

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MÉTODOS DE DECOMPOSIÇÃO ADITIVA EM SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DA  
ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL E DA TEORIA DE PLACAS FINAS

POR

TALES DE VARGAS LISBÔA

TESE DE DOUTORADO

PORTO ALEGRE, FEVEREIRO DE 2014.

DECOMPOSIÇÕES ADITIVAS EM SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DA ELASTICIDADE  
TRIDIMENSIONAL E DA TEORIA DE PLACAS FINAS

por

Tales de Vargas Lisbôa

Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

Prof. Dr. Paulo Sollero

Prof. Dr. Virgínia Maria Rosito D'Avila Bessa

Prof. Dr. Rogério José Marczak

Coordenador do Promec

Porto Alegre, 21 de fevereiro de 2014.

*Aos meus pais, Reginaldo e Magda Roselaine,  
aos meus irmãos Tatiana e Caio  
a minha noiva Luciana  
e ao meu futuro sobrinho e afilhado Arthur.*

*“Quando tomamos consciência de nosso papel,  
mesmo o mais obscuro, só então somos felizes.  
Só então podemos viver em paz e morrer em paz,  
pois o que dá sentido à vida dá um sentido à morte.”*

*Antoine de Saint-Exupéry*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, inicialmente, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela possibilidade da bolsa de estudos durante todo o estágio de doutoramento, além do doutorado-sanduíche desenvolvido na cidade de Siegen, Alemanha. Não é preciso dizer que sem esse auxílio, esta proposta de tese não poderia ter sido concluída.

Agradecer o Prof. Dr. Chuanzeng Zhang pela oportunidade me dada ao desenvolver parte deste trabalho no exterior. A experiência adquirida lá foi de grande importância pessoal e técnica. Agradecer ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PROMEC-UFRGS) pela oportunidade de doutoramento dentro de um programa que está entre os melhores do Brasil. Aos professores do Grupo de Mecânica Aplicada (GMAp) em geral, pelo forte apoio aos alunos de iniciação científica, mestrado e doutorado. Em especial, aos professores Ignacio Iturrioz e Jun Fonseca. O primeiro pela alegria em ensinar e por ter sido o primeiro professor a me mostrar a beleza da pesquisa científica. O último pela rigidez no tratamento de estudos científicos, pelo esforço em desenvolver ao máximo o intelecto dos alunos do programa de pós-graduação e pelas ajudas precisas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu orientador, professor Rogério José “Rato” Marczak, meus agradecimentos especiais. Primeiro por ter me confiado um tema de tese de alta complexidade sem importar-se com o tempo que ele despenderia na sua orientação. Depois, pela preocupação com o desenvolvimento técnico, cultural e pessoal durante o desenvolvimento deste trabalho. Por último, pelas valiosas conversas que tivemos em sua sala, sobre praticamente tudo, propondo uma análise crítica sobre problemas científicos, políticos e outros “íticos”. Fica claro, dentro desse texto, a sua ajuda (e sobre ajuda) e orientação.

Agradeço fortemente aos meus colegas do GMAp e dos outros grupos de pesquisa do PROMEC. As conversas sobre tudo (e nada) trazem momentos de descontração, tão necessários para uma boa concentração no trabalho a ser desenvolvido. Fora os momentos de terças-feiras (ou quartas e/ou quintas) nos quais o futebol tirava um pouco da poeira sobre nossos corpos. Em especial, agradeço o aluno (e futuramente Doutor) Daniel de Leon e ao professor Felipe Stumpf. O último foi quem me indicou para a bolsa sanduíche na Alemanha. Agradeço, também, a três colegas que tive neste país: Zheng Hui, Xie Longtao e Weigang Zhan. Vocês realmente foram

sensacionais no meu recebimento dentro do grupo de pesquisa e na cidade. À secretária Meike Stricker, meus agradecimentos, pois ela me ajudou em todos os problemas que ocorreram nessa estadia em Siegen tornando-a mais confortável e agradável.

Ao grupo de bolsistas do DAAD – *Deutscher Akademischer Austauschdienst* ou Serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico (tradução livre) – que se criou na cidade de Köln motivado pelo curso de alemão, minhas sinceras congratulações. Felipe Bambirra, Virgínia Farias, Tiago Martins da Cunha, Ana Angélica Ponte, Rosyelle Corteletti e Jonas Madureira: vocês foram simplesmente magníficos.

Não é preciso dizer sobre o papel de meus familiares mais próximos durante esses quatro anos. Aos meus irmãos, Caio e Tatiana, que sempre me apoiaram e me deram força. Apesar da distância, suas presenças foram fundamentais. Ao meu irmão, agradeço a sua perseverança e determinação que tento, constantemente, aplicar em minha vida. A minha irmã, sua força de vontade e esforço que foram fundamentais, como exemplo, neste trabalho. Aos meus pais, seu carinho e preocupação. Suas ligações fora de hora apenas para saber como estava e sua ajuda psicológica, em momentos complicados, foram determinantes. Desculpo-me aqui, pelos períodos nos quais estive longe.

Por fim, e com certeza não menos importante, agradeço minha noiva Luciana Lamb. Sua disposição em me acompanhar para terras distantes e suportar o peso de ter um companheiro doutorando e bolsista (em suma: pobre e sem tempo) foram surpreendentes. Não tenho dúvidas que este trabalho não teria sido feito se tu não estivesses ao meu lado. Devido a todos os finais de semana, feriados, dias de sol, festas, etc., que não pude ir (e tu, sempre ao meu lado, me apoiando e me forçando, apesar de todas as dificuldades, a continuar) devido ao trabalho, dedico esta tese a ti. Muito obrigado por tudo.

## RESUMO

A presente tese tem por objetivo o desenvolvimento de metodologias para a decomposição de soluções fundamentais da elasticidade tridimensional e da teoria de placas finas por intermédio de soluções fundamentais do mesmo operador diferencial. A diferença entre as soluções fundamentais utilizadas na decomposição é a simetria do tensor constitutivo de cada uma dessas soluções, cujas propriedades elásticas são diretamente proporcionais aos coeficientes da(s) equação(ões) diferencial(ais). O objetivo dessa decomposição é evitar um efeito conhecido como degeneração matemática. Esse efeito cria singularidades não regulares nessas soluções quando considerado altas simetrias, tanto na teoria de placas finas quanto na elasticidade tridimensional. Dois tipos de decomposições – cinemática e constitutiva – são apresentados e discutidos. Devido a relações hiperdefinidas, comprova-se que a decomposição via critérios cinemáticos é impossível. Mostra-se a possibilidade da decomposição constitutiva, via duas diferentes abordagens. Suas propriedades e particularidades bem como outros resultados são discutidos no decorrer do texto e são comparados, quando possível, com a literatura disponível.

## **ABSTRACT**

### Methods on Additive Decompositions of Elastic Tridimensional and Thin Plates Theory Fundamental Solutions

The present thesis has as objective the development of a methodology for the decomposition of elastic tridimensional and thin plates fundamental solutions through fundamental solutions of the same differential operator. The difference between the fundamental solutions is the constitutive tensor symmetry of each solution, in which is directly proportional to the differential equation(s) coefficients. The objective of the decomposition is to avoid an effect known as mathematical degeneration. This effect creates non regular singularities in these solutions when high material symmetries are considered in the thin plate's theory as well in the tridimensional elasticity. Two types of decompositions – kinematics and constitutive – are presented and discussed. Due to hyper-defined relationships, it is proved that the decomposition by kinematics criteria is impossible. It is also shown the possibility of the constitutive decomposition, by two different approaches. Their properties and particularities as well other results are discussed through the text and are compared, when possible, with the available literature.



## ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
1.2	PROPOSTA E ANALOGIAS.....	16
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO E NOTAÇÕES.....	20
2	SIMETRIAS CONSTITUTIVAS PARA SISTEMAS TRIDIMENSIONAIS E DE PLACAS FINAS.....	22
2.1	DESCRIÇÃO DOS OITO SISTEMAS CRISTALINOS.....	31
2.1.1	SIMETRIA TRICLÍNICA.....	32
2.1.2	SIMETRIA MONOCLÍNICA.....	33
2.1.3	SIMETRIA ORTORRÔMBICA.....	37
2.1.4	SIMETRIA TETRAGONAL.....	38
2.1.5	SIMETRIA CÚBICA.....	40
2.1.6	SIMETRIA TRIGONAL.....	42
2.1.7	SIMETRIA HEXAGONAL (TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO).....	43
2.1.8	SIMETRIA ISOTRÓPICA.....	45
2.2	CONCLUSÃO.....	46
3	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.....	48
3.1	TRANSFORMADA DE FOURIER PARA DOMÍNIOS BI E TRIDIMENSIONAIS.....	48
3.2	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS FINAS.....	52
3.3	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL.....	62
3.4	CONCLUSÃO.....	64
4	DECOMPOSIÇÕES DO TENSOR CONSTITUTIVO.....	66
4.1	DECOMPOSIÇÕES INCONSISTENTES.....	67
4.2	DECOMPOSIÇÃO CONSISTENTE.....	70
4.3	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO CONSISTENTE.....	77
4.4	CONCLUSÃO.....	81
5	DECOMPOSIÇÃO ADITIVA CINEMÁTICA E CONSTITUTIVA.....	82
5.1	DECOMPOSIÇÃO CINEMÁTICA.....	83
5.2	DECOMPOSIÇÃO CONSTITUTIVA.....	91
5.2.1	ABORDAGEM DIRETA.....	91
5.2.2	DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN.....	97
5.2.3	DERIVADAS DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL FICTÍCIA.....	108
5.3	CONCLUSÃO.....	109
6	CONCLUSÃO.....	112
7	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....	116

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Arábicos

$a$	Constante da solução fundamental anisotrópica de placas finas; Constante qualquer;
$A_{ij}$	Adjugado do operador diferencial transformado da elasticidade tridimensional
$A$	Matriz não-nula
$B$	Matriz qualquer
$C_1, C_2, C_3$	Constantes da solução fundamental anisotrópica de placas finas
$C_{ij}, C$	Tensor constitutivo de segunda ordem
$C'_{ij}$	Tensor constitutivo de segunda ordem em uma nova configuração
$C_{ijkl}$	Tensor constitutivo de quarta ordem
$C'_{ijkl}$	Tensor constitutivo de quarta ordem em uma nova configuração
$\tilde{C}_{ij}, \tilde{C}$	Tensor constitutivo reduzido de segunda ordem
$\tilde{C}_{ijkl}$	Tensor constitutivo reduzido de quarta ordem
$C_{ij}^{voi}, C^{voi}$	Tensor de Voigt
$C_{ij}^{dil}, C^{dil}$	Tensor de Dilatação
$C_{deg}$	Constante que relaciona a razão entre rigidezes constitutivas em placas finas
$C_{11}^{iso}, C_{12}^{iso}$	Componentes elásticas isotrópicas
$C^{quartz}, C_{iso}^{quartz}, C_{res}^{quartz}$	Tensor constitutivo do quartzo e suas componentes isotrópicas e residuais
$C^{olivine}, C_{iso}^{olivine}, C_{res}^{olivine}$	Tensor constitutivo do olivina e suas componentes isotrópicas e residuais
$C^{EQ}$	Tensor constitutivo equivalente
$C^{(X)}$	Tensor constitutivo decomposto
$d_i$	Componente real das raízes da equação característica de placas finas
$D$	Determinante do operador diferencial transformado da elasticidade tridimensional
$D_{ij}, D$	Tensor de rigidez de placas finas; Matriz Qualquer;
$e_i$	Componente imaginária das raízes da equação característica de placas finas
$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$	Vetores canônicos
$E$	Módulo de Elasticidade de um material isotrópico
$E_{ij}, E$	Tensor de deformação infinitesimal de segunda ordem; Matriz Qualquer

$ELS$	Parte esquerda da equação
$f, \hat{f}$	Funções quaisquer e suas transformadas de Fourier
$f_i^{(X)}$	Função decomposta da solução fundamental de placas finas
$\mathbf{F}$	Matriz qualquer; Tensor residual da decomposição constitutiva
$g, \hat{g}$	Funções quaisquer e suas transformadas de Fourier
$g$	Carregamento externo
$g_i^{(X)}$	Função decomposta da solução fundamental de placas finas
$G$	Constante da solução fundamental anisotrópica de placas finas
$\mathbf{G}$	Matriz qualquer
$h$	Espessura da placa
$h_i$	Função decomposta da solução fundamental de placas finas
$H$	Constante da solução fundamental anisotrópica de placas finas
$i$	Número imaginário $\sqrt{-1}$ ; Índice
$\mathbf{I}$	Matriz Identidade
$j$	Índice
$k$	Termo Independente da solução fundamental isotrópica de placas finas; Índice
$L(\boldsymbol{\partial}_x), \mathbf{L}(\boldsymbol{\partial}_x), L_{ij}(\boldsymbol{\partial}_x)$	Operadores diferenciais no domínio real
$L(\boldsymbol{\zeta}), \mathbf{L}(\boldsymbol{\zeta}), L_{ij}(\boldsymbol{\zeta})$	Operadores diferenciais no domínio transformado
$L^{(X)}(\boldsymbol{\partial}_x), \mathbf{L}^{(X)}(\boldsymbol{\partial}_x), L_{ij}^{(X)}(\boldsymbol{\partial}_x)$	Operadores diferenciais decompostos no domínio real
$L^{(X)}(\boldsymbol{\zeta}), \mathbf{L}^{(X)}(\boldsymbol{\zeta}), L_{ij}^{(X)}(\boldsymbol{\zeta})$	Operadores diferenciais decompostos no domínio transformado
$L^{EQ}(\boldsymbol{\partial}_x), \mathbf{L}^{EQ}(\boldsymbol{\partial}_x), L_{ij}^{EQ}(\boldsymbol{\partial}_x)$	Operador diferencial equivalente no domínio real
$L^{EQ}(\boldsymbol{\zeta}), \mathbf{L}^{EQ}(\boldsymbol{\zeta}), L_{ij}^{EQ}(\boldsymbol{\zeta})$	Operador diferencial equivalente no domínio transformado
$m$	Número de constantes elásticas independentes; Índice
$\mathbf{m}$	Vetor qualquer
$\mathbf{M}, \mathbf{M}^{(X)}$	Matrizes de transformação do tensor constitutivo de quarta ordem
$\mathbf{M}^{\rightarrow iso}$	Matriz de projeção ao espaço isotrópico
$n$	Índice
$\mathbf{n}$	Vetor qualquer; Vetor normal ao contorno da placa
$N$	Número de soluções fundamentais ou tensores constitutivos decompostos
$N_{orm}^{iso}$	Norma de um matéria isotrópico
$o$	Índice

$p$	Variável arbitrária; Índice
$P_i$	Menores principais ( <i>principal minors</i> )
$Q_{ij}, \mathbf{Q}, Q_{ij}^{(X)}$	Tensor de Christoffel (ou tensor acústico); Tensor auxiliar do formalismo de Stroh na elasticidade tridimensional
$r$	Coordenada radial em um sistema coordenado polar
$R_{ij}, \mathbf{R}, R_{ij}^{(X)}$	Matriz de transformação do tensor constitutivo de segunda ordem; Tensor auxiliar do formalismo de Stroh na elasticidade tridimensional
$R^{(X)}$	Função da solução fundamental anisotrópica de placas finas
$s$	Índice
$S^{(X)}$	Função da solução fundamental anisotrópica de placas finas
$T_{ij}, T_{ij}^{(X)}$	Tensor Tensão de Cauchy de segunda ordem; Tensor auxiliar do formalismo de Stroh na elasticidade tridimensional
$u_3$	Deslocamento transversal de um problema de placas finas; Solução fundamental transversal do operador de placas finas
$\hat{u}_3$	Solução fundamental de placas finas no domínio transformado
$u_3^{(X)}$	Solução fundamental de placas finas decomposta
$u_3^{EQ}$	Solução fundamental de placas finas equivalente
$\hat{u}_3^{(X)}$	Solução fundamental de placas finas decomposta no domínio transformado
$\hat{u}_3^{EQ}$	Solução fundamental de placas finas equivalente no domínio transformado
$\bar{u}_3$	Prescrição do deslocamento transversal (Condição de Contorno)
$\mathbf{u}^R$	Solução fundamental da elasticidade tridimensional real
$\mathbf{u}^{EQ}$	Solução fundamental da elasticidade tridimensional equivalente no domínio real
$\hat{\mathbf{u}}^{EQ}$	Solução fundamental da elasticidade tridimensional equivalente no domínio transformado
$\mathbf{u}^{(X)}$	Solução fundamental da elasticidade tridimensional decomposta no domínio real
$\hat{\mathbf{u}}^{(X)}$	Solução fundamental da elasticidade tridimensional decomposta no domínio transformado
$U_{ij}, \mathbf{U}$	Tensor solução fundamental tridimensional
$\mathbf{U}^{EQ}$	Tensor solução fundamental equivalente no domínio real
$\hat{\mathbf{U}}^{EQ}$	Tensor solução fundamental equivalente no domínio transformado
$\mathbf{U}^{(X)}$	Tensor solução fundamental decomposta no domínio real
$\hat{\mathbf{U}}^{(X)}$	Tensor solução fundamental decomposta no domínio transformado
$\mathbf{V}_{BC}^{ort}$	Vetor que agrupa constantes elásticas ortorrômbicas
$x_1, x_2, x_3, \mathbf{x}$	Sistema coordenado cartesiano
$X$	Índice

$\mathbf{Y}$	Matriz contendo operadores diferenciais da elasticidade tridimensional transformada
$z$	Função no domínio complexo
$\mathbf{z}$	Vetor qualquer não-nulo

## Gregos

$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{33}$	Razões entre propriedades elásticas para obtenção da região de positividade
$\partial$	Operador diferencial
$\delta$	Função delta de Dirac
$\varepsilon_i, \boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformação infinitesimal de primeira ordem
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \boldsymbol{\zeta}$	Sistema coordenado cartesiano do domínio transformado
$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$	Vetores ortonormais
$\theta$	Coordenada angular do sistema polar no domínio real
$\mu_i$	Raízes complexas da equação característica de placas finas
$\nu$	Coefficiente de Poisson em um material isotrópico
$\rho$	Coordenada radial de um sistema coordenado polar no domínio transformado
$\sigma_i, \boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de Cauchy de primeira ordem
$\varphi$	Forma quadrática
$\phi$	Coordenada angular de um sistema coordenado polar no domínio transformado
$\psi$	Parâmetro arbitrário
$\Lambda$	Superfície média da placa fina
$\Gamma_\Lambda$	Contorno da superfície média da placa fina
$\Gamma_\Omega$	Contorno do domínio tridimensional da placa fina
$\Omega$	Domínio tridimensional da placa fina

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Hierarquia das classes simétricas constitutivas com seus planos de simetria e a quantidade de planos suficientes para sua definição (Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001) .....	8
Figura 1.2 – Representação de um sistema massa-mola com: (a) Molas em série e (b) Molas em paralelo.....	18
Figura 1.3 – Decomposições Cinemática, Constitutiva ou Mista em função da analogia apresentada.....	19
Figura 2.1 – Forma geométrica das células unitárias das sete simetrias e relações angulares e de tamanho de aresta: (a) Triclínico (b) Monoclínico (c) Ortorrômbico (d) Trigonal (e) Tetragonal (f) Hexagonal (g) Cúbica .....	22
Figura 2.2 – Planos simétricos para as simetrias: (a) Triclínica (b) Monoclínica (c) Ortorrômbica (d) Tetragonal (e) Cúbica (f) Trigonal (g) Hexagonal (Transversal Isotrópica) (h) Isotrópica ....	32
Figura 3.1 - Domínio de uma Placa Fina .....	53
Figura 4.1 – Região de positividade da equação (4.19) (interna a superfície).....	75

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 – Classes Simétricas.....	23
Tabela 2.2 – Relações entre os tensores do presente trabalho com aqueles encontrados em Marczak & Denda, 2010 bem como algumas propriedades das simetrias. ....	47

## 1 INTRODUÇÃO

O termo “solução fundamental” – “*Grundlösung*” – foi cunhado por Courant e Hilbert no livro “*Methoden der Mathematischen Physik*”<sup>1</sup>, de 1924 (Kythe, 1996). A base de toda a construção teórica de soluções fundamentais, contudo, foi desenvolvida pelo pesquisador George Green, que, em 1828, apresentou três identidades que transformam integrais de domínio (tridimensional) em integrais de contorno (bidimensional) (Cheng & Cheng, 2005). A última, terceira, é hoje utilizada para resolver problemas potenciais, pois utiliza como função teste a solução fundamental do operador laplaciano. A contrapartida para a elasticidade dessa identidade de Green foi desenvolvida por Volterra, em 1907, e Somigliana, em 1885 (Cheng & Cheng, 2005). A definição matemática moderna de solução fundamental é apresentada somente com o desenvolvimento da teoria de funções generalizadas<sup>2</sup>, na qual a função delta de Dirac tem seu tratamento matemático definido e desempenha um papel importante. Diversos outros pesquisadores, como Maxwell e Fourier, encontraram relações matemáticas que têm comportamento equivalente à função delta de Dirac em seus estudos (Kythe, 1996; Marczak & Denda, 2010). Courant e Hilbert, Hadamard e Zeilon descrevem as propriedades de soluções fundamentais e da mesma maneira que Maxwell e Fourier, ainda não utilizavam a função delta de Dirac. Eles demonstraram que uma solução fundamental<sup>3</sup> é dada como a solução de um operador diferencial em um domínio não fechado – infinito ou semi-infinito – quando submetido

---

<sup>1</sup> Métodos de Física Matemática (tradução livre).

<sup>2</sup> Monografia produzida por L. Schwartz, em 1950.

<sup>3</sup> É importante pontuar as diferenças entre soluções fundamentais e funções de Green, muitas vezes, e erroneamente, consideradas iguais. O diferencial entre ambas as soluções é dado pelas condições de contorno do problema. Nas primeiras, essas condições de contorno são dadas pelas condições de radiação de Sommerfeld, que são homogêneas no infinito. Para as últimas, elas são condições de contorno essenciais (de Dirichlet ou primeiro tipo), naturais (de Neumann ou de segundo tipo), ou uma relação linear entre essas duas (de Robin ou de terceiro tipo). Nota-se, por pressuposto que, em soluções fundamentais, o domínio é infinito ou semi-infinito. Já em funções de Green, este é finito.



a uma excitação infinitesimal neste domínio. Esta última (excitação infinitesimal), dependendo do comportamento que o operador diferencial descreve, pode ser uma força pontual/deslocamento prescrito – ou carregamentos em linha, etc. – aplicado ao domínio, ou uma carga elétrica, ou mesmo uma fonte térmica. Na concepção da carga infinitesimal – que, nas palavras de Maxwell, são “pequenos corpos cujas dimensões são insignificantes perto das distâncias principais envolvidas” (Kythe, 1996) – é que a função delta de Dirac desempenha seu papel no cálculo desse tipo de solução, pois descreve precisamente esse efeito em um ponto de vista físico-matemático.

Com o desenvolvimento de metodologias para a solução de equações diferenciais e integrais, dois trabalhos foram embrionários de métodos numéricos empregados atualmente. Walter Ritz, em 1908, desenvolve um método que propõe o uso de funções teste e o cálculo variacional para achar soluções aproximadas por intermédio de integrações produzidas em subdomínios. Anos mais tarde, Erich Trefftz publica, em 1923, um método que seria a contrapartida do método de Ritz para integrações no contorno do domínio. Utilizando a ideia de Ritz<sup>4</sup> de funções teste e forçando-as a obedecer às equações governantes e não necessariamente às condições de contorno, Trefftz chegou a equações que são necessárias integrações no contorno do domínio apenas. Ambos os métodos, ao considerarmos a estratégia para a solução do problema, assemelham-se com metodologias numéricas tais quais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), com o método de Ritz, e o Método dos Elementos de Contorno (MEC), com o método de Trefftz.

Mesmo após o advento do computador, que facilitou o desenvolvimento e eficiência desses métodos numéricos, soluções fundamentais são necessárias, pois têm papel essencial em métodos como o MEC. Nele, por intermédio da identidade de Green, toda influência do domínio é inserida no contorno, sendo então necessário apenas a discretização deste. Devido a essa propriedade, a malha de elementos tem uma dimensão a menos que o problema a ser resolvido<sup>5</sup> e, conseqüentemente, o número de elementos e nós no MEC é significativamente menor. No entanto, paga-se um preço pela solução do problema no contorno apenas: para cada ponto de interesse dentro do domínio, é necessária a sua integração. Outro ponto interessante, derivado do

---

<sup>4</sup> O artigo é intitulado como “Contrapartida ao Método de Ritz” (tradução livre) (Cheng & Cheng, 2005).

<sup>5</sup> Ou seja, em um problema tridimensional, a discretização é bidimensional (elementos planos ou de casca, para contornos curvos). Já para contornos bidimensionais, no caso de teorias como a de placas, utilizam-se elementos de linha ou elementos curvos. Em casos unidimensionais – vigas e barras –, usam-se elementos de ponto.

uso de soluções fundamentais na sua metodologia, é a possibilidade de análise de domínios infinitos e semi-infinitos sem a inserção de efeitos de borda. Um exemplo simples do uso dessa propriedade é o estudo de propagação de ondas em terremotos (Chaillat, Bonnet, & Semblat, 2009). É relevante, também, a obtenção da resposta das trações na mesma ordem de interpolação que os deslocamentos. Por este mesmo motivo, pode-se aplicar, além de condições de contorno essenciais que, no caso da elasticidade, são deslocamentos prescritos, condições de contorno naturais, ex. forças de superfície prescritas (trações).

Por ser um método matematicamente mais elegante, ele é mais complexo. Encontram-se, durante o processo de seu desenvolvimento, integrais singulares e hipersingulares que são divergentes quando utilizados métodos usuais de integração. Além disso, as matrizes na análise numérica são populosas e nem sempre simétricas, eliminando a possibilidade de uso de metodologias numéricas para matrizes simétricas e esparsas. Outro ponto negativo do MEC é o tratamento de não-linearidades. Como esses efeitos, em sua grande parte, são de domínio e como um dos princípios do MEC é a solução das equações diferenciais no contorno, eles devem ser inseridos neste, via identidade de Green. Nota-se que, por ser dependente dos passos de integração, a cada passo de análise essas integrações devem ser produzidas. Contudo, essas integrações são originárias de células que dividem o domínio não aumentando a malha no contorno.

Apesar dos prós e contras, a quantidade de trabalhos que discursam e que se utilizam do MEC têm crescido (Cheng & Cheng, 2005). Ele ainda permanece como um método de nicho, no qual uso está limitado a problemas que outros métodos não podem ser usados ou falham<sup>6</sup>. Entre os motivos, podem ser listadas a falta de conhecimento, em relação a esta metodologia, fora da comunidade acadêmica e a pouca aplicação comercial do método.

Diversas propriedades do MEC decorrem do uso de soluções fundamentais no processo numérico. Todavia, a obtenção dessas soluções pode ser de extrema complexidade, dependendo da forma do operador diferencial. Diversas maneiras para adquiri-las estão na literatura: aplicação da transformada de Fourier (Shiah, Tan, & Wang, 2012); utilização de tensores

---

<sup>6</sup> Fora o exemplo anteriormente mencionado, o MEC é atrativo na análise de descontinuidades geométricas. Este é um caso clássico no qual o MEC obtém respostas bastante precisas, com malhas pouco refinadas e sem a utilização de elementos específicos para trincas. Sabe-se, contudo, da necessidade de conhecimento da segunda derivada da solução fundamental (Buroni, Ortiz, & Saez, 2010).

auxiliares – tensores de Barnett-Lothe, na elasticidade – (Nakamura & Tanuma, 1997; Liou & Sung, 2007) para facilitar sua obtenção; integração direta das equações, etc.

Muitas soluções fundamentais não caracterizam totalmente o “espectro de soluções” de um problema específico. Denota-se “espectro de soluções” todas as soluções fundamentais de um dado operador diferencial, dentro das possibilidades de variação dos coeficientes. Essas soluções podem ter singularidades (fora as já conhecidas) que dependem, entre outros fatores, de relações entre esses coeficientes. Na elasticidade, esses coeficientes são proporcionais às combinações de propriedades constitutivas<sup>7</sup>. Elas dependem diretamente da simetria cristalina do material, que influenciam fortemente na maneira como o material deforma bem como no formato dos fluxos de forças, ou tensões, quando um dado sólido é submetido a forças/restrições externas quaisquer. Essas simetrias, matematicamente, criam situações interessantes para o estudo científico. Como avaliado neste e nos próximos capítulos, elas são divididas em grupos que se diferenciam pelo número e posição de planos simétricos. Ocorre que singularidades aparecem nas soluções fundamentais, dependendo da simetria cristalina e/ou de relações internas entre as propriedades constitutivas<sup>8</sup>. Essas singularidades são chamadas de degeneração matemática e estão intrinsicamente ligadas às equações características dos operadores diferenciais e a multiplicidade de suas raízes. Devido às possíveis singularidades geradas por essa relação entre as raízes, podem existir soluções fundamentais diferentes para um mesmo operador diferencial, que se distinguem em função disso. Ou seja, existem soluções fundamentais que são utilizadas em materiais de simetria mais baixa, como ortorrômbicos ou monoclinicos, que não podem ser aplicadas a materiais isotrópicos ou transversalmente isotrópicos, considerados de alta simetria, em razão da existência da multiplicidade de raízes da equação característica de operadores diferenciais quando esses materiais compõem o domínio. Ainda existem situações nas quais mesmo simetrias cristalinas que, devido à baixa quantidade de planos simétricos, não degenerariam matematicamente o fazem, ao verificar as relações internas entre as propriedades constitutivas. Basicamente, a degeneração matemática se apresenta como uma relação de subtração entre as raízes da equação característica no denominador da solução fundamental. Havendo multiplicidade dessas raízes, tem-se uma divisão por zero (ou seja, uma singularidade).

---

<sup>7</sup> E geométricas do componente em análise, para operadores diferenciais de algumas teorias elásticas como a teoria de placas (finas ou semi-espessas) e vigas.

<sup>8</sup> Também podem ocorrer singularidades em função das coordenadas espaciais adotadas.

Um operador diferencial cuja solução fundamental não pode ser usada para materiais de simetria mais alta é o da teoria de placas finas no qual a solução pode ser encontrada no trabalho de Shi & Bezine, 1988<sup>9</sup>. Ela é utilizada para materiais de simetria mais baixa, por exemplo, triclinicos e ortorrômbicos. No entanto, ela não se reduz à solução fundamental do operador bi harmônico, no qual descreve o comportamento de placas isotrópicas e transversalmente isotrópicas (Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002). No artigo de Shi & Bezine, 1988, apresenta-se uma segunda solução fundamental, para casos específicos de degeneração em materiais de baixa simetria, devido ao fato de que, para este tipo de simetria, ela tem forma indeterminada. Ou seja, dependendo do tipo de simetria do material, usam-se a solução do operador bi harmônico, a solução do operador anisotrópico ou a solução para um material de baixa simetria que obedece a uma relação naquele trabalho especificada. Contudo, para materiais nos quais existe uma pequena diferença na própria simetria – algo como uma pequena perturbação em um material isotrópico – qual solução? Basicamente, é esta metodologia que é usada para a análise de materiais de alta simetria, com a solução para placas anisotrópica (Shi e Bezini, por exemplo). Aplica-se, então, uma pequena perturbação no material isotrópico e utiliza-se esse material na solução fundamental anisotrópica de Shi e Bezini (Neto, 2009). Entretanto, essa estratégia falha em exatidão na solução fundamental (Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002).

A degeneração matemática não aparece apenas na solução fundamental de placas finas. Um efeito semelhante ocorre com a solução fundamental da elasticidade tridimensional e plana. Ao se analisar o desenvolvimento delas pelo formalismo de Stroh, as soluções de problemas planos são obtidas por intermédio da raiz do tensor de Christoffel (Ting, 1996). Entretanto, uma das restrições do formalismo é que as raízes desse tensor sejam diferentes<sup>10</sup>. Dependendo da simetria do tensor constitutivo, essas raízes podem ser idênticas. Para esses casos são necessários procedimentos algébricos para contornar esse problema. Mesmo com a extensão do formalismo de Stroh para outros operadores lineares, como tridimensional (Ting, 1996; Buroni, Ortiz, & Saez, 2010; Távora, Ortiz, Mantič, & París, 2008) ou placas finas (Cheng & Reddy, 2002; Cheng & Reddy, 2003; Hwu, 2003), essa restrição não desaparece. Sendo assim, têm-se soluções fundamentais que se diferenciam em função da simetria constitutiva do domínio ou mais

---

<sup>9</sup> Percebe-se que essa solução fundamental de placas finas anisotrópica não é a única que degenera ao se utilizar um tensor constitutivo de alta simetria. Todas as soluções de placas finas devem ter raízes da equação característica distintas (LaMattina, Klang, & Eischen, 1998).

<sup>10</sup> Ou que, sendo os autovalores da matriz fundamental da elasticidade iguais, que seus autovetores sejam diferentes.

diretamente, se diferenciam pela multiplicidade das suas raízes na equação característica. Para os casos tridimensionais, só são conhecidas as soluções fundamentais isotrópicas (Ting, 1996) e transversalmente isotrópicas (Wang, 1997; Nakamura & Tanuma, 1997; Távora, Ortiz, Mantič, & París, 2008), na sua forma analítica fechada<sup>11</sup>. Para os outros casos de simetria, apenas soluções semi-analíticas ou numéricas são possíveis (soluções abertas). Pontua-se que, mesmo em soluções fundamentais derivadas por métodos numéricos, os efeitos de degeneração são encontrados (Shiah, Tan, & Wang, 2012).

É de interesse científico, conseqüentemente, a procura e desenvolvimento de soluções fundamentais, que englobem todas as simetrias. Sabe-se, contudo, da dificuldade/impossibilidade de obtenção de uma única solução fundamental para um dado operador diferencial que descreva o comportamento elástico de um sólido que contemple todas as possíveis simetrias constitutivas. Este trabalho pretende, então, utilizar as soluções fundamentais existentes na literatura. Por intermédio de uma decomposição aditiva, ou seja, uma superposição, que pode se dar tanto na parte constitutiva quanto na parte cinemática, almeja-se contornar o problema da degeneração matemática. Ou seja, objetiva-se decompor uma solução fundamental inicialmente indeterminada em soluções que não degeneram. Além disso, pode-se, com a decomposição da solução, forçar a degeneração em uma das soluções conhecidas fazendo com que as soluções resultantes da decomposição não degenerem. Essa ideia provém do trabalho de Marczak & Denda, 2010, e ilustra uma situação interessante. Sabe-se que, matematicamente (Tu, 1968; Browaeys & Chevrot, 2004), é possível decompor um tensor constitutivo de baixa simetria – p.ex. ortorrômbico – em uma soma de tensores de simetria mais alta – p.ex. isotrópico, transversalmente isotrópico, etc. Pode-se, além disso, superpor um operador não-linear e obter sua resposta via sistema recursivo (Adomian, 1994). Portanto, um incremento nessas ideias, seria a aplicação dessas decomposições do tensor constitutivo em soluções fundamentais e analisar qual o seu efeito nessas soluções. Um ponto muito interessante colocado no trabalho de Marczak & Denda, 2010 é a possibilidade de existir uma “semente” de solução isotrópica dentro de soluções de redes cristalinas mais complexas. Complementando: é possível que uma solução fundamental seja uma soma finita de soluções fundamentais/funções quaisquer nas quais cada

---

<sup>11</sup> Conota-se solução analítica fechada uma “expressão de forma fechada” (*closed-form expression*). Neste texto, essas funções são expressões que contém um número finito de funções (somatórios infinitos não podem ser expressos de forma fechada) e apenas operações elementares (apenas as quatro operações matemáticas mais básicas). Fica claro que soluções fundamentais podem ser analíticas aproximadas (Shiah, Tan, & Wang, 2012).

uma delas é a solução do operador diferencial em sua específica simetria? Será que o comportamento elástico linear de um sólido anisotrópico pode ser definido pela soma de comportamentos elásticos lineares de sólidos cujo material é definido tendo simetrias mais altas – como, por exemplo, isotrópico ou hexagonal? O objetivo deste trabalho é responder essas perguntas, sendo o seu objeto de estudo os operadores de placas finas e o operador da elasticidade tridimensional.

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O trabalho proposto está alicerçado em duas áreas científicas: Simetrias Constitutivas e Soluções Fundamentais. Dentro de cada uma dessas áreas, objetiva-se o estudo de simetrias constitutivas, relações dessas simetrias com soluções fundamentais e de decomposição aditiva do tensor constitutivo e soluções fundamentais de placas finas e elasticidade tridimensional.

Smith & Rivlin, 1958, investigam as restrições impostas à função energia de deformação pelas simetrias cristalinas. Inicialmente, os autores fazem considerações relativas ao campo de deslocamentos (hipótese dos pequenos deslocamentos) e observam que a função energia de deformação pode ser descrita com termos de primeira e segunda ordem dos gradientes desde campo. Ao considerar o material livre de tensão em seu estado indeformado, mostrou-se que a função energia de deformação é uma expressão quadrática – em função desses gradientes – e homogênea. Retratando a função energia de deformação como um polinômio em relação aos componentes do tensor-deformação de Green, as imposições a esta função com relação à simetria cristalina podem ser avaliadas por meio da determinação da base polinomial invariante. Com o uso consistente da teoria dos invariantes, os autores descrevem a base polinomial para cada uma das 32 classes cristalinas. Na construção dessas bases, os autores utilizam seis conjuntos de transformação. Essas transformações, aplicações no tensor constitutivo e notações comuns às simetrias constitutivas estão apresentadas no Capítulo 2.

Utilizando os conceitos apresentados por Smith & Rivlin, 1958, o pesquisador Tu, 1968, desenvolve uma decomposição dos tensores constitutivos de segunda e quarta ordem e dos tensores de flexibilidade de segunda e quarta ordem. Ele desenvolve cinco hierarquias de bases tensoriais ortonormais que abrangem as constantes elásticas dos tensores de segunda ordem nos sistemas cristalinos. O autor não considera a classe cristalina triclínica. As hierarquias têm relação direta com os planos simétricos das simetrias cristalinas e os grupos de simetria

(Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001). A simetria final, ou o tensor a ser decomposto em outras simetrias, pertence ao grupo criado pela intersecção dos grupos de simetria utilizados na decomposição. Apesar disso não ter sido explicitamente descrito, algumas provas dessa necessidade estão descritas no capítulo 4 desta tese. Os grupos simétricos são apresentados no trabalho de Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001.

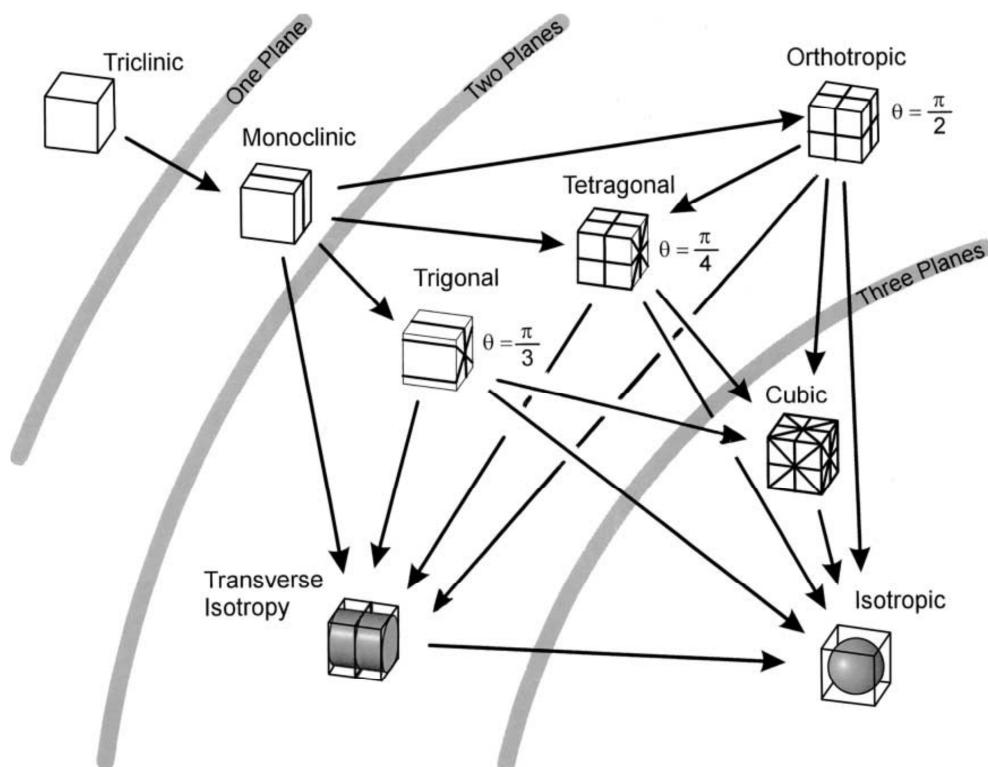


Figura 1.1 – Hierarquia das classes simétricas constitutivas com seus planos de simetria e a quantidade de planos suficientes para sua definição (Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001)

Diferentemente de muitos trabalhos que obtêm apenas o tensor isotrópico mais próximo, na metodologia apresentada por Tu, 1968, desenvolve-se uma decomposição na qual se alcança diversas simetrias cristalinas. Nas hierarquias apresentadas pelo autor, pode-se decompor um material monoclinico – com plano de simetria coincidente ao plano  $x_3$  – em uma soma de tensores com simetria isotrópica, hexagonal, tetragonal, ortotrópica e monoclinica. A Figura 1.1 descreve oito grupos simétricos com seus planos de simetria. Nota-se, por meio das setas, a decomposição de um material monoclinico deve manter a simetria original e, na decomposição, adicionam-se outros planos de reflexão. Ele – o tensor monoclinico – apesar de não constar no trabalho de Tu, 1968, poderia ser decomposto como uma soma entre um tensor de simetria

monoclínica, trigonal, cúbico e isotrópico, no qual o tensor cúbico poderia não ser considerado. Neste caso, além disso, vê-se que a mesma decomposição pode ser produzida por uma soma entre tensores de simetria trigonal e tetragonal, no qual, a intersecção dos grupos de simetria utilizada na decomposição coincide com o grupo de simetria monoclínica. Pontua-se, no entanto, que uma nova base tensorial ortogonal deve, então, ser desenvolvida para a correta decomposição constitutiva. Entretanto, como visto neste trabalho e no trabalho de Browaeys & Chevrot, 2004, que será abordado mais a frente, os tensores decompostos não retêm todas as características físico-matemáticas que são necessárias para a correta definição de um tensor constitutivo. Como será apresentado no capítulo 4 e de acordo com o trabalho de Browaeys & Chevrot, 2004, as resultantes decompostas são matrizes que tem o formato das simetrias constitutivas apenas. Elas não são positivo-definidas, parâmetro básico para um tensor constitutivo descrever o comportamento de um material real.

A Figura 1.1 apresenta, além da hierarquia entre as classes simétricas (por intermédio das setas), a quantidade de planos suficientes para sua definição. Visto de cima para baixo e da esquerda para direita, conjuntos são formados. A simetria triclínica não participa de nenhum grupo. Para a simetria monoclínica, é necessária a definição de um plano simétrico. Já as simetrias ortorrômbica (que na Figura 1.1 está descrita como ortotrópica), tetragonal, trigonal e transversal isotrópica (hexagonal) é preciso a definição de dois planos simétricos. Devido às reflexões e aos axiomas de transformação, os outros planos aparecem naturalmente. Por fim, três planos devem ser descritos para as simetrias cúbica e isotrópica. No capítulo 2 serão apresentadas todas as simetrias constitutivas mostradas na Figura 1.1, com seu devido tratamento matemático.

O trabalho de Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001, prova a existência de oito grupos simétricos. Eles utilizam uma prova encontrada no trabalho de Cowin & Mehrabadi, 1987, cuja qual um plano é considerado um plano de simetria se o vetor normal a esse plano for um autovetor tanto do tensor de dilatação quando do tensor de Voigt (ambos serão apresentados no Capítulo 2). Chadwick, Vianello, & Cowin definem grupos simétricos sendo materiais que são invariantes a específicos grupos de transformações. Ao fazer essas definições, eles encontram oito grupos simétricos, sendo eles: triclínico, monoclínico, ortorrômbico, tetragonal, trigonal, transversalmente isotrópico, cúbico e isotrópico – conforme Figura 1.1. Além de provar a



existência dos oito grupos simétricos<sup>12</sup>, os autores descrevem os grupos de transformações aos quais esses grupos simétricos são submetidos. Smith, Smith, & Rivlin, 1963, demonstram todas as transformações necessárias para cada uma das simetrias existentes – as 32 simetrias já citadas, com suas restrições já comentadas. Entretanto, diversas transformações podem ser idênticas, principalmente em materiais de alta simetria, como materiais com simetria cristalina cúbica ou hexagonal. Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001, então, desenvolvem conjuntos de transformação irreduzíveis e únicos, para cada um dos oito grupos de simetria.

Ao utilizar a mesma prova – desenvolvida por Cowin & Mehrabadi, 1987 –, Browaeys & Chevrot, 2004, desenvolvem uma decomposição constitutiva por intermédio de uma representação vetorial do tensor constitutivo. Com a utilização de projeções, os autores descrevem uma metodologia que transforma esse vetor constitutivo de uma dada simetria para qualquer simetria mais alta. Eles consideram que qualquer simetria triclínica pode ser decomposta em seis tensores de diferente simetria (Browaeys & Chevrot, 2004, p. 670). Mesmo apresentando resultados bastante promissores com relação às normas euclidianas das decomposições, chegando a resultados de mais de 90% desta norma<sup>13</sup>, os autores pecam, do mesmo modo que Tu, 1968, num princípio básico de um tensor constitutivo: sua positividade. Não é difícil notar que todos os tensores resultantes, desconsiderando o tensor isotrópico, não são positivo-definidos, pois em ambos os exemplos mostrados, os tensores ortogonais e tetragonais resultantes têm pivôs iguais a zero em duas e quatro linhas/colunas, respectivamente. Fica claro a não possibilidade de inversão de tais tensores, uma premissa matemática básica para sua utilização em operadores lineares. O método desenvolvido pelos autores é similar ao descrito por Tu, 1968, podendo ser aplicado de uma forma mais simples e direta, mantendo ainda seu sentido físico. A diferença entre os dois trabalhos (Tu, 1968 e Browaeys & Chevrot, 2004) está na caracterização das simetrias constitutivas. Tu, 1968, considera classes simétricas, conforme Figura 1.1 enquanto Browaeys & Chevrot, 2004 utilizam o conceito de família cristalina, conceito esse que será brevemente abordado no capítulo 2.

O único trabalho, dentro do conhecimento do autor dessa tese, que relata modificações em sistemas elásticos lineares em função da simetria do tensor constitutivo é escrito por Lodge,

---

<sup>12</sup> Smith, Smith, & Rivlin, 1963, mostram apenas seis sistemas. Entretanto, o que os autores expõem são as famílias cristalinas, que são definidas de forma distinta de sistemas cristalinos (que são oito, conforme discutido neste texto).

<sup>13</sup> Por utilizarem uma apresentação vetorial do tensor reduzido de Kelvin (um vetor em um espaço 21-D), o conceito de norma para este caso é a norma euclidiana do vetor decomposto.

1955. Ele modifica as equações de equilíbrio tridimensionais para materiais de baixa simetria para seu formato isotrópico em função da energia de deformação. Por intermédio de uma transformação linear, ele gera relações entre as propriedades constitutivas para que um sólido anisotrópico seja analisado da mesma forma que um material isotrópico. Contudo, as relações internas são muito restritivas, conforme o autor descreve em sua conclusão, e a possibilidade de aplicação do método proposto é praticamente nula.

O Formalismo de Stroh (Ting, 1996) descreve a deformação de um corpo elástico, dentro das hipóteses de deformação plana, utilizando uma interpolação com funções arbitrárias de variável complexa nos deslocamentos. Inserindo essa interpolação nas equações de equilíbrio da supramencionada teoria, Stroh obteve sistema de autovalores e autovetores. Os autovalores tem uma relação estreita com as propriedades constitutivas e a simetria do seu tensor. São obtidos por meio de um polinômio característico de ordem seis (e por isso esse formalismo também é conhecido como Formalismo Sêxtico de Stroh). Devido a critérios de positividade energética, essas raízes são complexas e, portanto, apresentadas em pares (raiz e seu conjugado). Os autovetores são paralelos aos deslocamentos. Em procedimento semelhante, é possível obter um vetor codirecional às tensões no qual domínio está sujeito. Por intermédio dessas relações, pode-se obter simultaneamente os vetores paralelos às tensões e aos deslocamentos ao empregar a matriz fundamental da elasticidade, que é escrita em função do tensor constitutivo. Entretanto, para isso, deve-se respeitar a não multiplicidade das raízes da equação característica (ou do polinômio descrito acima). Ting, 1996, demonstra que quanto mais planos simétricos o tensor constitutivo tiver, maior a chance de multiplicidade. Para o caso isotrópico, por exemplo, as três raízes sempre são iguais, sendo, portanto, um caso de degeneração matemática.

Com a ampliação do escopo deste formalismo para casos tridimensionais (Nakamura & Tanuma, 1997; Buroni, Ortiz, & Saez, 2010; Ting, 1996) e de placas finas (Cheng & Reddy, 2003), algumas dessas necessidades não se alteram. No trabalho de Nakamura & Tanuma, 1997, desenvolvem-se diversas provas matemáticas para a derivação de soluções fundamentais tridimensionais em função dos graus de degeneração das raízes do problema de autovalores de Stroh. Ao final do seu trabalho, os autores descrevem soluções fundamentais fechadas para materiais transversalmente isotrópicos cujas propriedades constitutivas estão em evidência. Apresentam-se as soluções para quatro casos degenerativos que ocorrem nesta simetria, dos seis casos possíveis para qualquer simetria. A importância desse trabalho está nas provas de diversas

identidades para o desenvolvimento das soluções fundamentais e suas derivadas, além das soluções apresentadas.

Wang, 1997, descreve soluções fundamentais tridimensionais utilizando a representação integral da função delta de Dirac em união com a teoria de cálculo de resíduos em integrais. Ademais, o autor apresenta a primeira e segunda derivadas da solução fundamental (para casos de análise de descontinuidades geométricas) e mostra casos nos quais a solução pode degenerar. Apesar de não utilizar diretamente o Formalismo de Stroh, o desenvolvimento das soluções é muito próximo a autores que o utilizam. A chamada equação sêxtica da elasticidade é idêntica ao polinômio de sexto grau de Stroh. Inclusive a equação integral por ele descrita (Wang, 1997, p. 45) é semelhante à proposta por Ting, 1996. Considerando que a integral é feita no domínio real, depende de apenas uma variável e o integrando tem polos dentro do domínio de integração (quando transformado para o domínio complexo), pode-se aplicar com relativa facilidade o teorema dos resíduos. O autor apresenta, não explicitamente, a solução fundamental e suas respectivas primeiras e segundas derivadas para casos não degenerados e degenerados em todos os seus graus de degeneração.

Tonon, Pan, & Amadei, 2001, utilizam a metodologia de Wang, 1997, para o cálculo da solução fundamental tridimensional e apresentam resultados numéricos aplicando essa solução em um código que tem como base o MEC. Para o cálculo das derivadas dessa solução, os autores usam diferenças finitas centrais. Os resultados numéricos apresentados para a simetria transversalmente isotrópica exibem boa correlação com soluções fechadas conhecidas na literatura e, conforme os autores colocam, o tempo necessário para seu cálculo é bastante baixo.

Távora, Ortiz, Mantič, & París, 2008, expressam a solução fundamental tridimensional para simetria transversalmente isotrópica por intermédio do segundo tensor de Barnett-Lothe. Esse tensor tem uma propriedade muito interessante que é bastante utilizada neste e em outros trabalhos (Buroni, Ortiz, & Saez, 2010; Shiah, Tan, & Wang, 2012). Ele independe do módulo do vetor distância entre o ponto campo e fonte dependendo apenas da direção deste. Ele também representa uma função característica (ou modular) da solução fundamental e tem como integrando a inversa de um tensor semelhante ao tensor utilizado para o cálculo dos autovalores e autovetores do formalismo de Stroh (tensor de Christoffel). Ao analisar a inversa via regra de Cramer, o determinante gera um polinômio característico de sexta ordem que condiz com o formalismo mencionado. Conforme outros trabalhos aqui citados, são necessários procedimentos

algébricos para raízes com multiplicidade, que é o caso de simetrias transversalmente isotrópicas. Os autores aplicam a solução fundamental, bem como suas derivadas, em um código numérico baseado no MEC e obtêm respostas muito próximas às exatas, mesmo quando o plano de simetria isotrópica do material estudado não está alinhado com os eixos coordenados do sistema em estudo.

Buroni, Ortiz, & Saez, 2010, utilizam o mesmo procedimento que o artigo anterior e para a solução das integrações, usam o teorema de resíduos da integral, conforme Wang, 1997. Este teorema também resolve integral com múltiplos polos e é desta maneira que se desenvolvem soluções para materiais degenerados (ou seja, com raízes múltiplas na equação característica). Para a integração de uma função com polo de grau  $n$  deve-se derivar o integrando  $n - 1$  vezes. Para um material que tenha as três raízes iguais (isotrópico), é necessário que se derive o integrando duas vezes<sup>14</sup>. Para a primeira derivada da solução fundamental é necessário que se derive cinco vezes o integrando e, apesar de não estar explicitamente descrito, para a segunda derivada dessa solução seriam necessárias oito derivações do integrando. Além disso, as derivadas da solução fundamental são escritas em função de um tensor de sexta ordem, que apesar de ter várias simetrias internas, têm 127 termos independentes. Os autores fazem estudos de caso, aplicando a solução fundamental obtida no MEC e resolvendo diversos exemplos obtendo resultados satisfatórios inclusive para problemas com descontinuidade geométrica (cujo qual é necessário o conhecimento da segunda derivada da solução fundamental).

Shiah, Tan, & Wang, 2012, desenvolvem um procedimento numérico para a descrição da solução fundamental tridimensional para materiais triclínicos por meio da função característica (ou modular) em termos dos ângulos azimutal e polar em coordenadas esféricas. Quando a função modular é descrita por meio de coordenadas esféricas, os problemas com manipulação de tensores de alta ordem, encontrado em Buroni, Ortiz, & Saez, 2010, desaparecem. Outra propriedade importante é que essa função modular é periódica em ambos os ângulos (azimutal e polar) em  $2\pi$ . Devido essas propriedades, a função modular pode ser descrita por intermédio de séries duplas de Fourier. As integrais dentro do intervalo supracitado são desenvolvidas por meio da quadratura de Gauss. Em razão da rápida variação do integrando, é necessário o uso de 64 pontos para cada direção de integração. Ademais, os autores utilizam 40 posições para cada

---

<sup>14</sup> Cita-se que no integrando a ser derivado, a variável sensível a esta operação se encontra no denominador. Quanto maior o número de derivações que o integrando é submetido, maior será o grau polinomial e, portanto, mais suscetível a instabilidades numéricas.

direção no cálculo dos coeficientes das séries duplas. Têm-se, conseqüentemente, 1600 coeficientes que devem ser integrados numericamente em 4096 posições, cada. Apesar do relativo peso computacional, esses cálculos devem ser feitos apenas uma vez para cada material analisado e devido à própria estrutura de cálculo, são facilmente paralelizados. Os autores, inclusive, apresentam uma tabela com o custo computacional para o cálculo da solução fundamental e suas derivadas e comparam com outras metodologias encontradas na literatura. Nos cálculos das derivadas da solução fundamental podem aparecer singularidades espaciais. Na primeira derivada, os autores sugerem a utilização de perturbações. Na segunda, transformam as coordenadas espaciais para evitar degenerações. Os autores aplicam suas soluções utilizando o tensor constitutivo da alumina rotacionado arbitrariamente e obtêm bons resultados quando comparados a outras soluções.

O Formalismo de Lekhnitskii (Hwu, 2010; Lekhnitskii, 1981; Yin, 2000) considera o equilíbrio estático de um corpo bidimensional delimitado por uma superfície cilíndrica. A seção transversal pode ser finita ou infinita e o corpo pode ser descrito tanto com uma anisotropia retilínea quanto com uma cilíndrica. Este formalismo inicia-se por expressões para as tensões em termos de funções tensão que satisfaçam o equilíbrio e, por intermédio das equações de compatibilidade, decompõe-se o operador diferencial de sexta ordem em um sistema algébrico de sexta ordem. Esse sistema algébrico depende das raízes da equação característica do operador diferencial, e conforme o Formalismo de Stroh, são sempre de variável complexa. Os problemas de degeneração matemática devido à multiplicidade das raízes da equação característica também são encontrados neste formalismo<sup>15</sup>.

Na teoria de placas finas, existem, ao menos, dois tipos de soluções fundamentais: a solução fundamental do operador bi harmônico e a solução fundamental do operador anisotrópico (a solução para simetrias anisotrópicas que degeneram é apenas uma redução da solução fundamental anisotrópica). A primeira é utilizada para materiais com simetria isotrópica e transversalmente isotrópica. A segunda, para as simetrias restantes. Existem diversas soluções fundamentais para o caso anisotrópico e elas são apresentadas por LaMattina, Klang, & Eischen, 1998. Ao comparar três soluções fundamentais anisotrópicas, os autores mostram que elas não

---

<sup>15</sup> Pode-se fazer uma relação entre duas teorias de placas semi-espessas e os formalismos de Stroh e Lekhnitskii. A teoria de placas de Mindlin está para o formalismo de Stroh assim como a teoria de placas de Reissner está para o formalismo de Lekhnitskii devido o fato, já comentado, que os primeiros partem de campos de deslocamentos e os segundos de funções tensões.

são iguais, porém equivalentes. Um problema de valor de contorno bem posto consiste em equações governantes e condições de contorno. Uma equação diferencial não-homogênea tem duas soluções: uma relacionada com a parte homogênea da equação (solução complementar), que normalmente têm constantes, e outra ligada à parte não-homogênea, que não é única. A solução geral é uma combinação entre a solução complementar e as soluções particulares. Ao aplicar as condições de contorno, obtém-se a unicidade. Conforme cita o autor, soluções fundamentais são soluções particulares: satisfazem apenas a parte não-homogênea da equação e, portanto, podem ser múltiplas. A maneira como os autores igualam as soluções fundamentais apresenta um ponto bastante interessante. Denomina-se de raio de referência o coeficiente polinomial da variável que relaciona a distância entre o ponto campo e fonte<sup>16</sup>. Por intermédio desse parâmetro, os autores relacionam as soluções fundamentais. Cita-se, inclusive, que alterações neste coeficiente, vinculadas às distâncias reais do problema a ser resolvido, podem acelerar a análise.

Westphal, Schnack, & de Barcellos, 1998, descrevem uma formulação interessante para o cálculo do raio de referência para a solução fundamental de placas finas isotrópicas. Em diversos trabalhos encontrados na literatura, o valor deste coeficiente é distinto. Encontra-se valores como 0,  $-1$  ou  $-1/2$ , por exemplo. Ao considerar a propriedade de redução de soluções da teoria de placas semi-espessas à sua respectiva de placas finas, os autores obtêm, por meio do limite da solução fundamental na direção transversal da teoria de placas semi-espessas quando a espessura da placa tende a zero e a rigidez ao cisalhamento transversal tende a infinito<sup>17</sup>, o valor desse termo como sendo  $-1/2$ . Obtém-se, portanto, uma comprovação matemática do valor deste raio de referência.

Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002, fazem uma comparação entre resultados da solução fundamental isotrópica com a anisotrópica (Shi & Bezine, 1988), quando o tensor constitutivo utilizado para derivar a última solução é muito próximo de um tensor de simetria isotrópica. É demonstrado pelos autores que, para raios pequenos, as soluções fundamentais são bastante distintas, mesmo se construídas com propriedades constitutivas praticamente idênticas. Já para raios maiores, as soluções ficavam aparentemente semelhantes. Uma explicação mais concisa e conclusiva sobre esses efeitos pode ser encontrada no Capítulo 2 e no Anexo I deste texto.

---

<sup>16</sup> Em outras palavras, seria todo o termo não multiplicado pelo termo logarítmico, que esteja em função dessa variável. Essa equação será apresentada no capítulo 3 desta tese.

<sup>17</sup> Para manter a hipótese de Kirchhoff sobre a normalidade das fibras transversais na superfície média deformada.

A decomposição de Adomian (Adomian, 1994) divide um dado operador diferencial não-linear em duas partes: termo linear e termo não-linear. A parte linear do operador ainda pode ser dividida em duas outras partes que se diferenciam pelo conhecimento da inversa do operador, denominadas linear (termo que se conhece a inversa) e resto (*remainder term*). O termo não-linear e, se for o caso, o termo resto são considerados como parte fonte da equação. A solução é obtida por intermédio de um sistema recursivo, que insere a influência da parte não-linear e do termo resto na solução, passo a passo. A aproximação da parte não-linear é desenvolvida por meio de polinômios especificamente gerados para o tipo e grau de não-linearidade. Esses polinômios são denominados polinômios de Adomian e formam uma série de rápida convergência<sup>18</sup>, cuja prova é demonstrada por Cherruault & Adomian, 1993 e Abbaoui & Cherruault, 1994. A analiticidade desta metodologia se dá pelo conhecimento da solução analítica da inversa do operador linear quando este opera o termo fonte. Essa analiticidade se propaga durante as operações recursivas. Por se tratar de uma solução que deve ser truncada, ela não é exata, na maioria dos casos.

Rao, 2010, utiliza esta decomposição para a solução de equações diferenciais generalizadas de Riccati. A equação diferencial não-linear ordinária é separada em duas partes no qual o termo inverso está relacionado com a parte temporal da equação diferencial. Ele resolve dois exemplos, apresentando a inversa do operador e os polinômios de Adomian, necessários para a aproximação da parte não-linear, obtendo resultados muito próximos com soluções exatas.

Biazar, Babolian, & Islam, 2004, demonstram que esta decomposição pode ser usada para a solução de sistemas de equações diferenciais não-lineares ordinárias, obtendo bons resultados quando comparados às soluções exatas dos problemas em análise. Inclusive, como citam os autores, pode-se ter uma ótima estimativa da forma analítica fechada da solução do sistema.

## 1.2 PROPOSTA E ANALOGIAS

A proposta de tese é a decomposição da solução fundamental de um operador linear, por intermédio de uma decomposição constitutiva, cinemática ou mista, para evitar a degeneração matemática desta solução. Procura-se encontrar soluções fundamentais que antes degenerariam por intermédio de outras soluções fundamentais do mesmo operador diferencial que não

---

<sup>18</sup> Denota que poucos termos são necessários para uma aproximação coerente.

degeneram ou que a degeneração matemática está contida em uma parte conhecida da decomposição. Utiliza-se o mesmo conceito de decomposição para obter a solução de materiais de alta simetria por meio de soluções de materiais de baixa simetria ou seu inverso: usar soluções de alta simetria para a obtenção de soluções de mais baixa simetria, como já discutido na revisão bibliográfica<sup>19</sup>. Por meio da decomposição de Adomian, pode-se produzir uma solução fundamental regrada em um modelo hierárquico das simetrias constitutivas que é baseado na Figura 1.1.

Os operadores diferenciais lineares e suas respectivas soluções fundamentais que são o objeto deste trabalho correspondem àqueles que descrevem o comportamento elástico da teoria de placas finas (utilizando as hipóteses da teoria de placas de Kirchhoff) e sólidos tridimensionais. Cada uma das decomposições estudadas neste trabalho tem formas de abordagem diferentes. É necessário, portanto, a inserção de certas nomenclaturas que serão utilizadas no decorrer do texto para o correto entendimento dessas decomposições. Uma dada solução fundamental – tanto para problemas de placas finas como para elasticidade tridimensional – é relacionada com o tensor constitutivo e sua simetria. A equação característica do operador linear é escrita em função dessas propriedades e, por intermédio das suas raízes, são construídas, efetivamente, essas soluções. Em placas finas, é utilizada a equação proposta por Lekhnitskii (Shi & Bezine, 1988) e ela será explorada no capítulo 3. Neste capítulo, será mostrada a equação característica para o caso da elasticidade tridimensional, que é intimamente ligado à expansão do formalismo de Stroh aplicado a domínios tridimensionais.

A solução fundamental produzida por meio de um tensor constitutivo não-decomposto será denominada *solução fundamental verdadeira* ou somente *solução verdadeira* e o tensor correspondente será intitulado *tensor constitutivo verdadeiro*. É importante pontuar que um tensor constitutivo verdadeiro não tem relação com as propriedades elásticas de um material existente na natureza. Inclusive, pode-se obter tensores verdadeiros via materiais hipotéticos. Aquelas soluções que são desenvolvidas por tensores decompostos ou por soluções decompostas correspondem a *soluções fundamentais fictícia* ou somente *soluções fictícias* e seu respectivo

---

<sup>19</sup> Como exemplificado ao se comentar o trabalho de Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001, sobre a decomposição de um material com simetria monoclinica cujo qual pode ser decomposto por meio de uma soma entre um material com simetria trigonal e outro com simetria tetragonal. Conforme a Figura 1.1, os dois últimos materiais são “mais simétricos” que o primeiro.



tensor é denominado *tensor constitutivo fictício*. Uma melhor compreensão dos termos introduzidos se dará nas explicações das decomposições e na própria analogia ao tema proposto.

A forma da solução fundamental fictícia depende da decomposição utilizada. Na decomposição cinemática, a solução fictícia é igual a um somatório finito de soluções fundamentais verdadeiras desenvolvidas por meio da utilização de tensores constitutivos de diferente simetria. Tendo em vista que a forma da solução fictícia já é conhecida, a relação incógnita é entre os tensores das soluções fundamentais verdadeiras que compõem a solução fictícia. No caso da decomposição constitutiva, como a relação supramencionada é cónita, a relação não conhecida é entre as soluções fundamentais verdadeiras que descrevem a solução fictícia.



Figura 1.2 – Representação de um sistema massa-mola com: (a) Molas em série e (b) Molas em paralelo<sup>20</sup>

Existem diversas analogias que se assemelham à proposta aqui apresentada. Uma delas é a soma de molas em paralelo e em série (Figura 1.2) para a obtenção de um sistema com uma única mola. Essa analogia é interessante, pois insere um conceito correlato às decomposições e, além disso, demonstra algumas de suas restrições. Na soma em série de molas (Figura 1.2 (a)), o inverso da rigidez fictícia – que é uma rigidez que leva em conta resposta todas as molas em série, neste exemplo – é igual à soma das inversas das rigidezes verdadeiras das molas. O deslocamento relativo a cada mola verdadeira ( $k_1$  e  $k_2$ ) é somado para obter-se o deslocamento fictício e a força aplicada nas molas verdadeiras é a mesma. É importante ressaltar que se têm três informações quanto à obtenção da solução do problema da Figura 1.2 (a): relação entre a rigidez fictícia e as rigidezes das molas verdadeiras, força atuante e deslocamento fictício em função dos deslocamentos relativos a cada mola ou deslocamentos verdadeiros.

O caso da Figura 1.2 (b) é levemente mais complexo, ao se analisar no ponto de vista da decomposição que se propõe. Nesta figura, configura-se o caso no qual o deslocamento fictício

<sup>20</sup> Imagens retiradas do site [http://en.wikipedia.org/wiki/Series\\_and\\_parallel\\_springs](http://en.wikipedia.org/wiki/Series_and_parallel_springs).

do sistema é idêntico ao das molas verdadeiras, a força aplicada a ele é decomposta ponderadamente em função das rigidezes verdadeiras e estas são somadas para a obtenção da rigidez fictícia. Ao analisar o sistema, entretanto, por intermédio da influência de cada uma das molas verdadeiras no resultado do sistema, outras relações são geradas, que são mais interessantes para a explicação da proposta. Ao resolver cada uma das molas verdadeiras como um sistema separado (ou seja, como se as outras molas não existissem), obtém-se um valor de deslocamento relativo àquela mola apenas. Ao reagrupar novamente o sistema, observa-se que o deslocamento fictício pode ser obtido por intermédio apenas dos deslocamentos relativos a cada uma das molas verdadeiras quando submetidas à força fictícia (e não a ponderada, de acordo com o que foi explicitado acima). A relação é que a inversa do deslocamento fictício é igual à soma das inversas dos deslocamentos relativos verdadeiros. A rigidez fictícia mantém-se a mesma (a soma das rigidezes verdadeiras das molas paralelas) e a força, para respeitar a relação das inversas do deslocamento, permanece igual para cada uma das molas, portanto, não há ponderação da força aplicada no cálculo dos deslocamentos relativos das molas em paralelo.

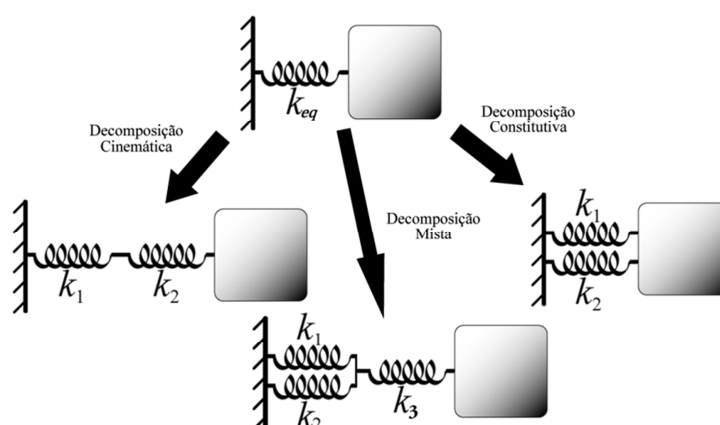


Figura 1.3 – Decomposições Cinemática, Constitutiva ou Mista em função da analogia apresentada<sup>21</sup>

A equivalência de molas em série e em paralelo está relacionada com a decomposição cinemática e constitutiva, respectivamente, conforme mostra a Figura 1.3. A proposta do trabalho, com relação à analogia apresentada é obter, por intermédio de uma “mola fictícia”, “molas verdadeiras” que podem ser dispostas em série e/ou em paralelo. É importante destacar, entretanto, que para ambas as decomposições, quando considerado a analogia, expressam-se as

<sup>21</sup> Imagens retiradas e modificadas do site [http://en.wikipedia.org/wiki/Series\\_and\\_parallel\\_springs](http://en.wikipedia.org/wiki/Series_and_parallel_springs).

relações entre deslocamentos e rigidezes fictícias e verdadeiras. As últimas são expressões que dependem da simetria constitutiva e, também, das condições de contorno. Será visto nos próximos capítulos que a rigidez de um sistema elástico nada mais é que a transformada inversa de Fourier da inversa da transformada de Fourier operador diferencial em análise. As condições de contorno de radiação de Sommerfeld são consideradas em operações aritméticas para a obtenção da solução fundamental de um respectivo operador (e neste caso, é necessário que ele seja linear). A analogia é escalar e, apesar do fato de que a equação diferencial de placas finas também o seja, as propriedades constitutivas de ambos os operadores são agrupadas em matrizes (ou tensores, com suas respectivas propriedades). Sendo assim, o tratamento das equações é mais complexo do que o apresentado. Ainda, a restrição supramencionada está na utilização das decomposições de forma simultânea. Por intermédio da Figura 1.3, pode-se verificar claramente a impossibilidade de tal desenvolvimento, apesar de, matematicamente, este ser possível. Nos próximos capítulos, provar-se-á que apenas com um tensor constitutivo igual à identidade pode-se utilizar ambas as decomposições simultaneamente<sup>22</sup>.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO E NOTAÇÕES

A proposta desse trabalho, então, é obter, por meio de decomposições do tensor constitutivo ou da própria solução fundamental, soluções que não degenerem ou que a degeneração esteja em uma das soluções reais dentro da solução equivalente e a sua resolução seja conhecida. Este texto está dividido em sete partes, além de dois anexos. O capítulo 2 apresenta as diversas simetrias constitutivas para domínios tridimensionais bem como para a teoria de placas finas (tensor constitutivo reduzido). O capítulo 3 descreve métodos de obtenção de soluções fundamentais, tanto para o caso tridimensional quanto para o caso de placas finas. Neste capítulo também se encontra uma pequena revisão da transformada de Fourier. No capítulo 4, explica-se as duas decomposições do tensor constitutivo relatadas na revisão bibliográfica além de uma terceira, que mantém a positividade e definição, além das simetrias tensoriais. Demonstra-se, no capítulo 5, as decomposições estudadas neste trabalho. São discutidas

---

<sup>22</sup> O que é diametralmente diferente da decomposição mista, apresentada na Figura 1.3. A decomposição mista considera, inicialmente, uma decomposição cinemática para que, em uma das soluções decompostas, a decomposição constitutiva seja aplicada. Pode-se também, após a aplicação de uma decomposição constitutiva, aplicar em uma das resultantes uma decomposição cinemática (não mostrado na Figura 1.3). Entretanto, não é possível, simultaneamente aplicar a decomposição cinemática e constitutiva.

propriedades e restrições de cada uma das decomposições (cinemática, constitutiva direta e utilizando a metodologia da decomposição de Adomian) para os operadores diferenciais objetos deste trabalho. No capítulo 6 encontra-se uma discussão a cerca de cada resultado obtido e um breve resumo da tese. Dispõe-se no capítulo 7 as referências bibliográficas utilizadas neste trabalho. No Anexo I é mostrado uma alternativa simples de utilização da solução fundamental anisotrópica de placas finas para a obtenção de respostas de simetria isotrópica, sem as problemáticas encontradas na perturbação do tensor constitutivo. Ao final de cada capítulo se encontra uma pequena conclusão sobre os temas nele discutidos. A partir do capítulo 4, a tese se reveste de originalidade.

Duas notações são predominantes neste texto: a tensorial e a indicial. Na primeira notação, tensores de segunda ou de alta ordem e matrizes são escritos em letras capitais e em negrito. Tensores de primeira ordem e vetores são grafados em letra minúscula e em negrito. Tensores de ordem zero (escalares) são representados tanto em letras capitais quanto em minúsculas, porém sem negrito. Na notação indicial, segue-se a relação entre letras maiúsculas e minúsculas. Entretanto, não é usado negrito, pois a ordem de tensores é descrita pela quantidade de índices que, repetidos, denotam somatório sobre a variação desses índices, a não ser que seja explicitamente dito o contrário. A variação dos índices será sempre explicitada após a apresentação das equações.

## 2 SIMETRIAS CONSTITUTIVAS PARA SISTEMAS TRIDIMENSIONAIS E DE PLACAS FINAS

Sólidos podem ser classificados como cristalinos e não-cristalinos (ou amorfos). Um material é identificado como cristalino quando há ordenamento atômico de longa distância, formando uma estrutura tridimensional chamada de rede cristalina. Esse padrão de estrutura espacial e suas simetrias internas desempenham um papel importante em diversas propriedades físicas. Metais, materiais cerâmicos e alguns polímeros podem ser classificados como cristalinos.

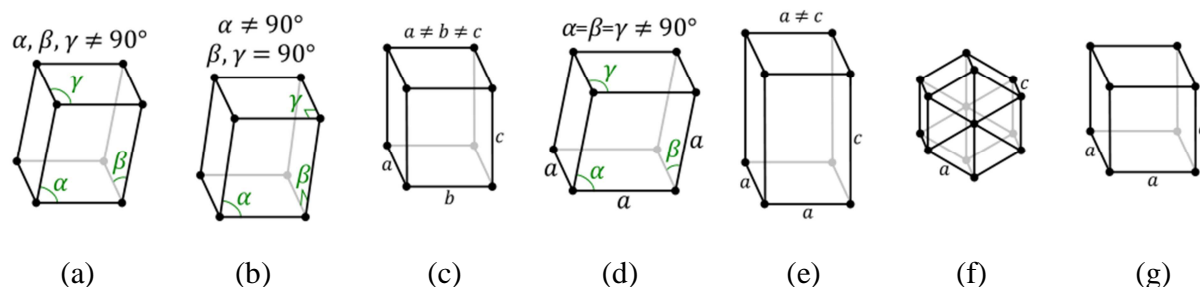


Figura 2.1 – Forma geométrica das células unitárias das sete simetrias e relações angulares e de tamanho de aresta: (a) Triclínico (b) Monoclínico (c) Ortorrômbico (d) Trigonal (e) Tetragonal (f) Hexagonal (g) Cúbica<sup>23</sup>

O ordenamento de longa distância pode ser descrito por uma geometria característica<sup>24</sup> (ou padrão), que se repete por todo o sólido, denominada célula unitária geométrica (Figura 2.1). Por intermédio dessa célula e seu formato espacial, obtêm-se uma série de propriedades físicas como planos principais de deformação, fator de empacotamento, transparência entre outras. Para

<sup>23</sup> Imagens retiradas e modificadas do site: [http://en.wikipedia.org/wiki/Crystal\\_system](http://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system).

<sup>24</sup> Também chamada de retículo.

a averiguação das propriedades mecânicas, contudo, apenas a geometria da célula e certas simetrias internas são importantes, pois elas demonstram de forma natural os possíveis planos simétricos além de ângulos importantes (como os ângulos de Euler). Devido a isso, as simetrias apresentadas na Figura 1.1, podem ser descritas por suas células unitárias, de acordo com a Figura 2.1. É importante citar que nesta figura, apenas os casos mais gerais (ou de menor simetria interna) são colocados.

Tabela 2.1 – Classes Simétricas

(a) Sólidos Tridimensionais		(b) Placas Finas <sup>25</sup>	
Sistema Cristalino	Constantes Independentes	Sistema Cristalino	Constantes Independentes
Triclínico	21 (18)	Monoclínico	10
Monoclínico	13 (12)	Ortorrômbico	7
Ortorrômbico	9	Tetragonal	5
Tetragonal	7 (6)	Trigonal	4
Trigonal	7 (6)	Hexagonal	4
Hexagonal	5	Cúbico	3
Cúbico	3	Isotrópico	2
Isotrópico	2		

A Figura 2.1 pode ser explicada por intermédio da determinação entre três vetores espaciais, que contêm informações sobre os ângulos diretor e tamanho das arestas da célula unitária. A origem desses vetores é um dos vértices da célula. A Figura 2.1 (a) representa um material triclínico. Observa-se nela que esses três vetores tem norma e ângulos diferentes. Isso faz com que a célula unitária de um material triclínico tome praticamente qualquer formato. Um material da simetria monoclínica, de acordo com a Figura 2.1 (b), tem as três normas vetoriais diferentes. Entretanto, dois ângulos entre esses vetores são de 90°. A Figura 2.1 (c) representa um paralelepípedo e mostra a célula unitária da simetria ortorrômbica. Os vetores têm normais diferentes e são ortogonais entre si. O caso trigonal, apresentado pela Figura 2.1 (d), tem relação de igualdade entre as normas e seus ângulos, que são diferentes de 90°. A simetria tetragonal, demonstrada pela Figura 2.1 (e), tem seus ângulos posicionados de forma ortogonal. Além disso, dois desses vetores tem mesma norma. Já a simetria hexagonal tem dois vetores com mesma norma e posicionados entre si a 120°. O terceiro vetor é normal aos outros dois e pode ter ou não norma diferente. A Figura 2.1 (g) apresenta a célula unitária de um material cúbico (no qual a simetria isotrópica pode ser inserida). Todos os vetores são perpendiculares entre si e tem a

<sup>25</sup> Em função da simetria ao plano  $x_1x_2$ . Não são apresentadas as constantes elásticas essenciais.

mesma norma. Cada uma das relações acima descritas para as simetrias constitutivas criam restrições às deformações (conforme Smith & Rivlin, 1958) e alteram a forma do tensor constitutivo, fazendo com que delimitações apareçam e alterem a quantidade de informação necessária para descrever o comportamento mecânico de um sólido. A Tabela 2.1 apresenta esses sistemas em função do número de constantes elásticas necessárias para a completa descrição, em que o número entre parênteses descreve as constantes elásticas essenciais do comportamento mecânico do material tanto para sólidos tridimensionais.

Os sete primeiros grupos apresentados na Tabela 2.1 (a) (que estão de acordo com o proposto por Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001 e Cowin & Mehrabadi, 1995) podem ser subdivididos em 32 classes cristalinas (*point symmetry*) conforme Tu, 1968, Smith, Smith, & Rivlin, 1963, e Cowin & Mehrabadi, 1995, cuja diferenciação se dá pela quantidade e tipo de transformações invariantes, como reflexões e rotações em função de um sistema de coordenadas. A título de exemplificação, existem outras duas formas de agrupar os materiais cristalinos: família cristalina<sup>26</sup> e sistema do reticulado<sup>27</sup> (que pode ser dividido, também, no reticulado de Bravais, que tem 14 subdivisões). Marczak & Denda, 2010, utilizam o conceito de família cristalina, e, por esse motivo, não se encontra no trabalho citado a simetria trigonal que nada mais é uma subdivisão da família hexagonal, se visto de acordo o sistema cristalino.

O sistema descrito na Tabela 2.1 advém das transformações invariantes do tensor constitutivo que representa matematicamente o material. Essas transformações estão intimamente ligadas à estrutura cristalina do material e a posição e quantidade de planos reflexivos ou eixos de reflexão. Um exemplo simples é um material no qual sua forma cristalina tem arranjo paralelepipedico (Figura 2.1 (e), por exemplo). Se constituirmos um sistema cartesiano  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}$  onde  $x_1$  e  $x_2$  são colineares com as arestas de tamanho  $a$  e  $x_3$  o é com a aresta de tamanho  $c$ , pode-se rotacionar esta célula em torno do eixo  $x_3$ , em  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $3\pi/2$  - fora a rotação de  $2\pi$  - sem que sua configuração espacial se altere. Obtém-se então, transformações invariantes (quatro, no total) ao tensor constitutivo. As transformações acima descritas são simplesmente a matriz de rotação canônica em torno do eixo  $x_3$ . Como esse tensor é uma representação de propriedades que tem sentido físico em função da direção que atuam, essas

<sup>26</sup> Tem apenas 6 divisões. Tem a mesma divisão que o sistema do reticulado, entretanto a simetria trigonal e hexagonal estão inseridas dentro da família cristalina hexagonal.

<sup>27</sup> Também é dividida em 7 sistemas, diferenciando-se do sistema cristalino e da família cristalina em materiais hexagonais, que são divididos em romboédrico e hexagonal. O grupo é definido pela geometria do retículo.

transformações forçam que certas relações internas sejam obedecidas. Cada sistema cristalino é definido por um grupo de transformações cujo qual o tensor constitutivo é invariante. Quatro axiomas são necessários para definir esse grupo (Cowin & Mehrabadi, 1995): fechamento, associatividade, identidade e inversas. Fechamento denota que o resultado do produto entre dois elementos que fazem parte de um grupo também está contido nele. Associatividade corresponde à propriedade cuja qual a sequência do produto de três elementos ou mais é indiferente ao resultado. O axioma da identidade relata que em todos os grupos, existe um elemento identidade que, no exemplo acima se daria pela rotação de  $2\pi$ . Por fim, inversas remete a atribuição que cada elemento do grupo tem inversa e ela é descrita pela matriz transposta desse elemento. O segundo e o quarto axiomas são propriedades naturais da álgebra matricial.

Para a apresentação das simetrias dos tensores constitutivos descritas na Tabela 2.1, é necessária a exposição da Lei de Hooke generalizada. Esta lei descreve o comportamento mecânico de materiais cujo qual seu comportamento tensional varia linearmente com as deformações. Sendo assim, tem-se que:

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \quad (2.1)$$

segundo o qual  $T_{ij}$  e  $E_{kl}$  são os tensores tensão (tensão de Cauchy) e deformação (deformação infinitesimal)<sup>28</sup> de segunda-ordem e  $C_{ijkl}$  é o tensor constitutivo de quarta ordem (tensor que agrupa os coeficientes de proporcionalidade, ou, constantes elásticas). Os índices  $i, j, k$  e  $l$  variam de 1 a 3. Existem três simetrias que restringem o tensor constitutivo e essas simetrias são independentes às relacionadas ao material (são independentes da geometria da célula unitária e a quantidade e posição dos planos e eixos reflexivos). Elas são a simetria do tensor tensão ( $T_{ij} = T_{ji}$ ), do tensor deformação ( $E_{ij} = E_{ji}$ ) e o requerimento termodinâmico de que não há trabalho produzido por um material elástico em um ciclo fechado. Essas restrições são escritas, respectivamente, como:

$$C_{ijkl} = C_{jilk} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad C_{ijkl} = C_{klsj} \quad (2.2)$$

As simetrias acima mencionadas reduzem as constantes elásticas independentes de 81 para 21. Pode-se reescrever a equação (2.1) de forma que o tensor constitutivo de quarta ordem seja reduzido a um tensor de segunda ordem (segundo a notação de Voigt). Sendo assim, tem-se:

---

<sup>28</sup> Já se considera a hipótese dos pequenos deslocamentos.



$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (2.3.a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{23} \ T_{13} \ T_{12}\}^T = \{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6\}^T \quad (2.3.b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ E_{23} \ E_{13} \ E_{12}\}^T = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6\}^T \quad (2.3.c)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3.d)$$

no qual os índices  $i$  e  $j$  variam de 1 a 6 e  $\sigma_i$  e  $\varepsilon_j$  são tensores de primeira ordem que agrupam as tensões e deformações, respectivamente. A relação entre os índices da equação (2.1) com os da equação (2.3.b) – (2.3.d) é descrita na forma:

$$\begin{array}{lll} 11 \rightarrow 1 & 22 \rightarrow 2 & 33 \rightarrow 3 \\ 23 \rightarrow 4 & 13 \rightarrow 5 & 12 \rightarrow 6 \end{array} \quad (2.4)$$

e está de acordo com os trabalhos encontrados na literatura (Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001; Marczak & Denda, 2010; Cowin, 1989).

A equação (2.3.a) descreve o estado tensorial por meio das deformações em um problema da elasticidade tridimensional. Para o caso de placas finas, por se tratar de um problema de deformação e tensão plana simultânea, a relação tensão-deformação é escrita de forma semelhante. Elimina-se das equações (2.3.b) e (2.3.c) as posições 3, 4 e 5 dos vetores e altera-se o tensor constitutivo de segunda ordem nas formas indiciais e matriciais (Cheng & Reddy, 2003), como:

$$\tilde{C}_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad (2.5.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{26} \\ \text{sym} & & C_{66} \end{bmatrix} - \frac{1}{C_{33}} \begin{bmatrix} C_{13}^2 & C_{13}C_{23} & C_{13}C_{36} \\ & C_{23}^2 & C_{23}C_{36} \\ \text{sym} & & C_{36}^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.b)$$

sabendo que  $i$  e  $j$  variam em 1, 2 e 6. O tensor expresso nas equações (2.5.b) –  $\tilde{\mathbf{C}}$  – é chamado de tensor constitutivo reduzido. O que se nota com essa equação é que esse tensor não apresenta as propriedades constitutivas contidas na quarta e quinta linha/coluna. Isso é uma consequência direta da hipótese de Kirchhoff com relação à manutenção da perpendicularidade das fibras

normais à superfície média da placa. A eliminação da terceira posição dos vetores tensão e deformação são devidas à hipótese de tensão e deformação planas. O efeito de flexibilidade, ou seja, redução das propriedades constitutivas, é em consequência disso.

Observa-se que a equação (2.5.a) é similar à decomposição do tensor constitutivo proposta por Kelvin (Marczak & Denda, 2010), ao notar que o produto  $C_{i3}C_{j3}$  é um produto externo entre vetores iguais, sendo ele  $\{C_{13} \ C_{23} \ C_{36}\}$ . No entanto, é impossível de se obter uma resposta para a primeira matriz do lado direito da equação (2.5.b), outra para a segunda matriz do lado direito desta mesma equação e desenvolver uma solução a partir dessas duas soluções – que é exatamente o que é proposto neste texto, tendo em vista a decomposição constitutiva. A segunda matriz da equação (2.5.b) é gerada por meio de um produto externo, portanto, é singular<sup>29</sup>. Sendo assim, a decomposição de Kelvin não pode ser usada para a decomposição da solução fundamental via superposição dos tensores constitutivos. Por este mesmo motivo que as decomposições propostas por Browaeys & Chevrot, 2004, e Tu, 1968, não devem ser utilizadas, pois elas geram tensores constitutivos singulares. Isso será abordado com mais detalhes no capítulo 4. Para a apresentação das simetrias e suas resultantes na elasticidade, serão utilizadas as equações (2.3.d) e (2.5.b). A impossibilidade ocorre quando da necessidade de positividade de todos os tensores envolvidos na decomposição.

O trabalho de Smith, Smith, & Rivlin, 1963, descreve as transformações invariantes das 32 classes cristalinas que respeitam o teorema de restrição cristalográfico. Por intermédio dessas transformações, pode-se então encontrar as relações que vem a seguir. A notação, bem como os tensores, segue o trabalho de Cowin & Mehrabadi, 1995. Contudo, antes da avaliação dos oito grupos descritos na Tabela 2.1, é necessária a definição matemática de simetria constitutiva. Os tensores constitutivos estão descritos no sistema de coordenadas cartesianos  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}$  e por ser um tensor de quarta ordem, a transformação deste tensor a um novo sistema coordenado é descrita como:

$$C'_{ijkl} = M_{im}M_{jn}M_{ko}M_{sp}C_{mnop} \quad (2.6)$$

no qual  $C'_{ijkl}$  denota o tensor constitutivo na nova configuração,  $\mathbf{M}$  é uma matriz transformação unitária (que seque os quatro axiomas já descritos) e os índices  $m, n, o$  e  $p$  variam de 1 a 3. As

---

<sup>29</sup> Toda a matriz gerada mediante um produto externo na forma  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}$ , no qual  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  são vetores, tem, por definição, ranque 1 (dependência linear entre linhas e/ou colunas da matriz resultante). Considerando que o tensor resultante tem dimensões 3x3, existe dois graus de singularidade.

matrizes  $\mathbf{M}$  estão listadas no trabalho de Smith, Smith, & Rivlin, 1963. A título de reprodução, essas matrizes são escritas como:

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.7.a)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.7.b)$$

$$\mathbf{M}^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(7)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(8)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7.c)$$

$$\mathbf{M}^{(9)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(10)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7.d)$$

$$\mathbf{M}^{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.e)$$

$$\mathbf{M}^{(14)} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{(14)} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7.f)$$

Caso  $C'_{ijks} = C_{ijks}$ , existe simetria na direção de transformação do tensor constitutivo. Para o tensor constitutivo de segunda ordem, a equação (2.6) fica:

$$C'_{ij} = R_{mi} R_{nj} C_{mn} \quad (2.8.a)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} M_{11}^2 & M_{21}^2 & M_{31}^2 & M_{21}M_{31} & M_{11}M_{31} & M_{11}M_{21} \\ M_{12}^2 & M_{22}^2 & M_{32}^2 & M_{32}M_{22} & M_{12}M_{32} & M_{12}M_{22} \\ M_{13}^2 & M_{23}^2 & M_{33}^2 & M_{23}M_{33} & M_{13}M_{33} & M_{13}M_{23} \\ 2M_{13}M_{12} & 2M_{23}M_{22} & 2M_{33}M_{32} & M_{23}M_{32} + M_{22}M_{33} & M_{13}M_{32} + M_{12}M_{33} & M_{13}M_{22} + M_{12}M_{23} \\ 2M_{11}M_{13} & 2M_{21}M_{23} & 2M_{31}M_{33} & M_{13}M_{23} + M_{21}M_{33} & M_{11}M_{33} + M_{31}M_{13} & M_{11}M_{23} + M_{21}M_{13} \\ 2M_{11}M_{12} & 2M_{21}M_{22} & 2M_{31}M_{32} & M_{31}M_{22} + M_{21}M_{32} & M_{31}M_{12} + M_{11}M_{32} & M_{21}M_{12} + M_{11}M_{22} \end{bmatrix} \quad (2.8.b)$$

Por meio da matriz de transformação da equação (2.8.b), pode-se então verificar a simetria na qual o material está inserido ou mesmo encontrar um plano de simetria. A explicação física de cada uma das matrizes de transformação das equações (2.7) está descrita em Smith & Rivlin, 1958 e em Smith, Smith, & Rivlin, 1963, em que se encontra, também, as relações entre as matrizes de transformação devido o axioma de fechamento. As matrizes  $\mathbf{R}$  (eq. (2.8.b)) estão explicitadas no trabalho de Cowin & Mehrabadi, 1995, e como no trabalho de Smith, Smith, &

Rivlin, 1963, apresentam-se também os produtos entre as matrizes contidas no grupo de transformação.

Outra forma de se conhecer os planos simétricos de um tensor constitutivo é por intermédio do vetor normal a este plano. Cowin & Mehrabadi, 1987, provam que são condições necessárias e suficientes para um vetor  $\boldsymbol{\eta}_1$ , definido em  $\mathfrak{R}^3$  e constituindo uma tríade ortonormal juntamente com os vetores  $\boldsymbol{\eta}_2$  e  $\boldsymbol{\eta}_3$ , ser um eixo refletivo (ou um vetor normal ao plano simétrico) se forem satisfeitas as seguintes afirmações:

$$C_{ijkl}\eta_{1j}\eta_{1k}\eta_{1s} = (C_{mnop}\eta_{1m}\eta_{1n}\eta_{1o}\eta_{1p})\eta_{1i} \quad (2.9.a)$$

$$C_{ikkk}\eta_{1j} = (C_{pkkq}\eta_{1p}\eta_{1q})\eta_{1i} \quad (2.9.b)$$

$$C_{ijkk}\eta_{1j} = (C_{pqkk}\eta_{1p}\eta_{1q})\eta_{1i} \quad (2.9.c)$$

$$C_{ijkm}\eta_{2j}\eta_{2k}\eta_{1m} = (C_{mnop}\eta_{2n}\eta_{2o}\eta_{1m}\eta_{1p})\eta_{1i} \quad (2.9.d)$$

$$C_{ijkm}\eta_{3j}\eta_{3k}\eta_{1m} = (C_{mnop}\eta_{3n}\eta_{3o}\eta_{1m}\eta_{1p})\eta_{1i} \quad (2.9.e)$$

A introdução de três tensores facilita o entendimento das equações (2.9). Eles são os tensores acústico (ou de Christoffel), de Voigt e de dilatação e são escritos, respectivamente, na seguinte forma (Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001):

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\eta}_X) = C_{ikjs}\eta_{Xj}\eta_{Xk} \quad (2.10.a)$$

$$C_{ij}^{voi} = C_{ikjk} \therefore \mathbf{C}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{55} + C_{66} & C_{16} + C_{26} + C_{45} & C_{15} + C_{46} + C_{35} \\ & C_{22} + C_{44} + C_{66} & C_{24} + C_{34} + C_{56} \\ & sym & C_{33} + C_{44} + C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.10.b)$$

$$C_{ij}^{dil} = C_{ijkk} \therefore \mathbf{C}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & C_{16} + C_{26} + C_{36} & C_{15} + C_{25} + C_{35} \\ & C_{12} + C_{22} + C_{23} & C_{14} + C_{24} + C_{34} \\ & sym & C_{13} + C_{23} + C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.10.c)$$

onde o subíndice  $X$  toma valores de 1 a 3, bem como os índices  $i, j, k$  e  $s$ . Por intermédio dos tensores acima descritos, reescreve-se as equações (2.9) de modo que:

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1)\eta_{1j} = (Q_{pq}(\boldsymbol{\eta}_1)\eta_{1p}\eta_{1q})\eta_{1i} \quad (2.11.a)$$

$$C_{ij}^{voi}\eta_{1j} = (C_{pq}^{voi}\eta_{1p}\eta_{1q})\eta_{1i} \quad (2.11.b)$$

$$C_{ij}^{dil} \eta_{1j} = \left( C_{pq}^{dil} \eta_{1p} \eta_{1q} \right) \eta_{1i} \quad (2.11.c)$$

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\eta}_2) \eta_{1j} = \left( Q_{pq}(\boldsymbol{\eta}_2) \eta_{1p} \eta_{1q} \right) \eta_{1i} \quad (2.11.d)$$

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\eta}_3) \eta_{1j} = \left( Q_{pq}(\boldsymbol{\eta}_3) \eta_{1p} \eta_{1q} \right) \eta_{1i} \quad (2.11.e)$$

e, por intermédio das equações (2.11.a), (2.11.d) e (2.11.e), pode-se provar que:

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\eta}_1) + Q_{ij}(\boldsymbol{\eta}_2) + Q_{ij}(\boldsymbol{\eta}_3) = C_{ij}^{voi} \quad (2.12)$$

que confirma que se um vetor é um autovetor do tensor acústico, ele o será do tensor de Voigt ao multiplicar ambos os lados pelo vetor  $\boldsymbol{\eta}_1$  e considerar a normalidade entre a tríade. O sentido físico das equações (2.11.a), (2.11.d) e (2.11.e) é explicado por intermédio de dois conceitos em propagação de ondas: direção específica (eq. (2.11.a)) e eixo específico (eqs. (2.11.d) e (2.11.e)) (Cowin, 1989). As equações (2.11.b) e (2.11.c) descrevem que, para que o vetor  $\boldsymbol{\eta}_1$  seja colinear a um eixo reflexivo, ele deve ser um autovetor dos tensores de Voigt e dilatação simultaneamente (Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001).

Para o caso de placas finas, os tensores de Voigt e de dilatação são escritos como:

$$\mathbf{C}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & C_{16} + C_{26} + C_{36} & 0 \\ & C_{12} + C_{22} + C_{23} & 0 \\ sym & & C_{13} + C_{23} + C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.13.a)$$

$$\mathbf{C}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{66} & C_{16} + C_{26} & 0 \\ & C_{22} + C_{66} & 0 \\ sym & & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.13.b)$$

que, por meio do tensor reduzido, é escrito como:

$$\mathbf{C}^{dil} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{16} + \tilde{C}_{26} & 0 \\ & \tilde{C}_{12} + \tilde{C}_{22} & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix} + \frac{(C_{13} + C_{23} + C_{33})}{C_{33}} \begin{bmatrix} C_{13} & C_{36} & 0 \\ & C_{23} & 0 \\ sym & & C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14.a)$$

$$\mathbf{C}^{voi} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{66} & \tilde{C}_{16} + \tilde{C}_{26} & 0 \\ & \tilde{C}_{22} + \tilde{C}_{66} & 0 \\ sym & & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{C_{33}} \begin{bmatrix} C_{13}^2 + C_{36}^2 & C_{36}(C_{13} + C_{23}) & 0 \\ & C_{23}^2 + C_{36}^2 & 0 \\ sym & & C_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (2.14.b)$$

A seguir serão apresentados os oito sistemas cristalinos. A simetria isotrópica não é mostrada na Figura 2.1, pois ela é um caso especial de materiais cúbicos, bem como a simetria transversal isotrópica, que é um caso especial da simetria hexagonal. Será visto que, ao considerar a divisão por sistemas cristalinos, todo o comportamento mecânico de um material

que apresenta simetria hexagonal se reduz ao seu respectivo de um material transversalmente isotrópico. Apenas para o caso triclinico e monoclinico que serão apresentadas explicitamente as matrizes  $\mathbf{R}$ . Por intermédio do trabalho de Smith, Smith, & Rivlin, 1963, ou Cowin & Mehrabadi, 1995, pode-se obter todas as outras matrizes para outras simetrias. Atentou-se, inclusive, para a grande quantidade de variações que essa matriz pode tomar em casos de alta simetria<sup>30</sup>. Desconsiderando as duas simetrias supracitadas e a simetria trigonal, serão mostrados os tensores constitutivos com ao menos uma simetria em relação ao eixo  $x_3$ , ou seja, simetrias que tenham um plano reflexivo paralelo ao plano  $x_1x_2$  devido o fato que a placa fina analisada está contida em tal plano. A ordem cujas simetrias são apresentadas será a mesma do trabalho de Cowin & Mehrabadi, 1995.

Foi desenvolvida uma pequena rotina no *software* de computação algébrica *Maple* versão 15 para a derivação das soluções das equações (2.11). Como entrada, o programa recebe um tensor constitutivo que tem ou não alguns planos simétricos impostos. Será visto, na explicação das simetrias, que se pode usar como base um tensor constitutivo de outra simetria desde que este contenha todos os planos reflexivos da simetria estudada. Outro dado de entrada é um vetor normal à rotação produzida. Aplica-se uma rotação  $\theta$  variada, em que  $0 < \theta < \pi/2$ , em sentido destrógeno em torno deste vetor. As 15 equações a serem resolvidas com relação a rotações dos vetores da tríade  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$  e  $\boldsymbol{\eta}_3$  são apresentadas e pode-se verificar as necessidades de relações entre constantes elásticas ou posição de planos reflexivos a fim de se respeitar as restrições de simetria. Por intermédio desta rotina, obtêm-se, de forma consistente, todas as simetrias possíveis para a elasticidade tridimensional. Por intermédio das equações (2.5), escreve-se o tensor constitutivo reduzido relacionado com cada simetria.

## 2.1 DESCRIÇÃO DOS OITO SISTEMAS CRISTALINOS

A Figura 2.2 descreve os planos simétricos dos oito sistemas cristalinos que serão apresentados neste capítulo. Eles estão de acordo com os mostrados por Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001, na Figura 1.1. Entretanto, seus planos de simetria estão alinhados para a obtenção do tensor constitutivo reduzido, em função da posição da superfície média.

---

<sup>30</sup> Na simetria cúbica, uma tabela na qual se apresenta todas as transformações possíveis para um material cúbico usa duas páginas do trabalho ( Cowin & Mehrabadi, 1995, pp. 274-275).

Os cortes nos cubos da Figura 2.2 representam planos simétricos. Os chamados eixos simétricos ou de reflexão são direções normais a estes planos. Em simetrias como tetragonal, cúbica e trigonal, os planos simétricos não alinhados aos planos gerados pelo sistema coordenado cartesiano têm ângulos fixos com relação a estes. Para as simetrias tetragonal e cúbica, esse ângulo tem valor de  $\pi/4$ . Para a simetria trigonal,  $\pi/3$ .

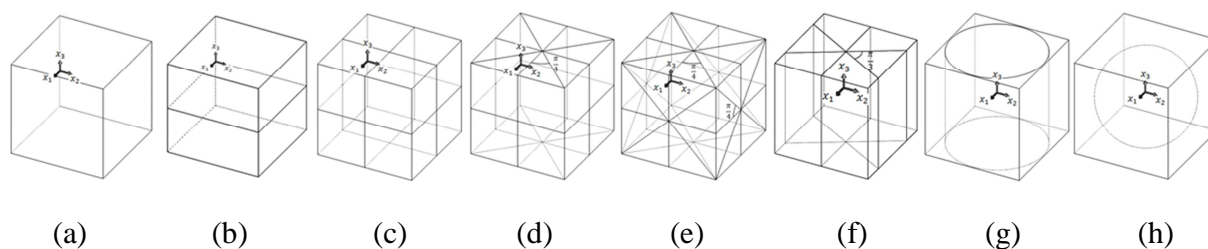


Figura 2.2 – Planos simétricos para as simetrias: (a) Triclínica (b) Monoclínica (c) Ortorrômbrica (d) Tetragonal (e) Cúbica (f) Trigonal (g) Hexagonal (Transversal Isotrópica) (h) Isotrópica

### 2.1.1 SIMETRIA TRICLÍNICA

De acordo com a Tabela 2.1 e o trabalho de Smith, Smith, & Rivlin, 1963, materiais que tem simetria triclínica, têm duas classes cristalinas (pedial e pinacoidal). As transformações invariantes possíveis para este tipo de simetria são as matrizes  $\mathbf{M}^{(1)}$ , para o caso pedial e  $\mathbf{M}^{(1)}$  e  $\mathbf{M}^{(2)}$  para o caso pinacoidal. Contudo, ambas as transformações são involucionais resultando em uma matriz de transformação para o tensor contraído idêntica à matriz identidade  $6 \times 6$ .

De fato a simetria triclínica, no que tange a elasticidade, trata-se de um sistema cristalino cujo qual inexistente qualquer tipo de simetria em acordo com a Figura 2.2 (a). Nela não se apresenta nenhum plano de reflexão, conforme a Figura 1.1. O seu tensor tridimensional é descrito pela equação (2.3.d) necessitando de 21 propriedades elásticas para a completa caracterização. Pode-se também escrevê-lo em função de 18 constantes elásticas essenciais e três ângulos (ângulos de Euler) intrínsecos ao tensor constitutivo (Cowin & Mehrabadi, 1995, pp. 264 - 267). Por meio das relações providas neste trabalho, escolhe-se, com relativa arbitrariedade, três constantes a se anular. Isso é produzido por três rotações que são específicas às constantes remanescentes. Os tensores de dilatação e de Voigt são os mesmos que os expressados nas equações (2.10.b) e (2.10.c), respectivamente.

Em placas finas, são necessárias 10 constantes elásticas para definir completamente um material anisotrópico. O tensor constitutivo reduzido é idêntico ao da equação (2.5.b). Seus tensores de Voigt e de dilatação estão descritos pelas equações (2.13).

### 2.1.2 SIMETRIA MONOCLÍNICA

A simetria monoclínica é dividida em três classes cristalinas: domática, esfenoidal e prismática. De acordo com a Tabela 2.1, independente da classe, existem 13 constantes distintas nessa simetria. Ela é definida por ter apenas um plano de simetria (ou um eixo reflexivo), vide Figura 2.2 (b). Nesta figura está definido que o único plano de simetria é alinhado com o plano  $x_1x_2$  ou tendo seu eixo reflexivo colinear ao eixo cartesiano  $x_3$ . Nota-se que a orientação deste plano não é, necessariamente, alinhada com o sistema de coordenadas. Este alinhamento é feito para se obter os respectivos tensores no seu formato mais simples. Concordante ao método para reduzir três constantes elásticas de materiais triclinicos, é possível gerar uma rotação arbitrária<sup>31</sup> coincidente ao plano de simetria para se eliminar uma dessas constantes. Ao utilizar as transformações invariantes explicitadas por Smith, Smith, & Rivlin, 1963, tem-se que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

que é diferente do proposto por Marczak & Denda, 2010. Contudo é idêntico ao tensor constitutivo apresentado por (Cowin & Mehrabadi, 1995). Conforme descrito pelos últimos autores, fica claro que as transformações definidas por Smith, Smith, & Rivlin, 1963 para o caso monoclínico definem que o plano de simetria seja  $x_2x_3$  (ou o eixo reflexivo colinear a  $x_1$ ). Isso pode ser provado por intermédio das equações (2.11)<sup>32</sup>. Um vetor normal ao plano supracitado pode ser escrito como:

$$\mathbf{n} = \{1 \ 0 \ 0\}^T = \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (2.16)$$

<sup>31</sup> A rotação não é completamente arbitrária em acordo com uma discussão encontrada em Cowin & Mehrabadi, 1995, p. 268

<sup>32</sup> Cowin & Mehrabadi, 1995, utilizam rotações no tensor constitutivo e não as fórmulas das equações (2.11).



onde  $\hat{e}_1$  é o vetor canônico colinear ao eixo  $x_1$  e, inserindo-o nas equações (2.11.a), considerando um material triclínico, tem-se que:

$$C_{16} = 0 \quad C_{15} = 0 \quad (2.17.a)$$

e ao aplicar o mesmo vetor nas equações (2.11.b) e (2.11.c), já observando as igualdades das equações (2.17.a), chega-se em:

$$C_{26} + C_{36} = 0 \quad C_{25} + C_{35} = 0 \quad (2.17.b)$$

$$C_{26} + C_{45} = 0 \quad C_{35} + C_{46} = 0 \quad (2.17.c)$$

Ao inserir o mesmo vetor nas equações (2.11.d) e (2.11.e), e notando que um vetor normal ao vetor da equação (2.16) deve ter componente zero na direção  $x_1$ , tem-se que:

$$C_{26}b_2^2 + (C_{25} + C_{46})b_2b_3 + C_{45}b_3^2 = 0 \quad (2.17.d)$$

$$C_{46}b_2^2 + (C_{45} + C_{36})b_2b_3 + C_{35}b_3^2 = 0 \quad (2.17.e)$$

Ao considerar a solução do sistema das equações (2.17), chega-se na equação (2.15) provando-se que o plano de simetria monoclínica deste tensor está alinhado com o plano cartesiano  $x_2x_3$ . A matriz  $\mathbf{R}$  para o caso explicitado acima é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Os valores  $-1$  na 5ª e 6ª posição diagonal da matriz  $\mathbf{R}$  da equação (2.18) denotam reflexão nessas direções. Quando há uma única reflexão, ou seja, quando os pivos das diagonais relacionadas tem sinais diferentes, as constantes elásticas devem ser iguais ao seu valor negativo, cuja única solução é a trivial. Isso ocorre nas linhas/colunas 5 e 6, ao se considerar a matriz  $\mathbf{R}$  da equação (2.18). É por este motivo que ao observar a matriz na equação (2.15), essas propriedades são nulas.  $C_{56}$  é diferente de zero pois existe uma reflexão dupla. O mesmo ocorre para os valores na diagonal nas supramencionadas linhas.

Sendo assim, as constantes que se anulam, devido a esse plano de simetria e os tensores de Voigt e de dilatação, são:

$$C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{45} = C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{46} = 0 \quad (2.19.a)$$

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{55} + C_{66} & 0 & 0 \\ \text{sym} & C_{22} + C_{44} + C_{66} & C_{24} + C_{34} + C_{56} \\ & & C_{33} + C_{44} + C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.19.b)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 & 0 \\ \text{sym} & C_{12} + C_{22} + C_{23} & C_{14} + C_{24} + C_{34} \\ & & C_{13} + C_{23} + C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.19.c)$$

Se considerarmos que o plano de simetria do domínio é  $x_1x_2$ , conforme a Figura 2.2 (b), chega-se na forma mais usual de se representar um material monoclínico:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ \text{sym} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.20.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{26} \\ \text{sym} & & C_{66} \end{bmatrix} - \frac{1}{C_{33}} \begin{bmatrix} C_{13}^2 & C_{13}C_{23} & C_{13}C_{36} \\ & C_{23}^2 & C_{23}C_{36} \\ \text{sym} & & C_{36}^2 \end{bmatrix} \quad (2.20.b)$$

no qual a matriz  $\mathbf{R}$  é descrita como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Para este plano simétrico é apresentado o tensor constitutivo reduzido, pois é neste plano que ele é definido. O que se nota é que a forma deste tensor na simetria monoclínica é idêntica ao seu respectivo na simetria triclínica. Portanto, para esta teoria estrutural, a simetria mais baixa possível é a monoclínica, em concordância com o material que necessita de mais constantes elásticas para sua completa definição (Tabela 2.1).

Ao analisar o vetor normal ao plano de simetria, compatível com a Figura 2.2 (b), chega-se nas relações:

$$C_{35} = 0 \quad C_{34} = 0 \quad (2.22.a)$$

$$C_{15} + C_{25} = 0 \quad C_{14} + C_{24} = 0 \quad (2.22.b)$$

$$C_{15} + C_{46} = 0 \quad C_{56} + C_{24} = 0 \quad (2.22.c)$$

$$C_{15}b_1^2 + (C_{56} + C_{14})b_1b_2 + C_{46}b_2^2 = 0 \quad (2.22.d)$$

$$C_{56}b_1^2 + (C_{25} + C_{46})b_1b_2 + C_{24}b_2^2 = 0 \quad (2.22.e)$$

Novamente, resolvendo-se o sistema das equações (2.22) chega-se no tensor constitutivo descrito pela equação (2.20.a). As constantes nulas e os tensores de Voigt e de dilatação, mediante ao plano de simetria, são:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0 \quad (2.23.a)$$

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{55} + C_{66} & C_{16} + C_{26} + C_{45} & 0 \\ & C_{22} + C_{44} + C_{66} & 0 \\ sym & & C_{33} + C_{44} + C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.23.b)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & C_{16} + C_{26} + C_{36} & 0 \\ & C_{12} + C_{22} + C_{23} & 0 \\ sym & & C_{13} + C_{23} + C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.23.c)$$

Ainda existe o caso no qual o plano de simetria está contido em  $x_1x_3$ . Os tensores constitutivos ficam então:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ & & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{46} \\ & & & & C_{55} & 0 \\ sym & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Para o caso das equação (2.24), a matriz  $\mathbf{R}$  é escrita na forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Do mesmo modo que nos planos  $x_2x_3$  e  $x_1x_2$ , aplica-se a prova de Cowin & Mehrabadi, 1987, e obtêm-se que:

$$C_{26} = 0 \quad C_{24} = 0 \quad (2.26.a)$$

$$C_{16} + C_{36} = 0 \quad C_{14} + C_{34} = 0 \quad (2.26.b)$$

$$C_{16} + C_{45} = 0 \quad C_{56} + C_{34} = 0 \quad (2.26.c)$$

$$C_{16}b_1^2 + (C_{56} + C_{14})b_1b_3 + C_{45}b_3^2 = 0 \quad (2.26.d)$$

$$C_{56}b_1^2 + (C_{45} + C_{36})b_1b_3 + C_{34}b_3^2 = 0 \quad (2.26.e)$$

em que as constantes nulas e os tensores de Voigt e de dilatação são:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{56} = 0 \quad (2.27.a)$$

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{55} + C_{66} & 0 & C_{15} + C_{46} + C_{35} \\ & C_{22} + C_{44} + C_{66} & 0 \\ \text{sym} & & C_{33} + C_{44} + C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.27.b)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 & C_{15} + C_{25} + C_{35} \\ & C_{12} + C_{22} + C_{23} & 0 \\ \text{sym} & & C_{13} + C_{23} + C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.27.c)$$

Não importando qual o plano de simetria para materiais monoclínicos, são necessárias 13 constantes para caracterizá-lo completamente. A diferença entre os três casos está em qual plano existe o acoplamento de tensões normais com as cisalhantes.

### 2.1.3 SIMETRIA ORTORRÔMBICA

Na simetria ortorrômbica fazem-se necessárias 9 constantes independentes para caracterizar completamente o material. Esta simetria é caracterizada por ter três planos simétricos ortogonais entre si em concordância com a Figura 2.2 (c), quando os eixos coordenados são vetores normais aos planos reflexivos. Não serão mostradas as matrizes  $\mathbf{R}$  que são necessárias para a prova de tal simetria. Contudo, considerando que em uma simetria ortotrópica quando o retículo está alinhado com o sistema cartesiano, tem-se que seus planos de reflexão também estão alinhados com os planos desse sistema de modo que as equações (2.19.a), (2.23.a) e (2.27.a) devem ser satisfeitas simultaneamente. É fato, então, que as matrizes de rotação das equações (2.18), (2.21) e (2.25), além da matriz identidade  $6 \times 6$  fazem parte do grupo de transformação invariante da simetria ortorrômbica. Ou seja, a união dos grupos de simetria monoclinica quando seus planos reflexivos são ortogonais entre si gera uma simetria ortorrômbica. O tensor constitutivo e seu respectivo reduzido é descrito como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.28.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ & C_{22} & 0 \\ \text{sym} & & C_{66} \end{bmatrix} - \frac{1}{C_{33}} \begin{bmatrix} C_{13}^2 & C_{13}C_{23} & 0 \\ & C_{23}^2 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28.b)$$

As constantes nulas e os tensores de Voigt e de dilatação são:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{45} = C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{46} = C_{56} = 0 \quad (2.29.a)$$

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{55} + C_{66} & 0 & 0 \\ & C_{22} + C_{44} + C_{66} & 0 \\ \text{sym} & & C_{33} + C_{44} + C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.29.b)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 & 0 \\ & C_{12} + C_{22} + C_{23} & 0 \\ \text{sym} & & C_{13} + C_{23} + C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.29.c)$$

Nota-se que para a simetria ortogonal, os tensores de Voigt e de dilatação são diagonais. É importante citar que, apesar de ter sido dito que a simetria ortorrômbica corresponde a uma simetria com três planos mutuamente ortogonais, o requerimento matemático é que existam apenas dois planos normais. O terceiro plano aparece naturalmente, devido o axioma de fechamento. Outro ponto que já é conhecido deste tipo de simetria é o desacoplamento entre as tensões normais com as cisalhantes, além de que estas últimas são diretamente proporcionais às suas respectivas deformações.

#### 2.1.4 SIMETRIA TETRAGONAL

A simetria tetragonal é caracterizada por cinco planos reflexivos de simetria sendo três deles idênticos aos planos de simetria da classe ortorrômbica. Sendo assim, espera-se que esta simetria seja mais restritiva, pois, além conter os mesmos elementos de transformação do grupo de simetria ortorrômbica, adiciona-se mais restrições devido aos novos planos de reflexão, que são perpendiculares entre si e tem ângulo de  $45^\circ$  ( $\pi/4$ ) em relação aos planos ortorrômbicos. A Figura 2.2 (d) mostra os cinco planos de reflexão descritos. Como visto, a normal desses planos é perpendicular ao eixo  $x_3$ . Observa-se que esses planos também podem ser ortogonais aos outros

eixos coordenados. Contudo, não simultaneamente. Este é o caso da simetria cúbica e será explorado mais a frente. Utiliza-se então, como base às equações (2.11) e a equação (2.28.a). A tríade  $\boldsymbol{\eta}_1$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2$  e  $\boldsymbol{\eta}_3$  é montada de forma que o vetor  $\boldsymbol{\eta}_3$  esteja alinhado ao eixo  $x_3$ , como já discutido e demonstrado na Figura 2.2 (d), e  $\boldsymbol{\eta}_1$  e  $\boldsymbol{\eta}_2$  rotacionem em torno deste eixo. Sabendo-se da posição dos planos reflexivos não haveria a necessidade dessa rotação variável. Entretanto, faz-se esse giro, pois as equações resultantes podem ser usadas nesta e em outras simetrias demonstrando de forma categórica as diferenças matemáticas e físicas das simetrias.

Aplicando-se essa tríade nas equações (2.11) chega-se em 10 equações dependentes das propriedades constitutivas e da posição de  $\boldsymbol{\eta}_1$  e  $\boldsymbol{\eta}_2$ . As outras cinco restantes são apenas identidades devido à orientação do vetor  $\boldsymbol{\eta}_3$ . Apenas cinco equações são independentes, ao considerar a variação da rotação<sup>33</sup>. As restrições são escritas como:

$$C_{11} \cos^2 \theta + (1 - 2 \cos^2 \theta)C_{12} + (\cos^2 \theta - 1)C_{22} + 2(1 - 2 \cos^2 \theta)C_{66} = 0 \quad (2.30.a)$$

$$C_{11}(\cos^2 \theta - 1) + (1 - 2 \cos^2 \theta)C_{12} + \cos^2 \theta C_{22} + 2(1 - 2 \cos^2 \theta)C_{66} = 0 \quad (2.30.b)$$

$$C_{55} + C_{11} - C_{22} - C_{44} = 0 \quad (2.30.c)$$

$$C_{13} + C_{11} - C_{22} - C_{23} = 0 \quad (2.30.d)$$

$$C_{44} - C_{55} = 0 \quad (2.30.e)$$

Por intermédio da equação (2.30.e), obtém-se que  $C_{44} = C_{55}$ ,  $C_{11} = C_{22}$  (eq. (2.30.c)) e  $C_{13} = C_{23}$  (eq. (2.30.d)). Com essas relações, as equações (2.30.a) e (2.30.b) se reduzem a uma única equação escrita na forma:

$$(1 - 2 \cos^2 \theta)(C_{12} - C_{11} + 2C_{66}) = 0 \quad (2.31)$$

Satisfaz-se a equação (2.31) obtendo o zero da relação trigonométrica ou da relação entre as propriedades elásticas. A primeira afirmação deve-se ao material tetragonal que, como dito, tem planos simétricos em  $\pi/4$ . A segunda afirmação é dada para materiais transversalmente isotrópicos e será abordada mais a frente. Obtêm-se então os tensores tetragonais na forma:

---

<sup>33</sup>  $\sin \theta \neq 0$  e  $\cos \theta \neq 0$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ \text{sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.32.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ & C_{11} & 0 \\ \text{sym} & & C_{66} \end{bmatrix} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32.b)$$

É encontrado no trabalho de Marczak & Denda, 2010, e Tu, 1968, um tensor tetragonal especial cujo qual necessitaria de sete constantes para ser descrito. Conforme Cowin & Mehrabadi, 1995, esse tensor pode ser modificado por uma rotação arbitrária de modo que se reduza ao tensor escrito na equação (2.32.a) de forma que um material tetragonal é descrito por apenas seis constantes. Portanto, não há dois grupos simétricos dentro da simetria cristalina tetragonal, cujos quais são normalmente denominados tetragonal  $m = 7$  e  $m = 6$  (Marczak & Denda, 2010).

Os tensores de Voigt e de Dilatação são descritos como:

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{55} + C_{66} & 0 & 0 \\ & C_{22} + C_{44} + C_{66} & 0 \\ \text{sym} & & C_{33} + 2C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.33.a)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 & 0 \\ & C_{12} + C_{22} + C_{23} & 0 \\ \text{sym} & & 2C_{13} + C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.33.b)$$

### 2.1.5 SIMETRIA CÚBICA

A simetria cúbica necessita de três constantes para sua completa descrição. Essa simetria é caracterizada por nove planos de simetria incluindo os três planos ortogonais e seis planos da simetria tetragonal, ao se considerar que os eixos de rotação dos dois planos adicionais tetragonais sejam normais entre si (Figura 2.2 (e)). É importante explicitar, pelo mesmo argumento da simetria ortogonal, que não há a necessidade de cálculo dos dois planos adicionais. Calculando-se apenas dois que, ao observar a tríade, é feito de uma vez só, obtêm-se as relações para os quatro planos, devido o axioma de fechamento. Sendo assim, usa-se como base o tensor tetragonal e faz-se a rotação em torno do eixo  $x_2$  (notando-se que seria indiferente qual eixo

utilizado para rotacionar os planos reflexivos) e, por intermédio das equações (2.11) e o tensor da equação (2.32.a), obtêm-se as relações necessárias. Chega-se então em:

$$C_{33} \cos^2 \theta + (1 - 2 \cos^2 \theta)C_{13} + (\cos^2 \theta - 1)C_{11} + 2(1 - 2 \cos^2 \theta)C_{44} = 0 \quad (2.34.a)$$

$$C_{33}(\cos^2 \theta - 1) + (1 - 2 \cos^2 \theta)C_{13} + \cos^2 \theta C_{11} + 2(1 - 2 \cos^2 \theta)C_{44} = 0 \quad (2.34.b)$$

$$C_{66} + C_{11} - C_{33} - C_{44} = 0 \quad (2.34.c)$$

$$C_{12} + C_{11} - C_{33} - C_{13} = 0 \quad (2.34.d)$$

$$C_{44} - C_{66} = 0 \quad (2.34.e)$$

Com a equação (2.34.e) tem-se que  $C_{44} = C_{66}$ ,  $C_{11} = C_{33}$  (eq. (2.34.c)) e  $C_{12} = C_{13}$  (eq. (2.34.d)). Da mesma maneira que o material tetragonal, as equações (2.34.a) e (2.34.b) se reduzem à mesma, quando considerada a solução das equações (2.34.c) – (2.34.e). Chega-se em:

$$(1 - 2 \cos^2 \theta)(C_{12} - C_{11} + 2C_{44}) = 0 \quad (2.35)$$

que, conforme a equação (2.31), pode ter duas soluções: uma com relação à  $\theta$  e outra com uma relação entre as constantes. A primeira é dada como  $\theta = \pi/4$ , que é um plano de simetria do material aqui estudado. A segunda é relacionada com a simetria isotrópica e será desenvolvida mais a frente. Sendo assim, o tensor da simetria cúbica é dado como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ \text{sym} & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.36.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ & C_{11} & 0 \\ \text{sym} & & C_{44} \end{bmatrix} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36.b)$$

e os tensores de Voigt e Dilatação são:

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + 2C_{44} & 0 & 0 \\ & C_{11} + 2C_{44} & 0 \\ \text{sym} & & C_{11} + 2C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.37.a)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + 2C_{12} & 0 & 0 \\ & C_{11} + 2C_{12} & 0 \\ \text{sym} & & C_{11} + 2C_{12} \end{bmatrix} \quad (2.37.b)$$



### 2.1.6 SIMETRIA TRIGONAL

A simetria trigonal contém três planos de simetria que são defasados  $\pi/3$  entre eles, em conformidade com a Figura 2.2 (f). Um desses planos pode ser considerado paralelo a um plano cartesiano que pode ser traduzido por um dos planos monoclinicos apresentados no capítulo 2.1.2. Portanto, a simetria trigonal deve ser considerada mais restritiva que a simetria monoclinica e devido a isso, se utilizará o tensor dessa simetria para os cálculos. Como mostrado nessa simetria, existem três tensores monoclinicos. Será utilizado o tensor da equação (2.24.a). Cowin & Mehrabadi, 1995, e Marczak & Denda, 2010, utilizam o da equação (2.15). Portanto, esperam-se diferenças entre os tensores aqui apresentados e os tensores apresentados nos supramencionados trabalhos.

Ao utilizar o tensor da equação (2.24) e rotacioná-lo  $\theta$  em torno do eixo  $x_3$  com o plano monoclinico em  $x_1x_3$  e com a tríade já explicada, chega-se nas seguintes equações:

$$(C_{11} + C_{22} - 4C_{66} - 2C_{12}) \cos^2 \theta + 2C_{66} + C_{12} - C_{22} = 0 \quad (2.38.a)$$

$$(C_{15} - 2C_{46} - C_{25}) \cos^2 \theta + 2C_{46} + C_{25} = 0 \quad (2.38.b)$$

$$C_{55} + C_{11} - C_{22} - C_{44} = 0 \quad (2.38.c)$$

$$C_{15} + C_{46} + C_{35} = 0 \quad (2.38.d)$$

$$C_{11} + C_{13} - C_{22} - C_{23} = 0 \quad (2.38.e)$$

$$C_{15} + C_{25} + C_{35} = 0 \quad (2.38.f)$$

$$(C_{11} + C_{22} - 4C_{66} - 2C_{12}) \cos^2 \theta + 2C_{66} + C_{12} - C_{11} = 0 \quad (2.38.g)$$

$$(C_{15} - 2C_{46} - C_{25}) \cos^2 \theta + C_{46} + C_{25} - C_{15} = 0 \quad (2.38.h)$$

$$C_{35} = 0 \quad (2.38.i)$$

$$C_{44} - C_{55} = 0 \quad (2.38.j)$$

A equação (2.38.i) é direta, bem como as equações (2.38.j), (2.38.c) e (2.38.e), obtendo  $C_{44} = C_{55}$ ,  $C_{25} = -C_{15}$  e  $C_{46} = -C_{15}$ , respectivamente. Também se pode obter, rapidamente, a  $C_{22} = C_{33}$  (eq. (2.38.d)) e, com isso, chegar em  $C_{13} = C_{23}$  (eq. (2.38.f)). As equações restantes se reduzem a duas equações que são escritas como:

$$(1 - 2 \cos^2 \theta)(C_{12} - C_{11} + 2C_{66}) = 0 \quad (2.39.a)$$

$$(3 - 4 \cos^2 \theta)C_{15} = 0 \quad (2.39.b)$$

que, para  $\theta = \pi/6$ , cujo qual é um plano reflexivo desta simetria, a equação (2.39.b) é satisfeita mas a equação (2.39.a) não<sup>34</sup>. Portanto, é necessário que:

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad (2.40)$$

Tem-se então que os tensores são:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & -C_{15} & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & -C_{15} \\ & & & & C_{44} & 0 \\ sym & & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.41.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ & C_{11} & 0 \\ sym & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ sym & 1 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.41.b)$$

e os tensores de Voigt e Dilatação são:

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{44} + \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & C_{11} + C_{44} + \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ sym & & C_{33} + 2C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.42.a)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 & 0 \\ & C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 \\ sym & & C_{33} + 2C_{13} \end{bmatrix} \quad (2.42.b)$$

### 2.1.7 SIMETRIA HEXAGONAL (TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO)

Para a simetria hexagonal ou transversalmente isotrópica, utiliza-se o tensor da simetria tetragonal (equação (2.32.a)) e a equação utilizada para montá-lo (equação (2.31)). Naquele cálculo, analisava-se uma simetria em relação a um plano definido em  $\pi/4$ . Ou seja, a equação

<sup>34</sup> Ao satisfazer a parte trigonométrica da equação (2.39.a), obtém-se um plano perpendicular ao monoclinico utilizado como base neste cálculo. Por intermédio do axioma de fechamento, reduz-se a um material ortorrômbico.

(2.31) era satisfeita por intermédio desse plano. Se, no entanto, satisfizermos a equação por intermédio de uma relação entre as propriedades elásticas, chega-se a um material que tem infinitas simetrias na direção de rotação. Ou seja, qualquer rotação produzida em torno do eixo  $x_3$ , para o caso apresentado, é uma transformação invariante ao tensor constitutivo, em acordo com a Figura 2.2 (f). O cilindro na figura mencionada descreve esse comportamento. Este material é um material transversalmente isotrópico (ou seja, no seu plano transversal ele tem isotropia).

A relação da equação (2.31) que deve ser obedecida é:

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad (2.43)$$

E os tensores são descritos como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ \text{sym} & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.44.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ & C_{11} & 0 \\ \text{sym} & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44.b)$$

E os tensores de Voigt e de Dilatação são:

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{44} + \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ & C_{11} + C_{44} + \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ \text{sym} & & C_{33} + 2C_{44} \end{bmatrix} \quad (2.45.a)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 & 0 \\ & C_{11} + C_{12} + C_{13} & 0 \\ \text{sym} & & C_{33} + 2C_{13} \end{bmatrix} \quad (2.45.b)$$

É importante notar que a simetria hexagonal contém apenas materiais transversalmente isotrópicos (em acordo com o apresentado por Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001). De acordo com Cowin & Mehrabadi, 1995, o tensor constitutivo de um cristal hexagonal e de um material transversalmente isotrópico (chamado pelos autores de materiais com textura transversal

isotrópica) é idêntico e conseqüentemente são tratados como iguais. Ressalte-se que materiais transversalmente isotrópicos tem tensor constitutivo reduzido idêntico a materiais trigonais, respeitando os planos de reflexão utilizados em ambas as simetrias.

### 2.1.8 SIMETRIA ISOTRÓPICA

A simetria isotrópica pode ser obtida por intermédio do tensor da equação (2.36.a) e a equação (2.35). A Figura 2.2 (h) apresenta os planos de reflexão deste material. A esfera representa que qualquer transformação aplicada ao tensor isotrópico é uma transformação invariante. Consoante ao que foi feito na simetria hexagonal, satisfaz-se a equação (2.35) com relação às constantes elásticas. Portanto tem-se que:

$$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad (2.46)$$

e os tensores são:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ \text{sym} & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.47.a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ & C_{11} & 0 \\ \text{sym} & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47.b)$$

e os tensores de Voigt e Dilatação são:

$$C_{ij}^{voi} = \begin{bmatrix} 2C_{11} - C_{12} & 0 & 0 \\ & 2C_{11} - C_{12} & 0 \\ \text{sym} & & 2C_{11} - C_{12} \end{bmatrix} \quad (2.48.a)$$

$$C_{ij}^{dil} = \begin{bmatrix} C_{11} + 2C_{12} & 0 & 0 \\ & C_{11} + 2C_{12} & 0 \\ \text{sym} & & C_{11} + 2C_{12} \end{bmatrix} \quad (2.48.b)$$

Materiais de simetria isotrópica são os mais simples descritos pela lei de Hooke generalizada. Ao relacionar os resultados obtidos neste trabalho – e conseqüentemente pelos

trabalhos de Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001, e Cowin & Mehrabadi, 1995 – por intermédio da aplicação sistemática das equações (2.11) com aqueles descritos em Marczak & Denda, 2010, e Smith, Smith, & Rivlin, 1963, pode-se estabelecer diferenças entre os tensores obtidos neste texto e nos trabalhos supramencionados. As diferenças dar-se-ão por dois motivos: conceituação de grupos cristalinos diferentes e simetrias que se reduzem (cujas quais são apresentadas em Marczak & Denda, 2010, e não neste trabalho). A relação entre os tensores aqui apresentados e os encontrados em Marczak & Denda, 2010, p. Apêndice C é dada pela Tabela 2.2. Também são inseridas nesta tabela algumas propriedades inerentes a cada uma das simetrias.

## 2.2 CONCLUSÃO

Apresentou-se neste capítulo as simetrias cristalinas, suas propriedades elásticas e algumas relações internas. Conforme diversos trabalhos, elas são descritas em oito grupos de classes cristalinas. Mostrou-se que certas simetrias se reduzem a outras por intermédio de rotações arbitrárias que não tem relação com seus grupos de transformação. Muitas simetrias que eram consideradas casos específicos não o são (Cowin & Mehrabadi, 1995). Demonstrou-se, para cada grupo simétrico, seu respectivo tensor constitutivo reduzido. Para certas simetrias, como é o caso da simetria triclínica com monoclínica e trigonal com transversalmente isotrópica, respeitando os planos reflexivos utilizados na comparação, os tensores constitutivos reduzidos são idênticos. As informações demonstradas neste capítulo serão utilizadas no estudo das decomposições do tensor constitutivo e na apresentação de uma nova decomposição, encontrada no capítulo 4.

Tabela 2.2 – Relações entre os tensores do presente trabalho com aqueles encontrados em Marczak & Denda, 2010 bem como algumas propriedades das simetrias.

Presente Trabalho	Marczak & Denda, 2010	Observações
Triclínico	Triclínico	Inexistência de simetrias internas.
Monoclínico	Monoclínico	Definida por conter apenas um plano reflexivo. No trabalho de Marczak & Denda, 2010, é apresentado o tensor com plano reflexivo paralelo à $x_1x_2$ .
Ortorrômbico	Ortorrômbico	Contém três eixos de reflexão ortogonais.
Tetragonal	Tetragonal ( $m = 7$ )	Com uma rotação arbitrária, reduz-se o tensor para a simetria tetragonal ( $m = 6$ ) em Marczak & Denda, 2010.
	Tetragonal ( $m = 6$ )	Contém cinco planos de reflexão: três ortogonais, mais dois planos também ortogonais entre si e à $\pi/4$ de um dos planos ortogonais com apenas um eixo de rotação.
Trigonal	Hexagonal ( $m = 7$ )	Com uma rotação arbitrária, reduz-se o tensor para a simetria hexagonal ( $m = 6$ ) em Marczak & Denda, 2010.
	Hexagonal ( $m = 6$ )	Contém três planos reflexivos que estão à $\pi/3$ entre si. A intersecção dos três planos é dada por um eixo de rotação cujo qual é medido o ângulo de $\pi/3$ .
Transversalmente Isotrópico	Hexagonal ( $m = 5$ )	Contém um plano reflexão monoclínico e, neste plano, uma simetria isotrópica. Dentro desse plano isotrópico, qualquer rotação é invariante. Fora dele, apenas uma reflexão.
Cúbico	Cúbico	Contém 9 planos reflexivos: três ortogonais e seis planos semelhantes aos planos tetragonais, neste caso com três eixos de rotação (que fazem $\pi/4$ com relação aos planos ortogonais).
Isotrópico	Isotrópico	Contém infinitos planos reflexão. Qualquer transformação é invariante ao tensor constitutivo.

### 3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Neste capítulo serão apresentadas as soluções fundamentais dos operadores lineares objetos deste trabalho: placas finas e elasticidade tridimensional. Como a forma de tratamento das soluções é via transformada de Fourier e devido a sua utilização na decomposição cinemática e nas duas abordagens da decomposição constitutiva das soluções fundamentais supramencionadas, uma breve introdução sobre esse tema será apresentada. Como, normalmente, a transformada de Fourier é mostrada para sistemas unidimensionais, serão exibidas as relações para domínios bi e tridimensionais, para seu uso nos operadores diferenciais de placas finas e elasticidade tridimensional, respectivamente, bem como para sistemas de coordenadas diferentes do cartesiano. Por intermédio desta ferramenta matemática, obtém-se a forma integral das soluções fundamentais de ambos operadores. A metodologia da obtenção deste formato segue de maneira análoga a encontrada no trabalho de Marczak & Denda, 2010. Como não é objetivo deste trabalho, a derivação das soluções fundamentais não será apresentada aqui. Elas serão retiradas de trabalhos como Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002, e Buroni, Ortiz, & Saez, 2010, além de outros encontrados na literatura.

#### 3.1 TRANSFORMADA DE FOURIER PARA DOMÍNIOS BI E TRIDIMENSIONAIS

A Transformada de Fourier decompõe uma função qualquer em componentes harmônicos de diferentes frequências. Ou seja, a saída da transformação é uma função em seu domínio de frequências enquanto a entrada é essa função em domínio espacial ou temporal. Em funções periódicas, a transformada se reduz às Séries de Fourier. Um dos pontos mais importantes da transformada é na sua utilização para a solução de equações diferenciais. Uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$ , é transformada em um polinômio de ordem  $n$  no domínio de

frequência. Pode-se, então, manipular essa equação algebricamente e aplicar a transformada inversa para a sua solução.

Sejam, então, as funções  $f(x_1, x_2, x_3) = f(\mathbf{x})$  e  $g(x_1, x_2) = g(\mathbf{x})$ , suas transformadas de Fourier e a respectivas inversas são escritas como:

$$\hat{f}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (3.1.a)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\boldsymbol{\zeta}) e^{i(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x})} d\boldsymbol{\zeta} \quad (3.1.b)$$

$$\hat{g}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) e^{-i(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (3.2.a)$$

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\boldsymbol{\zeta}) e^{i(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x})} d\boldsymbol{\zeta} \quad (3.2.b)$$

em que  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2\}$  e  $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_1 \ \zeta_2\}$  para as equações (3.2.a) e (3.2.b) e  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}$  e  $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3\}$  para as equações (3.1.a) e (3.1.b) respectivamente. Ambos os vetores representam um sistema cartesiano e  $d\mathbf{x}$  e  $d\boldsymbol{\zeta}$  denotam os produtórios dos diferenciais em função dos vetores e dimensões do problema.  $(\cdot)$  corresponde ao produto interno entre dois vetores e  $\hat{f}(\boldsymbol{\zeta})$  corresponde à transformada de Fourier de  $f(\mathbf{x})$ . O acento circunflexo sobre uma função denota que essa função está no domínio transformado. Por meio da identidade de Euler, que decompõe  $e^{iz}$  em senos e cossenos em  $z$ , comprova-se a afirmação que a Transformada de Fourier decompõe uma função qualquer em termos harmônicos. Um ponto interessante a ser colocado é a consistência dimensional da transformada de Fourier e sua inversa. Ele dependerá das dimensões da função transformada e das dimensões adotadas na transformação (bi ou tridimensional). O domínio da transformada de Fourier é chamado de domínio das frequências, pois quando uma função temporal (escritas em segundos [s], por exemplo) é transformada, as variáveis da transformação de Fourier  $\zeta$  tem dimensão de frequência, ou seja,  $[1/s = Hz]$ . Para transformações espaciais, que é o caso aqui, as variáveis da função estão definidas em unidades de distância, por exemplo, metros [m]. Portanto, as variáveis da transformação terão unidades de  $[1/m]$ .



As equações (3.1) – (3.2) podem ser reescritas em uma notação mais compacta:

$$\hat{f}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{F}_{\boldsymbol{\zeta}}\{f(\mathbf{x})\} \quad \hat{g}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathcal{F}_{\boldsymbol{\zeta}}\{g(\mathbf{x})\} \quad (3.3.a)$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}^{-1}\{\hat{f}(\boldsymbol{\zeta})\} \quad g(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{\mathbf{x}}^{-1}\{\hat{g}(\boldsymbol{\zeta})\} \quad (3.3.b)$$

Ao aplicar a primeira equação (3.3.a) na primeira na equação (3.3.b) (ou alternativamente, aplicar a segunda equação (3.3.a) na segunda equação (3.3.b)), prova-se que a transformada de Fourier é uma transformação conforme. Ademais, por intermédio das equações (3.1), verifica-se que é uma transformação linear, em função da propriedade de linearidade da integral. Todas as propriedades anteriores e a seguir advém das equações (3.1) e são relativamente fáceis de provar. Essas provas podem ser encontradas na literatura (Bracewell, 1999; Baddour, 2010).

É importante ressaltar que mudanças de coordenadas nas transformadas e suas inversas mostradas nas equações (3.1) – (3.2) podem simplificar a integração direta das equações. Além disso, pode-se obter uma função transformada em domínio cartesiano de uma função espacial/temporal, cujo seu respectivo domínio é circular, ou polar. A inversa desta operação também existe. Como também se pode derivar uma solução em coordenadas esféricas e obter sua transformada também nessas coordenadas. Então:

$$\hat{g}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(r, \theta) e^{-ir(\zeta_1 \cos \theta + \zeta_2 \sin \theta)} r dr d\theta \quad (3.4.a)$$

$$\hat{g}(\rho, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) e^{-i\rho(x_1 \cos \phi + x_2 \sin \phi)} d\mathbf{x} \quad (3.4.b)$$

$$\hat{g}(\rho, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(r, \theta) e^{-ir\rho \cos(\theta - \phi)} r dr d\theta \quad (3.4.c)$$

em que  $(r, \theta)$  e  $(\rho, \phi)$  são coordenadas polares do sistema real e transformado respectivamente. Semelhantemente ao demonstrado nas equações (3.4), pode-se obter as inversas das transformadas. Nota-se que a equação (3.4.c) é semelhante à transformada de Hankel (Bracewell, 1999), quando a função  $g(r, \theta)$  é independente de  $\theta$ . Essa transformada pode obter de forma mais eficiente a solução fundamental isotrópica – tanto de placas finas quanto na elasticidade tridimensional.

Sejam as mesmas funções  $f(x_1, x_2, x_3) = f(\mathbf{x})$  e  $g(x_1, x_2) = g(\mathbf{x})$ . Sua enésima derivada em  $x_m$ , no domínio transformado é:

$$\mathcal{F}_\zeta \left\{ \frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x_m^n} \right\} = (i\zeta_m)^n \hat{f}(\zeta) \therefore \mathcal{F}_\zeta \left\{ \frac{\partial^n g(\mathbf{x})}{\partial x_m^n} \right\} = (i\zeta_m)^n \hat{g}(\zeta) \quad (3.5)$$

segundo o qual  $n$  é um número natural e  $m$  designa o eixo no qual é feita a diferenciação. É por intermédio desta propriedade que a transformada de Fourier modifica uma equação ou um sistema diferencial linear em uma equação ou sistema polinomial. Se considerarmos  $n$  par, a transformada de uma diferenciação é sempre real. Este é o caso dos operadores objetos neste trabalho.

Sejam as funções  $f_1(x_1, x_2, x_3) = f_1(\mathbf{x})$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3) = f_2(\mathbf{x})$ ,  $g_1(x_1, x_2) = g_1(\mathbf{x})$  e  $g_2(x_1, x_2) = g_2(\mathbf{x})$ . A transformada de Fourier de um produto entre funções no domínio real é dada por uma operação chamada convolução. Ela é descrita como:

$$\mathcal{F}_\zeta \{f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x})\} = \hat{f}_1(\zeta) *** \hat{f}_2(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(\zeta') \hat{f}_2(\zeta' - \zeta) d\zeta' \quad (3.6.a)$$

$$\mathcal{F}_\zeta \{g_1(\mathbf{x})g_2(\mathbf{x})\} = \hat{g}_1(\zeta) ** \hat{g}_2(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_1(\zeta') \hat{g}_2(\zeta' - \zeta) d\zeta' \quad (3.6.b)$$

no qual  $*$  corresponde a operação de convolução e a sua quantidade denota o número de direções da convolução. É importante salientar as condições de existência dessa operação: as funções  $\hat{f}_i(\zeta')$  e  $\hat{g}_i(\zeta')$  devem obedecer a desigualdade de Cauchy-Schwarz<sup>35</sup>. A mesma operação é utilizada para a obtenção da inversa da transformada de um produto entre funções descritas no domínio transformado. Portanto, a contrapartida das equações (3.6) é dada por:

$$\mathcal{F}_x^{-1} \{ \hat{f}_1(\zeta) \hat{f}_2(\zeta) \} = f_1(\mathbf{x}) *** f_2(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathbf{x}') f_2(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}' \quad (3.7.a)$$

$$\mathcal{F}_x^{-1} \{ \hat{g}_1(\zeta) \hat{g}_2(\zeta) \} = g_1(\mathbf{x}) ** g_2(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\mathbf{x}') g_2(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}' \quad (3.7.b)$$

<sup>35</sup> Ela enuncia que o quadrado do valor absoluto da integral do produto de duas funções quaisquer no seu domínio deve ser menor ou igual ao produto entre as integrais do quadrado do valor absoluto dessas duas funções:  $|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) dx|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx$ .

A convolução é comutativa, associativa e distributiva. Outras três propriedades dessa operação são:

$$f(\mathbf{x}) *** \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) \therefore g(\mathbf{x}) ** \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) \quad (3.8.a)$$

$$f^{(-1)}(\mathbf{x}) *** f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \therefore g^{(-1)}(\mathbf{x}) ** g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (3.8.b)$$

$$L(\partial_x)[f_1(\mathbf{x}) *** f_2(\mathbf{x})] = [L(\partial_x)f_1(\mathbf{x})] *** f_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) *** [L(\partial_x)f_2(\mathbf{x})] \quad (3.8.c)$$

$$L(\partial_x)[g_1(\mathbf{x}) ** g_2(\mathbf{x})] = [L(\partial_x)g_1(\mathbf{x})] ** g_2(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x}) ** [L(\partial_x)g_2(\mathbf{x})] \quad (3.8.d)$$

e são chamadas de identidade multiplicativa, elemento inverso e diferenciação.  $f^{(-1)}(\mathbf{x})$  é chamado de elemento inverso,  $\delta(\mathbf{x})$  é a função delta de Dirac e  $L(\partial_x)$  é um operador diferencial qualquer. Essas três propriedades estão intimamente ligadas às soluções fundamentais de operadores diferenciais quaisquer. Dada uma solução  $f(\mathbf{x})$  de um operador diferencial  $L(\partial_x)$  em que  $f_{ext}(\mathbf{x})$  é a excitação externa, escreve-se que:

$$L(\partial_x)f(\mathbf{x}) = f_{ext}(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

que, por intermédio de sua solução fundamental  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pode ser obtida na forma:

$$f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) *** f_{ext}(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

A prova da equação (3.10) é bastante simples. Aplica-se, em ambos os lados desta equação, o operador  $L(\partial_x)$ , que por intermédio das equações (3.8.a) e (3.8.c), reduz-se a uma identidade do tipo  $f_{ext}(\mathbf{x}) = f_{ext}(\mathbf{x})$ . Existem diversas outras propriedades dessa transformada (Bracewell, 1999). Apresenta-se aqui apenas aquelas utilizadas para a determinação das decomposições. Para domínios cilíndricos e esféricos, a descrição da convolução é mais complexa devido ao fato que a relação entre as funções convoluídas se dá pela distância cartesiana entre dois pontos (ponto fonte e campo). Propriedades da transformada de Fourier e a convolução em domínios esféricos podem ser encontradas no trabalho de Baddour, 2010.

### 3.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS FINAS

A equação diferencial de placas finas, se considerado apenas o deslocamento transversal, pode ser escrita como (Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002):

$$\left[ D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \right. \quad (3.11)$$

$$+4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \Big] u_3(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$$

no qual  $D_{ij} = h^3 \tilde{C}_{ij}/12$ , com  $i$  e  $j$  variando em 1, 2 e 6, o tensor constitutivo reduzido  $\tilde{C}_{ij}$  é demonstrado no capítulo 2<sup>36</sup>,  $u_3(x_1, x_2)$  denota o deslocamento transversal da placa e  $g(x_1, x_2)$  é a parte não-homogênea, ou seja, o termo fonte da equação (3.11). Fisicamente, esta parte corresponde ao carregamento externo aplicado à superfície média e  $D_{ij}$  denota a rigidez de placas finas<sup>37</sup>. Devido às propriedades do tensor constitutivo, o operador diferencial linear da equação (3.11) é elíptico. O domínio no qual a equação diferencial descreve o comportamento elástico do componente é definido pela Figura 3.1, no qual  $\Omega$  denota o domínio tridimensional da placa,  $\Gamma_\Omega$  é o contorno desse domínio – uma superfície –,  $\Lambda$  corresponde o plano médio da placa – área hachurada – bem como  $\Gamma_\Lambda$  seu contorno – uma linha –,  $h$  representa a espessura, o vetor  $\mathbf{n}$  responde pela normal externa ao contorno  $\Gamma_\Lambda$  e o vetor  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$  são eixos coordenados cartesianos. A teoria estrutural de placas finas define que todo o comportamento mecânico de um componente similar ao da Figura 3.1 – plano na configuração indeformada e com razão de esbeltez alta<sup>38</sup> - pode ser descrito pelo comportamento da superfície média ( $\Lambda$ ) apenas (Timoshenko & Woinowsky-Kreiger, 1959).

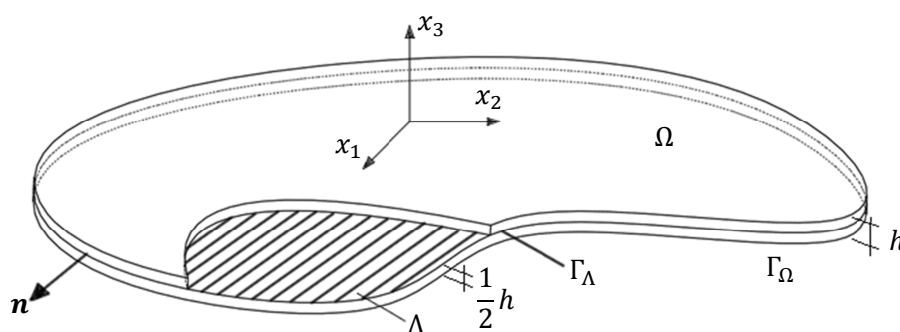


Figura 3.1 - Domínio de uma Placa Fina

Por intermédio das condições de contorno, descritas como:

<sup>36</sup> O caso mais anisotrópico é dado pela equação (2.20.b) descreve um material monoclinico com plano de reflexão paralelo a superfície média da placa fina.

<sup>37</sup> Para um tensor constitutivo reduzido isotrópico, essa rigidez é também conhecida como constante de Sophie-Germain.

<sup>38</sup> Uma discussão sobre os limites das razões de esbeltez para a aplicabilidade de placas finas pode ser encontrada na dissertação de mestrado do autor da tese (Lisbôa, 2009).

$$u_3(x_1, x_2) = \bar{u}_3(x_1, x_2) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.12.a)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial n}(x_1, x_2) = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial n}(x_1, x_2) \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.12.b)$$

em que  $\Gamma_\Lambda = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = 0$ , e da equação (3.11), pode-se obter o comportamento elástico da superfície média quando submetida ao carregamento descrito por  $g(x_1, x_2)$ . Diversos métodos bem como variadas formas de obter soluções para o sistema descrito pelas equações (3.11) – (3.12) são encontradas na literatura<sup>39</sup>. A título de exemplificação, cita-se Timoshenko & Woinowsky-Kreiger, 1959.

Marczak & Denda, 2010, demonstram algumas formas de obtenção da solução fundamental do operador linear elíptico da elasticidade tridimensional. Naquele trabalho, é aplicado a transformada de Fourier em conjunto com integrações por partes para determinar a forma integral da solução fundamental e, a partir dela, desenvolver metodologias para obtenção de sua forma direta. Nesta tese um outro modo será apresentado. Reescreve-se, então, a equação (3.11) na forma de um operador diferencial, como:

$$L(\boldsymbol{\partial}_x)u_3(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) \quad (3.13)$$

em que:

$$L(\boldsymbol{\partial}_x) = \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\partial}^T \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\partial} \therefore L(\boldsymbol{\partial}_x) = \frac{h^3}{12} \tilde{c}_{ijkl} \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l \quad (3.14.a)$$

$$\boldsymbol{\partial}^T = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} \therefore \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.14.b)$$

Os índices nas equações (3.14) –  $i, j, k, l$  – variam de 1 a 2. O tensor constitutivo de quarta ordem para placas –  $\tilde{c}_{ijkl}$  – é o tensor constitutivo reduzido de quarta ordem (e é relativo ao seu respectivo de segunda ordem mostrado no capítulo 2). A equação (3.13) é idêntica à equação (3.11). Aplica-se, então, em ambos os lados da equação (3.13) a transformada de Fourier (equação (3.2.a)) e obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\boldsymbol{\partial}_x)u_3(x_1, x_2) e^{-i\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x}} dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) e^{-i\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x}} dx_1 dx_2 \quad (3.15)$$

<sup>39</sup> Problemas de valor de contorno ou PVC.

A parte esquerda da equação (3.15) pode ser desenvolvida de diversas formas. Uma maneira bastante simples é considerar a propriedade da transformada de Fourier quando aplicada à equações diferenciais (eq. (3.5)). Portanto:

$$\frac{h^3}{12} \tilde{c}_{ijks} \zeta_s \zeta_k \zeta_j \zeta_i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_3(x_1, x_2) e^{-i\zeta \cdot x} dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) e^{-i\zeta \cdot x} dx_1 dx_2 \quad (3.16)$$

no qual percebe-se que:

$$L(\zeta) = \frac{h^3}{12} \tilde{c}_{ijks} \zeta_i \zeta_j \zeta_k \zeta_s = \mathcal{F}_\zeta\{L(\boldsymbol{\theta}_x)\} \quad (3.17)$$

Tanto para o operador de placas finas quanto para a elasticidade tridimensional, esta nomenclatura será usada<sup>40</sup>. Reescreve-se (3.16), por intermédio da equação (3.17), na forma:

$$L(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_3(x_1, x_2) e^{-i\zeta \cdot x} dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) e^{-i\zeta \cdot x} dx_1 dx_2 \quad (3.18)$$

Ao considerar a equação (3.2.a) e notar a positividade do operador  $L(\zeta)$ , além da sua grandeza escalar, reescreve-se a equação (3.18) de forma que:

$$\hat{u}_3(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{1}{L(\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) e^{-i\zeta \cdot x} dx_1 dx_2 \quad (3.19)$$

que, aplicando-se a transformada inversa (eq. (3.2.b)), fica:

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L(\zeta)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) e^{-i\zeta \cdot x} dx_1 dx_2 \right] e^{i\zeta \cdot x} d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (3.20)$$

Por intermédio da equação (3.20), pode-se obter soluções fundamentais para diversos tipos de carregamento – pontuais, em linha, entre outros (Marczak & Denda, 2010). Ao alterar a função carregamento  $g(x_1, x_2)$  pela função delta de Dirac –  $\delta(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)$  –, cuja representação é de uma carga pontual aplicada no domínio, e, por meio de suas propriedades (Kythe, 1996), obtém-se:

<sup>40</sup> Quando o operador está no domínio transformado, não é colocado acento circunflexo, apenas o parâmetro  $\zeta$ . A diferença entre o operador de placas finas e o operador da elasticidade tridimensional se dá pelas suas dimensões: o primeiro é escalar e o segundo tensorial.

$$u_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L(\boldsymbol{\zeta})} e^{i\boldsymbol{\zeta} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (3.21)$$

no qual o vetor  $\mathbf{x}$  é o ponto campo e o vetor  $\mathbf{y}$  é o ponto fonte. Nota-se que, ao considerar o ponto fonte como uma carga infinitesimal e aplicada na origem, a solução fundamental é igual à transformada inversa  $-\mathcal{F}_x^{-1}\{\cdot\}$  da inversa operador linear transformado  $-[L(\boldsymbol{\zeta})]^{-1}$ . Ou seja:

$$u_3(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_x^{-1}\{[L(\boldsymbol{\zeta})]^{-1}\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L(\boldsymbol{\zeta})} e^{i\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\zeta} \quad (3.22)$$

A solução da equação (3.22) é fortemente dependente da relação entre os coeficientes do operador linear da equação (3.11). Como dito, esses coeficientes são diretamente relacionados com a simetria do material cujo qual o domínio é constituído. Dependendo da simetria do tensor constitutivo, existe uma ou outra solução. Para a simetria mais baixa possível, ou seja, monoclinica, uma possível solução da equação (3.22) é apresentada por Shi & Beziene, 1988, e é escrita como:

$$u_3(r, \theta) = \frac{1}{8\pi} r^2 \{C_1 R^{(1)}(r, \theta) + C_2 R^{(2)}(r, \theta) + C_3 [S^{(1)}(r, \theta) - S^{(2)}(r, \theta)]\} \quad (3.23)$$

em que:

$$C_1 = \frac{(d_1 - d_2)^2 - (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_1} \quad C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_2} \quad (3.24.a)$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)}{GH}$$

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2 \quad H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2 \quad (3.24.b)$$

e:

$$R^{(i)}(r, \theta) = [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta] \times$$

$$\times \left\{ \ln \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta) \right] - 3 \right\} +$$

$$-4e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \arctan \left( \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right) \quad (3.25.a)$$

$$S^{(i)}(r, \theta) = e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \times \quad (3.25.b)$$

$$\times \left\{ \ln \left[ \frac{r^2}{a^2} ((\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta) \right] - 3 \right\} + \\ + [(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta] \arctan \left( \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right)$$

segundo o qual os índices  $i$  nas equações (3.25) variam de 1 a 2, os parâmetros  $d_i$  e  $e_i$  são reais e dependem da equação característica de placas finas dada por:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + D_{16}\mu + D_{11} = 0 \quad (3.26)$$

Devido o fato da positividade do tensor constitutivo e, por sua vez, das rigidezes de placa, tem-se que as raízes da equação (3.26) são sempre complexas. Matematicamente, são escritas como:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= d_1 + ie_1 & \mu_2 &= d_2 + ie_2 \\ \bar{\mu}_1 &= d_1 - ie_1 & \bar{\mu}_2 &= d_2 - ie_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

no qual  $\Im\{\mu_i\} > 0$ , ou seja  $e_i > 0$ .

Conforme descrito na parte introdutória deste texto, a degeneração está intimamente ligada às raízes mostradas na equação (3.26). Se  $\mu_1$  e  $\mu_2$  forem iguais, a segunda equação (3.24.b) –  $H$  – se anula, indeterminando as equações (3.24.a). O que se nota é que mesmo para a simetria mais baixa possível em placas finas (monoclínica) essa degeneração pode ocorrer. Basta que o critério supramencionado seja satisfeito. Na medida em que se desce na hierarquia das simetrias constitutivas (Figura 1.1), a equação característica vai se modificando, até que para os casos isotrópicos e transversalmente isotrópicos suas raízes são sempre iguais e independentes às propriedades elásticas.

Para comprovar as afirmações acima enunciadas, considera-se então uma simetria ortorrômbica. Por não ter acoplamento entre as tensões normais e deformações cisalhantes (eq. (2.28.b)), a equação (3.26) é reduzida a um polinômio bi quadrático. Se satisfeita a relação:

$$\tilde{C}_{66} > \frac{\sqrt{\tilde{C}_{11}\tilde{C}_{22}} - \tilde{C}_{12}}{2} \quad (3.28)$$

a parte real das raízes da equação característica é nula (ou seja, as raízes são puramente imaginárias). Não é difícil perceber que as equações (3.23) – (3.25) ficam mais simples quando satisfeita a inequação (3.28). Ademais, manipulou-se as propriedades elásticas e não as rigidezes de placas, pois não há diferença entre ambas as situações (por se tratar de relações internas).



Para simetrias tetragonais e cúbicas, a inequação (3.28) é simplificada, pois em ambas as simetrias  $\tilde{C}_{22} = \tilde{C}_{11}$ . No caso do material cúbico, tem-se que  $\tilde{C}_{66} = \tilde{C}_{44}$ . Ao se reescrever a inequação para os materiais mencionados, chega-se em:

$$\tilde{C}_{66} > \frac{\tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{12}}{2} \quad (3.29)$$

Ressalta-se que as inequações acima apresentadas são abertas. Ou seja, não admitem a igualdade, pois é exatamente nela que ocorre a degeneração. Em contrapartida, se alterarmos o sinal da inequação (trocar  $>$  por  $<$ ), as equações (3.23) – (3.25) ainda são válidas. Apenas as raízes da equação característica terão parte real (ou  $d_i$  não nulos).

Antes de entrar na análise das inequações (3.28) – (3.29) para materiais hexagonais e isotrópicos, apresenta-se a solução fundamental para casos nos quais ambas as relações acima entram na região degenerativa. Ela é descrita por Shi & Beziene, 1988, p. 700, e tem a forma:

$$u_3(r, \theta) = \frac{1}{16\pi C_{deg}^3} r^2 \left\{ (\cos^2 \theta + C_{deg}^2 \sin^2 \theta) \ln \left[ \frac{r^2}{a^2} (\cos^2 \theta + C_{deg}^2 \sin^2 \theta) \right] - (3 \cos^2 \theta + C_{deg}^2 \sin^2 \theta) \right\} \quad (3.30)$$

cujos  $C_{deg} = \tilde{C}_{11}/\tilde{C}_{22}$ . De acordo com os autores, a equação (3.30) pode ser utilizada para as possíveis degenerações nas inequações (3.28) e (3.29).

Ao analisar, então, a parte degenerativa das equações (3.28) e (3.29) é que os materiais com simetria isotrópica e transversalmente isotrópica se inserem. Ambos não conseguem manter a restrição da inequação (3.29). Em verdade, ambos os materiais estão posicionados exatamente onde ocorre a inequação, pois mantém uma relação direta entre  $\tilde{C}_{66}$ ,  $\tilde{C}_{11}$  e  $\tilde{C}_{12}$ . As raízes da equação característica são iguais ( $\mu_1 = \mu_2 = i$ ) e independem das propriedades constitutivas. Dessa forma, a solução fundamental mostrada na equação (3.23) toma uma forma indeterminada. Pode-se, sem ter problemáticas com singularidades devido à multiplicidade das raízes da equação característica, utilizar a equação (3.30) para o grupo de materiais supramencionado. Entretanto, em consequência da própria natureza de tais materiais, sua solução fundamental deve ter características quanto à sua variação em relação à coordenada tangencial ( $\theta$ ). Como não há direção principal (pois todas são) no plano cujo qual a superfície média está contida, essa variação deve ser nula, sendo então a solução fundamental para materiais hexagonais (quando

seu plano de simetria infinita é paralelo ao plano da placa fina) e isotrópicos dependentes apenas da coordenada radial ( $r$ ). Ao considerar  $C_{deg} = 1$  para a equação (3.30), se reduz a:

$$u_3(r, \theta) = \frac{1}{8\pi D_{22}} r^2 \left( \ln \left( \frac{r}{a} \right) - \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \quad (3.31)$$

Dois problemas ocorrem na equação (3.31). O primeiro é com relação às propriedades constitutivas. Elas inexistem na equação, ao fazer tal consideração. Provavelmente é um erro de digitação (*typo*)<sup>41</sup>. A segunda, ao expor as considerações de não variação de  $\theta$  na solução fundamental isotrópica, demonstra a não redução da solução anisotrópica de placas finas aos comportamentos esperados nas soluções fundamentais isotrópicas e hexagonais. A variação em  $\theta$  é não removível, sendo então, necessária uma nova solução fundamental, para ambas as simetrias materiais, que descreva coerentemente seu comportamento mecânico. Para isso, reescreve-se o operador da equação (3.11) em função dos tensores constitutivos das equações (2.44.b) e (2.47.b). Ele tem a forma:

$$D_{11} \left[ \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right] u_3(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) \quad (3.32)$$

Este operador é idêntico ao bi harmônico ponderado por  $D_{11}$ <sup>42</sup>. A solução fundamental da equação acima apresentada é:

$$u_3(r) = \frac{r^2}{8\pi D_{11}} (\ln r + k) \quad (3.33)$$

Nota-se na equação (3.33) sua independência com relação à  $\theta$ .  $k$  é uma constante que tem valores diferentes, dependendo da literatura. Se utilizarmos um paralelo ao trabalho de LaMattina, Klang, & Eischen, 1998, ela será uma constante de proporcionalidade do raio de referência (*reference radii*). Conforme citado na revisão bibliográfica, Westphal, Schnack, & de Barcellos, 1998, demonstra que, para haver coerência entre as soluções fundamentais de placas semi-espessas e finas, seu valor deve ser  $-1/2$ .

Pode-se provar que a equação (3.23) não se reduz à equação (3.33) ao se considerar um tensor constitutivo isotrópico perturbado (uma leve diferença entre  $\tilde{C}_{11}$  e  $\tilde{C}_{22}$ , produzida artificialmente). Por intermédio desta perturbação, mostra-se uma forma de utilização da solução

<sup>41</sup>  $D_{22}$  deve dividir toda a parte direita da equação, em acordo com a equação (3.31).

<sup>42</sup>  $D_{11}$  para a simetria isotrópica é diferente que para a simetria transversalmente isotrópica como apresentado no tensor constitutivo reduzido (eqs. (2.5)).

fundamental anisotrópica de placas finas para a solução de problemas isotrópicos. Esta técnica está descrita no Anexo I. Ademais, por intermédio das equações (3.31) e (3.33), observa-se que, para um mesmo material, existem duas soluções fundamentais diferentes e não equivalentes. Quando utilizada uma perturbação no tensor isotrópico, recai-se na equação (3.31). O trabalho de Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002, descreve com bastante coerência as variações de uso das soluções fundamentais e suas diferenças.

Uma maneira de escrever a solução fundamental de placas finas em relação a funções auxiliares desacopladas demonstra algumas propriedades e será utilizada na decomposição cinemática. Ao observar  $R^{(i)}(r, \theta)$  e  $S^{(i)}(r, \theta)$ , pode-se separar essas entidades em função das coordenadas polares. Ao inserir quatro funções dependentes apenas de  $\theta$ , modifica-se  $R^{(i)}(r, \theta)$  e  $S^{(i)}(r, \theta)$  de modo que:

$$g_1^{(i)}(\theta) = (\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 - e_i^2 \sin^2 \theta \quad (3.34.a)$$

$$g_2^{(i)}(\theta) = \ln[(\cos \theta + d_i \sin \theta)^2 + e_i^2 \sin^2 \theta] \quad (3.34.b)$$

$$g_3^{(i)}(\theta) = 4e_i \sin \theta (\cos \theta + d_i \sin \theta) \quad (3.34.c)$$

$$g_4^{(i)}(\theta) = \tan^{-1} \left( \frac{e_i \sin \theta}{\cos \theta + d_i \sin \theta} \right) \quad (3.34.d)$$

Portanto:

$$R^{(i)}(r, \theta) = g_1^{(i)}(\theta) \left[ \ln \left( \frac{r^2}{a^2} \right) - 3 \right] + g_1^{(i)}(\theta)g_2^{(i)}(\theta) - g_3^{(i)}(\theta)g_4^{(i)}(\theta) \quad (3.35.a)$$

$$S^{(i)}(r, \theta) = g_3^{(i)}(\theta) \left[ \ln \left( \frac{r^2}{a^2} \right) - 3 \right] + g_3^{(i)}(\theta)h_2^{(i)}(\theta) + g_1^{(i)}(\theta)g_4^{(i)}(\theta) \quad (3.35.b)$$

E ao nomear:

$$f_1(r) = r^2 \quad (3.36.a)$$

$$f_2(r) = \ln \left( \frac{r^2}{a^2} \right) - 3 \quad (3.36.b)$$

e ao realizar algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$u_3(r, \theta) = \frac{1}{8\pi} f_1(r) \left\{ f_2(r) \left[ C_1 g_1^{(1)}(\theta) + C_2 g_1^{(2)}(\theta) + C_3 \left( g_3^{(1)}(\theta) - g_3^{(2)}(\theta) \right) \right] + \right. \quad (3.37) \\ \left. + C_1 \left[ g_1^{(1)}(\theta)g_2^{(1)}(\theta) - g_3^{(1)}(\theta)g_4^{(1)}(\theta) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +C_2\left[g_1^{(2)}(\theta)g_2^{(2)}(\theta) - g_3^{(2)}(\theta)g_4^{(2)}(\theta)\right] + \\
& +C_3\left[g_3^{(1)}(\theta)g_2^{(1)}(\theta) + g_1^{(1)}(\theta)g_4^{(1)}(\theta) + \right. \\
& \left. - \left(g_3^{(2)}(\theta)g_2^{(2)}(\theta) + g_1^{(2)}(\theta)g_4^{(2)}(\theta)\right)\right] \}
\end{aligned}$$

que, com a inserção de duas novas funções, é reescrita como:

$$u_3(r, \theta) = \frac{1}{8\pi} f_1(r) \{f_2(r)h_1(\theta) + h_2(\theta)\} \quad (3.38)$$

em que:

$$h_1(\theta) = C_1g_1^{(1)}(\theta) + C_2g_1^{(2)}(\theta) + C_3\left(g_3^{(1)}(\theta) - g_3^{(2)}(\theta)\right) \quad (3.39.a)$$

$$\begin{aligned}
h_2(\theta) = & C_1\left[g_1^{(1)}(\theta)g_2^{(1)}(\theta) - g_3^{(1)}(\theta)g_4^{(1)}(\theta)\right] + \\
& +C_2\left[g_1^{(2)}(\theta)g_2^{(2)}(\theta) - g_3^{(2)}(\theta)g_4^{(2)}(\theta)\right] + \\
& +C_3\left[g_3^{(1)}(\theta)g_2^{(1)}(\theta) + g_1^{(1)}(\theta)g_4^{(1)}(\theta) + \right. \\
& \left. - \left(g_3^{(2)}(\theta)g_2^{(2)}(\theta) + g_1^{(2)}(\theta)g_4^{(2)}(\theta)\right)\right]
\end{aligned} \quad (3.39.b)$$

A importância da equação (3.38) se dá com relação à discussão apresentada por LaMattina, Klang, & Eischen, 1998 e com a redução da solução fundamental anisotrópica à isotrópica. A equação proposta por Shi & Bezine, 1988 (eq. (3.23)) não tem o mesmo formato das utilizadas em comparação no trabalho de LaMattina, Klang, & Eischen, 1998. Com as operações algébricas acima produzidas, diz-se que  $f_1(r)h_2(\theta)$  é o raio de referência e na medida em que se queira equivaler duas soluções fundamentais anisotrópicas de placas finas, este deve ser o valor a ser trabalhado (deve-se atentar para o termo independente na equação (3.36.b)). Com relação à redução à solução isotrópica, pode-se dizer que seria necessário que:

$$h_1(\theta) \rightarrow \frac{1}{D_{11}} \qquad h_2(\theta) \rightarrow \frac{k}{D_{11}} \quad (3.40)$$

Sabe-se, entretanto, que a segunda equação (3.40) não se reduz e sua prova está apresentada no Anexo I.

Outro ponto importante da equação (3.38) diz respeito a sua facilidade de diferenciação em relação às coordenadas polares. As derivadas em  $\theta$  são diretas e isso será abordado na decomposição cinemática, demonstrada no capítulo 5.

### 3.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL

Os procedimentos para a obtenção da solução fundamental tridimensional são semelhantes ao de placas finas, devido à semelhança entre os operadores. A equação diferencial parcial não homogênea que descreve o comportamento elástico de um sólido tridimensional é escrita como:

$$\boldsymbol{\partial}_x^T \mathbf{C} \boldsymbol{\partial}_x \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.41)$$

em que:

$$\boldsymbol{\partial}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.42.a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^T \quad (3.42.b)$$

A obtenção da solução fundamental tridimensional é análoga ao caso de placas finas e é mostrada no trabalho de Marczak & Denda, 2010. Apresenta-se então, o resultado da aplicação da transformada de Fourier na equação (3.41) ao considerar que o carregamento externo é descrito pela função delta de Dirac. Ela é descrita como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{L}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1} \mathbf{f} e^{i\boldsymbol{\zeta} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (3.43.a)$$

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\partial}_x) = \boldsymbol{\partial}_x^T \mathbf{C} \boldsymbol{\partial}_x \quad (3.43.b)$$

em que  $\mathbf{f}$  denota o vetor direção da carga infinitesimal e os vetores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\boldsymbol{\zeta}$  tem três dimensões. Pode-se reescrever a equação (3.43.a) em outra forma, na qual a solução fundamental é um tensor (tensor solução fundamental). Essa forma será bastante utilizada nas decomposições descritas no próximo capítulo e tem a forma de:

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [L_{ij}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1} e^{i\boldsymbol{\zeta} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (3.44)$$

em que o subscrito  $i$  e  $j$  denotam a direção da solução fundamental e a direção do carregamento infinitesimal, respectivamente. Ting, 1996, obtém a mesma equação alterando-se apenas a sua

notação. A transformada de Fourier do operador tridimensional  $L_{ij}(\boldsymbol{\zeta})$  é idêntica ao tensor de Christoffel, dado pela equação (2.10.a), quando o vetor  $\eta_x$  é análogo ao vetor  $\boldsymbol{\zeta}$ . A partir da equação (3.43.a) ou equação (3.44) pode-se então obter soluções fundamentais para o caso tridimensional.

Uma possibilidade é a utilização do formalismo de Stroh para problemas tridimensionais. A transformação da equação (3.44) para uma equação cuja aplicação deste formalismo seja possível é relativamente simples e será aqui mostrada. Manipula-se, por intermédio da regra de Cramer, a inversa do operador linear transformado –  $L_{ij}(\boldsymbol{\zeta})$ . A regra é escrita como:

$$[L_{ij}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1} = \frac{\text{adj}(L_{ij}(\boldsymbol{\zeta}))}{\|L(\boldsymbol{\zeta})\|} = \frac{A_{ij}(\boldsymbol{\zeta})}{D(\boldsymbol{\zeta})} \quad (3.45)$$

em que  $\text{adj}(\cdot)$  denotam o adjugado de uma matriz e  $\|\cdot\|$  corresponde ao determinante. Ao considerar uma decomposição no vetor  $\boldsymbol{\zeta}$  em função de um parâmetro arbitrário  $\psi$  na forma:

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{n} \cos \psi + \mathbf{m} \sin \psi \quad (3.46)$$

sabendo-se que  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$  e  $r/\mathbf{x}$  formam uma tríade mutualmente ortogonal, elimina-se o termo exponencial da integral da equação (3.44). Por meio da equação (3.46), o operador linear  $L_{ij}(\boldsymbol{\zeta})$  é reescrito, em função do parâmetro arbitrário  $\psi$ , como:

$$L_{ij}(\psi) = Q_{ij} \cos^2 \psi + (R_{ij} + R_{ji}) \sin \psi \cos \psi + T_{ij} \sin^2 \psi \quad (3.47)$$

no qual:

$$Q_{ik} = c_{ijks} n_j n_s \quad R_{ik} = c_{ijks} n_j m_s \quad T_{ik} = c_{ijks} n_j m_s \quad (3.48)$$

Introduzindo-se uma nova variável arbitrária –  $p = \tan \psi$  – e realizando-se algumas manipulações algébricas, chega-se em:

$$U_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [L_{ij}(p)]^{-1} dp = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{ij}(p)}{D(p)} dp \quad (3.49)$$

em que:

$$L_{ij}(p) = Q_{ij} + (R_{ij} + R_{ji})p + T_{ij}p^2 \quad (3.50)$$

Um ponto interessante das equações (3.49) – (3.50) é que elas são semelhantes ao formalismo de Stroh. Nota-se, na regra de Cramer, que a inversa de uma matriz pode ser escrita na forma apresentada na equação (3.45) e o determinante do tensor da equação (3.50) é idêntico

à forma do formalismo de Stroh. Sendo assim, obtêm-se as propriedades deste formalismo, e, portanto, que as raízes do determinante do tensor explicitado na equação (3.50) sejam distintas.

Para casos ortorrômbicos – ou menos simétricos – não é possível a obtenção da solução fundamental de forma analítica, sendo então necessário o uso de ferramentas numéricas para sua derivação: para os casos ortorrômbicos, o motivo da não possibilidade é a grande complexidade do problema; já para casos triclinicos, por exemplo, é impossível de se obter as raízes do determinante do tensor da equação (3.50) sem a utilização de ferramentas numéricas.

Soluções para casos de alta simetria estão dispostos na literatura. Ting, 1996, demonstra a derivação da solução fundamental para materiais isotrópicos. Ela (tensor solução fundamental) é escrita como:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \frac{1 + \nu}{8\pi\|\mathbf{x}\|E} \left[ (3 - 4\nu)\mathbf{I} + \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right] \quad (3.51)$$

sabendo que  $\|\cdot\|$  para um vetor denota norma euclidiana,  $\otimes$  representa um produto externo entre dois vetores e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensões 3x3.  $E$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respetivamente, que descrevem o comportamento mecânico de uma simetria isotrópica.

Para soluções para a simetria transversalmente isotrópica, citam-se os trabalhos revisados na introdução. Apenas a título de demonstração, a integral utilizada por Buroni, Ortiz, & Saez, 2010, é idêntica à da equação (3.49). Considerando que o determinante do tensor de Christoffel é relacionado com os autovalores do Formalismo de Stroh, a multiplicidade das raízes (ou multiplicidade dos autovalores) pode ser contornada ao se utilizar o cálculo de resíduos multipolos, pois as raízes da equação característica da elasticidade tridimensional podem ser tratadas como polos no integrando da equação (3.49).

### 3.4 CONCLUSÃO

Apresentou-se, neste capítulo, uma pequena revisão da transformada de Fourier e algumas de suas propriedades. Por intermédio dessa ferramenta matemática, mostrou-se o desenvolvimento algébrico para a determinação das soluções fundamentais de placas finas e da elasticidade tridimensional. No caso da primeira teoria estrutural, foram apresentadas três soluções fundamentais. Uma para materiais isotrópicos e transversalmente isotrópicos, outra para materiais não citados acima e uma terceira para casos de degeneração em baixas simetrias. A

última é uma redução da segunda. Mostrou-se que a solução fundamental para materiais anisotrópicos não se reduz àquela para materiais isotrópicos e transversalmente isotrópicos. Fez-se, inclusive, um pequeno estudo sobre as relações necessárias para materiais de baixa simetria não degenerarem.

Devido ao fato de que o desenvolvimento algébrico para a solução fundamental da elasticidade tridimensional se encontrar no trabalho de Marczak & Denda, 2010, apresentou-se aqui os procedimentos matemáticos para a sua análise e derivação a partir do Formalismo de Stroh. Apresentou-se a solução fundamental isotrópica sabendo-se que, de forma analítica fechada, só se tem conhecimento desta e de soluções para simetria transversalmente isotrópica.



## 4 DECOMPOSIÇÕES DO TENSOR CONSTITUTIVO

As decomposições do tensor constitutivo que serão apresentadas neste capítulo são as descritas nos trabalhos de Tu, 1968, e Browaeys & Chevrot, 2004, e já foram brevemente mencionadas na introdução desta tese. Ambas as decomposições propostas pelos autores são semelhantes e serão chamadas de inconsistentes, pois não mantêm a positividade de todos os tensores envolvidos, requerimento básico para sua utilização na mecânica do contínuo. A equivalência se dá na igualdade dos tensores obtidos pela decomposição e não pela base que cada uma das metodologias foi desenvolvida. Isso porque os autores utilizam diferentes critérios para caracterizar a simetria material. Tu, 1968, utiliza como base as classes simétricas como Browaeys & Chevrot, 2004, utilizam como parâmetro famílias cristalinas. As diferenças entre as duas caracterizações já foi abordada no capítulo 2.

A prova da inconsistência será dada por intermédio da consecução do tensor isotrópico, utilizando as projeções propostas por Browaeys & Chevrot, 2004, e da verificação da positividade do tensor residual (que é a diferença entre o tensor que foi base na decomposição e o tensor isotrópico decomposto). Apesar de não ser a base para a geração dos tensores anisotrópicos decompostos, é necessário que o tensor residual seja positivo definido, já que corresponde à soma dos tensores constitutivos das outras simetrias. Devido à propriedade que descreve que a soma de duas matrizes positivas definidas gera uma matriz com esse atributo, é impossível que o tensor residual seja indefinido e seja gerado por tensores positivos definidos (Mirsky, 1955). Como a base ortogonal do tensor de Tu, 1968, é idêntica à projeção de Browaeys & Chevrot, 2004, para materiais isotrópicos, o uso de uma ou outra metodologia gera resultados iguais. Em concordância com a Tabela 2.2, as diferenças entre classes simétricas e famílias

crystalinas se dão nas simetrias transversalmente isotrópica, trigonal e tetragonal, ao se considerar a nomenclatura de classes simétricas.

Como para a superposição de soluções fundamentais, por meio da decomposição dos tensores constitutivos, há a necessidade matemática que esses tensores sejam positivos definidos, uma forma de decomposição que tem como base a conservação dessa propriedade e as diferenças simétricas de cada tensor da decomposição será apresentada. Dentro do conhecimento do autor, inexistente uma decomposição aditiva de tensores constitutivos que expresse tais propriedades.

#### 4.1 DECOMPOSIÇÕES INCONSISTENTES

A decomposição proposta por Browaeys & Chevrot, 2004, trabalha com o espaço de projeções das simetrias. Por meio de uma transformação linear, modifica-se um vetor que agrupa as propriedades elásticas, projetando-as no espaço da simetria desejada. Esse vetor tem 21 dimensões devido à quantidade de constantes elásticas independentes de um tensor triclinico. Utiliza-se a operação que transforma uma matriz simétrica em um vetor com entradas únicas. O vetor utilizado por Browaeys & Chevrot, 2004 é rearranjado de forma que as propriedades com características físicas semelhantes fiquem juntas. Não são levados em consideração os ângulos de Euler. De acordo com o citado na introdução deste capítulo, apresentar-se-á apenas o cálculo para o tensor isotrópico e residual.

Usa-se em ambas as propostas (Browaeys & Chevrot, 2004; Tu, 1968), apenas as componentes de um tensor semelhante ao de simetria ortorrômbica (ou seja, mesmo que um tensor seja triclinico, apenas os termos presentes no tensor ortorrômbico são utilizados no cálculo da parte isotrópica) reduzindo o vetor que contém as propriedades elásticas para 9 dimensões. Escreve-se esse vetor na forma:

$$\mathbf{V}_{BC}^{ort} = \{C_{11} \quad C_{22} \quad C_{33} \quad \sqrt{2}C_{23} \quad \sqrt{2}C_{13} \quad \sqrt{2}C_{12} \quad 2C_{44} \quad 2C_{55} \quad 2C_{66}\}^T \quad (4.1)$$

em que  $C_{ij}$  são as componentes de um tensor constitutivo anisotrópico e a matriz de transformação que projeta este vetor dentro de um espaço isotrópico é:

$$\mathbf{M}^{\rightarrow iso} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \sqrt{2} & \mathbf{2} \\ & \mathbf{4} & -\sqrt{2} \\ sym & & \mathbf{3} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

sabendo que cada número em negrito representa uma matriz 3x3 preenchida por este número (ou seja, a matriz de transformação  $\mathbf{M}^{\rightarrow iso}$  têm dimensões 9x9). Browaeys & Chevrot, 2004, utilizam

a notação do tensor constitutivo de Kelvin, bem como Cowin & Mehrabadi, 1995. Isso pode ser visto pelos fatores  $\sqrt{2}$  e 2, multiplicando as constantes elásticas (eq. (4.1)). A resultante do produto entre  $\mathbf{M}^{-iso}$  e  $\mathbf{V}_{BC}^{ort}$ , pode ser escrita diretamente para as duas constantes elásticas isotrópicas:

$$C_{11}^{iso} = \frac{1}{15} [3(C_{11} + C_{22} + C_{33}) + 2(C_{12} + C_{13} + C_{23}) + 4(C_{44} + C_{55} + C_{66})] \quad (4.3.a)$$

$$C_{12}^{iso} = \frac{1}{15} [(C_{11} + C_{22} + C_{33}) + 4(C_{12} + C_{13} + C_{23}) - 2(C_{44} + C_{55} + C_{66})] \quad (4.3.b)$$

que são descritos de forma mais compacta por intermédio dos tensores de Voigt e dilatação, de forma que:

$$C_{11}^{iso} = \frac{1}{15} [2tr(\mathbf{C}^{voi}) + tr(\mathbf{C}^{dil})] \quad (4.4.a)$$

$$C_{12}^{iso} = \frac{1}{15} [2tr(\mathbf{C}^{dil}) - tr(\mathbf{C}^{voi})] \quad (4.4.b)$$

Para exemplificar o uso dessa decomposição e demonstrar que ambas são semelhantes e inconsistentes, serão utilizados dois materiais, de simetrias diferentes, que são escritos como:

$$\mathbf{C}^{quartz} = \begin{bmatrix} 10.250 & 2.726 & -0.803 & 0 & -0.929 & 0 \\ & 8.680 & -0.831 & 0 & 0.388 & 0 \\ & & 12.992 & 0 & -0.577 & 0 \\ & & & 2.895 & 0 & -0.243 \\ & & & & 3.825 & 0 \\ \text{sym} & & & & & 6.912 \end{bmatrix} \quad (4.5.a)$$

$$\mathbf{C}^{olivine} = \begin{bmatrix} 192 & 66 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ & 160 & 56 & 0 & 0 & 0 \\ & & 272 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 60 & 0 & 0 \\ & & & & 62 & 0 \\ \text{sym} & & & & & 49 \end{bmatrix} \quad (4.5.b)$$

O material descrito na equação (4.5.a) foi obtido no trabalho de Tu, 1968, corresponde a um cristal AZ de quartzo e tem simetria monoclinica, com plano de simetria fixado em  $x_1x_3$ . Neste trabalho, o tensor foi decomposto em um tensor isotrópico, hexagonal, tetragonal, ortorrômbico e monoclinico. Já o explicitado na equação (4.5.b) foi retirado do trabalho de Browaeys & Chevrot, 2004, descreve o comportamento elástico do material olivina e tem simetria ortorrômbica. Ele foi decomposto nas seguintes simetrias: isotrópica, tetragonal, hexagonal e ortorrômbica. Ao aplicar, então, as equações (4.4) nos tensores das equações (4.5) chegam-se em:

$$\mathbf{C}_{iso}^{quartz} = \begin{bmatrix} 10.1652 & 0.6017 & 0.6017 & 0 & 0 & 0 \\ & 10.1652 & 0.6017 & 0 & 0 & 0 \\ & & 10.1652 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4.7818 & 0 & 0 \\ & & & & 4.7818 & 0 \\ & & & & & 4.7818 \end{bmatrix} \quad (4.6.a)$$

$$\mathbf{C}_{iso}^{olivine} = \begin{bmatrix} 194.6667 & 67.3333 & 67.3333 & 0 & 0 & 0 \\ & 194.6667 & 67.3333 & 0 & 0 & 0 \\ & & 194.6667 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 63.6667 & 0 & 0 \\ & & & & 63.6667 & 0 \\ & & & & & 63.6667 \end{bmatrix} \quad (4.6.b)$$

Os tensores da equação (4.6) são exatamente aqueles mostrados nos trabalhos citados, que são chamados de tensores isotrópicos mais próximos (*nearest isotropic tensor*) em ambos os artigos.

O tensor residual é:

$$\mathbf{C}_{res}^{quartz} = \mathbf{C}^{quartz} - \mathbf{C}_{iso}^{quartz} = \begin{bmatrix} 0.0848 & 2.1242 & -1.4047 & 0 & -0.929 & 0 \\ & -1.4852 & -1.4327 & 0 & 0.388 & 0 \\ & & 2.8268 & 0 & -0.577 & 0 \\ & & & -1.8868 & 0 & -0.243 \\ & & & & -0.9568 & 0 \\ & & & & & 2.1302 \end{bmatrix} \quad (4.7.a)$$

$$\mathbf{C}_{res}^{olivine} = \mathbf{C}^{olivine} - \mathbf{C}_{iso}^{olivine} = \begin{bmatrix} -2.6667 & -1.3333 & -7.3333 & 0 & 0 & 0 \\ & -34.6667 & -11.3333 & 0 & 0 & 0 \\ & & 77.3333 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -3.6667 & 0 & 0 \\ & & & & -1.6667 & 0 \\ & & & & & -14.6667 \end{bmatrix} \quad (4.7.b)$$

Ambos os tensores das equações (4.7) violam diversas necessidades para que eles sejam positivo-definidos. Ressalta-se, por meio das equações (4.6), que a parte isotrópica mantém essa positividade. A condição necessária e suficiente para que uma matriz seja positiva definida é que os autovalores de sua parte simétrica sejam todos positivos, o que, de fato, não ocorre nas matrizes das equações (4.7). Ao considerar a soma dos tensores das simetrias cujos quais os tensores são decompostos<sup>43</sup>, uma das condições necessárias seria a positividade do tensor resultante (já que, a soma de duas matrizes positiva definidas resulta numa matriz positiva definida). Dessa forma, as decomposições de Browaeys & Chevrot, 2004, e Tu, 1968, não podem ser usadas para uma decomposição constitutiva dos operadores lineares que necessite da positividade de todos os tensores envolvidos. Para isso, se desenvolveu uma decomposição

<sup>43</sup> A equação (4.7.a) é equivalente à soma de tensores de simetria hexagonal, tetragonal, ortorrômbica e monoclinica. Já a equação (4.7.b) é o resultado da decomposição aditiva de tensores com simetria tetragonal, hexagonal e ortorrômbica. Para esses casos, é considerado a divisão por família simétrica e não por classe simétrica, utilizada neste texto.

constitutiva bastante simples que mantém as propriedades necessárias para os tensores constitutivos.

## 4.2 DECOMPOSIÇÃO CONSISTENTE

A decomposição consistente, além de gerar uma superposição de tensores de diferentes simetrias, mantém a positividade desses tensores resultantes. Esta não é testada pelos autovalores dos tensores decompostos, pois é cara computacionalmente, mesmo para sistemas numéricos. Usa-se como base o critério de Sylvester que afirma que se todos os menores principais (*principal minors*) de uma matriz forem positivos, a matriz é positiva definida. Existem, ainda, outras restrições com relação às simetrias nas quais um dado tensor pode ser decomposto. Portanto, a decomposição proposta tem três restrições básicas: positividade dos tensores resultantes, grupos de simetrias base e relação aditiva entre os tensores decompostos.

A relação aditiva é idêntica a das decomposições inconsistentes e é dada da seguinte maneira:

$$\mathbf{C}^{FIC} = \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)} + \dots + \mathbf{C}^{(N)} \quad (4.8)$$

O sobrescrito *FIC* denota fictício e os sobrescritos numéricos entre parênteses estão relacionados às simetrias nas quais o tensor  $\mathbf{C}^{FIC}$  é decomposto observando que ( $N$ ) é um número natural não nulo que descreve em quantas simetrias a decomposição é feita. As simetrias de cada um dos tensores com sobrescrito numérico são diferentes (ou seja, (1) pode estar relacionada à simetria isotrópica enquanto (2) à simetria tetragonal, por exemplo)<sup>44</sup>. A equação (4.8) pode ser chamada de “equação de teto”. Ou seja, ela limita o valor das propriedades constitutivas nas direções específicas. Por intermédio das inequações, geradas pelos requerimentos de positividade, que serão apresentadas ainda neste capítulo, o conceito será melhor entendido.

Por meio da equação (4.8), pode-se descrever a restrição dos grupos de simetria. Essas vão depender diretamente da simetria do tensor constitutivo fictício, ou, mais diretamente, do grupo cujo qual essa simetria é invariante. De acordo com o trabalho de Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001, e a parte introdutória deste texto, cada simetria constitutiva pode e é descrita em função de um grupo formado pelas transformações cujo qual seu tensor constitutivo é invariante. Ao considerar essa informação, à medida que se verifique tal invariância no tensor, sua decomposição aditiva (eq. (4.8)) também deve ser invariante. Isso denota que a intersecção do

---

<sup>44</sup> A numeração não precisa seguir a hierarquia das simetrias constitutivas.

grupo de transformações do tensor equivalente com os seus respectivos grupos de cada um dos tensores na decomposição deve ser igual ao primeiro grupo (ou seja, o grupo de transformação do tensor fictício). Matematicamente, isso pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{C}^{FIC}\mathbf{R}^T &= \mathbf{C}^{FIC} = \mathbf{R}(\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)} + \dots + \mathbf{C}^{(N)})\mathbf{R}^T = \\ &= \mathbf{R}\mathbf{C}^{(1)}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\mathbf{C}^{(2)}\mathbf{R}^T + \dots + \mathbf{R}\mathbf{C}^{(N)}\mathbf{R}^T = \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)} + \dots + \mathbf{C}^{(N)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que a matriz de transformação  $\mathbf{R}$  pertence ao grupo de invariantes de  $\mathbf{C}^{FIC}$  e, conseqüentemente, pertence ao grupo de todas as simetrias decompostas. É importante observar que se algum tensor da parte decomposta não tiver  $\mathbf{R}$  em seu grupo de transformação invariante,  $\mathbf{C}^{FIC}$  não será indiferente à transformação e, portanto, não terá  $\mathbf{R}$  em seu grupo. Prova-se, assim, a afirmação da intersecção dos grupos de transformação. Ademais, outra restrição que precisa ser obedecida na decomposição é que a união do grupo das transformações invariantes dos tensores decompostos resulta na simetria do tensor equivalente. Entretanto, essa restrição necessita de mais estudos, pois há diversos problemas relacionados a ela<sup>45</sup>. Nota-se que todos os tensores decompostos devem estar definidos no mesmo sistema de coordenadas.

Ao considerar as duas restrições, pode-se então entrar na explicação da terceira: a positividade dos tensores decompostos. Como já descrito, a positividade de uma matriz é definida pela positividade dos autovalores de sua parte simétrica. Isso porque tanto a positividade quanto a definição de uma matriz estão ligadas diretamente à forma quadrática descrita por:

$$\varphi = \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (4.10)$$

no qual  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{z}$  são uma matriz e um vetor não-nulos quaisquer, respectivamente e  $\varphi$  é uma forma quadrática, por se tratar de valores reais (Mirsky, 1955). Dependendo dos valores de  $\varphi$ , define-se se a matriz  $\mathbf{A}$  é positiva definida ( $\varphi > 0$ ), positiva semi-definida ( $\varphi \geq 0$ ), negativa semi-definida ( $\varphi \leq 0$ ) e negativa definida ( $\varphi < 0$ ) para qualquer vetor  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ . Caso a forma quadrática  $\varphi$  não possa ser definida em nenhum dos critérios supramencionados, a matriz  $\mathbf{A}$  é denominada indefinida. É interessante notar que a equação (4.10), se vista por meio da elasticidade, descreve a densidade da energia de deformação se  $\mathbf{z} = \boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\mathbf{A} = \mathbf{C}$ . Ela representa o caso de que, havendo uma deformação qualquer, a energia de deformação armazenada no domínio sempre será positiva (sendo que aqui já é considerada a positividade de  $\mathbf{C}$ ),

---

<sup>45</sup> Como a soma de dois tensores monoclinicos cujos planos de simetria são ortogonais. Isso geraria um material triclinico, por esta relação. Entretanto, essa adição pode forçar uma direção principal, que seria colinear a linha de intersecção dos planos.

independente do tipo de deformação que é gerada e, havendo deformação, há energia de deformação ( $\mathbf{z}$  não-nulo). Ao analisar os tensores resultantes, mostrados nas equações (4.7), e considerando as afirmações aqui descritas, se as decomposições propostas por Browaeys & Chevrot, 2004, e Tu, 1968, forem utilizadas para o cálculo de soluções da elasticidade, inúmeros efeitos sem conceituação física podem ocorrer como: deformações sem energia ou mesmo estados de energia de deformação negativa. Ao considerar que para a decomposição constitutiva ter sentido físico, é então necessário que se obtenha uma superposição de tensores constitutivos que tenha sentido físico, sendo assim, positivos definidos.

O critério de Sylvester demonstra que uma matriz positiva definida deve ter seus menores principais positivos. Para provar essa descrição, Sylvester decompôs a matriz  $\mathbf{A}$ , da equação (4.10), no método de Decomposição Matricial em Autovalores/Autovetores <sup>46</sup> (*Matrix Eigendecomposition*). Os autovetores, quando aplicados a  $\mathbf{z}$ , descrevem uma transformação linear no sistema e desacoplam o sistema quadrático. Sendo assim, se todos os autovalores forem positivos, independente das dimensões envolvidas, a forma quadrática  $\varphi$  será sempre positiva. Para que, então, os autovalores sejam todos positivos tem-se que:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \|C_{11}\| > 0 & P_2 &= \left\| \begin{array}{cc} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{array} \right\| > 0 & P_3 &= \left\| \begin{array}{ccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{array} \right\| > 0 \\
 P_4 &= \left\| \begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{array} \right\| > 0 & P_5 &= \left\| \begin{array}{ccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} \end{array} \right\| > 0 \\
 P_6 &= \left\| \begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{array} \right\| > 0
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

sabendo que  $P_i$  são os menores principais (para uma matriz 6x6). De acordo com Mirsky, 1955, Frobenius demonstrou que, não há necessidade de manutenção da ordem da matriz para que ela mantenha sua positividade. Neste caso específico (ou seja, na elasticidade), basta que alteremos as posições das tensões e deformações na equação (2.3.a) – (2.3.c), que descreve a lei de Hooke,

<sup>46</sup> A decomposição descreve uma matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{MDM}^{-1}$ , cujo qual  $\mathbf{M}$  é composta pelos autovetores normalizados de  $\mathbf{A}$ .  $\mathbf{D}$  é descrita pelos autovalores posicionados na diagonal desta matriz.

que o tensor constitutivo muda<sup>47</sup>. Como tanto uma linha quanto uma coluna da matriz é alterada, simultaneamente, seu determinante permanece inalterado. Portanto, mantém-se a restrição de positividade. Com isso, modificam-se as equações (4.11) na forma:

$$P_1 = \|C_{ii}\| > 0 \quad P_2 = \left\| \begin{array}{cc} C_{ii} & C_{ij} \\ C_{ij} & C_{jj} \end{array} \right\| > 0 \quad P_3 = \left\| \begin{array}{ccc} C_{ii} & C_{ij} & C_{ik} \\ C_{ij} & C_{jj} & C_{jk} \\ C_{ik} & C_{jk} & C_{kk} \end{array} \right\| > 0 \quad \dots \quad (4.12)$$

no qual índices repetidos não denotam somatório. Portanto, são condições necessárias, porém não suficientes que o tensor constitutivo seja positivo definido se:

$$C_{ii} > 0 \quad (4.13.a)$$

$$C_{ii}C_{jj} > C_{ij}^2 \quad (4.13.b)$$

$$C_{ii}C_{jj}C_{kk} + 2C_{ij}C_{ik}C_{jk} - C_{ik}^2C_{jj} - C_{ij}^2C_{kk} - C_{jk}^2C_{ii} > 0 \quad (4.13.c)$$

$$\|C\| > 0 \quad (4.13.d)$$

sabendo-se que índices repetidos não denotam somatório e que as inequações (4.13) são obtidas por intermédio de  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  (eqs. (4.12)). É exatamente por este motivo que as condições nas equações (4.13) são necessárias, porém não suficientes, pois não são considerados  $P_4$  e  $P_5$  por sua extensão (já que  $P_6$  é diretamente a inequação (4.13.d)). O que se nota é que, em simetrias que não tem o acoplamento das deformações cisalhantes com as tensões normais (isotrópica, transversalmente isotrópica, cúbica, tetragonal e ortorrômbica), apenas as condições nas equações (4.13.a) – (4.13.c) são necessárias e suficientes. Isso porque, para essas simetrias,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$  podem ser escritos por intermédio de  $P_1$  e  $P_3$ . Ademais, mesmo para os casos nos quais há esse acoplamento (trigonal, monoclinico e anisotrópico), os cálculos dos menores principais  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$  podem utilizar as equações (4.13.a) – (4.13.c) por intermédio do complemento de Schur. Ele descreve que para uma matriz simétrica  $A$  definida em blocos, cujos quais não necessitam ter as mesmas dimensões nem mesma ordem, ser positiva definida, seus blocos devem obedecer as seguintes restrições:

$$A = \begin{bmatrix} B & F \\ F^T & G \end{bmatrix} \therefore z^T A z > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} z^T B z > 0 \\ z^T (G - F^T B^{-1} F) z > 0 \end{array} \quad (4.14)$$

<sup>47</sup> Por exemplo, se permutarmos  $\sigma_{13}$  (5ª linha do vetor que agrupa as tensões) por  $\sigma_{22}$  (2ª linha) e fizermos o mesmo com as respectivas deformações ( $\epsilon_{13}$  e  $\epsilon_{22}$ ), altera-se, para a manutenção da equidade da equação (2.3.a), o tensor constitutivo permutando a 5ª linha/coluna com a 2ª.



em que  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{G}$  são escalares ou matrizes e  $\mathbf{F}$  é escalar, vetor ou matriz. Pode-se então, por meio da equação (4.14), descrever a matriz  $\mathbf{B}$  como um menor principal já calculado sendo então necessário apenas o cálculo da segunda restrição. Entretanto, ela tem uma inversa dentro da sua expressão, tornando-a relativamente cara computacionalmente, ao se considerar que as entradas das matrizes são expressões algébricas.

Como exemplo para o equacionamento, uma decomposição de um tensor ortorrômbico em uma parte isotrópica e outra residual que, provavelmente, terá simetria ortorrômbica. As restrições aditivas, chamadas anteriormente de equações de teto, são descritas como:

$$C_{ii}^{EQ} = C_{11}^{iso} + C_{ii}^{ort} \quad (4.15.a)$$

$$C_{ij}^{EQ} = C_{12}^{iso} + C_{ij}^{ort} \quad (4.15.b)$$

$$C_{kk}^{EQ} = \frac{1}{2}(C_{11}^{iso} - C_{12}^{iso}) + C_{kk}^{ort} \quad (4.15.c)$$

no qual nas equações (4.15) índices repetidos não denotam somatório e sua variação é de 1 a 3 para  $i$  e  $j$  e 4 a 6 para  $k$ . Na equação (4.15.b)  $i \neq j$ . As equações (4.15) representam a decomposição de um tensor ortorrômbico. A segunda simetria está relacionada diretamente com a do tensor equivalente pela restrição dos grupos simétricos. Ao verificarmos o primeiro, segundo e terceiro menor principal, apresentado na equação (4.13.a) – (4.13.c), chega-se em:

$$C_{11}^{iso} > 0 \quad C_{11}^{iso} > C_{12}^{iso} \quad (4.16.a)$$

$$C_{11}^{iso} > |C_{12}^{iso}| \quad (4.16.b)$$

$$C_{11}^{iso^3} + 2C_{12}^{iso^3} - 3C_{12}^{iso^2}C_{11}^{iso} > 0 \quad (4.16.c)$$

$$C_{ii}^{ort} > 0 \quad (4.16.d)$$

$$C_{11}^{ort}C_{22}^{ort} > |C_{12}^{ort}|^2 \quad C_{11}^{ort}C_{33}^{ort} > |C_{13}^{ort}|^2 \quad C_{22}^{ort}C_{33}^{ort} > |C_{23}^{ort}|^2 \quad (4.16.e)$$

$$C_{11}^{ort}C_{22}^{ort}C_{33}^{ort} + 2C_{12}^{ort}C_{13}^{ort}C_{23}^{ort} - (C_{23}^{ort^2}C_{11}^{ort} + C_{13}^{ort^2}C_{22}^{ort} + C_{12}^{ort^2}C_{33}^{ort}) > 0 \quad (4.16.f)$$

em que as equações (4.16.a) e (4.16.d), (4.16.b) e (4.16.e), (4.16.c) e (4.16.f) são obtidas por intermédio dos menores principais  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , respectivamente e  $|\cdot|$  denota valor absoluto. Como já descrito, as inequações necessárias para a satisfação do menor principal  $P_3$  são mais complicadas e de difícil manipulação. Entretanto, podem-se utilizar manipulações algébricas para desenvolver essa restrição. Dividindo a equação (4.16.c) por  $C_{11}^{iso^3}$  e, observando que  $C_{11}^{iso}$  é sempre positivo, tem-se que:

$$1 + 2 \left( \frac{C_{12}^{iso}}{C_{11}^{iso}} \right)^3 - 3 \left( \frac{C_{12}^{iso}}{C_{11}^{iso}} \right)^2 > 0 \quad (4.17)$$

cujos qual é positiva dentro do intervalo  $-1/2 < C_{12}^{iso}/C_{11}^{iso} < 1$ . Tem-se que o intervalo superior já corresponde a equação (4.16.a). O intervalo inferior é mais restritivo que a inequação (4.16.b). É importante observar que a equação (4.17) descreve os limites teóricos do coeficiente de Poisson  $\nu$ , tal que  $-1 < \nu < 1/2$ . Para a inequação (4.16.f), procede-se de maneira semelhante, dividindo-a por  $C_{11}^{ort} C_{22}^{ort} C_{33}^{ort}$  e observando a relação de (4.16.d). Tem-se então que:

$$1 + 2 \frac{C_{12}^{ort} C_{13}^{ort} C_{23}^{ort}}{C_{11}^{ort} C_{22}^{ort} C_{33}^{ort}} - \left( \frac{C_{23}^{ort^2}}{C_{22}^{ort} C_{33}^{ort}} + \frac{C_{13}^{ort^2}}{C_{11}^{ort} C_{33}^{ort}} + \frac{C_{12}^{ort^2}}{C_{11}^{ort} C_{22}^{ort}} \right) > 0 \quad (4.18)$$

Com a introdução de três parâmetros adimensionais, tais que  $\alpha_{12} = C_{12}^{ort}/\sqrt{C_{11}^{ort} C_{22}^{ort}}$ ,  $\alpha_{13} = C_{13}^{ort}/\sqrt{C_{11}^{ort} C_{33}^{ort}}$  e  $\alpha_{23} = C_{23}^{ort}/\sqrt{C_{22}^{ort} C_{33}^{ort}}$ , altera-se a inequação (4.18) para:

$$1 + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23} - (\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2) > 0 \quad (4.19)$$

Não é difícil notar a complexidade de se encontrar os limites de cada variável na inequação (4.19). Pode-se obter uma amostra da região cujos quais os valores  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$  e  $\alpha_{23}$  mantêm a positividade do tensor ortorrômbico, deve-se obter uma relação implícita entre elas (Figura 4.1).

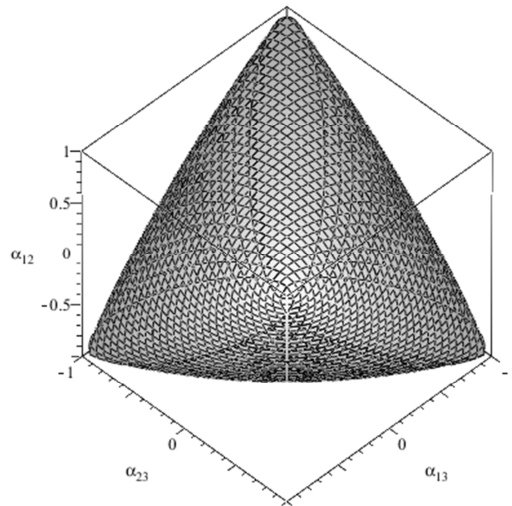


Figura 4.1 – Região de positividade da equação (4.19) (interna a superfície)

A Figura 4.1 (pirâmide de base triangular com faces curvas) demonstra os limites das relações adimensionais  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$  e  $\alpha_{23}$ . A parte interna do gráfico registra a região na qual o tensor constitutivo ortorrômbico mantém a positividade. Pontos na superfície não podem ser considerados, pois gerariam um tensor semi-definido.

Tem-se, portanto, todas as informações para o desenvolvimento da decomposição consistente em relação a cada um dos tensores. É importante citar que as relações das equações e inequações (4.15) – (4.19) são relativas a uma decomposição de um tensor constitutivo ortorrômbico ou de mais alta simetria (utilizando a hierarquia de Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001 e Cowin & Mehrabadi, 1995). Para materiais que têm relação entre as tensões normais com deformações cisalhantes, outras relações são necessárias e, provavelmente, serão mais restritivas que as apresentadas. Outro aspecto importante da decomposição apresentada tem relação com a quantidade de tensores que serão decompostos. De acordo com a equação (4.15), a decomposição pode ser produzida em função de  $N$  materiais desde que respeitada as restrições aos grupos simétricos. O que se nota, com relação à positividade, é que com a adição de outros tensores, restringe-se cada vez mais os valores que as constantes elásticas podem tomar.

Ao unir as restrições das equações (4.15) – (4.19), algumas relações em função do tensor isotrópico são obtidas. Para a clara apresentação, divide-se o tensor constitutivo equivalente em 3 partes: diagonal da região que relaciona as tensões normais com as deformações normais de mesma direção ( $C_{ii}^{EQ}$  onde  $i$  varia de 1 a 3 e não é utilizado o somatório da notação indicial), região que relaciona as tensões cisalhantes com as deformações cisalhantes ( $C_{ii}^{EQ}$  no qual  $i$  varia de 4 a 6, não é utilizado o somatório da notação indicial e por se tratar de um material ortorrômbico, essa matriz já é diagonal) e a região que relaciona as tensões normais com deformações normais que não as da direção das tensões ( $C_{ij}^{EQ}$  em que  $i$  varia de 1 a 3,  $j$  de 2 a 3 e  $i \neq j$ ). Para manter a positividade do tensor residual,  $C_{11}^{iso}$  deve ser menor que o menor termo na primeira região do tensor equivalente (devido à necessidade gerada pelo primeiro menor principal  $P_1$ ). O mesmo é dado pela segunda região, cujo  $C_{11}^{iso} - C_{12}^{iso}$  não pode ser maior que o menor termo do tensor equivalente (mesma razão que a anterior). Já para a terceira região, deve-se verificar apenas as inequações (4.17) para isotropia e equação (4.19) para materiais ortorrômbicos. Matematicamente, tem-se que as duas primeiras relações são descritas, já em união com algumas relações das equações e inequações (4.15) – (4.19), como:

$$0 < C_{11}^{iso} < \min(C_{ii}^{EQ}) \quad (4.20.a)$$

$$-\frac{\min(C_{ii}^{EQ})}{2} = -\frac{C_{11}^{iso}}{2} < C_{12}^{iso} < C_{11}^{iso} = \min(C_{ii}^{EQ}) \quad (4.20.b)$$

cuja restrição de intervalo na inequação (4.20.b) são intervalos teóricos que apenas relacionam os máximos e mínimos de  $C_{11}^{iso}$  com seus respectivos de  $C_{12}^{iso}$ . É necessário, ainda, que as restrições das equações (4.16) sejam obedecidas, o que torna os cálculos dos limites das propriedades elásticas decompostas extremamente complexos.

#### 4.3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA DECOMPOSIÇÃO CONSISTENTE

Utilizar-se-á como base dos exemplos tensores constitutivos ortorrômbicos (eq. (2.28.a)) ou mais simétricos (Figura 1.1) devido a apresentação das equações para este tipo de simetria (eqs. (4.15) – (4.19)). A fim de se obter uma regra para comparar dois materiais isotrópicos e saber qual seria o seu respectivo mais próximo dentro do tensor constitutivo ortorrômbico, usa-se a norma euclidiana proposta por Browaeys & Chevrot, 2004, que para um material isotrópico é descrita como:

$$N_{orm}^{iso} = \sqrt{6C_{11}^{iso^2} + 9C_{12}^{iso^2} - 6C_{11}^{iso}C_{12}^{iso}} \quad (4.21)$$

A norma do tensor residual e do tensor fictício são calculadas da seguinte forma:

$$N_{orm}^{FIC} = \sqrt{\mathbf{V}^{FIC} \cdot \mathbf{V}^{FIC}} \quad (4.22.a)$$

$$N_{orm}^{res} = \sqrt{\mathbf{V}^{res} \cdot \mathbf{V}^{res}} \quad (4.22.b)$$

no qual  $\mathbf{V}^{FIC}$  e  $\mathbf{V}^{res}$  são semelhantes ao vetor da equação (4.1) quando suas entradas são cambiadas pelas dos tensores fictício e residual, respectivamente. Se utilizarmos os limites descritos nas inequações (4.20), a norma descrita na equação (4.21) é sempre crescente. Ao analisar o problema como uma otimização de parâmetros (e é justamente o que será feito posteriormente), os ótimos se encontrarão perto ou nos limites. A falta de convexidade faz com que o ótimo para o tensor isotrópico torne o tensor residual muito próximo da semi-positividade. Uma discussão sobre isso e outras propriedades da decomposição serão apresentadas na conclusão deste capítulo e desta tese.

Um algoritmo de otimização usando como base o método de Monte Carlo foi desenvolvido para encontrar os pontos  $(C_{11}^{iso}, C_{12}^{iso})$  que geram a maior norma, dentro dos pontos testados. A escolha da metodologia de otimização se dá pela facilidade de implementação e dos testes necessários para cada ponto verificando a positividade do tensor residual em função das inequações da decomposição inconsistente. A rotina baseada neste algoritmo está apresentada no Anexo II desta tese.

O primeiro exemplo dessa decomposição consistente será aplicado ao tensor ortorrômbico da equação (4.5.b). O que se percebeu nos resultados é que o tensor isotrópico de maior norma está muito próximo do limite da função objetivo, como já comentado. O tensor isotrópico mais próximo, tendo em vista o critério da norma, e seu respectivo residual são escritos na forma:

$$C_{iso}^{eq(4.5.b)} = \begin{bmatrix} 159.15 & 65.75 & 65.75 & 0 & 0 & 0 \\ & 159.15 & 65.75 & 0 & 0 & 0 \\ & & 159.15 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 46.70 & 0 & 0 \\ & & & & 46.70 & 0 \\ sym & & & & & 46.70 \end{bmatrix} \quad (4.23.a)$$

$$C_{res}^{eq(4.5.b)} = \begin{bmatrix} 32.85 & 0.25 & -5.75 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.85 & -9.75 & 0 & 0 & 0 \\ & & 112.85 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 13.30 & 0 & 0 \\ & & & & 15.30 & 0 \\ sym & & & & & 2.30 \end{bmatrix} \quad (4.23.b)$$

com norma de 357.90393, que corresponde a 80.43% da norma total (que é 444.98540) sem o tensor residual perder a propriedade de positividade. A norma do tensor residual é 125.445 que corresponde a 28.19%. Pela desigualdade triangular, a soma das normas é maior que a norma das somas (a norma do tensor constitutivo da equação (4.5.b)). Apesar da problemática com relação ao ótimo próximo da borda da função objetivo, a metodologia é de fácil aplicação e obtém resultados bastante satisfatórios.

O segundo exemplo é desenvolvido para o tensor transversalmente isotrópico:

$$C_{tis}^{Co} = \begin{bmatrix} 307 & 165 & 103 & 0 & 0 & 0 \\ & 307 & 103 & 0 & 0 & 0 \\ & & 358.1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 78.3 & 0 & 0 \\ & & & & 78.3 & 0 \\ sym & & & & & 71 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O tensor da equação (4.24) –  $C_{tis}^{Co}$  – representa o comportamento mecânico do cobre. Apesar das equações (4.15) – (4.20) terem sido feitas para um tensor fictício ortorrômbico, elas podem ser utilizadas sem correções para materiais de simetria transversalmente isotrópica.

O tensor isotrópico e residual, para a equação (4.24), são dados por:

$$C_{iso}^{eq(4.24)} = \begin{bmatrix} 284.8 & 143 & 143 & 0 & 0 & 0 \\ & 284.8 & 143 & 0 & 0 & 0 \\ & & 284.8 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 70.9 & 0 & 0 \\ & & & & 70.9 & 0 \\ sym & & & & & 70.9 \end{bmatrix} \quad (4.25.a)$$

$$C_{res}^{eq(4.24)} = \begin{bmatrix} 22.2 & 22 & -40 & 0 & 0 & 0 \\ & 22.2 & -40 & 0 & 0 & 0 \\ & & 73.3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 7.4 & 0 & 0 \\ & & & & 7.4 & 0 \\ sym & & & & & 0.1 \end{bmatrix} \quad (4.25.b)$$

cuja norma para a equação (4.25.a) é 93.969% da norma do tensor fictício. Observa-se, novamente, que um pivô do tensor da equação (4.25.b) está muito próximo de zero, podendo ter os mesmos problemas já descritos no tensor fictício decomposto anterior. Entretanto, dessa vez, este pivô se encontra na relação entre as tensões e deformações cisalhantes.

É importante salientar que a apresentada decomposição do tensor constitutivo é diretamente relacionada com o tensor da elasticidade tridimensional. Para o tensor constitutivo reduzido, é necessário que se faça uma análise semelhante, respeitando as dimensões do tensor constitutivo que descreve o comportamento de um material na teoria de placas finas. Utiliza-se os menores principais que se aplicam ao caso de placas finas ( $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ )<sup>48</sup>, suas equações de teto (eqs. (4.15)) e claro, o tensor constitutivo reduzido equivalente e decompostos. Se, ao utilizar o procedimento descrito na seção 4.1.2 e, a partir dos tensores resultantes de dimensões 6x6, reduzi-los por intermédio das equações (2.5), as equações de teto, em função dos tensores reduzidos, não são respeitadas.

Pode-se provar que, com a decomposição do tensor constitutivo, as raízes da equação característica de placas finas (eq. (3.26)) deixam de ser iguais. Utiliza-se como exemplo, um tensor constitutivo reduzido, que é escrito como:

$$C = \begin{bmatrix} 225 & 120 & 0 \\ 120 & 169 & 0 \\ 0 & 0 & 37.5 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Nota-se que o tensor da equação (4.26) tem simetria ortorrômbica. Ele não representa nenhum material real. Suas propriedades elásticas foram escolhidas de modo que as raízes da equação característica de placas finas (eq. (3.26)) sejam iguais. Esta e suas raízes são escritas na forma:

<sup>48</sup> Ou diretamente as equações (4.16), apenas cambiando o índice 3 por 6.

$$169\mu^4 + 2(120 + 2 \times 37.5)\mu^2 + 225 = 0 \quad (4.27.a)$$

$$\mu_1 = \mu_2 = i \quad (4.27.b)$$

A solução fundamental da equação (3.23) tem forma indeterminada e, portanto, é necessária a utilização da solução fundamental da equação (3.30), no qual  $C_{deg} = 1.331361$ . Pode-se, entretanto, decompor este tensor para que suas raízes sejam diferentes das da equação (4.27.b). Ao aplicar a rotina apresentada nas equações (4.15) – (4.20) e notando que se utiliza o tensor constitutivo reduzido, tem-se que o tensor isotrópico de maior norma encontrado é escrito como:

$$\mathbf{C}^{iso} = \begin{bmatrix} 162.6667 & 130.1886 & 0 \\ 130.1886 & 162.6667 & 0 \\ 0 & 0 & 16.2309 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Ao inserir as propriedades elásticas do tensor constitutivo da equação (4.28) na equação característica de placas finas, chega-se em raízes semelhantes às da equação (4.27.b). Entretanto, para este caso, não é possível utilizar a equação (3.30) pois ela gera uma solução fundamental que viola o princípio de invariância com a direção rotacional em soluções isotrópicas, como comentado no capítulo 3. Utiliza-se então a solução fundamental para simetrias isotrópicas e transversalmente isotrópicas. O tensor resultante é ortorrômbico e tem a forma:

$$\mathbf{C}^{ort} = \begin{bmatrix} 62.3333 & -10.8886 & 0 \\ -10.8886 & 6.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 21.2609 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

As raízes da equação característica para o tensor descrito na equação (4.29) são:

$$\mu_1 = 2.980132i \quad (4.30)$$

$$\mu_2 = 1.052711i$$

Não existe restrição para a aplicação da solução fundamental da equação para as raízes da equação (4.30). Prova-se que a decomposição do tensor pode modificar as raízes das equações características e, porventura, evitar a degeneração matemática. Tendo isso em vista, necessita-se, portanto, de uma relação entre a solução fundamental que é gerada pelo tensor constitutivo da equação (4.26) e das soluções fundamental isotrópica, que utiliza o tensor da equação (4.28), e anisotrópica, que utiliza o tensor da equação (4.29) ou mais diretamente, as raízes da equação (4.30). É exatamente isso que será proposto no capítulo 5.

#### 4.4 CONCLUSÃO

Provou-se que duas decomposições do tensor constitutivo propostas na literatura não correspondem às decomposições consistentes, pois não geram tensores positivos definidos. Provavelmente, as teorias que obtêm o tensor isotrópico mais próximo não levam em consideração a positividade do tensor residual e, portanto, não podem ser considerados em análises que necessitam desta propriedade. Apresentou-se, então, uma decomposição consistente, que mantém a positividade dos tensores resultantes. Notou-se, entretanto, que a função objetivo da otimização para a obtenção de um tensor isotrópico por intermédio de um tensor ortorrômbico é sempre crescente e seu ótimo está sempre perto das restrições. Isso faz com que o menor pivô do tensor residual seja muito próximo de zero.

Uma alternativa é alterar a função objetivo de forma que esta se torne convexa. Outro ponto é a definição de ótimo. Para o exemplo descrito, o ótimo é um tensor de maior norma possível (sendo essa norma a descrita pela equação (4.21)) que seja positivo e mantenha a positividade do tensor residual. Contudo, outras normas podem ser utilizadas bem como outras restrições. Para o primeiro, pode-se utilizar o determinante, que nada mais é que o produto dos autovalores. Para o segundo pode-se forçar uma diferença específica<sup>49</sup> dos autovalores do tensor residual e assim poder evitar valores na diagonal deste tensor próximo de zero, como o ocorrido no exemplo. Apesar de certos problemas, a decomposição proposta obteve êxito no que concerne o desenvolvimento de um tensor isotrópico e residual positivos.

---

<sup>49</sup> Segura, em função da degeneração matemática.



## 5 DECOMPOSIÇÃO ADITIVA CINEMÁTICA E CONSTITUTIVA

A decomposição aditiva de soluções fundamentais está dividida em duas abordagens: cinemática e constitutiva. Esta última está subdividida em duas metodologias nomeadas de direta e decomposição de Adomian. Elas serão apresentadas nesta ordem e em relação aos operadores diferenciais lineares da elasticidade tridimensional e de placas finas. A decomposição cinemática trabalha diretamente com a superposição de soluções fundamentais do mesmo operador diferencial. Elas se diferenciam pelos coeficientes desse operador na forma de simetrias constitutivas diferentes. Como se introduz a forma da solução fundamental equivalente, a relação incógnita é em relação aos tensores constitutivos equivalentes e das soluções decompostas. Na decomposição constitutiva, a última relação é conhecida. Portanto, deve-se obter a relação entre as soluções fundamentais decompostas e a solução fundamental equivalente.

Será provado, para ambos os operadores diferenciais objeto deste trabalho, a impossibilidade de desenvolvimento da decomposição cinemática quando utilizados tensores constitutivos decompostos não proporcionais e, portanto, de diferente simetria. As relações obtidas para a decomposição constitutiva, via abordagem direta, são inconclusivas, não se provando sua possibilidade. A solução equivalente é obtida por intermédio de convoluções implícitas. Mostra-se, também, para este caso, o cálculo da primeira e segunda derivadas e será apresentada sua não-linearidade em função das soluções decompostas. A decomposição constitutiva, tendo em vista utilização da decomposição de Adomian, se apresenta possível. Contudo, são necessários os cálculos de soluções fundamentais com o termo fonte diferentes da função delta de Dirac, tornando seu desenvolvimento pesado analiticamente. Ainda assim, a metodologia abre espaço para a determinação de soluções fundamentais baseadas na hierarquia

do tensor constitutivo via classes simétricas (Figura 1.1) podendo-se obter uma única solução fundamental não-degenerativa que englobe todas as simetrias.

### 5.1 DECOMPOSIÇÃO CINEMÁTICA

A prova da impossibilidade da decomposição cinemática será apresentada, inicialmente, para o caso da elasticidade tridimensional, pois ela pode ser facilmente reduzida a placas finas. Será suposto que a decomposição é possível e a partir da relação encontrada entre os tensores constitutivos, será demonstrado que apenas para tensores proporcionais, os equacionamentos se mantêm.

A equação inicial para tal decomposição é dada como:

$$\mathbf{u}^{VER}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}^{FIC}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{u}^{(N)}(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

onde os sobrescritos seguem a mesma regra que a equação (4.8) e o símbolo  $\equiv$  é de equivalência, devido à discussão apresentada por LaMattina, Klang, & Eischen, 1998. Ou seja, a solução fundamental equivalente deve ter equivalência com a solução fundamental verdadeira. Isso é descrito dessa forma, pois a solução verdadeira pode não existir, tomando uma forma indeterminada, quando houver degeneração matemática. Como a solução fictícia é desenvolvida por intermédio de outras soluções, que forçadamente não degeneram, pode-se desenvolver uma metodologia de obtenção de soluções fundamentais que antes degenerariam por soluções que não o fazem. A diferença entre as soluções decompostas –  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{u}^{(N)}(\mathbf{x})$  – está no tensor constitutivo que as desenvolve. Mais diretamente, nas raízes da equação característica do operador diferencial, que é relacionada com as propriedades elásticas.

O vetor solução fundamental, descrito na equação (5.1), pode ser descrito por intermédio do tensor solução fundamental, conforme a equação (3.44). Sendo assim, pode-se reescrever a equação (5.1), de modo que:

$$\mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{U}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{U}^{(N)}(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

O vetor solução fundamental é dado pelo produto da excitação externa com o tensor solução fundamental (eq. (3.43.a) e (3.44)). Ao considerar a equação (3.41) em união com a equação (5.1) – (5.2), tem-se que:

$$\partial_x^T \mathbf{C}^{FIC} \partial_x \mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x}) = -\mathbf{I}\delta(\mathbf{x}) = \partial_x^T \mathbf{C}^{FIC} \partial_x [\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{U}^{(N)}(\mathbf{x})] \quad (5.3)$$

onde já foi considerado que a excitação externa é dada pela função de Dirac aplicada na origem do domínio. Como cada uma das soluções decompostas na equação (5.2) é uma solução fundamental, sabe-se que:

$$\partial_x^T \mathbf{C}^{(X)} \partial_x \mathbf{U}^{(X)}(\mathbf{x}) = -\mathbf{I}\delta(\mathbf{x}) \quad (5.4)$$

no qual  $X$  pode ter os valores numéricos das soluções fundamentais da equação (5.2). Aplica-se a transformada de Fourier tridimensional em ambos os lados da equação (5.2), por intermédio da mesma transformada nas equações (5.4), obtém-se então as equações:

$$\widehat{\mathbf{U}}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \widehat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \widehat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) + \dots + \widehat{\mathbf{U}}^{(N)}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.5.a)$$

$$\mathbf{L}^{(X)}(\boldsymbol{\zeta}) \widehat{\mathbf{U}}^{(X)}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{I} \quad (5.5.b)$$

sabendo que o operador diferencial  $\mathbf{L}^{(X)}(\partial_x)$  é descrito pela equação (3.43.b) e sua transformada de Fourier segue a equação (3.5). É importante ressaltar, com relação às equações (5.1) – (5.5), o que é conhecido e o que é incógnito. As soluções fundamentais verdadeiras decompostas, diga-se  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{u}^{(N)}$  ou seus respectivos tensores solução fundamental –  $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{U}^{(N)}(\mathbf{x})$  – são conhecidos. Entretanto suas transformadas não são. A transformada de Fourier, neste caso, é apenas uma ferramenta matemática para obter relações entre as entidades fictícias e decompostas. O tensor constitutivo  $\mathbf{C}^{FIC}$  é um dado de entrada do problema. Seus respectivos das soluções decompostas são parcialmente incógnitos: sabe-se apenas suas simetrias. Em verdade, é essa relação que se quer obter. Por meio dela, verifica-se a possibilidade da decomposição bem como as propriedades elásticas do tensor fictício se propagam aos tensores decompostos.

Ao notar que as variáveis da transformada são reais e que o tensor constitutivo é positivo definido, a equação (5.5.b) pode ser escrita explicitamente em relação à  $\widehat{\mathbf{U}}^{(X)}(\boldsymbol{\zeta})$ . Ela nada mais é que a inversa do seu operador diferencial transformado. Modifica-se a equação (5.5.a), por intermédio dessa informação, na forma:

$$\mathbf{L}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta})^{-1} = \mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})^{-1} + \mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})^{-1} + \dots + \mathbf{L}^{(N)}(\boldsymbol{\zeta})^{-1} \quad (5.6)$$

Ou seja, o inverso do operador equivalente é igual à soma dos inversos dos operadores decompostos. Nota-se, pela equação (5.6), a relação próxima que a decomposição cinemática tem com a soma de molas em série, ao se considerar  $\mathbf{L}^{(X)}(\boldsymbol{\zeta})$  como uma rigidez. Para se obter as relações entre os tensores constitutivos, inverte-se os dois lados da equação (5.6), na forma:

$$\mathbf{L}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})[\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1}\mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.7)$$

notando que, para a equação (5.7), utiliza-se  $N = 2$ . Não se perde em generalidade ao fazer tal consideração. Basta, após obter as relações entre os tensores constitutivos ou mesmo diretamente na equação (5.7), considerar que a solução  $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{x})$  é uma solução fictícia e propor novamente a decomposição. É importante explicitar que a equação (5.7) é comutativa com relação à  $\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})$  e  $\mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})$ . Devido o fato de que algumas operações matriciais podem forçar a perda desta propriedade, escreve-se que:

$$2\mathbf{L}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})[\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1}\mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})[\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1}\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.8)$$

Impõe-se, portanto, a comutatividade.

A transformada do operador diferencial da elasticidade tridimensional é dada por:

$$\mathbf{L}^{(X)}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{Y}^T(\boldsymbol{\zeta})\mathbf{C}^{(X)}\mathbf{Y}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.9.a)$$

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & 0 & \zeta_3 & \zeta_2 \\ 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & \zeta_3 & \zeta_2 & \zeta_1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.9.b)$$

Por intermédio das equações (5.9) pode-se colocar em evidência os tensores constitutivos na equação (5.8). Para obter relações entre os tensores constitutivos, sem as variáveis da transformada, diversas operações matriciais são necessárias. As identidades usadas nessas operações são a operação vetorial, produto de Kronecker, identidade do produto misto (produto matricial e o produto de Kronecker) e a transformação de um produto matricial triplo, quando submetido à operação vetorial. Matematicamente, considerando que  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são matrizes que podem ser retangulares, tem-se que:

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \{A_{11} \ A_{21} \ \cdots \ A_{m1} \ A_{12} \ A_{22} \ \cdots \ A_{m2} \ \cdots \ A_{mn}\}^T \quad (5.10.a)$$

$$\mathbf{A}_{m \times n} \otimes \mathbf{B}_{r \times q} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{B} & A_{12}\mathbf{B} & \cdots & A_{1n}\mathbf{B} \\ A_{21}\mathbf{B} & A_{22}\mathbf{B} & \cdots & A_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}\mathbf{B} & A_{n2}\mathbf{B} & \cdots & A_{nn}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{mr \times nq} \quad (5.10.b)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{D} \otimes \mathbf{E}) = \mathbf{AD} \otimes \mathbf{BE} \quad (5.10.c)$$

$$\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X}) \quad (5.10.d)$$

É importante destacar que o produto de Kronecker geralmente não é comutativo. Esse é o motivo da imposição da comutatividade da equação (5.7), obtendo então, a equação (5.8). Tanto o produto de Kronecker (eq. (5.10.b)) quanto a operação vetorial (eq. (5.10.a)) são lineares. Como a igualdade na equação (5.8) é relativa a cada posição do operador equivalente transformado, pode-se aplicar, em ambos os lados, a equação (5.10.a) e reescrevendo a equação (5.8) de modo que:

$$2\text{vec}(\mathbf{L}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta})) = \text{vec}\left(\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})[\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1}\mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})\right) + \text{vec}\left(\mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})[\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1}\mathbf{L}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})\right) \quad (5.11)$$

Utiliza-se a identidade da equação (5.10.d), modificando a equação (5.11), de modo que:

$$2(\mathbf{Y}^T \otimes \mathbf{Y}^T)\text{vec}(\mathbf{C}^{FIC}) = [(\mathbf{L}^{(1)} \otimes \mathbf{L}^{(2)}) + (\mathbf{L}^{(2)} \otimes \mathbf{L}^{(1)})]\text{vec}\left([\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}]^{-1}\right) \quad (5.12)$$

Aplica-se, então, quatro vezes a identidade da equação (5.10.c) obtendo:

$$\mathbf{L}^{(i)} \otimes \mathbf{L}^{(j)} = (\mathbf{Y}^T \otimes \mathbf{Y}^T)(\mathbf{C}^{(i)} \otimes \mathbf{C}^{(j)})(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y}) \quad (5.13)$$

onde  $i$  e  $j$  tomam valores 1 e 2 e  $i \neq j$ . Ao inserir a equação (5.13) na equação (5.12) e considerando novamente a identidade da equação (5.10.d), tem-se que:

$$2(\mathbf{Y}^T \otimes \mathbf{Y}^T)\text{vec}(\mathbf{C}^{FIC}) = (\mathbf{Y}^T \otimes \mathbf{Y}^T)[(\mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{C}^{(2)}) + (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{C}^{(1)})]\text{vec}\left(\mathbf{Y}^T[\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}]^{-1}\mathbf{Y}\right) \quad (5.14)$$

Por intermédio da equação (5.14) pode-se montar um sistema linear  $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{A} = (\mathbf{Y}^T \otimes \mathbf{Y}^T)$ . Como essa matriz é diferente de zero, o vetor  $\mathbf{z}$  deve ser nulo em todas suas posições. Portanto, a fim de satisfazer tal afirmação, reescreve-se a equação (5.14) de modo que:

$$\text{vec}(\mathbf{C}^{FIC}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{C}^{(2)}) + (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{C}^{(1)})]\text{vec}\left(\mathbf{Y}^T[\mathbf{Y}^T(\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)})\mathbf{Y}]^{-1}\mathbf{Y}\right) \quad (5.15)$$

Por meio da equação (5.15) pode-se provar a impossibilidade da decomposição cinemática quando tratada dessa forma. O lado esquerdo dessa equação é dependente apenas das propriedades elásticas fictícias. O lado direito depende dos tensores constitutivos decompostos e das variáveis da transformada. O produto matricial interno à operação  $\text{vec}$ , por se tratar de um produto matricial retangular, manterá sua dependência em  $\boldsymbol{\zeta}$ . Caso  $\mathbf{Y}$  fosse uma matriz retangular e não-singular, a equação seria satisfeita e a relação entre as propriedades elásticas equivalentes e decompostas seria semelhante a (5.8), cambiando diretamente os operadores lineares transformados pelos tensores constitutivos.

Ao investigar mais profundamente a resultante das operações matriciais dentro do operador  $\text{vec}$ , pode-se obter uma prova mais contundente, por intermédio da *divisão longa de polinômios*. Propõe-se que a inversa seja resolvida pela regra de Cramer, mostrada na equação (3.45). Por intermédio dela, chega-se em:

$$\mathbf{Y}^T [\mathbf{Y}^T (\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)}) \mathbf{Y}]^{-1} \mathbf{Y} = \frac{1}{\|\mathbf{Y}^T (\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)}) \mathbf{Y}\|} \mathbf{Y}^T \text{adj}(\mathbf{Y}^T (\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)}) \mathbf{Y}) \mathbf{Y} \quad (5.16)$$

Os polinômios obtidos na resultante do produto matricial  $\mathbf{Y}^T \text{adj}(\mathbf{Y}^T (\mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)}) \mathbf{Y}) \mathbf{Y}$  tem grau de homogeneidade 6, com relação às variáveis  $\boldsymbol{\zeta}$ . O mesmo acontece com o grau de homogeneidade do determinante encontrado na equação (5.16). Pode-se utilizar as transformações mostradas nas equações (3.46) – (3.50) para que a equação (5.16) dependa de apenas uma variável. Como as transformações não alteram o grau dos polinômios, o denominador da equação (5.16) terá grau polinomial 6, bem como todas as entradas da matriz desta mesma equação. Portanto, tem-se a divisão de dois polinômios de sexto grau. Por intermédio do teorema do resto (*the polynomial remainder theorem*), descreve-se que:

$$\frac{f(O^n(x))}{x - a} = g(O^{n-1}(x)) + f(a) \quad (5.17)$$

Caso  $a$  seja uma raiz deste polinômio,  $f(a)$  é igual a zero e tem-se uma divisão exata. Ao considerar o teorema fundamental da álgebra, pode-se escrever qualquer polinômio em função de suas raízes. Então, por intermédio da equação (5.17) tem-se que, para a razão da equação (5.16) seja independente de  $\boldsymbol{\zeta}$ , é necessário que as raízes do polinômio denominador e do numerador sejam iguais. Isso só ocorre quando  $\mathbf{C}^{(2)}$  é proporcional a  $\mathbf{C}^{(1)}$ . Se respeitarmos essa última afirmação, tem-se que a decomposição cinemática só é possível quando existe proporcionalidade entre os operadores diferenciais e, portanto, sendo impossível sua separação em função da simetria constitutiva. Isso porque é impossível que exista proporcionalidade entre tensores constitutivos de diferente simetria. Nota-se que essa restrição não se afeta apenas a simetria dos materiais decompostos. Podem existir dois materiais de mesma simetria não proporcionais. Ademais, caso  $\mathbf{C}^{(2)}$  seja proporcional a  $\mathbf{C}^{(1)}$ , ambos serão proporcionais a  $\mathbf{C}^{FIC}$ .

A impossibilidade de se obter um tensor constitutivo equivalente que respeitasse a equação (5.1) e (5.2) pode ser explicada por intermédio da equação (5.7) ou (5.8). O que se procura fazer nessas equações é obter o comportamento do operador diferencial equivalente por intermédio de um produto comutativo. A impossibilidade se dá no resíduo deste produto, que

depende das variáveis da transformada. Essas equações tem uma ligação íntima com as equações (5.1) e (5.2) e, portanto, não podem ser substituídas.

Uma alternativa para a obtenção da decomposição cinemática então, é modificar a equação (5.1) e adicionar um termo no qual exista uma relação entre as soluções fundamentais de forma que a parte residual da equação (5.16) possa ser eliminada. Entretanto, não se pode provar que este novo termo não degenera ou mesmo que ele possa eliminar a parte residual. Além disso, perde-se a característica de superposição de soluções fundamentais, pois o termo adicionado provavelmente não será uma solução deste tipo.

A decomposição cinemática da solução fundamental de placas finas tem propriedades semelhantes em relação à decomposição na elasticidade tridimensional. Portanto, ela é impossível. Por se tratar de um operador diferencial escalar, pode-se obter uma relação independente das variáveis da transformada. Entretanto, o sistema de relações obtido, entre as propriedades elásticas fictícias e decompostas, é hiperdefinido. Pode-se determinar que essa relação seria semelhante na decomposição na elasticidade tridimensional e, por meio dela, mostra-se o termo residual. Para manter um procedimento matemático coerente, se apresenta todos os passos de análise. Tem-se então, a decomposição da solução fundamental equivalente, na forma:

$$u^{VER}(\mathbf{x}) \equiv u^{FIC}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N u^{(n)}(\mathbf{x}) = u^{(1)}(\mathbf{x}) + u^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots + u^{(N)}(\mathbf{x}) \quad (5.18)$$

onde os índices são análogos ao da equação (5.1). O mesmo se diz com relação à equivalência entre  $u^{VER}(\mathbf{x})$  e  $u^{FIC}(\mathbf{x})$ . Aplica-se o operador (3.14.a) na equação (5.18), obtendo-se:

$$\frac{h^3}{12} \boldsymbol{\partial}^T \tilde{\mathbf{C}}^{FIC} \boldsymbol{\partial} u^{FIC}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) = \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\partial}^T \tilde{\mathbf{C}}^{FIC} \boldsymbol{\partial} [u^{(1)}(\mathbf{x}) + u^{(2)}(\mathbf{x}) + \dots + u^{(N)}(\mathbf{x})] \quad (5.19)$$

onde já se considera que a carga infinitesimal está aplicada na origem do sistema coordenado. Cada uma das soluções decompostas são soluções fundamentais e, por isso, seguem a seguinte relação:

$$\frac{h^3}{12} \boldsymbol{\partial}^T \tilde{\mathbf{C}}^{(X)} \boldsymbol{\partial} u^{(X)}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (5.20)$$

Aplica-se a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (5.18) e (5.20), e, sabendo que a transformada da solução fundamental é igual à inversa do operador diferencial transformado (eq. (5.20)), tem-se que:

$$\frac{1}{L^{FIC}(\boldsymbol{\zeta})} = \frac{1}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} + \frac{1}{L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})} + \cdots + \frac{1}{L^{(N)}(\boldsymbol{\zeta})} \quad (5.21)$$

que tem uma relação análoga com sua respectiva na elasticidade tridimensional (eq. (5.6)). Por esta relação e pelo mesmo motivo que na elasticidade tridimensional, considerar-se-á  $N = 2$  e a equação (5.21) é escrita como:

$$L^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})} \quad (5.22)$$

Põe-se em evidência os tensores constitutivos reduzidos, na forma:

$$L^{(X)}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\zeta}^T \tilde{\boldsymbol{c}}^{(X)} \boldsymbol{\zeta} \quad (5.23.a)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_1^2 \quad \zeta_2^2 \quad 2\zeta_1\zeta_2\}^T \quad (5.23.b)$$

e multiplica-se ambos os lados da equação (5.22) por  $L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})$ , notando a positividade dos operadores transformados. Ao fazer tais considerações, chega-se em:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T [\boldsymbol{c}^{FIC} \boldsymbol{\xi} (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) + (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{c}^{FIC} - \boldsymbol{c}^{(1)} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{c}^{(2)} - \boldsymbol{c}^{(2)} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{c}^{(1)}] \boldsymbol{\zeta} = 0 \quad (5.24)$$

onde  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} \otimes \boldsymbol{\zeta}$ . É importante ressaltar, como o produzido na análise da decomposição na elasticidade tridimensional, forçou-se a comutatividade na operação, já que a equação (5.22) é comutativa. Considerando o fato que a matriz é simétrica, devido à comutatividade, e positiva definida, além do fato que os vetores  $\boldsymbol{\zeta} \neq \mathbf{0}$ , tem-se que, então:

$$\boldsymbol{c}^{FIC} \boldsymbol{\xi} (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) + (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{c}^{FIC} - \boldsymbol{c}^{(1)} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{c}^{(2)} - \boldsymbol{c}^{(2)} \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{c}^{(1)} = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

que, ao utilizar o operador vetorial (eq. (5.10.d)), chega-se em:

$$[\boldsymbol{c}^{FIC} \otimes (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) + (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) \otimes \boldsymbol{c}^{FIC} - \boldsymbol{c}^{(1)} \otimes \boldsymbol{c}^{(2)} - \boldsymbol{c}^{(2)} \otimes \boldsymbol{c}^{(1)}] \text{vec}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

e notando que  $\text{vec}(\boldsymbol{\xi}) \neq \mathbf{0}$ , tem-se que:

$$\boldsymbol{c}^{FIC} \otimes (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) + (\boldsymbol{c}^{(1)} + \boldsymbol{c}^{(2)}) \otimes \boldsymbol{c}^{FIC} = \boldsymbol{c}^{(1)} \otimes \boldsymbol{c}^{(2)} + \boldsymbol{c}^{(2)} \otimes \boldsymbol{c}^{(1)} \quad (5.27)$$

Em forma indicial, a equação (5.27) é escrita como:

$$C_{ij}^{FIC} (C_{ks}^{(1)} + C_{ks}^{(2)}) + C_{ks}^{FIC} (C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)}) = C_{ij}^{(1)} C_{ks}^{(2)} + C_{ks}^{(1)} C_{ij}^{(2)} \quad (5.28)$$

onde  $i, j, k$  e  $s$  variam em 1, 2 e 6. Observa-se que as equações (5.27) e (5.28) não são iguais. Pode-se, entretanto, por intermédio da equação (5.28), obter todas as relações existentes resultantes dos produtos de Kronecker da equação (5.27).



Nota-se então, que a relação gerada pela equação (5.27) monta o tensor equivalente de forma que, ao aplicá-lo no operador transformado da equação (5.22), obtenha-se a decomposição apresentada na equação (5.18). Contudo, a matriz resultante do produto de Kronecker, para o caso da equação (5.27), gera uma matriz 9x9 simétrica criando 45 equações que devem ser satisfeitas. Neste conjunto, apenas 21 equações são independentes<sup>50</sup>. Ao observar que o tensor equivalente é conhecido, há apenas 12 variáveis a serem encontradas se for considerado que tanto o material (1) quanto o material (2) tenham simetria monoclinica. Fica claro que, ao aumentar a simetria de um dos materiais, o número de variáveis diminui sem uma redução diretamente proporcional das equações independentes.

Uma interessante explicação física da equação (5.28) pode ser dada em função da analogia apresentada no capítulo 1. Propõe-se, então, que cada componente de um tensor elástico de segunda ordem seja considerado como uma mola linear. A propagação do efeito de uma das molas fictícias é relacionada com todas as molas decompostas de todos os materiais decompostos. Ou seja, o efeito de uma constante elástica fictícia é correlato com todas as suas respectivas dos tensores elásticos decompostos. Por serem relações muito rígidas, a única solução possível é que as propriedades elásticas decompostas sejam proporcionais entre si e, portanto, proporcionais com o tensor equivalente. Devido a essa proporcionalidade, as simetrias do tensor fictício e dos decompostos devem ser idênticas. Cita-se que, para o caso unidimensional proposto na analogia, a equação (5.28) obtém exatamente a rigidez equivalente de molas em série.

Outros argumentos podem ser usados para provar, parcialmente, que a degeneração cinemática é impossível. Diz-se parcialmente, pois se utiliza apenas as soluções fundamentais de placas finas e uma decomposição na qual uma das soluções é sempre isotrópica. Apesar disso, algumas características podem ser expandidas a outros casos.

Considera-se a variação da solução fundamental equivalente para placas finas, mostrada na equação (5.18). Ao explicitar que a solução  $u^{(1)}$  é desenvolvida por um material isotrópico (eq. (3.33)) e que a solução  $u^{(2)}$  seja constituída por um material anisotrópico qualquer, no qual

---

<sup>50</sup> O número de 21 equações advém do mesmo princípio de um tensor elástico triclinico ter 21 constantes elásticas. Basta considerar que a equação (5.28) pode ser descrita por 2 tensores de quarta ordem (um do lado esquerdo e outro do lado direito) que tem, exatamente, as mesmas simetrias que um tensor constitutivo elástico de quarta ordem (eq. (2.2)).

sua solução fundamental é descrita pela equação (3.38), analisa-se a variação em  $\theta$  da solução fundamental equivalente, de modo que:

$$u_{,\theta}^{EQ} = u_{,\theta}^{(2)} \quad (5.29)$$

que analisada por intermédio da equação (3.38) chega-se em:

$$h_{1,\theta}^{EQ}(\theta) = h_{1,\theta}^{(2)}(\theta) \quad (5.30.a)$$

$$h_{2,\theta}^{EQ}(\theta) = h_{2,\theta}^{(2)}(\theta) \quad (5.30.b)$$

As equações (5.30) podem ser vistas como restrições fortes na relação entre as propriedades elásticas equivalentes e do material (2). Isso porque a igualdade de ambas as equações deve-se manter para todo  $\theta$  e as raízes da equação característica da equação (3.26) devem ser diferentes, para haver uma decomposição onde  $u^{EQ} \neq u^{(2)}$ . Entretanto, para que as equações se sustentem, os componentes reais e imaginários dessas raízes devem ser iguais, e, portanto, tendo seus tensores proporcionais. Sendo assim, de uma forma mais simples – e menos geral – prova-se que a decomposição cinemática não pode ser desenvolvida.

Tendo em vista a impossibilidade da decomposição cinemática, a decomposição mista descrita no Capítulo 1 e mostrada na Figura 1.3 também é inviável. Será visto, contudo, que a decomposição constitutiva via decomposição de Adomian retêm algumas das propriedades dessa decomposição (mista).

## 5.2 DECOMPOSIÇÃO CONSTITUTIVA

### 5.2.1 ABORDAGEM DIRETA

Em acordo com a decomposição cinemática, será apresentada a decomposição constitutiva para o caso de elasticidade tridimensional, pois pode ser reduzida à teoria de placas finas. Conforme a equação (4.8), um tensor constitutivo pode ser decomposto em outros tensores de diferente simetria. Para correlacionar essa decomposição com as equações da decomposição cinemática, reescreve-se essa equação na forma:

$$\mathbf{c}^{VER} = \mathbf{c}^{FIC} = \sum_{n=1}^N \mathbf{c}^{(n)} = \mathbf{c}^{(1)} + \mathbf{c}^{(2)} + \dots + \mathbf{c}^{(N)} \quad (5.31)$$

onde os sobrescritos seguem a mesma relação da equação (4.8). Insere-se então a equação (5.31) na equação (3.41) – equação diferencial linear para elasticidade tridimensional – obtendo-se:

$$\partial_x^T \left[ \sum_{n=1}^N \mathbf{C}^{(n)} \right] \partial_x \mathbf{u}^{FIC}(\mathbf{x}) = [\partial_x^T \mathbf{C}^{(1)} \partial_x + \partial_x^T \mathbf{C}^{(2)} \partial_x + \dots + \partial_x^T \mathbf{C}^{(N)} \partial_x] \mathbf{u}^{FIC}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.32)$$

Nota-se, por intermédio da equação (3.43.b), que a decomposição constitutiva nada mais é que uma decomposição aditiva do operador diferencial linear da elasticidade tridimensional. Portanto, tem-se que:

$$\mathbf{L}^{FIC}(\partial_x) \mathbf{u}^{FIC}(\mathbf{x}) = \left( \sum_{n=1}^N \mathbf{L}^{(n)}(\partial_x) \right) \mathbf{u}^{FIC}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (5.33)$$

que, ao considerar que o carregamento externo é a função delta de Dirac e que o vetor solução fundamental pode ser descrito por intermédio do tensor solução fundamental, tem-se que:

$$\hat{\mathbf{U}}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = [\mathbf{L}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1} = \left[ \sum_{n=1}^N \mathbf{L}^{(n)}(\boldsymbol{\zeta}) \right]^{-1} \quad (5.34)$$

Utiliza-se a equação (5.5.b) para então, obter a relação entre as soluções fundamentais fictícia e decompostas. Tem-se então que:

$$\hat{\mathbf{U}}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \left[ \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{U}}^{(n)-1}(\boldsymbol{\zeta}) \right]^{-1} \quad (5.35)$$

Considera-se, devido o mesmo motivo da decomposição cinemática,  $N = 2$ . Chega-se em:

$$\hat{\mathbf{U}}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) [\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.36)$$

notando-se que a mesma identidade utilizada na soma das inversas dos operadores transformados utilizada na decomposição cinemática é usada aqui. Portanto, os produtos matriciais da equação (5.36) são comutativos. Para forçar essa comutatividade, tem-se que:

$$2\hat{\mathbf{U}}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) [\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) [\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^{-1} \hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.37)$$

Algumas considerações são feitas com relação à equação (5.37). Não se conhecem as transformadas de Fourier das soluções fundamentais decompostas  $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{x})$ , conforme exposto na decomposição cinemática. Entretanto, como se conhece todos os tensores constitutivos, as soluções decompostas são cónitas no domínio real. A solução fictícia é considerada indeterminada, pois a princípio, degenera matematicamente ou mesmo é desconhecida,

quando construída por soluções decompostas de mais alta simetria, e é escrita por intermédio das soluções decompostas apenas.

A partir dessas afirmações, surgem alguns problemas com relação à equação (5.37). A transformada inversa da soma de  $\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})$  e  $\hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})$  não é conhecida. É necessário procedimentos algébricos para eliminar qualquer função transformada do denominador dessa equação. Utiliza-se a regra de Cramer para inversas e considerando que o determinante relacionado é sempre diferente de zero, reescreve-se a equação (5.37) na forma:

$$\begin{aligned} & 2\|\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})\|\hat{\mathbf{U}}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) \\ &= \hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})\text{adj}\left(\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})\right)\hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) \\ &+ \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})\text{adj}\left(\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{\mathbf{U}}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})\right)\hat{\mathbf{U}}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) \end{aligned} \quad (5.38)$$

no qual o grau de homogeneidade da equação (5.38) em função das soluções fictícia e decompostas é quatro. Esse grau é importante, pois define diretamente a quantidade de convoluções necessárias para a obtenção da transformada inversa da equação (5.38). É pertinente colocar que a transformada bem como sua inversa, quando aplicadas a equações matriciais, são desenvolvidas termo a termo. Sendo assim, a transformada inversa da equação (5.38) é resolvida por intermédio de quatro convoluções em relação aos termos das soluções nesta equação descritas.

A forma explícita da equação (5.38) no domínio real é extensa. Além disso, são implícitas às componentes do tensor solução fundamental fictício. O peso computacional, mesmo para casos semi-analíticos ou puramente numéricos, seria alto demais para a obtenção dessa solução em uma resolução mínima. Ressalta-se, entretanto, a importância da equação (5.38). Caso ela seja resolvida em uma forma analítica fechada para uma decomposição do tensor constitutivo relacionado a três materiais diferentes, poderia-se obter a solução fundamental ortorrômbica, por intermédio de três tensores constitutivos de simetria transversalmente isotrópicas. É notável que a equação (5.38) não se modifica muito para este caso. Ela ganha dois novos termos no lado direito da equação e o determinante teria três termos diferentes, ao invés de dois. Contudo o grau de homogeneidade não se alteraria. Sendo assim, o peso computacional ao adicionar mais uma simetria à decomposição do tensor constitutivo na equação (5.38) não seria muito mais alto que com essa decomposição apenas para dois materiais. Observa-se que a solução fundamental da elasticidade tridimensional para materiais transversalmente isotrópicos é

conhecida (Nakamura & Tanuma, 1997). Não se diz o mesmo para esta solução para simetria ortorrômbica.

Pode-se também obter a relação entre as soluções fundamentais fictícia e decompostas diretamente no domínio real, por intermédio das equações (3.45) – (3.50), que descrevem o formalismo de Stroh aplicado à elasticidade tridimensional. Tem-se que, por meio das equações (3.48), que:

$$Q_{ik}^{FIC} = Q_{ik}^{(1)} + Q_{ik}^{(2)} \quad R_{ik}^{FIC} = R_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(2)} \quad T_{ik}^{FIC} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} \quad (5.39)$$

e, portanto:

$$L_{ik}^{FIC}(p) = L_{ik}^{(1)}(p) + L_{ik}^{(2)}(p) \quad (5.40)$$

Modifica-se a equação (3.49), por intermédio da equação (5.40), de modo que:

$$U_{ij}^{FIC}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [L^{(1)}(p) + L^{(2)}(p)]_{ij}^{-1} dp \quad (5.41)$$

É importante colocar que:

$$U_{ij}^{(X)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [L^{(X)}(p)]_{ij}^{-1} dp \quad (5.42)$$

e que as equações (5.39) – (5.41) são facilmente expansíveis para  $n$  soluções fundamentais decompostas. O problema matemático é desenvolver a inversa da equação (5.42). Não se pode escrever a equação (5.41) em função apenas da equação (5.42). Sempre haverá termos residuais no cálculo que estarão em função de produtos entre os termos de  $L^{(X)}(p)$ . Pode-se explicar essas afirmações na forma:

$$U_{ij}^{FIC}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) + U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})] - \frac{1}{8\pi r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(p)]_{ij}^{-1} dp \quad (5.43.a)$$

$$F(p) = [L^{(2)}(p)L^{(1)-1}(p) + L^{(1)}(p)L^{(2)-1}(p)]^{-1} [L^{(1)}(p) + L^{(2)}(p)] \quad (5.43.b)$$

Nota-se o aumento da complexidade da integral a ser resolvida. Além disso, não se sabe se o resultado da integral da equação (5.43.a) não gera funções que eliminem  $U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x})$  e  $U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})$  bem como não se sabe se  $F(p)$  pode degenerar ou não. Espera-se, contudo, que isso ocorra, pois, apesar de se retirar da integral da equação (5.41) as soluções  $U_{ij}^{(1)}(\mathbf{x})$  e  $U_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})$ , observa-se que

$L_{ik}^{FIC}(p)$  ainda se mantém na parte residual (última matriz no produto da equação (5.43.b) ao observar a equação (5.40)). Ressalta-se que a equação (5.43.a) não tem forma única. Foi utilizada a identidade binomial por duas vezes, para manter a comutatividade das equações matriciais. Pode-se utilizar outras identidades para expandir a inversa da soma no integrando da equação (5.41) chegando a outras relações.

Outro ponto importante a ser colocado é da resolução das derivadas da solução fundamental fictícia, necessárias para seu uso no MEC. Considerando o fato que esta solução é indeterminada ou desconhecida, essas derivadas devem ser obtidas por intermédio das derivadas das soluções decompostas. Será apresentado, ao final deste capítulo, que estas derivadas podem ser altamente não lineares com relação às soluções decompostas.

A decomposição constitutiva da solução fundamental de placas finas tem como base uma equação semelhante à equação (5.31). Ela é definida como:

$$\tilde{\mathbf{c}}^{VER} = \tilde{\mathbf{c}}^{FIC} = \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{c}}^{(n)} = \tilde{\mathbf{c}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{c}}^{(2)} + \dots + \tilde{\mathbf{c}}^{(N)} \quad (5.44)$$

Por intermédio dessa equação, pode-se explicar a razão da decomposição do tensor constitutivo apresentada no capítulo 4 ter de ser representada diretamente ao tensor constitutivo reduzido. A equação (5.44) geraria as “equações de teto” e, portanto, modificam levemente o equacionamento lá demonstrado.

Ao inserir a equação (5.44) nas equações (3.13) – (3.14), de modo que:

$$\partial_x^T \left[ \sum_{n=1}^N \tilde{\mathbf{c}}^{(n)} \right] \partial_x u^{FIC}(\mathbf{x}) = [\partial_x^T \tilde{\mathbf{c}}^{(1)} \partial_x + \partial_x^T \tilde{\mathbf{c}}^{(2)} \partial_x + \dots + \partial_x^T \tilde{\mathbf{c}}^{(N)} \partial_x] u^{FIC}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad (5.45)$$

tem-se que, conforme sua contrapartida na elasticidade tridimensional, a decomposição constitutiva é uma superposição de operadores lineares de placas finas. Então:

$$L^{FIC}(\partial_x) u^{FIC}(\mathbf{x}) = \left( \sum_{n=1}^N L^{(n)}(\partial_x) \right) u^{FIC}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad (5.46)$$

Ao considerar que  $g(\mathbf{x})$  é igual à função delta de Dirac, ao analisar a equação (3.19) e a partir dessa afirmação, escreve-se que:

$$\frac{1}{\hat{u}^{FIC}} = \frac{1}{\hat{u}^{(1)}} + \frac{1}{\hat{u}^{(2)}} + \dots + \frac{1}{\hat{u}^{(N)}} \quad (5.47)$$

que, para  $N = 2$ , fica:

$$\hat{u}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\hat{u}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})\hat{u}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})}{\hat{u}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) + \hat{u}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})} \quad (5.48)$$

A semelhança entre a equação (5.48) com a equação (5.36) demonstra que os mesmos problemas lá considerados são encontrados aqui. Não se conhece a transformada inversa da inversa da soma de  $\hat{u}^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})$  e  $\hat{u}^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})$ . Por ser uma equação escalar, sua manipulação é mais simples. Multiplica-se, em ambos os lados, o denominador da parte direita da equação (5.48) e, por meio da equação (3.7.b), chega-se na forma explícita, tendo em vista o domínio real, da solução fundamental fictícia. Ela é descrita como:

$$u^{FIC}(\mathbf{x}) ** (u^{(1)}(\mathbf{x}) + u^{(2)}(\mathbf{x})) = u^{(1)}(\mathbf{x}) ** u^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (5.49)$$

em que asterisco denota convolução.

A prova de que a equação (5.49) descreve corretamente o conceito da decomposição constitutiva é dada pela aplicação do operador diferencial de placas finas em ambos os lados dessa equação. Tem-se que:

$$L^{FIC}(\boldsymbol{\partial}_x) \left[ u^{FIC}(\mathbf{x}) ** (u^{(1)}(\mathbf{x}) + u^{(2)}(\mathbf{x})) \right] = L^{FIC}(\boldsymbol{\partial}_x) \left[ u^{(1)}(\mathbf{x}) ** u^{(2)}(\mathbf{x}) \right] \quad (5.50)$$

Por meio da identidade multiplicativa (eq. (3.8.a)) e propriedade da diferenciação (eq. (3.8.c)), chega-se na identidade:

$$u^{(1)}(\mathbf{x}) + u^{(2)}(\mathbf{x}) = u^{(1)}(\mathbf{x}) + u^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (5.51)$$

lembrando que o operador diferencial de  $L^{FIC}(\boldsymbol{\partial}_x)$  é a soma dos operadores  $L^{(1)}(\boldsymbol{\partial}_x)$  e  $L^{(2)}(\boldsymbol{\partial}_x)$  (eq. (5.46)). Via equação (5.50) e a propriedade de diferenciação pode-se obter outra forma de representação da equação (5.50). Ela é:

$$u^{FIC}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[ u^{(1)}(\mathbf{x}) + u^{(2)}(\mathbf{x}) - u^{FIC}(\mathbf{x}) ** \left( L^{(2)}(\boldsymbol{\partial}_x)u^{(1)}(\mathbf{x}) + L^{(1)}(\boldsymbol{\partial}_x)u^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right] \quad (5.52)$$

Um ponto bastante interessante da equação (5.52) está na sua semelhança com as equações (5.43), na elasticidade tridimensional. Ao notar que  $\mathbf{L}^{(X)-1}(p)$  tem uma relação direta com  $U^{(X)}(\mathbf{x})$  (eq. (5.42)), pode-se ver que as soluções são equivalente. Corrobora-se a possibilidade da manutenção da degeneração matemática da solução fictícia.

É importante mencionar que a equação (5.49) não pode ser resolvida diretamente, isto é, determinando-se as convoluções. Nota-se que, qualquer que seja a simetria dos materiais fictícios

envolvidos, as integrais não podem ser calculadas pois elas violam a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para visualizar tal afirmação, observa-se que, no lado direito da mencionada equação, as duas funções ( $u^{(1)}(\mathbf{x})$  e  $u^{(2)}(\mathbf{x})$ ) tendem ao infinito a medida que  $r$  também tenda (eqs. (3.23) e (3.33)). Isso acontece também no lado direito da supramencionada equação, ao considerar que  $u^{FIC}(\mathbf{x})$  também é uma solução fundamental do operador de placas finas e deve, por esse motivo, ter comportamento semelhante às soluções apresentadas no capítulo 3.

Apesar de ser desenvolvida a partir da equação (5.49), a equação (5.52) contém convoluções representadas por uma função que tem propriedades semelhantes às equações (3.32)/(3.33) e outra corresponde ao operador decomposto aplicado à uma solução fundamental, resultando em uma função com características/comportamentos semelhantes às da função delta de Dirac. Espera-se que essa convolução possa ser produzida, notando-se que, ao combinar funções como as mencionadas, o requerimento de Cauchy-Schwarz pode ser satisfeito. Pontua-se que, por se tratar de uma convolução implícita, a complexidade de se obter as relações é alta. Possivelmente possa existir relações entre  $L^{(1)}(\partial_{\mathbf{x}})$  e  $L^{(2)}(\partial_{\mathbf{x}})$ , ou mais diretamente, entre  $\tilde{\mathcal{C}}^{(1)}$  e  $\tilde{\mathcal{C}}^{(2)}$ , além das já apresentadas para que as convoluções existam. Ressalta-se que esse efeito ocorre apenas na solução fundamental de placas finas. As respectivas na elasticidade tridimensional têm características diferentes e respeitam o requerimento para a existência das convoluções.

### 5.2.2 DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

A decomposição de Adomian (Adomian, 1994), conforme brevemente explicado no capítulo introdutório, decompõe um operador diferencial não-linear qualquer em duas ou três partes em função da linearidade de seus termos e conhecimento de suas inversas: termo linear, termo resto (também linear no qual não se conhece a inversa) e termo não-linear. A metodologia para a obtenção da solução do operador diferencial original, ou seja, formado pelos termos linear e não-linear é recursiva: os termos resto e não-linear são considerados como termos fonte e, passo a passo, sua influência é inserida na solução. Uma característica importante é a rápida convergência, mesmo em situações de não-linearidade (Cherruault & Adomian, 1993; Rao, 2010).

Ao considerar os operadores objetos desta tese, bem como a decomposição constitutiva na sua equação geratriz (equação (5.31) e equação (5.44) para elasticidade tridimensional e



placas finas, respectivamente) e, ao notar a influência dessas equações nos operadores diferenciais, nota-se que a decomposição de Adomian pode ser diretamente aplicada a estes casos, utilizando apenas as superposições lineares (termo linear e termo resto). A sua utilização considera o conhecimento da inversa do termo linear. Esta, para os casos aqui em estudo, nada mais é que a sua solução fundamental. Com a manipulação algébrica das equações, algumas propriedades interessantes são encontradas. É importante salientar que a decomposição de Adomian é utilizada em parte nesta monografia: todo o desenvolvimento não-linear desse método é desconsiderado devido ao fato da linearidade dos operadores objetos desse texto; utiliza-se o conceito de recursividade; superposição das diversas componentes geradas pelas equações.

Um estudo é produzido para verificar a convergência do método e possíveis restrições aos operadores e, portanto, diretamente aos tensores decompostos. Com ele, conceitos dessa decomposição podem ser melhores entendidos, bem como suas vantagens e desvantagens. Conforme as análises anteriores, a transformada de Fourier será utilizada juntamente com o teorema de Parseval (Bracewell, 1999) e a propriedade de todas as soluções fundamentais com relação a aproximações (todas as soluções fundamentais são funções temperadas). Inicia-se o desenvolvimento pelo operador de placas finas devido o fato de ele ser escalar. Após, será apresentada a mesma análise para o operador da elasticidade tridimensional.

Após o estudo descrito, uma forma de solução das equações geradas pela decomposição de Adomian é proposta. Ela é baseada no conhecimento da inversa do termo linear, necessidade do uso da própria metodologia e sua propriedade intrínseca de convolução com o termo fonte da equação diferencial.

Apresentada uma forma de solucionar as equações geradas pela metodologia, é mostrado que, teoricamente, pode-se obter uma solução fundamental única que incorpore todas as simetrias constitutivas e seja livre de degeneração, ao menos aquela relativa às propriedades materiais. Ademais, diversas propriedades inerentes ao cálculo das equações recursivas podem simplificar e acelerar a obtenção dessas soluções fundamentais.

Salienta-se que os resultados obtidos por este método são soluções analíticas abertas/truncadas sendo, portanto, soluções aproximadas. Espera-se, entretanto, que a rápida convergência do método (Rao, 2010; Cherruault & Adomian, 1993) faça com que os erros entre a solução truncada e a exata sejam mínimos.

Inicia-se o estudo de convergência via equação (5.45) e considera-se nela  $N = 2$ . As motivações de se considerar apenas dois materiais fictícios são as mesmas já citadas na decomposição cinemática e constitutiva via abordagem direta. Reescrevendo-a, já considerando a equação (3.14.a), o termo fonte igual a função delta de Dirac e a ideia da decomposição de Adomian (termo resto ser considerado como fonte), tem-se:

$$L^{(1)}u^{FIC}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) - L^{(2)}u^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.53)$$

A ideia inicial de Adomian, 1994, é decompor a solução  $u^{FIC}(\mathbf{x})$  em um somatório infinito de modo que:

$$u^{FIC}(\mathbf{x}) = u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) + u_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) + u_{(2)}^{FIC}(\mathbf{x}) + \dots + u_{(m)}^{FIC}(\mathbf{x}) + \dots \quad (5.54)$$

no qual as soluções  $u_{(n)}^{FIC}(\mathbf{x})$ , com  $n$  indo de 0 a infinito, obedecem a seguinte relação:

$$L^{(1)}(\partial_x)u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (5.55.a)$$

$$L^{(1)}(\partial_x)u_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -L^{(2)}(\partial_x)u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.55.b)$$

$$L^{(1)}(\partial_x)u_{(2)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -L^{(2)}(\partial_x)u_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.55.c)$$

⋮

$$L^{(1)}(\partial_x)u_{(m)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -L^{(2)}(\partial_x)u_{(m-1)}^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.55.d)$$

em que  $m$  é a recursão onde a solução da equação (5.54) será truncada. É importante notar que a solução do passo inicial do sistema recursivo (eq. (5.55.a)) é a solução fundamental do operador linear decomposto  $L^{(1)}(\partial_x)$ . A prova de que as equações (5.54) – (5.55) representam a equação (5.53) é dada pela soma de todas as equações (5.55). A diferença entre as equação (5.53) e equações (5.54) – (5.55) é dada pelo operador resto  $-L^{(2)}(\partial_x)$  – aplicado à  $u_{(m)}^{FIC}(\mathbf{x})$ . Pela propriedade que soluções fundamentais são funções temperadas, à medida que  $N$  cresce, o erro diminuirá. Para provar essa afirmação, aplica-se a transformada de Fourier em ambos os lados das equações (5.55), chegando-se em:

$$n = 0 \quad \hat{u}_{(0)}(\zeta) = \frac{1}{L^{(1)}(\zeta)} \quad (5.56.a)$$

$$n = 1 \quad \hat{u}_{(1)}(\zeta) = -\frac{L^{(2)}(\zeta)}{[L^{(1)}(\zeta)]^2} \quad (5.56.b)$$

$$n = 2 \quad \hat{u}_{(2)}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{[L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^2}{[L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})]^3} \quad (5.56.c)$$

⋮

$$n = m \quad \hat{u}_{(m)}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{(-1)^m [L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})]^m}{[L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})]^{m+1}} \quad (5.56.d)$$

observando-se que nas equações (5.56.b) – (5.56.d), o resultado da equação (5.56.a) já é utilizado. Uma informação importante verificada nas equações (5.56) é da necessidade de positividade dos tensores decompostos. Observa-se que apenas o tensor  $\tilde{\mathcal{C}}^{(1)}$  necessita ser positivo definido, devido o fato de que a inversa do operador  $L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})$  deve ser conhecida em todo o domínio. O tensor  $\tilde{\mathcal{C}}^{(2)}$  pode ser indefinido, pois em nenhum momento é necessário a inversa do operador respectivo. Essa é a maior diferença entre as duas abordagens da decomposição constitutiva. Sendo assim, a utilização das decomposições do tensor constitutivo inconsistentes (Browaeys & Chevrot, 2004; Tu, 1968), abordadas no capítulo 4. Ao considerar a transformada de Fourier da equação (5.54) em conjunto com as equações (5.56), tem-se que:

$$\begin{aligned} \hat{u}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) &= \frac{1}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} \left\{ 1 - \frac{L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} + \left( \frac{L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} \right)^2 - \dots + \left[ (-1) \frac{L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} \right]^m + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} \right]^n \end{aligned} \quad (5.57)$$

Nota-se que  $\hat{u}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta})$  é construído por intermédio de uma série de potência alternada, cuja soma infinita é dada por:

$$\hat{u}^{FIC}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})}{L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta})}} \right\} \quad (5.58)$$

que é idêntica à equação (5.53) transformada no domínio de Fourier. Prova-se, portanto, que a metodologia recursiva converge, desde que  $-1 < L^{(2)}(\boldsymbol{\zeta})/L^{(1)}(\boldsymbol{\zeta}) < 1$ . Esse intervalo de convergência é dado para que a série alternada seja decrescente. Pode-se então, por meio dessa relação, montar os intervalos nos quais essa metodologia tem convergência absoluta. Considera-se a equação (5.23) e a relação supramencionada, reescrevendo-a na forma:

$$-1 < \frac{\zeta^T \tilde{\mathcal{C}}^{(2)} \zeta}{\zeta^T \tilde{\mathcal{C}}^{(1)} \zeta} < 1 \quad (5.59)$$

O limite esquerdo é considerado na hipótese de positividade do tensor constitutivo fictício. O lado direito gera uma relação que é escrita como:

$$\zeta^T [\tilde{\mathcal{C}}^{(1)} - \tilde{\mathcal{C}}^{(2)}] \zeta > 0 \quad (5.60)$$

A equação (5.60) apresenta uma restrição da aplicabilidade da decomposição de Adomian quando da determinação de soluções fundamentais. A diferença entre o tensor constitutivo utilizado à esquerda e à direita das equações (5.55) deve gerar uma matriz positiva definida. Essa restrição não existia na decomposição constitutiva via abordagem direta. A necessidade da positividade de  $\tilde{\mathcal{C}}^{(1)}$  se mantém.

Ao considerar que a solução exata só se dá no somatório infinito (eq. (5.54)), é importante a análise de erro e possíveis métodos para reduzi-lo. A definição de erro é dada por:

$$u^{VER}(\mathbf{x}) - u^{FIC}(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}) \quad (5.61)$$

no qual sua norma euclidiana é descrita por:

$$\left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} [u^{VER}(\mathbf{x}) - u^{FIC}(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2}} = \|e(\mathbf{x})\| \quad (5.62)$$

Por intermédio do teorema de Parseval (Bracewell, 1999), a norma da equação (5.62) pode ser escrita no domínio transformado. Dessa forma:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} [\hat{u}^{VER}(\zeta) - \hat{u}^{FIC}(\zeta)]^2 d\zeta = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ \hat{u}^{VER}(\zeta) - \sum_{n=0}^N \hat{u}_{(n)}^{FIC}(\zeta) \right]^2 d\zeta = \|e(\mathbf{x})\|^2 \quad (5.63)$$

que, por meio da equação (5.56) e algumas manipulações algébricas e já considerando o truncamento, tem-se que:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{L^{(2)}(\zeta)}{L^{(1)}(\zeta)} \right)^{2(m+1)} \frac{1}{(L^{(1)}(\zeta) + L^{(2)}(\zeta))^2} d\zeta = \|e(\mathbf{x})\|^2 \quad (5.64)$$

A equação (5.64) corrobora com a equação (5.60). Caso  $L^{(2)}(\zeta)/L^{(1)}(\zeta) > 1$ , não satisfazendo a equação (5.60), o erro é crescente à medida que  $m$  aumente. Caso essa divisão obedeça a essa equação, quanto maior o valor de  $m$ , menor será o erro e este será decrescente com o aumento de

$m$ . Outra informação importante com relação à equação (5.64) está em função da velocidade de convergência. Quanto mais próximo de zero  $L^{(2)}(\zeta)/L^{(1)}(\zeta)$  estiver, mais rápido a solução fictícia está próxima da verdadeira<sup>51</sup>.

Para o operador da elasticidade tridimensional, seguem-se os mesmos procedimentos utilizados na decomposição constitutiva na teoria de placas finas. Utilizam-se as equações (5.5) já considerando o processo da decomposição de Adomian. Tem-se, então, que:

$$\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)\mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{I} - \mathbf{L}^{(2)}(\partial_x)\mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.65)$$

Expande-se o tensor solução fundamental de forma que:

$$\mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{U}_{(m)}^{FIC}(\mathbf{x}) + \dots \quad (5.66)$$

Utiliza-se, então, o sistema recursivo para a obtenção de cada uma das componentes do tensor solução fundamental  $\mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x})$ , de modo que:

$$\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad (5.67.a)$$

$$\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)\mathbf{U}_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -\mathbf{L}^{(2)}(\partial_x)\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.67.b)$$

$$\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)\mathbf{U}_{(2)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -\mathbf{L}^{(2)}(\partial_x)\mathbf{U}_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.67.c)$$

⋮

$$\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)\mathbf{U}_{(m)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -\mathbf{L}^{(2)}(\partial_x)\mathbf{U}_{(m-1)}^{FIC}(\mathbf{x}) \quad (5.67.d)$$

De maneira análoga à teoria de placas finas, o passo inicial da recursão se dá pelo conhecimento do tensor solução fundamental do termo decomposto do operador diferencial fictício  $\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)$ . Ao aplicar a transformada de Fourier nas equações (5.67), tem-se que:

$$n = 0 \quad \hat{\mathbf{U}}_{(0)}^{FIC}(\zeta) = [\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \quad (5.68.a)$$

$$n = 1 \quad \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^{FIC}(\zeta) = -[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1}\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \quad (5.68.b)$$

$$n = 2 \quad \hat{\mathbf{U}}_{(2)}^{FIC}(\zeta) = [\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1}\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1}\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \quad (5.68.c)$$

⋮

---

<sup>51</sup> Em verdade, essa afirmação é corroborada quando está razão é nula. Chega-se diretamente na solução analítica de  $\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)$ .

$$n = m \quad \widehat{\mathbf{U}}_{(m)}^{FIC}(\zeta) = [\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \left\{ (-1)\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \right\}^m \quad (5.68.d)$$

notando-se que nas equações (5.68.b) – (5.68.d) já é usado o resultado da equação (5.68.a) e sabendo-se que:

$$\left\{ \mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \right\}^n = \underbrace{\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \dots \mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1}}_{n \text{ times}} \quad (5.69)$$

A transformada da equação (5.66) é escrita por intermédio das equações (5.68) na forma:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{U}}^{FIC}(\zeta) &= [\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \left\{ \mathbf{I} - \mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} + \dots + [(-1)\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1}]^m \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\} = [\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1}]^n \end{aligned} \quad (5.70)$$

A equação (5.70) é muito semelhante à obtida em placas finas, com a diferença de ser matricial. Por esse motivo, a relação de convergência é mais complexa. Contudo, por se tratar de uma série de potência alternada, é necessário que quando  $n \rightarrow \infty$ , o termo do somatório tenda a zero. Ao analisar potências em matrizes, pode-se utilizar a decomposição por autovalores e autovetores. Diga-se que:

$$\mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} = \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \quad (5.71)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é a matriz que contém os autovetores e  $\mathbf{\Lambda}$  agrupa os autovalores na sua diagonal. Ao inserir a equação (5.71) na equação (5.69), escreve-se que:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{L}^{(2)}(\zeta)[\mathbf{L}^{(1)}(\zeta)]^{-1} \right\}^n &= \mathbf{A}^n = [\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}]^n = \underbrace{\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \dots \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}}_{n \text{ times}} \\ &= \underbrace{\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} \dots \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}}_{n \text{ times}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{Q}^{-1} \end{aligned} \quad (5.72)$$

A matriz dos autovalores, por ser diagonal, tem sua potência definida diretamente pela potência de cada um dos valores da diagonal. Ao considerar essa afirmação, tem-se que, para que a série seja decrescente, todos os autovalores de  $\mathbf{A}$  precisam estar entre  $-1$  e  $1$ , para que, então, a rotina recursiva entre em convergência, de modo semelhante com o que foi demonstrado em placas finas. A análise de erro das soluções fundamentais tridimensionais, por ter sua representação de forma matricial, é mais complexa que a solução fundamental de placas finas. Entretanto, as características daquela análise podem ser utilizadas, de forma análoga, para o caso aqui estudado. Também de forma análoga, caso  $\mathbf{L}^{(2)}(\partial_x)$  seja nulo, tem-se que a resposta do sistema é exata e igual a solução fundamental de  $\mathbf{L}^{(1)}(\partial_x)$ .

Ao se obter as relações necessárias entre os tensores decompostos para a convergência da recursão, analisa-se metodologias para a solução das equações (5.55), para placas finas, e equações (5.67), para elasticidade tridimensional. Há diversas maneiras de resolver as equações diferenciais supramencionadas. Apresenta-se aqui uma que utiliza as propriedades de soluções fundamentais e, além disso, pode descrever de forma mais sucinta uma possível hierarquia das soluções fundamentais. Em concordância com o início dessa seção, será apresentada as características da metodologia de solução para o caso de placas finas, primeiramente, para após, mostrar a rotina para a solução do caso da elasticidade tridimensional.

Ao notar que a solução  $u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x})$  nada mais é que a solução fundamental do operador  $L^{(1)}(\partial_{\mathbf{x}})$  e que pela própria identidade de soluções fundamentais mostradas nas equações (3.9) – (3.10), a equação (5.55.b) é reescrita, de modo que:

$$u_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) = u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) ** [-L^{(2)}(\partial_{\mathbf{x}})u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x})] \quad (5.73)$$

Nomea-se então:

$$L^{(2)}(\partial_{\mathbf{x}})u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) = f^{an}(\mathbf{x}) \quad (5.74)$$

e reescreve-se a equação (5.73) na forma:

$$u_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) ** f^{an}(\mathbf{x}) \quad (5.75)$$

Nota-se que  $f^{an}(\mathbf{x})$  não é uma solução fundamental. A convolução da equação (5.75) deve existir devido fatos já discutidos na decomposição constitutiva via abordagem direta com relação ao requerimento de Cauchy-Schwarz. Para n-éssima recursão, tem-se que:

$$u_{(n)}^{FIC}(\mathbf{x}) = (-1)^n u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) ** \underbrace{[f^{an}(\mathbf{x}) ** \dots ** f^{an}(\mathbf{x})]}_{n \text{ times}} \quad (5.76)$$

Que, ao considerar a equação (5.54), chega-se em:

$$u^{FIC}(\mathbf{x}) = u_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) ** \left\{ \delta(\mathbf{x}) - f^{an}(\mathbf{x}) + f^{an}(\mathbf{x}) ** f^{an}(\mathbf{x}) - \dots + \right. \\ \left. + (-1)^n \underbrace{[f^{an}(\mathbf{x}) ** \dots ** f^{an}(\mathbf{x})]}_{n \text{ times}} + \dots \right\} \quad (5.77)$$

Observa-se, na equação (5.77) que, a cada passo recursivo, a influência do operador decomposto (2) vai se inserindo na equação  $u^{FIC}(\mathbf{x})$ . Ademais, para cada passo adicional, usa-se as convoluções calculadas anteriormente, acelerando o processo de obtenção da solução fundamental.

Para o caso da elasticidade tridimensional, o equacionamento é semelhante notando-se apenas que, por se tratar de operações matriciais, perde-se na comutatividade das operações. Sabe-se que, por intermédio da equação (5.67.a) que  $\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x})$  é a solução fundamental do operador  $\mathbf{L}^{(1)}(\partial_{\mathbf{x}})$ . De forma semelhante ao método de placas finas, nomeia-se:

$$\mathbf{L}^{(2)}(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x}) \quad (5.78)$$

podende-se manipular o sistema de modo que:

$$\mathbf{U}_{(1)}^{FIC}(\mathbf{x}) = -\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) *** \mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x}) \quad (5.79.a)$$

$$\mathbf{U}_{(2)}^{FIC}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) *** [\mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x}) *** \mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x})] \quad (5.79.b)$$

⋮

$$\mathbf{U}_{(n)}^{FIC}(\mathbf{x}) = (-1)^n \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) *** \underbrace{[\mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x}) *** \dots *** \mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x})]}_{n \text{ times}} \quad (5.79.c)$$

A solução fundamental  $\mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x})$  é obtida, portanto, por intermédio das equações (5.79) e equação (5.60). Ela é escrita na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{FIC}(\mathbf{x}) = & \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) *** \{ \delta(\mathbf{x})\mathbf{I} - \mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x}) + [\mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x}) *** \mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x})] + \dots \\ & + (-1)^n \underbrace{[\mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x}) *** \dots *** \mathbf{F}^{AN}(\mathbf{x})]}_{n \text{ times}} + \dots \} \end{aligned} \quad (5.80)$$

Um ponto interessante que surge ao observar as equações (5.73) – (5.80) é a possibilidade de montar uma solução na qual todas as simetrias estejam inseridas e, a partir de eliminações diretas, poder desenvolver soluções de alta simetria. Ao se analisar uma relação com três materiais diferentes, pode-se desenvolver uma metodologia para inserir todas as oito simetrias constitutivas da Figura 1.1. Apresenta-se o equacionamento para elasticidade tridimensional. Sua modificação para a teoria placas finas é relativamente simples, em concordância com as equações (5.73) – (5.80). A equação (5.78) é reescrita de modo que:

$$[\mathbf{L}^{(2)}(\partial_{\mathbf{x}}) + \mathbf{L}^{(3)}(\partial_{\mathbf{x}})]\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x}) \quad (5.81)$$

em que  $\mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x})$  tem relação com o operador  $\mathbf{L}^{(2)}(\partial_{\mathbf{x}})$  e  $\mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x})$  com  $\mathbf{L}^{(3)}(\partial_{\mathbf{x}})$ . Ao inserir a equação (5.81) na equação (5.79.c), chega-se em:

$$\mathbf{U}_{(n)}^{FIC}(\mathbf{x}) = (-1)^n \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) *** \left\{ \underbrace{[\mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x})] *** \dots *** [\mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x})]}_{n \text{ times}} \right\} \quad (5.82)$$



que está intimamente relacionado com o binômio de Newton. Pode-se, por intermédio desta regra, escrever que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{(n)}^{FIC}(\mathbf{x}) &= (-1)^n \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) \underbrace{*** \left[ \mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x}) \underbrace{*** \dots ***}_{n \text{ times}} \mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x}) \right]}_{n \text{ times}} + \\
&+ (-1)^n \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) \underbrace{*** \left[ \mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x}) \underbrace{*** \dots ***}_{n \text{ times}} \mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x}) \right]}_{n \text{ times}} + \\
&+ (-1)^n \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) \underbrace{*** \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \underbrace{\mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x}) \underbrace{*** \dots ***}_{n-k \text{ times}} \mathbf{F}_{(2)}^{AN}(\mathbf{x})}_{n-k \text{ times}} \underbrace{*** \mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x}) \underbrace{*** \dots ***}_{k \text{ times}} \mathbf{F}_{(3)}^{AN}(\mathbf{x}) \right\}}_{k \text{ times}}}_{n-1}
\end{aligned} \tag{5.83}$$

que, ao ser inserida na equação (5.66), descreve o tensor solução fundamental da elasticidade tridimensional quando o operador diferencial fictício é decomposto em três simetrias distintas. Observa-se que a equação (5.82) é dividida em 3 termos, em função da dependência dos materiais decompostos: o primeiro dependente apenas de (1) e (2), o segundo dependente apenas dos (1) e (3) e o último sendo uma iteração entre os três materiais. Esse efeito cria uma série de propriedades como caso  $\mathbf{L}^{(2)}(\partial_{\mathbf{x}})$  ou  $\mathbf{L}^{(3)}(\partial_{\mathbf{x}})$  sejam nulos, sua influência é retirada diretamente, sem problemas com singularidades. Como as soluções fundamentais dos materiais (2) e (3) não são usadas, os efeitos de degeneração material se apresentam estritamente à solução fundamental  $\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x})$ . A construção dos três termos pode ser independente, ou seja, tendo-se a relação entre os materiais (1) e (2), calcula-se essa relação entre os materiais (1) e (3) – ou (2) e (3) – e, posteriormente, pode-se calcular as relações entre os três materiais, isto é, determinar o último termo.

Outro ponto interessante da equação (5.83) é a sua possível expansão para  $N$  materiais. Vide o trabalho de Chadwick, Vianello, & Cowin, 2001, as simetrias constitutivas são divididas por oito classes simétricas diferentes. Digamos que:

$$\tilde{\mathcal{C}}_r^{FIC} = \tilde{\mathcal{C}}^{iso} + \tilde{\mathcal{C}}^{cub} + \tilde{\mathcal{C}}^{tet} + \tilde{\mathcal{C}}^{ort} + \tilde{\mathcal{C}}^{mon} + \tilde{\mathcal{C}}^{tri} \tag{5.84.a}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_c^{FIC} = \tilde{\mathcal{C}}^{iso} + \tilde{\mathcal{C}}^{tis} + \tilde{\mathcal{C}}^{trg} + \tilde{\mathcal{C}}^{mon} + \tilde{\mathcal{C}}^{tri} \tag{5.84.b}$$

sabendo-se que os sobrescritos *iso*, *cub*, *tis*, *trg*, *tet*, *ort*, *mon* e *tri* correspondem a isotrópico, cúbico, transversalmente isotrópico, trigonal, tetragonal, ortorrômbico, monoclinico e triclinico. Por intermédio da Figura 1.1, pode-se ver que a equação não pode ter todos os termos em conjunto, devido à própria hierarquia entre as simetrias. Por esse motivo, dividiram-se as classes simétricas em dois grupos, conforme as equações (5.84). Nelas, para materiais monoclinicos ou

triclínicos, pode-se usar qualquer uma das equações. Considerar-se-á como  $\mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x})$  a solução fundamental isotrópica, pois além de ser a mais simples, depende apenas da direção radial. A equação (5.83) pode ser expandida, ao utilizar como exemplo a equação (5.84.b), de forma que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{(n)}^{FIC}(\mathbf{x}) = & (-1)^n \mathbf{U}_{(0)}^{FIC}(\mathbf{x}) *** \left\{ \left[ \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}) + \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{c}}^{trg}) + \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{c}}^{mon}) + \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{c}}^{tri}) \right] \right. \\
& + \left[ \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}, \tilde{\mathbf{c}}^{trg}) + \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}, \tilde{\mathbf{c}}^{mon}) + \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}, \tilde{\mathbf{c}}^{tri}) + \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{c}}^{trg}, \tilde{\mathbf{c}}^{mon}) \right. \\
& + \left. \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{c}}^{trg}, \tilde{\mathbf{c}}^{tri}) + \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{c}}^{mon}, \tilde{\mathbf{c}}^{tri}) \right] + \left[ \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}, \tilde{\mathbf{c}}^{trg}, \tilde{\mathbf{c}}^{mon}) \right. \\
& + \left. \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}, \tilde{\mathbf{c}}^{trg}, \tilde{\mathbf{c}}^{tri}) + \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}, \tilde{\mathbf{c}}^{mon}, \tilde{\mathbf{c}}^{tri}) + \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{c}}^{trg}, \tilde{\mathbf{c}}^{mon}, \tilde{\mathbf{c}}^{tri}) \right] \\
& \left. + \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{c}}^{tis}, \tilde{\mathbf{c}}^{trg}, \tilde{\mathbf{c}}^{mon}, \tilde{\mathbf{c}}^{tri}) \right\}
\end{aligned} \tag{5.85}$$

notando-se que, caso alguns dos tensores acima seja nulo, elimina-se a função matricial inteira. O requerimento de positividade dos tensores da equação (5.84.b) não precisa ser satisfeito, excluindo-se o tensor isotrópico. Devido a propriedades de binômios, trinômios e quadrinômios as funções  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  são binárias, trinárias e quadrinárias, ou seja, independem da ordem dos parâmetros. Caso se utilize a equação (5.84.a), uma nova função matricial é necessária, tendo cinco parâmetros, e um maior número de combinações entre os parâmetros (tensores constitutivos) nas funções matriciais da equação (5.85).

Um ponto importante, já citado, é a interdependência das funções  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$ . As primeiras podem ser calculadas diretamente com as equações (5.78) – (5.80), independentemente uma das outras. As segundas, com as equações (5.81) – (5.83). As terceiras e a quarta, com expansões das últimas equações citadas. O ganho é a possível paralelização do problema, inclusive no que concerne nas suas derivadas. O maior ganho, caso a equação (5.85) seja expressa por funções matriciais e operações elementares, é o desenvolvimento de uma solução fundamental única que contém informações de todas as simetrias constitutivas e seja invariante à degeneração matemática. Apesar da alta complexidade da equação (5.85) a apresentação de uma possível solução com as propriedades descritas faz com que seu estudo seja bastante válido.

### 5.2.3 DERIVADAS DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL FICTÍCIA

Para o cálculo das derivadas da solução fundamental fictícia via abordagem direta, é importante lembrar que esta é construída unicamente pelas soluções decompostas. Tem-se então, que a primeira derivada é descrita como:

$$\frac{\partial u^{FIC}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial u^{FIC}}{\partial u^{(1)}} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u^{FIC}}{\partial u^{(2)}} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_\alpha} \quad (5.86)$$

O que se nota, por intermédio desta equação, é a ponderação das derivadas das soluções fundamentais decompostas em relação aos eixos coordenados, que é feita pela “sensibilidade” da solução fundamental fictícia com relação às decompostas. É importante observar a não-linearidade que a equação (5.86) gera. Ao considerar que, provavelmente, a solução fundamental fictícia será desenvolvida por relações de produtos e divisões, para manter a consistência dimensional, em função das soluções decompostas, tem-se claro que haverá não-linearidades na solução fictícia e em suas derivadas. A segunda derivada é descrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{FIC}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = & \frac{\partial u^{FIC}}{\partial u^{(1)}} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial u^{FIC}}{\partial u^{(2)}} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u^{FIC}}{\partial u^{(1)^2}} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_\beta} \\ & + \frac{\partial^2 u^{FIC}}{\partial u^{(2)^2}} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 u^{FIC}}{\partial u^{(1)} \partial u^{(2)}} \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_\beta} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (5.87)$$

em que ainda se mantém a dependência da primeira derivada. É importante notar que, caso a decomposição cinemática fosse possível, as equações (5.86) – (5.87) seriam bem mais simples. Como, naquele caso, existe uma decomposição aditiva e linear das soluções decompostas, a “sensibilidade” da solução equivalente a estas seria unitária e sua derivada nula. Ou seja, a primeira e segunda derivadas dessa solução seriam uma superposição da primeira e segunda derivadas das soluções decompostas. O cálculo das deformações e tensões em placas finas utiliza a primeira e segunda derivada. Coloca-se também que a admissibilidade cinemática é sempre obtida, sendo ela indiferente a forma da solução equivalente. Observa-se que para o caso da elasticidade tridimensional, as equações (5.86) – (5.87) teriam termos adicionais, pois ela é definida como um vetor ou um tensor solução fundamental. Contudo as não-linearidades devido à “sensibilidade” não-constante são também, para este caso, encontradas.

Ao analisar a equação (5.54) e equação (5.66), nota-se que as derivadas da solução fundamental fictícia, obtida por intermédio da abordagem via decomposição de Adomian, têm

como característica a simples derivada de cada uma das soluções obtidas recursivamente. Ou seja, além dos passos recursivos irem corrigindo a solução fundamental, o mesmo ocorre para suas derivadas, tanto as primeiras quanto as segundas. Este é outro aspecto positivo da decomposição de Adomian. Ou seja, encontrada as componentes das soluções, as derivadas são obtidas diretamente e analiticamente.

### 5.3 CONCLUSÃO

Apresentaram-se, neste capítulo, as duas decomposições propostas da solução fundamental. A primeira a ser apresentada, decomposição cinemática, se mostrou impossível devido à hiper-definição das relações entre as propriedades elásticas fictícias e decompostas, para o caso de placas finas, e devido à impossibilidade de eliminação das variáveis da transformada de Fourier no equacionamento, para a elasticidade tridimensional. Além disso, mostrou-se outro argumento, com relação à solução fundamental de placas finas fictícia e sua variação na coordenada circunferencial, quando a decomposição era desenvolvida por intermédio de um material isotrópico e outro anisotrópico. A única solução possível, nos dois casos propostos, se dá quando os tensores constitutivos equivalentes e decompostos são proporcionais, eliminando a possibilidade de uma decomposição cinemática para diferentes simetrias.

As relações obtidas para a decomposição constitutiva via abordagem direta são inconclusivas com relação a sua possibilidade e perspectiva de eliminação da degeneração da solução fundamental fictícia. Para esta última, existem evidências (conforme as equações (5.43) e (5.52)) que demonstram a sua não possibilidade devido o fato da implicidade das equações encontradas. Também foi apresentada, para o caso de placas finas, a equação implícita para a obtenção da solução fundamental fictícia. Por intermédio dessa equação, demonstrou-se uma ligação íntima entre as decomposições de ambos os operadores diferenciais, ambas desenvolvidas por procedimentos diferentes, em acordo com as equações (5.43) e (5.52).

Para esta decomposição, a solução equivalente é obtida por meio de equações implícitas a esta função, além de que, para ambos os casos, essas soluções envolvem convoluções bi e tridimensionais. No caso bidimensional, existe apenas uma única convolução. Já para o caso tridimensional são quatro funções a serem convoluídas, simultaneamente, para cada uma das seis componentes do tensor solução fundamental.

A operação de convolução, quando aplicada ao caso da decomposição constitutiva, pode ser explicada de algumas formas. Inicia-se a discussão pela não unicidade da decomposição do tensor constitutivo apresentada no final do capítulo 4. Diferentemente das propostas por Tu, 1968, e Browaeys & Chevrot, 2004, as relações necessárias para a obtenção dos tensores decompostos não geravam uma situação de unicidade. Até mesmo porque o critério ótimo de escolha de um tensor isotrópico, como mostrado no exemplo, pode variar entre situações. Pode-se, ao invés de uma norma máxima do tensor isotrópico, desejar uma razão de diferença entre autovalores do tensor residual. O próprio critério de norma pode ser desenvolvido de forma diferente. Seguindo este raciocínio, ao se retirar ou inserir “rigidez” em uma dada solução, via seu tensor constitutivo, este efeito deve se propagar de forma coerente, pois a “rigidez” final é fixa, por intermédio das equações de teto. Como a relação entre o tensor constitutivo de simetria qualquer e sua respectiva solução fundamental é dada por intermédio de equações características, que são associadas ao operador diferencial, provavelmente esses efeitos de incremento e decremento das propriedades elásticas nas soluções fundamentais devam ser modulados. Essa modulação é produzida pela operação matemática de convolução. É importante colocar que a não unicidade da decomposição do tensor constitutivo não é, em si, um problema. Devido a essa possibilidade de variação, pode-se desenvolver de modo que simplifique a decomposição da solução fundamental.

Apesar dos problemas já citados, a decomposição constitutiva de uma solução fundamental tridimensional pode se tornar uma ferramenta para derivação de novas soluções, caso seja comprovado sua possibilidade. Isso porque, por intermédio dos equacionamentos apresentados bem como a superposição dos tensores constitutivos decompostos, consegue-se obter soluções fundamentais analíticas e fechadas por meio de soluções de simetrias mais altas. Um exemplo é a solução para um material ortorrômbico, que pode ser obtida por intermédio de três soluções transversalmente isotrópicas. Outro pode ser dado pela simetria monoclinica, que pode ser dada por meio de um material tetragonal e trigonal. Contudo, diferente do primeiro exemplo, não se conhece a solução fundamental para esses últimos materiais. Ou seja, a metodologia apresentada pode facilitar no desenvolvimento de soluções fundamentais que, antes, seriam impossíveis de serem desenvolvidas.

Ao utilizar a ideia de recursividade da decomposição de Adomian, pode-se obter um equacionamento que obtém soluções fundamentais para quaisquer simetrias material,

conhecendo-se apenas uma parte de sua inversa. O sistema recursivo é semelhante tanto para o operador de placas finas quanto para o da elasticidade tridimensional. Contudo, a solução final é truncada e, portanto, aproximada. Como discutido, a importância da metodologia se dá pela possibilidade de obtenção de soluções fundamentais completas, ou seja, que englobam todas as simetrias constitutivas e não degeneram.

## 6 CONCLUSÃO

Esta tese procurou desenvolver uma base teórica para o problema de decomposição aditiva de soluções fundamentais. Duas abordagens foram adotadas: superposição de soluções fundamentais descritas por diferentes simetrias constitutivas e superposição de tensores constitutivos e sua influência nas soluções. Devido o fato que cada capítulo da presente tese tem sua conclusão parcial, apresenta-se neste capítulo apenas um resumo de tais apontamentos.

Iniciou-se este texto por uma descrição histórica dos fundamentos das soluções fundamentais. Nesta parte, apresentaram-se diversos pesquisadores e seus trabalhos, que muito contribuíram para o desenvolvimento do tema. Descreveram-se, também, algumas vantagens e desvantagens do Método dos Elementos de Contorno, pois neste método, soluções fundamentais desempenham um papel importante. Ao entrar na revisão bibliográfica, descreveram-se variados trabalhos sobre as duas bases teóricas sobre as quais este trabalho está alicerçado. Iniciou-se por artigos que estudaram as simetrias constitutivas de materiais cristalinos. Lá também foi apresentado dois trabalhos sobre decomposição aditiva do tensor constitutivo. Provou-se, no capítulo 4, que ambas as metodologias geram tensores que não detém todas as propriedades necessárias para sua aplicação na metodologia de decomposição constitutiva via abordagem direta. Por esse motivo, foram denominadas decomposições inconsistentes. Decorreu-se então em trabalhos que descreviam a obtenção de soluções fundamentais, tanto para o operador tridimensional quanto para o da teoria de placas finas. Neste trecho do texto, explicou-se a definição de degeneração matemática, que seria determinada com mais precisão no capítulo 3. Após a revisão bibliográfica, apresentou-se uma analogia às decomposições neste texto estudadas a fim de que vários conceitos fossem melhor compreendidos.

No capítulo 2 encontra-se uma breve explicação sobre simetrias constitutivas de sistemas cristalinos. Foi desenvolvido todo o tratamento teórico e matemático para o correto entendimento de tais definições. Após, foram apresentados os tensores constitutivos para sua utilização na elasticidade tridimensional e na teoria de placas finas (tensor constitutivo reduzido) nas oito classes simétricas estudadas e uma breve comparação com famílias cristalinas encontradas na literatura.

Formas de obtenção das soluções fundamentais para os operadores objetos deste trabalho foram descritas no capítulo 3. Para a solução fundamental da teoria de placas finas, foi apresentado todo o seu desenvolvimento, por intermédio da transformada de Fourier. Essa ferramenta matemática foi base para as decomposições aditivas das soluções fundamentais, mostradas no capítulo 5. Mostraram-se, para esta teoria estrutural, duas soluções fundamentais, que se diferem na simetria material na qual o domínio é constituído. A primeira, chamada de anisotrópica, é utilizada para todos os materiais que não tem infinitos planos de simetria. Ou seja, materiais hexagonais e isotrópicos não estão neste grupo. Para esses, outra solução fundamental foi apresentada, análoga a do operador bi harmônico. Discutiram-se suas diferenças e a não redução da solução anisotrópica para a bi-harmônica. Demonstraram-se os motivos e, por intermédio deste estudo, uma técnica simples foi desenvolvida para a utilização da solução fundamental anisotrópica na obtenção da solução fundamental bi-harmônica. Esta técnica está descrita no Anexo I. Para o operador diferencial da elasticidade tridimensional, foram apresentadas duas formas: uma utilizando a transformada de Fourier e a outra o Formalismo de Stroh aplicado à esta teoria estrutural.

No capítulo 4 provou-se que as decomposições de Browaeys & Chevrot, 2004, e Tu, 1968, não geravam tensores constitutivos positivos definidos, eliminando então a possibilidade de utilização dessas metodologias na decomposição constitutiva das soluções fundamentais via abordagem direta. Apresentou-se neste capítulo, então, as relações necessárias para que uma decomposição do tensor constitutivo desenvolva tensores positivos definidos. Por intermédio dessas relações, mostrou-se exemplos de aplicação tanto para o tensor constitutivo utilizado na elasticidade tridimensional quanto o tensor constitutivo reduzido usado na teoria de placas finas.

As decomposições das soluções fundamentais da elasticidade tridimensional e da teoria de placas finas estão apresentadas no capítulo 5. Inicia-se pela exposição da decomposição cinemática, em ambos os operadores. Por intermédio de procedimentos algébricos e identidades



matriciais, foi provado que está decomposição é impossível. As motivações estão relacionadas com um sistema hiperdefinido, para o caso de placas finas e com a impossibilidade de eliminação das variáveis da transformada, para o caso da elasticidade tridimensional.

A decomposição constitutiva via abordagem direta se mostrou inconclusiva. Para ambas as teorias estruturais, são necessárias a determinação de convoluções implícitas. Para o caso da elasticidade tridimensional, pode-se evitar essa operação, via formalismo de Stroh. Contudo, há o requerimento de soluções de integrais cada vez mais complexas. Ademais, mesmo com a decomposição, não há informações suficientes, nos equacionamentos desenvolvidos, que essa operação conseguirá eliminar a degeneração matemática. No que foi obtido, mostra-se que a degeneração, provavelmente, se mantém no sistema. Apesar disso, esse tipo de decomposição abre espaço para o desenvolvimento de novas soluções fundamentais de baixa simetria, em função de outras soluções de mais alta simetria.

A abordagem via decomposição de Adomian apresentou soluções bastante promissoras. O requerimento de que todos os tensores constitutivos considerados na análise fossem positivos é eliminado. Adiciona-se a necessidade de que a forma quadrática da diferença entre o tensor base (nos cálculos considerado como material de sobrescrito (1)) e os avaliados como termo fonte (nos cálculos correspondiam ao material de sobrescrito (2)) seja positivo. Por intermédio dessa necessidade, inclusive, pode-se estudar a velocidade de convergência. Após a apresentação dos equacionamentos, mostrou-se uma forma de cálculo de uma única solução fundamental que engloba todas as simetrias e não é sensível a degeneração gerada por propriedades constitutivas, além de ser redutível entre simetrias consideradas.

Os próximos passos da pesquisa são a implementação do cálculo da decomposição constitutiva via decomposição de Adomian em placas finas. Essa teoria é escolhida devido ao fato que sua solução exata para a anisotropia ser conhecida e, portanto, pode-se ver e analisar a aproximação da solução fundamental fictícia obtida por este método à ela. Ao se analisar a decomposição constitutiva via abordagem direta, procedimentos numéricos serão buscados a fim de se obter métodos para a solução das convoluções. Essas informações podem, naturalmente, auxiliar no desenvolvimento da decomposição de Adomian bem como no cálculo da solução fundamental única. Ademais, formas analíticas também podem ser procuradas de modo que o fechamento das soluções fundamentais não se perca.

Ao final do primeiro capítulo desta tese, diversas perguntas foram feitas. Questionava-se se poderia existir uma semente isotrópica dentro de materiais mais complexos. Espera-se que, ao menos teoricamente, tenha-se mostrado que sim. Pode-se dizer que há essa semente e seu comportamento pode ser isolado conforme mostrado na decomposição constitutiva, indiferente a abordagem adotada. Estudos mais profundos são necessários e isto é o que se propõe para os próximos passos dessa pesquisa.

## 7 REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- Abbaoui, K., & Cherruault, Y. (1994). Convergence of Adomian's Method Applied to Nonlinear Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 20(9), 69 - 73.
- Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Albuquerque, E. L., Sollero, P., Venturini, W. S., & Aliabadi, M. H. (2006). Boundary Element Analysis of Anisotropic Kirchhoff Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 43(14 - 15), 4029 - 4046.
- Baddour, N. (2010). Operational and Convolution Properties of three-dimensional Fourier Transforms in Spherical Polar Coordinates. *Journal of the Optical Society of America A*, 27(10), 2144 - 2155.
- Biazar, J., Babolian, E., & Islam, R. (2004). Solution of the System of Ordinary Differential Equations by Adomian Decomposition Method. *Applied Mathematics and Computation*, 147(3), 713 - 719.
- Bracewell, R. N. (1999). *The Fourier Transform and its Applications*. New York: McGraw-Hill Science Engineering.
- Browaeys, J. T., & Chevrot, S. (2004). Decomposition fo the Elastic Tensor and Geophysical Applications. *Geophysical Journal International*, 159(2), 667 - 678.

- Buroni, F. C., Ortiz, J. E., & Saez, A. (2010). Multiple Pole Residue Approach for 3D BEM Analysis of Mathematical Degenerate and Non-Degenerate Materials. *Numerical Methods in Engineering*, 86(9), 1125 - 1143.
- Chadwick, P., Vianello, M., & Cowin, S. C. (2001). A New Proof that the Number of Linear Elastic Symmetries is Eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11), 2471 - 2492.
- Chaillat, S., Bonnet, M., & Semblat, J. F. (2009). A New Fast Multi-Domain BEM to Model Seismic Wave Propagation and Amplification in 3D Geological Structures. *Geophysical Journal International*, 177, 509 - 531.
- Cheng, A. H.-D., & Cheng, D. T. (2005). Heritage and Early History of the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3), 268 - 302.
- Cheng, Z. -Q., & Reddy, J. N. (2002). Octet Formalism for Kirchhoff Anisotropic Plates. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 458(2022), 1499 - 1517.
- Cheng, Z. -Q., & Reddy, J. N. (2003). Green's Functions for Infinite and Semi-Infinite Anisotropic Thin Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 70(2), 260 - 267.
- Cherruault, Y., & Adomian, G. (1993). Decomposition Method: A New Proof of Convergence. *Mathematical and Computer Modelling*, 18(12), 103 - 106.
- Cowin, S. C. (1989). Properties of the Anisotropic Elasticity Tensor. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 42(2), 249 - 266.
- Cowin, S. C., & Mehrabadi, M. M. (1987). On the Identification of Material Symmetry for Anisotropic Elastic Materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 40(4), 451 - 476 .
- Cowin, S. C., & Mehrabadi, M. M. (1995). Anisotropic Symmetries of Linear Elasticity. *Applied Mechanics Reviews*, 48(5), 247 - 285.

- Gao, X. -W. (2006). A Meshless BEM for Isotropic Heat Conduction Problems with Heat Generation and Spatially Varying Conductivity. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 66(9), 1411 - 1431.
- Hwu, C. (2003). Stroh-like Formalism for the Coupled Stretching-Bending Analysis of Composite Laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14), 3681 - 3705.
- Hwu, C. (2010). *Anisotropic Elastic Plates*. New York: Springer.
- Kythe, P. K. (1996). *Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications*. Boston: Birkhäuser.
- LaMattina, B., Klang, E. C., & Eischen, J. W. (1998). A Study of Solutions for the Anisotropic Plate Subject to a Concentrated Force. *Journal of Applied Mechanics*, 65(1), 273 - 275.
- Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body* (1st ed.). (E. Translation, Trans.) Moscow: Mir Publishers.
- Liou, J. Y., & Sung, J. C. (2007). On the Generalized Barnett-Lothe Tensors for Monoclinic Piezoelectric Materials. *International Journal of Solids and Structures*, 44(16), 5208 - 5221.
- Lisbôa, T. d. (2009). *Uma Metodologia para a Obtenção de Respostas Semi-Analíticas para Flexão Linear e Não-Linear de Placas Semi-Espesas*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre.
- Lodge, A. S. (1955). The Transformation to Isotropic Form of the Equilibrium Equations for a Class of Anisotropic Elastic Solids. *Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, VIII(2), 211 - 225.
- Marczak, R. J., & Denda, M. (2010). *Notes on Fundamental Solutions for Anisotropic Three-Dimensional Elasticity*. Rutgers - The State University of New Jersey, Mechanical & Aerospace Engineering Department.

- Mirsky, L. (1955). *An Introduction to Linear Algebra* (3rd Edition ed.). London: Oxford University Press.
- Nakamura, G., & Tanuma, K. (1997). A Formula for the Fundamental Solution of Anisotropic Elasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 50(2), 179 - 194.
- Neto, M. M. (2009). *Análise Dinâmica de Chapas Trincadas com Reparos de Material Compósito Utilizando o Método de Elementos de Contorno*. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas.
- Paiva, W. P., Sollero, P., & Albuquerque, E. L. (2002). Analysis of the Fundamental Solution for Anisotropic Thin Plates. *15th ASCE Engineering Mechanics Conference*. New York, NY.
- Rao, T. R. (2010). The Use of Adomian's Decomposition Method for Solving Generalized Riccati Differential Equations. (pp. 935 - 941). Kuala Lumpur: Proceedings of 6th IMT-GT (ICMSA 2010).
- Shi, G., & Bezzine, G. (1988). A General Boundary Integral Formulation for Anisotropic Plate Bending. *Journal of Composite Materials*, 22(8), 694 - 716.
- Shiah, Y. C., Tan, C. L., & Wang, C. Y. (2012). Efficient computation of the Green's function and its derivatives for three-dimensional anisotropic elasticity in BEM analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(12), 1746 - 1755.
- Smith, G. F., & Rivlin, R. S. (1958). The Strain-Energy Function for Anisotropic Elastic Materials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88(1), 175 - 193.
- Smith, G. F., Smith, M. M., & Rivlin, R. S. (1963). Integrity Bases for a Symmetric Tensor and a Vector - The Crystal Classes. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 12(1), 93 - 133.
- Távora, L., Ortiz, J. E., Mantič, V., & París, F. (2008). Unique Real-Variable Expressions of Displacement and Traction Fundamental Solutions Covering all Transversely Isotropic Elastic Materials for 3D BEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(5), 776 - 798.

- Timoshenko, S., & Woinowsky-Kreiger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Ting, T. C. (1996). *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*. New York, NY: Oxford University Press, Inc.
- Tonon, F., Pan, E., & Amadei, B. (2001). Green's Functions and Boundary Element Method Formulation for 3D Anisotropic Media. *Computers & Structures*, 79(5), 469 - 482.
- Tu, Y. -O. (1968). The Decomposition of an Anisotropic Elastic Tensor. *Acta Crystallographica Section A*, 24(2), 273 - 282.
- Wang, C. -Y. (1997). Elastic Fields Produced by a Point Source in Solids of General Anisotropy. *Journal of Engineering Mathematics*, 32(1), 41 - 52.
- Westphal, T., Schnack, E., & de Barcellos, C. S. (1998). The General Fundamental Solution of the Sixth-order Reissner and Mindlin Plate Bending Models Revisited. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(3-4), 363 - 378.
- Yin, W. -L. (2000). Deconstructiong Plane Anisotropic Elasticity Part I: The Latent Structure of Lekhnitskii's Formalism. *Internartional Journal of Solids and Structures*, 37(38), 5257 - 5276.
- Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z. (1992). The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptative Finite Element Refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19(1 - 2), 207 - 224.

## Anexo I. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL ANISOTRÓPICA EM MATERIAIS ISOTRÓPICOS

Este anexo tem por objetivo apresentar uma técnica simples, porém eficiente, na obtenção de soluções fundamentais isotrópicas por intermédio de suas respectivas anisotrópicas. A ideia provém da solução reduzida, mostrada na equação (3.31), quando as propriedades elásticas utilizadas geram uma simetria isotrópica. Discutiu-se, naquele capítulo, uma violação física de tal equação e aqui se apresenta uma forma de contornar tal efeito. Parte importante desta análise é que ela pode ser expandida para a forma completa da solução fundamental (eq. (3.23)), não importando o grau de anisotropia. O ganho desta técnica está na questão de armazenamento de soluções fundamentais. Basta que se armazene a mais geral (eq. (3.23)) e por intermédio dela obtém-se a solução fundamental isotrópica. As equações introdutórias estão todas descritas no Capítulo 3. Entretanto, algumas delas serão replicadas neste anexo para rápida referência.

Ao analisar a solução de placas finas para materiais cujos quais geram uma indeterminação (eq. (3.26)), reproduzida neste anexo de forma semelhante:

$$u_3(r, \theta) = \frac{1}{8\pi D_{22}} r^2 \left[ \ln r - \left( \cos^2 \theta + \frac{1}{2} + \ln a \right) \right] \quad (\text{AI.1})$$

Como já discutido, a solução fundamental isotrópica e transversalmente isotrópica deve ser invariante a  $\theta$ , o que não ocorre claramente na equação (AI.1). Uma forma bastante simples de retirar a variância neste parâmetro é fazer a média entre duas soluções fundamentais: a primeira idêntica à mostrada na equação (AI.1) e a segunda rotacionada em  $\pi/2$ . Matematicamente, tem-se que:

$$\frac{1}{2} \left[ u_3(r, \theta) + u_3 \left( r, \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{8\pi D_{22}} r^2 [\ln r - (1 + \ln a)] \quad (\text{AI.2})$$

Foi utilizada a identidade  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  para a eliminação da variação trigonométrica. Conforme já discutido,  $a$  é uma constante e normalmente toma valores unitários. Para este caso, ela será utilizada para equivaler à solução fundamental gerada pela média descrita acima com a solução fundamental isotrópica, mostrada na equação (3.33). Para isto, basta que:

$$a = e^{-(k+1)} \quad (\text{AI.3})$$

Obtém-se, portanto, a solução fundamental isotrópica por intermédio de soluções fundamentais anisotrópicas, apenas rotacionando-a e equivalendo os termos independentes (eq.



(AI.3)). O mais interessante desta propriedade é que ela se propaga com relativa exatidão à solução fundamental anisotrópica mais completa, ou seja, a apresentada na equação (3.23). Desta forma, ao fazer uma média da de uma solução fundamental anisotrópica com sua respectiva rotacionada a  $90^\circ$ , tem-se uma solução muito próxima da fundamental isotrópica.

Para a apresentação desta interessante relação, estuda-se a forma reduzida da equação (3.23) para materiais isotrópicos por intermédio de uma perturbação lateral, mostrando os passos dos cálculos. Após isso é demonstrada a variação em  $\theta$  e sua influência na equação (AI.1). Chega-se em resultados análogos aos de Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002. Demonstra-se, então, por meio de gráficos das soluções fundamentais, a redução à solução isotrópica tanto para materiais base de simetria ortorrômbica como triclínica. Após, mostra-se uma pequena motivação de tal propriedade existir, em função da forma geométrica das soluções fundamentais e uma breve explicação analítica mais geral, apresentando a possível origem dos erros.

Considera-se, então, um tensor de simetria isotrópica perturbado lateralmente, escrito na forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha^2)D_{22} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & (1 + \alpha^2)D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(D_{11} - D_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.4})$$

onde  $-1 \leq \alpha < 1$ . Para  $\alpha = 0$ , tem-se um material isotrópico. O interessante em se usar tal perturbação é que as raízes da equação (3.27) são descritas como:

$$\mu_1 = i \quad (\text{AI.5.a})$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}} i = \beta i \quad (\text{AI.5.b})$$

Ou seja, uma das raízes fica idêntica às respectivas para materiais isotrópicos e, tão importante quanto, é independente do valor de  $\alpha$ . A segunda raiz pode ser por intermédio do parâmetro  $\beta$ , e quando  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$ . Ao inserir as raízes das equações (AI.5) nas equações (3.23) – (3.25), chega-se em:

$$\begin{aligned}
 u_3(r, \theta) = & \frac{r^2}{8\pi(1-\beta^2)D_{22}} \left\{ -\cos(2\theta) \left\{ \ln \left[ \frac{r^2}{a^2} \right] - 3 \right\} + 2 \sin(2\theta) \theta \right. \\
 & + \frac{1}{\beta} [\cos^2 \theta - \beta^2 \sin^2 \theta] \left\{ \ln \left[ \frac{r^2}{a^2} (\cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta) \right] - 3 \right\} \\
 & \left. - 2\beta \sin(2\theta) \arctan(\beta \tan \theta) \right\}
 \end{aligned} \tag{AI.6}$$

A equação (AI.6) tem uma indeterminação do tipo 0/0 quando  $\beta \rightarrow 1$ . Ao aplicar a regra de L'Hopital, chega-se exatamente na equação (AI.1). A importância da equação (AI.6) é vista no tratamento numérico. Se utilizarmos a relação proposta na equação (AI.2), tendo como base a equação (AI.6), pode-se tender  $\beta$  numericamente a unidade. Ao considerar  $k = -1/2$  na equação (3.33) e fixar a constante  $a$  de modo que a equação (AI.3) seja satisfeita, tem-se:

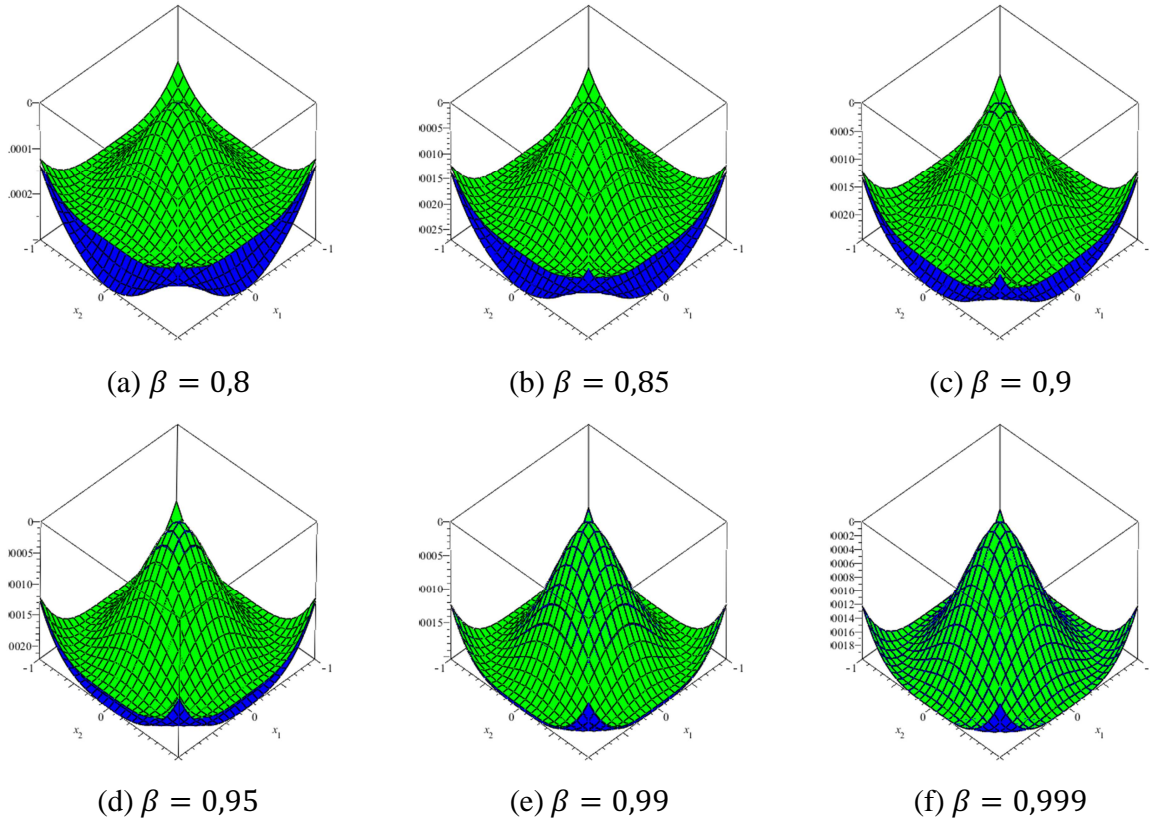


Figura AI.1 - Solução fundamental isotrópica com a solução obtida por intermédio da equação (AI.6) para vários valores de  $\beta$

A simples técnica demonstra que não há problemas de *overflow* ou instabilidades numéricas mesmo para valores de  $\beta$  próximos da unidade. As diferenças entre a média da

solução fundamental e sua respectiva rotacionada em relação à solução isotrópica são mínimas, para os dois últimos casos (Figura AI.1 (e) e (f)), mesmo para pequenos valores de  $r$ . Em contrapartida, Paiva, Sollero, & Albuquerque, 2002, utilizando diretamente a equação (AI.1), demonstra que é exatamente nesta região que estão as maiores diferenças entre a solução fundamental isotrópica e a solução fundamental anisotrópica para materiais que geram indeterminação. A explicação de tal efeito é relativamente simples. A variação em  $\theta$  na equação (AI;1) é multiplicada pelo termo  $r^2$  enquanto a parte não variante o é por  $r^2 \ln r$ . Dentro do limite  $0 \leq r \leq e$ , onde  $e$  é a constante de Euler, ambos tem a mesma ordem e, sendo assim, influenciam de forma igual à solução fundamental (Figura AI.2 (a)). À medida que  $r > e$ , a segunda função cresce mais que a primeira (Figura AI.2 (b)) até que, para grandes valores de  $r$ , a primeira função se torna secundária (Figura AI.2 (c)). As plotagens na Figura AI.2 demonstram as afirmações acima, cujo qual a função variante em  $\theta$  é fixada em seu maior valor ( $\theta = 0$ ).

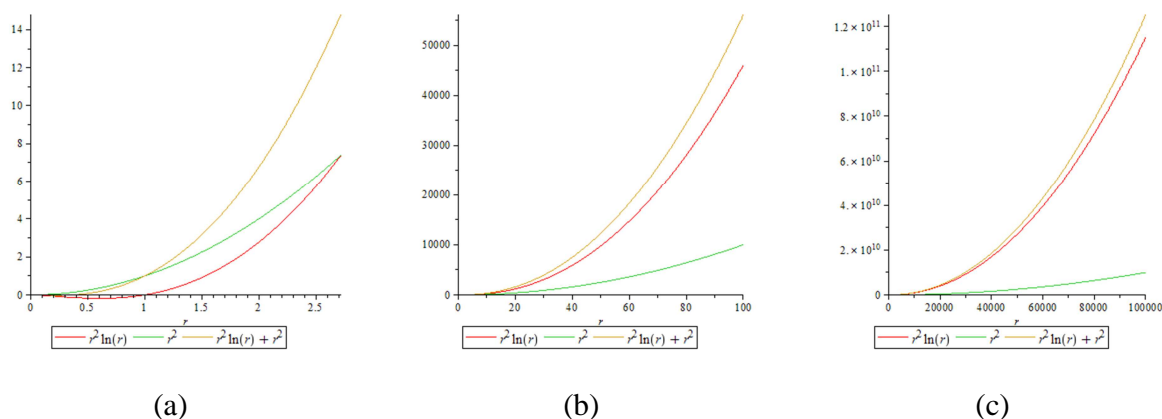


Figura AI.2 - Plotagem das funções para averiguação da sua relevância dentro da solução fundamental anisotrópica

As análises anteriores utilizavam um tensor isotrópico perturbado lateralmente. Como dito na parte introdutória deste anexo, a parte esquerda da equação (AI.2) pode ser utilizada para materiais mais complexos, facilitando e generalizado o uso desta técnica em *softwares* numéricos. Escreve-se então que:

$$\frac{1}{2} \left[ u_3(r, \theta) + u_3 \left( r, \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cong u_3(r) \quad (\text{AI.7})$$

cujo qual  $u_3(r, \theta)$  é uma solução fundamental anisotrópica para um tensor de qualquer simetria.

Para o tensor triclínico:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 450 & 400 & 250 \\ 400 & 600 & 150 \\ 250 & 150 & 300 \end{bmatrix} \tag{AI.8}$$

as curvas de nível da solução fundamental [vermelho], solução rotacionada [azul] e a média [verde] das duas podem ser plotadas como:

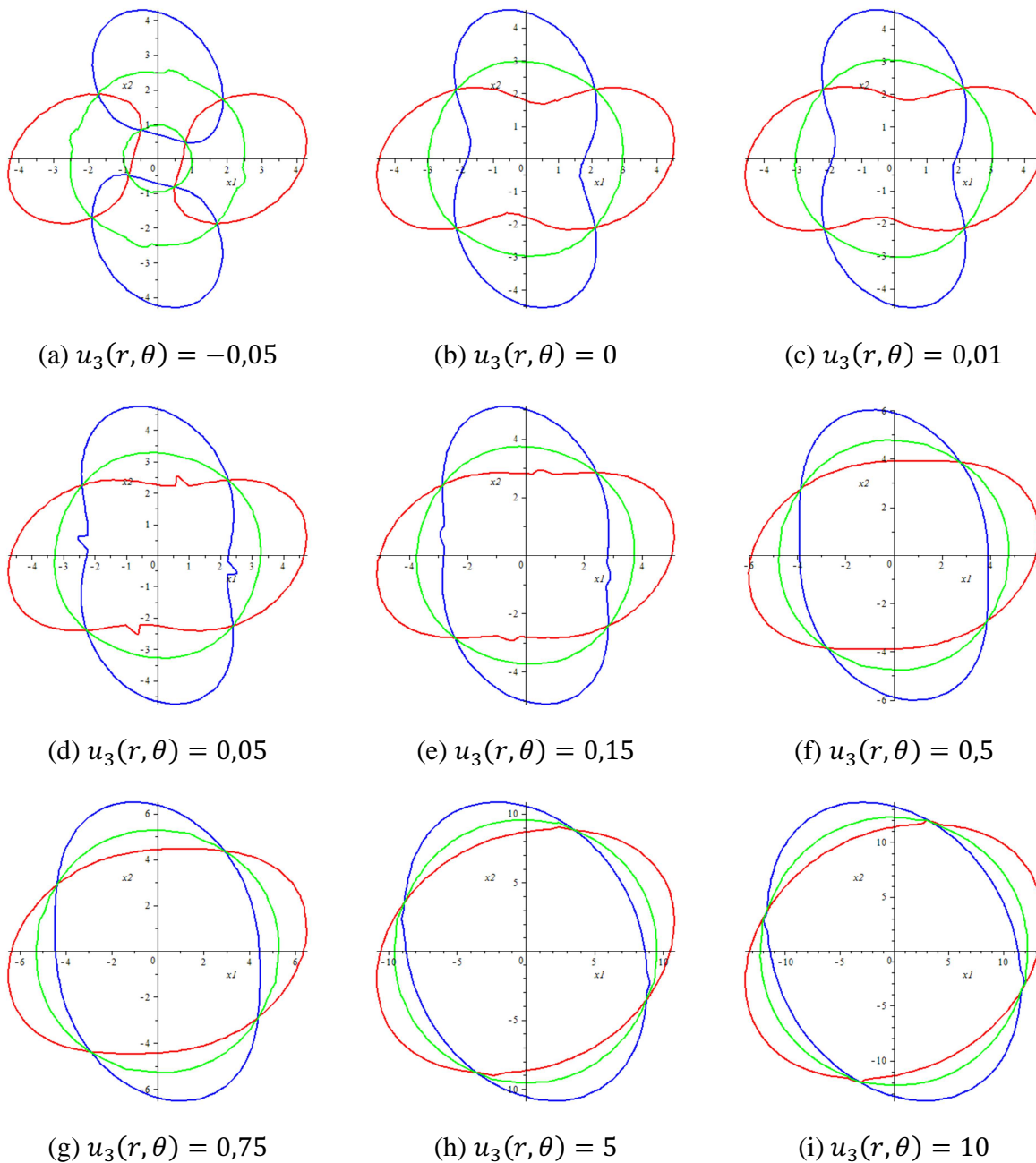
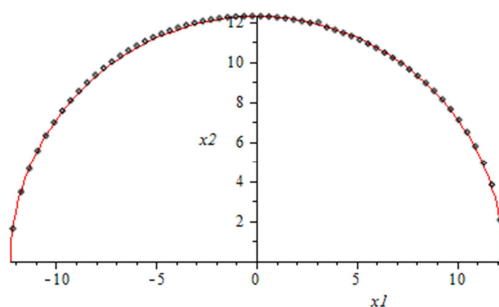


Figura AI.3 – Plotagens da equação (AI.7):  $u_3(r, \theta)$  em vermelho;  $u_3(r, \theta + \pi/2)$  em azul e  $u_3(r)$  em verde

Figura AI.3 mostra plotagens da solução fundamental anisotrópica do material mostrado na equação (AI.8). O erro de três das nove figuras mostradas na Figura AI.3 é mostrado na Tabela AI.1. Inicialmente é calculado um raio médio na solução isotrópica obtida pela média das soluções anisotrópicas. Então são feitas diversas medidas analisando a diferença entre esse raio médio e com o raio efetivo (distância do ponto a origem). São utilizados 60 pontos para cada semi-círculo.

Tabela AI.1 – Erro na média das soluções

$u_3(r, \theta)$	$r_m$	$\frac{1}{n_{ptos}} \sum_{m=1}^{n_{ptos}} (r_e - r_m)^2$
0	2,9988747	$2.108032 \times 10^{-03}$
0,75	5,3010194	$1.141017 \times 10^{-03}$
10	12,298834	$1.702203 \times 10^{-03}$

Figura AI.4 - Exemplo do Cálculo do erro  $u_3(r, \theta) = 10$ 

Uma questão a ser feita é: porque essa relação existe. Uma explicação é puramente matemática. A solução fundamental anisotrópica é repleta de funções seno e cosseno, elevadas ao quadrado. Na rotação de  $90^\circ$ , os termos seno viram cosseno e vice-versa e são eliminados pela soma de seus quadrados. Os termos dependentes de  $\theta$  não elevados ao quadrado tem sua ordem reduzida, já que, como já dito, a rotação minora seus efeitos. Outro ponto sensível é que a parcela independente de  $\theta$ , na soma das soluções, cresce a razão  $r^2 \ln r$ . Em contrapartida, a parcela dependente só cresce a razão de  $r^2$ . Outra questão importante, com relação à primeira é que o raio da solução isotrópica (considerando que esta é um círculo nos cortes mostrados na figura 1) é dado pela intersecção da solução direta com sua respectiva rotacionada.