2.2 Anéis i-singulares e Exemplos

Seja i um número natural e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ um ideal primo. Se o anel local $R_{\mathfrak{p}}$ é regular, dizemos que R é *regular* em $\mathfrak{p}$; isto é, o ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ pode ser gerado por $\dim(R_{\mathfrak{p}})$ elementos. Caso contrário, $\mathfrak{p}$ é chamado primo *singular*. Se R é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo e $d : R \to R$ é uma derivação, então Seidenberg em [Sei1967] mostrou que d deixa invariante os primos minimais singulares de R.

Conforme [Ha1974], dizemos que R é *i-singular* em $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ se $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ não pode ser gerado por $i+\dim R_{\mathfrak{p}}$ elementos. Seja d uma derivação de R, em [Ha1974, Thm.1] foi provado que, sob certas condições para R, d estabiliza todo primo i-singular que seja minimal em relação a esta propriedade. Assim, no seguinte corolário, estudamos uma solução por um primo minimal i-singular.

Corolário 12. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local com $R/\mathfrak{m} = k$ e $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$. Além disto, suponhamos que R é completo ou é localização de uma k-álgebra de tipo finito. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ é um ideal primo i-singular minimal, então existe uma solução trivial de D passando por $\mathfrak{p}$ se, e somente se, $D(R \setminus \mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. Em particular, se $\mathfrak{m}$ é um ideal primo minimal 0-singular, então toda solução de D passando por $\mathfrak{m}$ é trivial.*

Demonstração. Sabemos que, por [Ha1974, Thm. 1], D estabiliza todo primo i-singular minimal, $i \geq 0$; isto é, $D(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. Usando o Teorema 11(a), obtemos que existe uma solução passando por $\mathfrak{p}$, que é trivial quando $D(R) \subset \mathfrak{p}$. Assim, a equivalência segue de Teorema 11(b).

Finalmente, note que R coincide com $k + \mathfrak{m}$ como k-espaço vetorial, logo segue que $D(R) \subset \mathfrak{m}$. □

Exemplo 13. Considere $R = k[x, y, z]$, $\mathfrak{p} = (x, y)$ e a derivação $D = y\partial_x + xz\partial_y$. Desta maneira, $R/\mathfrak{p}$ pode ser identificado com $k[z]$ de modo que $k(\mathfrak{p}) = k(z)$ é o corpo de funções racionais em uma indeterminada.

Primeiramente, note que a solução de D (passando por $\mathfrak{p}$) dada pelo Lema 6 é definida por

$$x \mapsto 0, y \mapsto 0, z \mapsto z.$$

Além disto, se $f \in k(z)$, um k-homomorfismo dado por

$$x \mapsto 0, y \mapsto 0, z \mapsto f$$

define uma solução de D passando por $\mathfrak{p}$. Observe que todas estas soluções são triviais (pelo Teorema 11(b)).

Por outro lado, um ideal maximal de R é da forma $\mathfrak{m}_p = (x - a, y - b, z - c)$ para algum $p = (a, b, c) \in k^3$. A única solução de D passando por $\mathfrak{m}_p$ é um k-homomorfismo $\varphi_p : R \to k[[t]]$ tal que $\varphi_p \circ D = \partial_t \circ \varphi_p$. Isto é, temos

$$y(t) = \partial_t x(t), x(t)z(t) = \partial_t y(t), 0 = \partial_t z(t), \tag{2.2}$$

onde $x(t) := \varphi_p(x), y(t) := \varphi_p(y), z(t) := \varphi_p(z)$.

Se $\mathfrak{m}_p \supset \mathfrak{p}$, então $p = (0, 0, c)$ e $x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = c$ satisfaz (2.2). Caso contrário, $p = (a, b, c)$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Como $D^{2m+1}(x) = yz^m, D^{2m}(x) = xz^m$, $D^{2m+1}(y) = xz^{m+1}$ e $D^{2m}(x) = yz^m$, deduzimos que a única solução passando por $\mathfrak{m}_p \not\supset \mathfrak{p}$ é dada por $z(t) = c$ e

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{ac^m}{(2m)!} t^{2m} + \frac{bc^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right\}, y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{bc^m}{(2m)!} t^{2m} + \frac{ac^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \right\}.$$

Exemplo 14. Sejam R, $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{m}_p$ como no exemplo anterior e seja $D = \partial_x + \partial_y + \partial_z$. Neste caso, as soluções de D passando por $\mathfrak{p}$ são da forma

$$x \mapsto t, y \mapsto t, z \mapsto t + f$$

onde $f \in k(z)$. Analogamente, $\varphi_p(x) = a + t, \varphi_p(y) = b + t, \varphi_p(z) = c + t$ é a única solução de D passando através de $\mathfrak{m}_p$.

Exemplo 15. Seja $A = \mathbb{C}[x, y, z, w]/(x^2 + y^2 + z^2, w^2)$, vamos mostrar que o ideal $\mathfrak{m} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})A_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ é 1-singular. Sabemos que $\dim(A_{\mathfrak{m}}) = 2$, ou seja, precisamos verificar que $\mathfrak{m}$ não pode ser gerado por 3 elementos. Com efeito, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$ são linearmente independentes sobre $A/\mathfrak{m}$. De fato, se retiramos um elemento do conjunto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})$, digamos $\bar{y}$, e consideramos $\mathfrak{p} = (\bar{x}, \bar{z}, \bar{w})A_{\mathfrak{m}} \subset (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w})A_{\mathfrak{m}}$ temos $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p} \neq A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cong \mathbb{C}$. Assim, $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 4$. Portanto, uma versão do Lema de Nakayama, temos que $\mathfrak{m}$ não pode ser gerado por 3 elementos, pois caso contrário, $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 3$.

Pergunta 1. Existem uma k-álgebra R e uma derivação D que admita pelo menos duas soluções diferentes passando por um de seus ideais maximais?

Problema 2. Classificar as k-subalgebras Noetherianas $R \subset k[[x_1, \ldots, x_n]]$ tais que para qualquer ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R, toda derivação $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ admita uma única solução passando por $\mathfrak{m}$.

Capítulo 3

Derivações Simples

Suponhamos, agora, que R é o anel de polinômios $k[x_1, \ldots, x_n]$ com k um corpo como antes. Assim, sabemos que se $n = 1$, então a derivação ∂_{x_1} é uma derivação simples de R; mais que isto, já mostramos no Exemplo 4 que as únicas derivações simples são $m\partial_{x_1}$, com m uma constante. No caso $n = 2$, muitos poucos exemplos são conhecidos (ver [Sar2012], para uma perspectiva computacional); então, no começo desta seção, para ilustrar, mostraremos uma família de derivações simples de $k[x_1, x_2]$. Com isto, critérios para determinar a simplicidade são buscados; de fato, recentemente S. Kour e A. K. Malooa em ([KM2013]) e A. Nowicki em ([No2008]) apresentaram novas famílias de derivações simples de $k[x_1, x_2]$.

Em $k[x, y]_{(x,y)}$, P. Brumatti, Y. Lequain e D. Levcovitz ([BLL2003]) construíram exemplos de derivações simples d tais que $d(x) = 1$ e $\deg_y d(y) = s$, para s um número inteiro positivo qualquer. Para encontrar esta família de derivações simples, foi estabelecida uma equivalência entre a simplicidade do anel local $k[x_1, \ldots, x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}$ e a transcendência de certas soluções de equações diferenciais associadas à derivação. Inspirado por isto, generalizaremos este critério para $R_{\mathfrak{p}}$, onde R é uma k-álgebra de tipo finito sem divisores de zero e $\mathfrak{p}$ é um ideal primo em R; além disto, vamos apresentar uma caracterização geométrica da simplicidade de tais k-álgebras. Finalmente, apresentamos uma nova prova de um teorema de caracterização da simplicidade local provado em [Ha1974, Thm. 2]. Em seguida, obtemos um resultado de equivalência da simplicidade de uma derivação no anel $k[[x_1, \ldots, x_n]]/I$ por meio de uma propriedade de uma solução passando por $(x_1, \ldots, x_n)$.

3.1 Critérios de Simplicidade

Um *anel diferencial* (Noetheriano) é um par (R, D), onde R é uma k-álgebra Noetheriana e $D \in \mathrm{Der_k}(R)$. Dados dois anéis diferenciais (R_1, D_1) e (R_2, D_2), um k-homomorfismo $\psi : R_1 \to R_2$ é dito ser um *morfismo* de anéis diferenciais se $D_2 \circ \psi = \psi \circ D_1$; também vamos escrever $\psi : (R_1, D_1) \to (R_2, D_2)$. Quando ψ é um isomorfismo dizemos que (R_1, D_1) e (R_2, D_2) são isomorfos.

Note que uma solução $\varphi : R \to k(\mathfrak{p})[[t]]$ de uma derivação $D \in \mathrm{Der_k}(R)$, passando por um ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, é justamente um morfismo $(R, D) \to (k(\mathfrak{p})[[t]], \partial_t)$ de anéis diferenciais, em que especificamos a contração do ideal maximal. Em particular, se $\psi : (R', D') \to (R, D)$ é um morfismo, então $\varphi \circ \psi$ é uma solução de D' passando através de $\psi^{-1}(\mathfrak{p})$.

Definição 16. *Dizemos que um anel diferencial* (R, D) *é simples se os únicos ideais estáveis por* D *são* (0) *e* R.

Lembramos que um anel comutativo é dito reduzido se não possui elemento nilpotente não trivial.

Seja A um anel comutativo. Para um ideal $\mathfrak{a} \subset A$ escrevemos $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A); \mathfrak{q} \supset \mathfrak{a}\}$: este é o conjunto fechado de Zariski associado ao ideal $\mathfrak{a}$. Note que para um ideal primo $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$, $V(\mathfrak{q})$ é o fecho de Zariski em $\mathrm{Spec}(A)$ de $\{\mathfrak{q}\}$. A dimensão $\dim V(\mathfrak{a})$ de $V(\mathfrak{a})$ é $\dim A/\mathfrak{a}$. Se $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ obtem-se que $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ e $\dim V(\mathfrak{b}) - \dim V(\mathfrak{a})$ é chamada a *codimensão* de $V(\mathfrak{a})$ em $V(\mathfrak{b})$, denotada por $\mathrm{codim}(V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b}))$.

No seguinte resultado utilizamos as notações de §1.1.

Lema 17. *[AM1969, Chap. 1, Exercise. 21]) Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis comutativos e $\varphi^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ a aplicação natural. Temos as seguintes afirmações:*

(i) se $\mathfrak{a}$ é um ideal em A, então $(\varphi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$, onde $\mathfrak{a}^e := \varphi(\mathfrak{a})B$;

(ii) se $\mathfrak{b}$ é um ideal em B, então $\overline{\varphi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$;

(iii) se φ é injetiva, então $\varphi^*(\mathrm{Spec}(B))$ é denso em $\mathrm{Spec}(A)$. Mais precisamente, a imagem de φ^* é densa em $\mathrm{Spec}(A)$, se somente se, todo elemento em $\ker(\varphi)$ é nilpotente.

Demonstração. Para (i), note que $\mathfrak{q} \in (\varphi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a}))$ se, e somente se, $\varphi^*(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{a}$. Afirmamos que $\varphi^*(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{a}$ se, e somente se, $q \supseteq \mathfrak{a}^e$; com isto, (i) estará provado. Se $\varphi^*(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{a}$, então $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}^{ce} = \varphi^*(\mathfrak{q})^e \supseteq \mathfrak{a}^e$ (a primeira inclusão segue de [AM1969, Prop.1.17]). Reciprocamente, se $q \supseteq \mathfrak{a}^e$, então $\varphi^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^c \supseteq \mathfrak{a}^{ec} \supseteq \mathfrak{a}$ (a última inclusão segue de [AM1969, Prop.1.17]).

Para verificar (ii), note que $\mathfrak{q} \in \overline{\varphi^*(V(\mathfrak{b}))}$ se, e somente se, $r(V(\mathfrak{b})^c) \subseteq \mathfrak{q}$. Vamos verificar que $r(V(\mathfrak{b})^c) \subseteq \mathfrak{q}$ se, e somente se, $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{q}$. Note que $r(\mathfrak{i}) = r(V(\mathfrak{i}))$ para todo ideal $\mathfrak{i}$ e, também, $r(\mathfrak{c}^c) = r(\mathfrak{c})^c$ para todo $\mathfrak{c}$ de B (ver [AM1969, Ex.1.18]). Assim, $r(V(\mathfrak{b})^c) = r(V(\mathfrak{b}))^c = r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c)$. Porém, sabemos que $r(\mathfrak{b}^c) \subseteq \mathfrak{q}$ se, e somente se, $\mathfrak{b}^c \subseteq \mathfrak{q}$; mostrando o que afirmamos.

Para o seguinte, usando os anteriores, obtemos que $\overline{\varphi^*(\mathrm{Spec}(B))} = \overline{\varphi^*(V(0))} = V((0)^c) = V(\ker(\varphi))$. Deste modo, $\varphi^*(\mathrm{Spec}(B))$ é denso em $\mathrm{Spec}(A)$ se, e somente se,

$$V(\ker(\varphi)) = \operatorname{Spec}(A);$$

porém isto é equivalente a $\ker(\varphi) \subset \mathfrak{p}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$. Portanto, obtemos que $\ker(\varphi)$ está contido no nilradical de A; ou seja, todo elemento em $\ker(\varphi)$ é nipotente. $\square$

Teorema 18. *Seja (R, D) um anel diferencial e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ um ideal primo em R; denotemos $K = k(\mathfrak{p})$. Suponhamos que existe uma solução não trivial $\varphi : R \to K[[t]]$ de D passando por $\mathfrak{p}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $(R_{\mathfrak{p}}, D)$ é simples.

(b) $\varphi_{\mathfrak{p}}$ é injetiva.

(c) $R_{\mathfrak{p}}$ é reduzido e imagem de $\varphi_{\mathfrak{p}}^*$ é densa em $\operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$.

(d) $\ker\varphi$ é o único ideal primo minimal contido em $\mathfrak{p}$ e existe $u \in R\backslash\mathfrak{p}$ tal que $u\ker\varphi = 0$.

Se, além disto, R é de tipo finito, então $(a), (b)$ e (c) são equivalentes com:

(e) $R_{\mathfrak{p}}$ é reduzido e existe uma única componente irredutível X de $\operatorname{Spec}(R)$ contendo $V(\mathfrak{p})$ tal que $\operatorname{trdeg}_K \varphi(R) = \operatorname{codim}(V(\mathfrak{p}), X)$.

Demonstração. Como φ não é trivial, então $\varphi_{\mathfrak{p}}$ também não é trivial e, com isto, $\ker\varphi_{\mathfrak{p}} \subsetneq \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Suponhamos que $(R_{\mathfrak{p}}, D)$ é simples. Como $\ker\varphi_{\mathfrak{p}}$ é um ideal invariante, obtemos $\ker\varphi_{\mathfrak{p}} = 0$; assim, $\varphi_{\mathfrak{p}}$ é injetiva. Como já observamos na prova do Teorema 11, $\ker\varphi_{\mathfrak{p}}$ é o maior ideal de $R_{\mathfrak{p}}$ que é invariante por D. Logo, se $\varphi_{\mathfrak{p}}$ é injetiva, então $(R_{\mathfrak{p}}, D)$ é simples. Portanto, concluímos que (a) e (b) são equivalentes.

Lembramos que a imagem de $\varphi_{\mathfrak{p}}^*$ é densa em $\operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$ se, e somente se, todo elemento em $\ker\varphi_{\mathfrak{p}}$ é nilpotente (ver Lema 17). Suponhamos que $\varphi_{\mathfrak{p}}$ é injetiva. Dessa maneira, todo elemento em $\ker\varphi_{\mathfrak{p}}$ é nilpotente e com isso a imagem de $\varphi_{\mathfrak{p}}^*$ é densa em $\operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$. Além disso, $R_{\mathfrak{p}}$ é reduzido uma vez que $\varphi_{\mathfrak{p}}$ é injetiva e $K[[t]]$

é um domínio. Reciprocamente, se $R_\mathfrak{p}$ é reduzido e a imagem de $\varphi_\mathfrak{p}^*$ é densa em $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})$. Sabemos que todo elemento em $\ker\varphi_\mathfrak{p}$ é nilpotente. Como $R_\mathfrak{p}$ é reduzido temos $\ker\varphi_\mathfrak{p} = 0$. Consequentemente, (b) e (c) são equivalentes.

Agora, note que a aplicação canônica $\lambda_\mathfrak{p} : R \to R_\mathfrak{p}$ induz um homeomorfismo

$$\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p}) \simeq \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R); \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}, \tag{3.1}$$

e considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p}) \arrow[d, "\lambda_\mathfrak{p}^*"] \\ \mathrm{Spec}(K[[t]]) \arrow[ur, "\varphi_\mathfrak{p}^*"] \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathrm{Spec}(R) \end{tikzcd}$$

Como as imagens de φ^* e $\varphi_\mathfrak{p}^*$ são densas em $V(\ker\varphi)$ e $V(\ker\varphi_\mathfrak{p})$, respectivamente, concluímos que a imagem de $\varphi_\mathfrak{p}^*$ é densa em $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})$ se, e somente se, $V(\ker\varphi_\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})$. Em outras palavras, é o mesmo que dizer que o lado direito em (3.1) é um subconjunto denso em $V(\ker\varphi_\mathfrak{p})$. Isto é equivalente, também, a que $\ker\varphi_\mathfrak{p}$ é o único ideal primo minimal contido em $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, que por sua vez é equivalente com o fato que $\ker\varphi$ é o único ideal primo minimal contido em $\mathfrak{p}$ e existe $u \in R\backslash\mathfrak{p}$ tal que $u\ker\varphi = 0$, pois o ideal $\ker\varphi$ pensado em $R_\mathfrak{p}$ é $\ker\varphi_\mathfrak{p}$. Obtemos que com isso que (c) e (d) são equivalentes; isto completa a primeira parte da prova.

Agora, suponhamos também que R é de tipo finito. Logo, pelo Teorema 1 e por [AM1969, Cor.11.27],

$$\dim R/\ker\varphi = \mathrm{trdeg}_k\varphi(R) = \mathrm{trdeg}_K\varphi(R) + \dim R/\mathfrak{p};$$

ou seja,

$$\mathrm{trdeg}_K\varphi(R) = \mathrm{codim}(V(\mathfrak{p}), V(\ker\varphi)). \tag{3.2}$$

Se estamos supondo que as afirmações de (a) até (d) são verificadas, então $X = V(\ker\varphi)$ é a única componente irredutível de $\mathrm{Spec}(R)$ contendo $V(\mathfrak{p})$. De (3.2), sabemos que esta componente tem codimensão correta; ou seja, (e) é verificado.

Reciprocamente, suponhamos que (e) é satisfeito; ou seja existe uma única componente irredutível X de $\mathrm{Spec}(R)$ contendo $V(\mathfrak{p})$ tal que

$$\mathrm{trdeg}_K \varphi(R) = \mathrm{codim}(V(\mathfrak{p}), X).$$

Notamos que $V(\ker \varphi)$ é um conjunto irredutível fechado em $\mathrm{Spec}(R)$, que contém $V(\mathfrak{p})$. Usando isso e (3.2), resulta que $X = V(\ker \varphi)$; segue, que $\ker \varphi$ é o único primo minimal contido em $\mathfrak{p}$. Usando (3.1), obtemos que, como antes, a imagem de $\varphi_{\mathfrak{p}}^*$ é densa em $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$, isso é, todos os elementos em $\ker \varphi_{\mathfrak{p}}$ são nilpotentes. Logo, $\varphi_{\mathfrak{p}}$ é injetiva, uma vez que $R_{\mathfrak{p}}$ é reduzido; portanto, a prova está completa. $\square$

O seguinte corolário generaliza os resultados em [BLL2003, Chapter 1.] (ver Observação 20).

Corolário 19. *Sejam R uma k-álgebra de tipo finito sem divisores de zero, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ e $K = k(\mathfrak{p})$. Se $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ é uma derivação tal que $D(\mathfrak{p}) \not\subset \mathfrak{p}$, então existe uma solução não trivial $\varphi : R \to K[[t]]$ passando por $\mathfrak{p}$ e as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $(R_{\mathfrak{p}}, D)$ *é simples.*

(b) $\varphi_{\mathfrak{p}}$ *é injetiva.*

(c) a imagem de $\varphi_{\mathfrak{p}}^*$ *é densa em* $\mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$.

(d) $\mathrm{trdeg}_K \varphi(R) = \mathrm{codim}(V(\mathfrak{p}), \mathrm{Spec}(R))$.

Demonstração. O Lema 6 garante a existência de uma solução $\varphi : R \to K[[t]]$ de D passando por $\mathfrak{p}$. Mais que isso, segue do Teorema 11(a) que esta solução φ é não trivial, uma vez que a derivação D não estabiliza o ideal $\mathfrak{p}$ e disso resulta que a aplicação $\epsilon_{\mathfrak{p}} \circ D : R \to k(\mathfrak{p})$ não é nula.

Finalmente, como neste caso R, e então $R_{\mathfrak{p}}$, não tem divisores de zero, o corolário segue imediatamente do Teorema 18. $\square$

Observação 20. Se $R = k[x, y_1, \ldots, y_r]$, $\mathfrak{p}$ é o ideal maximal $\mathfrak{m} = (x - \alpha, y_1 - \beta_1, \ldots, y_r - \beta_r)$, $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r) \in k^{r+1}$, e $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ é uma derivação, então $D(\mathfrak{m}) \not\subset \mathfrak{m}$ se, e somente se, $D = g\partial_x + \sum_{i=1}^{r} f_i \partial_{y_i}$, onde $g, f_1, \ldots, f_r \in k[x, y_1, \ldots, y_r]$ são polinômios e não são todos elementos em $\mathfrak{m}$. Usando a unicidade de uma solução não trivial para (R, D), passando através de $\mathfrak{m}$, obtemos uma solução $\varphi_{\mathfrak{m}}$ de $(R_{\mathfrak{m}}, D)$.

Se escrevemos

$$x(t) := \varphi_{\mathfrak{m}}(x), y_i(t) := \varphi_{\mathfrak{m}}(y_i),$$

com $i \in \{1, \ldots, r\}$, então podemos parafrasear o Corolário 19 na seguinte forma: $(R_{\mathfrak{m}}, D)$ é simples se, e somente se, $x(t), y_1(t), \ldots, y_r(t)$ são transcendentes sobre k (Precisamente o que foi mostrado em [BLL2003, Thm. 1.1]).

Como aplicação do Teorema 18, caracterizamos a simplicidade de aneis locais onde a derivação é localmente nilpotente:

Observação 21. *Derivações Localmente Nilpotentes.* Seja (R, D) um anel diferencial onde D é uma derivação localmente nilpotente, i.e. para cada $a \in R$ existe um inteiro positivo n tal que $D^n(a) = 0$. Suponhamos que R é um anel local (Noetheriano) com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Seja ℓ o inteiro positivo mínimo tal que $0 = D^{\ell}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. Então, D estabiliza o ideal não nulo gerado por $D^{\ell-1}(\mathfrak{m})$.

Suponhamos que $\ell > 1$ e considere um solução não trivial de D passando por $\mathfrak{m}$. De acordo com o Teorema 11 e sua prova, sabemos que o núcleo de uma tal solução coincide com maior ideal $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ que é estável por D. Usando a solução dada pelo Lema 6, resulta que

$$\mathfrak{q} = \{a \in R; D^i(a) \in \mathfrak{m}, i = 0, \ldots, \ell - 1\}.$$

Pelo Teorema 18, concluímos que se (R, D) é simples, então as seguintes condições se verificam:

- Existem $a_1, \ldots, a_s \in R$ e $x_1, \ldots, x_s \in \mathfrak{m}$ tais que $\sum_{i=1}^{s} a_i D^{\ell-1}(x_i) = 1$.

- $a \in \mathfrak{m}, D(a) \in \mathfrak{m}, \ldots, D^{\ell-1}(a) \in \mathfrak{m}$ implica $a = 0$.

Reciprocamente, a segunda condição acima implica que (R, D) é simples.

A segunda parte do próximo resultado é essencialmente [Ha1974, Thm. 2].

Corolário 22. *Seja S uma k-álgebra local e Noetheriana com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(S)$. Então (S, D) é simples se, e somente se, existe uma solução injetiva passando por $\mathfrak{m}$. Em particular, (S, D) é isomorfo ao anel diferencial (S_0, D_0), onde S_0 é uma k-subalgebra de $K[[t]]$, $K = k(\mathfrak{m})$, que é estável por ∂_t e $D_0 := \partial_t|_{S_0}$.*

Demonstração. Note que a simplicidade implica que $D(\mathfrak{m}) \not\subset \mathfrak{m}$; com isto, sabemos que D admite uma solução não trivial (Teorema 11(a)). Pelo Teorema 18, obtemos que a derivação D de S é simples se, e somente se, existe uma solução injetiva, digamos $\varphi : S \to K[[t]]$. Para finalizar, tomando $S_0 = \varphi(S)$, a afirmação é verificada. □

Observação 23. Note que $D(\mathfrak{m}) \not\subset \mathfrak{m}$ corresponde a dizer que D envia um elemento que não é unidade de S em uma unidade de S. Além disto, no caso em que S é um anel completo o Lema de Zariski ([Zar1965, Lemma 4] ou [Sei1967, page 29]) afirma que $S = B[[x]]$, onde B é um subanel de S que é anulado por D; este resultado oferece uma espécie de versão algébrica para o Teorema do Fluxo Tubular para equações diferenciais que afirma que, em uma vizinhança de um ponto não singular, o fluxo da equação é equivalente ao campo constante não nulo. Em [Ha1974, Thm. 2], o autor prova a segunda parte do Corolário 22 como uma consequência do Lema de Zariski.

Agora vejamos um pouco da simplicidade no completamento de uma k-álgebra de tipo finito, com respeito a um ideal maximal. Por exemplo, suponhamos $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ e seja $\varphi : R \to k[[t]]$ a única solução passando por $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$, associada a derivação D. Pelo Corolário 22, sabemos que $\ker \varphi \neq 0$, a menos que

$n = 1$ e $D = f\partial_{x_1}$ para certo $f \in k[[x_1]]$ com $f(0) \neq 0$. Mais especificamente, temos:

Teorema 24. *Seja R o quociente de $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ por um ideal I. Se $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$, então (R, D) é simples se, e somente se, D provém de uma derivação $\widehat{D} \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(k[[x_1, \ldots, x_n]])$ que admite uma única solução $\widehat{\varphi} : k[[x_1, \ldots, x_n]] \to k[[t]]$, passando pelo ideal maximal $(x_1, \ldots, x_n)$, tal que $\ker \widehat{\varphi} = I$.*

Demonstração. Seja $\varphi : R \to k[[t]]$ a solução de D passando por $(x_1, \ldots, x_n)$. Note que todo elemento em $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ é proveniente de uma certa derivação $\widehat{D}$ em $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(k[[x_1, \ldots, x_n]])$ que estabiliza I. Seja $\widehat{\varphi} : k[[x_1, \ldots, x_n]] \to k[[t]]$ a solução de $\widehat{D}$ passando por $(x_1, \ldots, x_n)$. Consideramos o morfismo quociente

$$\pi : (k[[x_1, \ldots, x_n]], \widehat{D}) \to (R, D),$$

$\pi(x_i) = \bar{x}_i := x_i + I$. Assim, $\varphi \circ \pi$ é uma solução de $\widehat{D}$ passando por $\pi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Logo, pela unicidade da solução, sabemos que $\varphi \circ \pi = \widehat{\varphi}$. Além disso, lembramos que $I \subset \ker \widehat{\varphi}$, pois $\ker \widehat{\varphi}$ é o maior ideal estável por $\widehat{D}$. Pelo Teorema 18, (R, D) é simples se, e somente se, $\ker(\varphi) = 0 = \overline{I}$. Seja $\alpha \in \ker \widehat{\varphi}$, então $\widehat{\varphi}(\alpha) = 0 = \varphi(\pi(\alpha))$. Isto é, $\pi(\alpha) \in \ker(\varphi)$. Portanto, (R, D) é simples se, e somente se, $\ker \widehat{\varphi} = I$. □

3.2 Isotropia de Derivações de Shamsuddin

Lembramos que o grupo $\mathrm{Aut}(k[x_1,\ldots,x_n])$ age em $Der_k(k[x_1,\ldots,x_n])$ da seguinte maneira:

$$(\rho, D) \mapsto \rho^{-1} \circ D \circ \rho = \rho^{-1} D \rho.$$

Além disso, o subgrupo de *isotropia* de $D \in Der_k(k[x_1,\ldots,x_n])$, com respeito a essa ação, é

$$\mathrm{Aut}(k[x_1,\ldots,x_n]])_D := \{\rho \in \mathrm{Aut}(k[x_1,\ldots,x_n])/\rho D = D\rho\}.$$

Nesta seção estudaremos o grupo de isotropia de uma derivação de Shamsuddin simples em $k[x,y]$. Em [No1994, §13.3], há inúmeros exemplos destas derivações e também está apresentado um critério para determinar a simplicidade; além disto, Y.Lequain [Leq2008] apresentou um algorítmo para determinar quando uma derivação de Shamsuddin é simples. Porém, antes disto, o seguinte exemplo mostra que a isotropia de uma derivação arbitrária pode ser complicada.

Exemplo 25. Sejam $d = \partial_x \in \mathrm{Der_k}(k[x,y])$ e $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x,y])_d$. Note que d não é uma derivação simples; de fato, seja qual for $u(y) \in k[y]$, o ideal gerado por $u(y)$ é sempre invariante. Escrevemos

$$\rho(x) = f(x,y) = a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_t(x)y^t$$

$$\rho(y) = g(x,y) = b_0(x) + b_1(x)y + \ldots + b_s(x)y^s.$$

Como $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x,y])_d$, obtemos duas condições:

1) $\rho(d(x)) = d(\rho(x))$.

Isto é,

$$1 = d(a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_t(x)y^t) = d(a_0(x)) + d(a_1(x))y + \ldots + d(a_t(x))y^t.$$

Logo, $d(a_0(x)) = 1$ e $d(a_j(x)) = 0$, $j = 1, \ldots, t$. Portanto, $\rho(x)$ é da forma

$$\rho(x) = x + c_0 + c_1 y + \ldots + c_t y^t, \quad c_i \in k.$$

2) $\rho(d(y)) = d(\rho(y))$.

Analogamente,

$$0 = d(b_0(x) + b_1(x)y + \ldots + b_s(x)y^s) = d(b_0(x)) + d(b_1(x))y + \ldots + d(b_s(x))y^s.$$

Ou seja, $b_i(x) = d_i$ com $d_i \in k$. Portanto, $\rho(y)$ é da forma

$$\rho(y) = d_0 + d_1 y + \ldots + d_s y^s, \quad d_i \in k.$$

Assim, $\mathrm{Aut}(k[x,y])_d$ contém o subgrupo de automorfismos afins da forma

$$(x + uy + r, uy + s),$$

com $u, r, s \in k$. Em particular, $\mathrm{Aut}(k[x,y])_d$ não é finita.

Note que $\mathrm{Aut}(k[x,y])_d$ contém também o conjunto dos automorfismos da forma $(x + p(y), y)$, com $p(y) \in k[y]$.

Agora, vamos determinar de fato a isotropia. Usando apenas as condições 1 e 2, obtivemos que $\rho = (x + p(y), q(y))$, com $p(y), q(y) \in k[y]$. Porém, ρ é um automorfismo, ou seja, o determinante da matriz Jacobiana deve ser uma constante não nula. Assim, $|J_\rho| = q'(y) = c$, $c \in k^*$. Portanto, $\rho = (x + p(y), ay + c)$, com $p(y) \in k[y]$ e $a, b \in k$. Logo $\mathrm{Aut}(k[x,y])_d$ não é finita e, mais que isso, possui elementos com primeira componente de qualquer grau.

Lema 26. *Sejam R um anel comutativo, d uma derivação de R e $h(t) \in R[t]$, com t uma indeterminada. Então, podemos estender d a uma única derivação $\tilde{d}$ do anel de polinômios $R[t]$ tal que $\tilde{d}(t) = h(t)$.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que se existe uma derivação $\tilde{d}$ de $R[t]$ que estende d tal que $\tilde{d}(t) = h(t)$, ela é única. Denotamos por d' uma outra derivação que estende d e satisfaz $d'(t) = h(t)$. Seja $f \in R[t]$, escrevendo $f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, obtemos

$$d'(f) = \sum_{i=0}^{n} d'(a_i t^i) = \sum_{i=0}^{n} (d(a_i)t^i + a_i i t^{i-1} d'(t)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} d(a_i)t^i + \sum_{i=1}^{n} a_i i t^{i-1} d'(t) = f^d(t) + \partial_t(f)h(t),$$

onde $f^d(t)$ é o polinômio obtido derivando os coeficientes de $f(t)$. Assim, a unicidade de uma tal derivação $\tilde{d}$ de $R[t]$ está garantida.

Finalmente, com uma simples verifação, note que

$$\tilde{d}(f) = f^d(t) + \partial_t(f)h(t),$$

define uma derivação de $R[t]$ que estende d e satisfaz $\tilde{d}(t) = h(t)$.

□

Usaremos o seguinte resultado de Shamsuddin [Sh1977], para o qual incluímos uma demostração detalhada seguindo a linha de [No1994, Theorem 13.2.1].

Teorema 27. *Seja R um anel e d uma derivação simples de R. Seja $\tilde{d}$ a derivação do anel de polinômios $R[t]$ de modo que $\tilde{d}(t) = at + b$, onde $a, b \in R$ e $\tilde{d}(r) = d(r)$ para todo $r \in R$; então, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *$\tilde{d}$ é simples.*

(2) *Não existe $r \in R$ tal que $d(r) = ar + b$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Se r é um elemento em R tal que $d(r) = ar + b$, então afirmamos que $(t - r)$ é um ideal próprio invariante por $\tilde{d}$. De fato,

$$\tilde{d}(t - r) = \tilde{d}(t) - \tilde{d}(r) = at + b - ar - b = a(t - r) \in (t - r)R.$$

Além disto, este ideal $(t-r)$ é próprio, pois se $1=(t-r)u$ para certo $u \in R[t]-\{0\}$, então

$$0=\deg(1)=\deg((t-r)u)=1+\deg u \geqslant 1.$$

Portanto, $\tilde{d}$ não é simples.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seja I um ideal próprio invariante por $\tilde{d}$. Comecemos observando que, neste caso, $I \cap R = 0$. De fato, primeiramente afirmamos que $I \cap R$ é um ideal de R invariante por d. De fato, tomando $m \in I \cap R$, temos que $d(m) \in R$, uma vez que d é uma derivação de R e como $m \in I \cap R$ e I um ideal de $R[t]$ próprio invariante por $\tilde{d}$. Obtemos assim, $d(m)=\tilde{d}(m) \in I$, logo $d(m) \in I \cap R$. Mais que isto, $I \cap R$ é um ideal próprio, pois $1 \notin I$ e, desta maneira, $I \cap R \neq R$. Como d é simples, $I \cap R = 0$.

Definimos agora

$$n=\min\{\deg(f); f \in I, f \neq 0\}$$

e, também,

$$\sigma(I)=\{0\} \cup \{r \in R; r \text{ é coeficiente líder de } f \text{ e } \deg(f)=n\}.$$

Afirmamos que $\sigma(I) \neq \{0\}$, $n \geqslant 1$ e $\sigma(I)$ é um ideal de R.

Primeiro, I é um ideal próprio, então para qualquer $f \in I$, com $f \neq 0$, temos que $\deg f \geqslant 1$ e, assim, $n \geqslant 1$.

Seja $g \in I$ de grau n e r seu coeficiente líder, então $r \neq 0$ e $r \in \sigma(I)$. Com isto, $\sigma(I) \neq \{0\}$. Uma breve verificação, nos garante que $\sigma(I)$ é um ideal de R.

Agora, afirmamos que, além disto, $\sigma(I)$ é um ideal invariante por d. Sejam $r \in \sigma(I)$, $f=\sum_{i=0}^{n} r_i t^i$ tal que $\deg(f)=n$, $r_n=r$ e

$$g=\tilde{d}(f)-naf,$$

em que a é tal que $\tilde{d}(t) = at + b$. Claramente $g \in I$, pois $f \in I$ e I é um ideal invariante por $\tilde{d}$. Mais que isto, note que

$$\begin{aligned} g = \tilde{d}(f) - naf &= \tilde{d}(\sum_{i=0}^{n} r_i t^i) - na \sum_{i=0}^{n} r_i t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \tilde{d}(r_i)t^i + \sum_{i=0}^{n} r_i \tilde{d}(t^i) - na \sum_{i=0}^{n} r_i t^i = \\ &= \sum_{i=0}^{n} d(r_i)t^i + \sum_{i=1}^{n} r_i i t^{i-1} \tilde{d}(t) - na \sum_{i=0}^{n} r_i t^i = \\ &= \sum_{i=0}^{n} d(r_i)t^i + \sum_{i=1}^{n} r_i i t^{i-1}(at+b) - na \sum_{i=0}^{n} r_i t^i. \end{aligned}$$

Os coeficientes de t^n e t^{n-1} são respectivamente

$$d(r) + rna - nra = d(r)$$

$$d(r_{n-1}) + ar_{n-1}(n-1) + rnb - nar_{n-1} = rnb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1}.$$

Se $d(r) \neq 0$, obtemos que $\deg(g) = n$, assim $d(r) \in \sigma(I)$. Se $d(r) = 0$, também $d(r) \in \sigma(I)$. Logo, $\sigma(I)$ é um ideal de R invariante por d.

Lembramos que d é uma derivação simples e, também, $\sigma(I) \neq 0$; ou seja, $\sigma(I) = R$. Desta maneira, existe um polinômio $p \in I$ de grau n com coeficiente líder 1, denotamos por

$$p = t^n + r_{n-1}t^{n-1} + \ldots + r_1 t + r_0,$$

onde $r_{n-1}, \ldots, r_0 \in R$. Definimos os polinômio

$$h = \tilde{d}(p) - nap,$$

utilizando os mesmos argumentos acima, obtemos

$$h = d(1)t^n + (nb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1})t^{n-1} + s_{n-2}t^{n-2} + \ldots + s_1 t + s_0,$$

com $s_{n-2}, \ldots, s_0 \in R$. Como $d(1) = 0$,

$$h = (nb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1})t^{n-1} + s_{n-2}t^{n-2} + \ldots + s_1 t + s_0.$$

Usando a minimalidade de n, deduzimos que $h = 0$, então $nb + d(r_{n-1}) - ar_{n-1} = 0$. Definindo $l = -n^{-1}r_{n-1}$, obtemos que $nb + d(-nl) - a(-nl) = 0$. Assim, $nb - (d(n)l + nd(l)) + anl = 0$, mas $d(n) = 0$; então, $nb - nd(l) + anl = 0$. Portanto, $d(l) = al + b$.

Finalmente, fica provado que existe $l \in R$ tal que $d(l) = al + b$. $\square$

Definição 28. *Uma derivação de* Shamsuddin *d em $k[x, y]$ é uma derivação da forma*

$$d = \partial_x + (a(x)y + b(x))\partial_y,$$

onde $a(x), b(x) \in k[x]$.

Exemplo 29. Seja d a derivação de $k[x, y]$ da seguinte forma

$$d = \partial_x + (xy + 1)\partial_y.$$

Escrevendo $R = k[x]$, sabemos que R é ∂_x-simples e, tomando $a = x$ e $b = 1$, estamos exatamente nas condições do Teorema 27. Portanto, sabemos que d é simples se, e somente se, não existe $r \in R$ tal que $\partial_x(r) = xr + 1$; mas o lado direito da equivalência é vericado pelo grau de r. Portanto, pelo Teorema 27, d é uma derivação simples de $k[x, y]$.

Lema 30. *([No1994, Proposition. 13.3.2]) Seja $d = \partial_x + (a(x)y + b(x))\partial_y$, onde $a(x), b(x) \in k[x]$ uma derivação de Shamsuddin. Se d é simples, então $a(x) \neq 0$ e $b(x) \neq 0$.*

Demonstração. Se $b(x) = 0$, então o ideal (y) é d-invariante. Se $a(x) = 0$, seja $h(x) \in k[x]$ tal que $h' = b(x)$, então o ideal $(y - h)$ é d-invariante. $\square$

Conforme os polinômios $a(x)$ e $b(x)$, pode-se determinar a simplicidade das derivações de Shamsuddin (ver ([No1994, §13.3])).

Teorema 31. *Seja $D \in \mathrm{Der_k}(k[x,y])$ uma derivação de Shamsuddin. Se D é simples, então $\mathrm{Aut}(k[x,y])_D = \{id\}$.*

Demonstração. Escrevemos $\rho(x) = f(x,y)$ e $\rho(y) = g(x,y)$. Sendo D uma derivação de Shamsuddin, escrevemos

$$D(x) = 1,$$

$$D(y) = a(x)y + b(x),$$

onde $a(x), b(x) \in k[x]$

Como $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x,y])_D$, obtemos duas condições:

1) $\rho(D(x)) = D(\rho(x))$.

2) $\rho(D(y)) = D(\rho(y))$.

Assim, pela condição **1**, $D(f(x,y)) = 1$ e escrevendo

$$f(x,y) = a_0(x) + a_1(x)y + ... + a_s(x)y^s,$$

com $s \geq 0$, temos

$$D(a_0(x)) + D(a_1(x))y + a_1(x)(a(x)y + b(x)) + \dots$$

$$+D(a_s(x))y^s + sa_s(x)y^{s-1}(a(x)y + b(x)) = 1$$

Igualando os coeficientes em y^s, resulta

$$D(a_s(x)) = -sa_s(x)a(x),$$

o que não pode ocorrer dado que a simplicidade, pelo Lema 30, implica que $a(x) = 0$. Assim s=0, isto é $f(x,y) = a_0(x)$; então $D(a_0(x)) = 1$ e $f = x + c$, com c constante.

Usando a condição **2**,

$$\begin{aligned} D(g(x,y)) &= \rho(a(x)y + b(x)) \\ &= \rho(a(x))\rho(y) + \rho(b(x)) \\ &= a(x+c)g(x,y) + b(x+c) \end{aligned}$$

Escrevendo $g(x,y) = b_0(x) + b_1(x)y + \ldots + b_t(x)y^t$; onde, pela parte anterior, podemos supor que $t > 0$, pois ρ é um automorfismo. Temos

$$\begin{aligned} a(x+c)g(x,y) + b(x+c) = \quad & D(b_0(x)) + D(b_1(x))y + b_1(x)(a(x)y + b(x)) + \\ & + \ldots + D(b_t(x))y^t + tb_t(x)y^{t-1}(a(x)y + b(x)). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes em y^t, obtemos

$$D(b_t(x)) + tb_t(x)a(x) = a(x+c)b_t(x)$$

Então, $D(b_t(x)) = b_t(x)(-ta(x) + a(x+c))$. Logo, $b_t(x)$ é constante e, consequentemente, $a(x+c) = ta(x)$. Igualando os coeficientes de maior grau na última igualdade, obtemos $t = 1$ e, com isso, $b_1(x) = b_1$ é uma constante. Além disso, se $a(x)$ não é constante, como $a(x+c) = a(x)$, afirmamos que $c = 0$. De fato, se $c \neq 0$ obtemos que $a(x)$ tem infinitas raízes distintas. Se $a(x)$ é constante, então a derivação D não é simples (segue de [Leq2008, Lemma.2.6 and Theorem.3.2] ou, para mais detalhes, ver os mesmos resultados citados na dissertação [Wer2005, Lema.4.8.(d) e Teorema.4.9.]); assim, temos $c = 0$.

Concluímos que $g(x,y) = b_0(x) + b_1y$ e, usando novamente a condição 2,

$$\begin{aligned} D(g(x,y)) = \quad & D(b_0(x)) + b_1(a(x)y + b(x)) \\ & = a(x)(b_0(x) + b_1y) + b(x). \end{aligned}$$

Considerando o termo independente de y,

$$D(b_0(x)) = b_0(x)a(x) + b(x)(1 - b_1) \tag{3.3}$$

Se $b_1 \neq 1$, consideramos a derivação D' tal que

$$D'(x) = 1, \quad D'(y) = a(x)y + b(x)(1 - b_1).$$

Em [No1994, Proposition. 13.3.3], observa-se que D é simples se, e somente se, D' é simples. Além disto, pelo Teorema 27, não existe $h(x)$ em $K[x]$ tal que

$$D(h(x)) = h(x)a(x) + b(x)(1 - b_1).$$

O que contradiz a equação (3.3). Assim, $b_1 = 1$ e $D(b_0(x)) = b_0(x)a(x)$, como D é simples sabemos que $a(x) \neq 0$, logo $b_0(x) = 0$, mostrando que $\rho = id$. $\square$

3.3 Sobre a Isotropia de Derivações Simples

Vamos estudar, nesta seção, algumas características de elementos na isotropia de uma derivação simples de $k[x,y]$. Mais precisamente, obtemos alguns resultados que revelam características dos elementos em $\mathrm{Aut}(k[x,y])_D$. Para isto, contamos com algumas ferramentas apresentadas nas seções anteriores e, também, do conceito de grau dinâmico de um automorfismo.

Proposição 32. *Sejam $D \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(k[x_1,...,x_n])$ simples e $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x_1,...,x_n])_D$. Suponhamos que existe um ideal maximal $\mathfrak{m} \subset k[x_1,...,x_n]$ tal que $\rho(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, então $\rho = id$.*

Demonstração. Seja φ a solução de D passando por $\mathfrak{m}$. Sabemos que $\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \varphi D$ e $\varphi^{-1}((t)) = \mathfrak{m}$. Se $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x_1,...,x_n])_D$, então

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi\rho = \varphi D\rho = \varphi\rho D.$$

Ou seja, $\varphi\rho$ é uma solução de D passando por $\rho^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. Portanto, pela unicidade da solução (Teorema 11(c)), $\varphi\rho = \varphi$. Como φ é injetiva, pois $k[x_1,...,x_n]$ é D-simples e φ é não-trivial, concluímos que $\rho = id$.

□

F. Lane em [Lane75] provou que todo k-automorfismo ρ de $k[x,y]$ deixa invariante um ideal não-trivial I de $k[x,y]$, sobre um corpo k algebricamente fechado; isto é, $\rho(I) \subseteq I$. Em [Sh1982], A. Shamsuddin provou que este resultado não se estende a $k[x,y,z]$, provando que o k-automorfismo dado por $\chi(x) = x+1$, $\chi(y) = y+xz+1$ e $\chi(z) = y + (x+1)z$ não possui ideal não trivial invariante.

Note que, de modo adicional, temos que ρ deixa invariante um ideal não-trivial I se, e somente se, $\rho(I) = I$, pois $k[x, y]$ é Noetheriano. De fato, a cadeia ascendente

$$I \subset \rho^{-1}(I) \subset \rho^{-2}(I) \subset \ldots \subset \rho^{-l}(I) \subset \ldots$$

deve estabilizar; ou seja, existe um número inteiro positivo n tal que $\rho^{-n}(I) = \rho^{-n-1}(I)$, logo $\rho(I) = I$. Suponhamos que $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x, y])_D$ e D é uma derivação simples de $k[x, y]$. Se este ideal I, invariante por ρ, é maximal, pela Proposição 32, temos que $\rho = id$.

Suponhamos que I é radical. Ou seja, podemos escrever, pela decomposição em primários, I da forma

$$I = (\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s) \cap (\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t),$$

onde cada $\mathfrak{m}_i$ é um ideal maximal e cada $\mathfrak{p}_j$ é um ideal primo de altura 1 tal que $\mathfrak{p}_j = (f_j)$, com f_j irredutível (por [Kaplan74, Theorem 5.]). Se

$$\rho(\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s) = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s,$$

afirmamos que alguma potência $N \in \mathbb{N}$ de ρ irá estabilizar, por exemplo, o ideal maximal $\mathfrak{m}_1$. Com efeito, sabemos que $\rho(\mathfrak{m}_1) \supset \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s$, como $\rho(\mathfrak{m}_1)$ é primo, temos $\rho(\mathfrak{m}_1) \supseteq \mathfrak{m}_i$, para algum $i = 1, \ldots, s$ ([AM1969, Prop.11.1.(ii)]). Assim, $\rho(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_i$; ou seja, alguma potência $N \in \mathbb{N}$ de ρ irá estabilizar o ideal maximal $\mathfrak{m}_1$. Segue então, da Proposição 32, que $\rho^N = id$.

Além disso, sempre temos que $\rho(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t$. De fato, escrevendo $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t = (f_1 \ldots f_t)$, com f_i irredutível, escolhemos $h \in \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s$ tal que $\rho(h) \notin \mathfrak{p}_1$. Note que esse h sempre existe, pois caso contrário temos $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s \subset \mathfrak{p}_1$, então $\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{m}_i$, para algum $i = 1, \ldots, s$([AM1969, Prop.11.1.(ii)]): uma contradição. Logo, como $hf_1 \ldots f_t \in I$, obtemos $\rho(h)\rho(f_1) \ldots \rho(f_t) \in I \subset \mathfrak{p}_1$. Logo, $\rho(f_1 \ldots f_t) \in \mathfrak{p}_1$. De modo análogo, concluímos o mesmo para os demais primos $\mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, t$. Portanto, $\rho(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t) = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_t$.

Com o próximo corolário, obtemos algumas consequências sobre este último caso.

Todo polinômio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ define uma aplicação $f : k^n \to k$ tal que $(a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$. Um ponto $P = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ é chamado um zero de f se $f(P) = 0$. O conjunto dos pontos que são zeros de f é

$$V(f) := \{P \in k^n |\ f(P) = 0\}.$$

Em $k[x, y]$, um conjunto da forma $V(f)$, para algum $f \in k[x, y]$ não constante, é chamado *curva algébrica*. Se $f = q_1 \dots q_l$, com q_i irredutíveis distintos dois a dois, então os *pontos singulares* de $V(f)$ é o conjunto dos pontos em $V(f)$ tal que o gradiente de f, aplicado neste ponto, se anula. Um ponto não singular de $V(f)$ corresponde ao anel local associado ser regular (ver [Hulek, Chapter 3.]).

Seja $g \in k[x, y]$ irredutível. Então $\mathrm{Frac}(k[x, y])/(g))$ é k-isomorfo ao corpo de funções racionais de uma curva lisa projetiva C_f (ver [Hartsh, Thm.6.9.]). O *gênero* de $V(g)$ é, por definição, a dimensão do espaço vetorial das 1-formas diferenciais sobre C_f (ver [Hulek, Chapter 6.]).

Corolário 33. *Sejam $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x, y])_D$, D uma derivação simples de $k[x, y]$ e $I = (f)$, com f reduzido, um ideal de altura 1 tal que $\rho(I) = I$. Se $V(f)$ é singular ou alguma componente irredutível C_i de $V(f)$ tem gênero maior ou igual a 2, então ρ é de ordem finita.*

Demonstração. Suponhamos que $V(f)$ não é lisa e seja q uma singularidade de $V(f)$. Como o conjunto dos pontos singulares é preservado por ρ, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^N(q) = q$. Pelo fato que $\rho \in \mathrm{Aut}(k[x, y])_D$, obtemos da Proposição 32 que $\rho^N = id$.

Se, por exemplo, C_i é uma componente irredutível de $V(f)$ que tem gênero maior ou igual a 2. Note que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^M(C_i) = C_i$. Por [FK1992, Thm.

Hunvitz, p.241], o número de elementos em $\mathrm{Aut}(C_i)$ é finito; de fato, $\#(\mathrm{Aut}(C_i)) < 84(g_i - 1)$, onde g_i é o gênero de C_i. Assim, ρ tem ordem finita.

□

Tomamos, para o restante dessa seção, o corpo base $k = \mathbb{C}$.

Dada uma aplicação polinomial,

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

definimos o grau de f como $\deg(f) := \max(\deg(f_1), \deg(f_2))$. Assim, define-se o *grau dinâmico* de f (ver [Silv12] para mais informações) como

$$\delta(f) := \lim_{n\to\infty} (\deg(f^n))^{\frac{1}{n}}.$$

Exemplo 34. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, dada por

$$\varphi(x, y) = (y, xy).$$

Note que

$$\varphi^n(x, y) = (x^{F_{n-1}} y^{F_n}, x^{F_n} y^{F_{n+1}}),$$

onde F_n é o n-ésimo número de Fibonacci e $\deg(\varphi^n) = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$. Então,

$$\delta(\varphi) = \lim_{n\to\infty} F_{n+2}^{\frac{1}{n}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

é a proporção áurea.

Exemplo 35. Considere a aplicação $\psi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, dada por

$$\psi(x, y) = (x, y + \varphi(x)),$$

com $\varphi(x) \in \mathbb{C}[x]$. Note que $\psi^n(x, y) = (x, y + n\varphi(x))$. Logo, se $\deg(\varphi) \geqslant 1$, obtemos $\deg(\psi^n) = \deg(\varphi)$.

Portanto,

$$\delta(\psi) = \lim_{n\to\infty} \deg(\varphi)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Se $\deg(\varphi) = 0$, então $\deg(\psi^n) = 1$. Da mesma forma, $\delta(\psi) = 1$.

Corolário 36. *Se* $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[x,y])_D$ *e* D *é uma derivação simples de* $\mathbb{C}[x,y]$*, então* $\delta(\rho) = 1$*.*

Demonstração. Suponhamos $\delta(\rho) > 1$. De acordo com [FM1989, Theorem 3.1.], ρ^n tem exatamente $\delta(\rho)^n$ pontos fixos contados com multiplicidades. Logo, pela Proposição 32, $\rho = id$, cujo grau dinâmico é 1. $\square$

Capítulo 4

Simplicidade e Bases Comutativas de Derivações em $k[x_1, \ldots, x_n]$ e $k[[x_1, \ldots, x_n]]$

Inicialmente, R denotará o anel de polinômios $k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre k ou o anel $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ das séries formais sobre k.

Seja $\mathfrak{D} \subset \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ uma família não vazia de k-derivações. Um ideal I de R é chamado $\mathfrak{D}$-*invariante* se $d(I) \subset I$ para todo $d \in \mathfrak{D}$. Por exemplo, os ideais triviais 0 e R são sempre $\mathfrak{D}$-invariantes. Se R não possui outros ideais $\mathfrak{D}$-invariantes, é chamado $\mathfrak{D}$-*simples*. Se $\mathfrak{D} = \{d\}$, recuperamos a definição dada em §1.1 para a simplicidade de uma derivação.

As famílias de derivações que comutam e suas propriedades tem sido estudadas por diversos autores: Jiantao Li e Xiankun Du ([JX2012]), S. Maubach ([M2003]), A. Nowicki ([No1986]), A.P. Petravchuk ([Pet2010]), K. Retert ([Ret2006]), A. van den Essen ([Van00]). Por exemplo, A.P. Petravchuk provou que se duas derivações de $k[x,y]$ são linearmente independentes sobre k e comutam, então possuem um polinômio invariante comum ou são derivações de um tipo particular, chamadas de derivações Jacobianas; em ([JX2012]), os autores provaram o mesmo resultado para $k[x_1, \ldots, x_n]$ e, também, $k[[x_1, \ldots, x_n]]$; observamos que tal resultado encontra-se, também, provado por A. Nowicki em ([No1986]).

Outro interessante resultado, que utilizaremos mais adiante, afirma que a chamada Conjectura Jacobiana em $K[x_1, \ldots, x_n]$ é equivalente a que toda base comutativa de $\mathrm{Der_k}(R)$ seja localmente nilpotente ([No1986, Theorem 5.]).

Se $\mathfrak{D}$ é um conjunto de k-derivações de $k[x]$ que comutam (ver §4.1), então $k[x]$ é $\mathfrak{D}$-simples se, e somente se, é d-simples para alguma k-derivação $d \in \mathfrak{D}$ (ver [Ret2006, Corollary 2.10.]). Mais que isto, se $\mathfrak{D}$ é um conjunto de k-derivações de $k[x,y]$ que comutam, $\partial_x \in \mathfrak{D}$ e o anel é $\mathfrak{D}$-simples, então existe $d \in \mathfrak{D}$ tal que $k[x,y]$ é $\{\partial_x, d\}$-simples ([Ret2006]). Motivados por isto, primeiro descrevemos este resultado para o caso de n variáveis. Como aplicação, obtemos alguns corolários que relacionam isso com um trabalho de A. Nowicki sobre bases comutativas de $\mathrm{Der_k}(R)$. Mais precisamente, se $\mathfrak{D}$ é um conjunto de derivações que comutam tal que $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}} \in \mathfrak{D}$ e R é $\mathfrak{D}$-simples, então existe $d \in \mathfrak{D}$ de modo que R é $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, d\}$-simples; veremos que este conjunto $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, d\}$ é uma base comutativa para $\mathrm{Der_k}(R)$. Se $\partial_{x_n} \in \mathfrak{D}$, um exemplo trivial é $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\}$.

4.1 Simplicidade e Bases Comutativas

Se $d_1, d_2 \in \mathrm{Der_k}(R)$, dizemos que d_1 e d_2 comutam se $d_1 d_2 = d_2 d_1$.

Lema 37. *Uma derivação $d \in \mathrm{Der_k}(R)$ comuta com $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}$ se, e somente se,*

$$d = q_1(x_n)\partial_{x_1} + q_2(x_n)\partial_{x_2} + \ldots + q_n(x_n)\partial_{x_n},$$

onde $q_1(x_n), \ldots, q_n(x_n) \in k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$ se $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$).

Demonstração. É evidente que todas as derivações desta forma comutam com as derivações $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}$. Reciprocamente, seja

$$d^* = q_1^*(x_1, \ldots, x_n)\partial_{x_1} + q_2^*(x_1, \ldots, x_n)\partial_{x_2} + \ldots + q_n^*(x_1, \ldots, x_n)\partial_{x_n}$$

uma k-derivação de R que comuta com $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}$. Então

$$0 = d^*(\partial_{x_i}(x_1)) = \partial_{x_i}(d^*(x_1)) = \partial_{x_i}(q_1^*(x_1, \ldots, x_n))$$

para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Assim, $q_1^*(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$. Analogamente, podemos provar $q_i^*(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$ para $i = 2, \ldots, n-1$. □

Seja $\mathfrak{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ um conjunto finito de k-derivações de R que comutam com $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}$, mas não necessariamente entre si, tal que $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}} \in \mathfrak{D}$. Pelo Lema 37, cada δ_i é da forma

$$\delta_i = q_{(1,i)}(x_n)\partial_{x_1} + q_{(2,i)}(x_n)\partial_{x_2} + \ldots + q_{(n,i)}(x_n)\partial_{x_n},$$

com $q_{(j,i)} \in k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$). Se $q_{(n,i)}(x_n) \neq 0$ para algum i, denotamos $v_{\mathfrak{D}}(x_n)$ o máximo divisor comum de $q_{(n,1)}, \ldots, q_{(n,s)}$. Usando as notações anteriores, obtemos a seguinte caracterização.

Lema 38. *Seja* $\mathfrak{D}$ *tal* $v_{\mathfrak{D}}(x_n)$ *está definido. Então, o anel* R *é* $\mathfrak{D}$*-simples se, e somente se,* $v_{\mathfrak{D}}(x_n)$ *é uma unidade em* $k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$).

Demonstração. Se $v_{\mathfrak{D}}(x_n)$ não é uma unidade, cada δ_i deixa invariante o ideal não trivial $\langle v_{\mathfrak{D}}(x_n)\rangle$. Portanto, R não é $\mathfrak{D}$-simples.

Reciprocamente, suponhamos que $v_{\mathfrak{D}}(x_n)$ é uma unidade. Existem polinômios $r_i(x_n)$ tais que

$$\sum_{i=1}^{s} r_i(x_n)q_{(n,i)}(x_n) = v_{\mathfrak{D}}(x_n).$$

Multiplicando pelo inverso de $v_{\mathfrak{D}}(x_n)$, podemos supor que

$$\sum_{i=1}^{s} r_i(x_n)q_{(n,i)}(x_n) = 1.$$

Sem perda de generalidade, assumimos $\delta_1 = \partial_{x_1}, \ldots, \delta_{n-1} = \partial_{x_{n-1}}$; assim,

$$\sum_{i=n}^{s} r_i(x_n)q_{(n,i)}(x_n) = 1.$$

Seja I um $\mathfrak{D}$-ideal. Então, como I é estabilizado por cada δ_i, I é estabilizado por $r_i(x_n)\delta_i$, e, também então, pela k-derivação

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{s} r_i(x_n)\delta_i &= \left(\sum_{i=n}^{s} r_i(x_n)q_{(1,i)}(x_n)\right)\partial_{x_1} + \ldots + \left(\sum_{i=n}^{s} r_i(x_n)q_{(n,i)}(x_n)\right)\partial_{x_n} \\ &= u_1(x_n)\partial_{x_1} + \ldots + u_{n-1}(x_n)\partial_{x_n-1} + \partial_{x_n},\end{aligned}$$

onde $u_i(x_n) \in k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$).

Como $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}} \in \mathfrak{D}$, concluímos que I é estabilizado por ∂_{x_n}, logo I é $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, \partial_{x_n}\}$-estável. Portanto, I é trivial. $\square$

Note que, até o momento, estamos supondo que todas as k-derivações em $\mathfrak{D}$ comutam com $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}$, e não que todos os elementos de $\mathfrak{D}$ comutam entre si. Como consequência dos lemas anteriores, obtemos:

Teorema 39. *Seja $\mathfrak{D} = \{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ um conjunto com s derivações de R tal que $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}} \in \mathfrak{D}$. Então as derivações de $\mathfrak{D}$ comutam entre si se, e somente se, um dos seguintes casos ocorre:*

(a) Cada elemento δ_i de $\mathfrak{D}$ tem a forma $\delta_i = h_1^i(x_n)\partial_{x_1} + \ldots + h_{n-1}^i(x_n)\partial_{x_{n-1}}$, para certos $h_j^i(x_n) \in k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$).

(b) Existem $v_1(x_n), \ldots, v_n(x_n) \in k[x_n]$ (resp. $k[[x_n]]$), tais que para cada $\delta_i \in \mathfrak{D}$ existem escalares $\lambda_i, c_1^i, \ldots, c_{n-1}^i \in k$ satisfazendo

$$\delta_i = \sum_{l=1}^{n-1} (\lambda_i v_l(x_n) + c_l^i)\partial_{x_l} + \lambda_i v_n(x_n)\partial_{x_n}.$$

Se, além disto, R é $\mathfrak{D}$-simples, então $v_n(x_n)$ deve ser uma unidade não-nula. Neste caso, o seguinte conjunto faz com que R seja simples:

$$\left\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, \sum_{l=1}^{n-1}(v_l(x_n)+c_l)\partial_{x_l}+v_n(x_n)\partial_{x_n}\right\}.$$

Demonstração. Se (a) ou (b) é verificada, é claro que as k-derivações de $\mathfrak{D}$ comutam entre si.

Reciprocamente, seja $\mathfrak{D}=\{\delta_1,\ldots,\delta_s\}$ de acordo com as hipóteses do teorema. Pelo Lema 37, cada δ_i é da forma

$$\delta_i = q_{(1,i)}(x_n)\partial_{x_1}+q_{(2,i)}(x_n)\partial_{x_2}+\ldots+q_{(n,i)}(x_n)\partial_{x_n}.$$

Se $q_{(n,i)}(x_n)=0$ para $i=1,\ldots,s$, então estamos no caso (a). Caso contrário, algum $q_{(n,i)}$ é diferente de zero. Sem perda de generalidade, suponhamos que $q_{(n,1)}(x_n)\neq 0$. Observe que:

$$\delta_i(\delta_1(x_n)) = \delta_i(q_{(n,1)}(x_n)) = q_{(n,i)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(n,1)}(x_n)),$$

$$\delta_1(\delta_i(x_n)) = \delta_1(q_{(n,i)}(x_n)) = q_{(n,1)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(n,i)}(x_n)).$$

Como δ_i e δ_1 comutam,

$$q_{(n,i)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(n,1)}(x_n)) = q_{(n,1)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(n-1,i)}(x_n)).$$

Deduzimos que

$$\frac{-q_{(n,i)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(n,1)}(x_n))+q_{(n,1)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(n,i)}(x_n))}{(q_{(n,1)}(x_n))^2}=0.$$

Em outras palavras,

$$\partial_{x_n}\left(\frac{q_{(n,i)}(x_n)}{q_{(n,1)}(x_n)}\right)=0.$$

Logo, existe $\lambda_i\in k$ tal que $q_{(n,i)}(x_n)=\lambda_i q_{(n,1)}(x_n)$.

Por outro lado,

$$\delta_i(\delta_1(x_1)) = \delta_i(q_{(1,1)}(x_n)) = q_{(n,i)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(1,1)}(x_n)),$$

$$\delta_1(\delta_i(x_1)) = \delta_1(q_{(1,i)}(x_n)) = q_{(n,1)}(x_n)\partial_{x_n}(q_{(1,i)}(x_n)).$$

Como δ_i e δ_1 comutam e ambos $k[x_n]$ e $k[[x_n]]$ são domínios,

$$\lambda_i\partial_{x_n}(q_{(1,1)}(x_n)) = \partial_{x_n}(q_{(1,i)}(x_n)).$$

Então existe $c_1^i \in k$ tal que $q_{(1,i)}(x_n) = \lambda_i q_{(1,1)}(x_n) + c_1^i$. Argumentando de maneira análoga com as outras variáveis, provamos o resultado desejado.

Agora suponhamos que R é $\mathfrak{D}$-simples. Pelo Lema 38, o máximo divisor comum de $q_{(n,1)}(x_n), \ldots, q_{(n,s)}(x_n)$ é uma unidade. Portanto $q_{(n,1)}(x_n)$, que é um mdc, é uma unidade.

Como I é estabilizado por

$$\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, q_{(1,1)}(x_n)\partial_{x_1} + q_{(2,1)}(x_n)\partial_{x_2} + \ldots + q_{(n,1)}(x_n)\partial_{x_n}\},$$

o ideal I deve ser trivial, pois I é estabilizado por $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, \partial_{x_n}$. Portanto, R é $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, q_{(1,1)}(x_n)\partial_{x_1} + q_{(2,1)}(x_n)\partial_{x_2} + \ldots + q_{(n,1)}(x_n)\partial_{x_n}\}$-simples; o que completa a prova. $\square$

Dizemos que uma base $\{d_1, \ldots, d_n\}$ de $\mathrm{Der_k}(R)$ é comutativa se $d_i d_j = d_j d_i$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$.

Observação 40. A. Nowicki em ([No1994, Theorem 2.5.5.]) provou que toda k-derivação de uma base comutativa de $\mathrm{Der_k}(k[x_1, \ldots, x_n])$ é uma *derivação especial*. Isto quer dizer que o divergente $d^* := \sum_{l=1}^{n} \partial_{x_l}(d(x_l))$ é zero. Como $v_n(x_n)$ é invertível, o conjunto

$$\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, \sum_{l=1}^{n-1}(v_l(x_n) + c_l)\partial_{x_l} + v_n(x_n)\partial_{x_n}\}$$

obtido no teorema anterior é uma base comutativa de $\mathrm{Der_k}(k[x_1, \ldots, x_n])$. Assim, em particular, $\sum_{l=1}^{n-1}(v_l(x_n) + c_l)\partial_{x_l} + v_n(x_n)\partial_{x_n}$ é uma derivação especial. Porém, nesse caso pode ser verificado diretamente.

Corolário 41. *Seja $\mathfrak{D}$ um conjunto de k-derivações de $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ que comutam tal que R é $\mathfrak{D}$-simples e $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}} \in \mathfrak{D}$. Então, existe $d \in \mathfrak{D}$ e existem elementos $f_1, \ldots, f_n \in R$ com $d(f_n) = 1$ e $d(f_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, tais que R é $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, d\}$-simples.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, sabemos que existe uma derivação d da forma

$$d := \sum_{l=1}^{n-1}(v_l(x_n) + c_l)\partial_{x_l} + v_n(x_n)\partial_{x_n}$$

tal que R é $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, d\}$-simples, mdc $v_n(x_n)$ é invertível. Se $f_n = v_n(x_n)^{-1}x_n$, temos $d(f_n) = 1$.

Seja $f_l^* \in k[x_n]$ tal que $d(f_l^*) = v_l(x_n) + c_l$. Tomando $f_l = x_l - f_l^*$, temos $d(f_l) = 0$, para $l = 1, \ldots, n-1$; o que completa a prova. □

Observação 42. O Corolário anterior é um caso particular, no sentido de existirem os polinômios f_i, de [No1986, Theorem 2.]. Nesse trabalho, A. Nowicki obtem que $\{d_1, \ldots, d_n\}$ é uma base comutativa de $\mathrm{Der_k}(R)$ se, e somente se, existem $F_1, \ldots, F_n \in R$ tais que $d_i(F_j) = \delta_{ij}$, para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$, onde δ_{ij} é a delta de Kronecker (R denota para ele também $k[x_1, \ldots, x_n]$ ou $k[[x_1, \ldots, x_n]]$). Sendo que, em nosso caso, a prova é mais evidente.

4.2 Derivações Localmente Nilpotentes

No restante deste capítulo $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ e $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, d\}$ é a base comutativa dada pelo Corolário 41.

Lembramos que uma k-derivação d de $k[x_1, \ldots, x_n]$ é *localmente nilpotente* se para cada $f \in R$ existe um número natural n tal que $d^n(f) = 0$. Dizemos que uma base $\{d_1, \ldots, d_n\}$ de $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(k[x_1, \ldots, x_n])$ é *localmente nilpotente* se toda derivação d_i, $i = 1, \ldots, n$, é localmente nilpotente.

Os seguintes fatos são bem conhecidos (ver [Fr2006, Sec. 1.4.] e [Dai2003, Lemma 2.3.]).

Lema 43. *Se $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ são derivações locamente nilpotentes tais que $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$, então $d_1 + d_2$ é uma derivação locamente nilpotente.*

Demonstração. Dado $b \in R$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $d_1^m(b) = d_2^n(b)$. Assim, $d_1^i \circ d_2^j(b) = d_1^i(0) = 0$ para $i \in \mathbb{N}$ e $j \geqslant n$. Como d_1 e d_2 comutam temos que

$$d_1^i \circ d_2^j(b) = d_2^j \circ d_1^i(b) = d_2^j(0) = 0$$

para $i \geqslant m$ e $j \in \mathbb{N}$. Note que

$$(d_1 + d_2)^{m+n-1} = \sum_{i+j=m+n-1} \binom{m+n-1}{i} d_1^i \circ d_2^j,$$

assim $(d_1+d_2)^{m+n-1}(b) = 0$. Portanto, d_1+d_2 é uma derivação locamente nilpotente. □

Lema 44. *Sejam $d \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ e $f \in R$, $f \neq 0$. Então, fd é localmente nilpotente se, e somente se, d é localmente nilpotente e $f \in \ker d$.*

Demonstração. Ver [Fr2006, Sec. 1.4.]. □

Observação 45. Note que o Lema 43 não é verificado se d_1, d_2 não comutam. De fato, sejam $d_1 = y\partial_x$ e $d_2 = x\partial_y$ derivações em $k[x, y]$; com isto, d_1, d_2 são localmente nilpotentes, mas $d_1 + d_2$ não é uma derivação locamente nilpotente (uma vez que $(d_1 + d_2)^{2l}(x) = x, l \in \mathbb{N}$).

A chamada *Conjectura Jacobiana* afirma que se $F = (F_1, \ldots, F_n) : k^n \to k^n$ é uma aplicação polinomial cuja matriz Jacobiana é invertível, então F tem uma inversa polinomial (para mais detalhes ver [No1994, Sec. 6. and Sec. 9.8]). Em, [No1986, Theorem.5.], o autor relaciona a Conjectura Jacobiana com bases comutativas de derivações. Mais precisamente, provou que a Conjectura Jacobiana é verdadeira no caso de n variáveis se, e somente se, toda base comutativa do R-módulo $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ é localmente nilpotente.

Corolário 46. *Seja $\mathfrak{D}$ um conjunto de k-derivações de R que comutam tal que R é $\mathfrak{D}$-simples, $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}} \in \mathfrak{D}$ e suponha que a Conjectura Jacobiana é verdadeira em R. Então, existe $d \in \mathfrak{D}$ tal que $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, d\}$ é uma base comutativa e localmente nilpotente do R-módulo $\mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$. Em particular, d é uma k-derivação localmente nilpotente.*

Demonstração. Consequência imediata de [No1986, Theorem 5.] e Teorema 39. □

O seguinte teorema, devido a M. Ferrero, Y. Lequain e A. Nowicki, caracteriza uma família de derivações localmente nilpotente.

Teorema 47. *([FLN92, Theorem.1.]) Sejam R uma anel comutativo, reduzido, livre de $\mathbb{Z}$-torsão, d e δ derivações localmente nilpotentes que comutam e $b \in R$ tal que $\delta(b) = d(b) = 0$. Seja Δ a derivação $ad + b\delta$ com $a \in R$. Então Δ é localmente nilpotente se, e somente se, $d(a) = 0$.*

Demonstração. Vamos mostrar a prova da parte que nos interessa, que é concluir que uma derivação é localmente nilpotente (para o restante, consulte [FLN92, Theorem.1.]). Suponhamos que $d(a) = 0$. Então, Δ e d comutam, pois

$$d(\Delta(h)) = d(ad(h) + b\delta(h)) =$$

$$= d(a)d(h) + ad^2(h) + d(b)\delta(h) + bd(\delta(h)) = ad^2(h) + bd(\delta(h))$$

e, também,

$$\Delta(d(h)) = ad^2(h) + b\delta(d(h)),$$

para todo $h \in R$. Sejam $\alpha \in R$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\Delta(d^k(\alpha)) = 0$; este k existe, uma vez que d é uma derivação localmente nilpotente. Seja $\beta = \Delta(d^{k-1}(\alpha))$. Obtemos que $d(\beta) = 0$ e, então, $\Delta(\beta) = ad(\beta) + b\delta(\beta)$. Por indução, $\Delta^i(\beta) = b^i\delta^i(\beta)$ para todo $i \geq 0$. Como δ também é uma derivação localmente nilpotente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta^n(\beta) = 0$. Logo, $0 = b^n\delta^n(\beta) = \Delta^n(\beta) = \Delta^{n+1}(d^{k-1}(\alpha))$. Repetindo o mesmo argumento k vezes, obtemos que $\Delta^t(\alpha) = 0$, para algum $t \geq 0$. Portanto, Δ é localmente nilpotente. □

Observação 48. A condição "$d(a) = 0$" implica que Δ é localmente nilpotente para qualquer anel comutativo R (como notamos na prova do Teorema anterior). Por outro lado, como observado em [FLN92, Remark.4.], as hipóteses de R ser reduzido e livre de $\mathbb{Z}$-torsão são necessárias.

Corolário 49. *Sejam $k[x, y]$ o anel de polinômios sobre k, $f \in k[y]$, $b \in k$ e Δ a derivação de $k[x, y]$ definida por $\Delta(x) = f$ e $\Delta(y) = b$. Então, Δ é localmente nilpotente.*

Demonstração. Tomando $d = \partial_x$ e $\delta = \partial_y$, o resultado segue aplicando o teorema anterior.

□

Pelo Corolário anterior sabemos que toda derivação da forma $f(y)\partial_x + b\partial_y$, com $f(y) \in k[y]$ e $b \in k$, é uma derivação localmente nilpotente. Com isto, inspirados pelo Corolário 46, podemos perguntar se toda derivação de $k[x_1, \ldots, x_n]$ da forma

$$d^* = f_1(x_n)\partial_{x_1} + \ldots + f_{n-1}(x_n)\partial_{x_{n-1}} + b\partial_{x_n},$$

com $f_i(x_n) \in k[x_n]$ e $b \in k$, é localmente nilpotente de fato. Isto é claro uma vez que, para todo x_i, existe um $n_{x_i} \in \mathbb{N}$ tal que ${d^*}^{n_{x_i}}(x_i) = 0$, com $i = 1, \ldots, n$.

No caso $b = 0$, como no Teorema 39(i), obtemos de outra maneira que

$$d' = f_1(x_n)\partial_{x_1} + \ldots + f_{n-1}(x_n)\partial_{x_{n-1}}$$

é localmente nilpotente. Pelo Lema 44, cada $f_i(x_n)\partial_{x_i}$ localmente nilpotente. Observamos que $f_1(x_n)\partial_{x_1}$ e $f_2(x_n)\partial_{x_2}$ comutam: dado $h \in R$,

$$f_1(x_n)\partial_{x_1}(f_2(x_n)\partial_{x_2}(h)) = f_1(x_n)f_2(x_n)\partial_{x_1}(\partial_{x_2}(h)) = f_2(x_n)\partial_{x_2}(f_1(x_n)\partial_{x_1}(h)).$$

De maneira análoga, mostramos que $f_1(x_n)\partial_{x_1}+f_2(x_n)\partial_{x_2}$ comuta com $f_3(x_n)\partial_{x_3}$. Indutivamente pelo Lema 43, obtemos que $f_1(x_n)\partial_{x_1} + \ldots + f_{n-1}(x_n)\partial_{x_{n-1}}$ é localmente nilpotente.

Notamos que, de modo mais geral, podemos mostrar também que se $d_1, \ldots, d_m$ são derivações locamente nilpotentes que comutam e dados $f_i \in R$ tais que $f_i \in \ker d_j$ para $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, então

$$f_1 d_1 + \ldots + f_m d_m$$

é uma derivação localmente nilpotente. Em particular, $f_1(x_n)\partial_{x_1}+\ldots+f_{n-1}(x_n)\partial_{x_{n-1}}$ é localmente nilpotente.

Referências Bibliográficas

[AM1969] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1969.

[BP2014] R. Baltazar, I. Pan, *On solutions for derivations of a Noetherian k-algebra and local simplicity*, To appear in Communications in Algebra (2014).

[BLL2003] P. Brumatti, Y. Lequain and D. Levcovitz, *Differential simplicity in Polynomial Rings and Algebraic Independence of Power Series*, J. London Math. Soc. (2), 68, 615-630, 2003.

[CL2013] S. C. Coutinho, D. Levcovitz, *On the differential simplicity of affine rings*, Proceedings of the American Mathematical Society, 142, p. 1701-1704, 2014

[Dai2003] D. Daigle, *Locally Nilpotent Derivations*, Lecture notes for the September School of Algebraic Geometry, Poland, 2003.

[Eisen95] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics 150, New York: Springer-Verlag, 1995.

[FK1992] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1992.

[FLN92] M. Ferrero, Y. Lequain and A. Nowicki. *A note on locally nilpotent derivations*, Journal of. Pure and Applied Algebra, 79, 45-50, 1992.

[Fr2006] G. Freudenburg, *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, 2006.

[FM1989] S. Friedland, J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergodic Theory Dyn. Syst. 9., 67-99, 1989.

[Ha1974] R. Hart, *Derivations on commutative rings*, J. London Math. Soc. (2), 8, 171-175, 1974.

[Ha1975] R. Hart, *Derivations on Regular local rings of finitely generated type*, J. London Math. Soc. (2), 10, 292-294, 1975.

[Hartsh] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1997.

[Hulek] K. Hulek, *Elementary Algebraic Geometry*, American Mathematical Society, 2003.

[JX2012] Jiantao Li, Xiankun Du, *Pairwise commuting derivations of polynomial rings*, Linear Algebra and its Applications, 436, 7, 2012.

[Kaplan74] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Chicago, 1974, (2nd edition).

[KM2013] S. Kour, A.K. Maloo, *Simplicity of Some Derivations of k[x, y]*, Communications in Algebra, 41, 4, 2013.

[Lane75] D.R. Lane, *Fixed points of affine Cremona transformations of the plane over an algebraically closed field*, Amer. J. Math., 97, 3, 707-732, 1975.

[Leq2008] Y. Lequain, *Simple Shamsuddin derivations of* $K[X, Y_1, ..., Y_n]$*: An algorithmic characterizarion*, J. Pure Appl. Algebra, 212, 2008.

[Leq2011] Y. Lequain, *Cyclic irreducible non-holonomic modules over the Weyl algebra: An algorithmic characterization*, J. Pure Appl. Algebra, 215, 2011.

[M2003] S. Maubach, *The commuting derivations Conjecture*, Journal of Pure and Applied Algebra, 179, 2003.

[No1986] A. Nowicki, *Commutative bases of derivations in polynomial and power series rings*, Journal of Pure and Applied Algebra, 40, 1986.

[No1994] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, at http://www-users.mat.umk.pl/ anow/ps-dvi/pol-der.pdf

[No2008] A. Nowicki, *An Example of a Simple Derivation in Two Variables*, Colloq. Math., 113, No.1, 25-31, 2008.

[Pet2010] A.P. Petravchuk, *On pairs of commuting derivations of the polynomial ring in one or two variables*, Linear Algebra and its Applications, 433, 3, 2010.

[Ret2006] K. Retert, *Sets of Commuting Derivations and Simplicity*, Communications in Algebra, 34, 8, 2006.

[Sar2012] C. Saraiva, *Sobre Derivações Simples e Folheações holomorfas sem Solução Algébrica*, Tese de Doutorado, 2012.

[Sei1967] A. Seidenberg, *Differential ideals in rings of finitely generated type*, American Journal of Mathematics, 89, No. 1, 22-42, 1967.

[Sh1977] A. Shamsuddin, *Ph.D. thesis*, Univesity of Leeds, 1977.

[Sh1982] A. Shamsuddin, *On Automorphisms of Polynomial Rings*, Bull. London Math. Soc. 14, 1982.

[Sh1982'] A. Shamsuddin, *Rings with automorphisms leaving no nontrivial proper ideals invariant*, Canadian Math. Bull. 25, 1982.

[Silv12] J.H. Silverman, *Dynamical Degrees, Arithmetic Degrees, and Canonical Heights for Dominant Rational Self-Maps of Projective Space*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2012. (Online publication)

[Van00] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics, 190, Birkhauser Verlag, Basel, 2000.

[Wer2005] E. A. Werle, *Derivações de shamsuddin simples de $K[X1, ..., Xn]$ e ideais maximais cíclicos à esquerda da álgebra de weyl $An(k)$*, Dissertação de Mestrado, 2005.

[Zar1965] O. Zariski, *Studies in equisingularity 1*, Amer. J. Math., 87, 507-536, 1965.