

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

Luciano Crozara

**ESTUDO DA VIABILIDADE DE USO DO MODELO DE
TRELIÇA ESPACIAL PARA ANÁLISE DE LAJES EM
CONCRETO ARMADO**

Porto Alegre
dezembro 2013

LUCIANO CROZARA

**ESTUDO DA VIABILIDADE DO USO DO MODELO DE
TRELIÇA ESPACIAL PARA ANÁLISE DE LAJES EM
CONCRETO ARMADO**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de
Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal
do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Engenheiro Civil

Orientador: João Ricardo Masuero

Porto Alegre
dezembro 2013

LUCIANO CROZARA

**ANÁLISE DA VIABILIDADE DO USO DO MODELO DE
TRELIÇA ESPACIAL PARA ANÁLISE DE LAJES DE
CONCRETO ARMADO**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo/a Professor/a Orientador/a e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, dezembro de 2013

Prof. João Ricardo Masuero
Dr. pela UFRGS
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA

Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco (UFRGS)
Dr. pela Pennsylvania State University

Prof. João Ricardo Masuero (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Roberto Domingos Rios (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico este trabalho a meus pais, Luis e Neiva e ao meu irmão Leandro, que sempre foram o meu exemplo de vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. João Ricardo Masuero, orientador deste trabalho, pelo apoio e conhecimento passados ao longo do desenvolvimento deste estudo.

Agradeço à Profa. Carin Maria Schmitt, pela dedicação ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha namorada, Roberta Brambatti, pela compreensão e apoio incondicional durante os anos do curso de graduação.

Agradeço aos amigos, Rafael Busetto e Guilherme Dutra, pela parceria durante a graduação.

Agradeço ao amigo, Giovanni Benincá de Farias, pelos anos de parceria.

Agradeço ao meu irmão, Leandro Crozara, pelo incentivo e apoio.

Agradeço aos meus pais, Luis Olivier Crozara e Neiva Crozara, pela confiança e dedicação.

Ser grande, é abraçar uma grande causa.

William Shakespeare

RESUMO

No dimensionamento de estruturas existem métodos utilizados frequentemente nos escritórios de projeto que fazem aproximações quanto ao comportamento de lajes. Considerando a relevância das lajes na estrutura de uma edificação é muito importante analisar o funcionamento das regiões internas da peça. Entre os métodos mais utilizados, destaca-se o Método dos Elementos Finitos e a Analogia de Grelha. Ambos analisam uma laje de forma bidimensional, sendo que o primeiro, divide a peça em elementos discretos, em que a sua continuidade é mantida, e o segundo utiliza elementos unidirecionais de barras formando um reticulado que aproxima o contínuo. Este trabalho tem o objetivo de analisar estruturas de lajes utilizando um modelo aproximado de uma treliça espacial, formado por elementos unidirecionais de barra solicitados por esforços normais à seção das mesmas. Um comparativo entre as respostas em termos de deslocamentos e solicitações de flexão é feito entre o método dos elementos finitos e os modelos aproximados utilizando grelha ou treliça espacial. Os resultados obtidos com a comparação entre os métodos indicou a análise por analogia de treliça espacial interessante em alguns aspectos, porém com problemas de calibração dos modelos.

Palavras-chave: Análise Tridimensional de lajes. Comportamento de Lajes. Treliça Espacial.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Laje equivalente e grelha equivalente.....	14
Figura 2 – Representação da análise de uma estrutura por elementos finitos.....	16
Figura 3 – Treliça espacial.....	17
Figura 4 – Diagrama das etapas do projeto.....	20
Figura 5 – Vinculações na laje.....	23
Figura 6 – Laje carregada perpendicularmente ao seu plano médio.....	23
Figura 7 – Curvatura em uma laje carregada.....	24
Figura 8 – Relação R/t de uma placa.....	25
Figura 9 – Placa delgada retangular.....	27
Figura 10 – Deslocamento de placa.....	28
Figura 11 – Elemento unitário de placa.....	28
Figura 12 – Esforços do elemento unitário de placa.....	29
Figura 13 – Charneiras plásticas.....	37
Figura 14 – Comparação entre diagrama real e diagrama rígido-plástico.....	38
Figura 15 – Analogia de grelhas.....	39
Figura 16 – Elementos do método de elementos finitos.....	44
Figura 17 – Laje de concreto armado e treliça espacial equivalente aplicadas a um momento fletor positivo.....	46
Figura 18 – Módulo cúbico e composição de prismas do método dos elementos discretos.....	47
Figura 19 – Obtenção do momento fletor por analogia de treliça.....	49
Figura 20 – Carga global pontual aplicada no nós.....	52
Figura 21 – Carga global pontual aplicada nas barras.....	53
Figura 22 – Carga global por área aplicada nas barras.....	53
Figura 23 – Momentos fletores na malha 40 x 40 por elementos finitos.....	57
Figura 24 – Momentos fletores na malha 20 x 20 por elementos finitos.....	58
Figura 25 – Momentos fletores na malha 12,5 x 12,5 por elementos finitos.....	59
Figura 26 – Modelo de treliça espacial de laje quadrada com quatro metros de lado.....	63

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Deslocamento vertical máximo de modelo para calibração por elementos finitos.....	60
Quadro 2 – Momento de inércia à flexão das vigas dos modelos de analogia de grelhas.....	61
Quadro 3 – Momento de inércia à torção das vigas dos modelos de analogia de grelhas.....	61
Quadro 4 – Deslocamento vertical máximo de modelo para calibração por analogia de grelhas.....	62
Quadro 5 – Momento máximo de modelo para calibração por analogia de grelhas.....	62
Quadro 6 – Deslocamento vertical máximo de modelo para calibração por analogia de treliça.....	64
Quadro 7 – Resultado da análise por elementos finitos de laje quadrada 3 x 3 metros ...	66
Quadro 8 – Resultado da análise por analogia de grelha de laje quadrada 3 x 3 metros..	67
Quadro 9 – Resultado da análise por treliça espacial de laje quadrada 3 x 3 metros	68
Quadro 10 – Resultado da análise por elementos finitos de laje retangular 3 x 4,5 metros	69
Quadro 11 – Resultado da análise por analogia de grelha de laje retangular 3 x 4,5 metros	70
Quadro 12 – Resultado da análise por treliça espacial de laje retangular 3 x 4,5 metros	71
Quadro 13 – Resultado da análise por elementos finitos de laje retangular 3 x 6 metros	72
Quadro 14 – Resultado da análise por analogia de grelha de laje retangular 3 x 6 metros.....	73
Quadro 15 – Resultado da análise por treliça espacial de laje retangular 3 x 6 metros...	74
Quadro 16 – Resultado da análise por elementos finitos de laje quadrada 4 x 4 metros .	75
Quadro 17 – Resultado da análise por analogia de grelha de laje quadrada 4 x 4 metros	76
Quadro 18 – Resultado da análise por treliça espacial de laje quadrada 4 x 4 metros.....	77
Quadro 19 – Resultado da análise por elementos finitos de laje retangular 4 x 6 metros	78
Quadro 20 – Resultado da análise por analogia de grelha de laje retangular 4 x 6 metros.....	79
Quadro 21 – Resultado da análise por treliça espacial de laje retangular 4 x 6 metros...	80
Quadro 22 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje quadrada 3 x 3 metros pelos três métodos.....	82
Quadro 23 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje quadrada 4 x 4 metros pelos três métodos.....	83
Quadro 24 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje retangular 3 x 4,5 metros pelos três métodos.....	84

Quadro 25 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje retangular 3 x 6 metros pelos três métodos.....	86
Quadro 26 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje retangular 4 x 6 metros pelos três métodos.....	88
Quadro 27 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje quadrada 3 x 3 metros pelos três métodos.....	89
Quadro 28 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje quadrada 4 x 4 metros pelos três métodos.....	90
Quadro 29 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje retangular 3 x 4,5 metros pelos três métodos.....	92
Quadro 30 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje retangular 3 x 6 metros pelos três métodos.....	94
Quadro 31 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje retangular 4 x 6 metros pelos três métodos.....	96
Quadro 32 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje quadrada 3 x 3 metros pelos três métodos.....	98
Quadro 33 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje quadrada 4 x 4 metros pelos três métodos.....	99
Quadro 34 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje retangular 3 x 4,5 metros pelos três métodos.....	100
Quadro 35 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje retangular 3 x 6 metros pelos três métodos.....	102
Quadro 36 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje retangular 4 x 6 metros pelos três métodos.....	104

LISTA DE SÍMBOLOS

w – deslocamento na direção z normal ao plano da placa (cm)

f_{ck} – resistência característica do concreto (MPa)

E – módulo de elasticidade longitudinal do material (MPa)

G – módulo de elasticidade transversal do material (MPa)

t – espessura da placa (cm)

R – raio da circunferência inscrita na placa (cm)

O_{xyz} – origem do sistema de coordenadas x, y, z

O_x – eixo x no sistema de coordenadas x, y, z

O_y – eixo y no sistema de coordenadas x, y, z

M_x – momento perpendicular ao eixo x (kN.m)

M_y – momento perpendicular ao eixo y (kN.m)

M_{xy} – momento perpendicular ao plano xy (kN.m)

M_{yx} – momento perpendicular ao plano yx (kN.m)

σ_x – componente de tensão normal ao eixo x

σ_y – componente de tensão normal ao eixo y

σ_{xy} – componente de tensão normal ao plano xy

τ_{xy} – componente de tensão cisalhante ao plano xy

τ_{xz} – componente de tensão cisalhante ao plano xz

τ_{yz} – componente de tensão cisalhante ao plano yz

V_x – esforço cortante perpendicular ao eixo x (kN)

V_y – esforço cortante perpendicular ao eixo y (kN)

N_{xy} – esforço axial ao plano xy (kN)

N_{yx} – esforço axial ao plano yx (kN)

q – carga aplicada a placa por unidade de área (kN/m²)

r_x – raio de curvatura no eixo x

r_y – raio de curvatura no eixo y

ϵ_x – deformação específica na direção x

ϵ_y – deformação específica na direção y

u – deslocamento na direção x (cm)

v – deslocamento na direção y (cm)

ν – coeficiente de Poisson

D – rigidez da placa ou da viga à torção

J – momento de inércia à torção

I – momento de inércia à flexão

j – momento de inércia à torção da laje por unidade de largura

i – momento de inércia à flexão da laje por unidade de largura

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 DIRETRIZES DA PESQUISA.....	18
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA	18
2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA	18
2.2.1 Objetivo principal.....	18
2.2.2 Objetivo secundário.....	18
2.3 PRESSUPOSTO.....	18
2.4 DELIMITAÇÕES.....	19
2.5 LIMITAÇÕES	19
2.6 DELINEAMENTO.....	19
3 LAJES.....	22
3.1 MÉTODOS ANALÍTICOS.....	26
3.1.1 Teoria de Kirchoff	26
3.1.2 Teoria das Charneiras Plásticas.....	36
3.2 MÉTODOS NUMÉRICOS USUAIS	38
3.2.1 Analogia de Grelhas	38
3.2.2 Elementos Finitos.....	43
4 ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DA LAJE	45
4.1 LINHA NEUTRA.....	45
4.2 ANALOGIA DE TRELIÇA ESPACIAL.....	46
5 SOFTWARE STRAP 11.5	51
6 AJUSTES DOS MODELOS.....	55
6.1 AJUSTE ELEMENTOS FINITOS.....	56
6.2 AJUSTE ANALOGIA DE GRELHAS	60
6.3 AJUSTE TRELIÇA ESPACIAL.....	63
7 RESULTADOS OBTIDOS PARA AS CONFIGURAÇÕES PROPOSTAS.....	65
7.1 LAJE QUADRADA 3 X 3 METROS.....	66
7.1.1 Laje Quadrada 3 x 3 metros Soluções por Elementos Finitos	66
7.1.2 Laje Quadrada 3 x 3 metros Soluções por Analogia de Grelhas	67
7.1.3 Laje Quadrada 3 x 3 metros Soluções por Treliza Espacial.....	67
7.2 LAJE RETANGULAR 3 X 4,5 METROS.....	68
7.2.1 Laje Retangular 3 x 4,5 metros Soluções por Elementos Finitos.....	68
7.2.2 Laje Retangular 3 x 4,5 metros Soluções por Analogia de Grelhas.....	69

7.2.3 Laje Retangular 3 x 4,5 metros Soluções por Treliça Espacial.....	70
7.3 LAJE RETANGULAR 3 X 6 METROS.....	70
7.3.1 Laje Retangular 3 x 6 metros Soluções por Elementos Finitos	71
7.3.2 Laje Retangular 3 x 6 metros Soluções por Analogia de Grelhas.....	71
7.3.3 Laje Retangular 3 x 6 metros Soluções por Treliça Espacial.....	72
7.4 LAJE QUADRADA 4 X 4 METROS	73
7.4.1 Laje Quadrada 4 x 4 metros Soluções por Elementos Finitos.....	73
7.4.2 Laje Quadrada 4 x 4 metros Soluções por Analogia de Grelhas.....	74
7.4.3 Laje Quadrada 4 x 4 metros Soluções por Treliça Espacial.....	74
7.5 LAJE RETANGULAR 4 X 6 METROS.....	75
7.5.1 Laje Retangular 4 x 6 metros Soluções por Elementos Finitos	75
7.5.2 Laje Retangular 4 x 6 metros Soluções por Analogia de Grelhas.....	76
7.5.3 Laje Retangular 4 x 6 metros Soluções por Treliça Espacial	77
8 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS	79
9 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
9.1 CONCLUSÕES SOBRE LAJES QUADRADAS	97
9.2 CONCLUSÕES SOBRE LAJES RETANGULARES.....	97
9.3 CONCLUSÕES FINAIS	98
REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

As lajes representam uma peça fundamental no desenvolvimento de projeto e dimensionamento de edifícios. A correta determinação da deformação e dos esforços solicitantes nessas peças estruturais é primordial para o desenvolvimento de um projeto ao mesmo tempo seguro e econômico.

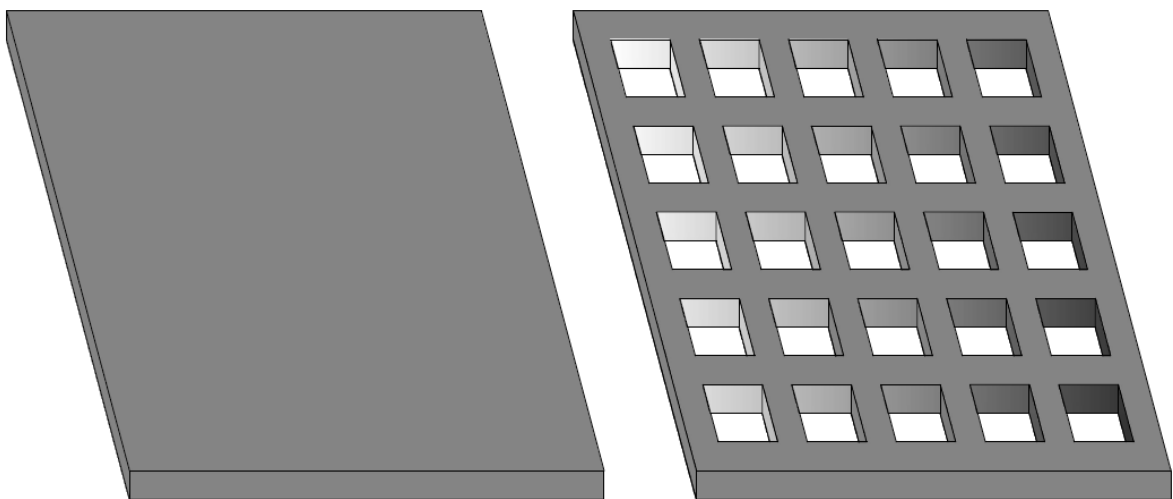
Em relação a métodos existentes para esse tipo de análise, considera-se que, sendo a laje uma estrutura laminar, com duas dimensões (comprimento e largura) muito maiores do que a terceira (espessura), muitas vezes a análise é feita considerando um modelo bidimensional, em que a laje é reduzida ao seu plano médio.

Os programas de cálculo de estruturas mais usuais do mercado utilizam dois métodos de análise para lajes:

- a) analogia de grelhas;
- b) elementos finitos.

A figura 1 apresenta um exemplo de grelha equivalente utilizada para a análise de uma laje. Essa exemplificação mostra uma aproximação entre as duas estruturas.

Figura 1 – Laje equivalente e Grelha equivalente

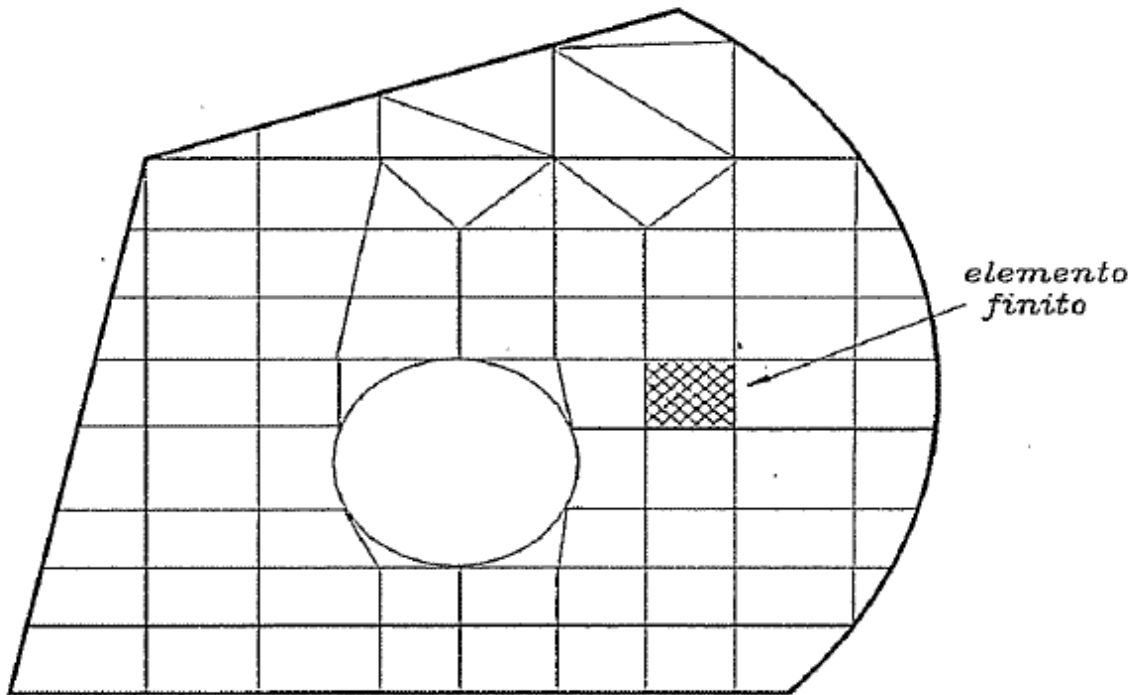


(fonte: elaborada pelo autor)

O método por analogia de grelhas, apresenta a aproximação de uma estrutura plana (laje) por um conjunto de estruturas lineares (vigas), cujo resultado varia muito com o refinamento utilizado na análise. Os efeitos de torção das vigas não são bem definidos nessa análise, e a determinação de uma rigidez equivalente entre a das barras do modelo de grelha e a da laje não é facilmente obtida de modo a contemplar precisão tanto na determinação de esforços como na determinação da deformação da peça. Por outro lado, o emprego de tal modelo aproximado apresenta grande facilidade na determinação das armaduras, motivo pelo qual ele é amplamente utilizado.

O método dos elementos finitos representa uma solução robusta, apresentando grande versatilidade na análise das mais diferentes geometrias e condições de vinculação. Embora também seja um método aproximado, as respostas obtidas com o método convergem para a solução do problema à medida que o número de nós e elementos utilizados no modelo aumenta. Contudo, os resultados de solicitações obtidos pelo método não são facilmente utilizados na determinação das armaduras, trazendo grandes dificuldades na automatização do processo de dimensionamento pelos programas utilizados em projeto de estruturas de concreto. No entanto, por sua precisão, foram utilizadas as respostas obtidas pelo método dos elementos finitos como gabarito para a solução dos problemas analisados. A figura 2 apresenta uma representação uma estrutura analisada pelo método de elementos finitos.

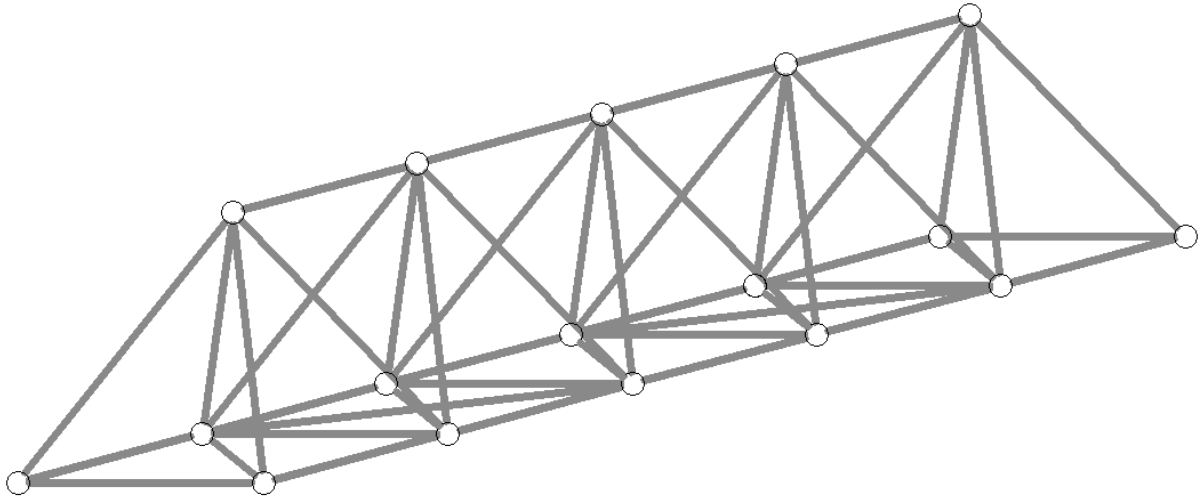
Figura 2 – Representação da Análise de uma Estrutura por Elementos Finitos



(fonte: ASSAN, 2003, p. 57)

O modelo de treliça em analogia ao funcionamento de peças de concreto armado é usualmente utilizado no dimensionamento dos estribos em vigas, e no dimensionamento de armaduras longitudinais em blocos de fundação. Nessa analogia, as barras tracionadas representam as armaduras, ao passo que as barras comprimidas as bielas de concreto. Pela facilidade de utilização e, principalmente, pela facilidade de obtenção das armaduras a partir das solicitações atuantes em suas barras, o modelo de treliça espacial parece ser um candidato promissor como modelo aproximado para a análise de lajes, visando sua posterior utilização em estruturas de concreto. A figura 3 apresenta um exemplo de treliça espacial e os respectivos componentes da estrutura.

Figura 3 – Treliça Espacial



(fonte: elaborada pelo autor)

2 DIRETRIZES DA PESQUISA

As diretrizes para desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

2.1 QUESTÃO DA PESQUISA

A questão de pesquisa do trabalho é: uma treliça espacial pode ser utilizada como um modelo aproximado para a análise de solicitações e deformações em lajes?

2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa estão classificados em principal e secundário e são descritos a seguir.

2.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal do trabalho é explorar o uso de um modelo aproximado de treliça espacial para a análise de lajes em regime elástico linear.

2.2.2 Objetivo secundário

O objetivo secundário do trabalho é comparar a eficiência do uso da analogia de treliça espacial com a analogia de grelhas para a análise de lajes em regime elástico linear.

2.3 PRESSUPOSTO

O trabalho tem por pressuposto que o método dos elementos finitos é consagrado e bem conceituado, apresenta excelentes resultados, e é adequado para ser referência para os resultados obtidos com os modelos aproximados ao longo deste trabalho.

2.4 DELIMITAÇÕES

O trabalho delimita-se à análise das solicitações e deslocamentos em lajes retangulares sob carregamento estático em regime elástico linear.

2.5 LIMITAÇÕES

Soluções obtidas com o Método dos Elementos Finitos, que é igualmente um método aproximado, mas cujo uso e precisão são consagrados, foram utilizadas como referenciais para os casos estudados. A calibração do modelo de treliça espacial foi feita visando a obtenção tanto de solicitações como de deslocamentos igualmente próximos aos valores obtidos por Elementos Finitos. Somente cargas estáticas em lajes quadradas e retangulares foram analisadas, de modo que a calibração do modelo aproximado foi otimizada para esses casos. Os resultados obtidos com o modelo de grelhas foram utilizados apenas em comparações com os resultados da treliça espacial. Foram estudados apenas casos de estruturas que podem ser modeladas como placas finas, sem levar em consideração a contribuição nos deslocamentos dos esforços de cisalhamento. O número de elementos utilizados nos modelos computacionais e, conseqüentemente, a complexidade e porte das estruturas analisadas estão limitadas à capacidade máxima do software de análise estrutural utilizado, o STRAP (um software comercial israelense desenvolvido pela ATIR Engineering Software Development Ltd).

2.6 DELINEAMENTO

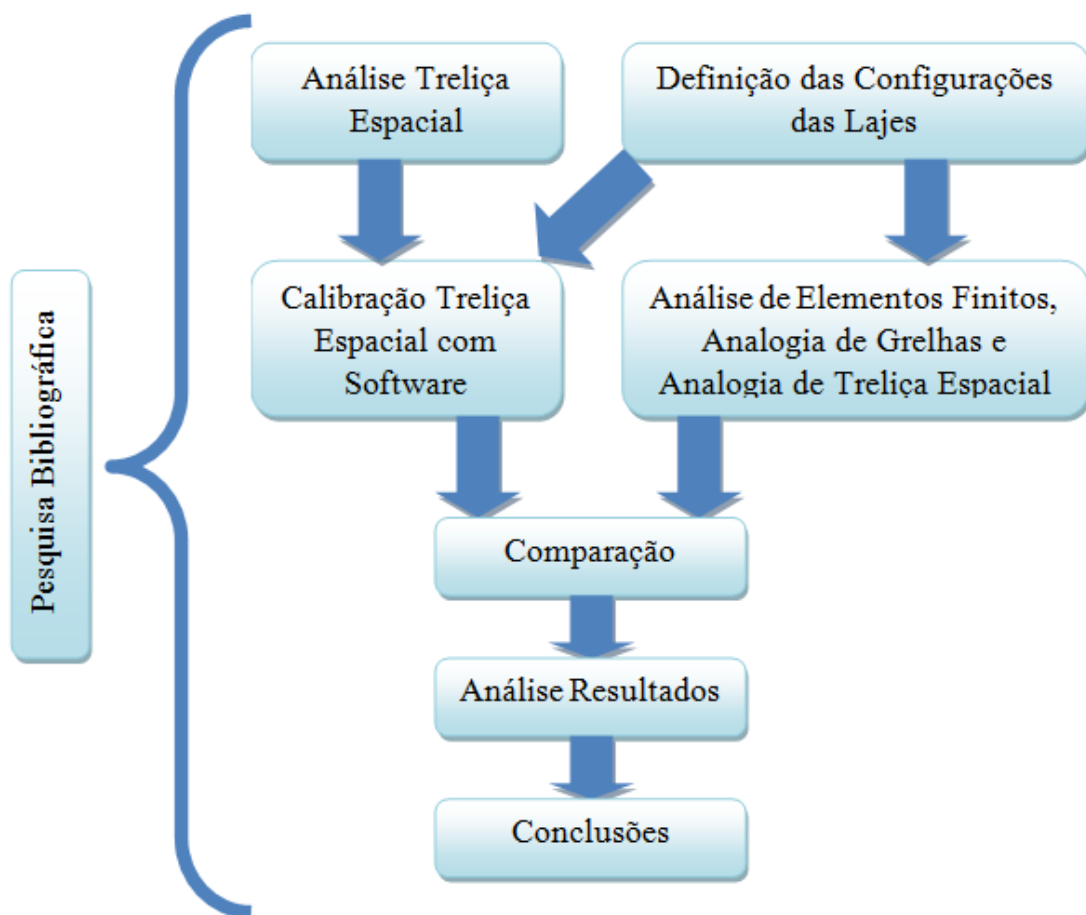
O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir e são descritas nos próximos parágrafos:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) análise do funcionamento de uma estrutura em forma de treliça espacial;
- c) definição das configurações das lajes que sejam representativas de lajes utilizadas em edificações correntes com estrutura de concreto armado;
- d) calibração do modelo aproximado de treliça espacial através da comparação com a resposta em elementos finitos;
- e) análise dos modelos de lajes pelos métodos de elementos finitos, analogia de grelhas e analogia de treliça espacial;

- f) comparação entre resultados;
- g) análise de resultados;
- h) considerações finais.

A sequência utilizada para o desenvolvimento do estudo é demonstrada no diagrama apresentado na figura 4. Algumas etapas somente podem ser desenvolvidas após a conclusão de etapas anteriores.

Figura 4 – Diagrama das etapas do projeto



(fonte: elaborado pelo autor)

A **pesquisa bibliográfica** tem por objetivo buscar embasamento teórico sobre todos os assuntos e métodos que o trabalho pretende abordar e a obtenção de conhecimento das metodologias utilizadas pelo software que auxiliaram na resolução das configurações de lajes consideradas. Além disso, toda a continuidade do trabalho é acompanhada do estudo bibliográfico e por isso esta etapa perdura por todo o período de desenvolvimento.

A **análise do funcionamento de uma estrutura em forma de treliça espacial** é a etapa em que se explora o uso de treliças para o tipo de estrutura proposto, bem como a verificação das vantagens e desvantagens do uso deste modelo estrutural.

Depois de estudar diferentes modelos de treliça, a etapa de **definição das configurações de lajes a serem analisadas** apresenta as estruturas de lajes mais utilizadas em obras correntes.

A **calibração do modelo aproximado de treliça espacial através do software** busca as propriedades dos modelos de treliça definidos anteriormente que apresentem resultados convergentes com os resultados obtidos com o método dos elementos finitos.

A **análise dos modelos pelos métodos de elementos finitos, analogia de grelhas e analogia de treliça espacial** utiliza estas três metodologias para calcular os modelos definidos na etapa anterior. O software foi utilizado para a realização deste estudo por ser uma ferramenta que possibilita o uso dos três métodos.

Depois da solução dos casos através dos métodos propostos, foi feita a **comparação entre os métodos** analisando os resultados obtidos por cada um. Quando houve divergências demasiadamente grandes foram refeitos os cálculos a fim de encontrar possíveis erros.

Posteriormente, foi feita a **análise de resultados** com o intuito de observar os pontos positivos e negativos do método proposto.

As **considerações finais** foram elaboradas na etapa de fechamento do trabalho e se verifica se os objetivos foram alcançados com êxito. Ou seja, se o método proposto pode ser considerado como uma alternativa viável aos dois métodos de comparação já consagrados visando um mais fácil dimensionamento automatizado de armaduras no projeto de lajes de concreto armado através de software.

3. LAJES

O estudo de estruturas em engenharia civil é a análise do comportamento dos elementos que constituem uma edificação, um reservatório, uma torre metálica etc. Quando aplicadas cargas externas, o projeto estrutural visa, a partir desta análise, dimensionar estes elementos.

As lajes são um destes elementos estruturais e, segundo Fusco (1995), são estruturas laminares com superfície média plana e, por definição, as cargas aplicadas são perpendiculares ao seu plano médio. Entre as três dimensões da peça, a espessura é muito menor que a largura e o comprimento e, por isso, a laje é considerada uma estrutura laminar.

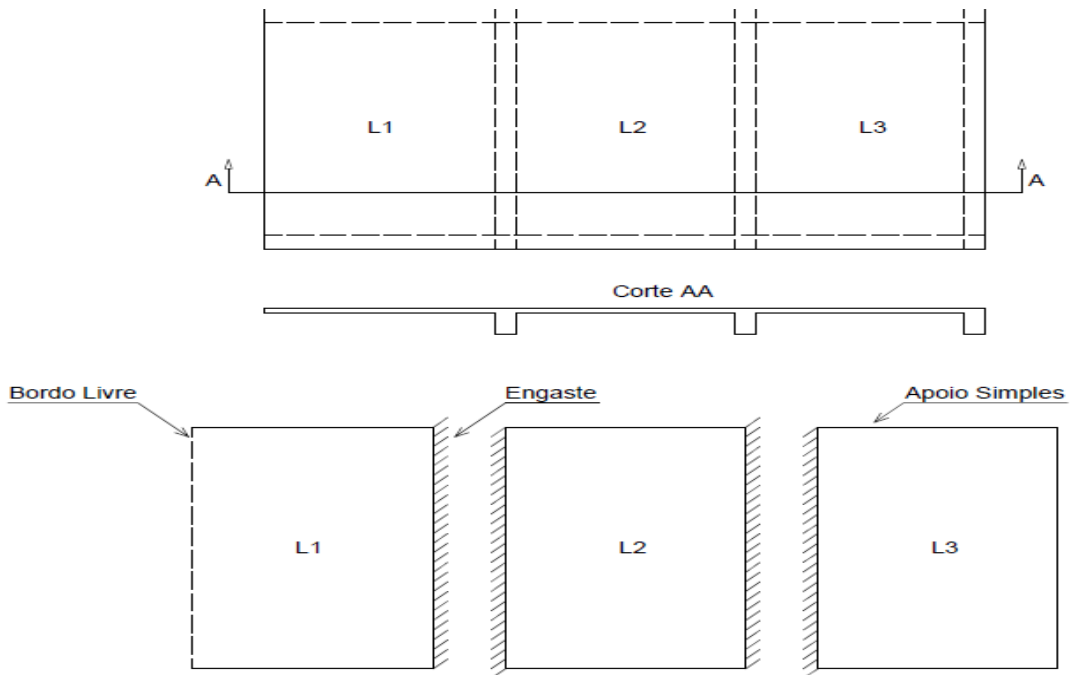
Porém isso não quer dizer que os esforços paralelos ao plano da peça são nulos, pelo contrário podem representar esforços de grande magnitude, mas, via de regra, são menores do que os esforços principais. Utilizando o exemplo clássico de uma edificação, pode-se identificar que a sobrecarga e o peso próprio (cargas perpendiculares ao plano) são mais significativos para o dimensionamento de uma laje do que as cargas, por exemplo, provenientes do vento (paralelos ao plano).

Segundo Groehs (2002), são fatores relevantes para essa análise de estruturas de lajes:

- a) os tipos de vinculação e carregamento;
- b) a relação entre os vãos, a qual condiciona a direção de flexão dominante;
- c) o comportamento mecânico do material de que a laje é constituída;
- d) a relação da espessura com o menor dos vãos.

Em relação às vinculações de lajes apoiadas em vigas, estas últimas deveriam ser consideradas como apoios elásticos pelas lajes porque as vigas se deformam com a ação dos carregamentos externos, mas usualmente considera-se que os apoios não sofrem deformações verticais. Além disso, quando há continuidade com lajes vizinhas, admite-se o engastamento perfeito nos bordos internos e, nos bordos externos, considera-se apoios simples. Quando a laje está em balanço, os bordos sem apoio são considerados bordos livres. Para o melhor entendimento das vinculações, a figura 5 apresenta um exemplo.

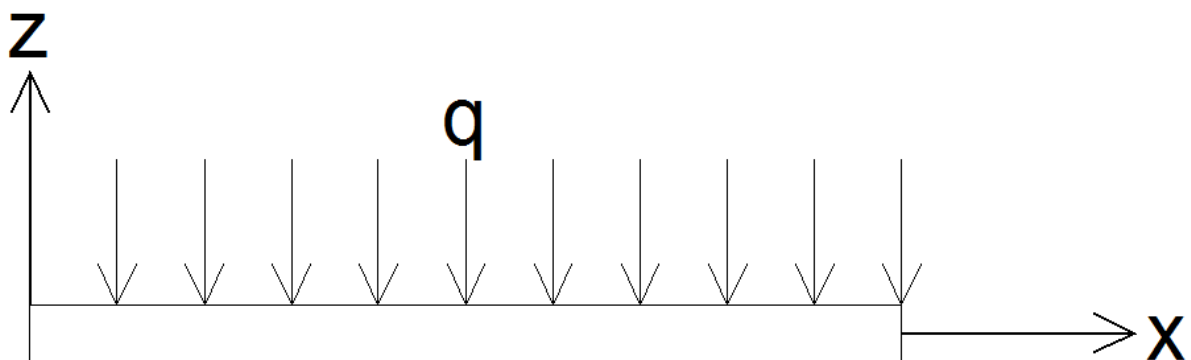
Figura 5 – Vinculações na laje



(fonte: elaborado pelo autor)

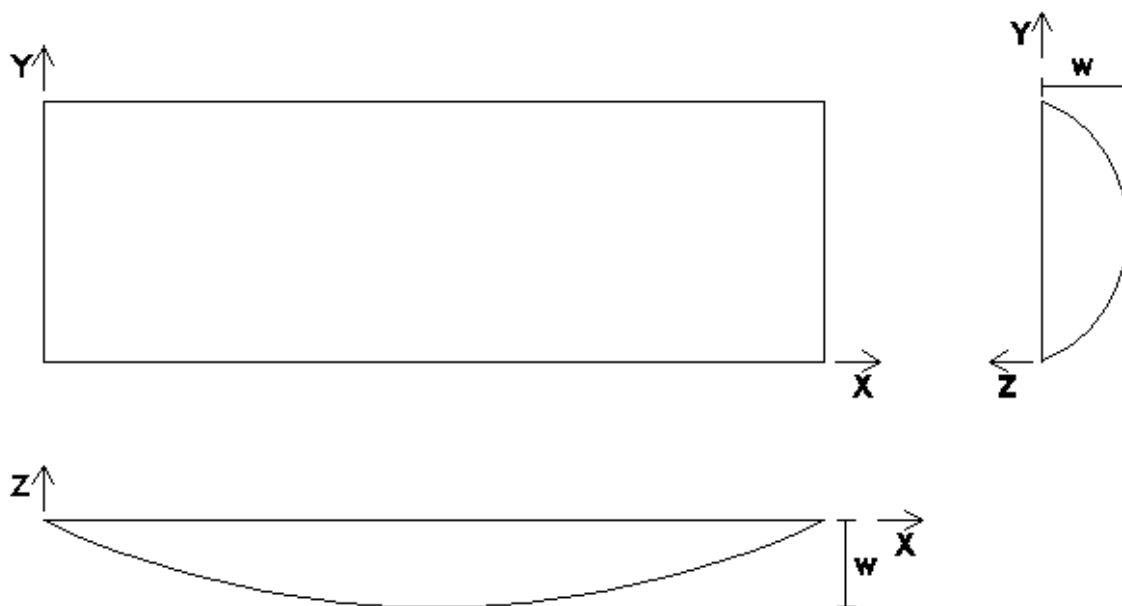
Admitindo-se uma laje carregada perpendicularmente ao seu plano médio, como no exemplo da figura 6, e condições de vinculação semelhantes em todos os bordos, a curvatura das fibras longitudinais no plano médio em uma dada direção deve ser inversamente proporcional ao comprimento do vão. Isso pode ser constatado através da análise da figura 7, que representa a deformação da mesma laje com o mesmo carregamento aplicado. Observa-se que a curvatura na direção x é menor que a curvatura na direção y devido ao comprimento da peça na direção x ser maior do que na direção y .

Figura 6 – Laje carregada perpendicularmente ao seu plano médio



(fonte: elaborado pelo autor)

Figura 7 – Curvatura de uma laje carregada



(fonte: elaborado pelo autor)

O momento em uma estrutura é diretamente proporcional à curvatura resultante da deformação causada pelo carregamento aplicado sobre a peça. Neste contexto, na figura 7, o momento na direção y é maior que o momento na direção x .

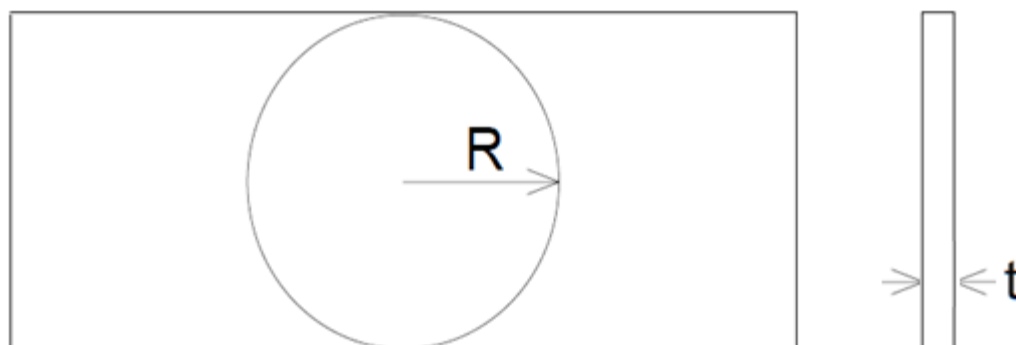
Considerando-se que um vão da laje pode ser muito maior que o outro, conseqüentemente o momento também o é e, nestes casos, o dimensionamento da peça é realizado apenas na direção do momento maior porque a sollicitação na outra direção é praticamente desprezível. Segundo a NBR 6118/2007, essa consideração pode ser feita a partir de uma seção entre os vãos maior que dois para lajes de concreto armado.

As características dos materiais constituintes da estrutura (a tensão de escoamento e , módulo de elasticidade do aço, f_{ck} , módulo de elasticidade e coeficiente de dilatação térmica do concreto) são responsáveis pelo comportamento mecânico da peça perante o carregamento aplicado. Apesar de o concreto ser heterogêneo (é composto por diferentes materiais como areia, brita e cimento), é muitas vezes considerado um material homogêneo e isotrópico para simplificar a análise.

A relação entre a espessura e o menor vão indica o tipo de modelo de análise de lajes para ser utilizado. Segundo Groehs (2002), pode-se classificar uma placa em dois diferentes tipos:

finas e espessas. Essa classificação é dada através do raio R da maior circunferência que pode ser inscrita no plano da placa e na espessura t , conforme apresentado na figura 8. Conforme Groehs (2002), a placa é classificada como fina ou média quando a relação R/t é maior que 10 e classificada como espessa, quando a relação R/t é menor que 10.

Figura 8 – Relação R/t de uma placa



(fonte: elaborado pelo autor)

A principal diferença entre os dois tipos é a consideração da influência das tensões transversais devido ao esforço cortante das cargas atuantes na placa. Na análise de placas finas, esta influência costuma ser negligenciada, a partir de hipóteses simplificadoras.

De acordo com o material da qual a placa é constituída, ela pode ser classificada como anisotrópica, com propriedades diferentes em qualquer direção, ortotrópica, com propriedades dependendo das direções ortogonais consideradas, e isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções (OLIVEIRA NETO, 1998). Embora o concreto simples e o aço possam ser aproximados como materiais isotrópicos, a presença de taxas de armadura diferentes em direções ortogonais em uma laje de concreto armado faz com que a consideração de um material ortotrópico seja a melhor aproximação. No entanto, como este é um estudo inicial sobre o assunto, as lajes analisadas são consideradas isotrópicas.

Na análise de lajes, existem dois tipos de abordagem usuais: métodos analíticos e métodos aproximados.

3.1 MÉTODOS ANALÍTICOS

Usualmente para calcular os esforços em placas, ou lajes no caso de concreto armado, são utilizados métodos baseados em três teorias: a da elasticidade, que considera que as tensões são proporcionais às deformações e que, uma vez cessada a aplicação das tensões, o corpo retorna imediatamente a suas dimensões originais, a da plasticidade, que supõe o material com comportamento rígido- plástico e a da visco- elasticidade, na qual as deformações crescem com o tempo sob cargas constantes.

Ao assumir um comportamento elástico linear para o material, admite-se uma simplificação entre as relações constitutivas e, conseqüentemente, estabelecendo uma relação linear entre esforços e deformações. A teoria de Kirchoff desponta como a principal deste tipo de análise. Análises desse tipo são adequadas a lajes de concreto sob baixo carregamento.

Dentro da teoria da plasticidade, o método das charneiras plásticas é o mais usual e difundido. Para Fusco (1995), as placas de concreto armado são calculadas conforme a ruína da peça em linhas de plastificação que transformam a laje em um sistema hipostático. Essas formas de análise são apresentadas a seguir.

O comportamento visco- elástico é frequentemente utilizado para previsão de flechas de longa duração, mas raramente é utilizado, em nível de projeto, para a previsão dos esforços solicitantes.

3.1.1 Teoria de Kirchoff

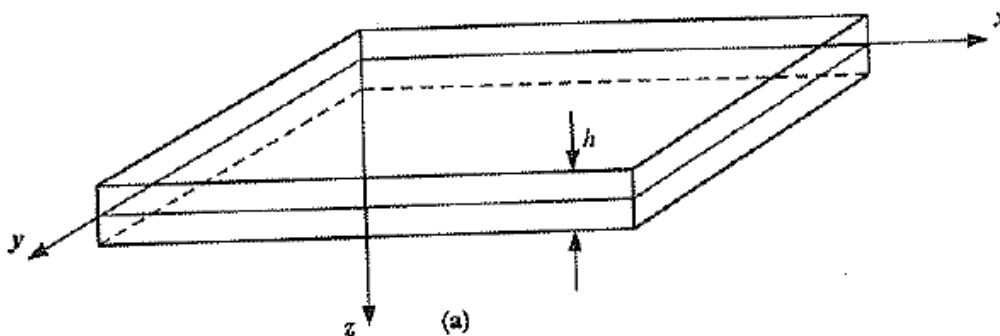
Entre as teorias usuais, baseadas no regime elástico, cita-se a teoria de Kirchoff para flexão de placas. Conforme apresentado por Awruch e Morsch (2009, p. 107) as hipóteses utilizadas para essa teoria são:

- a) a espessura da placa é constante e pequena em relação às outras duas dimensões;
- b) o material da placa é elástico, obedece à lei de Hooke e é homogêneo e contínuo, podendo ser isótropo ou ortótropo;
- c) as deflexões da placa são pequenas, não causando alteração na geometria da mesma;

- d) a superfície média da placa é inicialmente plana e não sofre deformações específicas na flexão;
- e) planos normais à superfície média antes da flexão permanecem planos após a mesma;
- f) as componentes de tensão transversais à superfície média da placa são pequenas e podem ser negligenciadas;
- g) somente são consideradas cargas transversais à placa.

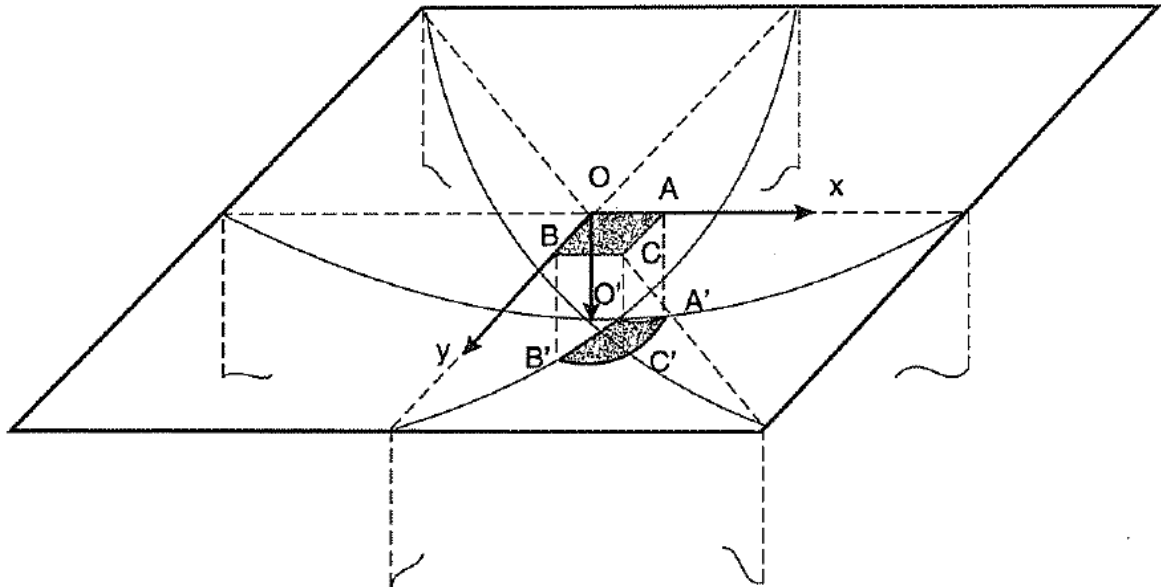
Adota-se um sistema de referência O_{xyz} , em que o plano xy é coincidente com o plano médio da placa, a espessura h da placa é medida ao longo do eixo z , conforme é mostrado na figura 9. Considerando-se um carregamento qualquer perpendicular ao plano médio da peça, a placa sofre deformações conforme a figura 10.

Figura 9 – Placa delgada retangular



(fonte: AWRUCH; MORSCH, 2009, p. 108)

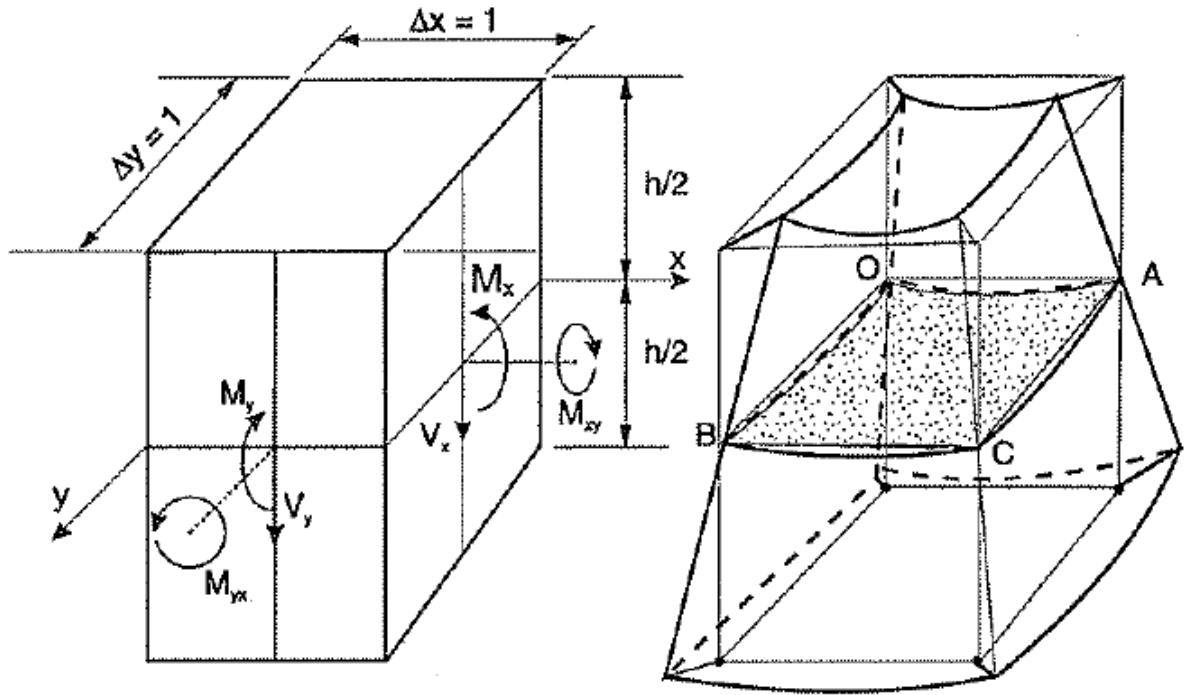
Figura 10 – Deslocamentos de placa



(fonte: FUSCO, 1995, p. 238)

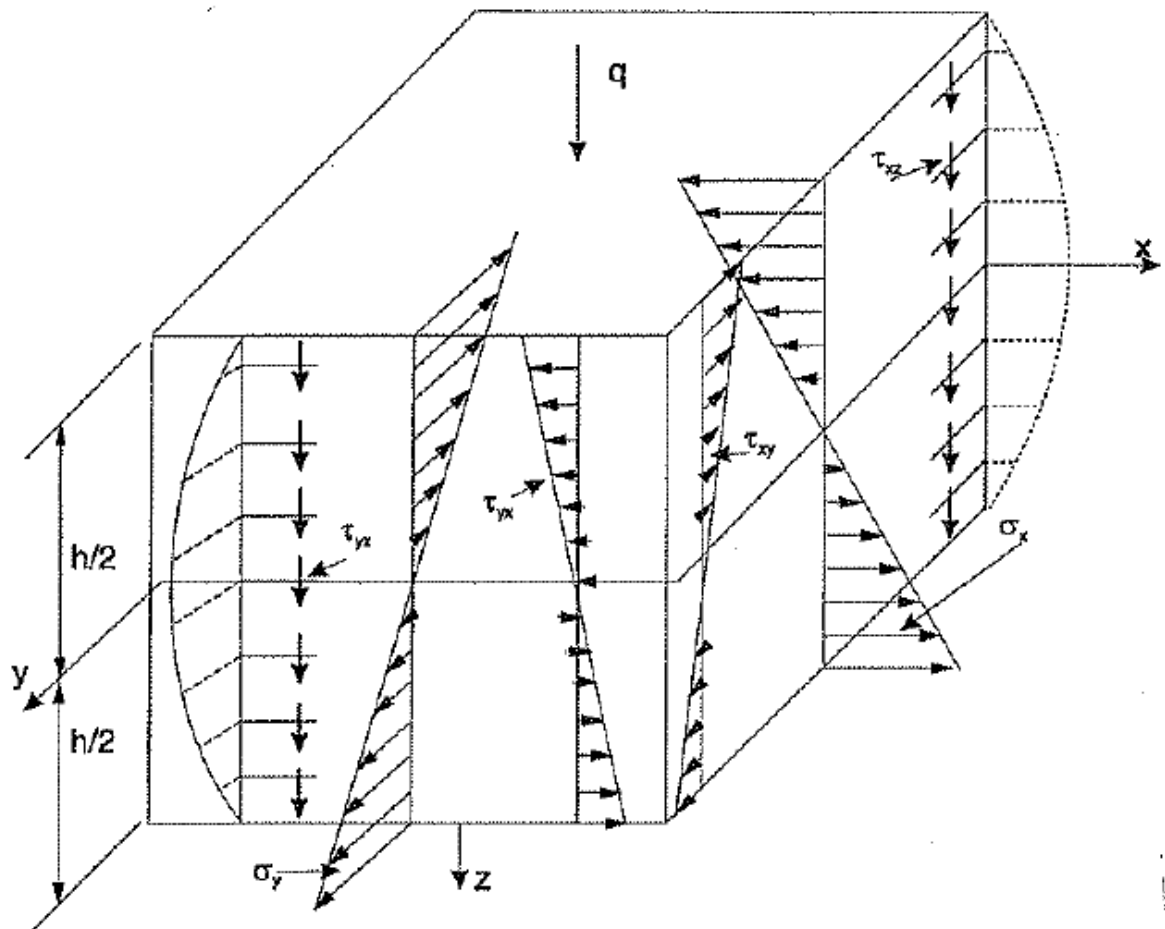
Fusco (1995) analisa um elemento de placa com altura h e lados de comprimento unitário (figura 11) e apresenta os seus esforços solicitantes. Na figura 12 são mostradas as distribuições de tensões resultantes das solicitações.

Figura 11 – Elemento unitário de placa



(fonte: FUSCO, 1995, p. 238)

Figura 12 – Esforços do elemento unitário de placa



As solicitações são definidas por:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (\text{equação 1.a})$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (\text{equação 1.b})$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (\text{equação 1.c})$$

$$V_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (\text{equação 1.d})$$

$$V_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (\text{equação 1.e})$$

Onde:

M_x = momento que gera tração/ compressão na direção x;

σ_x = tensão normal na direção do eixo x;

M_y = momento que gera tração/ compressão na direção y;

σ_y = tensão normal na direção do eixo y;

M_{xy} = momento no plano ortogonal a x que provoca tensões tangenciais na direção y;

M_{yx} = momento no plano ortogonal a y que provoca tensões tangenciais na direção x;

τ_{xy} = tensão tangencial no plano normal a x na direção y;

V_x = esforço cortante na direção z no plano normal a x;

τ_{xz} = tensão tangencial no plano normal a x na direção z;

V_y = esforço cortante na direção z no plano normal a y;

τ_{yz} = tensão tangencial no plano normal a y na direção z.

O dimensionamento das lajes é feito em função do momento M_x que age perpendicularmente ao eixo x e do momento M_y que age perpendicularmente ao eixo y. Em alguns casos especiais pode ser feito em função de V_x e V_y que são as forças cortantes que agem em uma direção perpendicular aos eixos x e y respectivamente (FUSCO,1995).

Considerando-se o estudo de um elemento infinitesimal de placa, a equação de equilíbrio dos momentos na direção O_x é:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - V_y = 0 \quad (\text{equação 3.a})$$

A equação de equilíbrio de momentos na direção O_y é:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - V_x = 0 \quad (\text{equação 3.b})$$

E a equação de equilíbrio de forças na direção O_z é:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \quad (\text{equação 3.c})$$

Onde:

q = carga por unidade de área.

Utilizando as equações (3.a) e (3.b) calcula-se as derivadas de V_x e V_y e depois substitui-se na equação (3.c) e obtém-se:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \quad (\text{equação 4.a})$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} \quad (\text{equação 4.b})$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (\text{equação 4.c})$$

Baseando-se na flexão das placas, Awruch e Morsch (2009) citam as equações dos raios de curvatura na direção do eixo x e do eixo y nas equações 5 (análise de uma laje com as configurações da figura 7):

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\varepsilon_x}{z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{equação 5.a})$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\varepsilon_y}{z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{equação 5.b})$$

Onde:

r_x = raio de curvatura no plano xz ;

r_y = raio de curvatura no plano yz ;

ε_x = deformação específica na direção x;

ε_y = deformação específica na direção y;

w = deslocamento na direção z normal ao plano da placa.

Desta deformação pode-se obter os deslocamentos:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{equação 6.a})$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{equação 6.b})$$

Onde:

u = deslocamento na direção x;

v = deslocamento na direção y.

E no plano O_{xy} , verifica-se a seguinte igualdade:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{equação 7})$$

Onde:

γ_{xy} = deformação do plano na direção O_{xy} .

Utilizando-se as equações 6 e 7 obtém-se:

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{equação 8})$$

Agora tem-se as deformações nos planos das direções O_x , O_y e O_{xy} que são respectivamente ε_x , ε_y , γ_{xy} em função de w . Utiliza-se o estado plano de tensões para se ter as seguintes considerações (FUSCO, 1995):

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (\text{equação 9})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (\text{equação 10})$$

Onde:

E = módulo de elasticidade;

ν = coeficiente de Poisson.

Integrando as expressões:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = - \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{equação 11})$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = - \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{equação 12})$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = - \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)(1 - \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{equação 13})$$

Para Fusco (1995), com as equações 11 e 12 substituídas na equação 13 pode-se obter a equação diferencial das placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D} \quad (\text{equação 14})$$

O coeficiente de rigidez da placa D é dado pela expressão:

$$D = \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{equação 15})$$

Por fim, para encontrar os esforços solicitantes em todos os pontos da placa, deve-se integrar a equação diferencial das placas e, conforme o tipo de vinculação nas bordas da laje, deve-se considerar diferentes condições de contorno. As seguintes condições devem ser verificadas para uma borda de comprimento a paralela ao eixo x , segundo os diferentes tipos de apoio em $x=a$:

Para um engaste:

$$(w)_{x=a} = 0 \quad (\text{equação 16})$$

$$\left(\frac{dw}{dy}\right)_{x=a} = 0 \quad (\text{equação 17})$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{d^2w}{dy^2}\right)_{x=a} = 0 \quad (\text{equação 18})$$

Para um apoio simples:

$$(w)_{x=0} = 0 \quad (\text{equação 19})$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{d^2w}{dy^2}\right)_{x=a} = 0 \quad (\text{equação 20})$$

Segundo Awruch e Morsch (2009), para a primeira condição de contorno de uma borda livre ser respeitada, a soma das forças reativas de cisalhamento (devido ao esforço cortante e ao momento torsor da placa) deve ser nula. A segunda condição de contorno para uma borda livre é, assim como para o caso de um apoio simples, que o momento M_{xx} deve ser nulo ao longo da borda $x=a$, resultando:

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{(2-\nu)(\partial^3 w)}{\partial x \partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \quad (\text{equação 21})$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \nu \frac{d^2w}{dy^2}\right)_{x=a} = 0 \quad (\text{equação 22})$$

3.1.2 Teoria das Charneiras plásticas

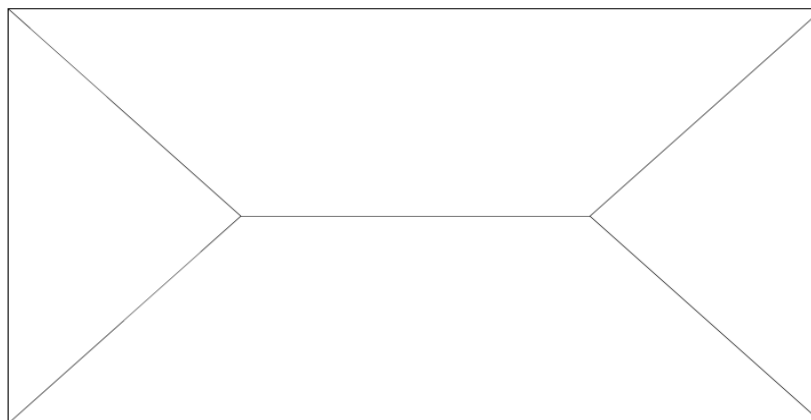
Segundo Langendonck (1970), a teoria das charneiras plásticas tem como objetivo determinar os momentos de plastificação que representam a ruína da estrutura em determinados pontos específicos. O cálculo das lajes de concreto armado pelo método de ruptura é feito admitindo-se que a ruína somente ocorra com a formação de um conjunto de linhas de plastificação, as quais transformam uma laje em um sistema hipostático.

Fusco (1995) afirma que as linhas de plastificação são zonas normais ao plano médio da laje que atingiram o regime plástico e apresentam intensa fissuração na face tracionada. Essas regiões são denominadas as charneiras plásticas e em caso de ruína da estrutura isso deve acontecer a partir desses pontos.

As charneiras plásticas são linhas de ruptura, as quais se encontram em regime plástico, que apresentam deformações acentuadas, enquanto as partes que se encontram entre essas linhas estão em regime elástico e, portanto, apresentam deformações muito menores a ponto de poderem ser desprezadas. Assim, pode-se considerar que a configuração da superfície média da placa rompida é poliédrica e as linhas de ruptura são retas. Sendo assim, as únicas deformações são rotações em torno da linha de ruptura. A posição das linhas das charneiras plásticas depende dos apoios da placa (JOHANSEN, 1962).

Para exemplificar uma situação das charneiras plásticas, a figura 13 apresenta uma placa retangular com apoios simples nas bordas e com um carregamento uniforme.

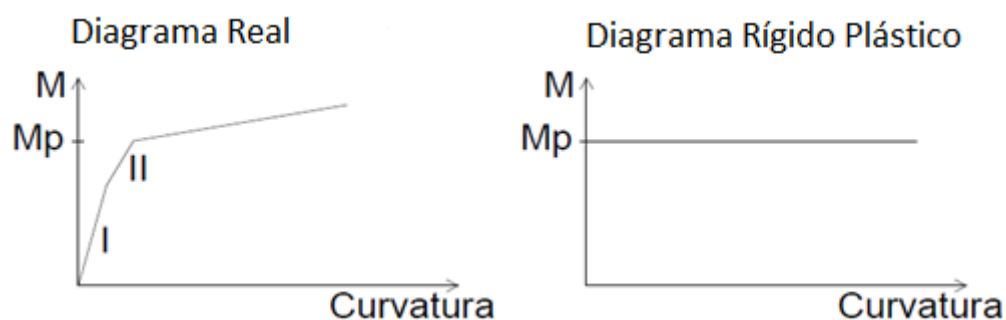
Figura 13 – Charneiras Plásticas



(fonte: FUSCO, 1995, p. 245)

Frente às deformações plásticas, as deformações elásticas são muito menores e podem ser desprezadas. Desta maneira, nessa teoria utiliza-se, para verificar o comportamento do material, um diagrama que desconsidera as deformações elásticas. Esse comportamento é denominado rígido-plástico. A figura 14 apresenta um diagrama com o comportamento real da estrutura e outro com o comportamento em regime rígido-plástico.

Figura 14 – Comparação entre Diagrama Real e Diagrama Rígido Plástico



(fonte: FUSCO, 1995, p. 246)

Nas aplicações das charneiras plásticas são consideradas apenas as cargas proporcionais. Elas são as que se mantêm proporcionais entre si, variando de zero até os seus valores máximos. Admite-se sempre como satisfatória a capacidade de rotação das charneiras plásticas até o colapso final das lajes. Além disso, para a determinação da carga de ruína ao longo das charneiras, são considerados apenas os momentos fletores de plastificação, desprezando-se qualquer eventual influência de forças normais e cortantes (FUSCO, 1995). O comportamento das lajes em regime elásto-plástico não foi aprofundado neste trabalho, uma vez que o foco do mesmo é análise elástica linear de placas.

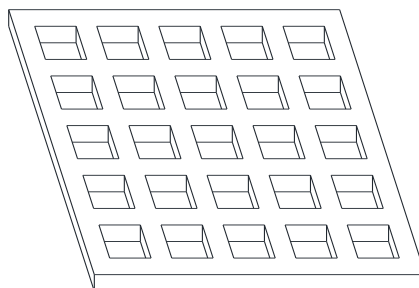
3.2 MÉTODOS NUMÉRICOS APROXIMADOS

Os métodos de análise que são apresentados utilizam critérios totalmente diferentes e também fornecem resultados com diferentes graus de precisão. Nos próximos itens são apresentados os métodos de analogia de grelhas e de elementos finitos.

3.2.1 Analogia de Grelhas

A analogia de grelhas é um método muito usual que utiliza a substituição das lajes por uma malha de vigas (grelha). A figura 15 apresenta um exemplo de grelha equivalente à uma laje.

Figura 15 – Analogia de Grelhas



(fonte:elaborada pelo autor)

Segundo Stramandinoli (2003), como é uma analogia, as rigidezes de torção e deformação das duas estruturas devem ser de tal maneira que, aplicado um mesmo carregamento, as estruturas devem apresentar a mesma deformação, mesmo momento torsor, mesmo momento fletor e esforços cortantes nas seções correspondentes. Para essa análise as rigidezes na laje e na grelha seguem a mesma direção, ou seja, a rigidez das barras transversais representa a rigidez transversal da laje e a rigidez das barras longitudinais representa a rigidez longitudinal da laje. Porém, como as estruturas possuem geometria diferente, essas igualdades são fruto de aproximações. Afirma ainda o autor que os momentos torsores devem ser idênticos nas duas direções ortogonais de uma laje para que os elementos tenham equilíbrio.

Para Stramandinoli (2003), em uma grelha equivalente, para que a grelha tenha a deformação de uma superfície lisa, a malha deve ser suficientemente refinada para que os momentos torsores e distorções sejam aproximadamente iguais nas direções ortogonais. Isso porque nenhum princípio físico ou matemático garante que estes sejam iguais nas duas direções.

Analisando a expressão de rigidez da placa, em regime elástico, evidenciado na equação 15, observa-se que, nas placas, depende-se do coeficiente de Poisson. Ao contrário disso, Stramandinoli (2003) afirma que a rigidez à flexão das barras na analogia de grelhas

independe dessa incógnita conforme a equação 23. Sendo assim, *à priori*, a placa é mais rígida que a viga:

$$D = E \frac{bh^3}{12} \quad (\text{equação 23})$$

Onde:

D = rigidez à flexão da viga;

E = módulo de elasticidade longitudinal do material;

b = largura da viga;

h = altura da viga.

O módulo de elasticidade transversal é dado pela equação 24:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{equação 24})$$

Onde:

G = módulo de elasticidade transversal do material.

Para determinar o momento de inércia à torção não existe uma regra geral. Segundo Hambly (1976), J não é simplesmente uma propriedade geométrica da seção transversal da peça como é o momento de flexão. Pode-se calcular J para um retângulo de lados b e h com a equação 25:

$$J = \beta bh^3 \quad (\text{equação 25})$$

Onde:

J = momento de inércia à torção;

b = maior dimensão da seção transversal;

h = menor dimensão da seção transversal;

β é uma incógnita que depende exclusivamente das propriedades geométricas da estrutura.

$$\beta = \frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{h}{b}\right) \left(1 - \frac{h^4}{12b^4}\right) \quad (\text{equação 26})$$

É importante salientar que a solução para J acima citada, leva em consideração um espaçamento grande entre as vigas da grelha. O que resulta em uma largura (b) maior do que a altura da viga (h). Caso contrário, deve-se utilizar as definições citadas a seguir.

O refinamento da estrutura da analogia de grelhas é definido pelo espaçamento entre as vigas. Quanto menor esse espaçamento, maior é o refinamento para a análise e com isso chega-se à respostas mais satisfatórias diminuindo o coeficiente de erro.

Conforme Oliveira Neto (1998), a rigidez à torção da placa diminui significativamente para malhas de grelhas espaçadas. Isso ocorre porque a rigidez à torção é proporcional ao cubo da menor dimensão da viga. Entretanto, para malhas pouco espaçadas, a largura da viga passa a ser a menor dimensão. Sendo, portanto, essa dimensão elevada ao cubo. Assim a expressão para o cálculo da rigidez à torção não é mais adequada para essa situação. Utilizar uma inércia à torção proporcional à flexão foi uma boa alternativa e sugeriram a utilização da inércia à torção da barra da grelha equivalente ao dobro da sua inércia à flexão:

$$J=2I \quad (\text{equação 27})$$

Onde:

I = momento de inércia à flexão.

Hambly (1976) mostrou porque a expressão acima é verdadeira. Baseado na distribuição da tensão de cisalhamento em um elemento de placa, pode-se escrever:

$$\frac{\tau_{xy}}{z} = -\frac{M_{xy}}{i} = \frac{E}{(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)} \quad (\text{equação 28})$$

$$i = \frac{h^3}{6} \quad (\text{equação 29})$$

Onde:

i = momento de inércia da laje por unidade de largura.

Portanto a equação 30:

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{(1+\nu)12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = \frac{Gh^3}{6} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \quad (\text{equação 30})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{equação 31})$$

Com o valor de G pode-se deduzir que:

$$j = \frac{h^3}{6} \quad (\text{equação 32})$$

Onde:

j = momento de inércia à torção por unidade de largura.

Sabendo que a inércia à torção de vigas de seção retangular é:

$$J = \frac{bh^3}{6} \quad (\text{equação 33})$$

e como a inércia a flexão da seção retangular é:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{equação 34})$$

e comparando as equações 33 e 34, obtém-se:

$$J = 2I \quad (\text{equação 35})$$

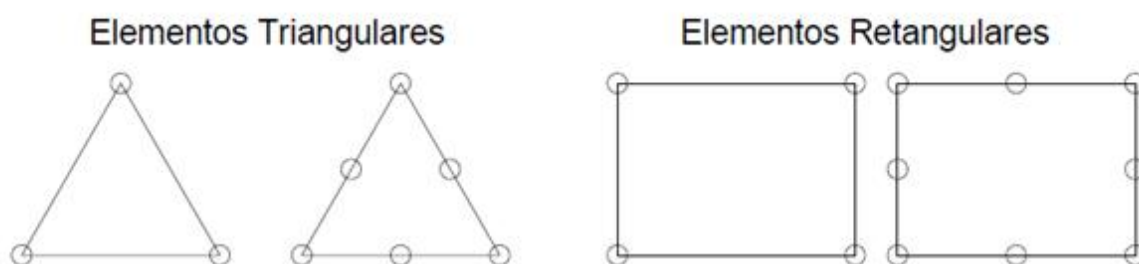
Assim, Hambly (1976), comprova a veracidade da expressão.

3.2.2 Método dos elementos finitos

Muitos modelos estruturais apresentam uma resolução analítica muito complexa e, por vezes, até impossível de ser resolvida. Isso ocorre, em especial, para analisar elementos do meio contínuo (lajes, paredes, cascas, sólidos). O método pode ser baseado na formulação em deslocamentos ou na formulação em forças. Pela facilidade computacional, utiliza-se quase que exclusivamente em método dos elementos finitos a formulação em deslocamentos que é baseada no princípio dos trabalhos virtuais. Esta metodologia consiste não apenas em transformar o contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas admitir funções contínuas que representam o campo de deslocamentos no domínio de um elemento (ASSAN, 2003).

Assan (2003) afirma ainda que é denominada malha de elementos finitos essa divisão do domínio. Variando o tamanho dos elementos, pode-se aumentar ou diminuir a malha desse reticulado. A figura 16 apresenta algumas variações que podem acarretar grandes diferenças nos resultados obtidos.

Figura 16 – Elementos do método dos elementos finitos



(fonte: elaborado pelo autor)

Diferentemente de outros métodos que buscam uma função admissível que satisfaça as condições de contorno do domínio como um todo, o método dos elementos finitos define funções para o domínio de cada elemento. Para calcular o comportamento interno dos elementos e, conseqüentemente, de toda a estrutura, é necessário obter os deslocamentos dos nós. O método permite localizar o conjunto dos deslocamentos nodais através da compatibilidade de equilíbrio entre os nós dos elementos, estando a estrutura em equilíbrio (ASSAN, 2003).

4. ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DA LAJE

Esse trabalho tem o objetivo de analisar as lajes como uma estrutura tridimensional com diferentes solicitações e condições de contorno, para isso é necessário primeiramente entender a relação entre o comportamento interno da peça e o comportamento das barras constituintes do modelo da treliça. Além de entender a geometria e a definição dos parâmetros para a calibração da treliça espacial.

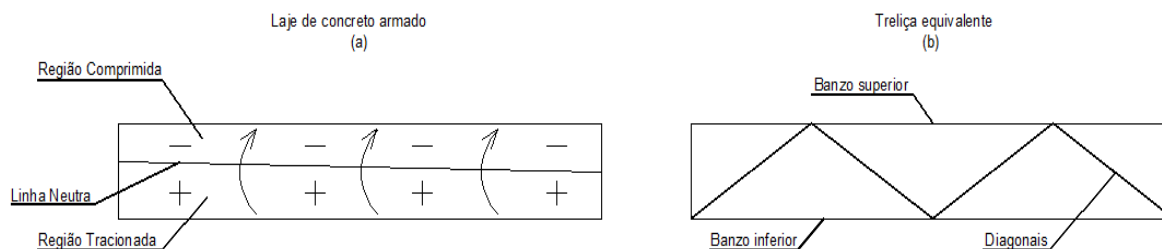
4.1 LINHA NEUTRA

Em uma solicitação de flexão pura existe uma linha na seção transversal constituída por fibras que não sofrem tensão normal. Ou seja, imaginando uma laje que sofre deformação devida a um momento de flexão positiva, as fibras inferiores sofrem tração e as fibras superiores sofrem compressão. Nas fibras centrais existe um plano em que não existe tração ou compressão. Esse plano é denominado a linha neutra.

Em uma situação em que na laje incide a aplicação de momentos fletores e torsores simultaneamente à linha neutra não tem uma definição simples e o seu plano pode ter variações pontuais devido à rigidez considerada no modelo de análise utilizado. Nesse sentido, no caso de analogia de grelhas, o momento à torção das vigas da grelha tem influência direta na definição da linha neutra (STRAMANDINOLI, 2003).

A treliça espacial é de modo geral uma estrutura reticulada tridimensional formada por elementos de barra unidos por nós. A geometria da peça e a forma de arranjo dos elementos de treliça regem a maneira que a laje vai se comportar. O espaçamento entre as barras pode representar um refinamento maior em relação aos resultados obtidos na análise feita por esse método. A figura 17 apresenta a analogia entre uma laje de concreto armado e uma treliça espacial com a mesma geometria e aplicadas ao mesmo carregamento, resultando em um momento fletor positivo.

Figura 17 – Laje de concreto armado e treliça espacial equivalente aplicadas a um momento fletor positivo



(fonte: elaborado pelo autor)

A figura 17(a) mostra a laje submetida à um momento fletor positivo e a possível localização de sua linha neutra. A figura 17(b) apresenta uma treliça espacial equivalente para analisar o comportamento da laje. Pode-se verificar que o banzo superior da treliça espacial está localizado na região comprimida da peça e o banzo inferior da treliça está localizado na região tracionada da peça. Enquanto que as diagonais cruzam a linha neutra e podem estar tracionadas ou comprimidas, dependendo da posição que se encontra no modelo.

Em uma analogia entre as duas estruturas, pode-se considerar que o banzo superior da treliça espacial equivale a bielas comprimidas na parte superior da laje e, o inferior equivale a fibras tracionadas localizadas na parte inferior. Em uma laje de concreto armado, as bielas comprimidas são o concreto, e as fibras tracionadas são as armaduras de aço. Essa analogia indica que, considerando uma peça ortotrópica, no momento de definir as propriedades físicas das barras da treliça, aplica-se as propriedades do concreto ou do aço dependendo da localização da barra no modelo. As diagonais estão relacionadas ao comportamento ao corte. Por outro lado, se considerar uma peça isotrópica, as propriedades físicas do material de todas as barras devem ser igualmente o equivalente a um valor intermediário entre aço e concreto.

4.2 ANALOGIA DE TRELIÇA ESPACIAL

A analogia de treliça para a análise de estruturas é usualmente utilizado nas seguintes aplicações:

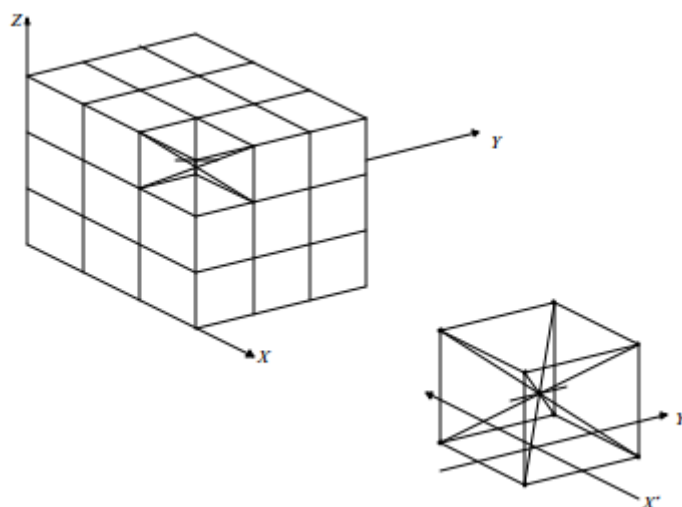
- a) treliça de Morsch;
- b) método dos elementos discretos.

A treliça de Morsch é a analogia por uma treliça plana utilizada para analisar o esforço cortante de vigas de concreto armado. A NBR 6118/2007 sugere o dimensionamento da armadura dos estribos de vigas utilizando esse método. Porém, é uma análise que se restringe à estruturas lineares, o que não se aplica ao caso de lajes.

O método dos elementos discretos é baseado em uma treliça espacial e é difundido no estudo do desenvolvimento de fissuras em blocos de fundação, na análise dinâmica dos efeitos provocados por sismos e na indústria aeronáutica. Tais assuntos fogem do escopo desse trabalho, portanto somente a teoria do método é abordada.

Esse método pode ser utilizado para a modelagem de qualquer sólido elástico ortotrópico. Está construído por módulos cúbicos de treliça periodicamente ligados em um espaço de três dimensões, como mostra a figura 18.

Figura 18 – Módulo cúbico e composição de prismas do método dos elementos discretos



(fonte: NAYER;HEFZY, 1978 apud RIOS, 2002, p. 10)

Nayer e Hefzy (1978 apud RIOS, 2002) propuseram uma formulação para representar painéis empregados na indústria aeronáutica, com geometria na forma de treliças espaciais (figura 18), através de um meio contínuo equivalente. Através de um sólido elástico isotrópico com constantes conhecidas, determinam-se as propriedades das barras de treliça de cada módulo cúbico através de:

$$A_p E = \alpha E L^2 \quad (\text{equação 36.a})$$

$$A_d E = 2\delta \propto E L^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{equação 36.b})$$

$$\alpha = \frac{(9 + 8\delta)}{(18 + 24\delta)} \quad (\text{equação 36.c})$$

$$\delta = \frac{9\nu}{(4 - 8\nu)} \quad (\text{equação 36.d})$$

Onde:

A_p = área da seção transversal das barras prismáticas do módulo cúbico;

A_d = área da seção transversal das barras diagonais do módulo cúbico;

E = módulo de elasticidade do material;

L = comprimento do lado do módulo cúbico.

Através das equações 36, uma vez conhecidos os parâmetros dos materiais (E, ν), são definidas as rigidezes das barras do modelo e conseqüentemente as suas respectivas áreas de influência.

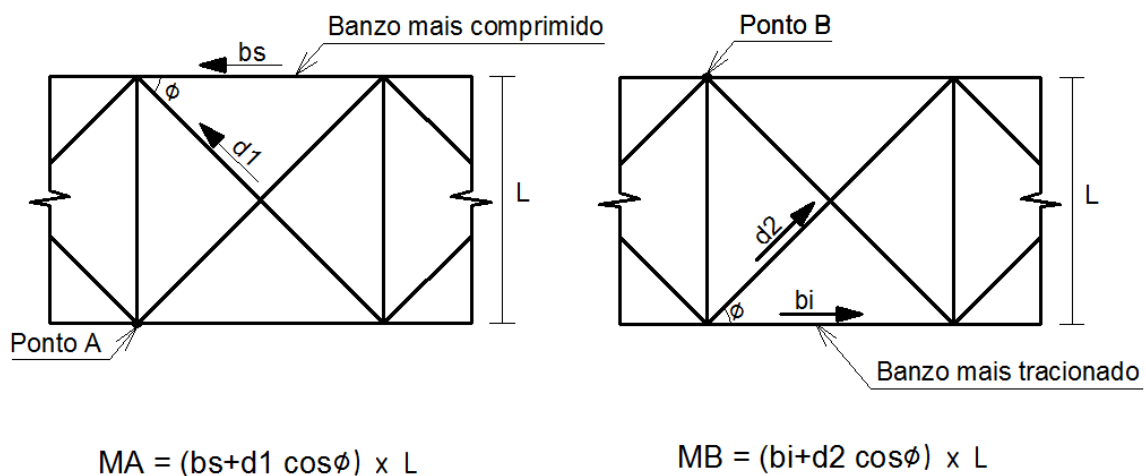
Essa definição tem como abordagem principal a análise dinâmica de sismos, e portanto, deve ser adequada à análise estática de lajes. Para isso, foi utilizado apenas a relação entre a área da seção das barras prismáticas e das barras diagonais, dividindo as equações 36 a e b como apresenta na equação 37, e a calibração da área das barras foi definida através da comparação com o método dos elementos finitos.

$$\frac{A_p}{A_d} = \frac{\sqrt{3}}{2\delta} \quad (\text{equação 37})$$

As barras que constituem uma treliça apresentam apenas esforços axiais, portanto a rigidez à flexão e à torção são desconsideradas. Dessa maneira, a calibração do modelo envolve apenas a definição da área de influência das barras através da equação 37. Essa definição é detalhada no item 6.3.

A definição do momento fletor máximo aplicado no modelo é feita através do esforço axial máximo de compressão no banzo superior ou de tração no banzo inferior. O resultado é obtido somando o esforço no banzo à componente horizontal das diagonais e utilizando a espessura da laje como braço de alavanca. A figura 19 exemplifica.

Figura 19 – Obtenção do momento fletor por analogia de treliça



(fonte: elaborado pelo autor)

O exemplo da figura 19 é o caso de um momento positivo em que o banzo inferior encontra-se traçado, porém esse método aplica-se de forma análoga ao caso de momento negativo em que o banzo superior encontra-se traçado. Além disso, o caso da figura 19 é de uma treliça plana, no caso de uma treliça espacial a obtenção do momento segue a equação 38:

$$M = (b + d1 \cos \theta \cos \varphi + d2 \cos \theta \cos \varphi)L \quad (\text{equação 38})$$

Onde:

b = esforço axial no banzo;

d1 = esforço axial na primeira diagonal conectada ao nó do banzo;

d2 = esforço axial na segunda diagonal conectada ao nó do banzo;

θ = ângulo das diagonais com o eixo x;

φ = ângulo das diagonais com o eixo y;

L = espessura da laje.

5. SOFTWARE STRAP 11.5

Para preparar o modelo computacional, o projetista deve utilizar elementos unindo nós no espaço tridimensional (SAE INFORMÁTICA, [2011]). O Strap 11.5 utiliza dois tipos de elementos:

- a) barras;
- b) placas.

As barras são elementos unidirecionais que são utilizados para modelar membros estruturais que podem ser modelados por uma linha (unifilar), como é o caso de vigas por exemplo. As placas são elementos bidirecionais que são utilizados para modelar superfícies como lajes, cascas e muros (SAE INFORMÁTICA, [2011]).

Esse software tem a possibilidade de analisar a estrutura de uma laje através de dois métodos:

- a) analogia de grelhas;
- b) método dos elementos finitos.

A análise de analogia de grelhas é possível definindo a laje pela opção grelha e fornecendo o espaçamento entre as barras da mesma. O software solicita que o usuário informe as propriedades geométricas (largura e comprimento da placa) e as propriedades físicas (rigidez a flexão e a torção) das barras, que deve ser analisado anteriormente para a calibração da estrutura.

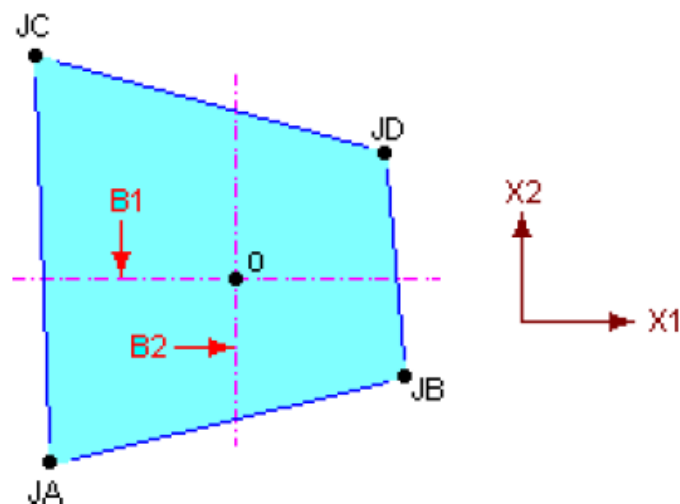
No menu do software existe também a opção de definir um elemento na forma de uma superfície. Essa alternativa estrutura um modelo plano baseado no método dos elementos finitos analisando a laje como uma estrutura única e cujo refinamento da análise é fornecido pelo usuário através da quantidade de nós que deve ter o modelo. Quanto maior o refinamento da análise, maior é o tempo para resolução dos cálculos e maior a aproximação da resposta ideal, do contrário o tempo é menor, porém apresenta uma incerteza na qualidade do resultado maior. O grau de refinamento utilizado deve ser tal que garanta, dentro da precisão necessária ao projeto, uma resposta próxima à solução de convergência (SAE INFORMÁTICA, [2011]).

Para a montagem de uma treliça o software disponibiliza o espaço gráfico para a definição desejada pelo projetista. O software possui diferentes métodos de aplicação de carga no modelo, ou seja, carga global:

- a) pontual aplicada nos nós;
- b) por área aplicada nos nós;
- c) pontual aplicada nas barras;
- d) por área aplicada nas barras;
- e) pontual aplicada nos elementos;
- f) por área aplicada nos elementos.

Para uma carga global pontual aplicada a um nó no ponto O em uma superfície (figura 20), o programa cria duas barras imagináveis paralelas aos eixos globais (B1 e B2). As reações nas barras B1 e B2 devido à carga pontual são aplicadas nas barras que circundam a superfície e, por sua vez, as reações dessas barras são aplicadas nos nós das extremidades. O programa entende que todas as barras estão engastadas e por isso são aplicados momentos e forças nos nós. Em uma carga global por área aplicada aos nós o conceito é o mesmo, porém a área de carga é dividida em pequenos quadrados (o tamanho dos quadrados é definido pelo projetista) e formam várias cargas pontuais aplicadas no centro de cada quadrado (SAE INFORMÁTICA, [2011]).

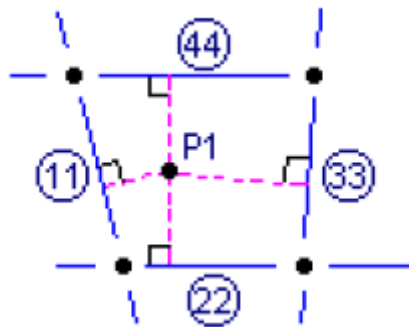
Figura 20 – Carga global pontual aplicada nos nós



(fonte: SAE INFORMÁTICA, 2011, p. 823)

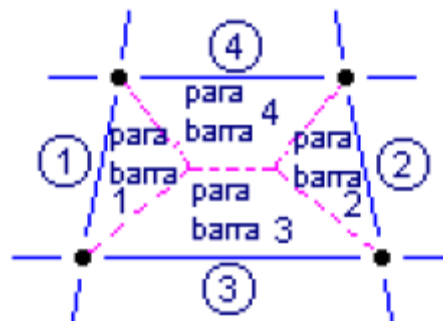
Nas cargas globais pontuais aplicadas nas barras, conforme a figura 21, a carga P1 é distribuída nas quatro barras que à circundam de maneira inversamente proporcional à distância do ponto de aplicação e a barra. Já nas cargas por área (figura 22), o programa traça a bissetriz nos ângulos entre as barras, criando áreas de cargas que são aplicadas em cada barra (SAE INFORMÁTICA, [2011]).

Figura 21 – Carga global pontual aplicada nas barras



(fonte: SAE INFORMÁTICA, [2011], p. 824)

Figura 22 – Carga global por área aplicada nas barras



(fonte: SAE INFORMÁTICA, [2011], p. 825)

Nos elementos, as cargas pontuais globais são aplicadas aos nós da superfície sem levar em consideração os momentos fletores provenientes dessa carga. E as cargas por área são aplicadas como uma pressão uniforme aos elementos que estão sob o contorno da carga como um todo (SAE INFORMÁTICA, [2011]).

O carregamento utilizado no modelo de elementos finitos foi o de carga global aplicada nos elementos, porque é o mais adequado. Na grelha, foi utilizado o de carga global aplicada nas barras, para obter o comportamento das vigas do modelo com esse carregamento, e na treliça

especial foi utilizado o de carga global pontual aplicada diretamente nos nós, para que as barras da treliça ficassem apenas com esforços axiais.

6. AJUSTES DOS MODELOS

Os modelos estudados apresentam diferentes métodos de análise em que cada um tem diferentes parâmetros relevantes para a solução dos problemas. Para que haja a convergência entre os resultados, é necessário fazer a calibração desses parâmetros e a adequação para o refinamento ideal dos modelos.

As propriedades dos materiais para todos os modelos foram adotadas através da NBR 6118/2007, que sugere no item 8.2.9 o coeficiente de Poisson igual a 0,3 e no item 8.2.8 o módulo de elasticidade dado por:

$$E = 5600f_{ck}^{1/2} \quad (\text{equação 38})$$

Onde:

E = módulo de elasticidade;

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto.

E o módulo de elasticidade transversal (G) é dado em função de E, conforme o item 8.2.9 da mesma norma, pela seguinte equação:

$$G = 0,4E \quad (\text{equação 39})$$

Onde:

G = módulo de elasticidade transversal.

Adotando-se o valor usualmente utilizado em projetos estruturais de f_{ck} igual a 25 Mpa, obtém-se, a partir da equação 37, o módulo de elasticidade igual a 28×10^9 Pa, e a partir da equação 38, o módulo de elasticidade transversal igual a $11,4 \times 10^9$ Pa. Para efeito de calibração dos modelos foi utilizado o exemplo de uma laje quadrada de 4 metros de lado e espessura de 10 centímetros, simplesmente apoiada em todos os bordos e, conforme as

indicações da NBR 6120/1980, com um carregamento de $4,5 \text{ kN/m}^2$, sendo $2,5 \text{ kN/m}^2$ relacionado ao peso próprio da estrutura e $2,0 \text{ kN/m}^2$ de sobrecarga.

Para os elementos finitos foi definido o melhor refinamento para que os resultados fossem convergentes para uma solução adequada. O ideal é uma malha que apresente respostas satisfatórias para o problema, porém que não seja excessivamente refinada aumentando o tempo de resposta do software.

Para a analogia de grelhas os pontos importantes definidos foram o refinamento da estrutura e a rigidez à torção e à flexão das barras que formam a grelha. Se a calibração desses parâmetros não for realizada de maneira adequada, o resultado pode apresentar grande discrepância em relação à realidade.

Para a treliça espacial, a rigidez à torção e a rigidez à flexão das barras da treliça não são parâmetros relevantes, portanto, somente a área da seção transversal das barras foi calibrada. A geometria e o posicionamento das barras utilizado é semelhante ao da figura 18.

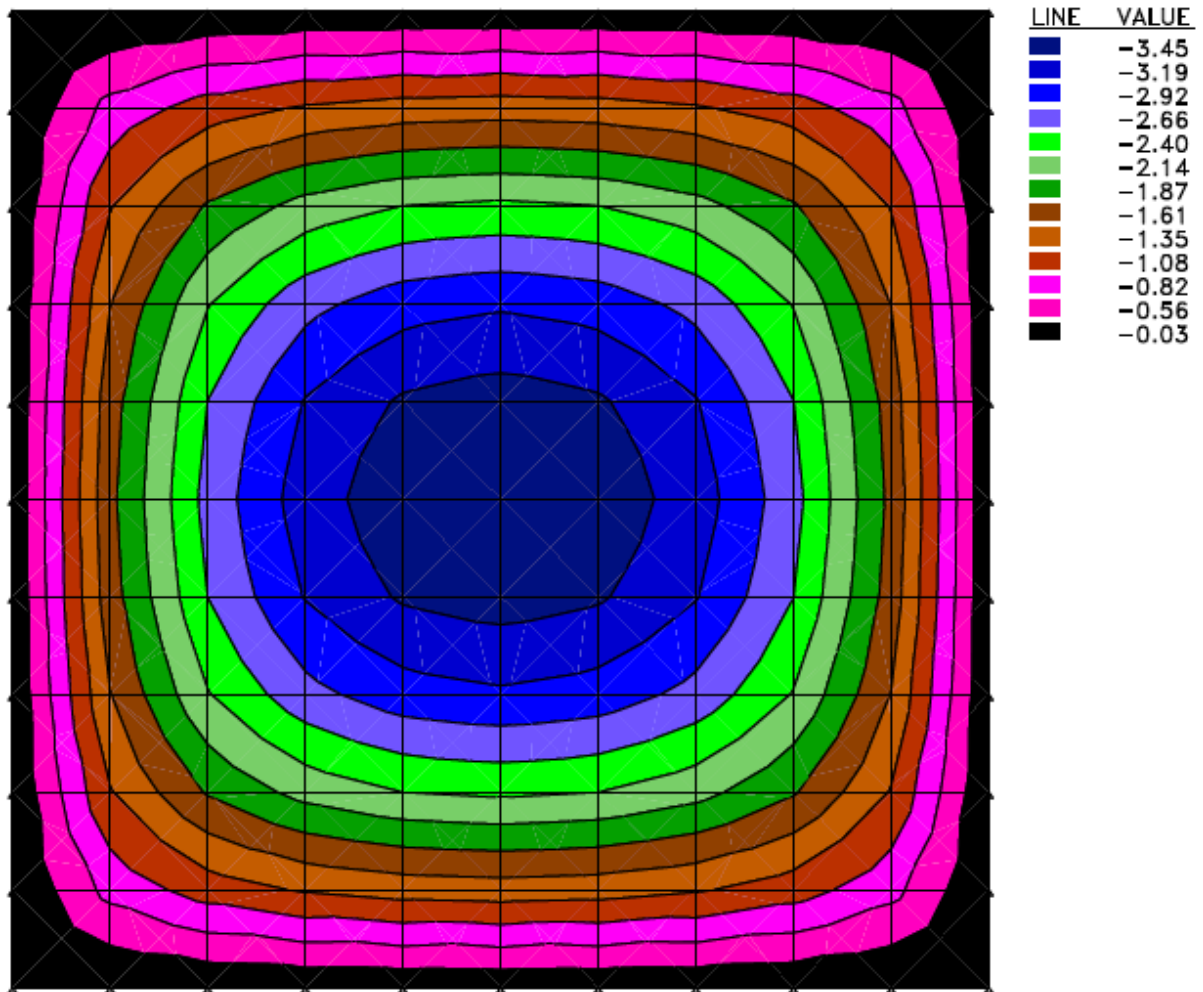
6.1 AJUSTE ELEMENTOS FINITOS

Para definir o refinamento da malha mais adequado observou-se a continuidade na distribuição dos momentos e deformações ao longo da superfície da laje. Foram testados elementos com os seguintes espaçamentos:

- a) $40 \times 40 \text{ cm}$;
- b) $20 \times 20 \text{ cm}$;
- c) $12,5 \times 12,5 \text{ cm}$.

Pode-se observar na figura 23 que a malha 40 x 40 cm apresenta uma distribuição de momentos com algumas incoerências em relação à continuidade. Principalmente nos cantos que não apresenta resultado igual a zero, como seria esperado em uma laje simplesmente apoiada em todos os bordos.

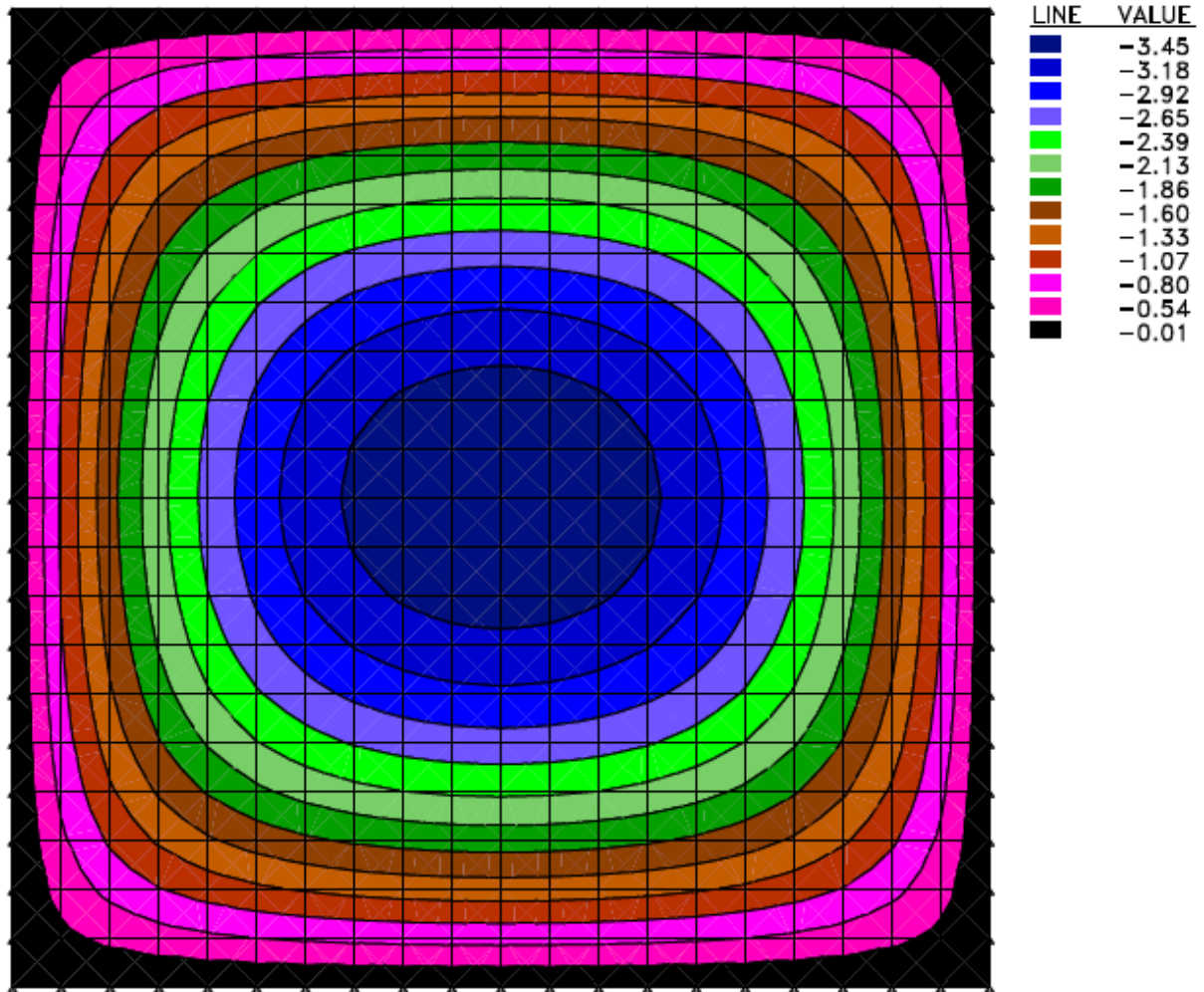
Figura 23 – Momentos fletores na malha 40 x 40 por elementos finitos [kN.m/m]



(fonte: STRAP, [2011])

A figura 24 mostra a distribuição de momentos na malha 20 x 20 cm que apresenta um resultado mais refinado e com mais coerência em relação ao da malha da figura 23. Porém ainda apresenta pequenas descontinuidades.

Figura 24 – Momentos fletores na malha 20 x 20 por elementos finitos [kN.m/m]

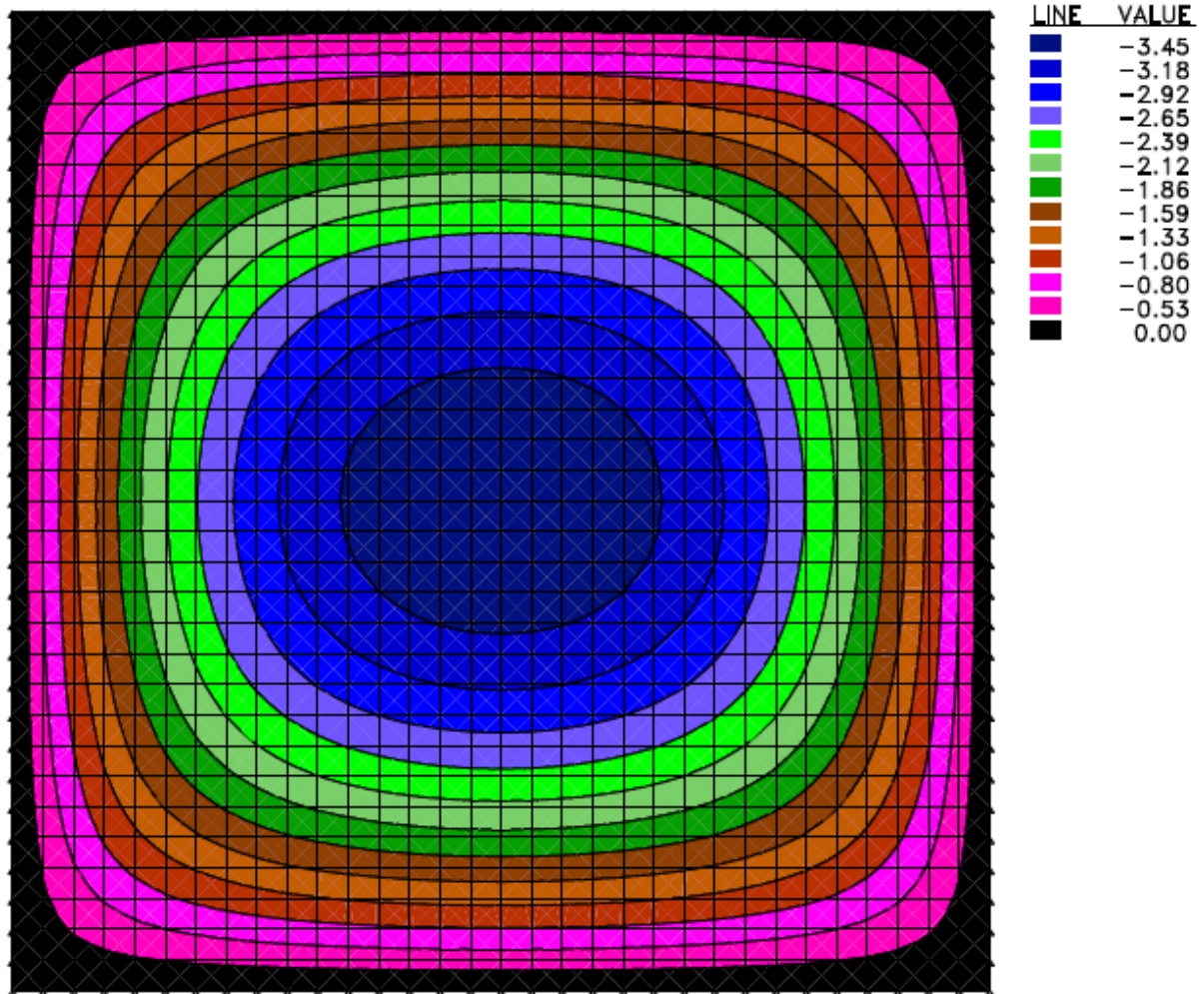


(fonte: STRAP, [2011])

A malha mais refinada entre as analisadas neste trabalho é ilustrada na figura 25 e apresenta um resultado satisfatório em relação à continuidade de momentos. Apesar de representar o

maior tempo de resolução para o software, a malha 12,5 x 12,5 cm se mostra a mais adequada para a análise da estrutura.

Figura 25 – Momentos fletores na malha 12,5 x 12,5 por elementos finitos [kN.m/m]



(fonte: STRAP,[2011])

O quadro 1 apresenta os deslocamentos máximos resultantes das malhas testadas nesse método. Esses valores foram utilizados para comparar e calibrar os parâmetros dos modelos utilizados nos outros métodos.

Quadro 1 – Deslocamento vertical máximo de modelo para calibração por elementos finitos

Deslocamento máximo w em elementos finitos [cm]			
Dimensão malha	40 x 40 cm	20 x 20 cm	12,5 x 12,5 cm
w (cm)	0,1818	0,1823	0,2043

(fonte: elaborado pelo autor)

Desta maneira, a partir deste ponto foi utilizada a malha com elementos de 12,5 cm de lado na análise de elementos finitos. As respostas obtidas com esse modelo são consideradas suficientemente refinadas para serem comparadas com os resultados obtidos na análise dos outros métodos estudados.

6.2 AJUSTE ANALOGIA DE GRELHAS

Como foi citado acima, o ajuste do modelo para analogia de grelhas é feito através da definição da geometria e o espaçamento das barras que constituem o modelo e da calibração entre o momento de inércia à flexão e à torção. Anteriormente foram apresentados alguns métodos para a definição desses parâmetros em função da geometria da grelha.

Foram testadas grelhas constituídas por vigas com a seguinte seção transversal:

- a) 50 x 10 cm;
- b) 25 x 10 cm;
- c) 12,5 x 10 cm.

A definição do momento de inércia à flexão de cada viga foi dado pela seguinte equação:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{equação 34})$$

Onde:

I = momento à flexão da viga;

b = largura de influência da viga;

h = espessura da laje.

Através da equação 34 se obteve os valores apresentados no quadro 2.

Quadro 2 – Momento de inércia à flexão das vigas dos modelos de analogia de grelhas [m^4]

Equação utilizada	12,5 x 12,5 cm	25 x 25 cm	50 x 50 cm
Equação 34	1,04E-05	2,08E-05	4,16E-05

(fonte: elaborado pelo autor)

O momento de inércia à torção das vigas foi analisado pelas definições de diferentes bibliografias apresentadas no item 3.2.1:

- a) Hambly (1976), através da equação 25;
- b) Oliveira Neto (1998), através da equação 27.

O quadro 3 apresenta os valores obtidos para o momento de inércia à torção em função da seção transversal da viga da grelha e da equação utilizada.

Quadro 3 – Momento de inércia à torção das vigas dos modelos de analogia de grelhas [m^4]

Equação utilizada	12,5 x 12,5 cm	25 x 25 cm	50 x 50 cm
$J = \beta bh^3$ (Eq. 25)	2,14E-05	6,22E-05	1,45E-04
$J = 2I$ (Eq. 27)	2,08E-05	4,16E-05	8,32E-05

(fonte: elaborado pelo autor)

Com os momentos de inércia das barras das grelhas definidos, foram montados os modelos e aplicadas as cargas conforme a largura de influência sobre cada viga e estes apresentaram os resultados para o deslocamento máximo do quadro 4.

Quadro 4 – Deslocamento vertical máximo de modelo para calibração por analogia de grelhas

	Momento de inércia à torção	Deformação vertical w [cm]
Malha 50 x 50	1,45E-04	0,1605

	8,32E-05	0,2195
Malha 25 x 25	6,22E-05	0,1800
	4,16E-05	0,2118
Malha 12.5 x 12.5	2,14E-05	0,2216
	2,08E-05	0,2244

(fonte: elaborado pelo autor)

Os maiores momentos fletores do modelo foram apresentados pelas vigas centrais como era esperado. O quadro 5 apresenta os momentos resultantes das barras e o momento correspondente dividindo esse valor pela largura de influência de cada malha de grelha.

Quadro 5 – Momento máximo de modelo para calibração por analogia de grelhas

	Momento de inércia à torção	Momento fletor máximo na barra [kN.m]	Momento fletor correspondente na laje [kN.m/m]
Malha 50 x 50	1,45E-04	1,36	2,72
	8,32E-05	1,54	3,09
Malha 25 x 25	6,22E-05	0,71	2,84
	4,16E-05	0,77	3,07
Malha 12.5 x 12.5	2,14E-05	0,38	3,06
	2,08E-05	0,40	3,20

(fonte: elaborado pelo autor)

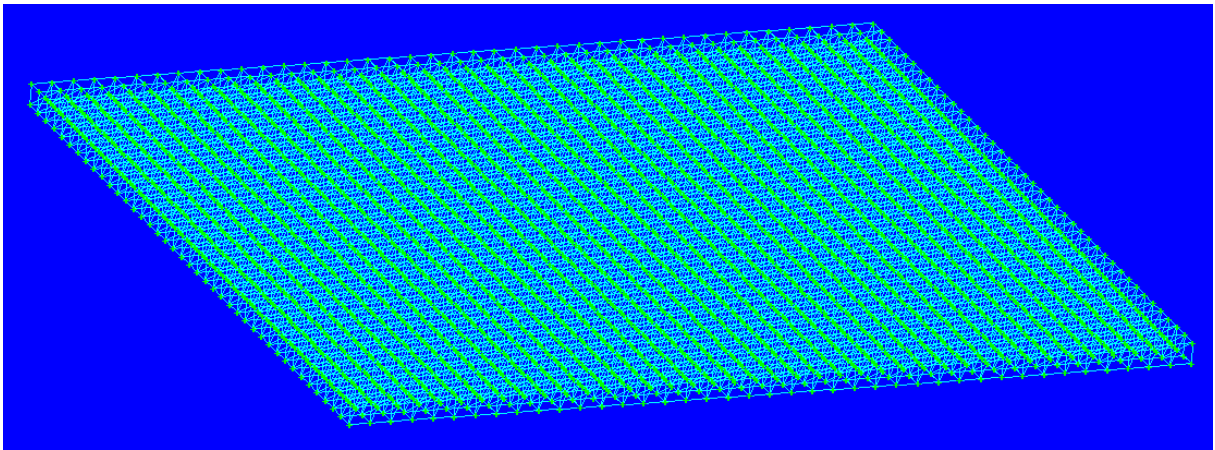
Comparando os resultados obtidos com analogia de grelhas e elementos finitos, considerou-se que os momentos de inércia à torção obtidos pela equação 27 apresentaram os resultados mais satisfatórios, e a malha mais adequada para utilizar no modelo mostrou ser a da grelha de 12,5 x 12,5 cm, pois apresentou erros semelhantes na avaliação dos deslocamentos (0,2244 x 0,2043) e dos momentos (3,20 x 3,45).

A partir desse ponto, foi utilizada a grelha e os momentos de inércia definidos neste capítulo na modelagem dos problemas apresentados a seguir. A fim de obter resultados para comparação com os outros métodos.

6.3 AJUSTE TRELIÇA ESPACIAL

O modelo de treliça espacial foi montado através do módulo cúbico apresentado na figura 18, sendo que o lado do cubo é igual à espessura da laje, portanto o modelo possui 1600 módulos para analisar a laje quadrada de 4 metros de lado, conforme a figura 26 . Com as propriedades do material já definidas, e as barras submetidas apenas a esforços axiais, a calibração consiste apenas em definir a área de influência das barras prismáticas (A_p) e diagonais (A_d) que constituem o modelo. Lembrando que A_p e A_d estão relacionadas conforme a equação 36.

Figura 26 – Modelo de treliça espacial de laje quadrada com 4 metros de lado



(fonte: elaborada pelo autor)

O carregamento foi distribuído como cargas pontuais aplicadas nos nós dos banzos superiores, assim, todas as barras tiveram como resultado apenas esforços axiais. Os resultados obtidos para deslocamentos verticais máximos (w) nos nós centrais dos banzos inferiores, conforme a área das barras, está no quadro 6

Quadro 6 – Deslocamento vertical máximo de modelo para calibração por analogia de treliça

A_p (cm ²)	A_d (cm ²)	$W_{máx}$ (cm)
3,00	5,85	0,8580
10,00	19,50	0,2574

12,00	23,40	0,2145
12,50	24,37	0,2059
12,60	24,57	0,2043

(fonte: elaborado pelo autor)

Comparando com os resultados dos elementos finitos, observa-se que no modelo com A_p igual a $12,60 \text{ cm}^2$ e A_d igual a $24,57 \text{ cm}^2$ o resultado de w é muito próximo. Assim, a partir dessa esta etapa as análises feitas por treliça espacial foram com as propriedades e geometria definidas acima.

7. RESULTADOS OBTIDOS PARA AS CONFIGURAÇÕES PROPOSTAS

Foram escolhidos cinco geometrias de lajes com diferentes vinculações, com a finalidade de analisá-las pelos métodos propostos. As geometrias são 3 x 3 metros, 3 x 4,5 metros, 3 x 6 metros, 4 x 4 metros e 4 x 6 metros. A configuração 4 x 8 metros não foi simulada pois exigia, para treliças espaciais, mais barras e nós que o permitido pelo software utilizado. Os modelos de cada método foram calibrados no capítulo anterior, portanto, com as propriedades e espaçamentos definidos, baseado nas recomendações da NBR 6120/1980, foram adotados os seguintes carregamentos para essa análise. Lembrando que todas as lajes têm 10 cm de espessura.

- a) Peso próprio de 2,5 kN/m²;
- b) Sobrecarga de 3,5 kN/m².

Os resultados da solução de todos os problemas propostos, assim como na calibração, foram obtidos pelo software STRAP 2011 e os dados relevantes para a comparação entre os métodos são apresentados a seguir. As vinculações avaliadas para cada geometria de laje foram as seguintes:

- a) Configuração 1 - todos os bordos apoiados;
- b) Configuração 2 - todos os bordos engastados;
- c) Configuração 3 - um bordo menor engastado com os demais apoiados;
- d) Configuração 4 - um bordo maior engastado com os demais apoiados;
- e) Configuração 5 - dois bordos adjacentes engastados com os demais apoiados;
- f) Configuração 6 - dois bordos opostos menores engastados com os demais apoiados;
- g) Configuração 7 - dois bordos opostos maiores engastados com os demais apoiados;
- h) Configuração 8 - três bordos adjacentes engastados (dois bordos menores e um maior) e restante apoiado;
- i) Configuração 9 - três bordos adjacentes engastados (dois bordos maiores e um menor) e restante apoiado;
- j) Configuração 10 - dois bordos adjacentes apoiados e o restante livre;

- k) Configuração 11 - dois bordos adjacentes engastados e o restante livre;
- l) Configuração 12 - três bordos adjacentes apoiados (dois bordos menores e um maior) e o restante livre;
- m) Configuração 13 - três bordos adjacentes engastados (dois bordos menores e um maior) e o restante livre.

7.1 LAJE QUADRADA 3 X 3 METROS

A primeira laje analisada foi quadrada com a espessura da laje de 10 cm e os outros lados de 3,0 metros. A área superficial da estrutura foi definida com apenas 9,00 m² para se analisar inicialmente o comportamento dos métodos para pequenos vãos.

7.1.1 Laje Quadrada 3 x 3 metros Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos para a análise da laje quadrada com 3 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 7.

Quadro 7 – Resultados da análise por elementos finitos de laje quadrada 3 x 3 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,01	2,59	0,0769
Configuração 2	-2,76	1,24	0,0239
Configuração 3 e 4	-4,52	2,24	0,0540
Configuração 5	-3,74	1,78	0,0415
Configuração 6 e 7	-3,76	1,80	0,3630
Configuração 8 e 9	-3,30	1,54	0,0303
Configuração 10	-0,31	6,29	3,3846
Configuração 11	-16,10	1,90	0,8258
Configuração 12	-0,10	5,99	0,2434
Configuração 13	-5,01	2,33	0,0558

(fonte: elaborada pelo autor)

7.1.2 Laje Quadrada 3 x 3 metros Soluções por Analogia de Grelhas

Os resultados obtidos pelo método de analogia de grelhas para a análise da laje quadrada com 3 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 8.

Quadro 8 – Resultados da análise por analogia de grelhas de laje quadrada 3 x 3 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,88	2,22	0,0933
Configuração 2	-2,80	1,02	0,0283
Configuração 3 e 4	-4,72	2,02	0,0647
Configuração 5	-3,84	1,52	0,0495
Configuração 6 e 7	-3,92	1,65	0,0430
Configuração 8 e 9	-3,36	1,34	0,0359
Configuração 10	-0,60	8,50	3,2121
Configuração 11	-16,16	1,52	0,8154
Configuração 12	-0,16	5,67	0,2287
Configuração 13	-4,32	2,13	0,0520

(fonte: elaborado pelo autor)

7.1.3 Laje Quadrada 3 x 3 metros Soluções por Treliça Espacial

Os resultados obtidos pelo método de treliça espacial para a análise da laje quadrada com 3 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 9.

Quadro 9 – Resultados da análise por treliça espacial de laje quadrada 3 x 3 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,06	2,54	0,0868
Configuração 2	-2,91	1,18	0,0414
Configuração 3 e 4	-4,66	2,24	0,0730
Configuração 5	-3,28	1,92	0,0625
Configuração 6 e 7	-4,07	1,67	0,0575
Configuração 8 e 9	-3,55	1,57	0,0502
Configuração 10	-0,44	5,09	4,0920
Configuração 11	-16,78	1,42	1,6646
Configuração 12	-0,09	6,40	0,2080
Configuração 13	-4,02	2,39	0,0792

(fonte: elaborado pelo autor)

7.2 LAJE RETANGULAR 3 X 4,5 METROS

A segunda laje analisada foi retangular com espessura de 10 cm, e os lados de 3 x 4,5 metros. A laje retangular é considerada interessante para análise porque deve apresentar momentos diferentes nos dois eixos da superfície da estrutura.

7.2.1 Laje Retangular 3 x 4,5 metros Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos para a análise da laje retangular com 3 x 4,5 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 10.

Quadro 10 – Resultados da análise por elementos finitos de laje retangular 3 x 4,5 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,01	4,38	0,1463
Configuração 2	-4,08	1,99	0,0416
Configuração 3	-6,05	3,80	0,1240
Configuração 4	-6,00	3,21	0,0831
Configuração 5	-5,62	2,95	0,0756
Configuração 6	-5,65	3,16	0,1009
Configuração 7	-4,44	2,20	0,0469
Configuração 8	-5,11	2,64	0,0665
Configuração 9	-4,30	2,11	0,0447
Configuração 10	-0,40	10,10	7,6154
Configuração 11	-22,30	3,10	1,5561
Configuração 12	-0,12	10,00	0,9284
Configuração 13	-10,70	4,40	0,2492

(fonte: elaborado pelo autor)

7.2.2 Laje Retangular 3 x 4,5 metros Soluções por Analogia de Grelhas

Os resultados obtidos pelo método de analogia de grelha para a análise da laje retangular com 3 x 4,5 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 11.

Quadro 11 – Resultados da análise por analogia de grelhas de laje retangular 3 x 4,5 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,15	4,32	0,1749
Configuração 2	-4,16	1,92	0,0483
Configuração 3	-6,24	3,60	0,1481
Configuração 4	-6,24	3,20	0,0972
Configuração 5	-5,76	2,88	0,0887
Configuração 6	-5,84	2,88	0,1198
Configuração 7	-4,56	2,16	0,0542
Configuração 8	-5,28	2,48	0,0780
Configuração 9	-4,40	2,08	0,0518
Configuração 10	-2,14	14,00	7,2533
Configuração 11	-22,32	4,16	1,5619
Configuração 12	-0,32	9,84	0,8946
Configuração 13	-9,76	4,24	0,2398

(fonte: elaborado pelo autor)

7.2.3 Laje Retangular 3 x 4,5 metros Soluções por Treliça Espacial

Os resultados obtidos pelo método de treliça espacial para a análise da laje retangular com 3 x 4,5 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 12.

Quadro 12 – Resultados da análise por treliça espacial de laje retangular 3 x 4,5 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,09	5,05	0,1569
Configuração 2	-4,33	2,09	0,0690
Configuração 3	-5,70	4,76	0,1487
Configuração 4	-6,43	3,77	0,1145
Configuração 5	-6,10	3,59	0,1096
Configuração 6	-5,60	4,43	0,1384
Configuração 7	-4,76	2,25	0,0746
Configuração 8	-5,66	3,41	0,0832
Configuração 9	-4,60	2,18	0,0724
Configuração 10	-0,98	10,43	9,7892
Configuração 11	-25,02	2,76	1,9555
Configuração 12	-0,22	11,31	0,8951
Configuração 13	-11,35	5,16	0,3888

(fonte: elaborada pelo autor)

7.3 LAJE RETANGULAR 3 X 6 METROS

A terceira laje analisada foi novamente retangular, mas com dimensões diferentes. Assim como os exemplos anteriores, a espessura é de 10 cm, e os lados são de 3 e 6 metros. Os resultados dessa geometria são interessantes, pois configura uma laje que seria classificada como armada em uma só direção.

7.3.1 Laje Retangular 3 x 6 metros Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos para a análise da laje retangular com 3 x 6 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 13.

Quadro 13 – Resultados da análise por elementos finitos de laje retangular 3 x 6 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,01	5,50	0,1919
Configuração 2	-4,47	2,23	0,0480
Configuração 3	-6,55	5,13	0,1772
Configuração 4	-6,55	3,61	0,0958
Configuração 5	-6,40	3,50	0,0925
Configuração 6	-6,42	4,69	0,1600
Configuração 7	-4,55	2,28	0,0495
Configuração 8	-6,19	3,35	0,0880
Configuração 9	-4,53	2,26	0,0489
Configuração 10	-0,40	12,90	13,5386
Configuração 11	-25,30	3,20	1,9905
Configuração 12	-0,13	12,90	2,1508
Configuração 13	-16,00	5,60	0,5965

(fonte: elaborado pelo autor)

7.3.2 Laje Retangular 3 x 6 metros Soluções por Analogia de Grelhas

Os resultados obtidos pelo método de analogia de grelhas para a análise da laje retangular com 3 x 6 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 14.

Quadro 14 – Resultados da análise por analogia de grelhas de laje retangular 3 x 6 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,21	5,52	0,2232
Configuração 2	-4,56	2,24	0,0542
Configuração 3	-6,64	5,12	0,2067
Configuração 4	-6,64	3,60	0,1089
Configuração 5	-6,56	3,52	0,1055
Configuração 6	-6,56	4,64	0,1868
Configuração 7	-4,56	2,32	0,0554
Configuração 8	-6,32	3,36	0,1007
Configuração 9	-4,56	2,24	0,0550
Configuração 10	-1,85	19,60	12,8455
Configuração 11	-24,64	4,72	2,0367
Configuração 12	-0,65	12,96	2,0733
Configuração 13	-15,68	5,52	0,5806

(fonte: elaborado pelo autor)

7.3.3 Laje Retangular 3 x 6 metros Soluções por Treliça Espacial

Os resultados obtidos pelo método de treliça espacial para a análise da laje retangular com 3 x 6 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 15.

Quadro 15 – Resultados da análise por treliça espacial de laje retangular 3 x 6 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,14	6,33	0,1904
Configuração 2	-4,63	2,32	0,0755
Configuração 3	-5,81	6,25	0,1883
Configuração 4	-6,11	4,34	0,1289
Configuração 5	-6,01	4,31	0,1280
Configuração 6	-5,82	6,15	0,1854
Configuração 7	-4,72	2,33	0,0760
Configuração 8	-6,78	4,24	0,1064
Configuração 9	-4,69	2,33	0,0760
Configuração 10	-1,53	16,00	15,5849
Configuração 11	-29,81	3,47	3,5154
Configuração 12	-0,40	13,64	2,1891
Configuração 13	-17,53	7,12	0,9895

(fonte: elaborado pelo autor)

7.4 LAJE QUADRADA 4 X 4 METROS

A quarta laje analisada é quadrada e assim como os exemplos anteriores, a espessura é de 10 cm, a largura de 4 metros. Os resultados dessa geometria são interessantes para comparação com outras lajes quadradas.

7.4.1 Laje Quadrada 4 x 4 metros Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos para a análise da laje quadrada com 4 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 16.

Quadro 16 – Resultados da análise por elementos finitos de laje quadrada 4 x 4 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,01	4,60	0,2433
Configuração 2	-4,62	2,20	0,0757
Configuração 3 e 4	-8,05	3,98	0,1710
Configuração 5	-6,66	3,16	0,1319
Configuração 6 e 7	-6,70	3,19	0,1148
Configuração 8 e 9	-5,88	2,73	0,0960
Configuração 10	-0,40	11,20	10,6970
Configuração 11	-28,50	3,30	2,6108
Configuração 12	-0,14	10,70	0,7696
Configuração 13	-8,90	4,15	0,1765

(fonte: elaborado pelo autor)

7.4.2 Laje Quadrada 4 x 4 metros Soluções por Analogia de Grelhas

Os resultados obtidos pelo método de analogia de grelhas para a análise da laje quadrada com 4 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 17.

Quadro 17 – Resultados da análise por analogia de grelhas de laje quadrada 4 x 4 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,20	3,92	0,2955
Configuração 2	-5,04	1,84	0,0887
Configuração 3 e 4	-8,40	3,60	0,2046
Configuração 5	-6,88	2,72	0,1567
Configuração 6 e 7	-6,96	2,96	0,1352
Configuração 8 e 9	-6,08	2,40	0,1129
Configuração 10	-1,09	15,28	10,2128
Configuração 11	-29,76	4,64	2,6036
Configuração 12	-0,28	10,24	0,7318
Configuração 13	-7,76	3,84	0,1668

(fonte: elaborado pelo autor)

7.4.3 Laje Quadrada 4 x 4 metros Soluções por Treliça Espacial

Os resultados obtidos pelo método de treliça espacial para a análise da laje quadrada com 4 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 18.

Quadro 18 – Resultados da análise por treliça espacial de laje quadrada 4 x 4 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,10	4,47	0,2724
Configuração 2	-5,20	2,09	0,1301
Configuração 3 e 4	-8,28	3,94	0,2291
Configuração 5	-7,07	3,38	0,1960
Configuração 6 e 7	-7,26	2,93	0,1808
Configuração 8 e 9	-6,34	2,76	0,1578
Configuração 10	-0,88	8,65	12,5693
Configuração 11	-34,39	2,73	5,1668
Configuração 12	-0,17	11,42	0,6536
Configuração 13	-8,82	4,27	0,2478

(fonte: elaborado pelo autor)

7.5 LAJE RETANGULAR 4 X 6 METROS

A quinta laje analisada foi novamente retangular, mas com dimensões diferentes. A espessura é de 10 cm, e os lados são de 4 e 6 metros. Os resultados dessa geometria são interessantes para comparação com outras lajes retangulares

7.5.1 Laje Retangular 4 x 6 metros Soluções pelo Método dos Elementos Finitos

Os resultados obtidos pelo método de elementos finitos para a análise da laje retangular com 4 x 6 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 19.

Quadro 19 – Resultados da análise por elementos finitos de laje retangular 4 x 6 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,01	7,79	0,4626
Configuração 2	-7,26	3,53	0,1315
Configuração 3	-10,80	6,75	0,3919
Configuração 4	-10,70	5,70	0,2628
Configuração 5	-9,99	5,25	0,2389
Configuração 6	-10,10	5,61	0,3189
Configuração 7	-7,89	3,91	0,1482
Configuração 8	-9,09	4,69	0,2104
Configuração 9	-7,64	3,75	0,1412
Configuração 10	-0,50	18,10	24,0686
Configuração 11	-39,70	5,60	4,9190
Configuração 12	-0,17	17,90	2,9347
Configuração 13	-18,90	7,80	0,7879

(fonte: elaborado pelo autor)

7.5.2 Laje Retangular 4 x 6 metros Soluções por Analogia de Grelhas

Os resultados obtidos pelo método de analogia de grelhas para a análise da laje retangular com 4 x 6 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 20.

Quadro 20 – Resultados da análise por analogia de grelhas de laje retangular 4 x 6 metros

Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,27	7,68	0,5541
Configuração 2	-7,44	3,44	0,1518
Configuração 3	-11,04	6,40	0,4683
Configuração 4	-11,04	5,68	0,3068
Configuração 5	-10,32	5,12	0,2796
Configuração 6	-10,40	5,12	0,3785
Configuração 7	-8,08	3,92	0,1702
Configuração 8	-9,36	4,48	0,2460
Configuração 9	-7,84	3,68	0,1626
Configuração 10	-2,05	25,04	23,0479
Configuração 11	-40,72	7,44	4,9772
Configuração 12	-0,57	17,68	2,8565
Configuração 13	-17,92	7,60	0,7667

(fonte: elaborado pelo autor)

7.5.3 Laje Retangular 4 x 6 metros Soluções por Treliça Espacial

Os resultados obtidos pelo método de treliça espacial para a análise da laje retangular com 4 x 6 metros de lado para todas as vinculações propostas estão apresentadas no quadro 21.

Quadro 21 – Resultados da análise por treliça espacial de laje retangular 4 x 6 metros











Vinculações	Momento Bordo [kN.m/m]	Momento Central [kN.m/m]	Deflexão [cm]
Configuração 1	-0,08	8,91	0,4935
Configuração 2	-7,74	3,73	0,2171
Configuração 3	-10,16	8,43	0,4682
Configuração 4	-10,21	6,67	0,3597
Configuração 5	-10,86	6,39	0,3445
Configuração 6	-9,98	7,84	0,4361
Configuração 7	-8,50	4,01	0,2345
Configuração 8	-8,97	6,03	0,3245
Configuração 9	-8,20	3,90	0,2276
Configuração 10	-1,80	18,19	27,2214
Configuração 11	-45,47	5,02	6,2013
Configuração 12	-0,41	19,99	2,8070
Configuração 13	-20,19	9,22	1,2242

(fonte: elaborado pelo autor)

8. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

A comparação dos resultados obtidos para cada método para as lajes estudadas é apresentada nesse capítulo. Os quadros 22 a 26 apresentam a comparação entre os resultados dos três métodos para momentos máximos obtidos nas bordas das lajes. Analogicamente, os quadros 27 a 31 apresentam a comparação entre os momentos máximos obtidos no centro das lajes e os quadros 32 a 36 apresentam a comparação entre as deflexões máximas. A análise dos resultados foi feita observando dois aspectos, a precisão (erro) dos métodos de analogia de grelhas e treliça espacial em relação aos elementos finitos, e o fator de segurança apresentado pelo método aproximado (positivo caso o resultado seja maior que o apresentado por elementos finitos, e negativo caso seja menor).











Quadro 22 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje quadrada 3 x 3 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo nas bordas das lajes [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	-0,01	-0,88	-0,06	8700	500
	Configuração 2	-2,76	-2,80	-2,91	1,44	5,43
	Configuração 3 e 4	-4,52	-4,72	-4,66	4,42	3,10
	Configuração 5	-3,74	-3,84	-3,28	2,67	12,29
	Configuração 6 e 7	-3,76	-3,92	-4,07	4,25	8,24
	Configuração 8 e 9	-3,30	-3,36	-3,55	1,82	7,57
	Configuração 10	-0,31	-0,60	-0,44	93,55	41,93
	Configuração 11	-16,10	-16,16	-16,78	0,37	4,22
	Configuração 12	-0,10	-0,16	-0,09	60	10
	Configuração 13	-5,01	-4,32	-4,02	13,77	19,76

(fonte: elaborada pelo autor)

Na análise dos resultados de momento de bordas da laje 3 x 3, na maioria dos casos a diferença em relação ao método dos elementos finitos foi a favor da segurança e aproximações melhores que as apresentadas pelo método de analogia de grelhas.














Quadro 23 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje quadrada 4 x 4 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo nas bordas das lajes [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	-0,01	-0,20	-0,10	1900	900
	Configuração 2	-4,62	-5,04	-5,20	9,09	12,55
	Configuração 3 e 4	-8,05	-8,40	-8,28	4,35	2,86
	Configuração 5	-6,66	-6,88	-7,07	3,30	6,16
	Configuração 6 e 7	-6,70	-6,96	-7,26	3,88	8,36
	Configuração 8 e 9	-5,88	-6,08	-6,34	3,40	7,82
	Configuração 10	-0,40	-1,09	-0,88	173	120
	Configuração 11	-28,50	-29,76	-34,39	4,42	20,67
	Configuração 12	-0,14	-0,28	-0,17	100	21,43
	Configuração 13	-8,90	-7,76	-8,82	12,81	0,90

(fonte: elaborada pelo autor)

A laje 4 x 4 apresentou resultados para os momentos de bordas muito superiores para a treliça espacial em relação aos apresentados por elementos finitos, na maioria com fator de segurança positivo, com erros maiores que os apresentados pela analogia de grelhas.














Quadro 24 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje retangular 3 x 4,5 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo nas bordas das lajes [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	-0,01	-0,15	-0,09	1400	800
	Configuração 2	-4,08	-4,16	-4,33	1,96	6,13
	Configuração 3	-6,05	-6,24	-5,70	3,14	5,79
	Configuração 4	-6,00	-6,24	-6,43	4,00	7,17
	Configuração 5	-5,62	-5,76	-6,10	2,49	8,54
	Configuração 6	-5,65	-5,84	-5,60	3,36	0,88
	Configuração 7	-4,44	-4,56	-4,76	2,70	7,21
	Configuração 8	-5,11	-5,28	-5,66	3,33	10,76
	Configuração 9	-4,30	-4,40	-4,60	2,33	6,98
	Configuração 10	-0,40	-2,14	-0,98	435	145
	Configuração 11	-22,30	-22,32	-25,02	0,09	12,20
	Configuração 12	-0,12	-0,32	-0,22	167	83
	Configuração 13	-10,70	-9,76	-11,35	8,79	6,07

(fonte: elaborada pelo autor)

Na laje 3 x 4,5 novamente na análise de momentos de borda, as diferenças foram a favor da segurança para a treliça espacial, se comparado aos elementos finitos, a não ser nos casos das configurações 3, 10 e 12. Porém, os erros relativos foram maiores que os apresentados pelo método de analogia de grelhas.














Quadro 25 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje retangular 3 x 6 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo nas bordas das lajes [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	-0,01	-0,21	-0,14	2000	1300
	Configuração 2	-4,47	-4,56	-4,63	2,01	3,58
	Configuração 3	-6,55	-6,64	-5,81	1,37	11,30
	Configuração 4	-6,55	-6,64	-5,81	1,37	11,30
	Configuração 5	-6,40	-6,56	-6,01	2,50	6,09
	Configuração 6	-6,42	-6,56	-5,82	2,18	9,35
	Configuração 7	-4,55	-4,56	-4,72	0,22	3,74
	Configuração 8	-6,19	-6,32	-6,78	2,10	9,53
	Configuração 9	-4,53	-4,56	-4,69	0,66	3,53
	Configuração 10	-0,40	-1,85	-1,53	363	283
	Configuração 11	-25,30	-24,64	-29,81	2,61	17,83
	Configuração 12	-0,13	-0,65	-0,40	400	17,83
	Configuração 13	-16,00	-15,68	-17,53	2,00	9,56

(fonte: elaborada pelo autor)

Diferentemente das lajes anteriores, os momentos apresentados pela laje de 3 x 6 em muitos casos, os apresentados pela treliça espacial foram inferiores ao dos elementos finitos (contra o fator de segurança), como é o caso das configurações 3, 4, 5, 6, 10 e 12. Porém, essas diferenças foram pequenas.











Quadro 26 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos nas bordas da laje retangular 4 x 6 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo nas bordas das lajes [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	-0,01	-0,27	-0,08	2600	700
	Configuração 2	-7,26	-7,44	-7,74	2,48	6,61
	Configuração 3	-10,80	-11,04	-10,16	2,22	5,93
	Configuração 4	-10,70	-11,04	-10,21	3,18	4,58
	Configuração 5	-9,99	-10,32	-10,86	3,30	8,71
	Configuração 6	-10,10	-10,40	-9,98	2,97	1,19
	Configuração 7	-7,89	-8,08	-8,50	2,41	7,73
	Configuração 8	-9,09	-9,36	-8,97	2,97	1,32
	Configuração 9	-7,64	-7,84	-8,20	2,62	7,33
	Configuração 10	-0,50	-2,05	1,80	310	460
	Configuração 11	-39,70	-40,72	-45,47	2,57	14,53
	Configuração 12	-0,17	-0,57	-0,41	235	14,53
	Configuração 13	-18,90	-17,92	-20,19	5,19	6,83

(fonte: elaborada pelo autor)

Na laje 4 x 6, apesar de ter 3 configurações com fator de segurança menor que 1 para a treliça espacial em relação aos elementos finitos (configuração 3, 10 e 12) para a análise de momentos nas bordas, os resultados foram convergentes. Porém com erros maiores que os apresentados por analogia de grelhas.











Quadro 27 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje quadrada 3 x 3 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo no centro da laje [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	2,59	2,22	2,54	14,29	1,93
	Configuração 2	1,24	1,02	1,18	17,74	4,84
	Configuração 3 e 4	2,24	2,02	2,24	9,82	0,00
	Configuração 5	1,78	1,52	1,92	14,61	7,87
	Configuração 6 e 7	1,80	1,65	1,67	8,33	7,22
	Configuração 8 e 9	1,54	1,34	1,57	12,99	1,95
	Configuração 10	6,29	8,50	5,09	35,14	19,08
	Configuração 11	1,90	1,52	1,42	20,00	25,26
	Configuração 12	5,99	5,67	6,40	5,34	6,84
	Configuração 13	2,33	2,13	2,39	8,58	2,58

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação dos momentos de centro do vão na laje 3 x 3, os resultados da treliça espacial foram mais convergentes que o outro método para elementos finitos, porém em alguns casos com fatores de segurança inferiores a 1 (configurações 1, 2, 6, 7, 10 e 11).














Quadro 28 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje quadrada 4 x 4 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo no centro da laje [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	4,60	3,92	4,47	14,78	2,83
	Configuração 2	2,20	1,84	2,09	16,36	5
	Configuração 3 e 4	3,98	3,60	3,94	9,55	1,01
	Configuração 5	3,16	2,72	3,38	13,92	6,96
	Configuração 6 e 7	3,19	2,96	2,93	7,21	8,15
	Configuração 8 e 9	2,73	2,40	2,76	12,09	1,10
	Configuração 10	11,20	15,28	8,65	36,43	22,77
	Configuração 11	3,30	4,64	2,73	40,61	17,27
	Configuração 12	10,70	10,24	11,42	4,30	6,73
	Configuração 13	4,15	3,84	4,27	7,47	2,89

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação dos momentos de centro do vão na laje 4 x 4, na maioria dos casos os resultados da treliça espacial apresentaram fator de segurança positivo em relação aos elementos finitos, menos nas configurações 6, 7 e 10 em que as diferenças foram consideráveis. Nestes casos a analogia de grelhas apresentou melhores resultados.














Quadro 29 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje retangular 3 x 4,5 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo no centro da laje [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	4,38	4,32	5,05	1,37	15,30
	Configuração 2	1,99	1,92	2,09	3,52	5,03
	Configuração 3	3,80	3,60	4,76	5,26	25,26
	Configuração 4	3,21	3,20	3,77	0,31	17,45
	Configuração 5	2,95	2,88	3,59	2,37	21,69
	Configuração 6	3,16	2,88	4,43	8,86	40,19
	Configuração 7	2,20	2,16	2,25	1,82	2,27
	Configuração 8	2,64	2,48	3,41	6,06	29,17
	Configuração 9	2,11	2,08	2,18	1,42	3,32
	Configuração 10	10,10	14,00	10,43	38,61	3,27
	Configuração 11	3,10	4,16	2,76	34,19	10,97
	Configuração 12	10,00	9,84	11,31	1,60	13,10
	Configuração 13	4,40	4,24	5,16	3,64	17,27

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação dos momentos de centro do vão na laje 3 x 4,5, os resultados da treliça espacial apresentaram fator de segurança positivo em relação aos elementos finitos, porém em alguns casos muito superior ao adequado.














Quadro 30 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje retangular 3 x 6 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo no centro da laje [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	5,50	5,52	6,33	0,36	15,09
	Configuração 2	2,23	2,24	2,32	0,45	4,04
	Configuração 3	5,13	5,12	6,25	0,19	21,83
	Configuração 4	3,61	3,60	4,34	0,28	20,22
	Configuração 5	3,50	3,52	4,31	0,57	23,14
	Configuração 6	4,69	4,64	6,15	1,07	31,13
	Configuração 7	2,28	2,32	2,33	1,75	2,19
	Configuração 8	3,35	3,36	4,24	0,30	26,57
	Configuração 9	2,26	2,24	2,33	0,88	3,10
	Configuração 10	12,90	19,60	16,00	51,94	24,03
	Configuração 11	3,20	4,72	3,47	47,50	8,44
	Configuração 12	12,90	12,96	13,64	0,47	5,74
	Configuração 13	5,60	5,52	7,12	1,43	27,14

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação dos momentos de centro do vão na laje 3 x 6, em todas as configurações os resultados da treliça espacial apresentaram fator de segurança positivo em relação aos elementos finitos com uma boa convergência entre os três métodos.











Quadro 31 – Comparação dos resultados de momentos fletores obtidos no centro da laje retangular 4 x 6 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Momento fletor máximo no centro da laje [kN.m/m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	7,79	7,68	8,91	1,41	14,38
	Configuração 2	3,53	3,44	3,73	2,55	5,67
	Configuração 3	6,75	6,40	8,43	5,19	24,89
	Configuração 4	5,70	5,68	6,67	0,35	17,02
	Configuração 5	5,25	5,12	6,39	2,48	21,71
	Configuração 6	5,61	5,12	7,84	8,73	39,75
	Configuração 7	3,91	3,92	4,01	0,26	2,56
	Configuração 8	4,69	4,48	6,03	4,48	28,57
	Configuração 9	3,75	3,68	3,90	1,87	4,00
	Configuração 10	18,10	25,04	18,19	38,34	0,50
	Configuração 11	5,60	7,44	5,02	32,86	10,36
	Configuração 12	17,90	17,68	19,99	1,23	11,68
	Configuração 13	7,80	7,60	9,22	2,56	18,21

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação dos momentos de centro do vão na laje 4 x 6, os resultados da treliça espacial apresentaram fator de segurança positivo em relação aos elementos finitos em todas as configurações, e os resultados convergentes forma melhores que os apresentados pela analogia de grelhas.











Quadro 32 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje quadrada 3 x 3 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Deformação máxima da laje [m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	0,0769	0,0933	0,0868	21,33	12,87
	Configuração 2	0,0239	0,0283	0,0414	18,41	73,22
	Configuração 3 e 4	0,0540	0,0647	0,0730	19,81	35,19
	Configuração 5	0,0415	0,0495	0,0625	19,28	50,60
	Configuração 6 e 7	0,3630	0,0430	0,0575	88,15	84,16
	Configuração 8 e 9	0,0303	0,0359	0,0502	18,48	65,68
	Configuração 10	3,3846	3,2121	4,0920	5,10	20,90
	Configuração 11	0,8258	0,8154	1,6646	1,26	102
	Configuração 12	0,2434	0,2287	0,2080	6,04	14,54
	Configuração 13	0,0558	0,0520	0,0792	6,81	41,94

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação entre a deflexão apresentada pela laje 3 x 3, a analogia de grelhas foi mais convergente para os elementos finitos, porém a treliça espacial apresentou deflexões próximas e até melhores em alguns casos. Porém na configuração 6 nenhum dos métodos convergiu.














Quadro 33 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje quadrada 4 x 4 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Deformação máxima da laje [m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	0,2433	0,2955	0,2724	21,45	11,96
	Configuração 2	0,0757	0,0887	0,1301	17,17	71,86
	Configuração 3 e 4	0,1710	0,2046	0,2291	19,65	33,98
	Configuração 5	0,1319	0,1567	0,1960	18,80	48,60
	Configuração 6 e 7	0,1148	0,1352	0,1808	17,77	57,49
	Configuração 8 e 9	0,0960	0,1129	0,1578	17,60	64,38
	Configuração 10	10,6970	10,2128	12,5693	4,53	17,50
	Configuração 11	2,6108	2,6036	5,1668	0,28	97,90
	Configuração 12	0,7696	0,7318	0,6536	4,91	15,07
	Configuração 13	0,1765	0,1668	0,2478	5,50	40,40

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação entre a deflexão apresentada pela laje 4 x 4, os resultados da treliça espacial não convergiram para os apresentados pelos outros métodos. As configurações que mais se aproximaram ainda foram as com bordas simplesmente apoiadas.














Quadro 34 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje retangular 3 x 4,5 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Deformação máxima da laje [m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	0,1463	0,1749	0,1569	19,55	7,25
	Configuração 2	0,0416	0,0483	0,0690	16,11	65,87
	Configuração 3	0,1240	0,1481	0,1487	19,44	19,92
	Configuração 4	0,0831	0,0972	0,1145	16,97	37,79
	Configuração 5	0,0756	0,0887	0,1096	17,33	44,97
	Configuração 6	0,1009	0,1198	0,1384	18,73	37,17
	Configuração 7	0,0469	0,0542	0,0746	15,57	59,06
	Configuração 8	0,0665	0,0780	0,0832	17,29	25
	Configuração 9	0,0447	0,0518	0,0724	15,88	61,97
	Configuração 10	7,6154	7,2533	9,7892	4,75	28,54
	Configuração 11	1,5561	1,5619	1,9555	0,37	25,67
	Configuração 12	0,9284	0,8946	0,8951	3,64	3,59
	Configuração 13	0,2492	0,2398	0,3888	3,77	56,02

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação entre a deflexão apresentada pela laje 3 x 4,5, os dois métodos comparados aos elementos finitos foram muito semelhantes, porém em alguns casos a analogia de grelhas foi mais convergente que a treliça espacial.














Quadro 35 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje retangular 3 x 6 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Deformação máxima da laje [m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	0,1919	0,2232	0,1904	16,31	0,78
	Configuração 2	0,0480	0,0542	0,0755	12,92	57,29
	Configuração 3	0,1772	0,2067	0,1883	16,65	6,26
	Configuração 4	0,0958	0,1089	0,1289	13,67	34,55
	Configuração 5	0,0925	0,1055	0,1280	14,05	38,38
	Configuração 6	0,1600	0,1868	0,1854	16,75	15,88
	Configuração 7	0,0495	0,0554	0,0760	11,92	53,54
	Configuração 8	0,0880	0,1007	0,1064	14,43	20,91
	Configuração 9	0,0489	0,0550	0,0760	12,47	55,42
	Configuração 10	13,5386	12,8455	15,5849	5,12	15,11
	Configuração 11	1,9905	2,0367	3,5154	2,32	76,61
	Configuração 12	2,1508	2,0733	2,1891	3,60	1,78
	Configuração 13	0,5965	0,5806	0,9895	2,67	65,88

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação entre a deflexão apresentada pela laje 3 x 6, novamente a analogia de grelhas foi mais convergente para os elementos finitos, e a treliça espacial apresentou deflexões em alguns casos com erro bem relevante.

Quadro 36 – Comparação dos resultados de deflexão máxima da laje retangular 4 x 6 metros pelos três métodos

Detalhe da Vinculação	Vinculação	Deformação máxima da laje [m]			Erro relativo em relação ao resultado por elementos finitos [%]	
		Método dos elementos finitos	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial	Método de analogia de grelhas	Método de treliça espacial
	Configuração 1	0,4626	0,5541	0,4935	19,78	6,68
	Configuração 2	0,1315	0,1518	0,2171	15,44	65,10
	Configuração 3	0,3919	0,4683	0,4682	19,49	19,47
	Configuração 4	0,2628	0,3068	0,3597	16,74	36,87
	Configuração 5	0,2389	0,2796	0,3445	17,04	44,20
	Configuração 6	0,3189	0,3785	0,4361	18,69	36,75
	Configuração 7	0,1482	0,1702	0,2345	14,84	58,23
	Configuração 8	0,2104	0,2460	0,3245	16,92	54,23
	Configuração 9	0,1412	0,1626	0,2276	15,16	61,19
	Configuração 10	24,0686	23,0479	27,2214	4,24	13,10
	Configuração 11	4,9190	4,9772	6,2013	1,18	26,07
	Configuração 12	2,9347	2,8565	2,8070	2,66	4,35
	Configuração 13	0,7879	0,7667	1,2242	2,69	55,38

(fonte: elaborada pelo autor)

Na comparação entre a deflexão apresentada pela laje 4 x 6, a treliça espacial apresentou deflexões muito diferentes que as apresentados pelos outros métodos. A única configuração que apresentou alguma convergência foi a 12.

Os resultados apresentados pela treliça espacial tiveram uma convergência melhor nas lajes quadradas sem bordas livres, apresentando erros relativos menores que a analogia de grelhas em alguns casos. Nas lajes retangulares a convergência da treliça espacial não foi boa, principalmente em modelos com bordas livres, com algumas exceções que apresentaram erro inferior ao de analogia de grelhas.

9. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

As soluções apresentaram resultados diferentes para cada tipo de laje e configuração de vinculação conforme o método utilizado. Os resultados apresentados no capítulo 8 demonstram a diferença de cada análise.

9.1 CONCLUSÕES SOBRE LAJES QUADRADAS

Nos momentos nas bordas, o método de treliça espacial apresentou resultados coerentes próximos à zero nas bordas simplesmente apoiadas, e nas configurações com bordas engastadas e livres, os resultados apresentados pelo método de analogia de grelhas apresentou uma convergência ligeiramente melhor em relação aos elementos finitos. Porém, ainda assim as respostas da treliça foram muito boas.

Nos momentos no centro do vão, as configurações com bordas apoiadas e engastadas apresentaram resultados melhores pelo método de treliça espacial. Porém as configurações com bordas livres, os resultados da treliça não convergiram e a analogia de grelhas apresentou melhores resultados em relação aos elementos finitos.

A deflexão na treliça espacial apresentou bom resultado apenas nas configurações com bordos apoiados ou com apenas um bordo engastado. Em todas as outras configurações, as deflexões da treliça não convergiram para os outros métodos.

9.2 CONCLUSÕES SOBRE LAJES RETANGULARES

Nos momentos nas bordas, o método de treliça espacial apresentou resultados semelhantes aos da analogia de grelhas, sendo coerentes e próximos à zero nas bordas simplesmente apoiadas, e nas configurações com bordas engastadas e livres não apresentou uma convergência tão boa quanto os resultados apresentados pelo método de analogia de grelhas em relação aos elementos finitos.

Nos momentos no centro do vão, somente as configurações com as bordas maiores engastadas apresentaram resultados melhores pelo método de treliça espacial. Porém em todas as outras

configurações, os resultados da treliça foram piores que a analogia de grelhas em relação aos elementos finitos.

A deflexão na treliça espacial apresentou resultados piores que os da analogia de grelhas em relação aos elementos finitos.

9.3 CONCLUSÕES FINAIS

As respostas mais satisfatórias para os modelos de lajes quadradas com bordas simplesmente apoiadas, ou com apenas uma borda engastada, mostraram que a calibração feita através de uma laje quadrada e simplesmente apoiada foi mais adequada para a análise desse tipo de vinculação do que para modelos com a maioria das bordas engastadas, ou todas as bordas engastadas. Esse trabalho mostrou que, sendo feita a correta calibração do modelo, a treliça espacial pode ser utilizada para análise de lajes. Porém, essa calibração deve ser feita a partir de um modelo com as vinculações e geometria (relação entre os lados) semelhantes às da laje a ser analisada.

Do ponto de vista computacional, o processo de montagem dos modelos de treliça se torna simples porque basicamente é a definição da quantidade de módulos cúbicos (figura 18) necessários, as vinculações e carregamentos. É um procedimento semelhante ao de qualquer outro método. Porém, uma desvantagem é a grande quantidade de barras necessárias, isso é um limitador para lajes de áreas maiores, ficando restrita à modelos de aproximadamente 25 metros quadrados (para módulos cúbicos de 10 cm de lado) para o software utilizado neste trabalho. Portanto, o uso desse método se torna viável apenas para lajes de pequenas dimensões.

No uso para projeto de lajes de concreto armado, a quantificação de faixas de armadura é semelhante ao processo de analogia de grelhas, mas com a vantagem de obter faixas nas duas direções da laje. Por isso as armaduras para as lajes de concreto são de fácil obtenção.

REFERÊNCIAS

- ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2.ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120: cargas para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 1980.
- _____. **NBR 6118: projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro, 2007.
- AWRUCH, A. M.; MORSCH, I. B. **Teoria da Elasticidade Aplicada à Mecânica Estrutural**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- FUSCO, P. B. **Técnicas de Armar as Estruturas de Concreto**. 1.ed. (7. tiragem). São Paulo: Pini, 1995 (tiragem 2007).
- GROEHS, A. G. **Resistência dos Materiais e Vasos de Pressão**. São Leopoldo: Editora da Unisinos, 2002.
- HAMBLY, E. C. **Bridge deck behavior**. London, Chapman and Hall, 1976.
- JOHANSEN, K. W. **Linhas de Ruptura: teoria e prática**. Tradução de Jayme Mason. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1962.
- LANGENDONCK, T. V. **Teoria Elementar das Charneiras Plásticas**. São Paulo: ABCP, 1970. v. 1.
- OLIVEIRA NETO, L. **Uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de Engenharia Estrutural**. 1998. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998. Disponível em:
<http://web.set.eesc.usp.br/static/data/producao/1998DO_LuttgardesdeOliveiraNeto.pdf>. Acesso em: 25 maio 2013.
- RIOS, R. D. **Aplicações do Método dos Elementos Discretos em Estruturas de Concreto**. 2002. 187 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002. Disponível em:
<<http://www.bibliotecadigital.ufrgs.br/da.php?nrb=000319615&loc=2003&l=db4d03c49749747d>>. Acesso em: 15 set. 2013.
- SAE INFORMÁTICA. **Manual Strap Versão 11.5**. [São Paulo], [2011]. Disponível em:
<<http://www.ebah.com.br/content/ABAAEqlAAK/strap-manual-v11-5.htm>>. Acesso em: 12 ago. 2013.
- STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuição à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha**. 2003. 179 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003. Disponível em:

<<http://www.gap.ufsc.br/arquivos/dissertacoes/GAPDIS%2001%2011.pdf>>. Acesso em: 27 jun. 2013.