

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS UNIFILARES POR PROGRAMAÇÃO INTEIRA COM
RESTRICÇÕES DE FALHA

por

Adriano Kuckoski

Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Dezembro de 2013

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS UNIFILARES POR PROGRAMAÇÃO INTEIRA COM
RESTRICÇÕES DE FALHA

por

Adriano Kuckoski
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos
necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Jun S. Ono Fonseca, Ph.D

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Rogério Marczak, PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz, PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Carlos Eduardo Marcos Guilherme, FURG

Prof. Dr. Rogério Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 10 dezembro de 2013

“A simplicidade é o último grau de sofisticação”

Leonardo da Vinci

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Jun S. Ono Fonseca pelo apoio e incentivo para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus irmãos Eliane, Alceu e Elaine Kuckoski pelo companheirismo para vencer as batalhas da vida.

Em especial a minha esposa, Enf. Milene Castro pela paciência, carinho e dedicação nesta longa caminhada.

RESUMO

O conteúdo deste trabalho trata da formulação para solução do problema de otimização estrutural com minimização de massa em estruturas unifilares, sujeitas a restrição de tensão, flambagem das barras isoladas e fadiga. São considerados três casos de otimização: paramétrica, de forma e dimensional. Os problemas de singularidades nas restrições de tensão e flambagem são evitados através de uma formulação que faz uso de programação inteira para solução do problema. Outra singularidade encontrada na otimização topológica é a singularidade na matriz de rigidez da estrutura. Este problema foi evitado através de uma formulação que considera a existência de matriz de rigidez regular como restrição do problema.

O método de solução utilizado para resolver problema de otimização é o método dos algoritmos genéticos. As restrições do problema são impostas através da penalização da função objetivo. O método de solução mostrou-se adequado para solução dos problemas estudados.

A formulação implementada é validada através da solução de problemas clássicos de otimização estrutural. Os resultados obtidos são comparados com a literatura onde verificou-se a coerência dos mesmos. Após realizar a validação, a formulação é utilizada em um estudo que tem como base uma estrutura real: uma torre de queima de gases (*flare*) oriundos do processo de extração e armazenagem de petróleo em uma unidade flutuante. Para o problema da torre as restrições foram determinadas com base em critérios de falha estabelecido na norma DNV. A otimização do *flare* permitiu minimizar a massa da estrutura sem que os critérios de falha fossem violados. Verificou-se que a metodologia proposta é adequada para solução com grande número de restrições e com diversos casos de carregamento.

Palavras-chave: Otimização estrutural, unifilares, falha, singularidades, programação inteira.

ABSTRACT

The purpose of this work is the development of a methodology to solve the structural optimization problem of frame structures subject to stress, buckling of isolated members, and fatigue constraints. Three types of structural optimization problems are considered: sizing, shape and topological. The stress and buckling singularity problems are avoided by an integer design variable formulation, using integer programming to obtain the optimization problem solution. Another issue found in optimization problems is the stiffness matrix singularity. The proposed formulations include the linear system stability as a constraint in the optimization problem. A genetic algorithm is used to solve the general optimization problem.

All constraints of the problem are included with a penalization equation. The results show that genetic algorithm is a good approach to solve the proposed formulation. The proposed formulation is tested for solving classical optimization problems. The obtained results are consistent with the literature.

A real engineering problem is solved with proposed methodology: a gas burning tower (flare). In this problem, all constraints are based on failure criteria recommended by DNV standards. The structural optimization of this problem shows that structural mass minimization is possible without violating the failure criteria. It is observed that solution methodology deals successfully with problems with multiple constraints and load cases

Keywords: Structural optimization, frame, failure, singularity, integer programming.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Organização do trabalho	2
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
2.1	Breve histórico da otimização estrutural	2
2.1	Otimização topológica em estruturas discretas	3
2.2	Restrições e Singularidades	4
2.3	Algoritmo de Solução	5
2.4	Objetivos do trabalho	6
3	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	7
3.1	Variáveis de projeto.....	8
3.2	Função objetivo	9
3.3	Restrições	9
3.4	Apresentação do problema geral de otimização estrutural	10
3.5	Singularidade nas restrições de tensão	10
3.6	Singularidades nas restrições de flambagem de barras isoladas da estrutura.....	11
4	PROGRAMAÇÃO INTEIRA	14
4.1	Algoritmos genéticos (AG)	15
4.2	Terminologia dos algoritmos genéticos.....	16
4.3	Operadores genéticos.....	16
4.4	Parâmetros genéticos	18

4.5	Função aptidão e restrições.....	19
4.6	Esquema de um algoritmo genético	20
4.7	Comparativo entre algoritmos genéticos e algoritmos clássicos de otimização.....	21
5	TEORIAS ESTRUTURAIS CLÁSSICAS	23
5.1.1	Carregamento axial em Barras	23
5.1.2	Torção em membros circulares.....	24
5.1.3	Flexão de vigas	26
6	ELEMENTOS FINITOS	27
6.1	Histórico do Método dos elementos finitos.....	27
6.2	Formulação geral do método dos elementos finitos	28
6.2.1	Princípio dos trabalhos virtuais	28
6.2.2	Princípio da mínima energia potencial	29
6.3	Elemento finito de barra	30
6.4	Elemento finito de torção	32
6.5	Elemento finito de viga em duas dimensões	32
6.6	Superposição dos efeitos de barra, torção e flexão.....	35
7	DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL	36
7.1	Método das tensões admissíveis	36
7.2	Método dos estados Limites	37
7.3	Método da Confiabilidade	38
7.4	Falha por fadiga em uniões soldadas.....	39
7.4.1	Resistência à fadiga de uma junta soldada	40
7.4.2	Fadiga em juntas tubulares	44
7.4.3	Análise simplificada de fadiga em estruturas offshore.....	45
7.5	Critério de falha por Flambagem.....	46

7.5.1	Flambagem de colunas de Euler.....	46
7.5.2	Critério de falha por flambagem conforme norma DNV	48
8	APRESENTAÇÃO DA FORMULAÇÃO PROPOSTA E DO ALGORITMO DE SOLUÇÃO IMPLEMENTADO	51
8.1	Função aptidão.....	51
8.1	Esquema geral.....	54
9	SOLUÇÃO DE PROBLEMAS	57
9.1	Treliça com 5 barras	57
9.2	Treliça com 10 barras	61
9.3	Treliça com 6 barras	65
9.4	Estrutura com elementos de barra e viga.....	67
9.5	Utilização do algoritmo implementado para solução de um problema real de engenharia.....	71
9.5.1	Descrição das variáveis de projeto e do modelo numérico	72
9.5.2	Efeitos de Inerciais	75
9.5.3	Cargas de Vento	78
9.5.4	Combinação dos casos de carga	79
9.5.5	Critério de Falha	81
9.5.6	Resultados para otimização paramétrica e topológica e de forma.....	84
10	CONCLUSÃO.....	92
11	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	94
12	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95

APÊNDICE A - BARRA BI-ARTICULADA SUBMETIDA À CARGA COMPRESSIVA

100

APÊNDICE B - TRELIÇA DE 18 BARRAS COM OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL E DE FORMA	102
APÊNDICE C - FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO E LIMITE DE RESISTÊNCIA A FADIGA CONFORME RECOMENDAÇÕES DNV	105

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell em 1904.	3
Figura 2.2. <i>Ground Structure</i> na otimização topológica de estruturas discretas.	4
Figura 3.1. Tipos de otimização estrutural: (a) dimensional ou paramétrica; (b) forma; (c) topológica.	8
Figura 3.2. Exemplo de estrutura com restrição de flambagem local.	12
Figura 4.1. Esquema de solução de um algoritmo genético.	21
Figura 5.1. Geometria simplificada de uma barra.	24
Figura 5.2. Ilustração da hipótese sobre os deslocamentos em um membro circular de seção constante.	25
Figura 6.1. Elemento finito para uma barra, definido em coordenadas globais e coordenadas paramétricas.	30
Figura 6.2. Elemento finito para flexão, definido em coordenadas globais e coordenadas paramétricas.	33
Figura 6.3. Funções de interpolação para um elemento de viga em duas dimensões.	33
Figura 7.1. Distribuição de probabilidades para a solicitação e resistência.	38
Figura 7.2. Efeito da tensão média em um ciclo de carga de fadiga.	41
Figura 7.3. Curvas S-N para diversas juntas soldadas em aço.	42
Figura 7.4. Solda cruciforme em T.	42
Figura 7.5. Curvas S-N para diversas juntas soldadas em aço.	43
Figura 7.6. Comprimento efetivo em função da condição de contorno.	47
Figura 7.7. Curva típica de falha por flambagem.	49
Figura 7.8. Curvas limite de flambagem.	50
Figura 8.1. Comportamento do coeficiente de violação das restrições para diversas penalizações.	52
Figura 8.2. Estrutura cuja matriz de rigidez é singular.	53
Figura 8.3. Fluxograma do algoritmo de solução.	54

Figura 8.4. Fluxograma do cálculo estrutural e avaliação da função aptidão.	56
Figura 9.1. Treliça de 5 barras.	57
Figura 9.2. Curvas de convergência para diversos coeficientes de penalização.	60
Figura 9.3. Curvas de convergência para diversas taxas de mutação.	61
Figura 9.4. Treliça de 10 barras.	61
Figura 9.5. Topologia final treliça com 10 barras.	62
Figura 9.6. Tensões axiais na treliça de 10 barras.	64
Figura 9.7. Curvas de convergência para diversos coeficientes de penalização.	64
Figura 9.8. Modelo estrutural da treliça de 6 barras.	65
Figura 9.9. Curva de convergência para a treliça de 6 barras.	66
Figura 9.10. Tensões axiais.	66
Figura 9.11. Estrutura com elementos de barra e viga.	67
Figura 9.12. Definição das variáveis de projeto.	67
Figura 9.13. Topologia final da estrutura.	68
Figura 9.14. Tensão axial na estrutura otimizada.	70
Figura 9.15. Torre de queima com seção triangular.	72
Figura 9.16. Torre de queima com seção retangular.	72
Figura 9.17. Definição das variáveis de projeto.	72
Figura 9.18. Numeração das variáveis de projeto e restrições.	73
Figura 9.19. Esquema de aplicação das cargas de vento na torre.	75
Figura 9.20. Graus de liberdade de um navio.	76
Figura 9.21. Locais onde as acelerações são conhecidas.	76
Figura 9.22. Coeficiente de arrasto para estruturas de perfis tubulares.	79
Figura 9.23. Junta utilizada para estimativa inicial do fator de concentração de tensão.	83
Figura 9.24. Topologia final do <i>flare</i> após a otimização.	85
Figura 9.25. Valores mínimos para razão R_d/S_d para diferentes critérios de falha.	86
Figura 9.26. Tensões de fadiga na estrutura.	87
Figura 9.27. Curvas de convergência normalizadas para dois diferentes casos de otimização.	90
Figura 9.28. Detalhe curva de convergência da Figura 9.27 a partir da geração 500.	90

Figura A.1. Condições de contorno e numeração das variáveis de projeto.....	100
Figura A.2. Geometria final da barra após a otimização.....	101
Figura A.3. Tensões axiais na barra após a otimização.....	101
Figura A.4. Deformação do primeiro modo de flambagem da barra, sendo coeficiente de carga de flambagem 1.0.	101
Figura B.1. Treliça de 18 barras.	102
Figura B.2. Forma final da treliça de 18 barras.	104
Figura C.1. Definições geométricas de uma junta tubular.	105
Figura C.2. Equações utilizadas para o cálculo dos fatores de concentração de tensões.	106
Figura C.3. Modelo estrutural da junta tubular.	106
Figura C.4. Tensões na junta tubular.....	107
Figura C.5. Intervalo de tensões admissível em função do parâmetro h	108
Figura C.6. Fator de utilização em função do fator de projeto de fadiga e da vida útil de projeto.	108
Figura C.7. Fator de redução das resistências em função do fator de utilização.....	109

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1. Parâmetros da equação de flambagem.....	49
Tabela 9.1. Áreas da treliça de 5 barras após a otimização para diferentes formulações.....	58
Tabela 9.2. Tensões para cada um dos casos de carregamento.	59
Tabela 9.3. Resultados da otimização para diversos métodos.....	62
Tabela 9.4. Tensões nas barras após a otimização.	63
Tabela 9.5. Tensões e limite de flambagem em cada uma das barras.	69
Tabela 9.6. Tabela de acelerações sobre o <i>flare</i>	77
Tabela 9.7. Acelerações médias no <i>flare</i>	78
Tabela 9.8 Fatores de majoração das cargas para estados limites últimos.	80
Tabela A.1. Valores discretos das variáveis de projeto.	100
Tabela B.1. Variáveis de projeto após a otimização para diversos autores.	103
Tabela B.2. Tensões axiais e limite de flambagem.	104
Tabela C.1. Tensões axiais nas barras e fator de concentração de tensão.	107

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

SCF	Stress Concentration Factor
DNV	Det Norsk VERITAS
ABS	American bureau of shipping
GALIB	Genetic Algorithm Library
FPSO	Floating Production and Storage
DOC	Design operation Conditions
DEC	Design Extreme Conditions
ELU	Estado Limite Ultimo
ELF	Estado Limite de Fadiga
AG	Algoritmo Genético

LISTA DE SÍMBOLOS

X	Vetor de variáveis de projeto
$f(x)$	Função objetivo
x_i	i-ésima variável de projeto
x_{\min}	Limite inferior da variável de projeto
x_{\max}	Limite superior da variável de projeto
$g_j(x)=0$	Conjunto de restrições de igualdade
$h_k(x)\leq 0$	Conjunto de restrições de desigualdade
σ_{adm}	Tensão admissível
σ_{ij}	Tensor de tensões
A_i	Área da i-ésima barra
ε	Coefficiente de relaxação
σ_b	Limite de tensão de flambagem elástica de Euler
a_i^l	Limite móvel inferior
a_i^u	Limite móvel superior
$f_p(x)$	Função objetivo penalizada
C	Constante de penalização
δ_i	Constante de violação de restrição
ε_{ij}	Tensor de deformações infinitesimal
t_i	Vetor de trações de superfície
n_j	Vetor normal à superfície
f_i	Vetor de forças de corpo
λ	Constante de Lamé

μ	Constante de Lamé
E	Módulo de Elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos
Γ^d	Região superficial onde são aplicadas restrições de deslocamentos
Γ^n	Região superficial onde são aplicadas tensões prescritas
R	Raio da seção circular
ϕ	Função de empenamento da seção transversal
Π	Funcional de energia potencial total
$B(\mathbf{u})$	Energia potencial de deformação
$f(\mathbf{u})$	Trabalho realizado pelas forças externas
\mathbf{C}	Tensor constitutivo do material
\mathbf{N}	Vetor de funções de interpolação
\mathbf{u}_e	Vetor de deslocamentos do elemento
\mathbf{K}_e	Matriz de rigidez do elemento
\mathbf{F}_e	Vetor de forças do elemento
ζ	Eixo do sistema de coordenadas paramétrico
L	Comprimento de uma barra
A	Área da seção transversal de uma barra
G	Módulo de cisalhamento do material
I_t	Momento polar de inércia da seção
I_z	Momento de inércia da seção
S_n	Tensões geradas pelas cargas de serviço
R_d	Resistência do material
S_d	Solicitação de dimensionamento
R_d	Resistência de dimensionamento
N	Número de ciclos de carga até a falha por fadiga
C	Constante do material para caracterizar a resistência fadiga

$\Delta\sigma$	Intervalo de variação das tensões em um ciclo de fadiga
σ_{\max}	Tensão máxima do ciclo de fadiga
σ_{\min}	Tensão mínima do ciclo de fadiga
m	Inclinação da curva de fadiga
σ_{nom}	Tensão nominal
$\sigma_{hotspot}$	Tensão estrutural
$Q(\Delta\sigma)$	Probabilidade de que $\Delta\sigma$ seja excedido
h	Parâmetro de forma
q	Parâmetro de escala
P_{crit}	Carga crítica de flambagem linear de uma coluna
I	Momento de inercia da seção transversal
L_{eff}	Comprimento efetivo de uma barra
k	Fator para o cálculo do comprimento efetivo de uma barra
λ	Índice de esbeltes
σ_{esc}	Limite de escoamento
σ_E	Limite de flambagem elástica
$\delta_{1,i,j}$	Coefficiente de restrição de tensão
$\delta_{2,i,j}$	Coefficiente de restrição de flambagem
$\delta_{3,i,k}$	Coefficiente de restrição de fadiga
n_{ELT}	Número de casos de carregamento para estados limites de tensão
n_{ELF}	Número de casos de carregamento para estados limites de fadiga
n_{barras}	Número de barras
$\sigma_{eqv,i,j}$	Tensão equivalente na barra i para o caso de carga j
$\sigma_{adm,i}$	Tensão admissível na barra i
$\sigma_{B,i,j}$	Tensão de flambagem na barra i para o caso de carga j

$\sigma_{adm_B,i}$	Tensão de flambagem admissível na barra i
$\Delta\sigma_{F,i,k}$	Tensão de fadiga na barra i para o caso de carga k
$\Delta\sigma_{adm_F,i}$	Tensão de fadiga admissível na barra i
ρ	Densidade do material
φ	Índice de áreas exposta
Re	Número de Reynolds
c_{f01}	Coefficiente de arrasto na direção 1
c_{f02}	Coefficiente de arrasto na direção 2
p_k	Pressão característica
V_k	Velocidade característica
γ_{Gi}	Coefficiente de carga relativo ao cargas de peso próprio
γ_{Ei}	Coefficiente relativo às cargas ambientais
$\pm a_j$	Acelerações para cada estado de carregamento
$\pm V_j$	Carga de Vento
$S_{d,ELF}$	Solicitação de dimensionamento para estado limite de fadiga

1 INTRODUÇÃO

No passado, o projeto de estruturas mecânicas era feito com base em cálculos analíticos simplificados e principalmente experiência do projetista. Após a realização do projeto, quando necessário, era construído um protótipo para realização de testes e verificação do desempenho.

Surgiram então os métodos numéricos, que com o advento dos computadores digitais, permitiram realizar o cálculo das solicitações de forma muito mais precisa. A etapa de construção do protótipo para testes passou a ser realizada de maneira virtual. Logo, durante concepção do projeto são criadas diversas configurações para um componente ou estrutura, que são simuladas numericamente para avaliar o desempenho. Por critério de comparações é estabelecida a configuração estrutural que melhor atende os requisitos de projeto e com maior viabilidade econômica. No entanto, não se pode afirmar que a solução encontrada por esse método é a solução mais econômica para construção de uma estrutura mecânica.

O crescente aumento de competitividade, e a incansável busca pela redução de custos, têm impulsionado o desenvolvimento da técnica que através de algoritmos de busca determina a solução ótima para o problema: a otimização estrutural. A otimização estrutural busca determinar a configuração estrutural para qual todos os requisitos de projeto são atendidos e que apresente o menor custo.

Os primeiros problemas de otimização foram abordados por Maxwell em 1872 e posteriormente por Michell [Michell, 1904]. No entanto, foi a partir da década de 60, com o surgimento dos computadores digitais, que a pesquisa por métodos de otimização se intensificou.

Diversos livros foram publicados com os conceitos básicos de otimização. Destacam-se as publicações de Haftka [Haftka e Gürdal, 1992], Arora [Arora, 2012] e [Bendsoe, 1995].

A proposta deste estudo é o desenvolvimento de uma formulação para o problema de otimização estrutural, por variáveis inteiras, submetidas a restrições de critérios de falha. As restrições são determinadas com base em critérios de falha por escoamento, flambagem das barras e fadiga. Os critérios de falha são determinados com base na norma de projeto DNV.

O problema de otimização estrutural é abordado considerando três problemas de otimização: paramétrica, de forma e topológica.

1.1 Organização do trabalho

No capítulo 2 é realizada a revisão bibliográfica sobre otimização estrutural. Neste capítulo são enunciados os principais problemas e diversas soluções propostas pela literatura específica. Por último são apresentados os objetivos deste trabalho.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo das principais formulações existentes para o problema de otimização estrutural em geometrias unifilares. São apresentadas diversas metodologias para solução do problema de singularidade de tensões e flambagem.

No capítulo 4 são listados os principais métodos de programação inteira. Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais dos métodos dos algoritmos genéticos.

Nos capítulos 5 e 6 é apresentada a revisão bibliográfica sobre teorias estruturais clássicas e o método dos elementos finitos.

O capítulo 7 trata da apresentação dos principais métodos para o dimensionamento estrutural.

No capítulo 8 é apresentada a formulação utilizada na solução dos casos apresentados neste trabalho.

Os resultados da aplicação da formulação proposta em problemas clássicos são apresentados no capítulo 9. Também são apresentados os resultados da utilização do algoritmo para solução de um caso prático de engenharia.

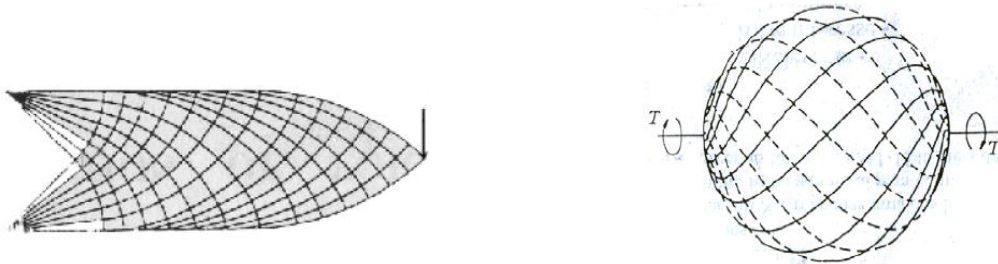
As conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 10 e 11.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Breve histórico da otimização estrutural

A otimização estrutural é a disciplina que trata do projeto ótimo de estruturas. Os primeiros problemas de otimização foram abordados por Maxwell em 1872 e Michell [Michell, 1904]. A técnica utilizada consiste em solucionar o campo de tensões principais, para um dado caso de carga, e com base nas linhas de isotensão principal, propor uma estrutura formada por elementos de barra. A estrutura ótima consiste em uma forma treliçada onde seus elementos estão alinhados às iso-linhas de tensão, desta forma os membros estruturais estão submetidos somente a esforços axiais. Este tipo de critério fornece o mesmo resultado que o critério da

máxima rigidez com mínimo material. Atualmente já é provado que a configuração ótima para este critério é uma estrutura de treliças. As figuras abaixo ilustram os resultados descritos:



(a) Flexão simples em viga bi apoiada

(b) Torção em casca esférica.

Figura 2.1. Exemplos de estruturas de treliça obtidas por Michell em 1904.

Embora bastante surpreendentes estes resultados permaneceram esquecidos até a década de 60. Durante este período foram estudados somente a solução de problemas acadêmicos em estruturas simples (vigas e treliças), sem aplicação prática e que não seguiam a premissa de Michell.

O advento da otimização iniciou-se após a década de 60 com o surgimento dos computadores digitais e o método dos elementos finitos. O trabalho considerado início da era moderna da otimização foi publicado por Schmit [Schmit, 1960]. O artigo trata da otimização de treliças combinando a análise estrutural por computador e a programação matemática.

Na década de 70 vários algoritmos foram implementados e testados. Assim, por exemplo, é desenvolvido o método Simplex para a solução de problemas de programação linear. Os algoritmos de otimização apareceram em softwares comerciais a partir dos anos 80. Posteriormente, na década de 90, o método da otimização topológica (MOT) foi incorporado a pacotes comerciais de elementos finitos causando grande impacto na indústria automotiva e aeroespacial [Silva, 2003].

2.1 Otimização topológica em estruturas discretas

A otimização topológica de estruturas discretas foi inicialmente apresentada por Dorn em 1964 [Dorn et al., 1964], o qual apresentou uma estrutura denominada “*ground structure*”. Nesta estrutura, todos os nós são conectados entre si e são impostas as condições de carregamento e restrições. O autor aplicou a programação linear para retirar da estrutura os perfis redundantes e desta forma reduzir seu peso. A Figura 2.2 apresenta um exemplo da denominada *ground structure*.

Dobbs e Felton [Dobbs e Felton, 1968] propuseram a redução do peso de uma treliça, submetida a múltiplos casos de carga e restrição de tensão, utilizando as seções transversais como variáveis de projeto. O algoritmo de busca utilizado é conhecido como “*steepest descent-alternate mode*”. O método busca reduzir o valor da função objetivo com base nas informações dos gradientes. Quando uma seção transversal atinge o limite inferior o elemento é removido, não podendo mais retornar à análise.

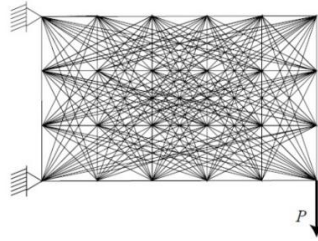


Figura 2.2. *Ground Structure* na otimização topológica de estruturas discretas.

2.2 Restrições e Singularidades

As restrições são condições que impostas ao modelo numérico conduzem a solução do problema a um domínio viável. Qualquer violação de restrição indica que a solução se encontra em um ponto em que a solução não é permitida.

Ao inserir restrições sobre os limites de tensão, o problema de otimização topológica tem solução em um ponto do domínio onde ocorrem singularidades. O problema foi constatado primeiramente por Sved e Ginos [Sved e Ginos, 1968], os autores estudaram um caso de treliça de três barras submetido a diversos casos de carga. A conclusão obtida foi que o ótimo global só poderia ser alcançado se uma das barras fosse completamente removida, violando assim as restrições de tensão.

Os tipos de problemas onde o ótimo é singular foram abordados por Kirsch [Kirsch, 1990]. Nos seus estudos, o autor concluiu que nos casos de solução com ótimo singular pode ser extremamente difícil ou até impossível obter o ótimo global utilizando métodos numéricos.

Cheng e Jiang [Cheng e Jiang, 1992] mostraram que a existência do ótimo singular está vinculada a descontinuidade da restrição de tensão quando a área de uma barra tende a um valor nulo.

Diversos autores estudaram formulações para o problema de singularidade nas restrições de tensão, cabe citar alguns deles: Rozvany [Rozvany e Birker, 1994] e Cheng [Cheng, 1995].

Uma solução para as singularidades nas restrições de tensão em treliças foi proposta por Cheng [Cheng e Guo, 1997] através do método da relaxação epsilon (ϵ). Este trabalho tem fundamental importância, pois a técnica de relaxação foi estendida para aplicação em estruturas contínuas.

Assim como as restrições de tensão, restrições sobre a flambagem das barras de uma treliça acarretam no aparecimento de singularidades. A inclusão do limite de flambagem local acarreta na ocorrência de problemas muito mais severos daqueles relatados nos casos de restrição sobre as tensões [Zhou, 1995].

O problema na singularidade das restrições locais de flambagem foi abordado por Guo [Guo, et al., 2001], no artigo foi proposto a utilização do método denominado técnica de suavização de segunda ordem. Os autores resolveram com sucesso o problema com restrição de flambagem para estruturas de barras submetidas a múltiplos casos de carregamentos com restrição sobre os limites de tensão e flambagem das barras.

Uma formulação exata para este tipo de problema foi proposta por Achtziger [Achtziger, 1999a]. O mesmo autor utilizou a sua formulação para apresentar resultados numéricos Achtziger [Achtziger, 1999b].

2.3 Algoritmo de Solução

As técnicas para solução do problema de otimização estrutural, em meios contínuos, são divididas em dois grandes grupos [Kirsch, 1989]:

- Métodos analíticos: Critério de ótimo;
- Métodos numéricos de busca.

Critérios de ótimo: O método do critério de ótimo busca satisfazer um conjunto de critérios pré-estabelecidos relacionados ao comportamento estrutural. Este tipo de método foi inicialmente estudado por Michell [Michell, 1904] e [Rozvany, 1994].

Apesar de estar comprovado que os métodos de programação matemática são mais gerais e estarem desenvolvidos a pontos de serem capazes de solucionar problemas de grande porte, os critérios de ótimo ainda são amplamente utilizados. Este tipo de critério permite uma análise muito mais qualitativa do fenômeno físico, além de muitas vezes, fornecer os limites superiores e inferiores para as possíveis soluções ótimas [Kirsch, 1989].

Programação matemática: Esta classe de métodos permite que problemas de otimização com diversas restrições sejam solucionados de forma sistemática através de algoritmos

computacionais. O primeiro pesquisador a utilizar esta técnica para solucionar um problema de otimização foi Schmit em 1960 [Schmit, 1960].

Para cada tipo de restrição e forma da função objetivo existe um método de programação matemática que se mostra mais adequado:

- Programação linear: função objetivo e restrições são lineares;
- Programação quadrática: função objetivo quadrática e restrições lineares;
- Programação não linear: função objetivo e/ou restrições quadráticas;
- Programação inteira: Variáveis de projeto possuem valores discretos;
- Programação mista: Combinação entre técnica de programação inteira e qualquer uma das demais.

Programação linear Sequencial: A programação linear é um método utilizado para resolver problemas de otimização quando as restrições e a função objetivo são funções lineares. A abordagem de problemas não lineares é feita utilizando a técnica de expansão das funções restrição e objetivo em séries de Taylor, onde os termos de segunda ordem são desprezados. Desta forma, é possível resolver o problema de otimização não linear através de sucessivas aproximações em funções lineares.

Após sucessivas aproximações esta técnica converge para a região próxima à solução exata do problema de otimização não linear [Haftka e Gürdal, 1992, Cheng, 1992, Kirsch, 1989].

Programação Inteira: Existem diversos algoritmos de programação inteira aplicáveis a otimização estrutural. Dentre os mais populares é importante citar o método do recozimento simulado proposto por Kirkpatrick [Kirkpatrick, et al., 1983] e o método do algoritmos genéticos [Holland, 1975].

2.4 Objetivos do trabalho

O objetivo geral deste trabalho é a formulação de uma metodologia para solução do problema de otimização estrutural com minimização de massa, submetido a restrições de tensão e flambagem das barras e tensões limites de fadiga

Os objetivos específicos do trabalho são enunciados abaixo:

- Propor uma metodologia para solução de três casos de otimização estrutural (paramétrica, topológica e de forma) de maneira unificada através do uso de programação inteira;

- Evitar problemas de singularidades nas restrições de tensão e flambagem local sem o uso de técnicas de relaxação;
- Realizar a otimização de uma estrutura baseado em um caso real de engenharia com grande quantidade de restrições e casos de carregamento, onde:
 - São consideradas restrições sobre o limite de escoamento, flambagem das barras da estrutura e tensões limites de fadiga;
 - As restrições são determinadas com base em critérios de falha estabelecidos na norma DNV.

3 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A otimização estrutural é dividida em quatro diferentes áreas: otimização de material, otimização dimensional ou paramétrica, otimização de forma e otimização topológica. A otimização de material pode ser o projeto de materiais com características constitutivas pré-definidas, ou também a determinação dos materiais mais adequados para uma determinada aplicação. Um exemplo de otimização de material é a criação de um material cujo coeficiente de Poisson é negativo, ou seja, o material expande transversalmente quando submetido a carregamento de tração simples.

Na otimização de forma, a geometria do contorno da estrutura é determinada. A aplicação típica da otimização de forma é a remoção dos concentradores de tensão que levam um componente a falha.

Na otimização paramétrica as dimensões da estrutura são as variáveis de projeto. Um exemplo de otimização dimensional é a determinação ótima da seção transversal dos elementos de uma estrutura com minimização da massa submetida a restrições de falha.

Na otimização topológica, o objetivo é a determinação da disposição ótima do material no domínio de projeto. Em estruturas contínuas a otimização topológica consiste em determinar o formato externo e interno da geometria, bem como a quantidade e posições de buracos e cavidades. Já em modelos discretos, como exemplo: estruturas treliçadas, o objetivo é determinar a quantidade, tamanho e conectividade dos elementos estruturais [Haftka e Gurdal, 1992].

A figura abaixo ilustra os tipos de otimização estrutural geométrica:

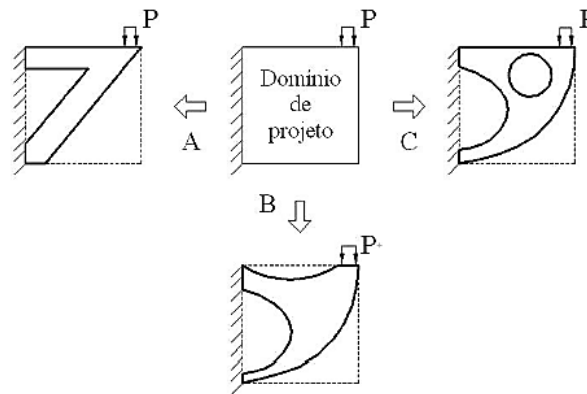


Figura 3.1. Tipos de otimização estrutural: (a) dimensional ou paramétrica; (b) forma; (c) topológica.

3.1 Variáveis de projeto

Quando se fala em otimização estrutural, pressupõe-se certa liberdade em modificar a estrutura. As possibilidades de alterações são representadas por um conjunto definido de parâmetros, os quais são denominados variáveis de projeto. As variáveis de projeto podem ser: a seção transversal das vigas, parâmetros que controlam a geometria da estrutura, propriedades do material e etc. As variáveis de projeto são descritas conforme vetor abaixo:

$$X = x(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.1)$$

As variáveis de projeto podem ser contínuas ou discretas. Quando na forma contínua estão restritas a um intervalo de valores admissíveis. Já na forma discreta podem assumir um conjunto finito de valores dentro de um intervalo.

Em muitos casos, as variáveis de projeto são tratadas como contínuas na etapa inicial de otimização e, posteriormente, são transformadas em discretas na etapa final. Um exemplo clássico é a otimização de seções transversais de vigas, onde a solução ótima é obtida com variáveis discretas e posteriormente os resultados são ajustados aos valores disponíveis nas tabelas de perfis comerciais.

No entanto, ajustar a solução ótima para valores discretos existentes nem sempre resulta em boa aproximação. Tal consideração é aceitável quando o domínio discreto apresenta pontos razoavelmente próximos aos da solução contínua [Haftka e Gürdal, 1992].

3.2 Função objetivo

Na otimização admite-se a existência de uma função $f(x)$, ou um conjunto de funções $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$, que representa uma característica da estrutura que pode ser melhorada. Essa função, ou conjunto de funções, é denominada função objetivo ou função custo.

No caso da utilização de múltiplas funções objetivo, não existe uma única solução ótima e sim um conjunto de soluções que são melhores que todas as outras encontradas no espaço de busca. Este conjunto de soluções é conhecido como soluções ótimas de Pareto por formarem a fronteira de Pareto [Haftka e Gürdal, 1992]. No entanto, este conjunto de soluções pode apresentar resposta inferior as demais quando avaliado somente um objetivo.

Para simplificar o problema de múltiplas funções objetivo, é possível combinar as mesmas através de uma técnica de programação de compromisso, onde é montada uma função objetivo principal que é composta por todas as funções objetivos. Ainda é possível eleger a função principal como objetivo e inserir as demais como restrições ou limites.

A utilização de múltiplas funções objetivo é adequada para classe de problemas com objetivos conflitantes, por exemplo: minimizar a massa de uma estrutura e maximizar a vida em fadiga.

Nos problemas tratados neste estudo a função objetivo é única: minimização de massa da estrutura. As funções de falha são inseridas no problema como restrições.

3.3 Restrições

Dado conjunto de variáveis de projeto definidas na equação (3.1), as restrições laterais do problema são denotadas conforme equação abaixo:

$$x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} \quad i = 1 \dots n \quad (3.1)$$

onde n é o número total de variáveis de projeto.

As restrições impostas sobre outras quantidades podem ser restrições de igualdade ou desigualdade:

$$g_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots n_j \quad (3.2)$$

onde n_j é a quantidade total de restrições de igualdade.

$$h_k(x) \leq 0 \quad k = 1 \dots n_k \quad (3.3)$$

onde n_k é a quantidade total de restrições de desigualdade.

Nos problemas de otimização estrutural, geralmente, as restrições de igualdade são as equações de equilíbrio. Já as restrições de desigualdade são os valores limites admissíveis de tensões, deslocamentos, frequências naturais e etc.

3.4 Apresentação do problema geral de otimização estrutural

De forma geral, o problema de otimização é escrito da seguinte maneira [Haftka e Gürdal, 1992]:

$$\begin{array}{ll} \min & \{f(x) \\ \text{sujeito à} & \left\{ \begin{array}{l} g_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots n_g \\ h_k(x) \leq 0 \quad k = 1 \dots n_k \\ x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} \quad i = 1 \dots n \\ x \in V \end{array} \right. \end{array} \quad (3.4)$$

onde $f(x)$ é a função objetivo, g_j e h_k são as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, x_i são as variáveis de projeto e V é o conjunto de valores para qual as variáveis de projeto são definidas.

3.5 Singularidade nas restrições de tensão

Uma solução para o problema de singularidade nas tensões foi discutido por Cheng e Guo [Cheng e Guo, 1997]. Nos seus estudos, os autores propuseram a modificação do problema de restrição de tensões através da técnica reconhecida como relaxação- ε . O método consiste em permitir que haja certa violação nas restrições de tensão quando as seções transversais se aproximam do limite inferior:

$$\left(\sigma_{adm} - |\sigma_{ij}| \right) \cdot A_i \leq \varepsilon \quad (3.5)$$

onde σ_{adm} é a tensão admissível, σ_{ij} são as tensões na estrutura, A_i é a área de cada seção transversal e ε é um parâmetro determinado de forma heurística.

O método da relaxação- ϵ unificou a otimização paramétrica e topológica. O problema modificado através da introdução de um parâmetro artificial elimina a existência do ótimo singular no domínio viável [Cheng e Guo, 1997].

Mais tarde em 2001, Stolpe e Svanberg [Stolpe e Svanberg, 2001] questionaram a validade do método da relaxação. Foi demonstrado que em alguns casos particulares o método não é capaz de eliminar a descontinuidade no domínio viável. Desta forma não fica garantido que os algoritmos de solução sejam capazes de encontrar o ótimo global.

No entanto, apesar da contestação de Stolpe e Svanberg, o método da relaxação epsilon tem sido utilizado com sucesso por diversos autores para resolver o problema de singularidade nas tensões.

3.6 Singularidades nas restrições de flambagem de barras isoladas da estrutura

No caso de estruturas formadas por elementos de barra e vigas, a restrição de tensão é definida com base em dois critérios de falha: a primeira é oriunda no limite de tensão admissível do material e a segunda é relacionada ao limite de flambagem de cada um dos membros da estrutura.

Zhou [Zhou, 1995] mostrou em seu estudo que a otimização com restrição de flambagem das barras da estrutura pode levar a solução para o caso da condição de equilíbrio instável. A utilização de alguma técnica para a remoção de juntas da estrutura pode devolver o equilíbrio ao sistema. No entanto, a tensão crítica de flambagem é alterada de forma bastante significativa, modificando substancialmente o problema original. Considere o exemplo da Figura 3.2.

Todos os elementos tem a mesma tensão limite (σ_p) e módulo de elasticidade (E).

Considerando a restrição de flambagem, é esperado que a solução final seja da topologia indicada na Figura 3.2-b. Neste caso, a tensão para flambagem de Euler fica:

$$\sigma_b = \frac{k \cdot A_I}{L^2} \quad (3.6)$$

onde A_I é a área da seção transversal, L o comprimento da barra e k o coeficiente de flambagem.

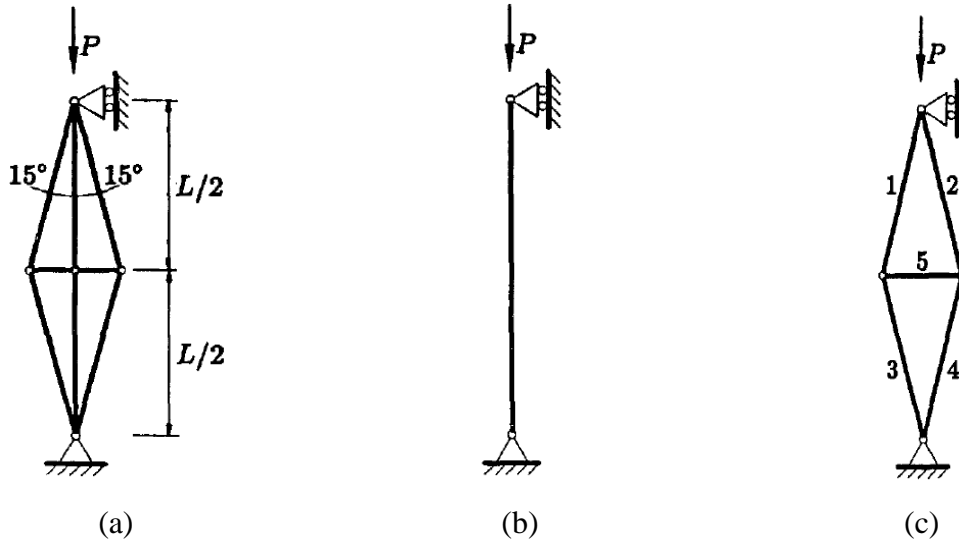


Figura 3.2. Exemplo de estrutura com restrição de flambagem local.

Igualando a equação (3.6), à tensão atuante no elemento:

$$\frac{k \cdot A_l}{L^2} = \frac{P}{A_l} \quad (3.7)$$

$$A_l = L \cdot \sqrt{\frac{P}{k}}, \sigma_b = \frac{k \cdot A_l}{L^2} = \frac{1}{L} \cdot \sqrt{P \cdot k}$$

Definindo o coeficiente k conforme equação abaixo, resulta que:

$$k = \frac{(\sigma_p \cdot L)^2}{100 \cdot P}, \sigma_b = \frac{\sigma_p}{10} \quad (3.8)$$

A seção transversal e o volume total ficam definidos como:

$$A_l = \frac{10 \cdot P}{\sigma_b}, V_l = \frac{10 \cdot P \cdot L}{\sigma_b} \quad (3.9)$$

Agora considerando a topologia indicada pela Figura 3.2-c, o comprimento de cada uma das barras fica:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = \frac{L}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}, L_5 = \frac{L}{2+\sqrt{3}} \quad (3.10)$$

Os esforços internos:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{P}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}, N_5 = \frac{P}{2+\sqrt{3}} \quad (3.11)$$

A seção transversal ótima dos elementos 1-5:

$$\sigma_b = \frac{k \cdot A_l}{L_1^2} = \frac{N_1}{A_l} \quad (3.12)$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{3/4}} \cdot L \cdot \sqrt{P/k}, A_5 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{P}{\sigma_p}$$

Substituindo a definição do coeficiente de flambagem apresentado em (3.8) na equação (3.12), resulta que o volume total fica:

$$V_{II} = 4 \cdot A_1 \cdot L_1 + A_5 \cdot L_5 \approx 7.78 \cdot L \frac{P}{\sigma_p} \quad (3.13)$$

Verifica se que o volume total é menor daquele obtido para o primeiro caso, equação (3.9) $V_{II}/V_I = 7.78/10$.

No exemplo citado ficam evidenciadas as possíveis complicações na busca da solução ótima para o caso de restrições de flambagem nas barras da estrutura.

Guo [Guo, et al., 2001] propôs uma formulação para contornar os problemas relativos as singularidades nas restrições de flambagem de barras. Na solução proposta por Guo, a restrição de flambagem é reescrita da seguinte forma:

$$g_{\text{mod-}i}^B(A) = F_i^{\text{mod}}(A) - \sigma_{i,B}(A) / A \leq \varepsilon$$

$$F_i^{\text{mod}}(A) = \begin{cases} F_i(A), & \text{se } A_i \geq A_i^T \\ F_i^T \left\{ \left[\frac{F_i^T}{F_i(A)} \right]^2 - 3 \left[\frac{F_i^T}{F_i(A)} - 1 \right] \right\}, & \text{se } A_i < A_i^T \end{cases} \quad (3.14)$$

onde A é a área da barra, $\sigma_{i,B}$ é a tensão limite de flambagem da barra e $F_i(A)$ é a força atuante na barra, ε é o coeficiente de relaxação das tensões, A_i^T é um valor limite de área e F_i^T é a força barra i sendo sua seção transversal com área A_i^T .

A formulação consiste em modificar a forma da restrição de flambagem quando a área de uma seção for reduzida gradativamente e se tornar menor que o valor pré-estabelecido A_i^T .

4 PROGRAMAÇÃO INTEIRA

Em uma grande gama de aplicações de otimização, é conveniente adotar que as variáveis de projeto assumam valores discretos. Para solução destes problemas, é mais adequado utilizar uma técnica de busca baseada em programação inteira, onde as variáveis possam assumir valores discretos dentro de um conjunto finito de possibilidades.

Os métodos de programação inteira têm como característica fundamental a abordagem do problema de forma estocástica. Desta forma, é necessário avaliar a função objetivo um número de vezes muito maior se comparado os métodos de programação matemática.

Atualmente existem diversos métodos de programação inteira para solução de problema de otimização, cabendo citar: o método do recozimento simulado proposto por Kirkpatrick [Kirkpatrick, et al., 1983] e o método dos algoritmos genéticos inicialmente proposto por Holland [Holland, 1975]. Também existem outros métodos, que conforme Le Riche [Le Riche e Haftka, 2012] são considerados derivados do recozimento simulado: *Particle Swarm* (nuvem de partículas) apresentado por Kennedy [Kennedy e Eberhart, 1995], o método *Ant colony Search* (Colônia de formigas) proposto por Dorigo [Dorigo, 1992].

O método dos algoritmos genéticos é o mais popular entre os métodos de programação inteira disponíveis. O método tem sido amplamente utilizado na solução de problemas de otimização estrutural. A simplicidade do método, sua fácil implementação e a variada disponibilidade de bibliotecas computacionais já testadas e validadas fizeram com que este método fosse escolhido para utilização neste trabalho.

No artigo publicado por Le Riche [Le Riche e Haftka, 2012], o autor realiza a análise sobre os artigos que tratam de métodos meta-heurísticos publicados no periódico *Structural Multidisciplinary Optimization*. Frente à similaridade entre as diversas metodologias propostas, o autor estabelece critérios para aceitação de futuros trabalhos no periódico:

- Os novos algoritmos de solução meta-heurísticos propostos devem mostrar com clareza a diferença entre os métodos já existentes;
- Deve ser apresentado estudo mostrando a influência dos parâmetros do método na solução do problema, bem como testes para verificar a influência da estimativa inicial no resultado final;
- O autor deve explicitar claramente para qual classe de problemas o algoritmo proposto é adequado. Também deve mostrar porque a classe de problemas em estudo não pode ser solucionada com métodos de gradiente.

Dentro desse contexto, a proposta deste estudo é estabelecer uma formulação para considerar as restrições específicas para o problema de otimização em estruturas unifilares. Para atingir este objetivo, foi utilizado um método de programação inteira, que leva vantagem sobre os demais para solução desta classe de problemas. O algoritmo de solução não é o foco central da pesquisa, é somente umas das ferramentas utilizadas para compor a solução do problema formulado.

A utilização de um algoritmo de solução por programação inteira se justifica pelas singularidades intrínsecas à classe de problemas estudados, bem como pela necessidade de adotar variáveis inteiras. É essencial que as variáveis sejam inteiras, pois as mesmas são definidas com base um conjunto de valores e não apenas por um único valor representativo.

4.1 Algoritmos genéticos (AG)

Os algoritmos genéticos são métodos baseados na teoria da seleção natural proposta por Darwin. O autor propôs que a evolução dos indivíduos ocorre naturalmente, tendo maior chance de sobrevivência e reprodução aqueles com características mais adaptáveis ao meio. Os indivíduos mais fracos acabam sendo eliminados e suas características desfavoráveis são extintas da população em gerações futuras.

Através do processo de seleção natural, os indivíduos mais adaptados ao ambiente geram seus descendentes perpetuando suas características positivas. Desta forma, as características desejáveis aumentam gradativamente na população tornando-a cada vez mais forte.

As primeiras simulações computacionais envolvendo o método dos algoritmos genéticos foram criadas por biólogos nos anos 50 e 60. John Holland [Holland, 1975] publicou o livro “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*” e David Goldberg [Goldberg, 1989] publicou o trabalho “*Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*”, os quais foram considerados trabalhos precursores para o desenvolvimento desta classe de métodos.

A seguir são apresentados os principais conceitos sobre os algoritmos genéticos. A revisão é baseada na documentação da biblioteca de algoritmos genéticos **GALIB**, utilizada no desenvolvimento desta pesquisa [Wall, 1996].

4.2 Terminologia dos algoritmos genéticos

Conforme dito anteriormente, os algoritmos genéticos são baseados na teoria da evolução. Os termos utilizados no método têm como base a biologia. Conforme Goldberg [Goldberg, 1989], a analogia com a otimização é feita conforme descrito abaixo:

- Cromossomo ou genoma: Conjunto completo de genes de um organismo. Em termos do AG: Estrutura de dados que codifica uma solução para o problema, ou seja, um ponto de busca – Vetor de variáveis de projetos;
- Gen ou gene: Unidade de hereditariedade que é transmitida pelo cromossomo. É um elemento do vetor que representa o cromossomo – Cada gene representa uma variável de projeto;
- Alelo: Representa os valores que o gene pode assumir;
- Indivíduo: É definido por um conjunto de variáveis de projeto (cromossomo), que definem um ponto onde se pode avaliar a função objetivo;
- População: Conjunto de cromossomos. Representa certa quantidade de indivíduos os quais constituem uma geração durante a evolução do AG;
- Geração: Representa o número de iterações do método. As gerações dizem respeito o número de evoluções que as populações vão tendo ao longo do tempo.

4.3 Operadores genéticos

A seguir são apresentadas as etapas do algoritmo baseado em teoria genética.

- **Representação e Codificação:** Para que seja possível representar os indivíduos com suas características genéticas, é necessário codificar as variáveis do problema de otimização em cromossomos. A codificação binária foi a primeira a ser desenvolvida: cada cromossomo é representado por um vetor de zeros e uns. A grande desvantagem deste tipo de codificação fica aparente quando se deseja maior precisão numérica, o que gera cadeia de bits excessivamente longas. Para evitar este problema numérico, utiliza-se a codificação em números reais. A representação é feita diretamente através de números reais, os quais são utilizados para gerar as operações genéticas de cruzamento e mutação;

- **Geração da população inicial:** Geralmente, a população inicial pode ser gerada de forma aleatória. No entanto, já foi provado que o ponto de partida pode ter influência significativa na velocidade de convergência do método [Souza, 2009]. Caso se tenha alguma informação prévia a respeito do problema qual se possa utilizar, como estimativa inicial para o processo de otimização, esta deve ser utilizada. Também já foi verificado por Erbatur [Erbatur et al., 2000] que o ponto final de uma etapa de otimização pode ser utilizado como estimativa inicial para a próxima etapa, restringindo cada vez o limite de variação de cada variável de projeto;
- **Seleção:** A seleção é a escolha dos melhores indivíduos os quais são selecionados para reprodução. Existem diversos métodos de seleção, entre eles: Método da Roleta (*Roulette Wheel*): sobrevive o indivíduo que tem a melhor função objetivo associada; Seleção por Torneio (*Tournament Selector*): Seleção aleatória de n cromossomos da população e o cromossomo de maior aptidão é escolhido; Método Elitista: Preserva o melhor cromossomo de uma geração para outra sem alteração; Seleção via método exponencial: Os indivíduos são ordenados em ordem crescente de aptidão e a aptidão é escalonada por um coeficiente de exponenciação [Wall, 1996].
- **Cruzamento:** O cruzamento é responsável por recombinar as características dos pais na fase de reprodução. A ideia principal é perpetuar as características favoráveis de cada um dos pais através da combinação dos genes de cada progenitor. Após a fase de cruzamento os novos indivíduos são criados, o que caracteriza a fase de reprodução. Existem diversos operadores genéticos de reprodução a forma como é realizada a reprodução caracteriza diferentes tipos de algoritmos genéticos:
 - **Algoritmo genético Geracional:** Toda população é substituída a cada geração;
 - **Algoritmo genético em Regime (Steady State):** Um novo indivíduo é inserido na população a cada vez que é criado com base na avaliação de sua aptidão. Caso a aptidão do novo indivíduo seja melhor que o pior da lista de classificação ele terá direito a sobreviver, e o pior da lista será eliminado.
- **Mutação:** A mutação é responsável por garantir a diversidade da população [Holland, 1975]. No algoritmo, este operador modifica aleatoriamente alguns genes do indivíduo. Esta operação permite ao algoritmo contornar o problema de convergência para ótimos locais. Como a mutação é aleatória, a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca nunca é nula.

4.4 Parâmetros genéticos

Na natureza, diferentes espécies constituem um meio o qual está em equilíbrio. As diferenças entre as espécies, condições climáticas e etc, introduzem certo grau de dificuldade para sobrevivência e perpetuação de determinada espécie. Desta forma, os indivíduos mais adaptados e com características mais favoráveis acabam se sobressaindo e levando vantagem no processo de procriação, perpetuando assim as melhores características da população.

A implementação de um algoritmo genético deve tentar reproduzir de forma artificial um meio ambiente que selecione as características desejadas no processo de otimização. Num ecossistema, o tamanho de uma população, as taxas de reprodução e de mutação são intrínsecas ao equilíbrio ecológico. Já em um algoritmo genético, estes parâmetros são determinados de forma heurística e podem assumir valores diferentes de acordo com o a natureza física do problema que se está tratando.

A seguir são explanados os principais parâmetros genéticos:

- Tamanho da população: ao se trabalhar com populações pequenas o desempenho do algoritmo pode ser comprometido, já que o espaço de busca também é reduzido. Utilizar populações com grande número de indivíduos fornece uma melhor aproximação evitando a convergência prematura do método. Porém, o uso de populações muito grandes pode consumir tanto tempo computacional até tornar o método lento em demasia;
- Taxa de cruzamento: A taxa de cruzamento permite que novo material genético seja inserido na população. No entanto, se a taxa de cruzamento for muito elevada, as características genéticas de boa aptidão serão perdidas;
- Taxa de mutação: O operador de mutação é responsável por garantir que a solução não fique estagnada em um ponto e que a probabilidade de encontrar um ponto de ótimo global nunca seja nula. Se for utilizada uma taxa de mutação muito alta, a busca da solução ótima se torna praticamente aleatória;
- Intervalo de geração: Determina a porcentagem da população a ser substituída na geração seguinte. Com valor alto é possível que se percam indivíduos com boas características. Já se for baixo, o algoritmo se torna muito lento.

4.5 Função aptidão e restrições

No método dos algoritmos genéticos não é possível tratar o problema de otimização conforme descrito na equação (3.4). Para o AG a única informação necessária é o valor da função objetivo, portanto, deve-se modificar o problema original de para incluir as restrições na função custo.

Nesta pesquisa adotou-se a técnica de penalização sobre as restrições. Este método consiste em utilizar uma combinação linear entre função objetivo e a equação de cada uma das restrições. Sendo a função objetivo bem definida, o problema consiste em determinar um coeficiente de penalização para as restrições de forma que quando as mesmas sejam violadas causem uma perturbação na função custo.

O método mais simples de penalização consiste em aplicar uma penalidade constante a cada restrição violada:

$$f_p(x) = f(x) + C \cdot \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \quad (4.1)$$

Onde,

$f_p(x)$ é a função objetivo penalizada;

$f(x)$ é a função objetivo original;

C é o coeficiente de penalização imposto as restrições;

$\delta_i = 0$ se a restrição não é violada;

$\delta_i = 1$ se a restrição é violada;

n é o número de restrições do problema.

Diversas técnicas de penalização têm sido propostas e algumas delas são discutidas por Michalewicz [Michalewicz, 1995]. No seu estudo, o autor aborda seis diferentes formas de penalização e realiza um comparativo entre elas.

Em um artigo posterior. O mesmo autor [Michalewicz e Schoenauer, 1996] conclui que mesmo com técnicas de penalização mais complexas os ganhos na taxa de convergência não são significativos. Ao se realizar uma abordagem mais apurada é necessário realizar o ajuste de uma série de parâmetros de penalização. Em consequência, os coeficientes se tornam adequados a um problema em específico e necessitam ser ajustados para cada tipo de problema. Diferente dos casos mais simples de penalização onde os coeficientes são mais gerais.

A grande desvantagem das técnicas de penalização é a necessidade de ajustar heurísticamente o valor da penalização. Diversos autores têm estudado métodos para evitar o uso de funções penalizadas. O trabalho mais notório sobre o assunto foi apresentado por Deb [Deb, 1998]. No seu trabalho, as restrições são impostas ao problema utilizando o método de seleção por torneio, comparando os indivíduos da população da seguinte forma:

- Caso um indivíduo tenha solução possível e outro não, o primeiro é selecionado;
- Entre dois indivíduos com solução possível seleciona-se aquele com melhor valor da função objetivo;
- Entre dois indivíduos cuja solução não é viável, seleciona-se aquele que viola o menor número de restrições.

Na abordagem proposta por Deb, os parâmetros de penalização são eliminados.

A conclusão do autor mostra que a metodologia é válida e conduz a resultados satisfatórios além de proporcionar grande ganho em custo computacional.

4.6 Esquema de um algoritmo genético

O algoritmo inicia estabelecendo uma população inicial, conforme dito anteriormente, o ponto de partida pode ser aleatório ou determinado por algum outro método. Cada um dos indivíduos é avaliado, e posteriormente, é aplicado algum método de seleção a fim de escolher os cromossomos mais adequados para o cruzamento. Os operadores de cruzamento e mutação são aplicados e geram novos indivíduos, os quais são mesclados com uma porcentagem dos melhores cromossomos da geração anterior para formar uma nova população. A lista de novos cromossomos é avaliada e caso seja atendido o critério de parada, o processo de evolução é finalizado.

A Figura 4.1 apresenta o esquema de evolução dos algoritmos genéticos.

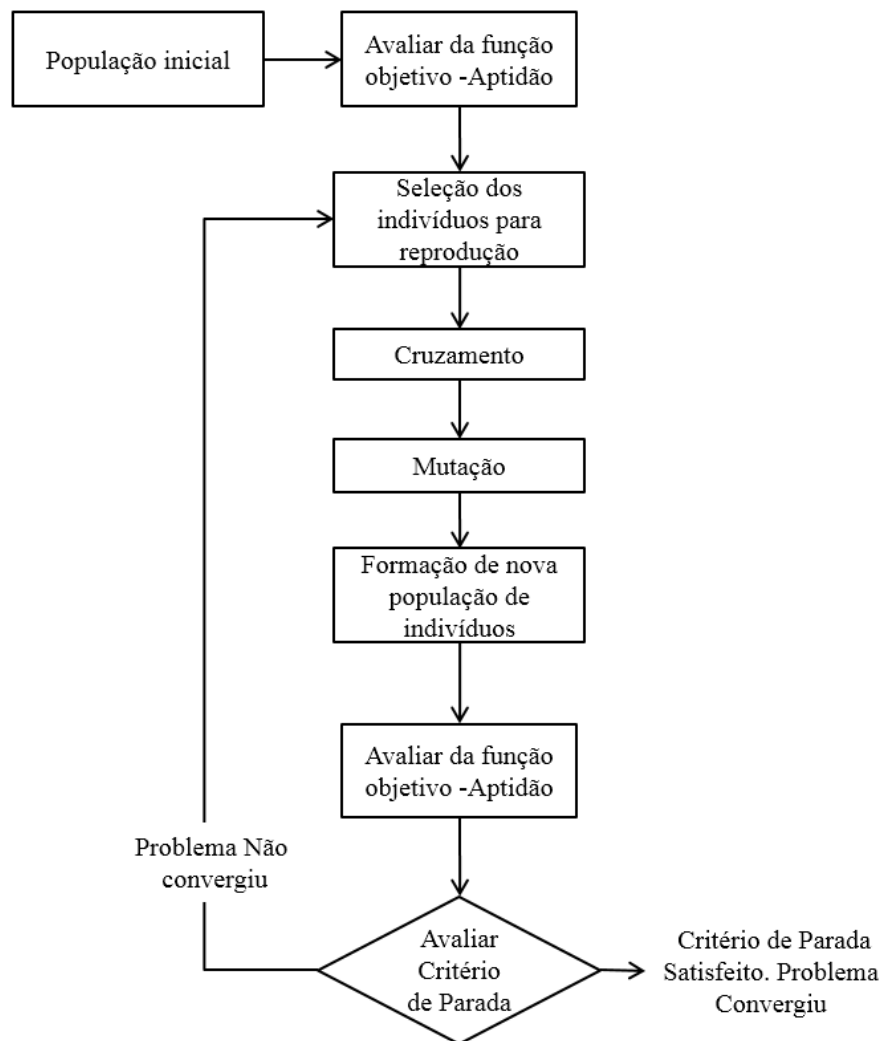


Figura 4.1. Esquema de solução de um algoritmo genético.

4.7 Comparativo entre algoritmos genéticos e algoritmos clássicos de otimização

No método da programação linear inicia-se a busca da solução partindo de um ponto (estimativa inicial), obtêm-se as derivadas e conseqüentemente a direção para qual solução deve progredir. Por necessitarem do cálculo de derivadas, estes algoritmos recebem o nome de ordem n , onde n é a ordem da derivada a qual o método necessita. Exemplos típicos destes métodos são os métodos de Newton e gradientes conjugados.

A solução da programação linear é enunciada através do teorema: “O ótimo de uma função linear em um poliedro convexo $P \subseteq R^n$ encontra-se pelo menos em um vértice. Se encontrar em mais de um vértice, então ele é obtido em todos os pontos pertencentes a combinação convexa destes vértices” [Dantzig, 1963]. A consequência do teorema indica que no problema de otimização a solução está sobre um dos vértices formados pela interseção entre

duas ou mais restrições. Como a busca é feita com base nos gradientes da função objetivo, ao chegar em um vértice onde as derivadas da função objetivo são positivas, o algoritmo entende que a solução do problema foi encontrada. No entanto, não há nenhuma garantia de que o ponto de mínimo encontrado é o mínimo global. O algoritmo apenas convergiu para o ponto ótimo mais próximo de sua direção de busca. Desta forma, se faz necessário utilizar alguma técnica de relaxação para que os algoritmos de solução consigam alcançar os pontos degenerados do domínio.

Por outro lado, os algoritmos genéticos não necessitam nenhuma informação dos gradientes do problema e são menos suscetíveis a e condições de mínimos locais. As diferenças que tornam os algoritmos genéticos versáteis e robustos são descritas conforme Goldberg [Goldberg, 1989]:

- Os AG's não necessitam de informações dos gradientes do problema;
- Os AG's podem trabalhar com funções objetivos descontínuas ou com singularidades sem grande ônus ao método;
- Os operadores genéticos são probabilísticos, desta forma ficam menos suscetíveis a ficarem presos em mínimos locais;
- O operador de mutação garante que em nenhum momento a probabilidade de se encontrar o ótimo global seja nula.
- Permite utilizar as variáveis de projeto de forma discreta, Ex: Tabela de perfis comerciais de vigas;
- São de fácil implementação numérica.

Dentre as principais desvantagens, cabe citar:

- Os parâmetros devem ser adequadamente ajustados, caso contrário pode ocorrer convergência prematura ou o problema pode não convergir;
- Durante o processo de busca pode ser necessário avaliar a função objetivo um número de vezes muito maior quando comparado com os algoritmos de programação linear;
- O elevado custo computacional torna esta classe de algoritmos inadequada para problemas de grande escala.
- Não há prova de convergência do método para o mínimo global. No entanto, a prática mostra que o método é adequado para solução de problemas multimodais.

5 TEORIAS ESTRUTURAIS CLÁSSICAS

A grande maioria das estruturas reais é projetada de forma que os deslocamentos causados pelas condições de utilização são tão pequenos que a configuração deformada e indeformada é confundida. Ainda, se porventura o carregamento for aliviado, a estrutura retorna a sua configuração original. Esse comportamento permite utilizar a teoria da elasticidade linear infinitesimal para caracterizar o comportamento estrutural. No entanto, para as estruturas reais não é possível obter as soluções das equações da elasticidade linear infinitesimal de forma trivial.

Muitas vezes a utilização de simplificações sobre a geometria e a adoção de hipóteses adequadas sobre o campo de deslocamentos permite simplificar substancialmente o problema. A construção da solução a partir de hipóteses simplificadoras caracteriza a classe de métodos de solução baseados nas teorias estruturais.

Existem diversas teorias estruturais as quais são aplicáveis aos mais variados tipos de problemas. Dentre as teorias mais importantes cabe citar a teoria de barras, vigas e eixos. Estas teorias são aplicáveis a membros cuja seção transversal não varia ao longo do comprimento e uma de suas dimensões é muito maior que as outras duas.

5.1.1 Carregamento axial em Barras

Seja o corpo da Figura 5.1, cuja seção transversal é considerada constante, e as dimensões da seção transversal são muito menores quando comparados ao comprimento (L) do corpo. Ainda, supondo que os únicos esforços aplicados a este elemento sejam colineares com o eixo longitudinal. Neste caso, a condição de tração na direção do eixo longitudinal fica simplificada a:

$$t_1 = \sigma_{1j} n_j \quad (5.1)$$

e, $t_2 = t_3 = 0$ conseqüentemente $t_1 = \sigma_{3j} = 0$.

onde t_1 , t_2 e t_3 são os vetores de tração na superfície do corpo e σ_{1j} , σ_{2j} e σ_{3j} as componentes do tensor tensão de Cauchy.

Assumindo que as condições de contorno de tensão nas demais faces da peça são nulas, o problema de elasticidade linear infinitesimal fica definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_{11}(u)}{dx_1} + f_1 = 0 \\ u_1 = u_1^0 \text{ em } \Gamma^d \\ t_1 = \sigma_{11}n_1 \text{ em } \Gamma^n \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Onde f_1 é a componente do vetor de forças de corpo na direção axial, $u_1 = u_1^0$ a condição de fronteira de Diriclet e $t_1 = \sigma_{11}n_1$ a condição de fronteira de Neuman.

A figura abaixo, apresenta a geometria considerada no caso de barras sujeitas á esforços axiais.

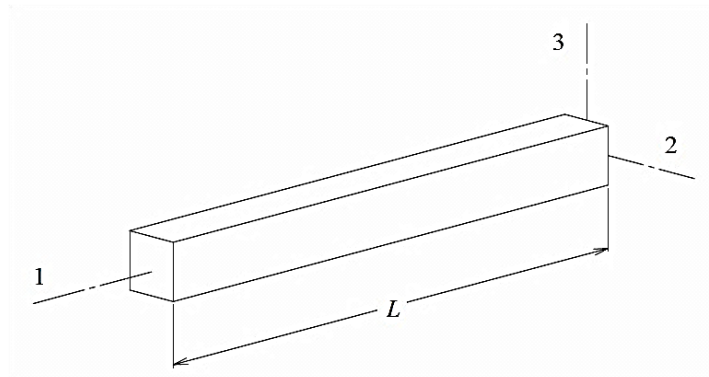


Figura 5.1. Geometria simplificada de uma barra.

5.1.2 Torção em membros circulares

A dedução das equações de equilíbrio, para torção, assume as seguintes hipóteses sobre o campo de deslocamentos:

- As seções transversais inicialmente planas e perpendiculares ao eixo longitudinal permanecem planas e perpendiculares após o elemento ser submetido a um esforço de torção;
- As deformações angulares variam linearmente a partir do eixo central;
- As trações são aplicadas apenas nas extremidades.

A figura abaixo ilustra a hipótese sobre o campo de deslocamentos em um membro circular sob esforços de torção:

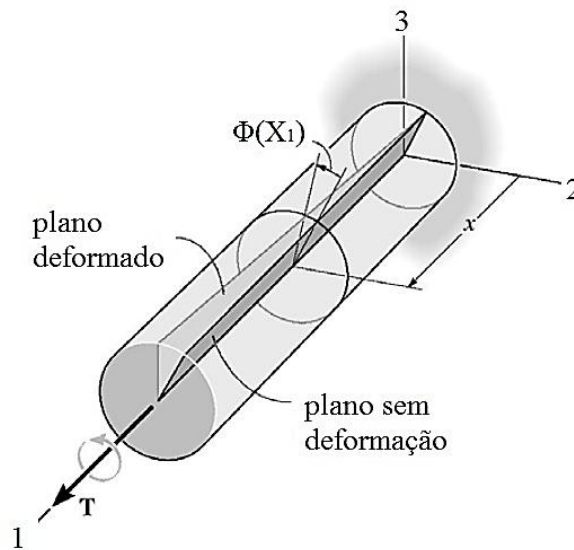


Figura 5.2. Ilustração da hipótese sobre os deslocamentos em um membro circular de seção constante.

Para membros circulares, convém definir as equações no sistema de coordenadas cilíndrico. Assim, resulta que o campo de deslocamentos é representado por:

$$u_{\theta} = \Phi(X_1) \quad (5.3)$$

onde u_{θ} é o deslocamento angular da seção.

A única componente de tensões não nula é $\sigma_{1\theta} = G\rho \frac{du_{\theta}}{dx_1}$, onde ρ é a coordenada radial da seção.

O problema geral de torção em barras circulares fica definido da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx_1} \left(G\rho \frac{du_{\theta}}{dx_1} \right) + f_{\theta} = 0 \\ u_{\theta} = u_{\theta}^0 \text{ em } \Gamma^d \\ T = \int_A \sigma_{1\theta} \times \rho dA \end{array} \right. \quad (5.4)$$

onde T é o torque aplicado nas extremidades da barra.

No caso de membros cuja seção transversal não é circular, as hipóteses consideradas em barras circulares não são mais válidas. A seção transversal, inicialmente plana não permanece plana após a deformação. Maiores detalhes sobre a formulação para torção em barras não circulares podem ser encontrados em Popov [Popov, 20001].

5.1.3 Flexão de vigas

Dentre muitas teorias de vigas existentes uma se destaca por sua simplicidade e aplicabilidade em uma variada gama de problemas de engenharia. A teoria de Euler- Bernoulli, para flexão de vigas, assume a seguinte hipótese fundamental sobre o campo de deslocamentos:

- As seções transversais, inicialmente planas e perpendiculares ao eixo da viga, permanecem planas e perpendiculares após sofrer uma deformação causada por momento fletor.

Admitindo a hipótese acima, o campo de deslocamentos é descrito em função da deflexão vertical da linha média da seção:

$$\begin{aligned} u_1 &= -X_3 \frac{du_3}{dX_1} \\ u_3 &= u_3(X_1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Calculando as deformações conforme tensor de deformações infinitesimais e adotando a lei constitutiva elástica linear isotópica, resulta no campo de tensões abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{33} &= -EX_3 \frac{d^2u_3}{dX_1^2} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Reescrevendo a equação de equilíbrio em termos do campo de deslocamentos, o problema de flexão em vigas fica definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dX_1^2} \left(EI_z \frac{d^2u_3}{dX_1^2} \right) = f_3 \\ u_3 = u_3^0 \text{ em } \Gamma_1 \\ \frac{du_3}{dX_1} = \theta^0 \text{ em } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

onde f_3 é o vetor de cargas na direção 3, u_3^0 a condição de deslocamento prescrito e θ^0 a condição de rotação prescrita.

A aplicação da teoria de vigas de Euler-Bernoulli é restrita aos casos onde o cisalhamento não tem importância significativa no comportamento estrutural.

6 ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo é feita uma síntese do método dos elementos finitos através da abordagem variacional. A revisão é feita com base no livro *Finite Element Procedures* [Bathe, 1996].

6.1 Histórico do Método dos elementos finitos

Na teoria da elasticidade, a preocupação principal está centralizada em propor modelos matemáticos que sejam capazes de representar a situação real de componentes sujeito a esforços. Na maioria das vezes, a solução dos modelos matemáticos para casos práticos apresentam dificuldades intransponíveis.

Nos casos reais de engenharia é de grande complexidade a tarefa de representar matematicamente a geometria, condições de contorno, comportamento dos materiais e etc. Muitas vezes, para obter a solução de um problema de forma analítica, se faz necessário à introdução de inúmeras hipóteses simplificadoras, que acabam diminuindo a fidelidade do modelo matemático em relação ao fenômeno físico. Contudo, cada vez mais é necessário realizar estudos mais precisos para determinar o comportamento estrutural de peças e componentes. Resulta, que os modelos matemáticos criados são complexos em demasia para serem tratados analiticamente.

Assim, a única maneira de obter soluções mais precisas para problemas reais é a adoção de um método de aproximação que seja capaz de representar os princípios das teorias matemáticas de forma acessível e suficientemente precisa. Dentre os diversos métodos existentes, os que mais se destacaram são aqueles baseados na divisão do meio contínuo em “pedaços” menores. O método dos elementos finitos é sem dúvida a abordagem mais utilizada para solução de problemas estruturais. A sua larga utilização se deve ao fato de poder ser aplicado em diferentes áreas, mecânica dos sólidos, mecânica dos fluídos, eletromagnetismo, etc.

A origem do método não é claramente conhecida. Segundo Felippa [Felippa, 2001] estima-se que o método foi criado na Inglaterra ou na Alemanha no final da década de 1920 ou no início da década de 1930. No entanto, foi em 1943 que o matemático Richard Courant [Courant, 1943] publicou um estudo onde propôs a aproximação para a solução do problema de torção através da utilização de funções lineares. O domínio foi dividido em regiões triangulares, e sobre cada “pedaço” foram aplicadas as condições de equilíbrio e obtidas às

soluções para elasticidade linear isotrópica de forma aproximada. Devido aproximação por funções lineares e a forma de divisão do domínio, esta publicação deu origem ao conhecido elemento finito denominado triângulo de deformações constantes (*CST*).

Argyris e Kelsey [Argyris e Kelsey, 1960] publicaram um estudo onde foram unificados os conceitos de análise estrutural e análise do meio contínuo e propuseram os procedimentos de solução na forma matricial. Este é o considerado por Bathe [Bathe, 1996] um dos trabalhos precursores para o desenvolvimento do método dos elementos finitos. Outro trabalho considerado de suma importância foi produzido por Turner [Turner, 1956] onde o método da rigidez direta é proposto de maneira geral e eficiente de forma que se tornou a base para o método dos elementos finitos.

Até então o método não dispunha de uma terminologia característico. O termo “Elemento Finito” foi citado pela primeira vez por Clough [Clough, 1960].

Posteriormente as publicações mencionadas, a partir da década de 60, iniciou-se um desenvolvimento intensivo do método. Impulsionado pelo surgimento dos computadores digitais e pela nova realidade em termos de processamento computacional o método difundiu-se e se tornou muito popular na indústria e no meio acadêmico [Fonseca, 2002].

6.2 Formulação geral do método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos utiliza a formulação fraca dos métodos dos resíduos ponderados, ou a formulação variacional quando existe um funcional associado ao problema.

No método dos elementos finitos são obtidos os campos de deslocamentos, e posteriormente, por diferenciação são obtidas as deformações e tensões.

Uma das formas de dedução do método é através do enunciado dos princípios dos trabalhos virtuais e do princípios da mínima energia potencial.

6.2.1 Princípio dos trabalhos virtuais

Considere um corpo qualquer sujeito a forças de corpo e de superfície. Com base no seu equilíbrio estático, sua configuração é modificada por um conjunto de pequenos deslocamentos que são compatíveis com suas condições de contorno. O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas nas deformações virtuais é igual ao trabalho realizado pelas forças externas nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação.

6.2.2 Princípio da mínima energia potencial

A energia potencial de um corpo é definida como a soma da energia de deformação e o trabalho realizado pelas forças externas. Partindo da forma geral do funcional de energia potencial:

$$\Pi = B(u) - f(u) \quad (6.1)$$

onde

$$B(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon^T C \varepsilon) d\Omega \quad (6.2)$$

corresponde à parcela de energia potencial de deformação, ε é o tensor deformação e C o tensor constitutivo, e:

$$f(u) = \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma} t \cdot u d\Gamma \quad (6.3)$$

é o trabalho realizado pelas forças externas. O termo à esquerda corresponde ao trabalho realizado pelas forças de corpo e o termo mais à direita o trabalho realizado pelas forças de superfície.

Princípio da mínima energia potencial: De todas as configurações possíveis (cinematicamente admissíveis) que um sólido deformável pode assumir, a que ocorre é aquela que resulta na energia potencial mínima. Em termos matemáticos, significa realizar a primeira variação do funcional de energia em relação aos deslocamentos:

$$\delta(\Pi) = 0$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T C \delta \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} b^T \delta u d\Omega - \int_{\Gamma} t^T \delta u d\Gamma \quad (6.4)$$

que é a forma geral do enunciado do princípios dos trabalhos virtuais.

O método dos elementos finitos, consiste em aproximar o campo de deslocamentos por um conjunto de funções de interpolação que são definidas em termos dos deslocamentos nodais:

$$\{u\} = [N] \{u_e\} \quad (6.5)$$

onde u_e são os deslocamentos dos nós de cada elemento finito e $[N]$ o vetor de funções de interpolação. Inserindo a equação 5.5 na equação 5.4 e realizando as devidas simplificações, resulta que:

$$\int_{\Omega} [B]^T [C][B] \{u_e\} d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T \{F_C\} d\Omega - \int_{\Gamma} [N]^T \{F_S\} d\Gamma = 0 \quad (6.6)$$

A equação acima é a forma geral do método dos elementos finitos. O termo $\int_{\Omega} [B]^T [C][B] d\Omega = K_e$ é a matriz de rigidez do elemento finito, e o termo $\int_{\Omega} [N]^T \{F_C\} d\Omega + \int_{\Gamma} [N]^T \{F_S\} d\Gamma = F_e$ é o vetor de forças nodais do elemento.

O que resulta na forma clássica de um problema de elementos finitos:

$$[K_e] \{u_e\} = F_e \quad (6.7)$$

6.3 Elemento finito de barra

O elemento finito para barras é o elemento mais simples entre os elementos finitos para análise estrutural.

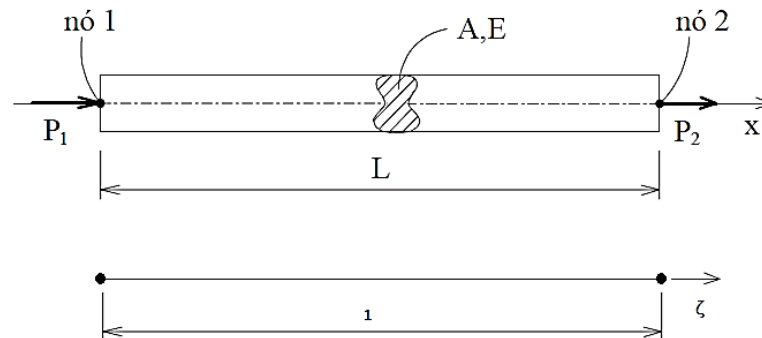


Figura 6.1. Elemento finito para uma barra, definido em coordenadas globais e coordenadas paramétricas.

Conforme dito anteriormente, hipótese fundamental está em definir a forma das funções de interpolação. Para o caso de barras são consideradas funções de interpolação lineares.

Abaixo são listadas as funções de interpolação para o elemento finito de barra:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \zeta \\ N_2 &= \zeta \end{aligned} \quad (6.8)$$

As funções de interpolação são equações polinomiais que atendem o seguinte requisito fundamental:

- Cada uma das funções tem valor unitário para o nó onde é definida, e nula nos demais nós;

Geralmente, as funções de interpolação são definidas em termos de um elemento unitário em coordenadas parametrizadas.

Assim, as coordenadas nodais também são definidas em termos das funções de interpolação:

$$\{x\} = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

No caso de elementos unidimensionais, a relação entre o sistema de coordenadas global e o elemento em coordenadas parametrizadas fica:

$$\zeta = \frac{x}{L} \quad (6.10)$$

Definindo os deslocamentos em função das funções de interpolação:

$$\{u_e\} = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

O campo de deformações fica:

$$\varepsilon = \frac{du_e}{dx} = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Como as funções de interpolação são definidas em termos das coordenadas paramétricas, para obter as derivadas em relação às coordenadas cartesianas é necessário utilizar a regra da cadeia:

$$\left\{ \frac{dN_1}{d\zeta} \quad \frac{dN_2}{d\zeta} \right\} = \left[\frac{dx}{d\zeta} \right] \left\{ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\} = [L] \left\{ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\} \quad (6.13)$$

$$\left\{ \frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right\} = \frac{1}{[L]} \left\{ \frac{dN_1}{d\zeta} \quad \frac{dN_2}{d\zeta} \right\} = \frac{1}{[L]} \{-1 \quad 1\} \quad (6.14)$$

Substituindo o resultado acima na equação (6.12), o campo de deformações é definido da seguinte forma:

$$\varepsilon = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\varepsilon = [B] \{u_e\} \quad (6.16)$$

Substituindo o resultado da equação (6.16) na equação (6.6):

$$K_e = A \int_0^1 [B]^T [E] [B] L d\zeta = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Que é a matriz de rigidez para um elemento de barra alinhado com o sistema de coordenadas global.

6.4 Elemento finito de torção

O elemento finito para efeitos de torção utiliza as mesmas funções de interpolação que o elemento de barra (equação (6.8)). A diferença está nos graus de liberdade que são interpolados:

$$\{u_e\} = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

onde θ_{x1} e θ_{x2} são os ângulos de torção do eixo nos nós.

Procedendo de maneira idêntica ao a dedução do elemento de barra, a matriz de rigidez do eixo é definida como:

$$K_e = I_t \int_0^1 [B]^T [G] [B] L d\zeta = \frac{GI_t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

onde G é o módulo de cisalhamento do material e I_t é o momento polar de inércia da seção.

A matriz de rigidez de torção obtida é válida somente para elementos com seções circulares.

6.5 Elemento finito de viga em duas dimensões

A Figura 6.2 apresenta o elemento finito de viga e os graus de liberdade considerados para dedução da matriz de rigidez.

São necessárias quatro funções de interpolação para caracterizar o comportamento de um elemento de viga. A equação (6.20) apresenta as funções de interpolação para o elemento de viga:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \\ N_2 &= L\zeta(1 - 2\zeta + \zeta^2) \\ N_3 &= \zeta^2(3 - 2\zeta) \\ N_4 &= L\zeta^2(\zeta - 1) \end{aligned} \quad (6.20)$$

as quais são chamadas de polinômios de Hermite.

Devido a hipótese de que as seções permanecem planas e perpendiculares após a deformação, os deslocamentos transversais e rotações da linha neutra da viga são relacionados

de forma direta. Dessa forma, é necessário definir função de interpolação para 4 graus de liberdade, 2 translações e duas rotações em cada elemento. As funções N_2 e N_4 são as funções de interpolação para as rotações da linha neutra, estas são definidas de maneira que as derivadas das mesmas são unitárias para o nó onde cada uma é definida.

A forma de cada um das funções está representada graficamente na Figura 6.3.

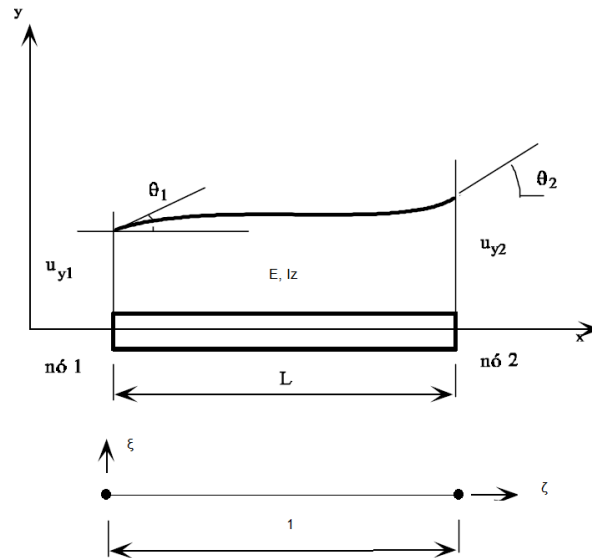


Figura 6.2. Elemento finito para flexão, definido em coordenadas globais e coordenadas paramétricas.

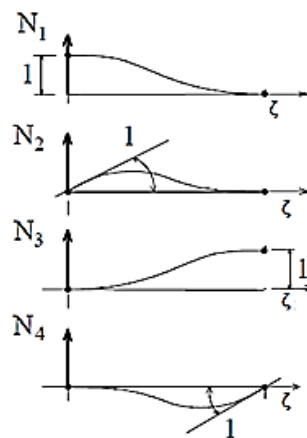


Figura 6.3. Funções de interpolação para um elemento de viga em duas dimensões.

O campo de deslocamentos fica definido conforme equação abaixo:

$$\{u_e\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} u_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

onde u_{y1} e u_{y2} são os deslocamentos verticais da linha neutra e θ_{z1} e θ_{z2} o ângulo de inclinação em torno do eixo z.

As coordenadas nodais são interpoladas pelas funções definidas na equação (6.11). Adotando a relação cinemática da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, a deformação axial fica:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{L} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 N_3}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 N_4}{\partial \zeta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

onde o termo entre colchetes é a matriz B utilizada no cálculo da matriz de rigidez do elemento.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{6}{L}(2\zeta - 1) & (6\zeta - 4) & -\frac{6}{L}(2\zeta - 1) & (6\zeta - 4) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

A matriz de rigidez é calculada pela seguinte expressão:

$$K_e = \frac{1}{L} \int_0^1 [B]^T [E] [B] L I_z d\zeta \quad (6.24)$$

onde $I_z = \int_A y^2 dA$ é o momento de inércia da seção transversal.

Integrando a equação, resulta na seguinte expressão para a matriz de rigidez do elemento de viga de Euler Bernoulli:

$$[K_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

O vetor de carga é calculado utilizando as mesmas funções de interpolação definidas para parametrização da geometria. Considerando uma distribuição de cargas cuja variação é linear ao longo da viga, o vetor de cargas é definido como:

$$p(\zeta) = [1-\zeta \quad \zeta] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

onde p_1 e p_2 são os valores do carregamento no nó 1 e no nó 2, respectivamente. Substituindo a expressão acima na equação (6.6) e, realizando a integração, o vetor de cargas fica definido como:

$$\{F_e\} = \frac{L}{20} \begin{bmatrix} 7p_1 + 3p_2 \\ \frac{L}{3}(3p_1 + 2p_2) \\ 7p_1 + 3p_2 \\ -\frac{L}{3}(2p_1 + 3p_2) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

A matriz de rigidez da equação (6.25) é obtida considerando uma viga no plano x-y. Para obter a matriz de rigidez considerando efeitos de flexão no plano x-z basta trocar o momento de inércia da seção I_z por I_y .

6.6 Superposição dos efeitos de barra, torção e flexão

Nos problemas lineares elásticos existe uma relação linear entre tensão e deformação. Dessa forma, as tensões e as deformações podem ser superpostas. Isso significa dizer que se no mesmo elemento e para um mesmo sistema de coordenadas dois conjuntos de tensões são conhecidos, a adição dos componentes do tensor de tensão é possível, tal como nas componentes vetoriais. Isto é possível pois as componentes do tensor de tensão localizadas em posições idênticas na matriz são associadas com os mesmos elementos de área.

Como a relação entre os deslocamentos e deformações é linear, também é possível superpor as componentes do vetor de deslocamentos. Dessa forma, as matrizes de rigidez obtidas para os casos de esforço axial, torção e flexão são combinadas a fim de gerar um elemento finito genérico capaz de capturar qualquer um dos efeitos citados. Reorganizando os graus de liberdade e levando em conta a flexão nos dois planos (x-y e x-z), a matriz de rigidez de um elemento finito de viga tridimensional, sem empenamento da seção com torção uniforme, fica definida conforme equação (6.28).

$$[K_e] = \begin{bmatrix}
 EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 6EI_z/L^2 & 0 & 0 \\
 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 \\
 GI_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_x/L & 0 & 0 & 0 \\
 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 2EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4EI_z/L & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/L & 0 & 0 & 0 \\
 EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 \\
 12EI_y/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 GI_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4EI_y/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4EI_z/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Simétrica

Os graus de liberdade são ordenados na seguinte forma:

$$\{u_e\}^T = \{u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{z1} \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad u_{z2} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\} \quad (6.29)$$

A matriz de rigidez, definida na equação (6.28), é válida somente para os casos onde as hipóteses de Euler Bernoulli são aplicáveis.

7 DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL

Entre os principais métodos de dimensionamento estrutural destacam-se: Método das Tensões Admissível (ASD, *Allowable Stress Design*), Método dos estados Limites também conhecido como LRFD (*Load and Resistance Factor Design*) e o Método da Confiabilidade.

Os métodos ASD e LRFD foram estabelecidos e publicados pela AISC (*American Institute of steel constructions*) com o intuito de estabelecer critérios mínimos de segurança a serem seguidos nos projetos de construções em aço. A seguir são apresentados os conceitos fundamentais destes métodos baseados nas publicações da AISC: *Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design, 9th Ed.* e *Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design, 13rd Ed.*

7.1 Método das tensões admissíveis

Na teoria das tensões admissíveis, as tensões geradas pelas cargas de serviço (S_n) são majoradas e não podem ultrapassar o limite de resistência do material utilizado (R_d).

$$S_n \leq R_d \quad (7.1)$$

onde S_n é a solicitação nominal de projeto e R_d a resistência de dimensionamento deduzida através do fator de segurança.

Caso as tensões de solicitação sejam superiores a tensão limite admissível, é considerado que a estrutura pode apresentar falha estrutural. Para realizar o dimensionamento estrutural por esse método, é necessário introduzir o conceito de fator de segurança, que é a razão entre a tensão resistente a solicitação. O valor do fator de segurança é estabelecido com base no conhecimento prévio do problema e na experiência do projetista.

Este método tem como vantagem a simplicidade em sua aplicação. No entanto, não detalha com maior precisão a variabilidade e natureza das cargas. Ficando a cargo do fator de segurança compensar quaisquer incertezas nas cargas ou nas resistências.

7.2 Método dos estados Limites

Também conhecido como “*Load and resistance factor design*”, o método foi desenvolvido a partir da década de 60. A sua consolidação foi impulsionada por dois grandes motivos: a necessidade de fabricar estruturas mais leves que operassem em condições seguras próximas do seu limite de falha e a ideia de que os parâmetros de resistência e solicitação podem ser enquadrados na teoria da probabilidade.

O método utiliza o conceito probabilístico de maneira simplificada, adotando coeficiente de majoração para as cargas de acordo com a natureza da solicitação. As cargas são subdivididas em diferentes grupos: peso próprio, carga de operação, carga de manutenção, ações climáticas, etc. Dependendo do tipo de equipamento a ser projetado, cada norma de projeto estabelece diferentes coeficientes de majoração para cada grupo de carga.

Assim como as ações, as resistências também apresentam variabilidade no seu valor nominal. O valor real da resistência é obtido através da multiplicação de seu valor nominal por um coeficiente que leva em conta as incertezas inerentes à resistência.

$$\begin{aligned} S_d &\leq R_d \\ R_d &= \phi R_n \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde S_d é a solicitação de dimensionamento e R_d a resistência de dimensionamento reduzida através do fator incertezas.

A segurança da estrutura é definida como a capacidade de a mesma suportar ações a que venha ser submetida durante a sua vida útil, sem que alcance o seu estado limite de utilização.

O estado limite de utilização representa as condições normais de solicitação para as quais estrutura foi projetada. Já o estado limite último é aquele que define a situação correspondente à ruína total da estrutura [ABNT NBR 8800, 2008].

7.3 Método da Confiabilidade

O método da confiabilidade é uma disciplina emergente no campo de dimensionamento estrutural. Na maioria das vezes, o dimensionamento de estruturas através do conceito de fator de segurança é realizado de forma conservadora. Mesmo assim, qualquer estrutura real pode vir a falhar. O método da confiabilidade trata de determinar qual a probabilidade de falha.

Considerando um sistema mecânico qualquer, submetido a um caso de carga F , cujo comportamento segue alguma distribuição estatística. Um material com resistência (R) que também é uma variável aleatória, cujo comportamento é caracterizado pela teoria estatística. A probabilidade de falha é descrita como:

$$P\{Falha\} = P\{F \geq R\} \quad (7.3)$$

O problema de confiabilidade está representado esquematicamente no gráfico abaixo:

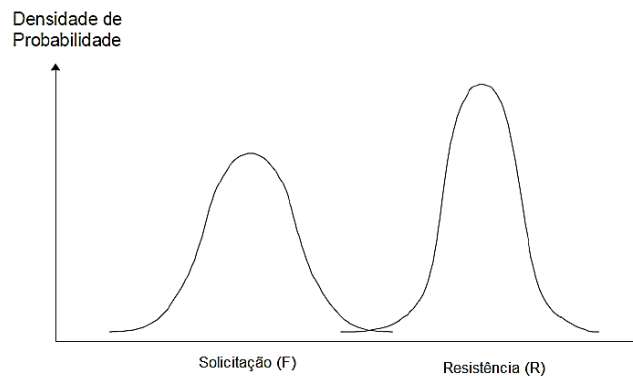


Figura 7.1. Distribuição de probabilidades para a solicitação e resistência.

A figura acima apresenta a densidade de probabilidades para uma solicitação e uma resistência qualquer, considerando a distribuição gaussiana. Neste caso, o fator de segurança é representado pela razão entre o valor médio de cada uma das curvas. Mesmo para o caso onde as médias das curvas são distantes existe a possibilidade de intersecção entre as duas curvas. A região de intersecção é a probabilidade de falha.

Determinar com precisão a curva de densidade de probabilidades nem sempre é uma tarefa fácil. No caso das resistências, alguns modos de falha podem demorar anos para ocorrer inviabilizando a obtenção de dados empíricos mais precisos.

Nas aplicações de engenharia, geralmente é utilizado o método dos estados limites, que considera a aplicações de fatores de segurança parciais. Os coeficientes de segurança parciais são determinados de acordo com a natureza de cada uma das solicitações. O método dos estados limites é um caso particular do dimensionamento pelo método da confiabilidade [Ditlevsen, 2005].

7.4 Falha por fadiga em uniões soldadas

Grande parte das aplicações da mecânica estão sujeitas a cargas que variam no tempo e que se comportam de maneira cíclica. Quando submetidos a este tipo de carregamento, os materiais tendem a propagar pequenas imperfeições e defeitos internos. Este fenômeno é conhecido como fadiga, e pode levar componentes a falha mesmo que as tensões nominais sejam muitos menores que a tensão de escoamento do material.

As uniões estruturais construídas através de ligações soldadas são potencialmente candidatas a apresentar este tipo de falha. O processo de soldagem, por melhor que seja feito, introduz uma série de descontinuidades geométricas além de alterar a microestrutura do material base.

As modificações introduzidas pelo processo de soldagem estão entre os principais motivos que restringem a ampla utilização de métodos numéricos na determinação das tensões em juntas soldadas [Taylor et al., 2001]. Em teoria, o campo de tensões em uma junta soldada pode ser determinado pelo método dos elementos finitos. No entanto, a dificuldade em representar com fidelidade a geometria da junta e o refino de malha necessário para capturar o campo de tensões restringe seu uso prático.

Em um estudo publicado por Fricke [Fricke, 2002], o autor apresenta um breve resumo dos principais métodos para determinação das tensões em juntas soldadas. O mesmo autor publicou uma série de recomendações sobre fadiga em estruturas navais em um artigo publicado em 2003 [Fricke, 2003].

Um procedimento geral para determinação das tensões de fadiga em juntas é apresentada por Hobbacher [Hobbacher, 2008]. Neste manual são feitas inúmeras recomendações para obter as tensões de fadiga em juntas soldadas. Sendo descritos detalhadamente procedimentos de refino de malha e seleção de elementos finitos mais adequados para cada tipo de junta.

Conforme Hobbacher, existem quatro principais métodos de determinação das tensões que levam a falha por fadiga:

- Método da tensão nominal;
- Método da tensão estrutural;
- Método da tensão de chanfro;
- Método da propagação da trinca.

A maioria dos demais métodos existentes é apenas uma variação destes métodos fundamentais citados.

7.4.1 Resistência à fadiga de uma junta soldada

A metodologia aqui apresentada visa fornecer os requisitos mínimos para avaliar a probabilidade de falha por fadiga em uma união soldada. Os conceitos apresentados são baseados em estudos para juntas soldadas submetidas a carregamentos uniaxiais proporcionais. Não serão abordados os problemas relativos a fadiga multiaxial não proporcional.

Apesar de simplificada, a metodologia permite obter com confiabilidade a estimativa sobre a resistência de uma união soldada sujeita a carregamentos cíclicos.

Conforme apresentado por Hobbacher [Hobbacher, 2008] resistência à fadiga de uma junta estrutural depende fundamentalmente do seu detalhe geométrico típico. As curvas S-N (Tensão x Número de ciclos de carregamento) de uma junta são da seguinte forma:

$$N = \frac{C}{\Delta\sigma^m} \quad (7.4)$$

onde N é número de ciclos de carga, C uma constante que é característica ao tipo de junta, $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ o intervalo de variação das tensões e m é a inclinação da curva.

O limite de tensão admissível em uma junta soldada é dependente dos seguintes fatores:

- Fator de concentração de tensão geométrico;
- Fator de concentração de tensão devido às imperfeições da geometria do cordão de solda;
- Descontinuidades no cordão de solda;
- Direção de aplicação da carga;
- Tensão residual devido á contração do material durante a soldagem;
- Condições metalúrgicas do processo de soldagem;
- Tipo de processo de soldagem utilizado (ex: manual ou automatizado);

- Tipo de teste não destrutivo realizado na junta;
- Tratamento pós-soldagem.

A resistência à fadiga de uma junta soldada está limitada à resistência do material base. No entanto, o limite de escoamento não é parâmetro direto na resistência à fadiga de uma união soldada.

Outra importante consideração, que difere da teoria de fadiga clássica, diz respeito sobre as tensões médias durante o ciclo de carga. Nas uniões soldadas, as tensões residuais decorrentes do processo metalúrgico, são desconhecidas e podem ser da magnitude da tensão de escoamento do material base. Desta forma, a resistência à fadiga de uma união soldada é definida com base na variação das tensões durante o ciclo de carga (*stress range*). Diferente dos casos de fadiga clássica, onde os critérios de falha são determinados com base na amplitude e média das tensões durante o ciclo de carga.

A Figura 7.2 apresenta as tensões devido a um ciclo de carregamento qualquer. No caso de uma junta soldada, a tensão média do ciclo de carga é somada a tensão residual existente na união decorrente do processo de soldagem. Modificando a tensão média decorrente do carregamento externo.

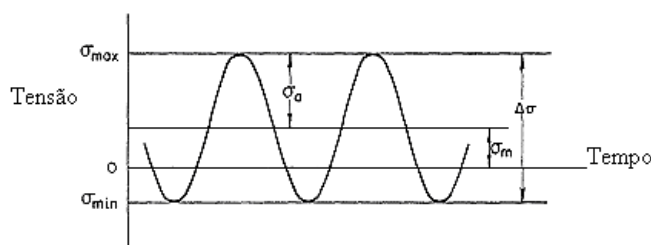


Figura 7.2. Efeito da tensão média em um ciclo de carga de fadiga.

Ainda, é possível obter o valor da tensão residual através de métodos numéricos. No entanto, o valor obtido é combinação das condições geométricas, parâmetros de soldagem, tipos de processo de soldagem e habilidade do operador. A solução numérica deste tipo de problema, além de necessitar de grande esforço computacional, é sensível aos parâmetros citados. Logo, o valor obtido é pouco confiável tornando difícil sua aplicação prática.

Devido ao grande número de parâmetros, dos quais a resistência à fadiga é dependente, as variáveis não são tratadas de forma individual. É mais conveniente tratar a junta soldada apenas pela sua forma geométrica, deixando intrínsecos os efeitos de concentração de tensão, condições metalúrgica, etc. Estas hipóteses acabam por simplificar a determinação da

resistência de uma junta. Em contrapartida, seu uso fica limitado à observação de similaridade entre curvas obtidas para juntas padrão e casos reais de engenharia.

As curvas de resistência a fadiga apresentadas por Hobbacher, são obtidas com base na resistência observada em um ensaio para $N=2e6$ ciclos de carregamento, com amplitude constante e razão de carregamento $R=0.5$. Ao contrário dos aços em geral, o limite de $2e6$ ciclos não é considerado patamar de vida infinita de uma junta soldada. Na referência, as curvas S-N são obtidas extrapolando o valor de ensaio até $1e7$ ciclos. A partir deste ponto, a literatura não apresenta valores consolidados. Contudo, conforme Hobbacher, é estimado que a resistência da junta é diminuída em 10% a cada década, em termos de ciclos de carga.

A Figura 7.3 apresenta diversas curvas S-N para cargas de amplitude constante.

Cada curva corresponde a um detalhe estrutural típico e é caracterizada pelo limite de resistência à fadiga para $2e6$ ciclos. Este valor determina a classe de fadiga (FAT, *fatigue class*) da curva.

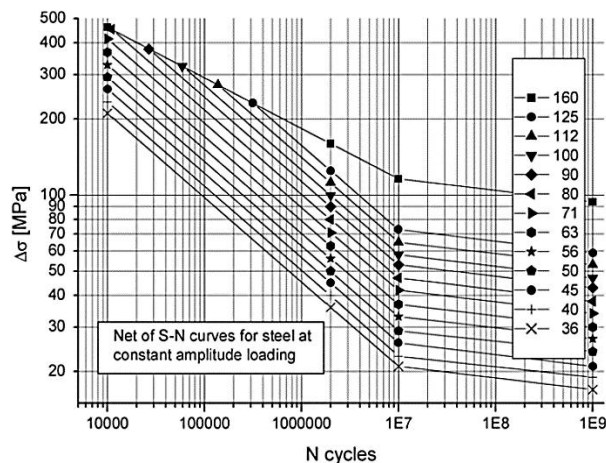


Figura 7.3. Curvas S-N para diversas juntas soldadas em aço.

Fonte: Hobbacher [2008, p. 43].

Como exemplo de aplicação, a figura abaixo apresenta um detalhe estrutural típico: junta cruciforme com penetração total:

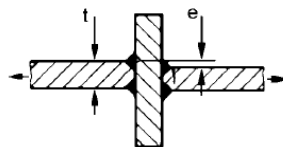


Figura 7.4. Solda cruciforme em T.

Fonte: Hobbacher [2008, p. 60].

O detalhe estrutural apresentado na Figura 7.4 é classificado para as curvas FAT71 e FAT80 dependendo do desalinhamento (e) observado.

A referência citada apresenta uma metodologia para correção do efeito da tensão média. No entanto, o autor alerta-se que qualquer correção sobre a tensão média só deve ser utilizada caso se tenha conhecimento sobre as tensões residuais. As mesmas não devem ser superiores a 20% do limite de escoamento do material. Apesar de apresentar a metodologia, Hobbacher recomenda que seja realizada alguma correção sobre as tensões médias somente em casos muito especiais.

A forma das curvas $S-N$, a quantidade de ciclos até falha e a correção sobre as tensões médias pode ser diferente para detalhes estruturais semelhantes em normas distintas. A norma DNV (*Fatigue Design of Offshore Structures*, 2010) não faz nenhuma menção sobre como os valores de resistência, contidos na norma, foram geradas. As curvas obtidas das DNV são da forma bi linear dividindo a curva $S-N$ em uma região até $1e7$ ciclos e outra região até $1e8$ ciclos.

A figura abaixo apresenta a forma típica das curvas $S-N$ citadas:

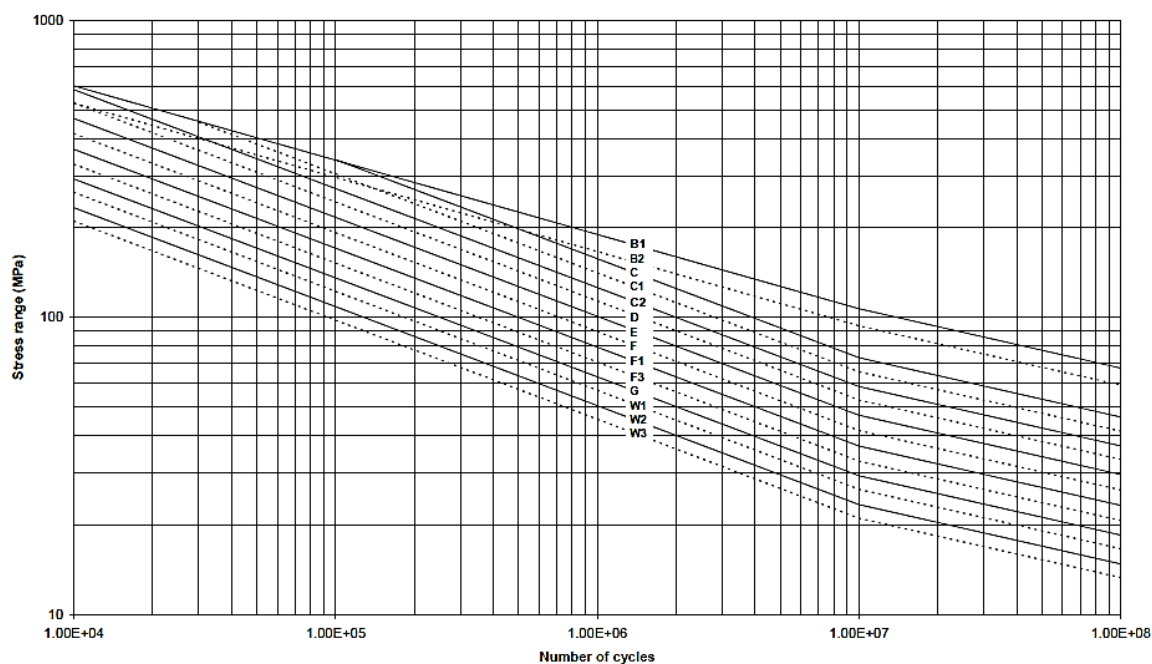


Figura 7.5. Curvas $S-N$ para diversas juntas soldadas em aço.

Fonte: DNV-*Fatigue Design of Offshore Structures* [2010, p. 14].

Na referência citada não é indicado nenhum procedimento para correção sobre as tensões médias na junta soldada.

Após a soldagem, podem ser realizados uma série de procedimentos que melhoram a resistência da junta:

- Usinagem do cordão de solda a fim de suavizar os contornos geométricos e diminuir a intensidades dos fatores concentradores de tensão;
- Fundir novamente o cordão de solda através de solda tig, plasma ou laser;
- Aplicação *shoot peening* sobre o cordão de solda;
- Realizar teste de carga no componente, utilizando carga acima do valor nominal;
- Realizar alívio de tensões através de reaquecimento.

A maioria das técnicas produz resultados qualitativos, não podendo ser considerados de forma direta no dimensionamento do componente.

Geralmente, as curvas S-N são obtidas através de consulta em normas, o que resulta em valores bastante conservadores para a resistência a fadiga. As curvas S-N apresentadas são obtidas com ciclo de carga com razão $R=0.5$, desta forma o efeito da tensão residual é potencializado. A correção apresentada por Hobbacher não é uma forma precisa para determinação do ganho em vida útil promovido pela forma do ciclo de carga. Em um estudo apresentado por Chiofalo [Chiofalo et al., 2009] o autor apresenta um comparativo entre abordagens de fadiga para diversas normas de projeto. Uma das conclusões do autor é que a forma linear de correção da tensão média, apresentada por Hobbacher, não produz resultados realísticos.

Na maioria dos casos é difícil estabelecer uma relação entre a junta de projeto e um detalhe estrutural típico apresentado em norma. A única forma de diminuir as incertezas é através da realização de testes destrutivos para determinar a curva S-N de uma junta ou componente soldado em específico. Cabe salientar que ensaios de fadiga são de longa duração, custo elevado e a confiabilidade dos resultados não são garantidos, pois a identificação do exato momento da falha não é trivial.

7.4.2 Fadiga em juntas tubulares

Em uma junta composta pela intersecção de vários tubos a tensão utilizada para o dimensionamento estrutural à fadiga é a tensão estrutural (*hot spot stress*). O fator de concentração de tensão é definido como o maior valor de tensão extrapolado de uma região imediatamente fora da área afetada pela geometria da solda:

$$\sigma_{hotspot} = SCF \cdot \sigma_{nom} \quad (7.5)$$

onde SCF é fator de concentração de tensão, σ_{nom} a tensão nominal e $\sigma_{hotspot}$ a tensão estrutural.

O fator de concentração de tensão pode ser determinado realizando a modelagem tridimensional da junta com elementos de casca. Também é possível obter o SCF através da utilização de equações parametrizadas.

Para obter detalhes da modelagem por elementos finitos para obtenção do fator de concentração de tensões, bem como equações parametrizadas para diversas juntas tubulares, consultar norma DNV (*Fatigue Design of Offshore Structures*, 2010).

7.4.3 Análise simplificada de fadiga em estruturas offshore

A análise simplificada de fadiga em estruturas offshore é também chamada de método do intervalo de tensões admissível (*allowable stress range method*). Este método é baseado na premissa de que as flutuações de tensões podem ser representadas em um espectro de tensões, e seu valor máximo possa ser comparado diretamente com intervalo de tensões admissível. Por essa razão o método é conhecido como método indireto.

Na prática, este método é utilizado pelos engenheiros como uma ferramenta para uma verificação rápida da possibilidade de falha por fadiga. Se por acaso um detalhe estrutural não atenda aos requisitos deste critério, não significa afirmar que o mesmo vá falhar por fadiga. Caso não atenda o critério o componente deve ser avaliado utilizando metodologias mais precisas.

Apesar de simplificações drásticas de um problema de grande complexidade, o método caracteriza o limite inferior de probabilidade de falha por fadiga. Sendo assim, essa metodologia de cálculo é aceita pelas entidades regulamentadoras de projeto de estruturas offshore.

A probabilidade de ocorrência dos picos máximos de tensão é representada pela distribuição de Weibull [Weibull, 1954] com dois parâmetros. A distribuição de Weibull foi proposta originalmente por W. Weibull em estudos relacionados ao tempo de falha devido à fadiga dos metais.

A curva de Weibull com dois parâmetros é apresentada na equação abaixo:

$$Q(\Delta\sigma) = \exp \left[- \left(\frac{\Delta\sigma}{q} \right)^h \right] \quad (7.6)$$

onde $Q(\Delta\sigma)$ é a probabilidade que $\Delta\sigma$ seja excedido, h parâmetro de forma da equação de Weibull, q um parâmetro de escala e $\Delta\sigma$ a variável que representa a distribuição randômica nas variações de tensão.

O parâmetro q é definido como:

$$q = \frac{\Delta\sigma_0}{\ln(N_0)^{1/h}} \quad (7.7)$$

onde $\Delta\sigma_0$ é a máxima variação no intervalo de tensões de referência que pode ocorrer em N_0 ciclos de carga.

7.5 Critério de falha por Flambagem

As estruturas obtidas através do processo de fabricação por soldagem são dotadas de inúmeras imperfeições geométricas que são inerentes ao processo. Estas imperfeições tendem a gerar esforços devido aos pequenos desalinhamentos. Os esforços causados pelos desalinhamentos tendem a potencializar a possibilidade de falha por flambagem em membros esbeltos.

O modo de falha por flambagem está vinculado diretamente a parâmetros geométricos das estruturas. Atualmente são produzidas estruturas cada vez mais leves, com perfis estruturais mais esbeltos, logo para que seja garantida a segurança de uma estrutura é de fundamental importância a avaliação dos parâmetros de flambagem.

7.5.1 Flambagem de colunas de Euler

O método clássico de avaliação de flambagem considera apenas os efeitos lineares. A carga crítica de flambagem elástica é obtida considerando o elemento estrutural seja uma “coluna ideal” submetida a um carregamento axial centralizado.

A carga crítica de flambagem elástica é definida como a carga axial que produz um estado de solitação na coluna tal que: ao aplicar um esforço lateral de flexão, as deformações laterais induzidas pelo momento fletor não desaparecerão ao se retirar a carga lateral. A equação abaixo apresenta a fórmula de flambagem de colunas de Euler:

$$P_{crit} = \left(\frac{\pi}{L_{eff}} \right)^2 \cdot EI \quad (7.8)$$

onde P_{crit} é a carga crítica de flambagem, E o módulo de elasticidade, I o menor momento de inércia da seção e L_{eff} é o comprimento efetivo da barra.

O comprimento efetivo é definido em função do tipo de condição de contorno do problema. Para os casos clássicos é calculado através do produto entre o comprimento real e um fator k . A Figura 7.6 apresenta os valores do coeficiente k para diversas condições e contorno.

Os fatores k , apresentados na Figura 7.6 traduzem o resultado da solução exata da equação diferencial que rege o problema. Quando utilizados valores tabelados de normas, estas muitas vezes adotam fatores de comprimento efetivo mais conservadores que os encontrados diretamente pela solução das equações diferenciais.

Na análise de flambagem de barras isoladas de uma estrutura real, as condições de apoio não são representadas pelas situações ideais para as quais a solução é conhecida pelo método de Euler. O fator de comprimento efetivo depende da rigidez da união.

As normas de projeto apresentam metodologias para estimar a influência da rigidez da junta no comprimento efetivo das barras. Valores práticos podem ser encontrados nas normas ABS [*Guide for Buckling and Ultimate Strength Assessment for Offshore Structures*, 2012] e ABNT [ABNT NBR 8800, 2008].

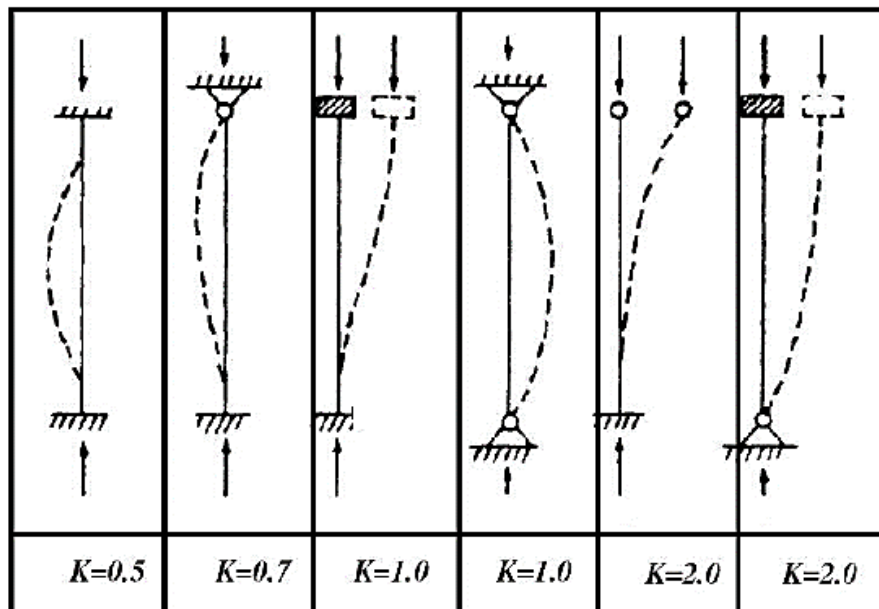


Figura 7.6. Comprimento efetivo em função da condição de contorno.

Os valores obtidos de normas são aplicáveis a casos particulares. Sendo assim, é necessário verificar a similaridade entre os casos obtidos das referências e as uniões reais de projeto. Apesar da metodologia recomendada por normas de projeto, na prática industrial, é comum considerar as barras na condição bi-rotuladas para realizar a verificação á flambagem. Esta hipótese garante que o resultado obtido seja conservador, garantindo assim a segurança da estrutural.

Atualmente, com os recursos computacionais disponíveis, é possível realizar um estudo através do método dos elementos finitos para se obter um valor mais preciso da carga de flambagem elástica de cada uma das barras da estrutura isoladamente. Para o propósito deste estudo as barras são consideradas com rotações livres nas extremidades, sendo fator de comprimento efetivo $k=1$.

A descrição detalhada das hipóteses, dedução da equação de flambagem e outras metodologias para análise de flambagem linear são feitas por Thimoshenko [Thimoshenko e Gere, 1963].

A flambagem linear de colunas e permite avaliar a possibilidade de falha por flambagem em membros com esforços de compressão. No entanto, as estruturas reais estão sujeitas a diversas formas de carregamento podendo ocorrer outros modos de falha por flambagem.

O escopo deste estudo é limitado a perfis tubulares de seção circular. Segundo Rondal [Rondal et. al, 1992], o principal modo de falha por flambagem neste tipo de perfil é o modo de falha por compressão. Conforme o autor, geralmente, não é necessário realizar a verificação a de outros modos de flambagem neste tipo de seção.

A otimização de estruturas sujeitas à flambagem segue a premissa que, para uma área de seção constante, seja utilizado um perfil circular com diâmetro maior e parede mais fina. A redução da espessura da parede pode levar a falha pela flambagem local da parede do perfil. Neste estudo não é realizada nenhuma consideração acerca da falha pela flambagem local da parede dos perfis.

7.5.2 Critério de falha por flambagem conforme norma DNV

Diversas normas e código de projeto tratam da disciplina de flambagem, neste trabalho foi adotada a metodologia proposta pela norma DNV (*Classification notes N° 30.1 - Buckling Strength Analysis of Bars and Frames, and Spherical Shells*).

O método de flambagem linear de Euler não adota nenhuma hipótese sobre as imperfeições geométricas inerentes ao processo de fabricação. Logo, a falha por flambagem é esperada para um valor de carga inferior a estabelecido na equação (7.8).

Tipicamente, a curva de falha por flambagem é conforme figura abaixo:

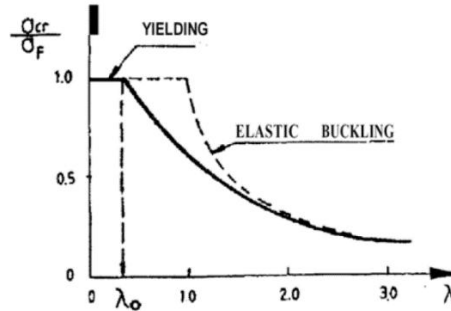


Figura 7.7. Curva típica de falha por flambagem.

O patamar, à esquerda, indica a região onde não ocorre falha por flambagem. A partir do índice de esbeltez λ_0 , são mostradas duas curvas, a curva superior é o limite de flambagem de Euler e a curva mais abaixo é a que representa o caso real de flambagem.

A resistência a flambagem é obtida usando o conceito de esbeltez estrutural λ :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{esc}}{\sigma_E}} \quad (7.9)$$

onde σ_{esc} é o limite de escoamento do material e σ_E é o limite de flambagem elástica teórico, que pode ser a tensão crítica de Euler.

Um membro estrutural em compressão é definido como compacto à flambagem global, ou seja, não apresenta falha por flambagem, quando o coeficiente de esbeltez $\lambda \leq \lambda_0$. Caso $\lambda > \lambda_0$, a resistência é estimada pela seguinte equação:

$$se \lambda \leq \lambda_0 : \frac{\sigma_{crit}}{\sigma_{esc}} = 1$$

$$se \lambda > \lambda_0 : \frac{\sigma_{crit}}{\sigma_{esc}} = \frac{1 + \mu + \lambda^2 - \sqrt{(1 + \mu + \lambda^2)^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2} \quad (7.10)$$

onde $\mu = \alpha(\lambda - \lambda_0)$ e σ_{crit} é a tensão crítica para falha por flambagem. Os coeficientes λ_0 e α são definidos na tabela abaixo:

Tabela 7.1. Parâmetros da equação de flambagem.

Curva	λ_0	μ
a	0.2	0.20
b	0.2	0.35

c	0.2	0.50
d	0.2	0.65
e	0.6	0.35

Na figura Figura 7.8 são representadas graficamente as curvas de resistência geradas a partir da equação (7.10) e os parâmetros definidos na Tabela 7.1.

Cada uma das curvas apresentadas na Figura 7.8 representa o limite de flambagem para um determinado tipo de perfil. A “curva a” é utilizada para perfis tubulares.

O assunto relativo à flambagem é bastante amplo e não é o objetivo deste trabalho descrever detalhadamente os diversos métodos encontrados na literatura. Maiores considerações podem ser encontradas na norma ABS [*Guide for Buckling and Ultimate Strength Assesment for Offshore Structures, 2004*]. Outras referências importantes no projeto de estruturas por perfis tubulares são Rondal [Rondal, et al 1992] e Wardenier [Wardenier, 2001].

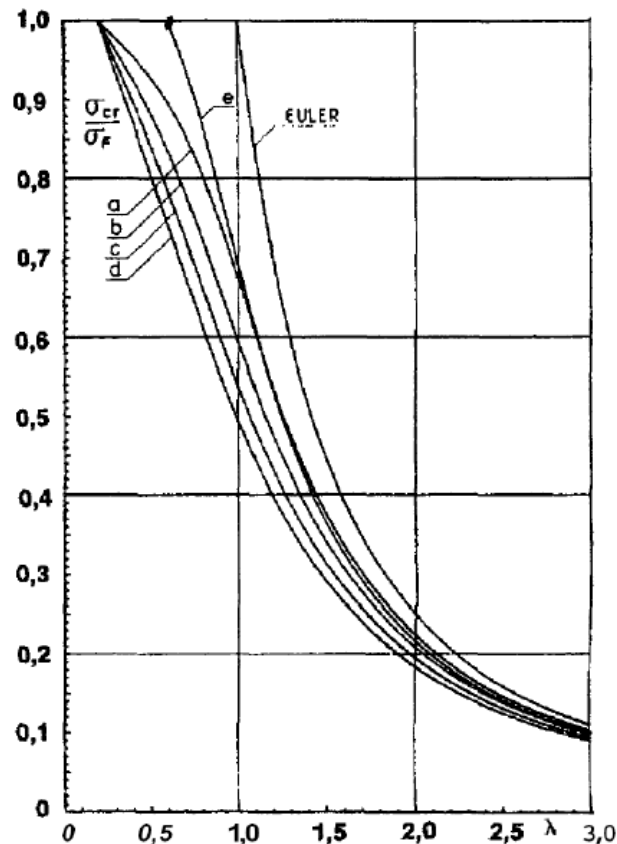


Figura 7.8. Curvas limite de flambagem.

Fonte : DNV - Buckling Strength Analysis of Bars and Frames, and Spherical Shells [2004, p. 6]

8 APRESENTAÇÃO DA FORMULAÇÃO PROPOSTA E DO ALGORITMO DE SOLUÇÃO IMPLEMENTADO

8.1 Função aptidão

As informações do modelo estrutural são passadas ao algoritmo genético através da função de aptidão de cada indivíduo. A utilização de uma função de aptidão com formato adequado e o correto ajuste dos parâmetros de penalização indica o quão eficiente é o algoritmo de solução.

A função de aptidão apresentada no capítulo 4.5 é definida de forma genérica. Para atender os propósitos desta pesquisa foi utilizada a função penalizada conforme equação abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } K \text{ não é singular,} \\ \text{se } K \text{ é regular,} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f_p(x) = C \\ f_p(x) = f(x) + C_k \cdot \sum_{i=1}^{n_{barras}} \sum_{j=1}^{n_{ELT}} \{ \delta_{1,i,j} + \delta_{2,i,j} \} + C_k \cdot \sum_{i=1}^{n_{barras}} \sum_{j=1}^{n_{ELF}} \{ \delta_{3,i,k} \} \end{array} \quad (8.1)$$

onde K é a matriz de rigidez da estrutura, $f(x)$ é a massa da estrutura $f(x) = \sum_{i=1}^{nelem} \rho_i A_i L_i$, C é o coeficiente de penalização e C_k é o coeficiente de penalização normalizado. Os parâmetros n_{ELT} , n_{ELF} e n_{barras} são o número de casos de carregamento para estados limites últimos, número de casos de carregamento para estado limite de fadiga e número de barras da estrutura, respectivamente. As constantes $\delta_{1,i,j}$, $\delta_{2,i,j}$ e $\delta_{3,i,k}$ são constantes proporcionais à violação das restrições de tensão, flambagem e fadiga, respectivamente, e são definidas abaixo:

$$\begin{aligned} \delta_{1,i,j} &= \left[\left(\frac{\sigma_{eqv,i,j}}{\sigma_{adm,i}} \right)^{P_1} - 1 \right]^+ \\ \delta_{2,i,j} &= \left[\left(\frac{\|(\sigma_{B,i,j})^-\|}{\sigma_{adm_B,i}} \right)^{P_2} - 1 \right]^+ \\ \delta_{3,i,k} &= \left[\left(\frac{\Delta \sigma_{F,i,k}}{\Delta \sigma_{adm_F,i}} \right)^{P_3} - 1 \right]^+ \end{aligned} \quad (8.2)$$

onde $\sigma_{eqv,i,j}$ é a tensão equivalente na barra i para o caso de carga j , $\sigma_{adm,i}$ é a tensão admissível da barra i , $\sigma_{B,i,j}$ é a tensão de flambagem para a barra i para o caso de carga j , $\sigma_{adm_B,i}$ é a tensão admissível a flambagem da barra i , $\Delta\sigma_{F,i,k}$ é o intervalo de tensões de fadiga da barra i para o caso de carga k , $\Delta\sigma_{adm_F,i}$ é o intervalo admissível de tensões de fadiga da barra i e P_1, P_2, P_3 são constantes de penalização. O símbolo negativo ou positivo sobrescrito indica que são considerados somente os valores positivos ou negativos, respectivamente.

As constantes P_1, P_2, P_3 são determinadas com base na literatura e no estudo heurístico do problema. Os valores que mais favoreceram a convergência dos problemas abordados são $P_1=2.0, P_2=4.0$ e $P_3=2.0$ [Souza, 2009]. A penalização dos coeficientes de violação das restrições tem como objetivo aumentar o valor da função de violação da restrição à medida que existe uma pequena violação no critério de falha.

A Figura 8.1 apresenta o comportamento das funções de violação das restrições, para diversos coeficientes de penalização.

A função aptidão proposta para o problema, faz uso da técnica de penalização, e é uma combinação linear entre a massa e as constantes relativas aos critérios de falha adotados.

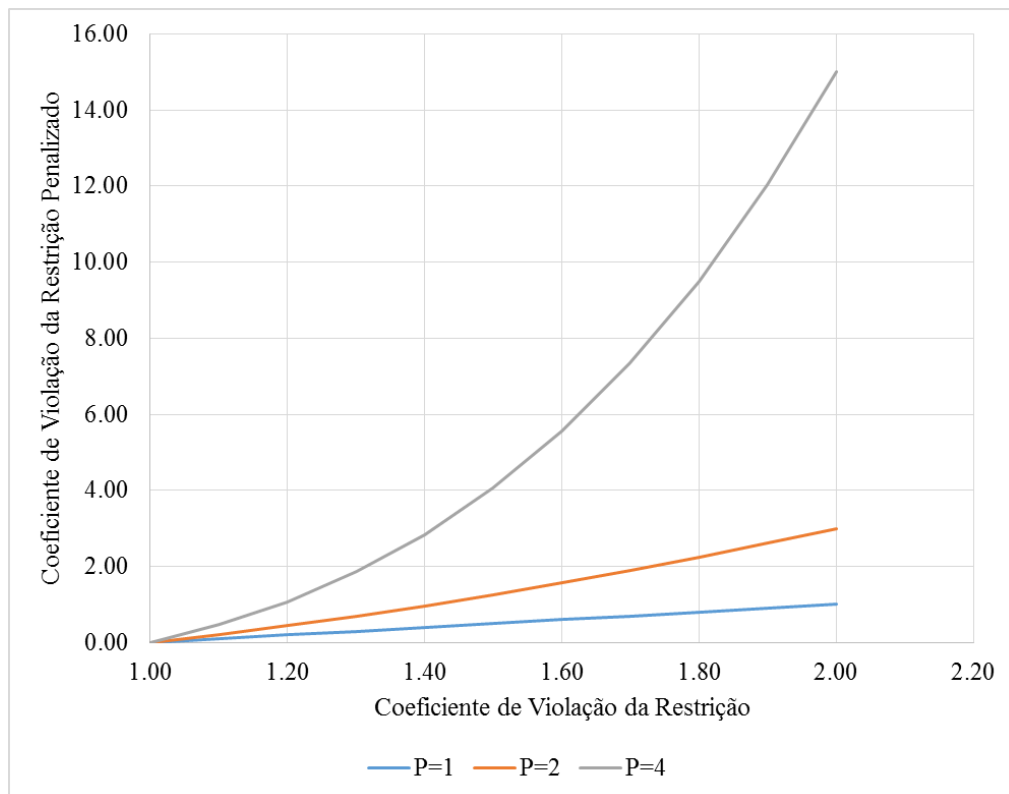


Figura 8.1. Comportamento do coeficiente de violação das restrições para diversas penalizações.

Primeiramente, a função aptidão proposta visa identificar a singularidade da matriz de rigidez da estrutura. Esta condição é fundamental, pois ao realizar a otimização topológica as seções transversais das barras podem ser tomadas como nulas. Esta forma de remoção das barras da estrutura, pode levar a mesma a assumir o comportamento de um mecanismo não sendo possível obter os deslocamentos e esforços internos da mesma.

A figura abaixo ilustra o problema de singularidade na matriz de rigidez:

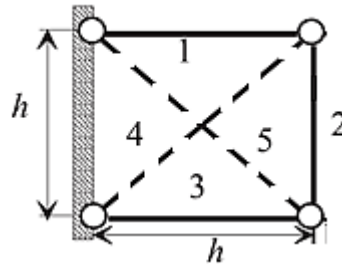


Figura 8.2. Estrutura cuja matriz de rigidez é singular.

Na figura acima, caso o algoritmo venha a gerar um indivíduo com os elementos 4 e 5 com seções nulas, a estrutura terá comportamento de mecanismo. A condição de regularidade da matriz de rigidez é fundamental para que se possa obter os campos de deslocamentos e tensões da estrutura. Logo cada indivíduo que não atenda este critério é penalizado.

Para manter a generalidade do método, o coeficiente de penalização das restrições do problema é normalizado em relação ao número de casos de carregamento: $C_k = C / (n_{ELT} + n_{ELF})$. Como será apresentado nos resultados deste trabalho, verificou-se que o parâmetro de penalização não é um valor preciso. Seu valor é aproximado e se conhece apenas a ordem de grandeza do mesmo.

Nos problemas com poucos casos de carregamento, a normalização da constante de penalização não altera a convergência do problema. Porém, nos casos onde existem centenas de condições de carregamento, caso um restrição seja violada em grande parte das condições de carga, o valor da penalização pode se tornar grande em demasia prejudicando a convergência do método. Devido a isso, adotou-se normalizar o coeficiente de penalização em relação ao número total de casos de carregamento.

Os coeficientes de violação das restrições estão agrupados em dois conjuntos distintos. Essa separação é necessária, pois as cargas de projeto utilizadas para dimensionamento de estados limites de tensão e flambagem são diferentes daquelas utilizadas para dimensionamento de estados limites de fadiga.

8.1 Esquema geral

O algoritmo computacional foi implementado utilizando linguagem de programação C/C++. O algoritmo genético utilizado faz parte da biblioteca de algoritmos genéticos GALIB (maiores detalhes sobre a biblioteca consultar “*A C++ library of genetic algorithm components*” [Wall, 1996]).

A Figura 8.3 apresenta o fluxograma de solução do problema de otimização.

As variáveis de projeto são definidas no modelo estrutural, as quais podem ser uma lista de perfis estruturais (otimização paramétrica) ou uma série de valores discretos que são vinculados às coordenadas nodais da estrutura (otimização de forma).

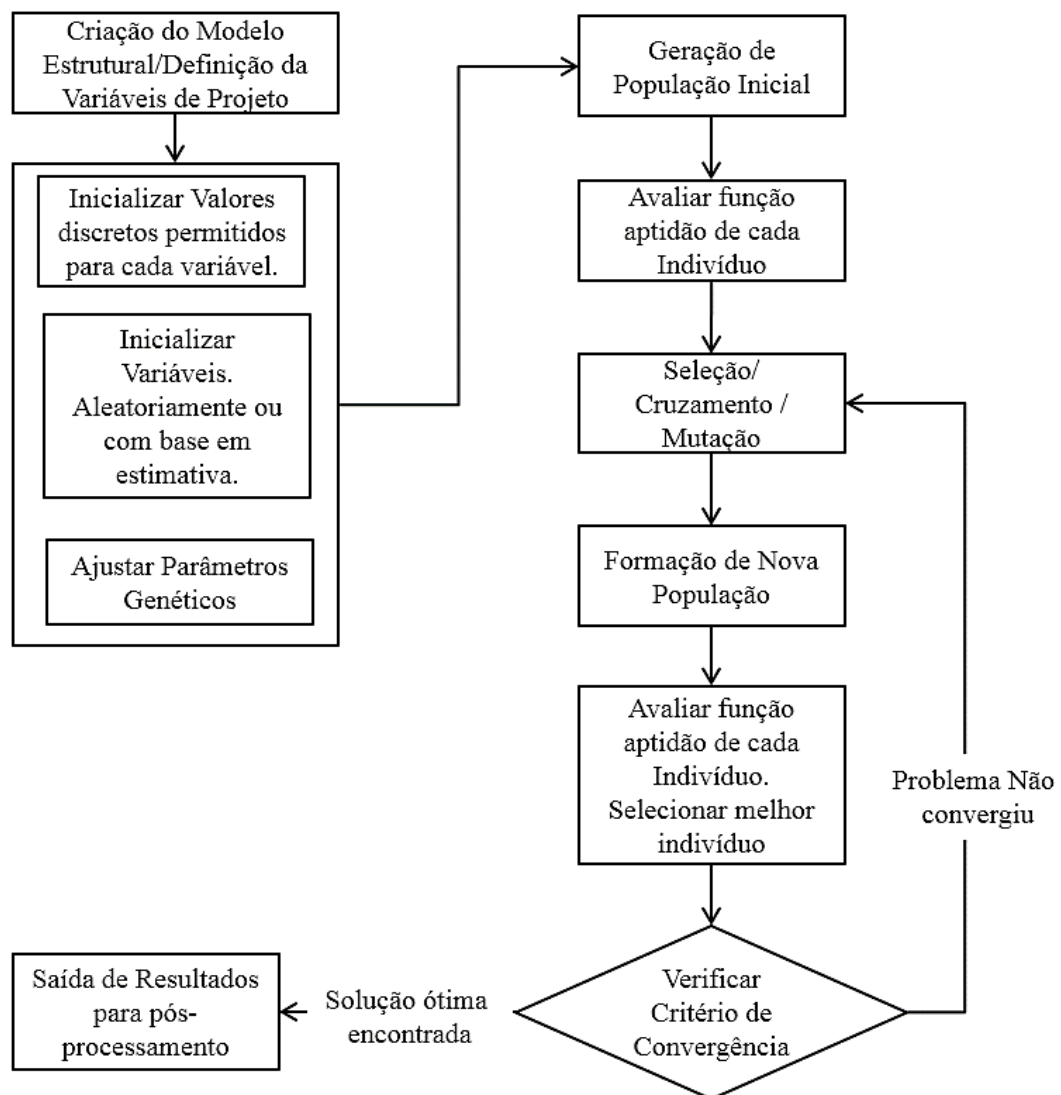


Figura 8.3. Fluxograma do algoritmo de solução.

A utilização de variáveis inteiras é fundamental para solução do problema de flambagem das barras da estrutura de forma geral. A carga crítica de flambagem é dependente da área da seção transversal e do momento de inércia da barra. Estas informações são função da forma e dimensões da seção transversal. Apesar de serem definidas com base na seção transversal, a área e o momento de inércia não se relacionam de forma geral para os diferentes tipos de perfis estruturais.

Assim, variável de projeto não é um valor único, mas sim um conjunto de valores que representam as características geométricas da seção transversal de um determinado perfil. É conveniente atribuir às variáveis de projeto valores inteiros, para assim relacionar cada um deles com um conjunto de dados que representem as características de determinada seção.

Cada variável de projeto tem a possibilidade de assumir valores dentro de um conjunto finito de valores inteiros. Esse conjunto de possíveis soluções definem as restrições laterais do problema.

Diferente dos métodos de programação matemática, na programação inteira a topologia da estrutura pode ser modificada a qualquer momento pela geração aleatória de um indivíduo com características topológicas mais favoráveis. Esta característica do algoritmo genético permite contornar o problema relativo às singularidades associadas à redução gradativa das seções transversais das barras.

Na etapa de avaliação da função aptidão, é necessário realizar o cálculo de elementos finitos da estrutura. Como são admitidos indivíduos com variáveis cuja seção transversal tem propriedade nula, o algoritmo de montagem da matriz de rigidez e solução do sistema linear foi devidamente adaptado para identificar as instabilidades numéricas.

A Figura 8.4 apresenta de forma esquemática a etapa de cálculo estrutural e avaliação da função aptidão.

Antes do cálculo da matriz de rigidez de cada elemento as propriedades da seção são verificadas. Caso sejam nulas, indica que a barra não existe, logo a matriz de rigidez não é calculada.

Após o cálculo da matriz de rigidez local de todos os elementos e montagem da matriz de rigidez global, é realizada a fatoração da matriz de rigidez global. Nesta etapa, verifica-se se a mesma é singular. Caso seja, a rotina de cálculo da função aptidão é interrompida e é atribuído um coeficiente de penalização ao indivíduo. Não é necessário prosseguir com o cálculo estrutural para os demais casos de carregamento. Se para um dos casos de carga a matriz de rigidez é singular, o indivíduo que se está avaliando não é apto para ser parte da população que determina a solução do problema.

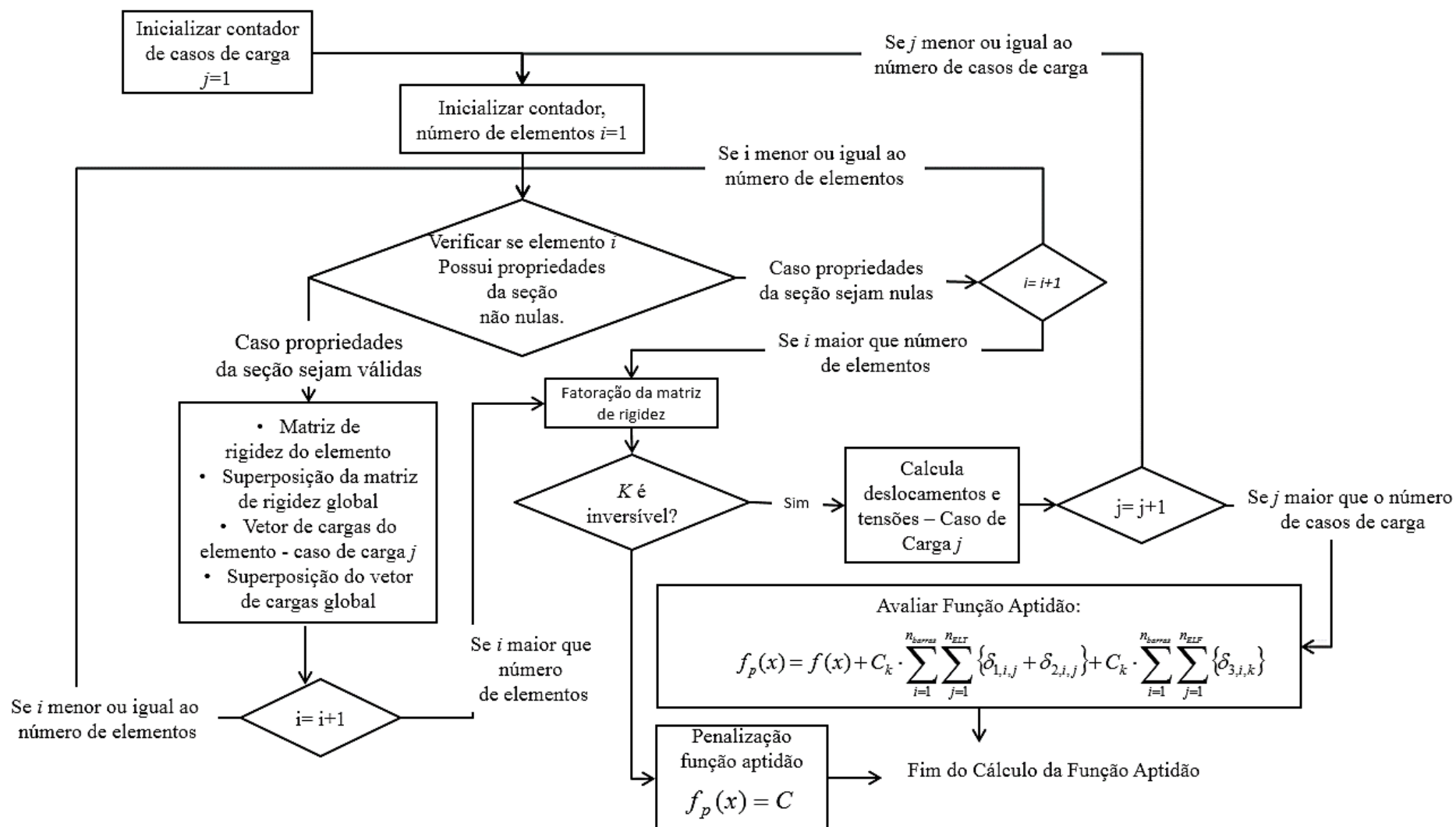


Figura 8.4. Fluxograma do cálculo estrutural e avaliação da função aptidão.

Os casos de carregamento são definidos para diversas cargas e condições de apoio. Assim sendo é necessário verificar a singularidade da matriz de rigidez para cada caso de carregamento, se e somente se a matriz de rigidez for regular para todos os casos de carga os deslocamentos e tensões são calculados.

A carga crítica de flambagem é dependente da seção atual de cada indivíduo, assim é necessário recalculá-lo para cada novo indivíduo.

9 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo o algoritmo implementado é utilizado na solução de problemas clássicos de otimização. Os casos 9.1 e 9.2 foram extraídos do artigo publicado por Guo [Guo et. al., 2001]. O problema 9.3 foi apresentado como exemplo no capítulo 3.6. Já o exemplo 9.4 foi elaborado com base na solução clássica esperada para uma treliça com elementos diagonais em compressão.

O problema 9.5 trata da solução do caso de otimização para uma torre. O estudo foi elaborado com base em dados reais de projeto.

Adicionalmente nos apêndices A e B são apresentadas soluções para um problema de flambagem global em uma barra e a otimização dimensional e de forma em uma treliça plana.

9.1 Treliça com 5 barras

Neste problema é realizada a otimização de uma treliça de 5 barras submetida a dois casos de carregamento. A figura abaixo apresenta o caso da treliça de 5 barras:

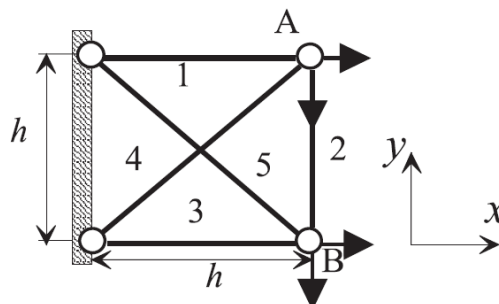


Figura 9.1. Treliça de 5 barras.

São adotados $E=1,0$, $h=1,0$ e $\rho=1,0$. Para este caso são ativadas as restrições de sobre estados limites últimos de tensão e flambagem. A tensão admissível em todas as barras é de

$\sigma_{adm,i} = \pm 5,0$ e o valor limite da tensão crítica de flambagem é estabelecida conforme critério de Euler apresentado no capítulo 7.5.1. São consideradas seções com formato circular.

A otimização é realizada considerando as variáveis de projeto discretas, sendo a menor área 0,0 e a maior 15,0 variando em intervalos de 0,25. Como estimativa inicial, adotou-se todas as variáveis com valor 10,0.

Os dois casos de carregamento são definidos como:

$$P = (P_{Ax}, P_{Ay}, P_{Bx}, P_{By}) = (5,0; -50,0; 0,0; 0,0) \text{ e}$$

$$P = (P_{Ax}, P_{Ay}, P_{Bx}, P_{By}) = (0,0; 0,0; 5,0; -50,0).$$

Os parâmetros genéticos utilizados são: coeficiente de penalização de $1,0e+3$, taxa de cruzamento de 30% e taxa de mutação de 5%. Na tabela abaixo são listadas as áreas de cada barra após a evolução do algoritmo em 200 gerações:

Tabela 9.1. Áreas da treliça de 5 barras após a otimização para diferentes formulações.

Método	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	W
1	7,22	4,73	4,53	8,80	7,82	39,98
2	1,00	15,96	15,96	0,00	14,14	52,92
3	1,00	15,96	15,96	0,00	14,14	52,92
4	8,60	7,82	8,20	23,40	5,15	65,00
5	7,25	4,25	5,00	8,75	8,25	40,54
6	1,00	10,00	10,25	0,00	14,25	41,40

onde,

1. Solução Exata – Restrição de tensão;
2. Solução Exata – Restrição de tensão e limite de flambagem;
3. Formulação ϵ -relaxado - Restrição de tensão e limite de flambagem;
4. Restrição direta sobre as tensões e limite de flambagem;
5. Presente trabalho – Restrição de tensão;
6. Presente trabalho – Restrição de tensão e limite de flambagem.

A solução obtida com o método 5 é próxima a solução exata (método 1), a diferença em massa é de 1,4%. Se observa que a topologia final é idêntica para os dois métodos, já que nenhuma área é nula.

A massa obtida para o caso com restrição de tensão e limite de flambagem (método 6) é de 41,40, ou seja, 21,77% menor que a solução obtida por Guo [Guo et. al., 2001] para os métodos 2 e 3 da Tabela 9.1. Apesar da diferença em massa, a topologia é idêntica para os três

casos citados: a área da barra 4 é nula ao final da otimização. Verifica-se que: através da metodologia proposta, foi possível realizar a otimização topológica do problema de forma eficaz sem se deparar com as singularidades encontrados na solução por algoritmos contínuos. Na solução contínua o valor das variáveis é reduzido de forma gradual. Quando os valores das mesmas se tornam pequenos geralmente ocorrem singularidades nas restrições de tensão, sendo necessário utilizar alguma técnica de relaxação. Conforme exposto anteriormente, no caso proposto, não foi utilizada nenhuma técnica de relaxação. Somente foram consideradas restrições laterais com extremos nulos assim as barras podem ser removidas.

A remoção da barra 4 indica que a o ótimo singular do problema foi alcançado. A referida barra sofre esforços de compressão para ambos os casos de carregamento, ativando assim a restrição de flambagem. Devido as dimensões da treliça, o limite de flambagem é menor que a tensão admissível. Logo se o caso a barra em compressão seja mantida, resultará em uma estrutura com maior massa.

A tabela abaixo apresenta os resultados de tensões para os diversos casos de carregamento bem como a tensão limite de flambagem para cada uma das barras:

Tabela 9.2. Tensões para cada um dos casos de carregamento.

Tensão	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
Limite Flambagem	-0,79	-7,85	-8,24	-	-5,79
Caso de carga 1	5,00	-5,00	-4,88	-	4,96
Caso de carga 2	0,00	0,00	-4,88	-	4,96

Os valores da Tabela 9.2 mostram que em nenhum dos casos de carregamento a restrição de tensão ou a restrição sobre os limites de flambagem é violada.

Como forma de calibração do método, foi realizado um estudo da influência dos parâmetros genéticos na solução do problema. A Figura 9.2 apresenta as curvas de convergência do problema para diversos coeficientes de penalização. A taxa de mutação permanece fixa em 10%.

Na Figura 9.2, a curva de convergência foi normalizada em relação ao menor valor, de forma que o valor mínimo é unitário.

Pela análise do gráfico, verifica-se que, para coeficientes de penalização $1,0e+2$, $1,0e+3$ e $1,0e+4$, o problema convergiu em 200 gerações. A curva que resulta no valor mínimo da função objetivo corresponde ao coeficiente $1,0e+3$. Para os coeficientes $1,0e+1$ e maiores que $1,0e+5$, o problema não convergiu em 200 gerações.

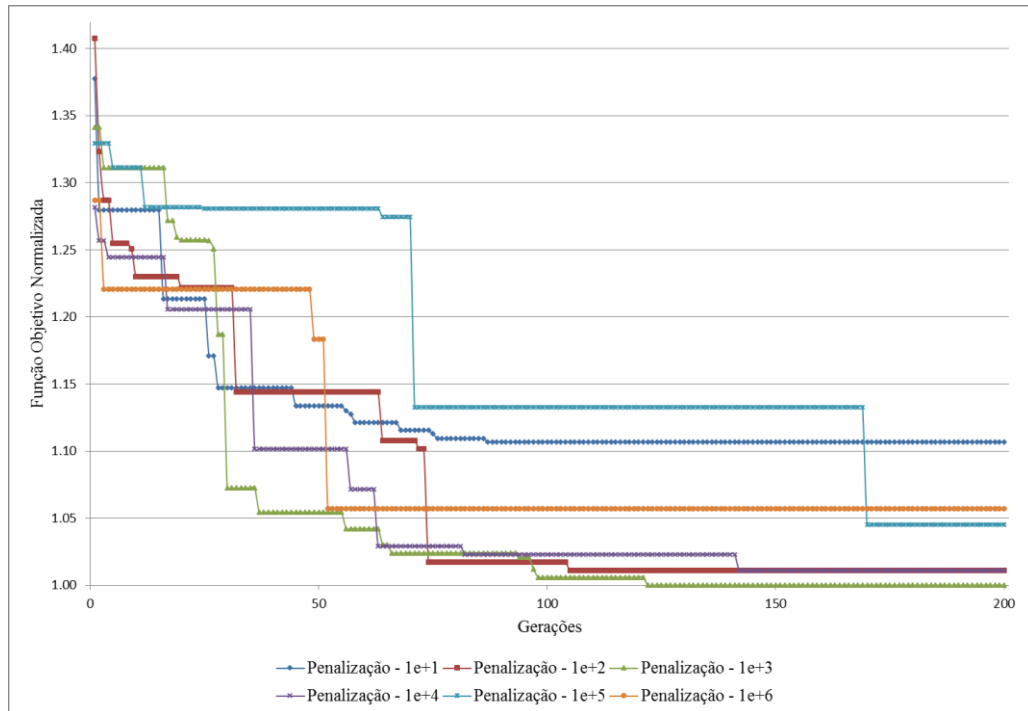


Figura 9.2. Curvas de convergência para diversos coeficientes de penalização.

Relacionando os valores de penalização com o valor final da função objetivo verifica-se que o coeficiente de penalização que resultou em uma convergência mais rápida para o problema é duas ordens de grandeza superior ao valor final da função objetivo.

Outro parâmetro que tem importância significativa na convergência do algoritmo genético é a taxa de mutação. Se a taxa de mutação for muito pequena, acarreta em uma taxa de convergência muito pequena. Já se for muito grande a busca se torna praticamente aleatória.

A Figura 9.3 apresenta as curvas de convergência do problema para diferentes taxas de mutação. O coeficiente de penalização permanece fixo em $1e+3$.

Na Figura 9.3, se observa que o problema convergiu mais rapidamente para a taxa de mutação de 10%. Para as taxas de mutação de 1 e 2,5%, a função objetivo ficou 20% acima do valor mínimo encontrado. A curva gerada com taxa de mutação de 5% possui a taxa de convergência mais constante entre todas as curvas. No entanto, a função objetivo não atingiu o valor mínimo após 200 gerações.

Durante a solução do problema apresentado verificou-se que a taxa de mutação mais adequada para a convergência do problema é entre 5 e 10%.

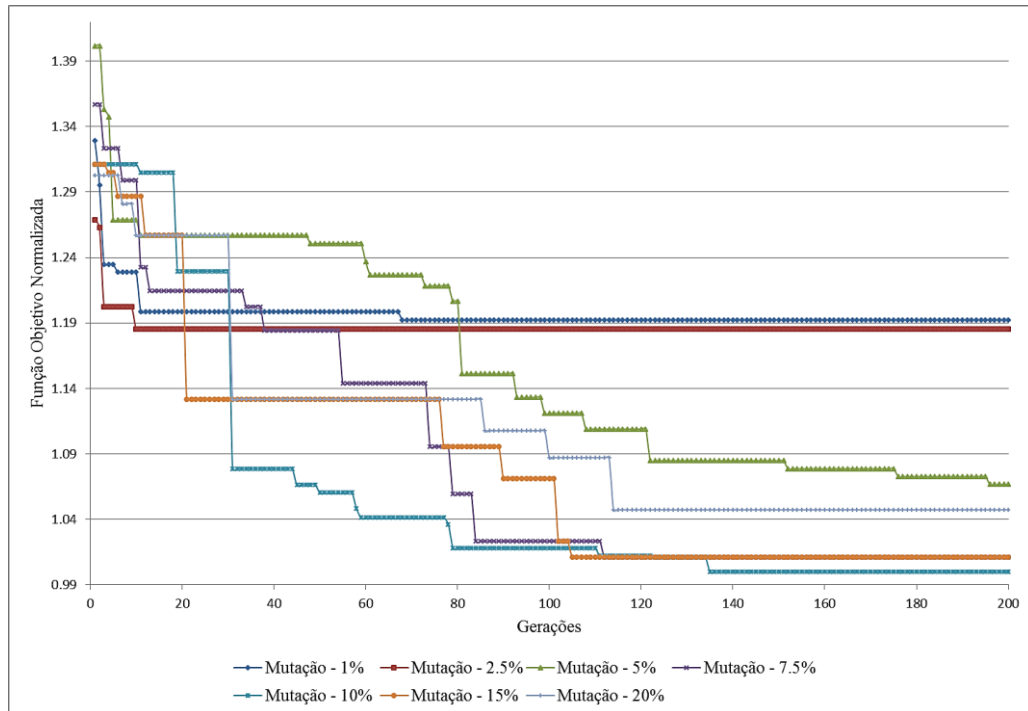


Figura 9.3. Curvas de convergência para diversas taxas de mutação.

9.2 Treliça com 10 barras

O próximo problema trata da solução de uma treliça de 10 barras submetida a um único caso de carga. Cada uma das barras é tratada como uma variável de projeto. A figura abaixo apresenta a geometria da treliça:

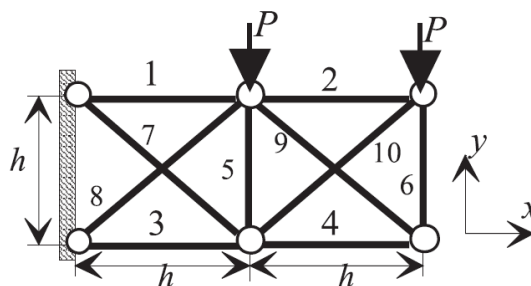


Figura 9.4. Treliça de 10 barras.

São adotados $E=1,0e+4$, $h=360$, $\rho=0,1$ e $P = 100,0$. Para este caso são ativadas as restrições de sobre estados limites últimos de tensão e flambagem. A tensão admissível em todas as barras é de $\sigma_{adm,i} = \pm 20,0$. O valor limite da tensão crítica de flambagem é estabelecida conforme critério de Euler apresentado no capítulo 7.5.1. As seções são consideradas com formato circular. A estimativa inicial considera todas as barras com área 10,0.

As variáveis de projetos são definidas de forma discreta. O menor valor das áreas é de 0,0 e o maior 100,0, podendo assumir valores em intervalos discretos de 0,1.

O coeficiente de penalização utilizado é de $1,0e+5$, taxa de cruzamento de 30% e taxa de mutação de 5%.

A tabela abaixo apresenta as áreas otimizadas:

Tabela 9.3. Resultados da otimização para diversos métodos.

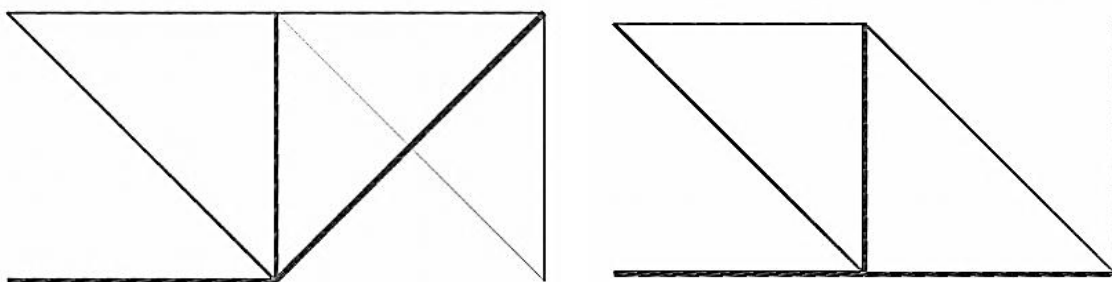
Método	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	W
1	100,00	6,68	57,45	0,05	0,00	5,64	7,07	68,31	0,00	68,31	13429,02
2	5,00	0,00	70,36	40,62	57,48	40,62	14,14	0,00	7,07	0,00	8786,72
3	5,10	5,10	70,40	0,00	40,70	0,06	14,40	0,00	0,02	68,50	8590,56

onde,

1. Restrição de tensão;
2. Formulação ε -relaxado - Restrição de tensão e limite de flambagem;
3. Presente trabalho – Restrição de tensão e limite de flambagem.

A massa final da treliça obtida com o algoritmo implementado é de 8590,56, ou seja, é 2,23% menor que a massa obtida pelo autor citado. Comparando os método 2 e 3, verifica se que as duas topologias não são idênticas. No caso 2, as áreas nulas são as áreas 2, 8 e 10. Já no caso 3, as barras removidas são a barra 4 e 8.

A figura abaixo apresenta a topologia obtidas por Guo e pelo presente estudo:



(a) Presente trabalho.

(b) Resultado obtido por Guo [Guo, et. al, 2001].

Figura 9.5. Topologia final treliça com 10 barras.

A topologia da Figura 9.5.a apresenta somente três barras em esforço de compressão (barras 3, 9 e 10). Já a Figura 9.5.b possui 4 barras em esforço de compressão (barras 3, 9, 4 e 6). Esta diferença em termos dos sentidos dos esforços explica a menor massa da estrutura da Figura 9.5.a.

Na geometria obtida por Guo, a barra 6 determina que a estrutura esteja em condição hipostática. Esta configuração geralmente não é admitida pelos algoritmos de solução numérica de sistemas de equações lineares, essa instabilidade é penalizada pela metodologia proposta.

As barras 6 e 9 da Figura 9.5.a possuem área com valor de 0,06 e 0,02, respectivamente. O presente algoritmo não foi capaz de remover completamente estas duas barras, pois no caso de um indivíduo ter apenas uma das áreas citadas nulas, resultaria em uma situação hipostática que é penalizada pela função aptidão utilizada. A única configuração viável para remoção destas barras é que um indivíduo seja gerado com ambas as áreas nulas, situação esta que é esperada caso seja aumentado o número de gerações.

Da mesma forma que no exemplo anterior, a técnica de solução proposta resolveu o problema de otimização topológica sem encontrar dificuldades nas singularidades devido às restrições do problema. As barras 6 e 9 não foram completamente removidas devido a provável instabilidade numérica na solução por elementos finitos. No entanto, é importante observar que a massa adicionada na função objetivo devido à presença das duas é praticamente insignificante frente ao valor da mesma.

O resultado obtido por Guo contorna os problemas de singularidade sobre a flambagem das barras. No entanto, o comparativo entre o resultado encontrado pelo autor e o presente trabalho mostra que a solução encontrada por Guo é um mínimo local.

Na tabela abaixo são apresentadas as tensões e o limite de flambagem em cada uma das barras não nulas após a otimização:

Tabela 9.4. Tensões nas barras após a otimização.

Tensão	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀
Limite Flambagem	-0,31	-0,31	-4,27	-	-2,47	0,00	-0,44	-	0,00	-2,08
Caso de carga 1	19,61	19,61	-4,26	-	-2,46	0,00	19,64	-	0,00	-2,06

De acordo com os valores da Tabela 9.4, nenhuma das restrições de tensões ou limite de flambagem são violadas.

Os valores da Tabela 9.4 são apresentados de forma gráfica na Figura 9.6.

Na Figura 9.6, verifica-se com clareza a diferença entre os critérios de tensão admissível e tensão crítica de flambagem. A tensão de tração admissível é cerca de cinco vezes maior que a tensão de flambagem (19,64/4,26).

Neste exemplo, também foi realizado um estudo da influência do coeficiente de penalização na convergência do problema. A Figura 9.7 apresenta as curvas de convergência para diversos coeficientes de penalização.

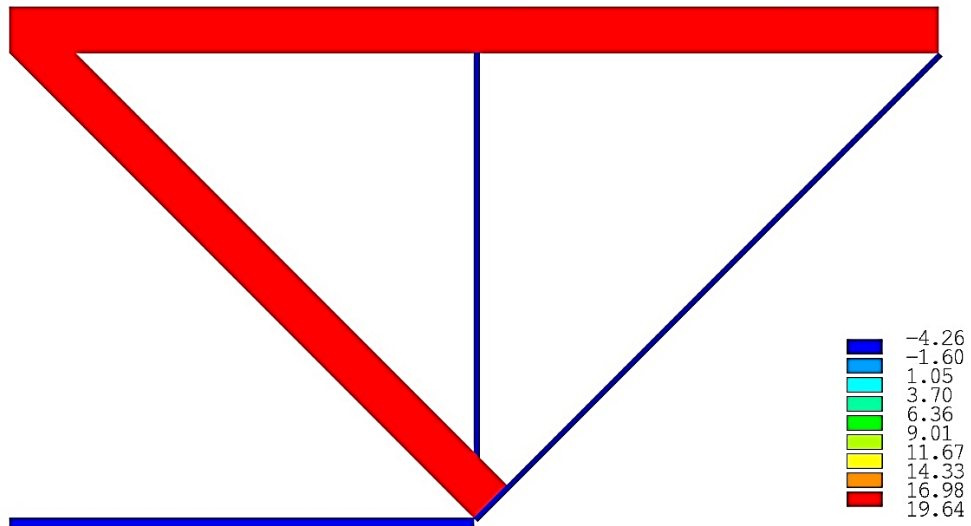


Figura 9.6. Tensões axiais na treliça de 10 barras.

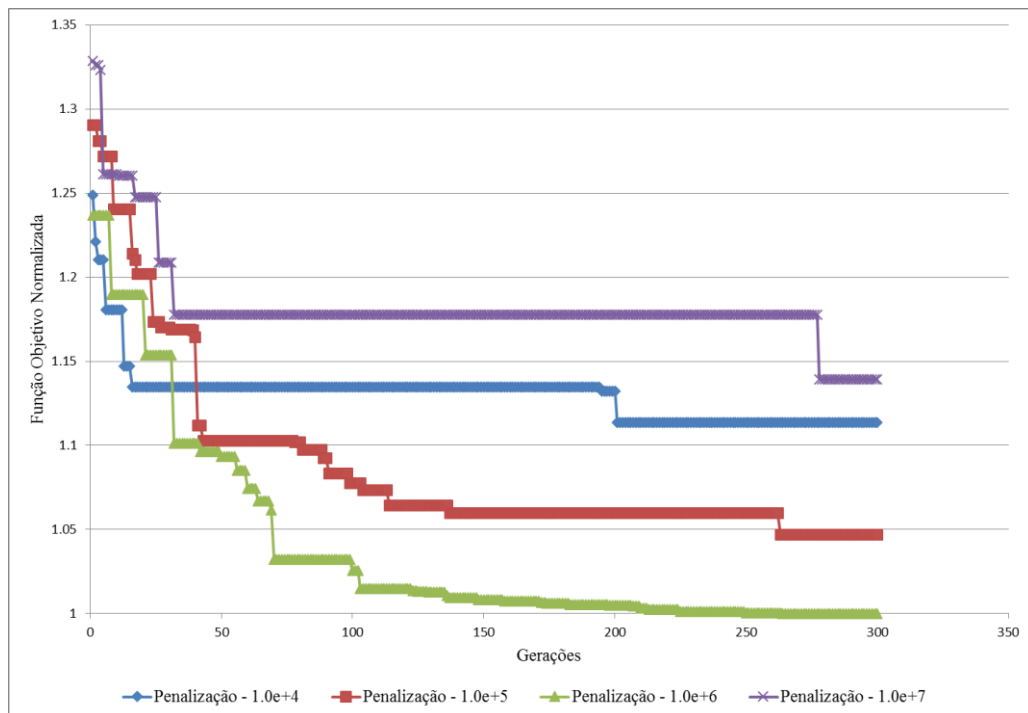


Figura 9.7. Curvas de convergência para diversos coeficientes de penalização.

Conforme observado no problema 9.1, neste caso também foi possível correlacionar o valor do coeficiente de penalização que produz melhor curva de convergência com a massa final da estrutura. No caso, a massa é na ordem de $1,0e+4$, sendo que o coeficiente de penalização que resultou em uma curva com melhor convergência foi o $1,0e+6$, ou seja, duas ordens de grandeza superior.

9.3 Treliça com 6 barras

Este problema é o exemplo apresentado no capítulo 3.6. A figura abaixo apresenta geometria do problema, condições de contorno e numeração das variáveis de projeto:

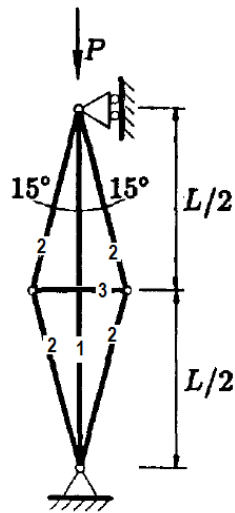


Figura 9.8. Modelo estrutural da treliça de 6 barras.

Para facilitar a convergência do problema, as variáveis foram agrupadas de forma simétrica.

São adotados $E=200,0e+3$, $L=1000$, $\rho=7850,0e-9$ e $P =12.500$. Para este caso são ativadas as restrições de sobre estados limites últimos de tensão e flambagem. A tensão admissível em cada uma das barras é de $\sigma_{adm,i} = \pm 250,0$. O valor limite da tensão crítica de flambagem é estabelecida conforme critério de Euler.

As variáveis de projetos são definidas de forma discreta. O menor valor das áreas é de 0,0 e o maior 150,0 podendo assumir valores em intervalos discretos de 1,0.

O coeficiente de penalização utilizado é de $1,0e+2$, taxa de cruzamento de 30% e taxa de mutação de 5%.

O valor das áreas após a evolução de cem gerações é de: $A_1=0,0$, $A_2=106,0$ e $A_3=16,0$. A função objetivo convergiu para o valor de 1,76. A curva de convergência do problema é apresentada na Figura 9.9.

A tensão compressiva é de -61,0Mpa e a tensão de tração é de 209,33 Mpa, valores estes que não violam nenhuma das restrições. O valor limite para tensão de flambagem, calculado pela teoria de Euler é de -62,14 Mpa, e a tensão admissível é de 250Mpa.

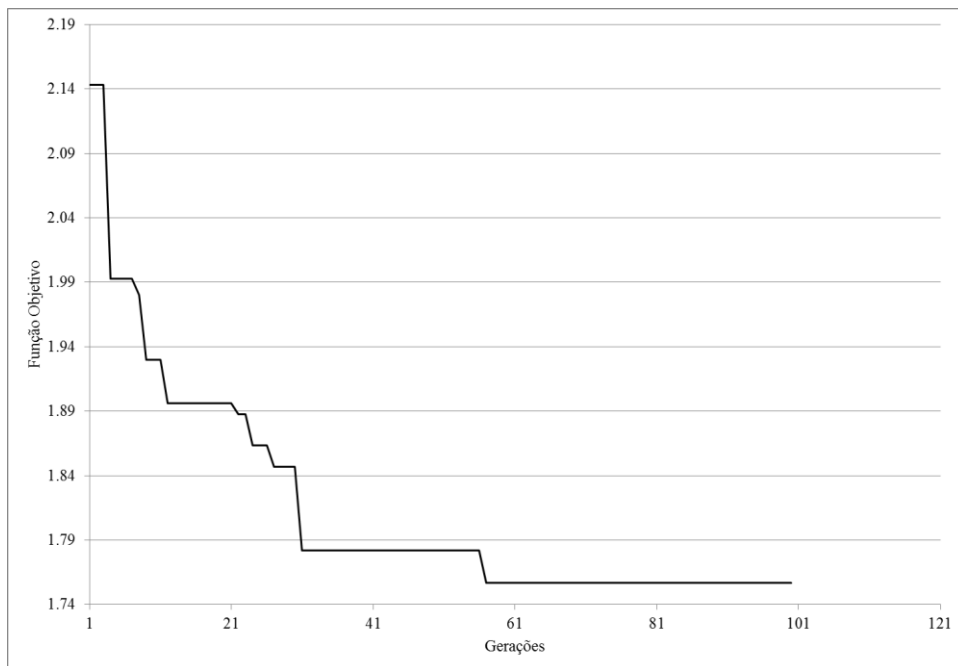


Figura 9.9. Curva de convergência para a treliça de 6 barras.

As tensões axiais em cada um das barras são mostradas na figura abaixo:

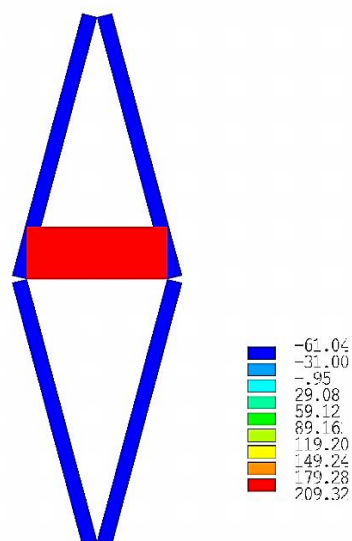


Figura 9.10. Tensões axiais.

Considerando as propriedades e dimensões conforme definido no enunciado deste exemplo, a solução para Figura 3.2.b é obtida de forma analítica, sendo o valor ótimo da seção da barra vertical 282,0. A massa para este caso é de 2,21. Da razão entre as duas soluções se obtém: $(2,22/1,76 = 1,26)$, o que é coerente com o resultado apresentado por Zhou ($\approx 10/7,78=1,29$) [Zhou, 1995].

A topologia obtida com a metodologia proposta é idêntica ao resultado analítico apresentado por Zhou. Este exemplo ilustra a eficiência do algoritmo genético na busca do ótimo global. Verifica-se que o algoritmo não ficou preso na solução de mínimo local de uma única barra vertical.

9.4 Estrutura com elementos de barra e viga

Neste caso é estudada uma estrutura em formato de treliça que é simulada utilizando elementos finitos de barra e viga. A figura abaixo mostra a estrutura e as condições de contorno:

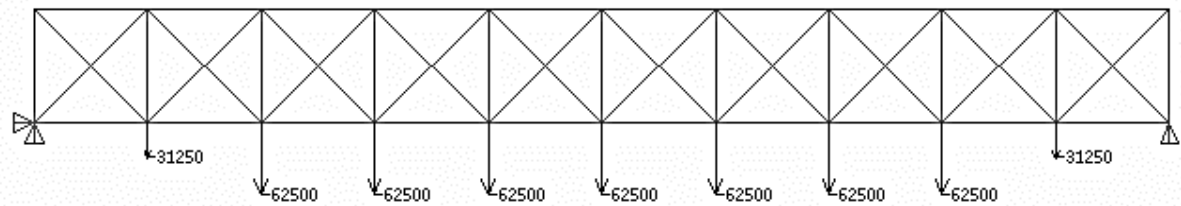


Figura 9.11. Estrutura com elementos de barra e viga.

A extremidade esquerda da treliça está vinculada com rótula fixa e a extremidade direita com rótula deslizante. A longarina inferior está submetida a carga em cada um de seus nós conforme mostrado na Figura 9.11.

A estrutura tem proporção de 1,0 de altura por 10,0 de comprimento. São adotados comprimento $L=100,0\text{m}$, $E= 68,9 \text{ GPa}$ e $\rho= 2767,0 \text{ kg/m}^3$.

As barras são agrupadas em 26 variáveis de projeto, estas são organizadas de forma que a topologia final seja simétrica.

A figura abaixo apresenta a numeração das variáveis de projeto:

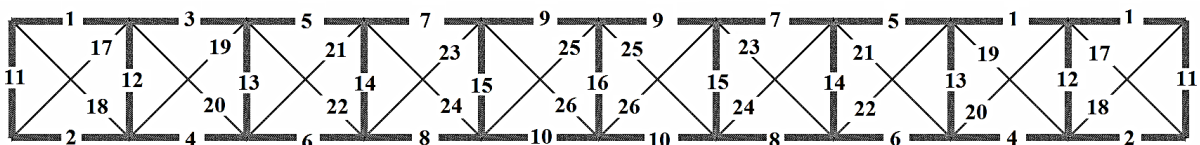


Figura 9.12. Definição das variáveis de projeto.

As variáveis 1 a 16 são modeladas com elementos finitos de viga, as demais são elementos de barra. Convenientemente os elementos da longarina superior e inferior são otimizadas com variáveis distintas. Este artifício busca visualizar o comportamento do algoritmo genético em face as diferenças entre as restrições de falha por flambagem e por limite de tensão.

As variáveis podem assumir valores discretos dentro de uma tabela de tubos circulares. A lista de perfis tubulares contém 66 diferentes perfis com diâmetro mínimo de 15,87 mm e espessura de 0,75 mm, diâmetro máximo de 339,7 mm e espessura de 16 mm. Na lista de perfis são incluídas seções cujas propriedades são nulas.

São consideradas restrições sobre estados limites de tensão e flambagem. A tensão admissível em cada uma das barras é de $\sigma_{admi} = \pm 172,0$ Mpa e o limite de flambagem é calculado conforme teoria de flambagem linear de Euler. Para o cálculo da tensão de flambagem, adota-se a hipótese que todas as barras sejam rotuladas, sendo o comprimento efetivo de flambagem igual ao comprimento real da barra.

O coeficiente de penalização utilizado é de $1,0e+5$, taxa de cruzamento de 30% e taxa de mutação de 5%.

A estrutura otimizada é apresentada na figura abaixo:



Figura 9.13. Topologia final da estrutura.

A função objetivo convergiu para massa de 44.640,0 kg.

A topologia apresentada na Figura 9.13 é a solução clássica do caso de flambagem de estruturas: os membros mais esbeltos são dimensionados para suportar apenas cargas de tração e aqueles em compressão são removidos da estrutura.

Na Tabela 9.5 são apresentadas as tensões decorrentes do carregamento e as tensões limites de flambagem de Euler. A maior tensão encontrada é de 165,3Mpa, valor que não ultrapassa a restrição de 172,0Mpa. Após recalculadas verifica-se que as tensões de flambagem não ultrapassam o valor estabelecido pela restrição.

Tabela 9.5. Tensões e limite de flambagem em cada uma das barras.

Variável de Projeto	Tensão	Limite Flambagem	Limite Flambagem /Tensão	Tensão Adm. / Tensão	Variável de Projeto	Tensão	Limite Flambagem	Limite Flambagem /Tensão	Tensão Adm. / Tensão
1	-53,1	60,8	1,1	3,2	12	-49,9	52,5	1,1	3,4
	-53,1	60,8	1,1	3,2	13	-52,9	53,2	1,0	3,3
2	5,3	0,4	-	32,5		14	-52,9	53,2	1,0
	5,3	0,4	-	32,5	-36,9		39,5	1,1	4,7
3	-74,6	85,7	1,1	2,3	15	-36,9	39,5	1,1	4,7
	-74,6	85,7	1,1	2,3		-17,4	18,8	1,1	9,9
4	142,9	18,8	-	1,2	16	-17,4	18,8	1,1	9,9
	142,9	18,8	-	1,2		1,1	6,4	-	159,4
5	-75,0	93,6	1,2	2,3	17	-	-	-	-
	-75,0	93,6	1,2	2,3	18	139,0	0,7	-	1,2
6	165,3	49,3	-	1,0		19	139,0	0,7	-
	165,3	49,3	-	1,0	-		-	-	-
7	-81,2	93,3	1,1	2,1	20	104,7	0,8	-	1,6
	-81,2	93,3	1,1	2,1		104,7	0,8	-	1,6
8	140,3	61,0	-	1,2	21	-	-	-	-
	140,3	61,0	-	1,2	22	94,0	0,6	-	1,8
9	-80,2	93,0	1,2	2,1		23	94,0	0,6	-
	-80,2	93,0	1,2	2,1	-		-	-	-
10	161,2	61,0	-	1,1	24	148,9	0,2	-	1,2
	161,2	61,0	-	1,1		148,9	0,2	-	1,2
11	-53,2	60,8	1,1	3,2	25	-	-	-	-
	-53,2	60,8	1,1	3,2	26	95,7	0,1	-	1,8
12	-49,9	52,5	1,1	3,4		95,7	0,1	-	1,8

Os resultados de tensão apresentados Tabela 9.5 são graficados na figura abaixo:

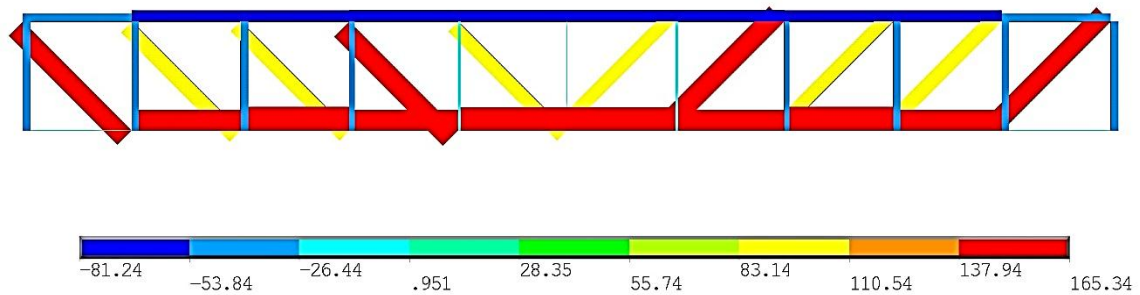


Figura 9.14. Tensão axial na estrutura otimizada.

A restrição que conduz o critério de dimensionamento na longarina inferior é o critério de falha de tensão admissível. Já na longarina superior é o critério de falha por flambagem. Devido as características geométricas da estrutura, o critério de flambagem admite tensões menores que o critério de tensões ultimas adotado. Logo os perfis dimensionados a flambagem tem maior área. As área dos perfis otimizados são: $A_1=4.705,2$; $A_2=53,8$; $A_3=6.284,0$; $A_4=1.751,0$; $A_5=8.336,5$; $A_6=2.836,0$; $A_7=8.844,2$; $A_8=4.458,2$; $A_9=9.350,3$; $A_{10}=4.458,2$; $A_{11}=4.705,3$; $A_{12}=4.370,1$; $A_{13}=2.948,2$; $A_{14}=2.538,3$; $A_{15}=1.751,2$; $A_{16}=612,5$; $A_{17}=0,0$; $A_{18}=2.538,2$; $A_{19}=0,0$; $A_{20}=2.948,2$; $A_{21}=0,0$; $A_{22}=2.349,7$; $A_{23}=0,0$; $A_{24}=881,8$; $A_{25}=0,0$ e $A_{26}=454,9$.

Os valores das áreas seguem a regra: $A_1 > A_2$; $A_3 > A_4$; $A_5 > A_6$; $A_7 > A_8$ e $A_9 > A_{10}$. Esse resultado confirma a predominância do critério de tensão na longarina inferior e critério de flambagem na longarina superior.

Verificou-se neste exemplo que a metodologia apresentada resolveu de forma eficiente a otimização dimensional e topológica, considerando variáveis discretas baseadas em uma lista de perfis comerciais.

Devido a conveniente organização das variáveis de projeto, a topologia final apresenta forma construtiva bastante simples. A estrutura pode ser fabricada sem que seja empregada avançada tecnologia de processo fabril.

9.5 Utilização do algoritmo implementado para solução de um problema real de engenharia

Após realizar a validação do algoritmo implementado, o mesmo é utilizado para solução de um problema baseado em um caso real de engenharia. Todos os dados apresentados são ligeiramente modificados para o propósito deste trabalho.

O caso estudado consiste em realizar a otimização estrutural em uma torre de queima de gases (*flare*) instalada em uma unidade FPSO (*Floating Production Storage and Offloading*). O *flare* está localizado na extremidade direita do navio que possui 295 metros de comprimento 57 metros de largura e 31.5 de altura.

A função do *flare* é realizar a queima dos gases gerados no processo de produção e armazenamento do petróleo. Todo e qualquer processo de produção de petróleo produz gás natural. A maior parte dele é utilizado para gerar energia que é consumida na unidade de produção. No entanto, uma parcela que não é possível de ser aproveitada é desprezada através da queima.

A incineração dos gases é realizada em um local que não ofereça nenhum risco á embarcação. Nas unidades de águas profundas, o local escolhido para realizar a queima é em uma torre elevada sobre a plataforma de produção. Dentre as diversas formas possíveis, a torre pode ser vertical sobre uma extremidade da *FPSO* ou ainda ter a forma inclinada, ficando a chama sobre a superfície do mar. A Figura 9.15 apresenta um *flare* com seção transversal em formato triangular, já a Figura 9.16 apresenta a torre com seção retangular.

Neste estudo é considerada uma torre com seção quadrada variável, na base a seção mede inicialmente 10x10 metros. Já na extremidade superior a seção mede 5x5 metros. A altura total é de 83 metros.

Neste problema é realizada a otimização paramétrica, de forma e topológica simultaneamente. As variáveis de projeto são as seções transversais das barras e as dimensões da estrutura.

São estabelecidas restrições sobre estado limites últimos de tensão e flambagem das barras da estrutura. Também é considerado a restrição sobre o limite de tensão de fadiga para as uniões soldadas.

As figuras abaixo apresentam dois modelos de *flare*:



Figura 9.15. Torre de queima com seção triangular.



Figura 9.16. Torre de queima com seção retangular.

9.5.1 Descrição das variáveis de projeto e do modelo numérico

As variáveis de projeto são definidas de forma a reduzir o número total de incógnitas, bem como eliminar as possíveis configurações geométricas indesejadas. Algumas barras são definidas sobrepostas umas as outras, formando assim duas camadas de elementos. A figura abaixo apresenta a forma de definição das variáveis de projeto:

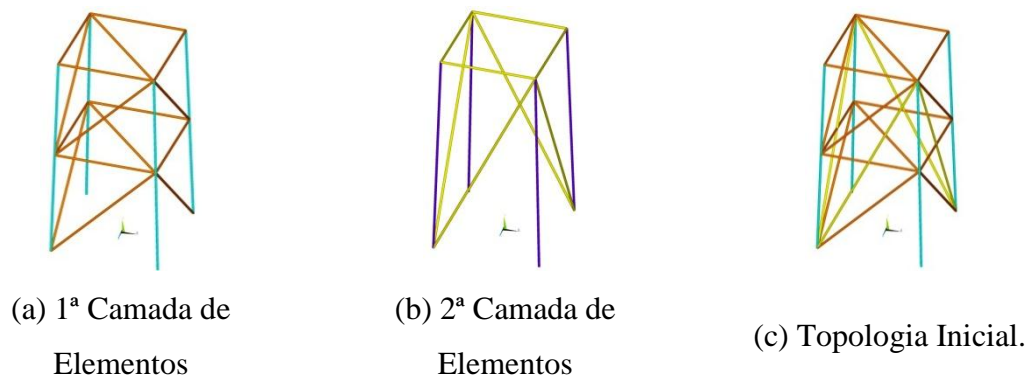


Figura 9.17. Definição das variáveis de projeto.

As variáveis de projeto são definidas de forma simétrica, conforme Figura 9.17, onde cada variável é representada por coloração diferenciada. As barras diagonais das faces opostas são definidas em forma de “X” a fim de evitar a ocorrência de esforços de torção na estrutura.

A numeração das variáveis de projeto é apresentada abaixo:

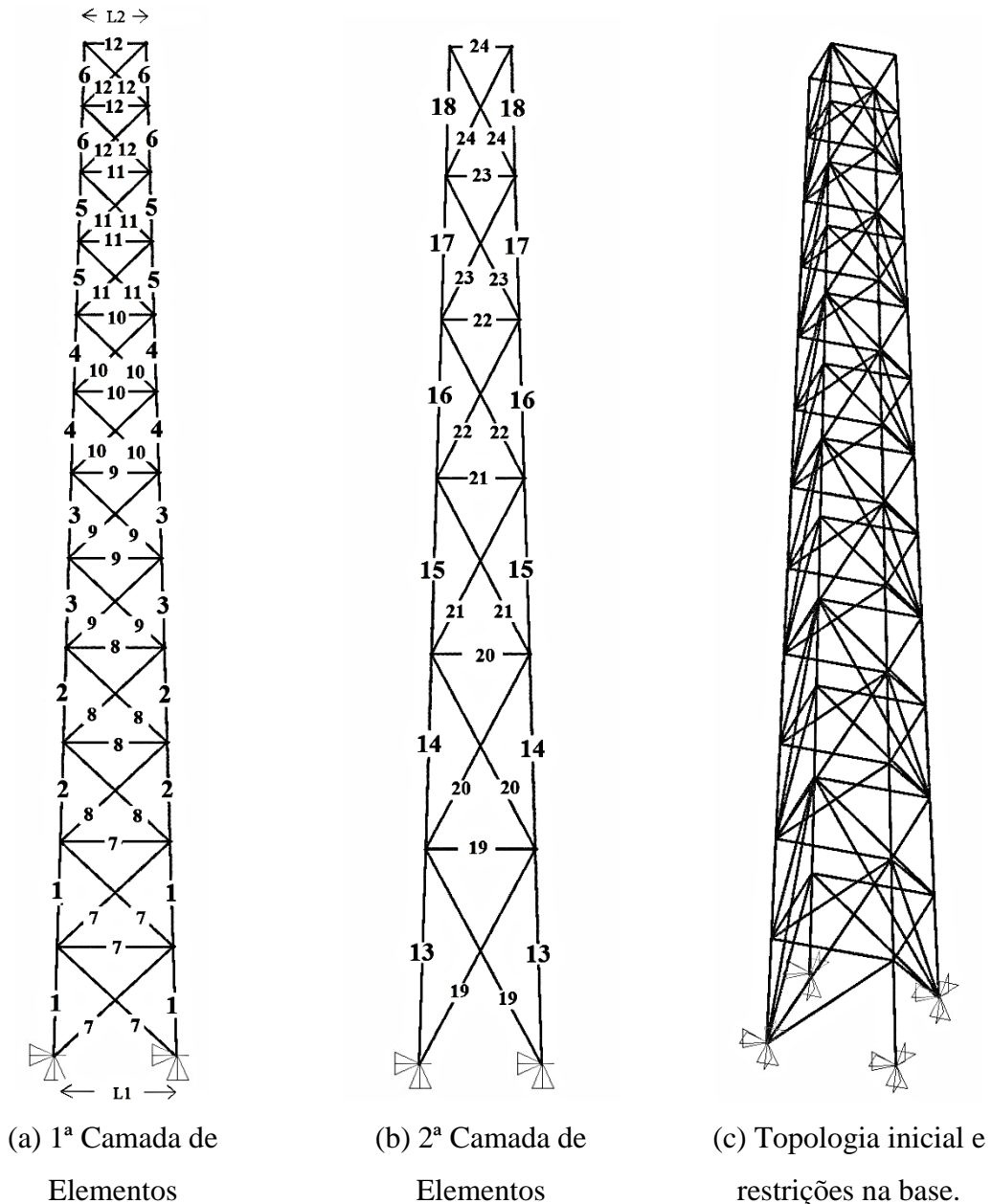


Figura 9.18. Numeração das variáveis de projeto e restrições.

As variáveis da otimização de forma são as coordenadas dos nós das extremidade inferior e superior da torre, ou seja, as medidas L_1 e L_2 . As coordenadas dos nós intermediários das colunas da torre são definidos de forma paramétrica e estão contidos em um segmento de reta que une a extremidade inferior à superior. Através destas restrições, a torre mantém a sua forma trapezoidal simétrica com seção transversal quadrada variável ao longo da altura.

O cálculo da resposta estrutural da torre é realizado considerando elementos de barra. A condição geométrica da torre caracteriza elementos com grande esbeltez. Desta forma, as simplificações decorrentes da utilização de elementos de barra não comprometem a qualidade dos resultados da resposta estrutural.

A torre é fixada sobre o *deck* principal do navio. Para representar tal condição no modelo numérico, os graus de liberdade de translação linear são fixados. As rotações permanecem livres, conforme Figura 9.18.

A força decorrente da ação do vento que atua sobre o *flare* é dependente da área de uma superfície perpendicular à ação do vento, a qual é delimitada pelo contorno da torre. A área desta superfície é dependente das variáveis de forma L_1 e L_2 , da topologia e da seção das barras que compõem a torre. Para cada novo indivíduo gerado pelo algoritmo genético a força devido à incidência do vento é atualizada, levando-se em conta apenas a influência das variáveis de forma.

Também é considerada a hipótese de pressão constante para toda altura do *flare*. Apesar de adotar um perfil de pressão constante a área da torre é variável com a altura, o que resulta em uma distribuição linear de forças, as quais são aplicadas no modelo conforme equação abaixo:

$$f_{k01}(y) = p_{k01} \left[\left(\frac{L_2 - L_1}{h} \right) \cdot y + L_1 \right] [N/m] \quad (9.1)$$

onde f_{k01} é a força distribuída ao longo da torre, p_{k01} a pressão resultante da ação do vento e y apresenta a altura da torre.

Para aplicação das cargas de vento no modelo numérico, é necessário adotar uma hipótese adicional. É esperado que a configuração topológica da estrutura seja definida entre uma ou outra camada de elementos definido na Figura 9.17: ou seja, é esperado que um grupo de variáveis, 1 ao 13, ou do 7 ao 19 tenha propriedades de seção nulas na topologia final.

Caso a variável o primeiro grupo tenha propriedades nulas, implica em remover o nó intermediário ao segmento de coluna do cálculo estrutural. Por outro lado, a remoção do nó implica em desconsiderar a carga de vento nele aplicada. Para contornar este problema, optou-se por assumir a hipótese de que a força oriunda da ação do vento é sentida pela estrutura pelos nós definidos nos 2°, 4°, 6°, 8°, 10° e 12° patamares da torre.

A Figura 9.19 apresenta a forma de aplicação das cargas de vento na torre.

Por simplicidade, o mesmo valor de carga de vento é aplicado nos nós pertencentes à face frontal e posterior da torre.

As cargas geradas pelos efeitos de inerciais são automaticamente calculadas pelo programa de elementos finitos.

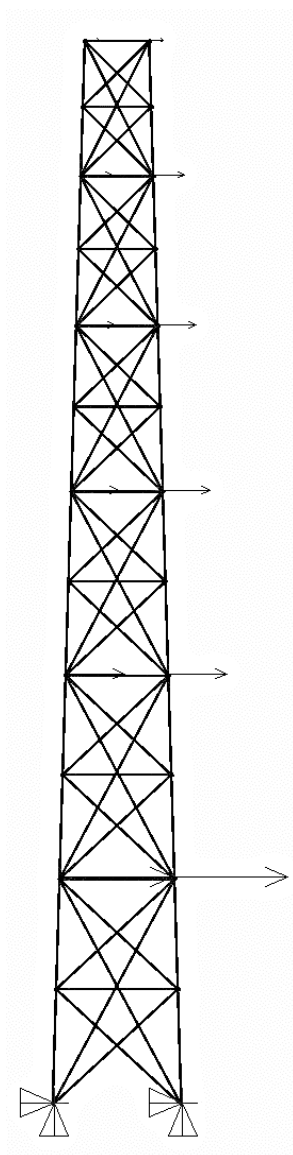


Figura 9.19. Esquema de aplicação das cargas de vento na torre.

9.5.2 Efeitos de Inerciais

O *flare* é submetido essencialmente a dois tipos de carregamentos:

- Efeitos dinâmicos, que causados pelos movimentos da embarcação, estes são induzidos pela incidência das ondas nas diversas direções;
- Esforços causados pelo vento.

O estudo do movimento de embarcações, gerado pela incidência das ondas, não é objeto deste estudo. Para caracterizar as cargas sobre o *flare* são utilizadas acelerações obtidas do estudo hidrodinâmico de um FPSO real.

As acelerações são oriundas do movimento dos graus de liberdade da unidade FPSO. Para facilitar o entendimento, a figura abaixo apresenta a nomenclatura dos graus de liberdade de um navio:

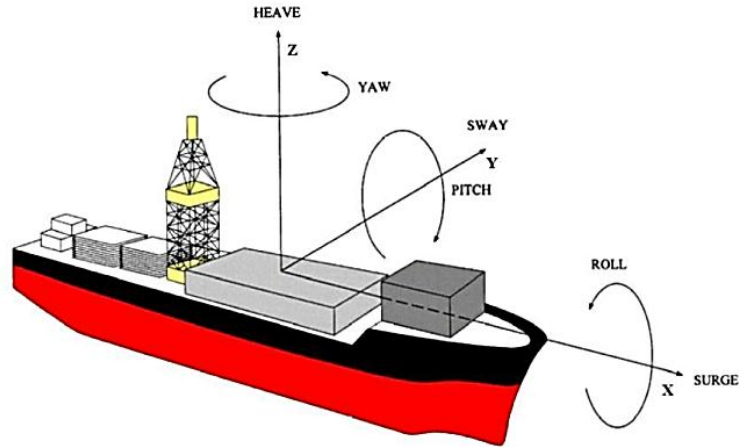


Figura 9.20. Graus de liberdade de um navio.

No estudo hidrodinâmico, são obtidos as acelerações e deslocamentos no centro de gravidade do navio. Posteriormente, através de transformação de coordenadas, os deslocamentos e acelerações são transferidos para os pontos de interesse.

A figura abaixo o mostra os pontos da torre onde são conhecidas as acelerações:

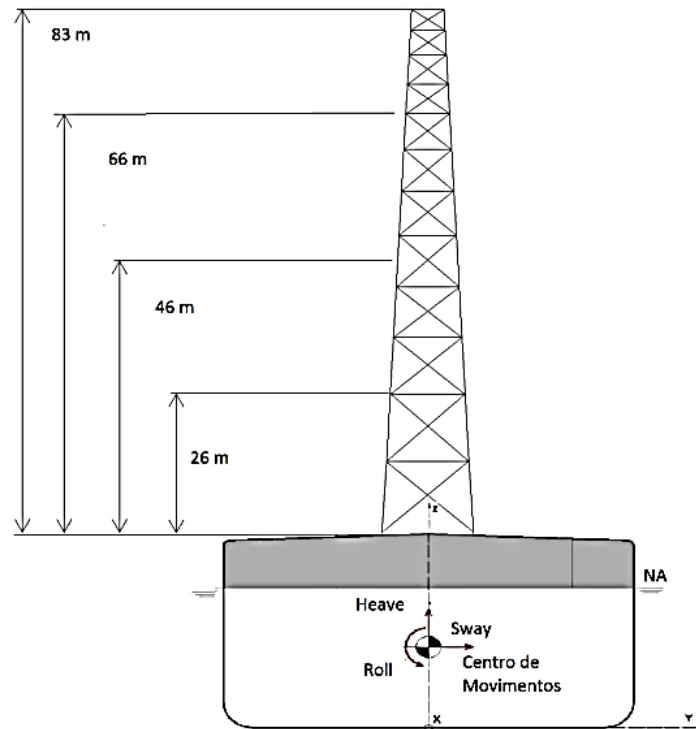


Figura 9.21. Locais onde as acelerações são conhecidas.

OBS: NA é o nível d'água.

As acelerações são obtidas através da simulação de estados do mar considerando:

- Incidência das ondas de 0° a 360°, em relação aos eixos da embarcação;
- Período entre as ondas variando de 2s até 40s;
- Situação de deslocamento da plataforma (*transit*) – Nível d'água (NA) 10.5 m;
- Condição de operação anual (DOC-1)– (NA mínimo 13.93 m);
- Condição extrema centenária (DEC-1)– (NA mínimo 13.93 m);
- Condição de operação anual (DOC-2)– (NA intermediário 17.12 m);
- Condição extrema centenária (DEC-2)– (NA intermediário 17.12 m);
- Condição de operação anual (DOC-3)– (NA intermediário 23.20 m);
- Condição extrema centenária (DEC-3)– (NA intermediário 23.20 m);

A análise acima resulta em uma grande quantidade de dados, para as diversas condições. Para fins deste estudo e aplicação do método dos estados limites são considerados somente os valores máximos de acelerações obtidos em cada condição, considerando a incidência das ondas variando de 0 a 360° e período das ondas de 2 a 4 segundos. Para fins de aplicação do método, a carga representativa é o valor cuja probabilidade de ocorrência no período de um ano é de 10^{-2} , ou, a frequência de ocorrência esperada é de uma vez a cada 100 anos.

Desta forma, é realizada uma busca (envelope) em todos os valores de aceleração, para cada condição. Os valores máximos são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 9.6. Tabela de acelerações sobre o *flare*.

Condição /Ponto	DOC			DEC			<i>transit</i>		
	a_{1x} [g]	a_{1y} [g]	a_{1z} [g]	a_{2y} [g]	a_{2y} [g]	a_{2z} [g]	a_{3x} [g]	a_{3y} [g]	a_{3z} [g]
26 m	0,099	0,169	1,270	0,190	0,348	1,411	0,104	0,268	1,366
46 m	0,167	0,189	1,270	0,255	0,410	1,411	0,192	0,303	1,366
66 m	0,210	0,204	1,270	0,321	0,454	1,411	0,250	0,330	1,366
83 m	0,242	0,217	1,270	0,372	0,488	1,411	0,294	0,350	1,366

As acelerações nas direções x e y são oriundas, principalmente, do movimento dos graus de liberdades *roll* e *pitch* que são movimentos angulares. Logo, se observa que as componentes são variáveis na altura da torre. Para facilitar o cálculo por elementos finitos, adotou-se a simplificação de utilizar a média das acelerações, conforme equação abaixo:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^4 a_i \cdot \Delta L_i}{\sum_{i=1}^4 \Delta L_i} \quad (9.2)$$

Da simplificação acima, resulta as acelerações médias conforme Tabela 9.7

Tabela 9.7. Acelerações médias no *flare*.

DOC			DEC			<i>transit</i>		
a _{1x} [g]	a _{1y} [g]	a _{1z} [g]	a _{2y} [g]	a _{2y} [g]	a _{2z} [g]	a _{3x} [g]	a _{3y} [g]	a _{3z} [g]
0,15	0,19	1,27	0,25	0,40	1,41	0,18	0,30	1,37

9.5.3 Cargas de Vento

Os esforços oriundos da ação do vento são determinados conforme norma DNV-RP-C205 (*Environmental Conditions and Environmental Loads*) e EN 1991-1-4 (EUROCODE 1 : *Actions on Structures – Part 1-4: General Actions – Wind Actions*).

A determinação da carga devido à ação do vento é dependente de dois fatores principais:

- Índice de área exposta (ϕ), que é razão entre a área efetiva das vigas e a área total da superfície delimitada pelo contorno do reticulado de uma face perpendicular á incidência do vento;
- Número de Reynolds, que é dependente das dimensões dos tubos da torre.

Com estes dois fatores, é possível determinar o coeficiente de arrasto. No entanto, estes parâmetros são diretamente dependentes das variáveis de projeto do problema de otimização.

A abordagem mais adequada é refazer o cálculo para cada novo indivíduo gerado pelo algoritmo genético. No entanto, para uma aproximação inicial, o índice de área exposta e número de Reynolds são estimados com base no caso mais crítico de topologia esperado no problema de otimização e o diâmetro médio da tabela de perfis utilizado.

A Figura 9.22 apresenta o coeficiente de arrasto para estruturas reticuladas fabricadas com perfis circulares, conforme EN 1991-1-4.

As cargas de vento são calculadas considerando a velocidade do vento de 34.0 m/s (verificada a 10m acima do nível do mar), com probabilidade de ocorrência anual de 10^{-2} e duração média de 10.0s. Esta velocidade é considerada atuante em qualquer uma das direções.

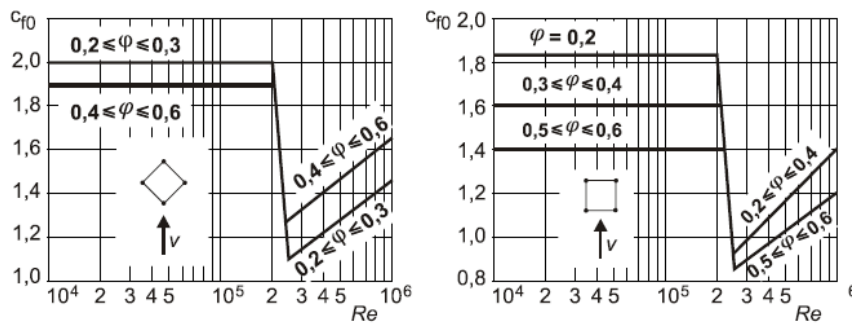


Figura 9.22. Coeficiente de arrasto para estruturas de perfis tubulares.

Considerando diâmetro médio dos tubos $\varnothing=302.3$ mm, resulta em: Reynolds $Re = 7.0e+5$, índice de área exposta $\varphi=0.23$, e fatores de forma $c_{f01} = 1.38$ e $c_{f02} = 1.33$, conforme Figura 9.22. Para fins deste estudo é tomado somente o maior valor entre eles (1.38).

A pressão resultante da incidência do vento é calculada pela equação que segue:

$$p_k = \frac{1}{2} \rho V_k^2 \quad (9.3)$$

onde ρ é a densidade do ar (1.226 kg/m^3) e V_k a velocidade do vento (34 m/s), que resulta em

$$p_k = 708.6 \text{ N/m}^2.$$

Adotando o coeficiente de arrasto, definido acima, e o índice de área exposta, a pressão atuante sobre uma face onde o vento incide é de $p_{k01} = 224.9 \text{ N/m}^2$.

Para um resultado mais preciso, as cargas de vento devem ser recalculadas após um primeira etapa de otimização.

9.5.4 Combinação dos casos de carga

Os casos de carregamento são combinados conforme norma DNV-OS-C101 (*Design of Offshore steel structures, General LFRD Method*).

As cargas de projetos são determinadas majorando cada caso de carregamento por um fator característico:

$$S_d = \sum_{i=1}^n \gamma_{fi} \cdot S_{ki} \quad (9.4)$$

onde é γ_{fi} o fator de carregamento para cada caso de carga, S_k o valor característico da ação e S_d a carga de dimensionamento.

Para o propósito deste estudo são utilizados os fatores de combinação de carga para estados limites últimos de utilização (ELU) e estado limite de fadiga (ELF). Neste caso, o valor representativo das cargas ambientais é aquele que descreve a probabilidade anual de ser excedido de 10^{-2} . Para o método ELF é utilizado fator de combinação de carga $\gamma_{fi} = 1.0$. Já para o ELU, os fatores de carga adotados são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 9.8 Fatores de majoração das cargas para estados limites últimos.

Combinação de carregamento	Peso Próprio (G)	Cargas Ambientais (E)
I	1.3	0.7
II	1.0	1.15

Para correta adoção dos coeficientes de ponderação definidos na Tabela 9.8 convém separar o efeito gravitacional do efeito inercial gerado pelo movimento da FPSO. Desta forma, resultam os seguintes casos de carregamento, para condições limites últimas:

$$S_{d,ELU} = \gamma_{Gi} \cdot G + \gamma_{Ei} \cdot (\pm a_{jx} \pm a_{jy} \pm a_{jz}) + \gamma_{Ei} \cdot (\pm V_x \pm V_z \pm V_{xz}) \quad (9.5)$$

onde γ_{Gi} é o coeficiente de carga relativo ao cargas de peso próprio e o índice i a combinação de carregamento definida na Tabela 9.8. Já γ_{Ei} é coeficiente relativo às cargas ambientais. Os valores $\pm a_{j\gamma}$ representam as acelerações para cada estado de carregamento, conforme definido na Tabela 9.7 e o símbolo (\pm) indica que as acelerações podem atuar em qualquer sentido. E $\pm V_\gamma$ indica à carga de vento, que é definida analogamente as cargas de aceleração. Expandindo a equação (9.5), resultam em 288 casos de carregamento para estado limites últimos.

Falta ainda definir as combinações de cargas para o estudo de fadiga. Como a condição de operação (DOC) é a que tem maior duração na vida útil do *flare*, esta condição é utilizada para avaliar a vida em fadiga das estruturas. Não é realizada nenhuma consideração acerca da influência dos efeitos dinâmicos do vento na vida em fadiga da torre.

Para determinar o intervalo de variações das tensões em um ciclo de fadiga, é considerado que a aceleração lateral tem efeito simétrico sobre a torre. Ou seja, a tensão em um ponto causada por um ciclo de aceleração $\pm a_x$ tem valor $\pm k$. O intervalo de tensões em um ciclo fica:

$$\Delta\sigma = (+k - (-k)) = 2k \quad (9.6)$$

Como a tensão é proporcional ao carregamento, o intervalo de tensões é calculado multiplicando as acelerações pelo fator 2.0.

As combinações de carregamento para fadiga (ELF) ficam:

$$S_{d,ELF} = 2.0 \cdot 1.0 \cdot (\pm a_{2x} \pm a_{2y} \pm a_{2z}) \quad (9.7)$$

Combinando as acelerações da equações acima são gerados mais oito casos de carregamento.

9.5.5 Critério de Falha

As restrições do problema de otimização são determinadas observando critério de falha por tensões admissíveis máximas, tensão limite de flambagem e tensão limite de fadiga.

O fator de resistência de cada critério de falha é adotado conforme AISC [AISC, 1999]:

$$\phi = \begin{cases} 0.9 - \text{Elementos em tração (Limite de escoamento)} \\ 0.85 - \text{Elementos em compressão (Limite de flambagem)} \end{cases} \quad (9.8)$$

São adotadas as propriedades típicas do aço estrutural ASTM-A36, sendo tensão de escoamento $\sigma_{esc} = 250MPa$ e tensão de ruptura $\sigma_{rupt} = 410MPa$. Os limites de resistência ficam definidos como:

$$\begin{aligned} \sigma_{adm,i} &= 0.9 \cdot 250 = 225MPa \\ \sigma_{adm_B,i} &= 0.85 \cdot \sigma_{B,i} \\ \Delta\sigma_{adm_F,i} &= 0.9 \cdot \Delta\sigma_{F,i} \end{aligned} \quad (9.9)$$

onde $\sigma_{B,i}$ é o limite de flambagem para cada uma das barras calculado pelo critério de Euler e corrigido pela curva de flambagem apresentada no capítulo 7.5.2 e $\Delta\sigma_{F,i}$ é o intervalo de tensões admissíveis a falha por fadiga para cada uma das juntas soldadas.

Para o critério de flambagem, todas as barras da estrutura são consideradas articuladas em suas extremidades, que corresponde à terceira situação da Figura 7.6. Para esta situação, é adotado coeficiente de comprimento efetivo de 1.0. Nenhuma restrição é aplicada sobre o índice de esbeltez das barras.

Para determinar o valor da tensão de falha por fadiga, é necessário adotar algum procedimento para estimar o fator de concentração de tensão de cada uma das juntas soldadas. Para suprir tal necessidade destacam-se duas alternativas:

1. Gerar de forma parametrizada cada uma das juntas com elementos finitos de casca e determinar o *SFC* de forma direta;

2. Utilizar equações parametrizadas para determinar o *SFC* para cada configuração.

A primeira alternativa é a mais precisa. No entanto, o tempo computacional necessário para realizar o cálculo de cada um das juntas através do método dos elementos finitos torna esta opção inviável.

Na segunda alternativa, as equações parametrizadas para o cálculo do *SFC* têm sua aplicabilidade restrita a condições geométricas que eventualmente podem não ser satisfeitas durante a otimização.

Resta a hipótese de estabelecer uma sistemática para que o problema seja solucionado de forma iterativa:

- Inicialmente são estimados valores para os fatores de concentração de tensão com base no estudo prévio do problema;
- Realiza-se a otimização;
- Após a primeira etapa de otimização, realiza-se o cálculo dos fatores de concentração de tensão por método mais preciso. Caso os valores sejam muito diferentes dos estimados inicialmente, os valores são atualizados e realiza-se a otimização novamente.

Como estimativa inicial para o fator de concentração de tensão, adotou-se as equação parametrizadas da norma DNV (*Fatigue Design of Offshore Structures*, 2010). Para estimativa do *SCF* foi selecionada uma junta do segundo nível da torre. A Figura 9.23 apresenta a junta da torre para onde foi estimado o *SCF*.

Pelo estudo prévio do problema, arbitrou-se que o tubo vertical tem diâmetro externo de 350mm e espessura de parede de 10.0mm. Para o tubo menor foi atribuído perfil com diâmetro de 150 mm com parede de 5mm. Ainda admitiu-se que somente uma das camadas de elementos compõe a topologia após a otimização. A “segunda camada de elementos” é utilizada para o cálculo do *SCF*, pois o ângulo das barras diagonais é maior (60°) resultando em um fator de concentração de tensão de magnitude mais elevada.

Assumindo as prerrogativas acima consultando a Tabela B-3, equação 20 da DNV (*Fatigue Design of Offshore Structures*, 2010) obtém-se o fator de concentração de tensão de 3.13. O valor obtido é aplicado sobre a tensão atuante nas barras diagonais e travessas da estrutura. Para as colunas da torre é adotado $SCF = 1.0$.

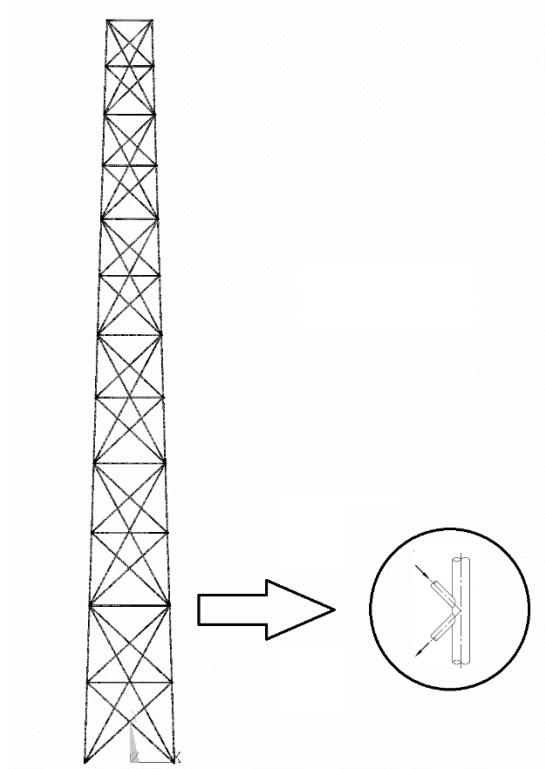


Figura 9.23. Junta utilizada para estimativa inicial do fator de concentração de tensão.

Ainda é necessário definir o valor de tensão representativo para a falha por fadiga nas juntas tubulares. Para tanto é necessário adotar os seguintes dados abaixo:

- Projeto da torre para vida útil de 25 anos;
- Parâmetro de forma da equação de Weibull $h=0.85$;
- Fator de projeto de fadiga=2.

Com os dados acima, consulta-se a DNV (tabelas 5-2, 5-8 e 5-5) para obtenção do intervalo de tensões admissível pelo método simplificado de Weibull. O valor calculado é de $\Delta\sigma_{F,i} = 275.2\text{Mpa}$.

O valor de tensão admissível acima é a resistência da junta tubular com base na tensão de “hot-spot”. Convém converter o valor da resistência em termos das tensões nominais dividindo o mesmo pelo SCF . Por último, obtém-se a tensão limite já considerando o fator de redução da resistência determinado na equação (9.9). A tensão limite para falha por fadiga nas barras diagonais e travessa é de $\Delta\sigma_{adm_F,i} = 79.09\text{MPa}$. Para as colunas da torre, o valor calculado é de $\Delta\sigma_{adm_F,i} = 247.5\text{MPa}$.

Os gráfico e equações utilizadas nas obtenção dos fatores de concentração de tensões e limite de resistência a fadiga são apresentados no Apêndice C.

O intuito de estabelecer uma tensão admissível de fadiga através da metodologia proposta é unicamente identificar a importância deste critério de falha na otimização estrutural do *flare*. A obtenção do valor de tensão admissível para falha por fadiga só foi possível através de grande simplificação no problema. A utilização de uma técnica mais precisa para avaliação do critério de fadiga torna o problema inviável devido aos custos computacionais associados.

Apesar de obtido por um técnica bastante trivial o valor obtido representa do limite inferior de resistência a fadiga de uma união tubular soldada. Prova disso é que esta metodologia é aceita pelas entidades regulamentadoras do segmento offshore.

9.5.6 Resultados para otimização paramétrica e topológica e de forma

Realizada a otimização de dimensional, topológica e de forma, a função objetivo do problema convergiu para a massa de 21.916,6 kg. As áreas finais dos perfis são: $A_1=6.284,0$; $A_2=6.284,0$; $A_3=3.334,6$; $A_4=2.050,5$; $A_5=2.050,5$; $A_6=881,8$; $A_7=3.334,6$; $A_8=2.050,5$; $A_9=2.050,5$; $A_{10}=881,8$; $A_{11}=881,8$; $A_{12}=881,8$ e A_{13} até $A_{24}=0,0$. As variáveis de forma L_1 e L_2 convergiram para os valores de 9.750,0 e 3.000,0, respectivamente.

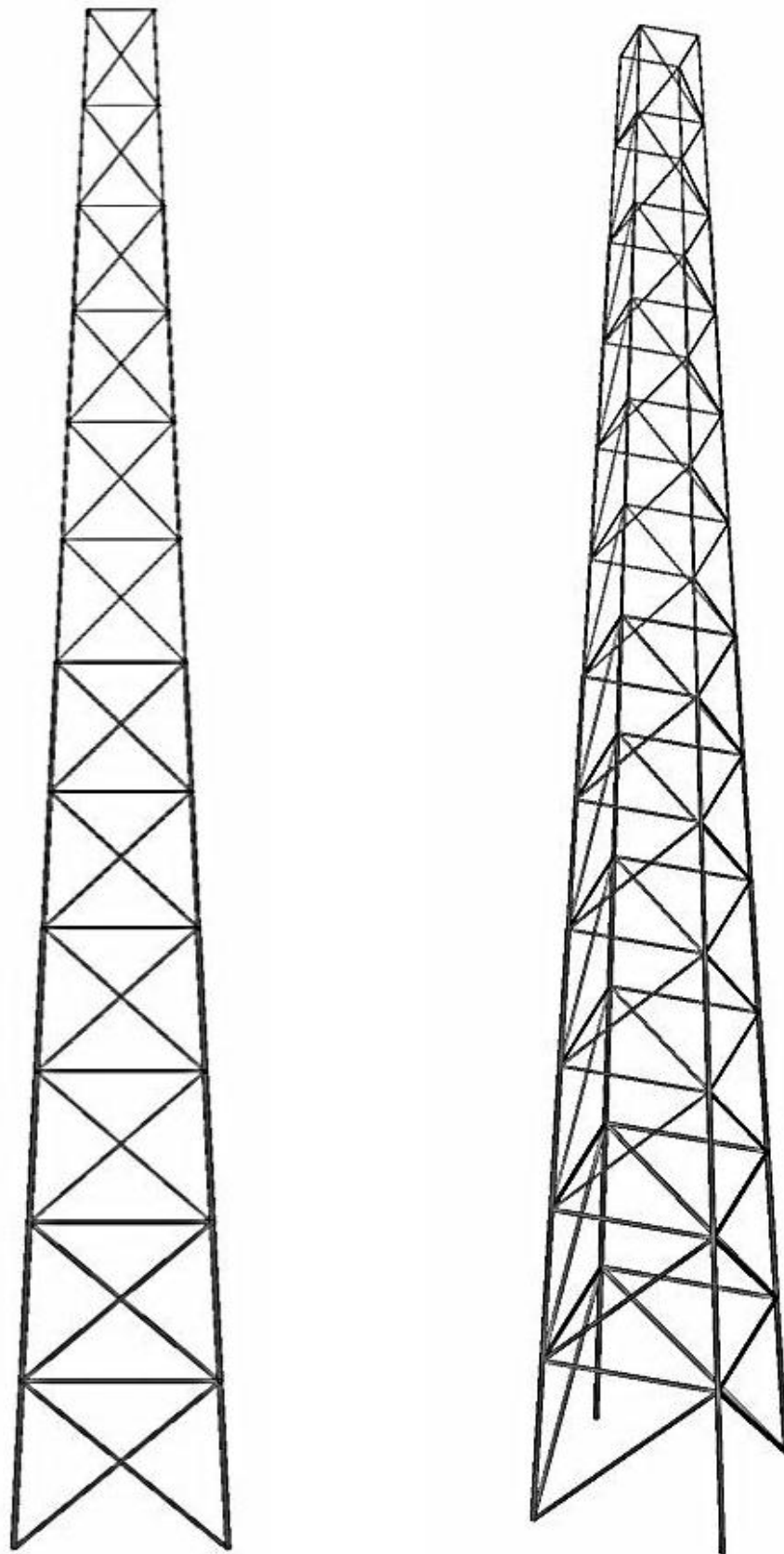
A topologia e a forma final do problema são apresentadas na Figura 9.24.

Pela Figura 9.24 verifica-se a predominância absoluta dos membros diagonais de menor comprimento (primeira camada de elementos). Os elementos da segunda camada e de maior comprimento foram todos retirados pelo algoritmo de solução.

Para verificar se as restrições são violadas em algum dos casos de carregamento, realizou-se uma busca nas solicitações de cada barra, para cada caso de carregamento, de acordo com o critério de falha.

Identificou-se então o maior valor absoluto de solicitação por barra entre todos casos de carregamento e para cada critério de falha. Com este dado, é possível calcular a razão entre a resistência de dimensionamento e a solicitação de cada barra para o caso de carregamento mais severo.

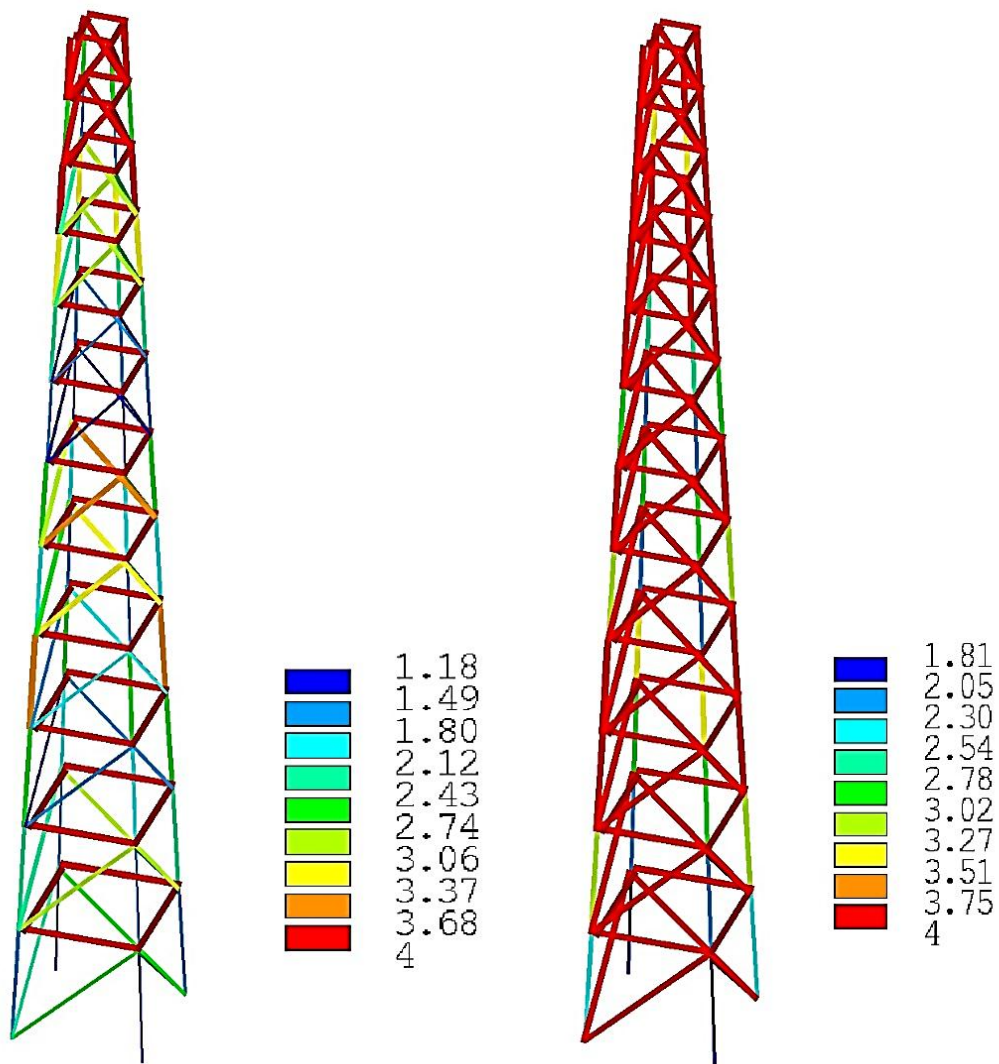
A Figura 9.25 apresenta, de forma gráfica, os menores valores da razão entre resistência e solicitação para os critérios de falha por flambagem e tensões admissíveis.



(a) Vista Frontal

(b) Vista Isométrica

Figura 9.24. Topologia final do *flare* após a otimização.



(a) Razão entre resistência e esforços para o critério de flambagem (b) Razão entre resistência e esforços para o critério de tensões admissíveis

Figura 9.25. Valores mínimos para razão R_d/S_d para diferentes critérios de falha.

O valor mínimo da Figura 9.25-a é de 1,18, sendo que o limite estipulado é $R_d/S_d=1/0,85=1,18$. Já na Figura 9.25-b, o valor mínimo é de 1,82, sendo que o estipulado é de $R_d/S_d=1/0,9=1,11$.

Cabe ainda verificar o estado de tensões para os carregamentos de estados limites de fadiga. A Figura 9.26 apresenta tensões na estrutura para o caso de carregamento de fadiga que produz os maiores esforços nas barras.

Na Figura 9.26 os resultados foram divididos para as diferentes partes da estrutura, pois as barras diagonais e travessas tem limite de critério de falha por fadiga diferentes das colunas da torre.

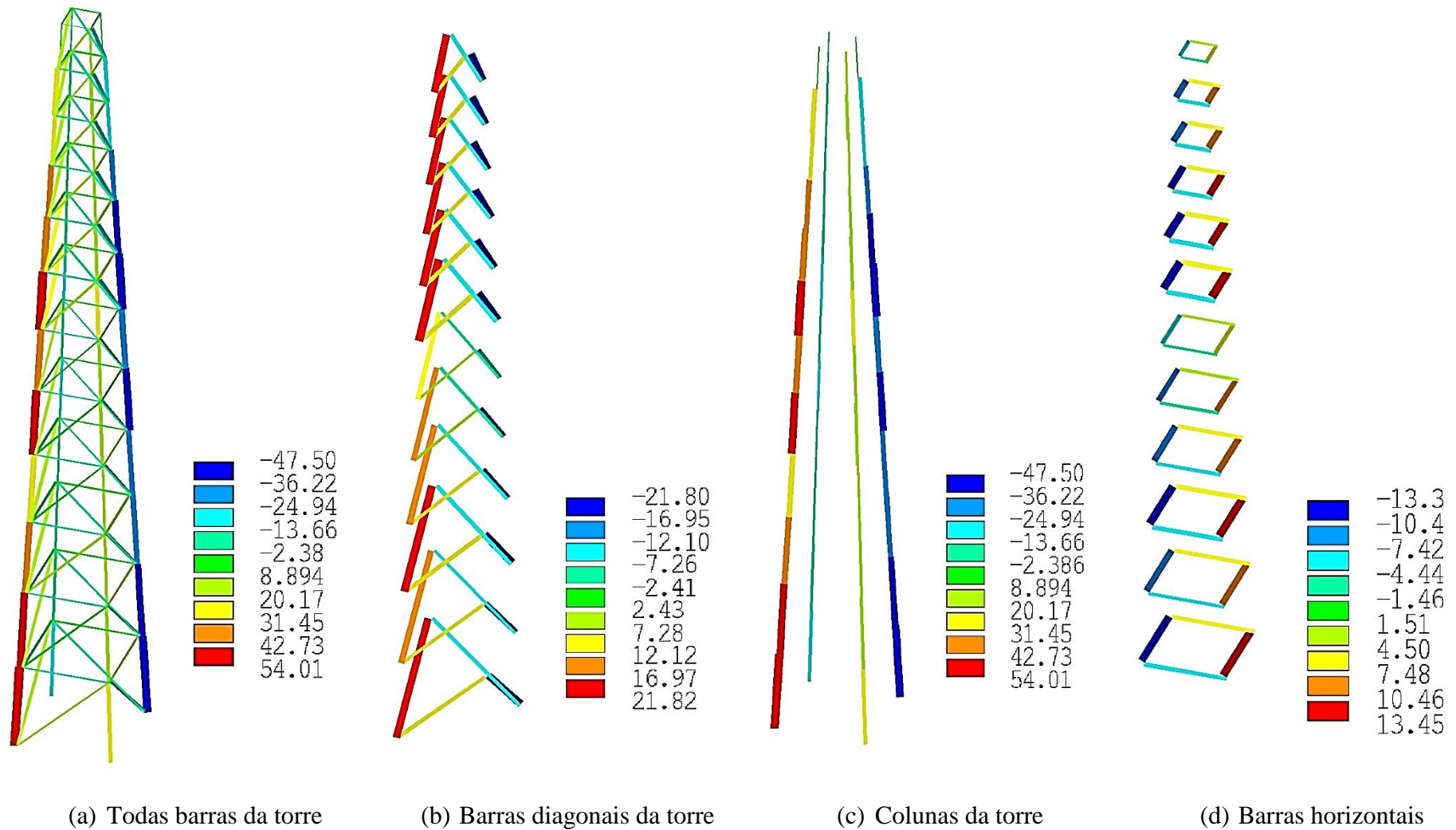


Figura 9.26. Tensões de fadiga na estrutura.

Conforme Figura 9.26-b, o intervalo de tensões de fadiga nas barras diagonais é de 21,8Mpa. Nas travessas o valor é de 13,4 Mpa e nas colunas 64,5Mpa. Estes valores são inferiores aos limite estabelecidos no critérios de falha por fadiga, 79,09 Mpa e 247,5 Mpa para as travessas/diagonais e colunas, respectivamente.

Após a primeira etapa de otimização, realizou-se o cálculo dos fatores de concentração por meio do método dos elementos finitos. Os novos valores obtidos para os fatores de concentração de tensão são: 6,1 para as barras diagonais, 4,8 para as travessas e 2,0 para as colunas.

A metodologia de cálculo dos novos fatores de concentração de tensão é apresentada no Apêndice C.

Através dos novos fatores de concentração de tensão, é possível atualizar os valores de tensão admissível, conforme descrito no capítulo 9.5.5. Desta forma, as novas tensões admissíveis são: 40,2 Mpa para as barras diagonais, 51,53 Mpa para as barras horizontais e 123,7 Mpa para as colunas.

Verifica-se que os novos fatores de concentração obtidos através de método mais preciso são maiores que os estimados inicialmente. No entanto, a magnitude das tensões de fadiga não ativam as restrições, mesmo depois de atualizar os valores de resistência através dos fatores de concentração recalculados. Assim, não é necessário realizar a otimização novamente com os valores de tensões de fadiga atualizados.

Pela análise dos estados de carregamento, verifica-se que o critério de falha que determina o dimensionamento da estrutura é o critério de flambagem. Esta conclusão está de acordo com a topologia para que o problema convergiu. Todos os elementos diagonais de maior comprimento são retirados.

Os elementos diagonais de maior comprimento têm tensão admissível á flambagem menor que os elementos mais curtos. Nos elementos mais longos é necessário utilizar seções transversais com maior área do que nos elementos mais curtos. Em contrapartida, a quantidade de barras com menor comprimento é maior.

A análise qualitativa do problema não permite concluir qual das duas soluções é a ótima. O algoritmo implementado convergiu para solução com barras diagonais de menor comprimento. No entanto, cabe ressaltar que essa não é uma solução que pode ser generalizada para estruturas reticuladas semelhantes sem uma análise mais detalhada do problema. A topologia da estrutura não depende unicamente de suas características geométricas. A intensidade do carregamento, bem como as natureza das solicitações pode ter influência significativa na topologia do problema.

Também é importante observar o formato final da torre: como a carga de vento é dependente da área de projeção da torre, faz sentido adotar o formato encontrado pelo algoritmo. Quanto mais estreita a parte superior, menor é a posição vertical do centro médio de aplicação da carga de vento e, conseqüentemente menor é o esforço de momento sobre a torre.

No lado inferior, quanto maior for a largura menores são os esforços sobre as colunas da torre. Mas também quanto maior a largura maior é a área de incidência de vento. O ponto ótimo encontrado pelo algoritmo aponta a posição intermediária, entre os limites de variação da medida inferior.

Por último é realizado o estudo para verificar a influência das variáveis de forma na massa final da estrutura. São estudados dois casos:

- Caso 1 – 24 variáveis de dimensionais de 2 variáveis de forma;
- Caso 2 – 24 variáveis de forma, sendo 10m a largura da base e 5m a largura do topo.

A Figura 9.27 a apresenta as curvas de convergência para os dois casos citados. Na Figura 9.28, as curvas são apresentadas partindo da 500ª geração onde é possível observar a diferença no valor final da função objetivo. A massa final da estrutura para o caso 2, sem as variáveis de forma, convergiu para 23.569,3, ou seja, 30% maior que a massa considerando a otimização com as variáveis de forma.

Verificou-se que a inclusão das variáveis de forma no problema de otimização paramétrica e topológica não alterou significativamente a velocidade de convergência do problema.

Pelos resultados encontrados, verificou-se que é possível utilizar a metodologia proposta para redução de massa de problemas de grande complexidade através da otimização paramétrica, topológica e de forma. A otimização com os três tipos de otimização permitiu encontrar uma estrutura 30% mais leve quando comparado a otimização sem as variáveis de forma. A singularidades nas restrições de tensões e flambagem foram superadas pelo algoritmo de solução.

A topologia para que o problema convergiu, permite projetar uma estrutura metálica bastante simples, facilitando assim os processo de fabricação da mesma.

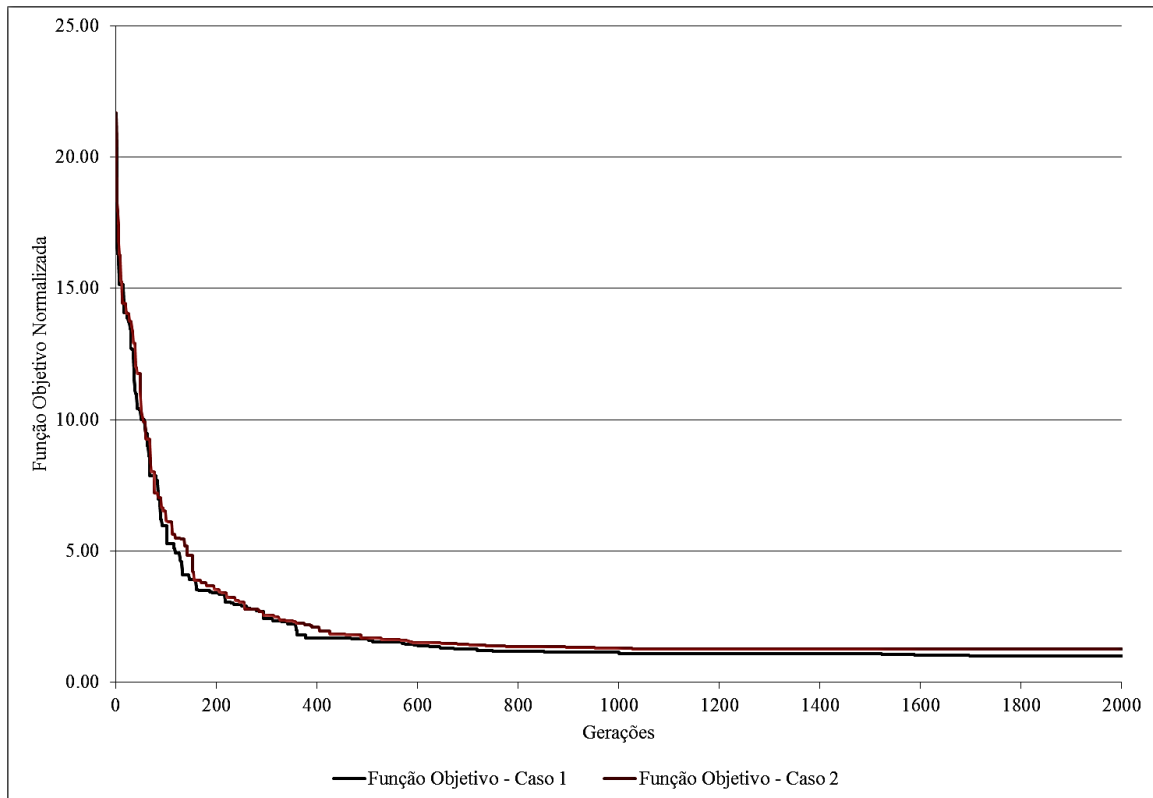


Figura 9.27. Curvas de convergência normalizadas para dois diferentes casos de otimização.

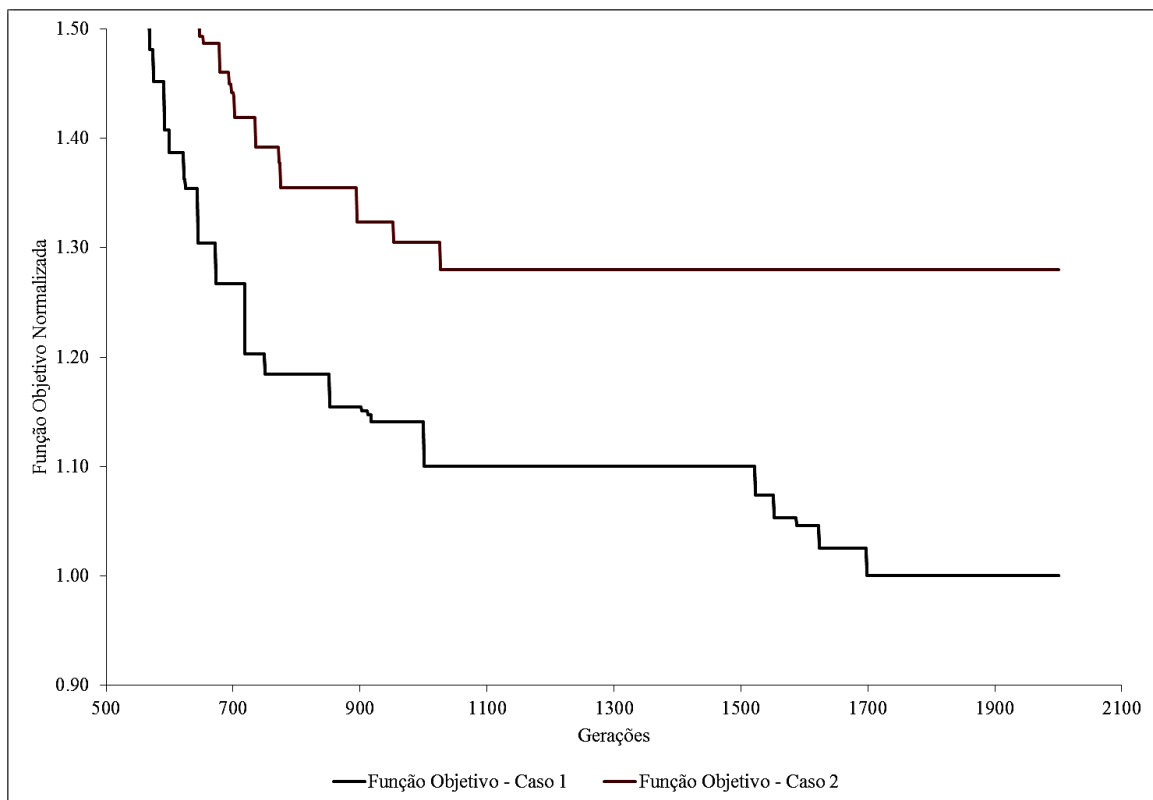


Figura 9.28. Detalhe curva de convergência da Figura 9.27 a partir da geração 500.

A utilização de uma lista com valores discretos para as variáveis de projeto é fundamental, pois permite obter a solução ótima dentro de um conjunto de soluções possíveis de ser fabricadas. Esta é uma vantagem a ser considerada frente aos algoritmos de solução contínua. Conforme citado por Haftka [Haftka e Gürdal, 1992], ajustar as variáveis contínuas para os valores discretos mais próximos disponíveis nem sempre é uma boa aproximação.

10 CONCLUSÃO

O objetivo geral deste trabalho, é a formulação de uma metodologia para solução do problema de otimização estrutural, com minimização de massa submetida a restrições de tensão e flambagem local. O objetivo do trabalho foi alcançado, pois a formulação proposta foi utilizada para solução de problemas clássicos de otimização. Os resultados apresentados no capítulo 0 são coerentes quando comparados com resultados da literatura.

A solução dos problemas de otimização paramétrica, topológica e de forma foi obtida através do método dos algoritmos genéticos, utilizando a técnica de penalização da função aptidão. Apesar de existirem métodos mais modernos que a penalização da função aptidão, os resultados obtidos neste trabalho são satisfatórios. A grande desvantagem, já conhecida do método da penalização, é a necessidade de ajuste de parâmetros arbitrados para cada problema. Para obtenção dos resultados deste estudo estabeleceu-se um sistemática, com base nas características específicas do problema estrutural, para estimativa das constantes de penalização. O coeficiente de penalização foi associado à massa estimada para o problema otimizado, essa sistemática foi estabelecida no exemplo 9.1, e utilizada com sucesso na solução dos demais problemas estudados.

O problema de otimização topológica foi solucionado atribuindo propriedades nulas aos elementos, ou seja, retirando diretamente as barras da estrutura. Essa abordagem para otimização topológica, evita que ocorram as singularidades de tensão e flambagem local associadas à redução gradativa das áreas. No entanto, outro problema se torna evidente: a singularidade da matriz de rigidez quando são atribuídas propriedades nulas a certos elementos. Na formulação proposta, esta singularidade foi tratada como uma restrição, assim cada indivíduo cuja matriz de rigidez é singular foi penalizado.

Os resultados obtidos na otimização estrutural do *flare* permitiram comprovar a eficiência da formulação proposta para otimização de problemas reais de engenharia. O problema estudado possui inúmeros casos de carregamento e restrições definidas por critérios de falha de tensões limites, flambagem das barras e fadiga. Os resultados mostram que as solicitações na estrutura otimizada são muito próximas aos critérios de falha adotados com restrição do problema. O que comprova que o algoritmo convergiu para uma solução ótima.

Cabe destacar que inclusão da restrição sobre os limites de fadiga, nas juntas tubulares do *flare*, adicionou complicações intransponíveis de resolver de forma precisa. Apesar de

simplificada a metodologia adotada para solução do *flare* fornece os requisitos mínimos estabelecidos pelas entidades regulamentadoras do segmento *offshore*.

11 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Implementação do algoritmo genético baseado no trabalho de Deb [Deb, 2001] a fim de eliminar a necessidade de ajuste manual dos parâmetros de penalização e acelerar a convergência do problema;
- Incluir nas restrições do problema, critérios de flambagem global não linear e restrições sobre frequências naturais e modos de vibração;
- Desenvolver um metodologia viável para avaliar com mais precisão as tensões de fadiga da estrutura.

12 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

API 2C, **Specification for Offshore Pedestal Mounted Cranes**, 2004.

ABNT NBR 8800, **Projeto e execução de estruturas de aço em edifício**, Associação Brasileira de Normas Técnicas - 2ª Ed., 2008.

ABS, **Guide for Buckling and Ultimate Strength Assessment for Offshore Structures**. Houston, 2004.

Achtziger, W., **Local stability of trusses in the context**, Structural Optimization 17, pp. 235-246, 1999a.

Achtziger, W., **Local stability of trusses in the context of topology optimization. Part II: a numerical approach**, Structural Optimization 17, pp. 247-258, 1999b.

AISC, **AISC Manual of Steel Construction: Allowable Stress Design**, 9th Ed., 1989.

AISC, **Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design**, 13rd Ed., 2009.

AISC, **AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION**, 13rd Ed., 2005.

Arora, S., J., **Introduction to Optimum Design**, New York : Elsevier Inc., 2012.

Batalha, A. F., **Análise de Fadiga de Estruturas Offshore tipo Topside**, RJ : COPPE/UFRJ, 2009.

Bathe, K. J., **Finite Element Procedures**, PRENTICE HALL Inc. , 1996.

Bendsoe, M. P., **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**, Springer Verlag, 1995.

Blagojević, B., Domazet Z., **Simplified Procedures for Fatigue Assessment of Ship Structures**, University of Split, 2000.

Carvalho, P. R., Grigoletti G., Tamagna, A., Iturrioz, I., **Curso Básico de Perfis de Aço Formados a Frio**, Porto Alegre : Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.

Cheng, G. D. e Guo, X., **ϵ -relaxed approach in structural topology optimization**, Structural Optimization 13, pp. 256-266, 1997.

Cheng, G., **Introduction to Structural Optimization: Theory, Methods and Solution**, Lecture Notes, Dalian University of Technology, 1992.

Cheng, G., **Some aspects on truss topology optimization**, Struct. Optim. 10, pp. 173–179, 1995.

Cheng, G., Jiang, Z., **Study of Topology optimization with stress constrains**, Eng. Opt. 20, pp. 129-148, 1992.

Chiofalo, G., Crupo, V., Guglielmino, E., Scibilia, L., **Critical Analysis of current codes on fatigue design of welded joints**, University of Messina, 2009.

Cook, R. D., **Concepts and Applications of Finite Element Analyses**, J. Wiley & Sons, New York, 1989.

Courant, R., **Variational Methods for Solutions of problems of Equilibrium and Vibration**, Bull. Am. Math. Soc. Vol. 49. pp 231-236, 1943.

Dantzing, G., **Linear Programming and Extensions**, Princeton University Press, Princeton, 1963.

Deb, K. , **An Efficient Constraint Handling Method for Genetic Algorithms**, Indian Institute of Technology Kanpur, 1998.

Ditlevsen, O., Madsen, H. O., **Structural Reliability Methods**, TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK, 2005.

Dorn, W. S., Gomory, R. E., Greenberg H. J., **Automatic Design of Optimal Structures**, J. Mec., Vol. 3, pp-25-52

DNV, **Buckling Strength Analysis of Bars and Frames, and Spherical Shells**, 2004.

DNV, **Fatigue Design of Offshore Structures**, 2010.

Dobbs, M. e Felton, L., **Optimization of Truss Geometry**, J. Struct. Div. ASCE 9595, pp. 2105-2118, 1968.

Dorigo, M., **Optimization, Learning and Natural Algorithms**, Politecnico di Milano-PhD thesis, 1992.

Dym, C. L., Shames, I. H., **Energy and Finite Element Methods in Structural Analyses**, McGraw-Hill, 1996.

Erbatur, F., Hasançebi, O., TÛTÛNCÛ, I., Kiliç, K., **Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms**, Computers and Structures 75, pp. 209-224, 2000.

Felippa, C. A., **A historical Outline of Matrix Structural Analyses: a Play in Three Acts**, Computers and Structures, vol. 79, pp. 1313-1324, 2001.

Fonseca, J., **Ferramentas de Simulação em Mecânica: Elementos Finitos**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

Fonseca, J., **Mecânica dos Sólidos para a Engenharia Mecânica**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

Fricke, W., **Fatigue Analyses of Welded Joints: State of Development**, Marine Structures, Elsevier, pp 185-200, 2002.

Fricke, W., **Recommended Hot Spot Analyses Procedure for Structural Details of FPSOs and Ships Based on Round-Robin FE Analyses**, Hamburg : Technical University Hamburg, 2003.

Geem, Z. W., **Harmony Search Algorithms for Structural Design Optimization**, 2009.

Goldberg, D. E., **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**, Alabama: Addison Wesley, 1989.

Grigoletti, G. C., **Otimização via algoritmos genéticos de perfis U formados a frio submetidos á compressão utilizando o método da resistência direta**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

Guerra, C., **Otimização Paramétrica de Estruturas Treliçadas por Algoritmos Genéticos**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

Guo, X. ,Cheng, G. e Yamazaki, K., **A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints**, Struct Multidisc Optim 22, pp. 364–372, 2001.

Guo, X., Cheng, G. D., **Extrapolation Approach for the solution of singular optima**, Structure Multidisc Optimization, vol 19., pp. 255-262, 2000.

Haftka, R., & Gurdal, Z., **Elements of Structural Optimization**, Kluwer Academic Publishers, 1992.

Hobbacher, A., **Recommendations for Fatigue Design of Welded Joints and Components**, International Institute of Welding, 2008.

Holland, J. H., **Adaptation in Natural and Artificial System**, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

Kasunick, M. C., **Comparison Analyses between ASD and LRFD methods of steel truss design**, Brigham Young University, 2000.

- Kennedy, J. , Eberhart, R., **Particle swarm optimization**, Neural Networks, 1995.
- Kirkpatrick, S., Gelatt Jr. C. D. e P., Vecchi M., **Optimization by Simulated Annealing**, Science 220 (4598): pp. 671–680, 1983.
- Kirsch, U.,**Optimal Topologies of Structures**, Appl. Mech. Rev., vol. 42, nº 8, pp. 223-238, 1989.
- Kirsh, U., **On Singular Topologies in Optimum Structural Design**, Structural Optimization, vol. 2, pp.133-142, 1990.
- Kripka, M., **Discrete Optimization of Trusses by Simulated Annealing**, Universidade de Passo Fundo, 2004.
- Le Riche, R., Haftka, R. T., **On global optimization articles in SMO**, Struct. Multidisc. Optimi.V46:pp. 627-629, 2012.
- Michalewicz, Z., **Genetic Algorithms, Numerical Optimization, and Constrains**, University of North Carolina, 1995.
- Michalewicz, Z., Schoenauer, M., **Evolutionary algorithms for constrained Parameter Optimization Problems**, Evolutionary Computation 4 - pp. 1-32, 1996.
- Michell, A. G. M., **The limits of economy of material in frame structures**, Philosophical Magazine, Vol. 8, pp. 589-597, 1904.
- Popov, E. P., **Introdução à Mecânica dos sólidos**, Edgard Blucher LTDA, 2001.
- Rajeev, S. , Krishnamoorthy, C. S., **Genetic Algorithm-based methodologies for design optimization of trusses**, Journal of Structural Engineering, ASCE 123 (3) , pp. 350-357, 1997.
- Rondal, J., Wurke, K. G., Dutta, D., Wardenier, J., Yeomans, N., **Structural Stability of Hollow Sections**, CIDECT, 1992.
- Rozvany, G. I. N., Birker T., **On Singular Topologies in Exact Layout Optimization**, Structural Optimization, Vol 8, pp.228-235, 1994.
- Schmit, L. A., **Structural Design by Systematic Synthesis**, Preceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, pp. 105-132, 1960.
- Silva, E. C. N., **Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos**, Universidade Federal de São Paulo - Escola Politécnica, 2003.

Silva, L. E., Silva, V. P., **Dimensionamento de Perfis Formados a Frio Conforme NBR 14762 e NBR 6355**, Instituto Brasileiro de Siderurgia, 2008.

Soh C. K., Yang , J., **Fuzzy controlled Genetic Algorithm Search for Shape Optimization**, Journal of Computing in Civil Engineering , 1996.

Sommer, R. C., **Otimização de Estruturas por Algoritmos Genéticos Submetidas a Restrição de Flexibilidade e Flambagem**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

Sonsino, F. C. M, Wiebesiek, J., **Evaluation of Multiaxial Loaded Welded Joints in the IIW-Recommendations for Fatigue Design**, MP Materials Testing 2011/03, pp. 125-135, 2011.

Souza, R. P., **Otimização de Treliças com Restrição de Falha Combinando Técnicas de Programação de Algoritmos Contínuos e Discretos**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

Stolpe, M. e Svanberg, K., **On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization**, Struct Multidisc Optim 21, pp. 140–151, 2001.

Stolpe, M., **On Models and Methods for Global Optimization of Structural Topology**, Department of Mathematics - Royal Institute of Technology - Stockholm, Sweden, 2003.

Sved, G. e Ginos, Z., **Structural Optimization under Multiple Loading**, Int. J. Sci., vol. 10, pp. 803-805, 1968.

Taylor, D., Barret, N., Lucano, G., **Some New Methods for Predicting Fatigue in Welded Joints**. International Journal of Fatigue, Elsevier, pp 509-518, 2001.

Thimoshenko, S. P., Gere, J. M., **Theory of Elastic Stability**, Mc Graw Hill, 1963.

Wall, M., **GAlib: A C++ library of genetic algorithm components**, Mechanical Engineering Department - Massachusetts Institute of Technology, 1996.

Wardenier, J., **Hollow Sections in Structural Applications**, Delf University of Tecnology, CIDECT, 2001.

Weibull, W., **A New Method for the Statistical Treatment of Fatigue Data**, Svenska Aeroplan, 1954.

Zhou, M., **Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints**, Structural Optimization 11,pp. 134-136, 1995.

Apêndice A - Barra bi-articulada submetida à carga compressiva

Este problema trata da solução de um caso clássico de flambagem em uma barra bi rotulada. O problema é resolvido considerando a possibilidade de variar a seção transversal da barra ao longo do comprimento. A barra é dividida em 20 segmentos que são agrupados em dez variáveis, de forma a produzir um resultado simétrico. A figura abaixo apresenta a forma como as variáveis de projetos são organizadas ao longo do comprimento da barra e as condições de contorno:

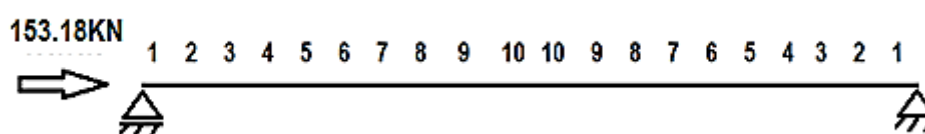


Figura A.1. Condições de contorno e numeração das variáveis de projeto.

São adotados módulo de elasticidade de 200GPa e comprimento da barra de 4 metros, a carga aplicada na extremidade superior da barra é de 153.18kN e densidade 7850 kg/m^3 . São consideradas as restrições sobre a tensão axial (225Mpa) em cada um dos elementos bem como sobre o coeficiente de flambagem global da barra (≥ 1).

O problema é resolvido considerando uma tabela com valores discretos para as variáveis de projeto. As seções são consideradas circulares de parede delgada. A tabela abaixo apresenta os valores possíveis para as variáveis de projeto:

Tabela A.1. Valores discretos das variáveis de projeto.

Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_e	58,0	60,0	62,0	64,0	66,0	68,0	70,0	72,0	74,0	76,0
D_i	50,0	52,0	54,0	56,0	58,0	60,0	62,0	64,0	66,0	69,0
Item	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D_e	78,0	80,0	82,0	84,0	86,0	88,0	90,0	92,0	94,0	96,0
D_i	71,0	73,0	75,0	77,0	79,0	81,0	83,0	85,0	87,0	89,0
Item	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D_e	98,0	100,0	102,0	104,0	106,0	108,0	110,0	112,0	114,0	116,0
D_i	91,4	93,4	95,4	97,4	99,4	101,4	103,4	105,4	107,4	109,4
Item	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
D_e	118,0	120,0	122,0	124,0	126,0	128,0	130,0	132,0	134,0	136,0
D_i	111,6	114,0	116,0	118,0	120,0	122,0	124,0	126,0	128,0	130,0

onde D_e é o diâmetro externo do tubo e D_i o diâmetro interno.

São adotados coeficiente de penalização das restrições ($C=3.0e+2$) e taxa de mutação de 5%.

O problema com seção constante ao longo do comprimento é resolvido pela fórmula de Euler. A menor seção que atende as duas restrições é a seção 23, da Tabela A.1, cuja área é de $A=1023.3\text{mm}^2$, neste caso a massa da barra é de 32.12 kg.

Após a otimização o problema convergiu para a massa de 26.94 kg, a geometria da barra é apresentada na tabela abaixo.



Figura A.2. Geometria final da barra após a otimização.

As seções transversais assumiram as seguintes seções da Tabela A.1: $V_1=2$, $V_2=2$, $V_3=10$, $V_4=31$, $V_5=21$, $V_6=21$, $V_7=31$, $V_8=32$, $V_9=33$, $V_{10}=33$.

Abaixo são apresentadas as figuras com as tensões axiais na barra bem como a deformação para o primeiro modo de flambagem:

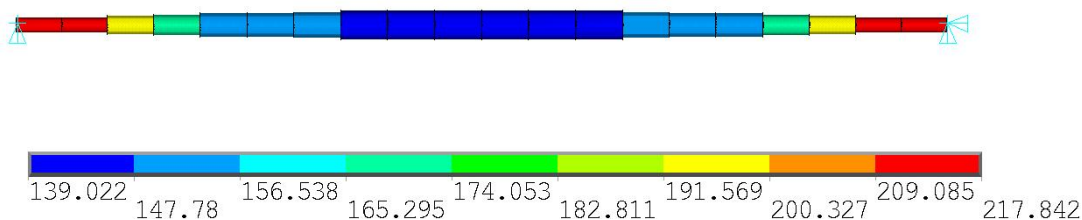


Figura A.3. Tensões axiais na barra após a otimização.



Figura A.4. Deformação do primeiro modo de flambagem da barra, sendo coeficiente de carga de flambagem 1.0.

Analisando o modo de flambagem conclui-se que as dimensões finais das seções da viga são coerentes com o resultado qualitativo esperado. As seções com maior diâmetro na região central da barra conferem maior rigidez ao elemento estrutural. As seções das extremidades tem

pouca influência na rigidez à flexão lateral apresentada no primeiro modo de flambagem, tanto que suas dimensões estão limitadas pelo critério de falha de tensão admissível.

Verifica-se que as dimensões do problema foram adequadas pelo algoritmo de solução de forma a atender os critérios de falha de maneira mais eficiente possível. Consequência disso aparece na massa final da barra que é 16.13% menor que a solução analítica através da fórmula de flambagem de Euler.

Apêndice B -Treliça de 18 barras com otimização dimensional e de forma

A treliça plana de 18 barras é um caso clássico de otimização de forma. Os resultados deste exemplo são comparados com os resultados obtidos por Soh [Soh e Yang , 1996], Rajeev [Rajeev e Krishnamoorthy, 1997] e Geem [Geem, 2009].

A figura abaixo apresenta a geometria do problema da treliça de 18 barras:

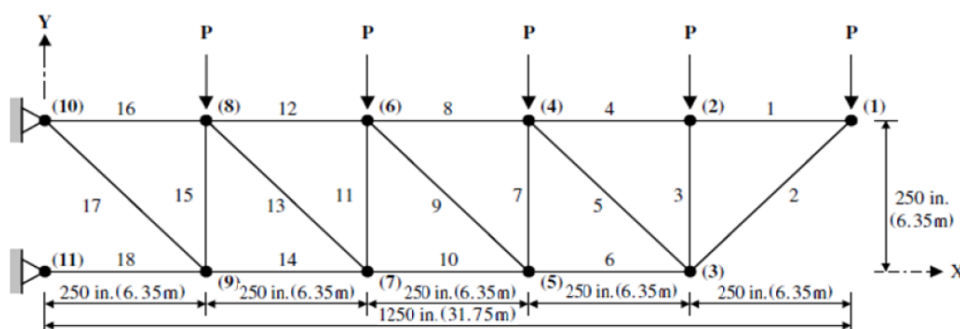


Figura B.1. Treliça de 18 barras.

São adotados módulo de elasticidade $E = 68.9 \text{ GPa}$ e $\rho = 2767 \text{ kg/m}^3$, a estrutura é sujeita a um único caso de carga nos nós superiores, sendo a carga de 88.96 kN em cada nó.

As barras são agrupadas em 4 variáveis de projeto paramétricas sendo: $A_1 = A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16}$, $A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$, $A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$ e $A_5 = A_7 = A_9 = A_{13} = A_{17}$. As variáveis de forma são as coordenadas nodais dos nós 3, 5, 7, e 9. As áreas são variáveis discretas com valor mínimo de 1250 mm^2 e valor máximo de 12500 mm^2 variando em intervalos de 156.25 mm^2 . As variáveis de forma também são consideradas discretas, sendo que cada nó pode se mover no plano (com relação a sua posição inicial) entre o valor mínimo de -6350 mm e $+6350 \text{ mm}$ em intervalos de 25 mm .

São adotadas restrições sobre os limites de tensões admissíveis $\sigma_{adm,i} = \pm 137.9$ Mpa e sobre o limite de flambagem elástica da barra. A tensão de flambagem é calculada conforme equação abaixo:

$$\sigma_{adm_B,i} = 4 \cdot \frac{EA}{L^2} \quad (A.1)$$

onde E é o módulo de elasticidade, A área da seção transversal e L o comprimento da barra.

Os parâmetros genéticos são: coeficiente de penalização das restrições ($C=3.0e+4$) e taxa de mutação de 5%.

A tabela a seguir apresenta o comparativo dos valores finais das variáveis de projeto para diversos autores:

Tabela B.1. Variáveis de projeto após a otimização, para diversos autores.

Variável	Soh e Yang	Rajeev e Krish.	Geem	Presente Trabalho
A ₁	8.122,6	8.064,5	8.159,0	7.096,8
A ₂	11.554,8	10.483,9	11.110,0	11.451,6
A ₃	3.548,4	5.161,3	3.982,0	3.387,1
A ₅	2.290,3	2.580,6	2.288,0	4.193,5
x ₃	23.108,9	22.654,3	22.938,0	23.200,0
y ₃	4.686,0	3.690,6	4.428,0	4.725,0
x ₅	16.263,6	15.509,2	16.010,0	16.500,0
y ₅	3.754,1	3.002,3	3.461,0	3.850,0
x ₇	10.414,0	9.789,2	10.213,0	10.675,0
y ₇	2.463,8	1.841,5	2.299,0	2.150,0
x ₉	5.102,9	4.683,8	4.960,0	5.200,0
y ₉	8.12,8	594,4	778,0	50,0
Massa (kg)	2.055,6	2.094,1	2.045,4	2.088,6

Comprando a massa obtida pela metodologia deste estudo (2088.6 kg) verifica se que é 1,6% maior que o resultado obtido por Soh e 2,1% maior que o valor encontrado por Geem. Já a massa encontrada por Rajeev é 2,6% maior que o presente trabalho.

Na tabela abaixo são apresentados os valores de tensão axial bem como a tensão limite de flambagem para cada uma das barras:

Tabela B.2. Tensões axiais e limite de flambagem.

Barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tensão Axial	66,0	-41,6	-44,2	82,9	49,6	-68,9	-69,5	133,9	-3,1
Limite de Flambagem	-66,0	41,6	44,2	-82,9	-49,6	68,9	69,5	-133,9	3,1
Barra	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Tensão Axial	-85,4	-26,8	137,9	-4,8	-90,2	-22,5	137,8	133,6	-116,5
Limite de Flambagem	85,4	26,8	-137,9	4,8	90,2	22,5	-137,8	-133,6	116,5

Os valores da tabela cima mostram que as restrições de tensão e de limite de flambagem não são violadas.

A figura abaixo apresenta a forma final da treliça bem como as dimensões das barras:

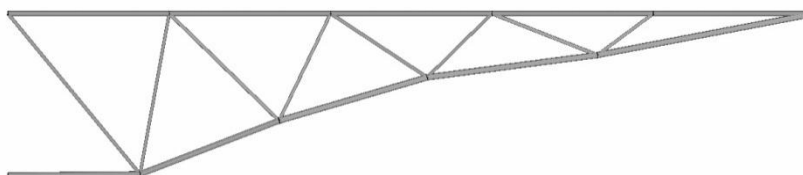


Figura B.12. Forma final da treliça de 18 barras.

Verificou-se neste problema a eficiência do algoritmo implementado na solução do problema de otimização dimensional e de forma. A solução encontrada é bastante próxima aos valores de diversas literaturas. As pequenas diferenças (1.6% e 2.1%) observadas no valor final da massa podem ser relacionadas à atribuição de valores discretos para as variáveis de forma. Os resultados da literatura foram obtidos através de variáveis contínuas.

A forma final da geometria também é coerente com os resultados encontrados na literatura.

Apêndice C -Fatores de concentração de tensão e limite de resistência a fadiga conforme recomendações DNV

1. Equação paramétrica do fator de concentração de tensões avaliado no capítulo 9.5.5

As equações utilizadas para estimativa do fator de concentração de tensões são apresentadas abaixo:

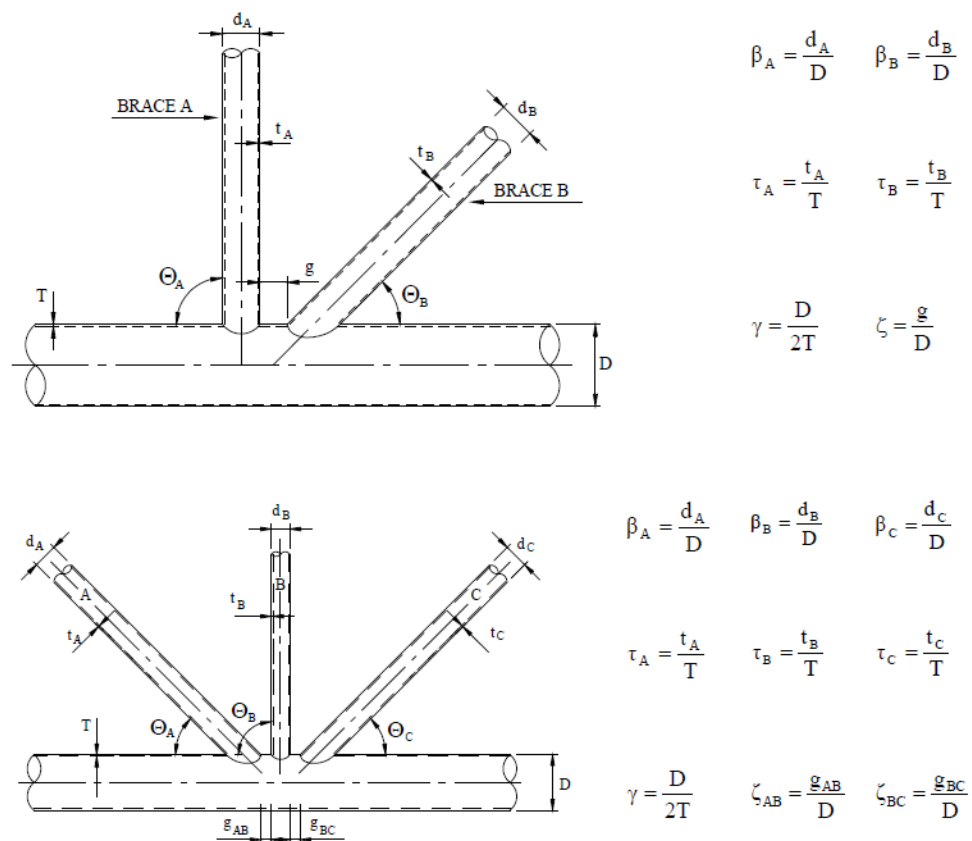


Figura C.1

Figura C.1. Definições geométricas de uma junta tubular.

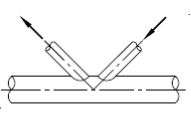
Table B-3 Stress Concentration Factors for Simple Tubular K Joints and Overlap K Joints			
Load type and fixity conditions	SCF equation	Eqn. no.	Short chord correction
Balanced axial load 	Chord: $\tau^{0.9} \gamma^{0.5} (0.67 - \beta^2 + 1.16 \beta) \sin \theta \left(\frac{\sin \theta_{\max}}{\sin \theta_{\min}} \right)^{0.30} \cdot \left(\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}} \right)^{0.30} (1.64 + 0.29 \beta^{-0.38} \text{ATAN}(8 \zeta))$	(20)	None
	Brace: $1 + (1.97 - 1.57 \beta^{0.25}) \tau^{-0.14} (\sin \theta)^{0.7} \cdot (\text{Eqn. (20)}) + \sin^{1.8}(\theta_{\max} + \theta_{\min}) \cdot (0.131 - 0.084 \text{ATAN}(14 \zeta + 4.2 \beta)) \cdot C \beta^{1.5} \gamma^{0.5} \tau^{-1.22}$	(21)	None
Where: C = 0 for gap joints C = 1 for the through brace C = 0.5 for the overlapping brace Note that τ , β , θ and the nominal stress relate to the brace under consideration ATAN is arctangent evaluated in radians			

Figura C.2. Equações utilizadas para o cálculo dos fatores de concentração de tensões.

2. Fatores de concentração de tensão para a junta do *flare* selecionada no capítulo 9.5.5

As condições geométricas da torre após a otimização não permitem a utilização das equações parametrizadas da norma DNV para o cálculo dos fatores de concentração de tensão.

A junta selecionada no capítulo 9.5.5 é modelada em elementos de casca para obtenção dos fatores de concentração de tensão. A figura abaixo a apresenta o modelo numérico da junta, com as tensões axiais aplicadas em cada uma das barras:

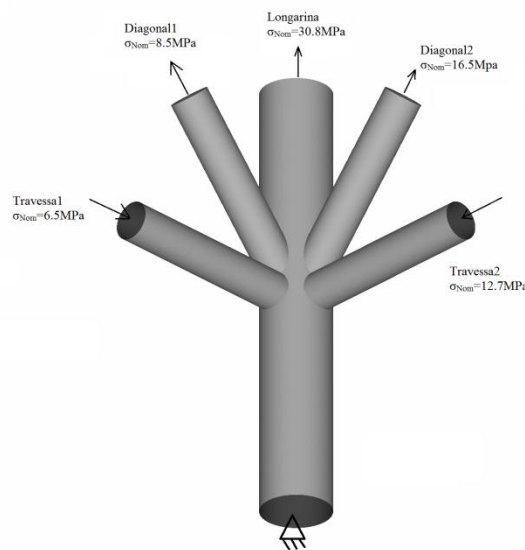


Figura C.3. Modelo estrutural da junta tubular.

As tensões axiais de cada barra são as mesmas apresentadas na Figura 9.26. Estas tensões caracterizam o caso de carregamento que resulta em tensões com maior magnitude nas barras.

A figura abaixo apresenta a tensão equivalente na junta:

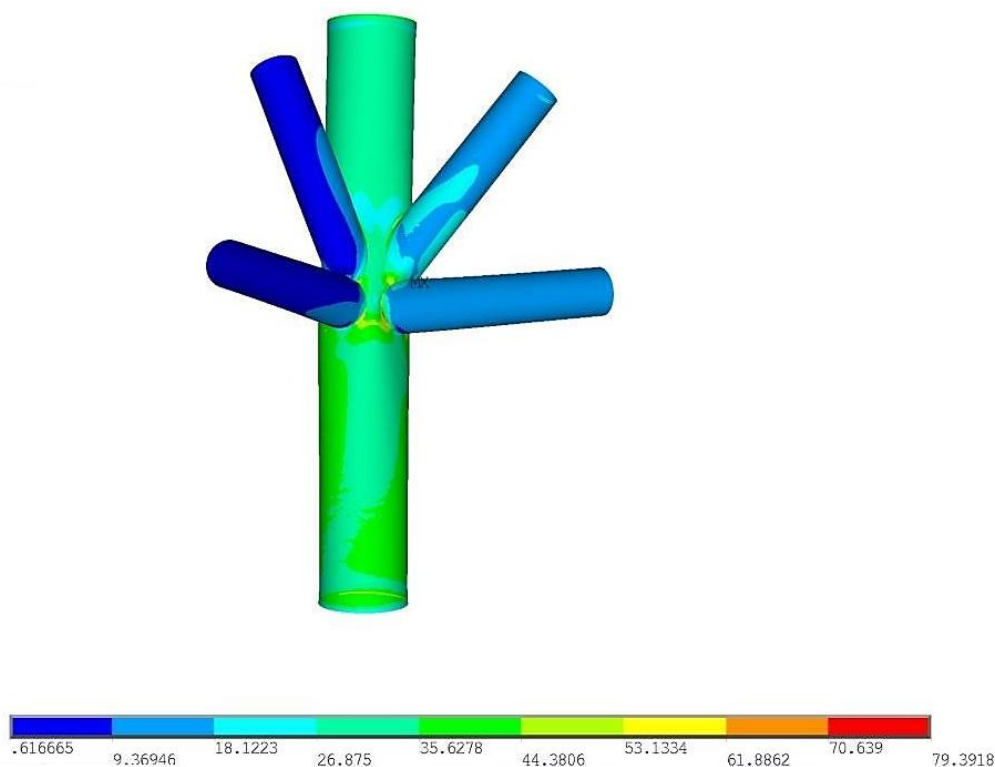


Figura C.4. Tensões na junta tubular.

Para o cálculo do fator de concentração, de tensões extraiu-se o valor máximo de tensão axial de cada barra. Os valores obtidos são apresentados na tabela abaixo:

Tabela C.1. Tensões axiais nas barras e fator de concentração de tensão.

	σ_{Nom}	σ_{FEA}	$\sigma_{\text{FEA}}/\sigma_{\text{Nom}}$
Coluna	30.8	62.08	2.0
Travessa1	6.5	27.43	4.2
Travessa2	12.7	43.79	3.4
Diagonal1	8.5	51.81	6.1
Diagonal2	16.5	79.26	4.8

Os valores de fator de concentração de tensão obtido na Tabela C.1 foram extraídos diretamente do modelo de elementos finitos, não foi realizada nenhuma técnica de extrapolação dos resultados na vizinhança da junta para obtenção da tensão “*hot spot*”. Assim os valores

obtidos são mais severos daqueles que ocorrem na realidade. No entanto, através da avaliação do limite de falha por fadiga do *flare* com os fatores de concentração de tensões atualizados verifica-se que a restrição de fadiga não é ativada.

3. Gráficos para determinação do limite de resistência a fadiga pela norma DNV

Abaixo são anexados os gráficos através dos quais foi obtido o valor de tensão admissível para falha por fadiga pela norma DNV (*Fatigue Design of Offshore Structures*, 2010):

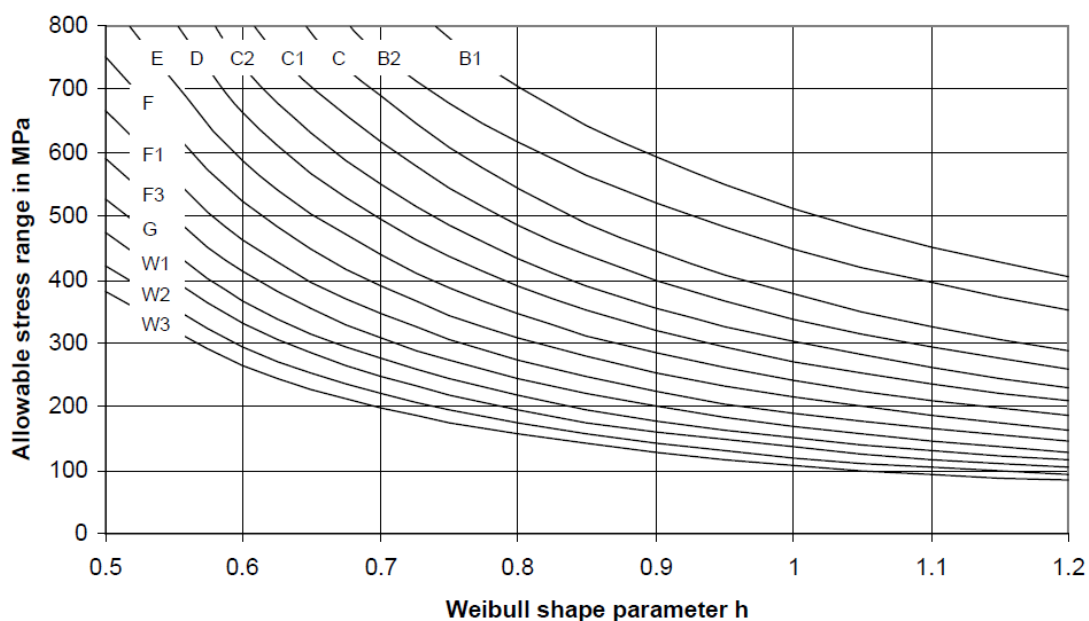


Figura C.5. Intervalo de tensões admissível em função do parâmetro h .

Table 5-8 Utilisation factors η as function of design life and design fatigue factor							
DFP	Design life in years						
	5	10	15	20	25	30	50
1	4.0	2.0	1.33	1.00	0.80	0.67	0.40
2	2.0	1.0	0.67	0.50	0.40	0.33	0.20
3	1.33	0.67	0.44	0.33	0.27	0.22	0.13
5	0.80	0.40	0.27	0.20	0.16	0.13	0.08
10	0.40	0.20	0.13	0.10	0.08	0.07	0.04

Figura C.6. Fator de utilização em função do fator de projeto de fadiga e da vida útil de projeto.

Table 5-5 Reduction factor on stress to correspond with utilisation factor η for C - W3 curves in air environment								
Fatigue damage utilisation η	Weibull shape parameter h							
	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20
0.10	0.497	0.511	0.526	0.540	0.552	0.563	0.573	0.582
0.20	0.609	0.620	0.632	0.642	0.652	0.661	0.670	0.677
0.22	0.627	0.638	0.648	0.659	0.668	0.677	0.685	0.692
0.27	0.661	0.676	0.686	0.695	0.703	0.711	0.719	0.725
0.30	0.688	0.697	0.706	0.715	0.723	0.730	0.737	0.743
0.33	0.708	0.717	0.725	0.733	0.741	0.748	0.754	0.760
0.40	0.751	0.758	0.765	0.772	0.779	0.785	0.790	0.795
0.50	0.805	0.810	0.816	0.821	0.826	0.831	0.835	0.839
0.60	0.852	0.856	0.860	0.864	0.868	0.871	0.875	0.878
0.67	0.882	0.885	0.888	0.891	0.894	0.897	0.900	0.902
0.70	0.894	0.897	0.900	0.902	0.905	0.908	0.910	0.912
0.80	0.932	0.934	0.936	0.938	0.939	0.941	0.942	0.944
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Figura C.7. Fator de redução das resistências em função do fator de utilização.