

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

EVERTON SPADER

**AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA EM SISTEMAS DE
CONTROLE EM REDE: *EVENT-TRIGGERED CONTROL***

Porto Alegre
2013

EVERTON SPADER

**AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA EM SISTEMAS DE
CONTROLE EM REDE: *EVENT-TRIGGERED CONTROL***

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para Graduação em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre

2013

EVERTON SPADER

**AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA EM SISTEMAS DE
CONTROLE EM REDE: *EVENT-TRIGGERED CONTROL***

Este projeto foi julgado adequado para fazer jus aos créditos da Disciplina “Projeto de Diplomação” do Departamento de Engenharia Elétrica e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS

Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS

Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS

Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Prof. Dr. Walter Fetter Lages, UFRGS

Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Porto Alegre, Dezembro de 2013.

Dedico este trabalho à minha família pelo imensurável apoio que me foi fornecido desde o dia em que decidi ingressar no curso de graduação em Engenharia Elétrica.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Euclides e Marizete, pelo carinho e apoio incondicional nas minhas escolhas ao longo da vida inteira, sobretudo, dos últimos cinco anos.

Ao meu irmão Newmar – também engenheiro – pelo suporte inigualável e pelos importantes conselhos profissionais transmitidos ao longo dessa trajetória acadêmica.

Ao professor João Manoel por ter aceitado me orientar neste trabalho.

Aos meus amigos de Bento Gonçalves que entenderam a minha distância neste semestre de muito trabalho e projetos e sempre me apoiaram.

Aos meus colegas de curso e de universidade pelo enorme companheirismo durante esta jornada, especialmente nesta última etapa, em especial aos meus amigos Bernardo Bortoluzzi, Douglas Sandri, Guilherme Bledow e Higor Daros pelas experiências vividas e adquiridas por meio de projetos extracurriculares desenvolvidos em conjunto e também pela incrível parceria e amizade.

À minha amiga estadunidense Jennifer pelo constante suporte e motivação.

A todos que de alguma forma contribuíram para a minha graduação em engenharia.

RESUMO

Sistemas de controle em rede são sistemas distribuídos espacialmente em que a comunicação entre sensores, atuadores e controladores é estabelecida por uma rede de comunicação compartilhada. Tais sistemas vêm sendo utilizados em uma ampla variedade de aplicações tais como, redes de sensores móveis, cirurgias remotas, colaboração háptica através da internet, sistemas de rodovias autônomas e veículos aéreos não tripulados. Concomitantemente, evidenciam-se novos problemas, por exemplo, atrasos de comunicação, perdas na transmissão de pacotes, alto consumo de energia e uma carga de computação pesada. Tais fatores podem levar a variações significativas do período de amostragem e, por consequência, podem afetar as propriedades de estabilidade do sistema de controle. Frente a isso, novas técnicas de amostragem são desenvolvidas de forma a tentar reduzir a carga de comunicação e o consumo de energia dos sistemas de controle. Entre estas, destacam-se as chamadas técnicas de *self-triggered* e *event-triggered control* que consistem em realizar a amostragem do sistema em períodos de tempo de largura variada que dependerão de eventos ocorridos no sistema. Este processo é conhecido como amostragem assíncrona. O objetivo deste trabalho é modelar estas técnicas de amostragem e executá-las através de simulação.

Palavras-chave: sistemas de controle em rede, *self-triggered sampling*, *event-triggered sampling*, amostragem assíncrona.

ABSTRACT

Networked control systems are spatially distributed systems for which the communication between sensors, actuators and controllers happen through a shared communication network. Networked control systems have been used in a wide variety of applications such as mobile sensor networks, remote surgeries, haptics collaboration over the internet, automated highway systems and unmanned air vehicles. In addition to all these new applications, new issues arise on networked control systems such as communication delays, transmission packets dropouts, high energy consumption and a heavy computing load. Such issues can lead to significant variations on the sampling time. Hence, it might affect the stability properties of the control system. Facing these issues, new techniques are being developed with the objective of trying to reduce the communication load and the energy consumption of the control systems. Among these techniques, two can be highlighted, known: the self-triggered control and the event-triggered control. They consist in performing the system sampling in periods of time with a variable length that will depend on events occurred on the system. This process shall be named as asynchronous sampling. The main objective of this work is to model these sampling techniques and implement them through software simulations.

Keywords: Networked Control Systems, self-triggered sampling, event-triggered sampling, asynchronous sampling.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	9
LISTA DE TABELAS.....	11
LISTA DE ABREVIACÕES	12
LISTA DE SÍMBOLOS	13
1 INTRODUÇÃO	15
1.1 Exposição do Assunto	16
1.2 Objetivos.....	19
1.3 Estrutura do Trabalho	19
2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.....	20
2.1 Introdução.....	20
2.2 Representação por Espaço de Estados.....	20
2.3 Estabilidade no Sentido de Lyapunov	22
2.4 Desigualdades Matriciais Lineares (LMI).....	24
2.5 Complemento de Schur	25
2.6 Critério Linear Quadrático (LQ).....	26
2.7 Formulação do Problema de Controle Ótimo em Tempo Contínuo.....	27
2.8 Formulação do Problema de Controle Ótimo em Tempo Discreto	31
3 AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA.....	35
3.1 Introdução.....	35
3.2 Amostragem Síncrona	35
3.3 Retentor de Ordem Zero	37
3.4 Amostragem Assíncrona	39
4 CONTROLE BASEADO EM EVENTOS	41
4.1 Introdução.....	41
4.2 <i>Event-tiggered Control</i> em Sistemas de Controle em Rede	41
4.3 Critério de Amostragem Assíncrona em Tempo Contínuo	42
4.4 Critério de Amostragem Assíncrona em Tempo Discreto	43
5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS	46
5.1 Introdução.....	46
5.2 Estrutura da Simulação	46
5.3 Simulação do Sistema Contínuo.....	47

5.4	Resultados da Simulação em Tempo Contínuo.....	47
5.4.1	<i>Simulação com $R = 0,5$</i>	47
5.4.2	<i>Simulação com $R = 2$</i>	56
5.5	Resultados da Simulação em Tempo Discreto	62
5.5.1	<i>Simulação com $R = 0,5$</i>	63
5.5.2	<i>Simulação com $R = 2$</i>	71
5.6	Comparativo das Atualizações do Sinal de Controle	77
6	CONCLUSÃO.....	79
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICE A – CÓDIGO DE RESOLUÇÃO DAS LMIs EM TEMPO CONTÍNUO ..	83
	APÊNDICE B – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO DO SISTEMA REALIMENTADO EM	
	TEMPO CONTÍNUO	85
	APÊNDICE C – CÓDIGO DE RESOLUÇÃO DAS LMIs EM TEMPO DISCRETO ...	89
	APÊNDICE D – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO DO SISTEMA REALIMENTADO EM	
	TEMPO DISCRETO.....	92

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Arquitetura de um Sistema de Controle via Rede.....	16
Figura 2: Esquema de transmissão de um sinal em um NCS	17
Figura 3: Processo de amostragem pela multiplicação por um trem de impulsos.....	36
Figura 4: Amostragem por trem de impulsos	36
Figura 5: Exemplo de sinais diferentes com mesmo conjunto de amostras	37
Figura 6: Utilização do ROZ para reconstrução de sinais discretos em sistemas de controle .	38
Figura 7: Comparação do sinal original, amostrado com ROZ e o sinal reconstruído	39
Figura 8: Fluxograma para amostragem do sinal de controle no tempo contínuo	43
Figura 9: Fluxograma para amostragem do sinal de controle no tempo discreto.....	44
Figura 10: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 com $\hat{\mu} = 1$...	49
Figura 11: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 1$	49
Figura 12: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$	50
Figura 13: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 com $\hat{\mu} = 5$	50
Figura 14: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 5$	51
Figura 15: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$	52
Figura 16: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 com $\hat{\mu} = 15$...	53
Figura 17: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 15$	53
Figura 18: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$	54
Figura 19: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 com $\hat{\mu} = 30$...	54
Figura 20: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 30$	55
Figura 21: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 30$	56
Figura 22: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo contínuo com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$	57
Figura 23: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$	58
Figura 24: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$	58
Figura 25: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo contínuo com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$	59
Figura 26: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$	60
Figura 27: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$	60
Figura 28: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo contínuo com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$	61
Figura 29: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$	61
Figura 30: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$	62

Figura 31: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 1$	64
Figura 32: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 1$	65
Figura 33: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$	65
Figura 34: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 5$	66
Figura 35: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 5$	67
Figura 36: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$	67
Figura 37: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 15$	68
Figura 38: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 15$	68
Figura 39: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$	69
Figura 40: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 30$	70
Figura 41: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 30$	70
Figura 42: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$	72
Figura 43: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$	72
Figura 44: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$	73
Figura 45: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$	74
Figura 46: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$	74
Figura 47: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$	75
Figura 48: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$	76
Figura 49: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$	76
Figura 50: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Comparativo da quantidade de atualizações do sinal de controle	78
--	----

LISTA DE ABREVIACOES

BIBO	<i>Bounded Input-Bounded Output</i>
EDOL	Equação Diferencial Ordinária Linear
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares - <i>Linear Matrix Inequalities</i>
LTI	<i>Linear Time Invariant</i>
LQ	Linear Quadrático
NCS	Sistema de Controle via Rede - <i>Networked Control System</i>
ROZ	Retentor de Ordem Zero - <i>Zero Order Hold</i>
SCR	Sistema de Controle em Rede
WSN	Redes de Sensores sem Fio - <i>Wireless Sensor Networks</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

\dot{x}	Primeira derivada
\ddot{x}	Segunda derivada
x	Variável x
\mathbf{x}	Vetor \mathbf{x}
\mathbf{A}	Matriz \mathbf{A} de relação dos estados
\mathbf{A}^T	Matriz \mathbf{A} transposta
\mathbf{A}_d	Matriz \mathbf{A} discretizada através de um ROZ
\mathbf{A}_d^T	Matriz \mathbf{A}_d transposta
\mathbf{B}	Matriz \mathbf{B} de relação das entradas do sistema
\mathbf{B}_T	Matriz \mathbf{B} transposta
\mathbf{B}_d	Matriz \mathbf{B} discretizada através de um ROZ
\mathbf{B}_d^T	Matriz \mathbf{B}_d transposta
\mathbf{K}	Matriz \mathbf{K} de ganhos do controlador
\mathbf{K}^T	Matriz \mathbf{K} transposta
\mathbf{I}	Matriz Identidade
\mathbf{P}	Matriz de Lyapunov
\mathbf{Q}	Matriz associada a energia dos estados
\mathbf{R}	Matriz associada a energia do controle
\mathbf{W}	Matriz inversa da matriz de Lyapunov \mathbf{P}
∞	Infinito
J	Função de critério linear quadrático
V	Função de Lyapunov
\dot{V}	Derivada da função de Lyapunov
s	Representação do domínio frequência para a Transformada de Laplace
ω	Representação do domínio frequência para a Transformada de Fourier
$\ \mathbf{x}\ $	Norma do vetor \mathbf{x}
\triangleq	Definição
μ	Critério de desempenho
$\hat{\mu}$	Critério de desempenho na amostragem assíncrona
\mathbf{x}^+	Vetor de estados \mathbf{x} amostrado

u^+	Sinal de controle u amostrado
$\delta(t)$	Delta de Dirac ou função impulso
τ	Passo de integração para aproximação de derivadas
T	Período de amostragem
ξ	Critério de degradação do controle
\mathcal{F}_E	Conjunto de <i>flow</i> para a amostragem assíncrona
\mathcal{J}_E	Conjunto de <i>jump</i> para a amostragem assíncrona

1 INTRODUÇÃO

Sistemas de controle em rede (SCRs) são definidos como os sistemas que estão distribuídos espacialmente nos quais a comunicação entre sensores, atuadores e controladores é estabelecida através de um protocolo de comunicação compartilhado. Os sistemas de controle em rede estão sendo utilizados em uma ampla variedade de aplicações tais como, redes de sensores móveis, cirurgias remotas, colaboração háptica através da internet, sistemas de rodovias autônomas e veículos aéreos não tripulados (HESPANHA, NAGHSHTABRIZY e XU, 2007).

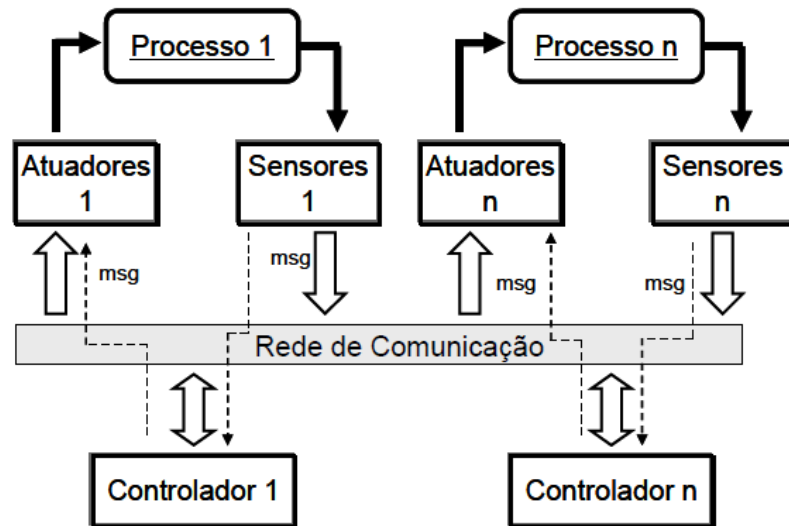
Em processos industriais em que a automação está presente, geralmente a arquitetura de comunicação e o controle ponto-a-ponto implementado é composto por cabeamento, conectando o computador ou o dispositivo de controle com cada sensor e atuador do sistema. No entanto, este modelo tradicional e centralizado não atende os novos requisitos de desenvolvimento de sistemas de controle, como modularidade, controle descentralizado, facilidade de diagnóstico e manutenção e principalmente o baixo custo (GODOY, 2011).

A inserção de arquiteturas de redes baseadas em barramentos podem melhorar a flexibilidade, confiabilidade, eficiência e, por consequência, reduzir os custos de instalação e o tempo de manutenção (GODOY, 2011). Paralelamente ao crescimento do número de aplicações dos SCRs, novos problemas surgem nestes sistemas como atrasos de comunicação, perdas na transmissão de pacotes, alto consumo de energia e uma carga de computação pesada. Tais fatores podem levar a variações significativas do tempo de amostragem e, por consequência, podem vir a afetar as propriedades de estabilidade do sistema de controle (SEURET e GOMES DA SILVA JR., 2012).

Aplicações recentes de sistemas de controle distribuído demonstram uma nova abordagem para a utilização de redes baseadas em barramentos. Nesta, o controlador e a planta estão separados fisicamente e são conectados por uma rede de comunicação industrial. O sinal de controle é enviado ao atuador por meio de uma mensagem transmitida através da rede, ao mesmo tempo em que o sensor amostra a saída do processo e transfere a resposta de volta ao controlador também através da rede (GODOY, 2011). Este tipo de sistema – em que a malha de controle é fechada por meio de uma rede de comunicação industrial – é denominado de Sistema de Controle via Rede (NCS – *Networked Control System*), apresentado na Figura 1.

O principal problema, foco deste trabalho e dos estudos de engenharia em NCSs, é o fato dos tempos de amostragem serem assíncronos, ou seja, o intervalo de amostragem não apresenta uma largura constante, tornando a modelagem do sistema ainda mais complexa do que um sistema de controle realimentado que não está ligado à uma rede de comunicação.

Figura 1: Arquitetura de um Sistema de Controle via Rede



Fonte: GODOY, 2011

1.1 Exposição do Assunto

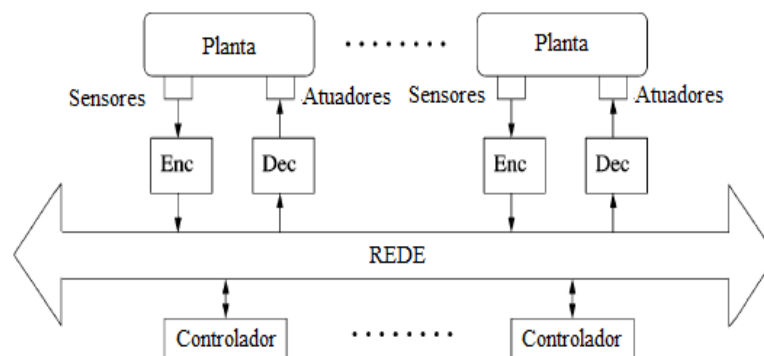
O crescimento acentuado dos NCSs, especialmente das WSNs (*Wireless Sensor Networks*), é visto como o futuro dos sistemas de controle e está possibilitando o desenvolvimento de uma nova variedade de aplicações em múltiplos campos de atuação da engenharia, incluindo monitoramento ambiental, redes inteligentes (*smart grids*), processos industriais, aplicações na área da saúde etc. Apesar dos benefícios da implantação de NCSs, novos problemas surgem relacionados à confiança, tempo de atraso e eficiência energética, em especial, no caso das WSNs, pois os nós de controle geralmente são alimentados por baterias. Uma estratégia de controle de energia eficiente deve reduzir tanto quanto possível o número de comunicações entre os nós de controle e ao mesmo tempo atingir um comportamento desejado para a malha fechada do sistema (TIBERI, LINDBERG e ISAKSSON, 2012).

A perda de pacotes na rede – que ocasionalmente acontecem em NCSs quando existe alguma falha nos nós de controle ou quando ocorre colisão das mensagens trocadas – é uma dificuldade frequentemente encontrada. Embora muitas redes possuam mecanismos de

retransmissão dos pacotes, eles só podem ser retransmitidos por um tempo limitado. Após o término deste prazo, o pacote é perdido. Além disso, para sistemas de controle realimentados em tempo real, pode ser mais vantajoso descartar o pacote antigo e transmitir um novo, se este estiver disponível.

Para transmitir um sinal de tempo contínuo através de uma rede, este deve ser amostrado, codificado em um formato digital, transmitido por meio da rede até o controlador – que modelará o sinal de controle – e transmitido através da rede até o decodificador e, finalmente, retornará a planta. Este processo é significativamente diferente da tradicional amostragem periódica empregada em controle digital e pode ser visto como o esquema apresentado na Figura 2 (HESPANHA, NAGHSHTABRIZY e XU, 2007).

Figura 2: Esquema de transmissão de um sinal em um NCS



Fonte: HESPANHA, 2007

Atrasos na comunicação de um sistema provocados por erros ou atrasos de transmissão de dados podem comprometer o controle, o sistema e até a sua estabilidade. Além disso, tornam o processo mais dispendioso por consumir uma quantidade maior de energia (visto que o processo de amostragem está sendo realizado indevidamente, isto é, em instantes em que ocorre algum tipo de falha como, por exemplo, perda de pacotes de dados – ou, simplesmente, pelo fato de o sinal do controlador não ter a necessidade de ser atualizado devido a pequenas e insignificantes variações na saída do processo) (SEURET e GOMES DA SILVA JR., 2012).

A fim de lidar com estes problemas, nos últimos anos introduziu-se o *event-triggered control* (controle acionado por eventos, em tradução livre). Este visa reduzir a carga de comunicação no laço de realimentação do NCS adaptando as trocas de informações às necessidades.

A rede de comunicação influencia consideravelmente o desempenho de laço fechado do NCS, dado que sua carga afeta a qualidade do serviço induzindo atrasos de tempo ou perdas de pacotes, os quais, por sua vez, degradam o desempenho do sistema ou até mesmo conduzem à instabilidade do laço de controle. Atualmente, o *event-triggered control* é considerado como um meio de reduzir a carga de comunicação da rede. Ao diminuir a troca de informações a um mínimo de comunicação necessária para garantir o desempenho requerido para o sistema, pode-se evitar uma sobrecarga da rede de comunicação (LEHMANN e JOHANSSON, 2012).

Em projetos que envolvem *event-triggered control*, o sensor lê, constantemente, a saída do processo e envia uma nova leitura ao controlador somente quando uma função da saída que mede, por exemplo, a degradação do desempenho do sistema com relação a um valor ótimo, extrapolar um determinado limiar. Este tipo de controle é chamado de controle reativo pelo fato de que o controlador só é atualizado depois de um evento ter sido detectado (TIBERI, LINDBERG e ISAKSSON, 2012).

Outra alternativa ao *event-triggered control*, que vem sendo implementada nos últimos anos é o *self-triggered control* (controle auto acionado, em tradução livre). Ao invés de reagir à detecção de um dado evento, o *self-triggered control* prevê seu acontecimento baseado na medição atual e em um modelo do processo, por isso é considerado um controle preditivo (TIBERI, LINDBERG e ISAKSSON, 2012).

Ambos os métodos apresentam benefícios e desvantagens específicas. O controle baseado em eventos, por exemplo, fornece uma robustez natural com respeito a perturbações externas e alterações de referências, dado que a saída é monitorada constantemente, ou seja, não exige o conhecimento do modelo do processo mas é baseado nas medições da saída do sistema. Entretanto, se houver perdas de pacote, o controlador não é capaz de detectá-las. Por outro lado, o *self-triggered control* fornece um prazo no qual a próxima medição deve ser transmitida e recebida em cada tempo de transmissão, sendo assim, as perdas de pacotes podem ser facilmente detectadas. Apesar disso, como estratégias em *self-triggered control* permitem que o sistema rode em malha aberta por um longo tempo, caso haja uma mudança de referência ou se uma perturbação repentinamente entrar no sistema, esses problemas só poderão ser contornados na próxima transmissão.

Apesar de tudo, trabalhos em ambos os casos *event* e *self-triggered control*, tem mostrado que é possível economizar 90% da comunicação entre os nós de controle e de

sensores e ainda assim garantir um desempenho aceitável do sistema em malha fechada (TIBERI, LINDBERG e ISAKSSON, 2012).

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é estudar a técnica de controle conhecida como *event-triggered control* utilizada em sistemas de controle em rede, suas aplicabilidades, diferenças, vantagens e desvantagens em utilizar esta técnica. Focar-se-á, no problema da amostragem assíncrona – que deve ser abordada de uma forma diferente da utilizada em amostragens do tipo síncrona (ou periódica) – e discorrer-se-á sobre sua modelagem matemática e, na sequência, acerca de sua aplicação às técnicas de controle que serão estudadas.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está dividido nos seguintes capítulos: formulação matemática, critério de amostragem, resultados e validação e conclusão.

No capítulo 2 são apresentadas algumas ferramentas matemáticas básicas que serão constantemente utilizadas ao longo de todo o trabalho.

No capítulo 3 é introduzida, resumidamente, a teoria da amostragem síncrona e assíncrona.

No capítulo 4 é introduzida a teoria do controle baseado em eventos e também é feita a formulação do problema tanto para o caso de tempo contínuo quanto para o caso de tempo discreto.

No capítulo 5 estão apresentados os resultados e comparações das simulações realizadas.

Finalmente, no capítulo 6 estão dispostas as conclusões da realização deste trabalho.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

2.1 Introdução

A fim de desenvolver este trabalho da forma mais clara e coesa possível, algumas ferramentas matemáticas foram abordadas em um estudo paralelo aprofundado do problema de amostragem assíncrona em NCSs.

Com o uso das ferramentas que serão apresentadas, comuns no projeto de sistemas de controle digital, o problema poderá ser então modelado nos capítulos seguintes. Porém, para que o entendimento torne-se factível, este capítulo tratará a respeito dos recursos matemáticos que tornaram possível a modelagem do problema e a construção dos modelos para implementação, simulação e análise. É importante ressaltar que as seções seguintes não objetivam demonstrar um equacionamento de casos gerais mas sim tratar dos aspectos matemáticos voltados às aplicações em sistemas de controle, mais precisamente nas técnicas de controle que serão estudadas para sistemas de controle em rede.

2.2 Representação por Espaço de Estados

Em sistemas de controle, espaço de estados é um tipo de representação matemática de sistemas físicos que consiste em estabelecer as relações entre entradas, saídas e estados de um sistema por meio de equações diferenciais de primeira ordem. Espaços de estados são baseados nas variáveis de estados (FRANKLIN, POWELL e EMANI-NAEINI, 1994).

O método das variáveis de estado é utilizado para representar um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem como dado na equação vetorial (1):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad (1)$$

Onde u é a entrada do sistema, e a saída é dada por:

$$y = h(\mathbf{x}, u). \quad (2)$$

No qual o vetor coluna \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}}$ são representados, respectivamente, por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

O vetor coluna \mathbf{x} é denominado de estado do sistema e contém n elementos para um sistema de n -ésima ordem. Por exemplo, em sistemas mecânicos, o vetor de estados geralmente representa as posições e velocidades. A função vetorial \mathbf{f} relaciona a primeira derivada dos estados com os próprios estados e as entradas do sistema.

Dentre as vantagens de estudar sistemas descritos na forma de espaço de estados, pode-se citar a possibilidade de estudar modelos mais gerais, dado que as EDOs não necessariamente devem ser lineares ou estacionárias. Assim, podem-se desenvolver métodos de solução mais gerais (FRANKLIN, POWELL e EMANI-NAEINI, 1994).

No caso de sistemas LTI monovariáveis (uma entrada e uma saída), as equações (1) e (2) podem ser reescritas como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (5)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du. \quad (6)$$

Onde, no caso de um sistema de n -ésima ordem, \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$, \mathbf{B} é uma matriz de entrada $n \times 1$, \mathbf{C} é uma matriz linha $1 \times n$ denominada de matriz de saída e D é um escalar.

Na teoria de controle, o método de espaço de estados vem sendo encarado como uma forma de projeto de controle moderna, enquanto os métodos baseados na função de transferência são considerados um modo de projeto de controle clássico. As vantagens do projeto de sistemas de controle através do espaço de estados são evidentes também quando o sistema a ser controlado possui mais de uma entrada de controle.

No entanto, ambas as representações, função de transferência e espaço de estados, podem ser relacionadas. Sendo o sistema representado por espaço de estados da equação (5) e aplicando a Transformada de Laplace, obtém-se:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s), \quad (7)$$

que pode ser reescrita rearranjando os termos como segue:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s) + \mathbf{x}(0). \quad (8)$$

Multiplicando os dois lados da equação (8) pela inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, chega-se a:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0). \quad (9)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na equação (6) e, após, substituindo $\mathbf{X}(s)$ na equação (6) pelo resultado encontrado na equação (9), que é a saída do sistema, chega-se a:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + DU(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D)U(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0). \quad (10)$$

A equação (10) representa ambas as respostas a uma condição inicial e a uma entrada forçada. O coeficiente da entrada forçada $U(s)$ é a função de transferência $G(s)$, que representa o sistema e nesse caso é dada por:

$$G(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D. \quad (11)$$

A equação (11) descrita acima representa a relação entre a função de transferência de um sistema e sua representação na forma de espaço de estados.

2.3 Estabilidade no Sentido de Lyapunov

É de conhecimento que em projetos de sistemas de controle a estabilidade é o conceito mais importante do estudo. Sabe-se também que em sistemas LTI, a estabilidade BIBO requer que todos os polos do sistema estejam no semiplano esquerdo, ou seja, que possuam parte real negativa.

Outra técnica muito importante para a análise da estabilidade tanto de sistemas não lineares quanto de sistemas lineares baseados na representação por espaço de estados de sistemas LTI é o critério de estabilidade de Lyapunov.

Considerando um conjunto de equações de estado como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u. \quad (13)$$

Assumindo que a equação (12) é escrita tal que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio, o que quer dizer que $\mathbf{f}(\mathbf{0}, u) = 0$. Este ponto de equilíbrio é dito ser **estável no sentido de Lyapunov** se for possível escolher um limite nas condições iniciais que resultarão em trajetórias que se mantêm dentro de um limite finito. O ponto de equilíbrio será dito

assintoticamente estável se for Lyapunov-estável e se o estado se aproximar de zero ao passo que o tempo se aproxima do infinito (FRANKLIN, POWELL e EMANI-NAEINI, 1994).

Para sistemas LTI, sabe-se que $\dot{\mathbf{x}}$ será Lyapunov-estável caso nenhum dos autovalores de \mathbf{A} estejam no semiplano direito e se qualquer autovalor no eixo imaginário for simples, pois uma raiz múltipla no eixo imaginário teria uma resposta que cresce no tempo. Além disso, a resposta de um sistema linear é assintoticamente estável caso todos os autovalores de \mathbf{A} estejam no semiplano esquerdo.

Comparando a estabilidade de Lyapunov com os resultados da BIBO estabilidade, nota-se que sistemas lineares constantes que são BIBO-estáveis, são assintoticamente estáveis no sentido Lyapunov, mas o inverso não é necessariamente verdade. Um sistema pode ser Lyapunov-estável e ainda assim não ser BIBO-estável (FRANKLIN, POWELL e EMANI-NAEINI, 1994).

Considerando um estado \mathbf{x} satisfazendo a equação (13), considera-se uma função escalar $V(\mathbf{x})$ com as seguintes propriedades:

- a) $V(\mathbf{0}) = 0$;
- b) $V(\mathbf{x}) > 0, \|\mathbf{x}\| \neq 0$;
- c) V é contínua e tem derivadas contínuas para todas as componentes de \mathbf{x} ;
- d) $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ ao longo das trajetórias da equação.

Chama-se uma função V que possua estas propriedades de **função de Lyapunov** do sistema. Uma função de Lyapunov pode ser interpretada como uma medida de energia dos estados, ou seja, segundo Lyapunov, se a energia nunca crescer então o estado estará confinado em um volume limitado por uma superfície de energia constante.

As propriedades *a* e *b*, como em casos de energia, $V > 0$ para qualquer estado diferente de zero, porém, $V = 0$ quando o estado for zero. A propriedade *c* garante que V é uma função suave e a propriedade *d* garante que qualquer trajetória move-se de forma a nunca ser maior do que no ponto inicial.

Considerando uma função V tal como:

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (14)$$

Onde \mathbf{P} é dita ser uma matriz simétrica positiva definida, isto é, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$. Considerando a propriedade *d* de uma função de Lyapunov, toma-se a derivada de (14) a partir da regra da cadeia, obtendo então:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}$$

$$\dot{V} = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + u^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u)$$

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + u^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} u \quad (15)$$

Supondo uma relação da entrada do sistema com os estados como:

$$u = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} \quad (16)$$

Substituindo (16) em (15)

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T [(\mathbf{A}^T + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})] \mathbf{x} \quad (17)$$

Então se:

$$-\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}) \quad (18)$$

Com $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, então conclui-se que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$.

A equação (18) é conhecida como a equação de Lyapunov e é possível mostrar que para qualquer \mathbf{Q} definida positiva, a solução \mathbf{P} da equação é positiva definida se, e somente se, todos os autovalores de $(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})$ tiverem parte real negativa, ou seja, estiverem no semiplano esquerdo do diagrama de polos e zeros.

2.4 Desigualdades Matriciais Lineares (LMI)

A ideia principal a ser tratada nesta seção é mostrar que é possível reduzir uma grande variedade de problemas encontrados nos estudos de sistemas de controle a alguns problemas de otimização envolvendo LMIs. Estes problemas envolvendo LMIs podem ser resolvidos numericamente com muita eficiência através de métodos de ponto interior (BOYD, GHAOUI, *et al.*, 1994).

Em análise de sistemas dinâmicos, a história dos estudos de LMIs iniciou-se com o que hoje é conhecido como a teoria de Lyapunov, vista na seção 2.3, onde Lyapunov mostrou que a equação diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{A}x(t) \quad (19)$$

É assintoticamente estável, ou seja, todas as trajetórias convergem à zero, se, e somente se, existe uma matriz \mathbf{P} positiva definida tal que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (20)$$

A desigualdade (20) é conhecida como uma desigualdade de Lyapunov que nada mais é do que uma forma particular de uma LMI. Generalizando, uma desigualdade matricial linear tem a seguinte forma:

$$F(g) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0 \quad (21)$$

Onde $F(g): \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$ sendo g a variável e $F_i = F_i^T$ são matrizes simétricas de dimensões $n \times n$ dadas no problema. O símbolo de desigualdade em (21) significa que $F(g)$ é positiva definida, isto é, $a^T F(g) a > 0$ para todos os valores de a diferentes de zero. Ainda, a LMI (21) é equivalente ao conjunto de n desigualdades polinomiais em g .

Quando as matrizes F_i são diagonais, a LMI $F(g) > 0$ é apenas um conjunto de desigualdades lineares. No caso de desigualdades não lineares, estas podem ser convertidas na forma de LMI utilizando o complemento de Schur, visto na seção 2.5 e que será o processo realizado na formulação do problema nas próximas seções (BOYD, GHAOUI, *et al.*, 1994).

Os problemas que serão tratados nas seções seguintes apresentam matrizes como sendo suas variáveis, i.e, a desigualdade de Lyapunov em (20). Neste caso, a matriz \mathbf{A} de dimensões $n \times n$ é dada, enquanto que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ é a variável.

2.5 Complemento de Schur

Em situações onde há o produto de termos que correspondem as variáveis de decisão em uma inequação do problema, utiliza-se o Complemento de Schur para reescrever esta inequação na forma de uma LMI, ou seja, reescreve-la em forma de uma matriz onde cada termo seja um bloco de matrizes para então eliminar as não linearidades da inequação. Sendo assim, considera-se uma matriz \mathbf{M} de dimensões $n \times n$ formada por um bloco 2×2 de matrizes tal qual:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Supondo as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} , de dimensões $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$ e $q \times q$, respectivamente, busca-se resolver o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (25)$$

Isto é:

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y = c \quad (26.1)$$

$$\mathbf{C}x + \mathbf{D}y = d \quad (26.2)$$

Supondo que \mathbf{D} seja uma matriz inversível, primeiramente resolve-se (26.2) para y :

$$y = \mathbf{D}^{-1}(d - \mathbf{C}x) \quad (27)$$

E então substitui-se (27) em (26.1) e chega-se a:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})x = c - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}d \quad (28)$$

Se a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ for inversível então obtém-se a solução do sistema (25) como:

$$x = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}(c - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}d) \quad (29.1)$$

$$y = \mathbf{D}^{-1}(d - \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}(c - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}d)) \quad (29.2)$$

A matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ é chamada de Complemento de Schur de \mathbf{D} em \mathbf{M} (BOYD e VANDENBERGHE, 2004). Por ser desnecessário, não se descreverá a etapa passo-a-passo para fundamentar o complemento de Schur. Para maiores detalhes ver Gallier, 2010 e Boyd, 2004. Neste trabalho o complemento de Schur será utilizado para que se possa remover os termos não lineares nas inequações matriciais apresentadas e, então, possam ser reescritas na forma de LMIs, ou seja, de forma que possam existir desigualdades matriciais lineares, que serão então programadas em um software matemático a fim de buscar a solução ótima de alguns problemas (GALLIER, 2010).

2.6 Critério Linear Quadrático (LQ)

A teoria de controle ótimo preocupa-se em operar um sistema dinâmico a um custo mínimo (geralmente associado à energia). Um sistema dinâmico que é descrito por um conjunto de EDOLs cujo custo é descrito por uma função quadrática é chamado de um problema linear quadrático (LIBERZON, 2009).

Considerando o sistema a seguir:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (30)$$

Supondo que deseja-se projetar a realimentação de estados $u = \mathbf{K}\mathbf{x}$ para estabilizar o sistema, espera-se que o valor de \mathbf{K} seja determinado de forma a minimizar a energia do estado do sistema em malha fechada e a energia do controle associado. Para isso, considera-se a função custo como:

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u \, dt \quad (31)$$

Sendo $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ e supondo que:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

É importante que \mathbf{Q} seja uma matriz definida positiva, isto é:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad (33)$$

Então, para o primeiro termo da integral em (31), tem-se:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = q_1 \mathbf{x}_1^2 + q_2 \mathbf{x}_2^2 + 2q_3 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \quad (34)$$

Dessa forma, percebe-se que q_1 irá pesar sobre o valor de \mathbf{x}_1 enquanto que q_2 afetará o valor de \mathbf{x}_2 e q_3 terá um peso sobre a combinação dos estados. Na prática, suponha que, por exemplo, o estado \mathbf{x}_1 seja a posição e o estado \mathbf{x}_2 seja a velocidade de um elevador, ou seja, um sistema que não requer grandes velocidades. Sendo assim, aumentando o valor de q_2 faria com que as velocidades pesassem relativamente mais em comparação as posições. Portanto, de forma a desacelerar o sistema deve-se aumentar q_2 para que o sistema de controle seja levado a penalizar mais a velocidade.

Analogamente, o mesmo vale para \mathbf{R} , pois busca-se limitar as entradas para que elas não divirjam para o infinito. Portanto, deve-se ajustar \mathbf{R} de forma a inserir um peso nas entradas do sistema. Quanto maior forem os termos da matriz \mathbf{R} , menor tenderá a ser o esforço de controle (em termos de energia gasta), provavelmente implicando em uma dinâmica mais lenta para o estado.

2.7 Formulação do Problema de Controle Ótimo em Tempo Contínuo

Com as ferramentas matemáticas apresentadas até então neste capítulo, torna-se agora possível caracterizar um dos problemas foco deste trabalho através de uma modelagem matemática. Nesta seção será equacionado o problema em forma de LMI em tempo contínuo a partir do método LQ, que será resolvido posteriormente.

Considera-se o mesmo sistema genérico representado por equações de estado apresentado em (30):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \quad (35)$$

E considerando a realimentação de estados u , i.e:

$$u(t) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (36)$$

Onde \mathbf{K} é a matriz de ganho deste controlador.

Tomando agora a função de custo do critério LQ como sendo:

$$J(\mathbf{x}, u) = \int_0^{\infty} \phi(\mathbf{x}, u) dt \quad (37)$$

Sendo $\phi(\mathbf{x}, u)$ como segue:

$$\phi(\mathbf{x}, u) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u \quad (38)$$

O problema que deverá ser formulado será encontrar um valor de \mathbf{K} que minimize $J(\mathbf{x}, u)$, ou seja, que reduza a energia dos estados e entradas do sistema. Dessa forma, sendo \mathbf{Q} e \mathbf{R} duas matrizes positivas definidas, tais que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$, o termo envolvendo a matriz \mathbf{Q} na equação (38) está relacionada à energia do estado do sistema e o termo com a matriz \mathbf{R} está relacionado a energia do controle do sistema.

Considerando uma possível função de Lyapunov V , tal qual:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (39)$$

Se existir uma matriz \mathbf{P} definida positiva tal que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ para (39), e se:

$$\dot{V} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u) < 0 \quad (40)$$

Então, integrando ambos os lados de (40) de 0 a ∞ , tem-se:

$$\int_0^{\infty} \dot{V} \cdot dt + \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u) \cdot dt < 0 \quad (41)$$

$$V(\infty) - V(0) + \frac{1}{\mu} J(\mathbf{x}, u) < 0 \quad (42)$$

Se o ganho \mathbf{K} for estabilizante, e ainda sendo V uma função de Lyapunov e o sistema em malha fechada assintoticamente estável, então $V(\infty) \rightarrow 0$, ou seja, todos os estados convergem para zero no infinito, portanto reescreve-se (42) como:

$$J(\mathbf{x}, u) < \mu \cdot V(0) \quad (43)$$

Substituindo $V(0)$ em (43), chega-se a:

$$J(\mathbf{x}, u) < \mu \cdot \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (44)$$

Onde μ pode ser visto como um critério de desempenho, o qual dará um peso a equação (44) e $\mathbf{x}(0)$ é a condição inicial do sistema. A fim de buscar o menor valor possível (menor

energia para o sistema) para o lado esquerdo da equação (44) e sabendo que a condição inicial do sistema é inalterável, uma forma de reduzi-lá é “minimizando” a matriz \mathbf{P} que poderá ser minimizada através de seu traço (soma dos elementos da diagonal da matriz ou soma dos autovalores de \mathbf{P}).

Agora, substituindo (39) em (40) e utilizando a regra da cadeia, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + u^T \mathbf{R} u) < 0 \quad (45)$$

E substituindo (35) em (45), a inequação pode ser reescrita da forma:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) < 0 \quad (46)$$

$$\mathbf{x}^T \left[(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}) + \frac{1}{\mu} \mathbf{Q} + \frac{1}{\mu} \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \right] \mathbf{x} < 0 \quad (47)$$

Para que a inequação (47) seja satisfeita $\forall \mathbf{x}$, então a desigualdade matricial abaixo deve ser satisfeita:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}) + \frac{1}{\mu} \mathbf{Q} + \frac{1}{\mu} \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} < 0 \quad (48)$$

No entanto, (48) é uma desigualdade matricial não linear dada pelos produtos das variáveis \mathbf{K} e \mathbf{P} e também \mathbf{K}^T e \mathbf{K} . Assim, como visto na seção 2.5, utiliza-se o complemento de Schur em (48) para reescrevê-la na forma de uma LMI. Portanto, tem-se que (48) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}) + \frac{1}{\mu} \mathbf{Q} & \mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} & -\mu \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (49)$$

Porém, (49) ainda é uma desigualdade matricial não linear pelo produto das variáveis \mathbf{K} e \mathbf{P} . Para resolver este problema, define-se:

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1} \quad (50.1)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{W} \quad (50.2)$$

A fim de reescrever (49) como uma LMI, realiza-se uma multiplicação anterior e posterior por uma matriz diagonal como definida abaixo, a qual não implicará em nenhuma alteração no problema principal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Dessa maneira, realizando as devidas multiplicações, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + \frac{1}{\mu} \mathbf{Q} & \mathbf{K}^T \\ \mathbf{K} & -\mu \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{W} \frac{1}{\mu} \mathbf{Q}\mathbf{W} & \mathbf{W}\mathbf{K}^T \\ \mathbf{K}\mathbf{W} & -\mu \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

No entanto, (52) ainda não é uma LMI em \mathbf{W} e \mathbf{Y} por causa do termo $\mathbf{W} \frac{1}{\mu} \mathbf{Q}\mathbf{W}$, que torna a desigualdade não linear. Assim, aplicando o complemento de Schur novamente, chega-se a expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T & \mathbf{Y}^T & \mathbf{W} \\ \mathbf{Y} & \mu \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{0} & -\mu \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

Finalmente, (53) é uma LMI em \mathbf{W} e \mathbf{Y} , e o problema a ser resolvido para minimizar o traço(\mathbf{P}) será:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{W}, \mathbf{Y}} \text{traço}(\mathbf{W}) \\ \text{Sujeito à LMI (53)} \end{cases} \quad (54)$$

Entretanto, o problema (54) ainda não será resolvido, pois ao solucionar o problema de minimização de (44), ou seja, minimizar o traço de \mathbf{P} , através do problema proposto em (54), não seria possível. Isto ocorre pois não se pode garantir que minimizando o traço de \mathbf{W} esteja-se minimizando também o traço de \mathbf{P} , pois não há garantias de que $\text{traço}(\mathbf{W}^{-1}) > \text{traço}(\mathbf{P})$. Neste caso, se existir uma matriz \mathbf{N} de forma que se possa garantir que $\mathbf{N} - \mathbf{P} > 0$, então, tem-se que $\text{traço}(\mathbf{N}) > \text{traço}(\mathbf{P})$. Dessa forma, se o problema a ser resolvido for o de minimizar o traço de \mathbf{N} , então pode-se garantir que o traço de \mathbf{P} também será minimizado. Portanto, a fim de resolver o problema para a variável matricial \mathbf{P} , a partir de \mathbf{W} , adiciona-se uma LMI auxiliar da seguinte forma:

$$\mathbf{N} - \mathbf{P} > 0 \quad (55)$$

Que pelo complemento de Schur pode ser escrita de forma equivalente como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \quad (56)$$

Finalmente, com esta LMI auxiliar, dado um μ adequado, a LMI (56) poderá ser resolvida buscando-se minimizar o traço(\mathbf{N}), ou seja, dadas às restrições necessárias, o seguinte problema de otimização convexo pode ser resolvido:

$$\begin{cases} \min_{W,Y,N} \text{traço}(\mathbf{N}) \\ \text{sujeito às LMIs (53) e (56)} \end{cases} \quad (57)$$

O problema de otimização (57) poderá ser resolvido sujeito às duas LMIs expostas, a inicial (53) e a auxiliar (56), de forma a encontrar um \mathbf{N}_{opt} , \mathbf{W}_{opt} e \mathbf{Y}_{opt} , que serão os valores ótimos de \mathbf{N} , \mathbf{W} e \mathbf{Y} , respectivamente, isto é, os valores que proporcionam a melhor solução para o problema de minimização do $\text{traço}(\mathbf{N})$. Além disso, o ganho \mathbf{K}_{opt} que leva a minimização do critério é então dado por:

$$\mathbf{K}_{opt} = \mathbf{Y}_{opt} \mathbf{W}_{opt}^{-1} \quad (58)$$

2.8 Formulação do Problema de Controle Ótimo em Tempo Discreto

Como em sistemas de controle os sinais recebidos na planta e no controlador geralmente são sinais digitais, ou seja, amostrados em tempo discreto, será feita uma abordagem ao problema apresentado na seção anterior para o caso de tempo discreto. No próximo capítulo, será trabalhado o problema da amostragem.

Dessa maneira, o sistema apresentado em (35) é analogamente representado em tempo discreto como:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u[k] \quad (59)$$

Onde a equivalente das derivadas dos estados $\dot{\mathbf{x}}(t)$ é $\mathbf{x}[k+1]$ e \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d podem ser as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} discretizadas através de um retentor de ordem zero (ROZ), como será visto no capítulo 3. Ainda, considerando a realimentação de estados em (36), i.e:

$$u[k] = \mathbf{K} \mathbf{x}[k] \quad (60)$$

Na qual \mathbf{K} é a matriz de ganho do controlador, assim como no tempo contínuo.

Ainda, tomando a função do critério linear quadrático (37) e trazendo-a para o tempo discreto, tem-se:

$$J(\mathbf{x}[k], u[k]) = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \phi(\mathbf{x}, u) \quad (61)$$

Onde $\phi(\mathbf{x}, u)$ é expressa como:

$$\phi(\mathbf{x}, u) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{x}^T[k] \mathbf{Q} \mathbf{x}[k] + u^T[k] \mathbf{R} u[k]) \quad (62)$$

Assim como na seção anterior, o problema de controle ótimo é encontrar um \mathbf{K} de forma a minimizar a equação (61), ou seja, minimizar a energia dos estados e entradas do sistema.

Portanto, sendo \mathbf{Q} e \mathbf{R} duas matrizes positivas definidas, tais que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$, tem-se que o termo envolvendo \mathbf{Q} na equação (62) está relacionado à energia dos estados e o termo envolvendo \mathbf{R} relaciona-se a energia do controle deste sistema.

Sendo V uma possível função de Lyaunov tal que:

$$V(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}\mathbf{x}[k] \quad (63)$$

Com $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, e sua derivada representada pela equação de diferenças no tempo discreto igual a:

$$\Delta V(\mathbf{x}[k]) = V(\mathbf{x}[k+1]) - V(\mathbf{x}[k]) \quad (64)$$

E ainda supondo que:

$$\Delta V(\mathbf{x}[k]) + \frac{1}{\mu}(\mathbf{x}^T[k]\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + u^T[k]\mathbf{R}u[k]) < 0 \quad (65)$$

Aplicando o somatório nos dois termos da inequação (65) obtém-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta V(\mathbf{x}[k]) + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}^T[k]\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + u^T[k]\mathbf{R}u[k]) < 0 \quad (66)$$

Expandindo as somas de (66), chega-se a:

$$V(\mathbf{x}[1]) - V(\mathbf{x}[0]) + V(\mathbf{x}[2]) - V(\mathbf{x}[1]) + \dots + V(\mathbf{x}[\infty]) + \frac{1}{\mu}J(\mathbf{x}[k], u[k]) < 0$$

$$V(\mathbf{x}[\infty]) - V(\mathbf{x}[0]) + \frac{1}{\mu}J(\mathbf{x}[k], u[k]) < 0 \quad (67)$$

Supondo que o ganho K seja um ganho estabilizante, isto é, todos os estados convergem para zero quando $k \rightarrow \infty$, e que o sistema em malha-fechada é assintoticamente estável, então, $V(\mathbf{x}[\infty]) \rightarrow 0$ e, assim, (67) pode ser reescrito como:

$$J(\mathbf{x}[k], u[k]) < \mu \cdot V(\mathbf{x}[0])$$

$$J(\mathbf{x}[k], u[k]) < \mu \cdot \mathbf{x}^T[0]\mathbf{P}\mathbf{x}[0] \quad (68)$$

Substituindo (63) e (64) em (65), chega-se em:

$$\mathbf{x}^T[k+1]\mathbf{P}\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}\mathbf{x}[k] + \frac{1}{\mu}(\mathbf{x}^T[k]\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + u^T[k]\mathbf{R}u[k]) < 0 \quad (69)$$

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_dK)^T\mathbf{P}(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_dK)\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + \frac{1}{\mu}(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + (K\mathbf{x})^T\mathbf{R}K\mathbf{x}) < 0$$

$$\mathbf{x}^T[k] \left[(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_dK)^T\mathbf{P}(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_dK) - \mathbf{P} + \frac{1}{\mu}(\mathbf{Q} + K^T\mathbf{R}K) \right] \mathbf{x}[k] < 0 \quad (70)$$

Para que a desigualdade matricial (70) seja satisfeita para $\forall \mathbf{x}$, então, a seguinte desigualdade deve ser também satisfeita:

$$(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}) - \mathbf{P} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) < 0 \quad (71)$$

A desigualdade apresentada em (71) é uma desigualdade matricial não linear pelos produtos das variáveis \mathbf{P} e \mathbf{K} e também \mathbf{K}^T e \mathbf{K} . Dessa forma, é preciso utilizar o complemento de Schur para reescrever (71) como uma LMI a fim de chegar a um problema factível, sendo assim, reescreve-se (71) como:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) & (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K})^T \\ (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}) & -\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (72)$$

Nota-se que (72) ainda não é uma LMI, pois ainda é não linear em $\mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}$ e também em \mathbf{P}^{-1} , para tanto, faz-se as substituições abaixo:

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1} \quad (73.1)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{W} \quad (73.2)$$

Após, multiplica-se (72) anterior e posteriormente pela matriz diagonal (74) abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{W}^{-1} + \frac{1}{\mu} (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) & (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K})^T \\ (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}) & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W} + \frac{1}{\mu} \mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{W} + \frac{1}{\mu} \mathbf{Y}^T \mathbf{R} \mathbf{Y} & \mathbf{W} (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K})^T \\ (\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}) \mathbf{W} & -\mathbf{W} \end{bmatrix} < 0 \quad (75)$$

No entanto, ainda é necessário aplicar o complemento de Schur em (75) para remover as não linearidades e reescrever a desigualdade como uma LMI:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W} + \frac{1}{\mu} \mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{W} & \mathbf{W} \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_d^T & \mathbf{Y}^T \\ \mathbf{A}_d \mathbf{W} + \mathbf{B}_d \mathbf{Y} & -\mathbf{W} & 0 \\ \mathbf{Y} & 0 & -\mu \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (76)$$

Novamente, aplicando o complemento de Schur para remover a não linearidade $\mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{W}$, chega-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{W} & \mathbf{W} \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_d^T & \mathbf{Y}^T & \mathbf{W} \\ \mathbf{W} + \mathbf{B}_d \mathbf{Y} & -\mathbf{W} & 0 & 0 \\ \mathbf{Y} & 0 & -\mu \mathbf{R}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W} & 0 & 0 & -\mu \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (77)$$

Finalmente (77) é uma LMI em \mathbf{W} e \mathbf{Y} e o problema de minimização do traço de \mathbf{P} será formulado considerando-se, como feito na seção 2.6, a LMI auxiliar:

$$\mathbf{N} - \mathbf{P} > 0 \quad (78)$$

Que pode ser reescrito em forma de LMI utilizando o complemento de Schur como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{W} \end{bmatrix} > 0 \quad (79)$$

Por fim, o problema de minimização do traço de \mathbf{N} poderá ser resolvido, dadas as restrições necessárias e um valor de μ adequado, a partir das LMIs (77) e (79) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{N}} \text{traço}(\mathbf{N}) \\ \text{sujeito às LMIs (77) e (79)} \end{cases} \quad (80)$$

Assim como será resolvido para o caso contínuo, o caso discreto também será solucionado de forma a encontrar valores \mathbf{N}_{opt} , \mathbf{W}_{opt} e \mathbf{Y}_{opt} , que são os valores ótimos de \mathbf{N} , \mathbf{W} , e \mathbf{Y} , respectivamente, ou seja, os valores que apresentarão a melhor solução para o problema de minimização da energia do sistema. Além disso, o ganho ótimo, \mathbf{K}_{opt} , que leva a minimização do critério é dado por:

$$\mathbf{K}_{opt} = \mathbf{Y}_{opt} \mathbf{W}_{opt}^{-1} \quad (81)$$

3 AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA

3.1 Introdução

A maioria dos sinais com que se trabalha em diferentes campos de atividades são constituídos por sinais originalmente contínuos ou analógicos, por exemplo, sinais de voz, músicas, sinais biomédicos, etc. O processamento de sinais discretos é mais fácil e preferível ao processamento de sinais contínuos. Portanto, é necessário realizar uma conversão dos sinais contínuos ou analógicos para os sinais discretos ou digitais, esta conversão é chamada de amostragem.

Em sistemas de controle comuns (aqueles que não estão conectados através de uma rede), a técnica de amostragem mais frequentemente utilizada é a amostragem periódica (ou síncrona) utilizando um reconstrutor de ordem zero. Neste modelo, as amostras dos estados e da lei de controle u devem ser coletadas em instantes de tempo múltiplos do período de amostragem o qual deve ser adequado de acordo com as arquiteturas e as especificações que devem ser atendidas pelo sistema (HAYKIN e VAN VEEN, 2001).

Nas seções seguintes abordar-se-á brevemente o conceito de amostragem síncrona, onde o valor do sinal é adquirido em instantes de tempo espaçados uniformemente, e o conceito de amostragem assíncrona, onde os valores serão adquiridos em instantes de tempo de largura não uniformes. Enfatizar-se-á a amostragem assíncrona, pois esta é o foco principal de estudo deste trabalho e base para a formulação do problema.

3.2 Amostragem Síncrona

Um sinal contínuo que varia no tempo pode ser amostrado e depois reconstruído de acordo com o Teorema de Nyquist. A amostragem consiste em realizar uma leitura do valor do sinal periodicamente em instantes múltiplos de T , sendo T o período de amostragem. Quanto menor for o período de amostragem, isto é, quanto mais amostras houver do sinal, mais fiel será a reconstrução do sinal em relação ao sinal original. No entanto, diminuir o período de amostragem e, por consequência, aumentar o número de amostras, implica em aumentar o nível de processamento tornando o processo mais lento e podendo leva-lo a consumir mais energia e também diminuir a imunidade a ruído (HAYKIN e VAN VEEN, 2001).

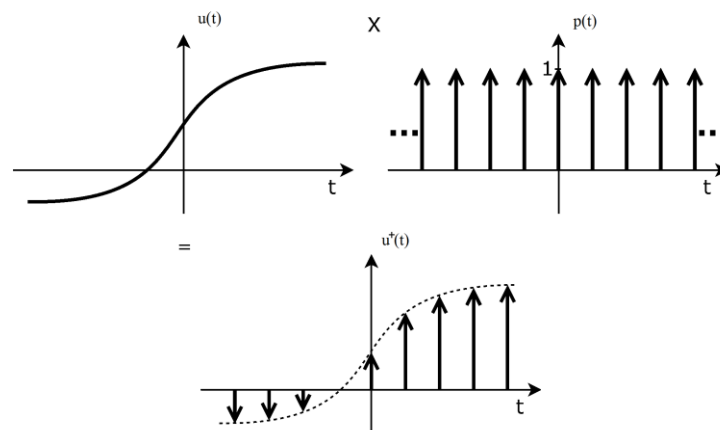
Considerando o sinal de controle $u(t)$, sua representação amostrada pode ser expressa por $u^+(t)$ como:

$$u^+(t) = u(kT) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T) \quad (82)$$

Onde k é um número inteiro.

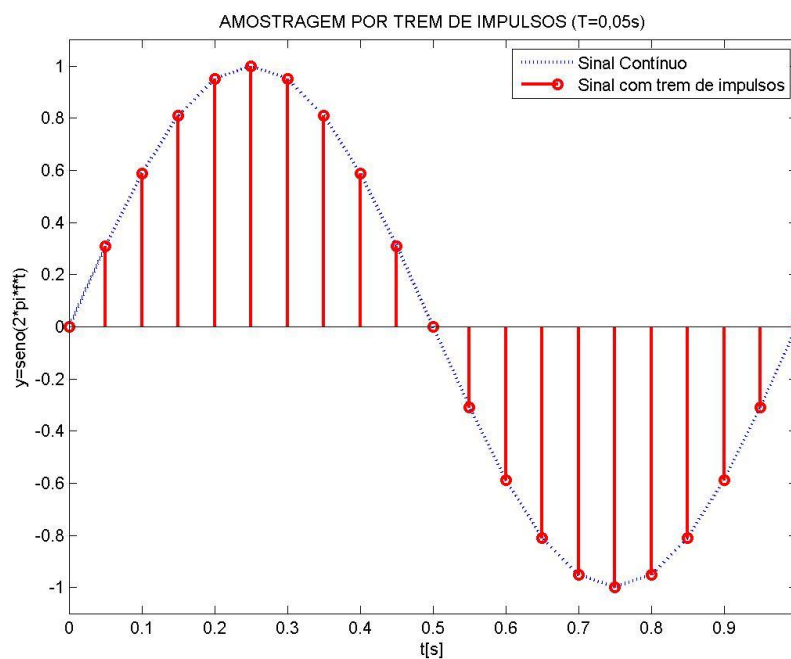
Uma forma de realizar a amostragem de um sinal é multiplica-lo por um trem de impulsos $p(t)$, como mostrado na Figura 3 a seguir.

Figura 3: Processo de amostragem pela multiplicação por um trem de impulsos



A Figura 4 a seguir exibe o resultado da amostragem realizada em uma função senoidal de frequência $f = 1$ Hz, onde a amostragem foi feita com um período de $T = 0,05$ s

Figura 4: Amostragem por trem de impulsos

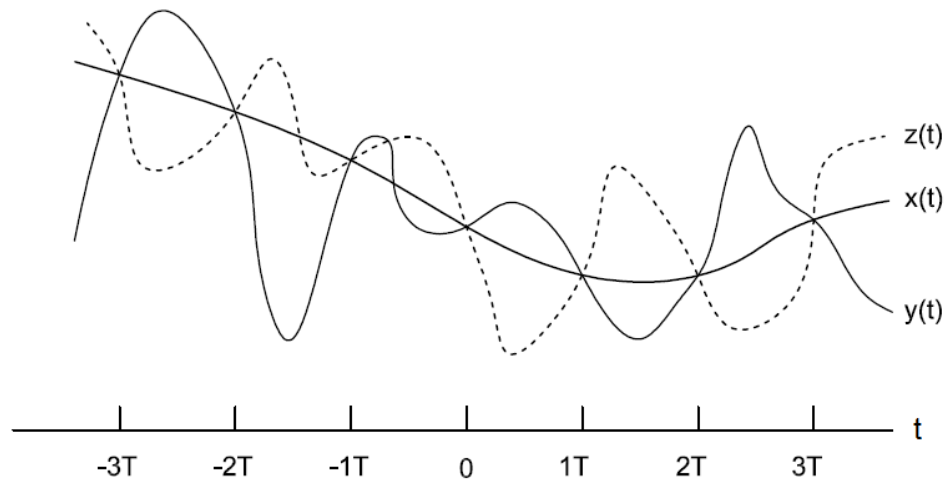


Matematicamente, este processo pode ser expresso da seguinte forma:

$$u^+(t) = u(t) \cdot \sum_{n=1}^N \delta(t - nT) \quad (83)$$

O sinal em (83) pode ser reconstruído seguindo o Teorema de Nyquist na hora de escolher a frequência de amostragem (HAYKIN e VAN VEEN, 2001). No entanto, é importante ressaltar que como não há conhecimento do comportamento do sinal entre dois instantes consecutivos de amostragem, a reconstrução do sinal pode não ser muito fiel a original a menos que o sinal amostrado apresente leves variações no seu valor entre estes intervalos. Isto justifica-se pois infinitos sinais podem ser reconstruídos a partir do mesmo conjunto de amostras. A ideia descrita acima é representada na Figura 5 a seguir, onde os sinais $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são sinais contínuos no tempo, porém apresentam comportamento completamente diferente ao longo do tempo e mesmo assim, o conjunto de amostras nos instantes kT são iguais para os três sinais. Portanto, para uma melhor reconstrução destes sinais, o período de amostragem T deve ser tão menor quanto possível.

Figura 5: Exemplo de sinais diferentes com mesmo conjunto de amostras



3.3 Retentor de Ordem Zero

Um retentor de ordem zero (ROZ) é utilizado para reconstruir um sinal contínuo a partir de um sinal amostrado. O ROZ realiza a leitura da amostra do sinal a ser reconstruído em um determinado instante de tempo e retém este valor lido por um instante de tempo igual ao período de amostragem T , quando realizará uma nova leitura do sinal. Tal leitura ocorre periodicamente em instantes múltiplos inteiros do período de amostragem. Da mesma forma

que ocorre com a amostragem por trem de impulsos, no ROZ, quanto menor for o período de amostragem, maior será o número de amostras do sinal e por consequência mais fiel será a reconstrução do sinal. Porém, isso também implicará em uma maior carga de computação e consumo de energia para certos sistemas.

A resposta impulsiva de um ROZ pode ser representado matematicamente como:

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (84)$$

E a sua representação no domínio frequência é a seguinte:

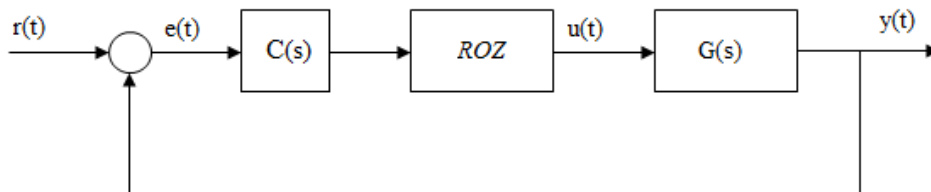
$$H_0(\omega) = e^{-j\omega T/2} \cdot 2 \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega} \quad (85)$$

Portanto, o sinal amostrado através do ROZ pode ser definido pela operação de convolução entre o ROZ e as amostras impulsivas do sinal da seguinte forma:

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (86)$$

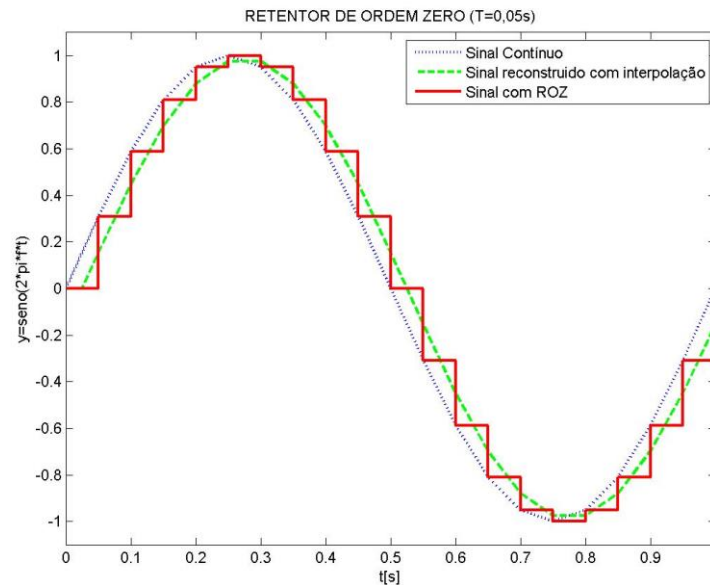
Em sistemas de controle realimentados, o ROZ é usualmente colocado de forma a reconstruir o sinal digital do controlador e enviá-lo como um sinal contínuo reconstruído para o processo. A Figura 6 a seguir exemplifica resumidamente a planta de um sistema realimentado que utiliza o ROZ (PEREIRA, 2009).

Figura 6: Utilização do ROZ para reconstrução de sinais discretos em sistemas de controle



Para ilustrar o processo de reconstrução através do retentor de ordem zero, a Figura 7 a seguir exibe um sinal senoidal de frequência $f = 1\text{Hz}$ comparado com seu sinal amostrado com período de amostragem $T = 0,05\text{s}$ e também com a curva de reconstrução do sinal. Aqui a recuperação foi feita com base na interpolação das amostras. Nota-se que a frequência de amostragem é baixa no sentido de reconstruir o sinal com maior fidelidade ao sinal original, visto que existe uma pequena defasagem entre ambos os sinais, como visto a seguir.

Figura 7: Comparação do sinal original, amostrado com ROZ e o sinal reconstruído



3.4 Amostragem Assíncrona

Foco principal dos estudos realizados neste trabalho, a amostragem assíncrona é utilizada em SCRs com o intuito de reduzir o tráfego na rede por meio da redução do número de amostragens realizadas sem grande necessidade, o que provoca um congestionamento na rede devido ao alto tráfego de mensagens. (GOMES DA SILVA JR., LAGES e SBARBARO, 2013). Este problema está matematicamente formulado nas seções 2.7 e 2.8 para tempo contínuo e discreto, respectivamente, com base na redução da energia consumida pela alta taxa de amostragens realizadas. Este tipo de amostragem é inserido em um cenário onde a amostragem é executada ininterruptamente em determinados instantes de tempo, porém, pode acontecer que, em alguns destes instantes, não seja realmente necessário realizar a amostragem do sinal de controle, pois o controle ainda apresenta-se estável e satisfatório com relação ao esperado, ou seja, não houve uma grande degradação do desempenho de controle. Essas amostragens desnecessárias fazem com que energia seja gasta sem necessidade e que mais dados sejam transmitidos através da rede, tornando o sistema mais suscetível a falhas por eventuais perdas de dados ou atrasos na comunicação. Isto implica em um sistema mais caro e menos confiável.

A amostragem assíncrona caracteriza-se pelo fato de não realizar amostragens do sinal de controle ao mesmo tempo em que é obtida a leitura do valor dos estados. Portanto, os instantes de tempo entre uma amostragem e a amostragem seguinte do sinal de controle

difícilmente serão iguais entre si, ou seja, o período de amostragem é variável e pode ser visto considerando o sinal de controle u amostrado expresso como:

$$u^+(t) = u(t_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (87)$$

Na próxima seção será demonstrado este problema da realização da amostragem assíncrona perante os problemas formulados nos capítulos anteriores.

4 CONTROLE BASEADO EM EVENTOS

4.1 Introdução

Um sistema com controle baseado em eventos significa que o controlador enviará seu sinal atualizado para a planta apenas em momentos específicos. Estas situações, nas quais há a atualização do controle, são determinadas pela ocorrência ou não de um dado evento especificado no projeto do sistema.

4.2 *Event-triggered Control* em Sistemas de Controle em Rede

Em sistemas de controle em rede, a técnica de controle baseado em eventos – *event-triggered control* – é capaz de fornecer uma redução significativa no tráfego de mensagens na rede, por consequência, diminuir o consumo de energia dos dispositivos, fato fundamental em redes sem fio, nas quais os dispositivos são alimentados por baterias. Nestas ocasiões, a saída da planta ou estado é amostrado somente quando um determinado evento ou condição relacionada a resposta do sistema é preenchida. A amostra é, portanto, utilizada pelo controlador para atualizar a entrada da planta. Logo, como a planta evolui continuamente e o sinal de controle é atualizado dependendo de eventos em tempo discreto, sistemas com *event-triggered control* podem ser definidos como sistemas híbridos ou impulsivos (GOMES DA SILVA JR., LAGES e SBARBARO, 2013).

A decisão de realizar a amostragem ou não da saída da planta e enviar a amostra para o controlador será tomada baseada na avaliação da degradação do desempenho do sinal de controle. No caso de realizar a amostragem, o controlador enviará uma atualização do sinal de controle, o qual permanecerá inalterado até a ocorrência do próximo evento, ou seja, entre dois instantes de tempo discreto subsequentes t_k e t_{k+1} . Porém, note que, diferentemente do controle digital clássico, o intervalo de amostragem $t_k - t_{k+1}$ não é constante.

No instante de ocorrência do evento, i.e. em $t = t_k$, as mensagens entre o controlador e o nó do sensor-planta são trocadas. O nó do sensor-planta envia o valor da saída amostrada para o controlador e este enviará um novo sinal de controle recalculado a ser aplicado na planta até que o próximo evento venha a ocorrer. Esta decisão de quando será realizada a amostragem é feita com base em uma degradação do desempenho do sistema em laço fechado. Esta degradação de desempenho será medida com relação ao desempenho nominal

que seria atingido através de uma implementação do sistema em tempo-contínuo (GOMES DA SILVA JR., LAGES e SBARBARO, 2013), como será feito na seção 5.3.

Como visto no capítulo 2, mais especificamente nas seções 2.7 e 2.8, o critério de desempenho adotado para o sistema de laço fechado é o critério linear quadrático (LQ).

4.3 Critério de Amostragem Assíncrona em Tempo Contínuo

Considerando o sistema em (35) a lei de controle apresentada em (36), sua versão amostrada é reescrita como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}^+ = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (88.1)$$

$$u^+(t) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}^+ \quad (88.2)$$

Logo, para que (88.2) seja ou não atualizada, isto é, para que o valor de u^+ seja recalculado e reenviado a partir de \mathbf{x} , utilizar-se-á o critério de desempenho linear quadrático, como exposto anteriormente. Este critério pode ser definido após o problema de minimização (57) ter sido resolvido e as matrizes \mathbf{N} , \mathbf{W} , \mathbf{K} e \mathbf{P} terem sido definidas, logo, $\xi(\mathbf{x}, u^+)$ é dado por:

$$\xi(\mathbf{x}, u^+) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u^+) + (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u^+)^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \frac{1}{\hat{\mu}} \mathbf{Q}\mathbf{x} + \frac{1}{\hat{\mu}} u^T \mathbf{R}u^+ \quad (89)$$

Este critério de degradação do desempenho do sinal de controle será recalculado sempre que o valor do estado \mathbf{x}^+ for atualizado para determinar qual decisão será tomada em relação à lei de controle (88.1). Portanto, dois conjuntos são definidos para caracterizar se a função ξ indica que o controlador deve ser atualizado ou não. Estes conjuntos são denominados de *flow* (fluir em tradução livre) e *jump* (saltar em tradução livre) e são representados por \mathcal{F}_E e \mathcal{J}_E , respectivamente. Isto é, quando o resultado da função ξ pertencer ao conjunto \mathcal{F}_E , isto significa que o sistema deve permanecer inalterado, ou seja, o valor atual da regra de controle permanece sendo igual ao anterior. Da mesma forma, quando a função ξ pertencer ao conjunto \mathcal{J}_E , isto indicará que o sinal do controlador deverá ser amostrado e atualizado com o valor de \mathbf{x}^+ (SEURET, PRIEUR, *et al.*, 2012). Essa regra pode ser escrita como:

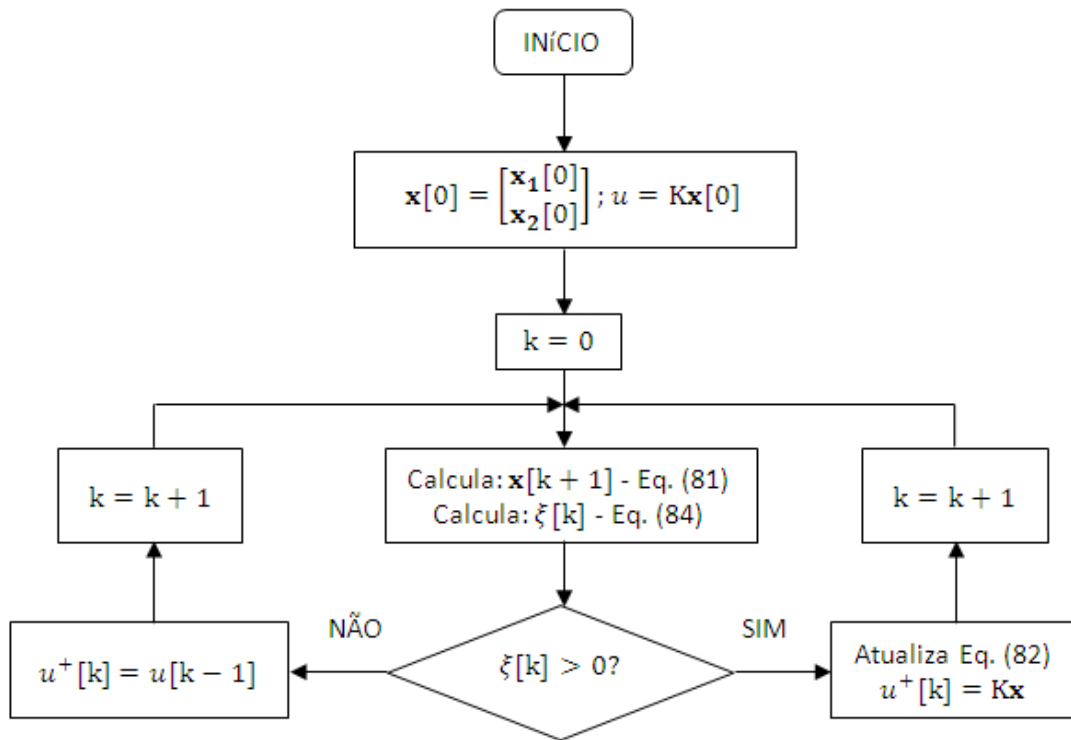
$$\xi(\mathbf{x}^+, u^+) < 0 \quad \xi(\mathbf{x}^+, u^+) \in \mathcal{F}_E \quad (90)$$

$$\xi(\mathbf{x}^+, u^+) > 0 \quad \xi(\mathbf{x}^+, u^+) \in \mathcal{J}_E \quad (91)$$

O fato de o sinal de controle ter sido atualizado pode ser interpretado como se houvesse uma degradação do desempenho do controlador que possivelmente comprometeria o sistema

em laço fechado caso permanecesse enviando o mesmo sinal. A Figura 8 abaixo exemplifica, através de um fluxograma, o algoritmo desenvolvido para a implementação desta técnica de atualização do sinal de controle para o caso contínuo.

Figura 8: Fluxograma para amostragem do sinal de controle no tempo contínuo



4.4 Critério de Amostragem Assíncrona em Tempo Discreto

Da mesma maneira que é feito na seção anterior para o caso contínuo, a amostragem do tempo discreto segue os mesmos passos, apenas o equacionamento torna-se um pouco diferente. Reescrevendo a equação de diferenças (59), que, analogamente à derivada no tempo contínuo, relaciona os estados e suas diferenças no tempo discreto, tem-se:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u[k]$$

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u^+[k] \quad (92)$$

$$u^+[k] = K \cdot \mathbf{x}^+[k-d] \quad \text{para } d \geq 0 \text{ com } d \in \mathbb{Z} \quad (93)$$

Onde \mathbf{x}^+ e u^+ também representam o estado amostrado e o sinal de controle que será amostrado, respectivamente, e k é o índice da iteração da amostragem. O algoritmo para realizar a atualização da lei de controle funciona da mesma maneira em ambos os casos,

contínuo e discreto, isto é, o valor de u^+ só será atualizado a partir do valor de \mathbf{x}^+ quando o critério $\xi(\mathbf{x}, u^+)$ pertencer ao conjunto de *jump* (\mathcal{J}_E), caso contrário, ξ pertencerá ao conjunto de *flow* (\mathcal{F}_E) e, portanto, não atualizará o valor do controle, sendo assim, as condições (90) e (91) também são válidas para o caso discreto. Isto significa que o sinal de controle que está sendo enviado ao controlador ainda faz com que o sistema atenda as especificações requisitadas, ou seja, não houve uma degradação considerável do sinal de controle para que seja desperdiçada energia realizando uma nova amostragem e atualizando o valor do controle.

O critério de degradação do controle do sistema é determinado a partir da substituição das equações (63) e (64) em (65) como:

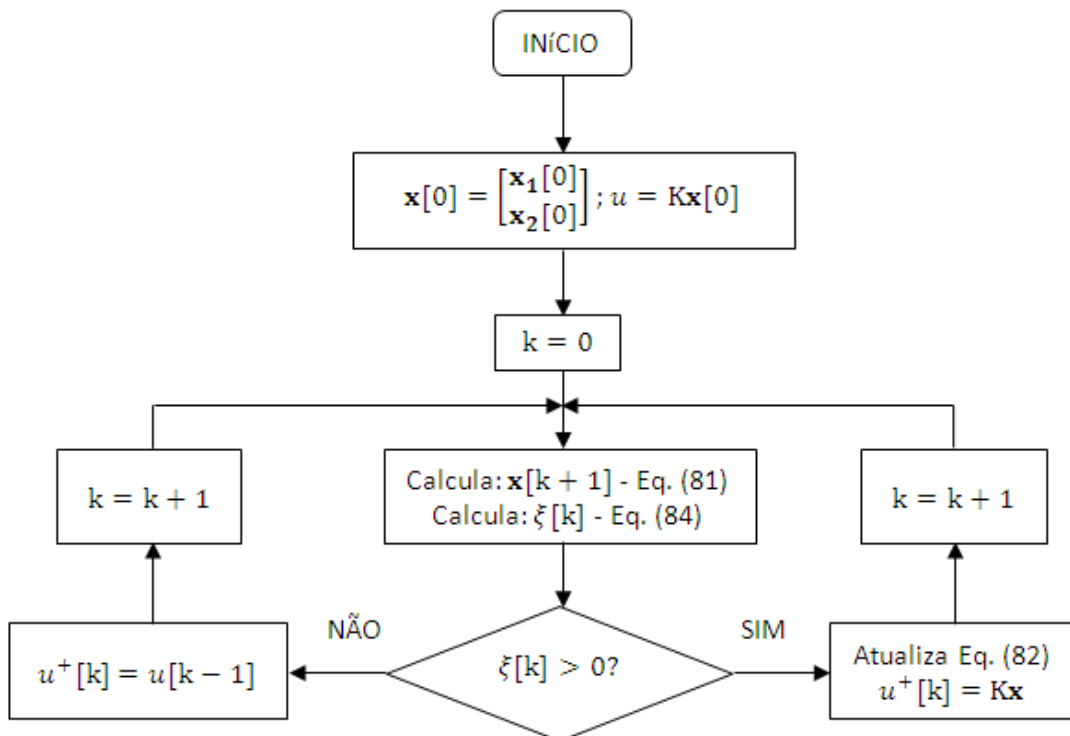
$$\xi(\mathbf{x}, u^+) = \mathbf{x}^T[k+1]\mathbf{P}\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k]^T\mathbf{P}\mathbf{x}[k] + \mathbf{x}[k]^T\frac{1}{\hat{\mu}}\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + \frac{1}{\hat{\mu}}u^{+T}\mathbf{R}u^+ \quad (94)$$

Em seguida, substitui-se (59) em (84) e obtém-se:

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{x}^+, u^+) &= (\mathbf{A}_d\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u^+)^T\mathbf{P}(\mathbf{A}_d\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d u^+) - \mathbf{x}[k]^T\mathbf{P}\mathbf{x}[k] \\ &+ \mathbf{x}[k]^T\frac{1}{\hat{\mu}}\mathbf{Q}\mathbf{x}[k] + \frac{1}{\hat{\mu}}u^{+T}\mathbf{R}u^+ \end{aligned} \quad (95)$$

Que é o critério de degradação a partir do qual será tomada a decisão de atualizar o sinal de controle ou não. A Figura 9 a seguir demonstra um fluxograma base da programação do código que realiza a amostragem no tempo discreto.

Figura 9: Fluxograma para amostragem do sinal de controle no tempo discreto



Os dois processos de amostragem assíncrona apresentados nesta seção e na seção 4.3 representam a modelagem da técnica conhecida como *event-triggered control* que foi introduzida no capítulo 1 e na seção 4.2. Esta técnica consiste em atualizar o controle em instantes determinados *online* baseados apenas na informação da última amostra.

Se comparadas as técnicas, a de *event-triggered control* pode ser considerada mais vantajosa, pois não é necessário monitorar o estado da planta permanentemente, sendo que tal benefício é importante em situações em que realizar a amostragem apresenta custos elevados.

5 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

5.1 Introdução

Após toda a fundamentação e equacionamento do problema de amostragem assíncrona nos tempos contínuo e discreto terem sido desenvolvidos minuciosamente ao longo dos capítulos 2, 3 e 4, as simulações serão feitas através de algoritmos implementados por meio do *software* matemático Matlab R2010a (versão 7.10.0.499), responsável também pela geração dos gráficos do sistema. Inicialmente, as matrizes utilizadas para resolver os problemas propostos são baseadas no exemplo simulado em SEURET *et al* (2012). Os códigos utilizados para as simulações estão apresentados nos anexos.

5.2 Estrutura da Simulação

Para cada caso, no tempo contínuo e no tempo discreto, os passos a serem seguidos são os mesmos. Em primeira instância, executa-se o algoritmo para a resolução do problema de controle ótimo apresentado nas seções 2.7 e 2.8 a fim de resolver os problemas propostos em (57) e (80) onde se busca minimizar a matriz \mathbf{P} de forma a reduzir a um mínimo a energia gasta no sistema. O problema de controle ótimo visa resolver as LMIs de maneira a encontrar as variáveis matriciais \mathbf{K}_{opt} e \mathbf{P}_{opt} que fazem com que o sistema permaneça estável. Para garantir tal estabilidade, é preciso que as seguintes condições sejam verificadas:

- Caso contínuo:

$$\text{autovalores}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) = a + jb; \quad a < 0 \quad (96)$$

- Caso discreto:

$$\text{autovalores}(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d\mathbf{K}) = c + jd; \quad \sqrt{c^2 + d^2} < 1 \quad (97)$$

Ou seja, para o caso contínuo, é necessário que os autovalores de $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})$ estejam localizados no semiplano esquerdo, isto é, que possuam parte real negativa, enquanto que para o caso discreto é preciso que estes autovalores estejam contidos dentro do círculo de raio unitário.

Após estas condições terem sido verificadas com as variáveis matriciais encontradas, é realizado o *loop* de iterações para a simulação do sistema em malha fechada e também para a simulação do processo de amostragem assíncrona seguindo os passos descritos nos

fluxogramas da Figura 8 e Figura 9 apresentando como resultado os gráficos que serão exibidos nas seções seguintes.

5.3 Simulação do Sistema Contínuo

A fim de realizar uma comparação entre o sistema contínuo e o resultado que será obtido com a aplicação da técnica de amostragem assíncrona, é implementada uma simulação numérica do sistema contínuo apresentado em (35). Para tanto, inicialmente reescreve-se este sistema utilizando a aproximação numérica de Euler para o vetor de derivadas dos estados $\dot{\mathbf{x}}$ como (LAGES, 2011):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)}{\tau} \quad (98)$$

Onde τ é o intervalo de tempo entre as duas amostras do sinal de interesse utilizadas para a aproximação da derivada. Portanto, as equações do sistema (35) e (36) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \tau(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u^+) + \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{x}^+ = \tau(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u^+) + \mathbf{x}(t) \quad (99)$$

$$u^+ = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}^+ \quad (100)$$

Onde \mathbf{x}^+ e u^+ representam o estado que será amostrado com a aproximação de Euler e o sinal de controle, respectivamente, e k é um número inteiro dado como indicador do número da iteração para a aproximação da derivada.

5.4 Resultados da Simulação em Tempo Contínuo

Nas próximas seções serão realizadas simulações variando o parâmetro escalar, associado à energia do sinal de controle, como visto em (38). Ainda, o critério de desempenho $\hat{\mu}$ terá seu valor alterado gradativamente – para diferentes valores de \mathbf{R} – até que as respostas não apresentem diferenças significativas entre si.

5.4.1 Simulação com $\mathbf{R} = \mathbf{0}, 5$

Inicialmente, empregam-se as matrizes do exemplo simulado em SEURET *et al* (2012) para definir o sistema em (35), pois este sistema não será alterado ao longo das simulações,

tanto para o caso contínuo quanto para o discreto. Dessa forma, tem-se que as matrizes **A** e **B** são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -0,1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (101)$$

No entanto, das matrizes **Q** e **R** do critério linear quadrático em (38), apenas a matriz **R** terá seu valor alterado para efeitos de simulação. Inicialmente, definem-se estas matrizes como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = 0,5 \quad (102)$$

As condições iniciais dos estados e do sinal de controle u também manter-se-ão inalteradas e estas são:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,375 \\ -6,1 \end{bmatrix} \quad u(0) = \mathbf{K}_{\text{opt}}\mathbf{x}(0) \quad (103)$$

Portanto, definidas as matrizes **A**, **B**, **Q** e **R** e escolhendo um valor inicial de $\mu = 1$, resolve-se o problema de minimização (57) para encontrar as variáveis otimizadas, tais como:

$$\mathbf{P}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 0,8488 & 0,1343 \\ 0,1343 & 0,1102 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\text{opt}} = [-0,5755 \quad -0,9730] \quad (104)$$

Estas matrizes são consideradas a solução ótima do problema (52) e, comprovando a estabilidade do sistema, tem-se:

$$\text{autovalores}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_{\text{opt}}) = \begin{bmatrix} -2,0164 \\ -7,8136 \end{bmatrix} \quad (105)$$

Para a simulação pelo critério de degradação do controle em (89), escolhe-se:

$$\hat{\mu} = 1 \quad (106)$$

E para a simulação das derivadas pela aproximação do Método de Euler, define-se um passo de integração $\tau = 0,001s$.

Sendo assim, obtêm-se as curvas de simulação do sistema contínuo e as amostragens dos estados e do sinal de controle, bem como a evolução da degradação do controle e a função de Lyapunov (39) e sua derivada. A partir da Figura 10, nota-se que o objetivo de minimizar a energia em (44) é atingido, pois a área sob a curva dos estados é menor no caso em que se usou a amostragem assíncrona em relação à curva de simulação numérica do sistema contínuo. Porém, o primeiro gráfico da Figura 11 demonstra que a energia gasta no sinal do controle praticamente manteve-se inalterada, no entanto há uma redução do número de amostragens realizadas, como esperado. Além disso, a Figura 12 mostra que, de acordo com as propriedades apresentadas na seção 2.3, o sistema confirma-se estável, pois a função de

Lyapunov converge para zero quando $t \rightarrow \infty$ e também é positiva para todo instante de tempo maior que zero e a estabilização do sistema ocorre em aproximadamente 0,2 segundos.

Figura 10: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados x_1 e x_2 com $\hat{\mu} = 1$

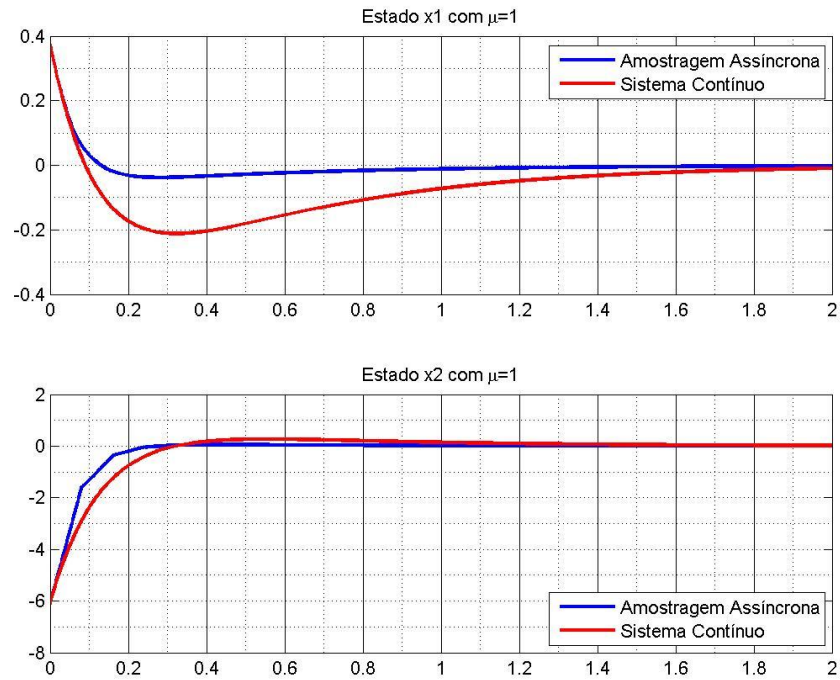


Figura 11: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 1$

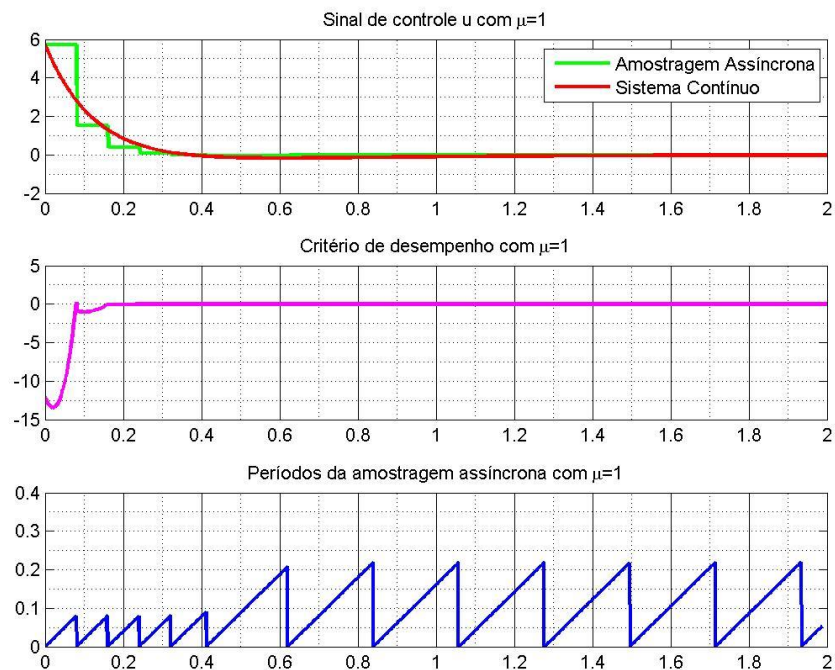
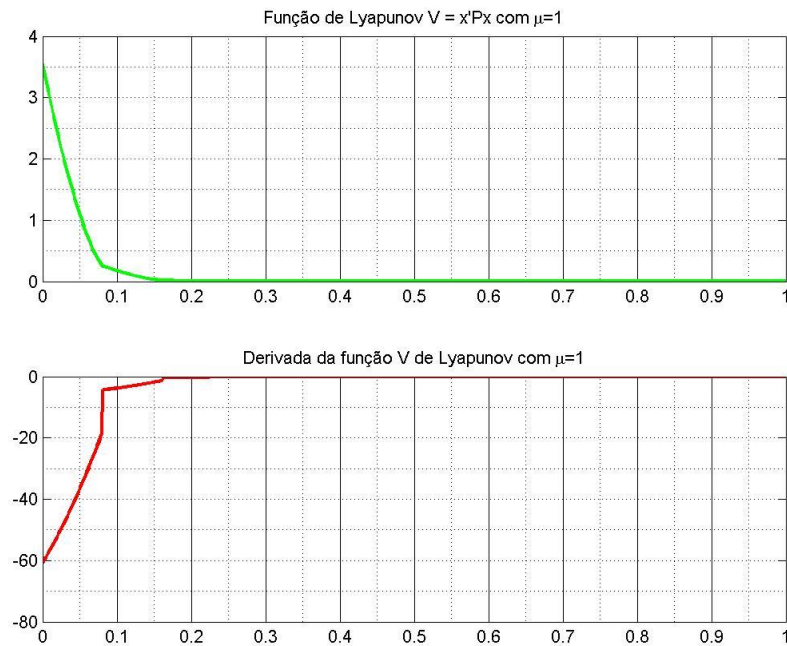


Figura 12: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$

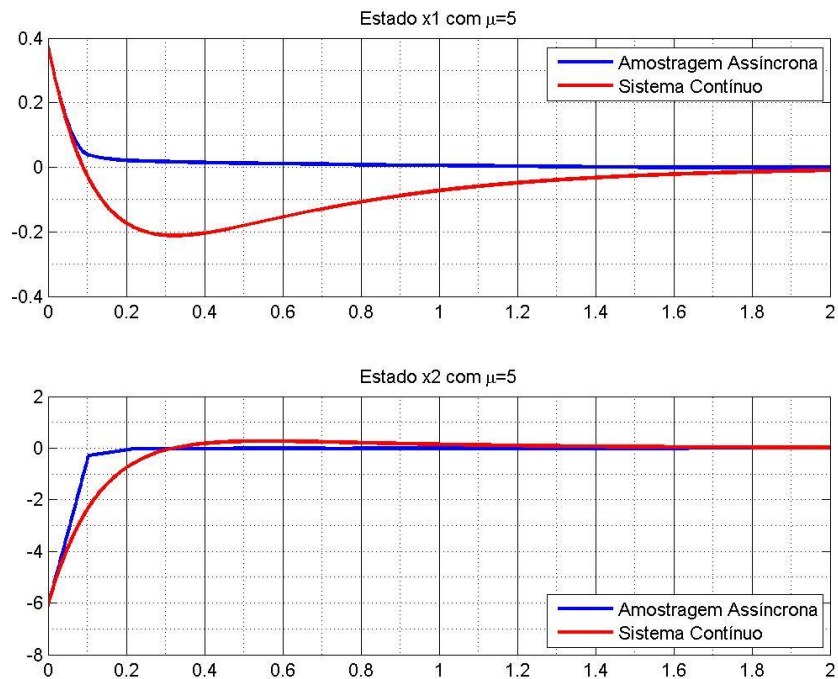


Mantendo-se todas as matrizes inalteradas e aumentando ligeiramente o valor de $\hat{\mu}$ para:

$$\hat{\mu} = 5 \quad (107)$$

A nova simulação resulta nas curvas a seguir:

Figura 13: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados x_1 e x_2 com $\hat{\mu} = 5$



Com o aumento de $\hat{\mu}$ nota-se que o estado do sistema converge para zero ainda mais rapidamente, por volta de 0,15 segundos, tempo que a função de Lyapunov leva para convergir para zero na Figura 15, e que a área sob a curva dos estados com amostragem assíncrona é ainda menor, como pode ser visto na Figura 13.

Por outro lado, o sinal da degradação de desempenho e o sinal de controle mostram que um menor número de atualizações do sinal de controle é efetuado, portanto, espera-se que, para um valor de $\hat{\mu}$ ainda maior, menos amostragens sejam realizadas para o controle. Provocando uma quantidade inferior de troca de mensagens entre o controlador e a planta, evitando assim um tráfego alto de dados e um congestionamento da rede. Isto ocorre porque conforme o valor de $\hat{\mu}$ cresce, conseqüentemente o conjunto de *flow* torna-se maior e o conjunto de *jump* torna-se estritamente menor. Esta alteração no tamanho dos conjuntos provoca uma perda de desempenho, pois um conjunto de *flow* maior implica em um menor número de respostas para as atualizações da amostragem tanto dos estados quanto do sinal de controle. Isto ficará ainda mais evidente nas simulações seguintes onde serão adotados valores de $\hat{\mu}$ ainda maiores.

Figura 14: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 5$

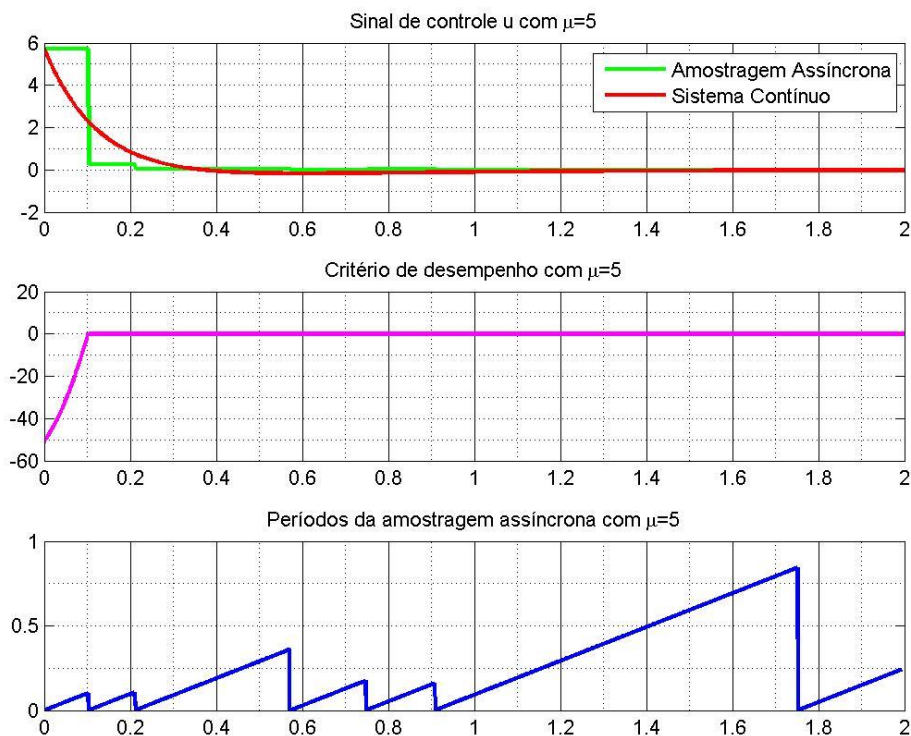
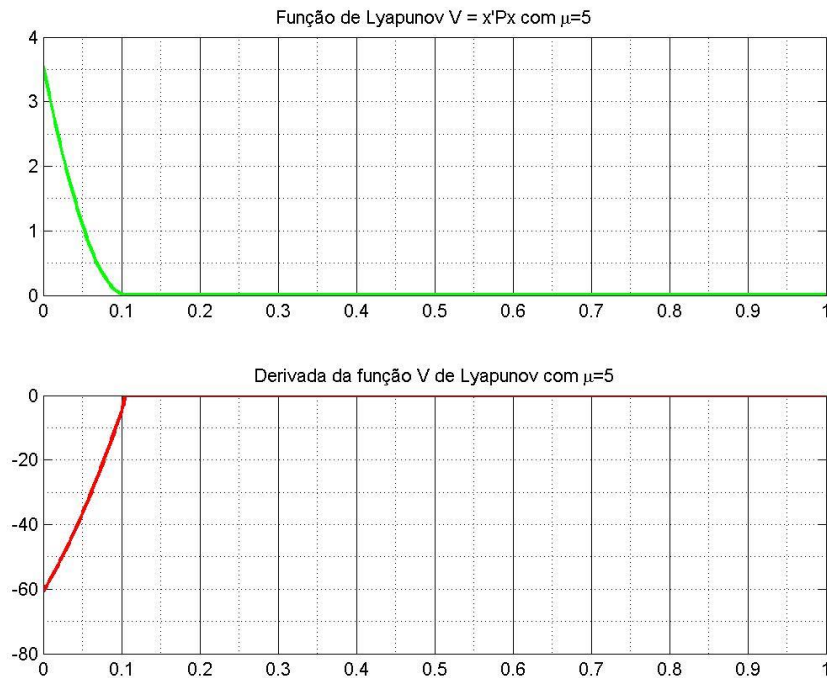


Figura 15: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$ 

Tomando agora $\hat{\mu}$ como:

$$\hat{\mu} = 15 \quad (108)$$

As curvas obtidas nos resultados da simulação são apresentadas a seguir e, como esperado, a área sob a curva amostrada dos estados na Figura 16 torna-se cada vez menor com o aumento de $\hat{\mu}$, o que leva a concluir que o esforço realizado na amostragem dos estados é consideravelmente menor por haver um menor número de atualizações sendo realizadas.

A quantidade de atualizações realizadas no sinal de controle tornou-se menor, ou seja, o sinal de controle está sendo cada vez menos amostrado, o que provoca uma diminuição no tráfego de dados da rede, evitando que ela congestionue e comprometa o sistema. Apesar do fato de haver menos atualizações e menos trocas de mensagens na rede, entende-se que o sistema está abdicando de um desempenho melhor referente às respostas a perturbações, dado que o controle não é atualizado tão frequentemente. Sendo assim, na ocorrência de uma rápida variação da referência ou de uma perturbação, o sistema deverá esperar até que o próximo evento ocorra para que o controle seja atualizado. Por outro lado, o tempo para que a função de Lyapunov convirja para zero também é reduzido com o aumento de $\hat{\mu}$ e agora passa a ser de aproximadamente 0,1 segundos. Estas observações são feitas com relação à Figura 17 e a Figura 18, respectivamente.

Figura 16: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados x_1 e x_2 com $\hat{\mu} = 15$

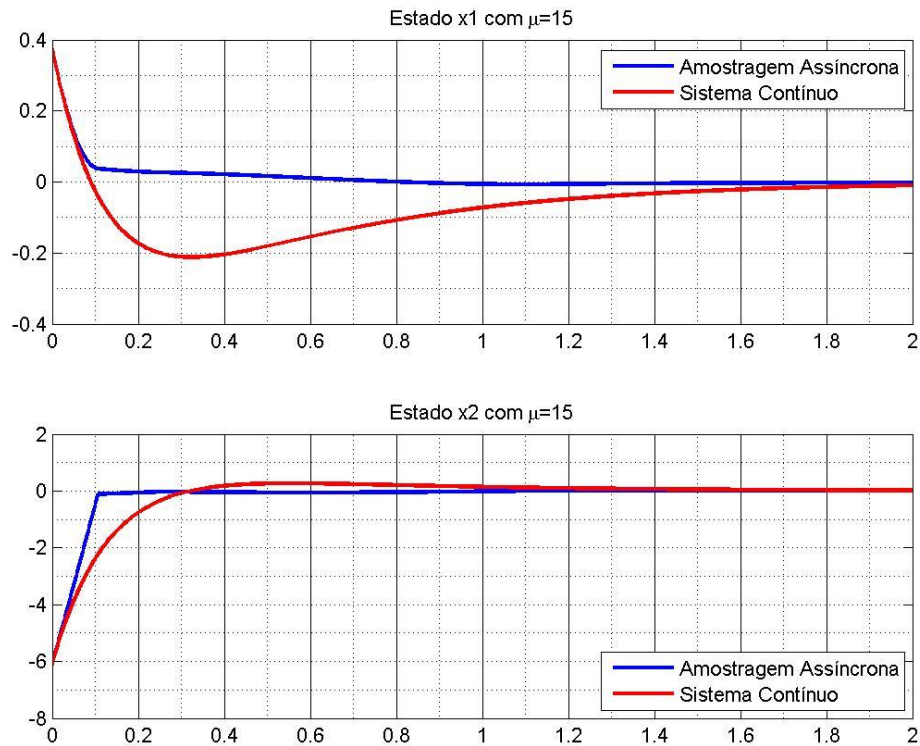


Figura 17: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 15$

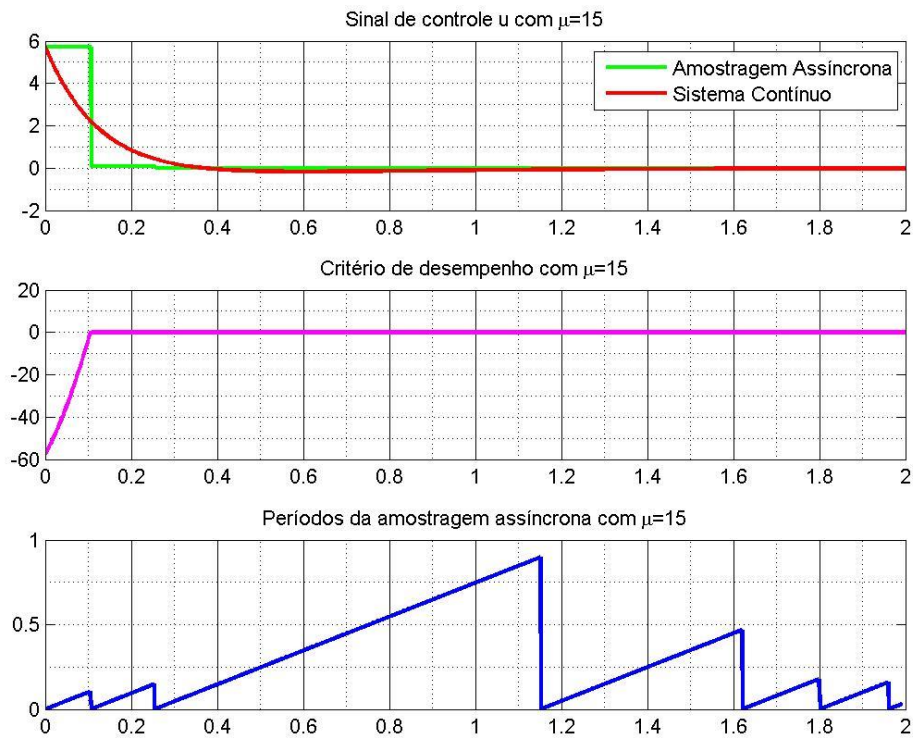
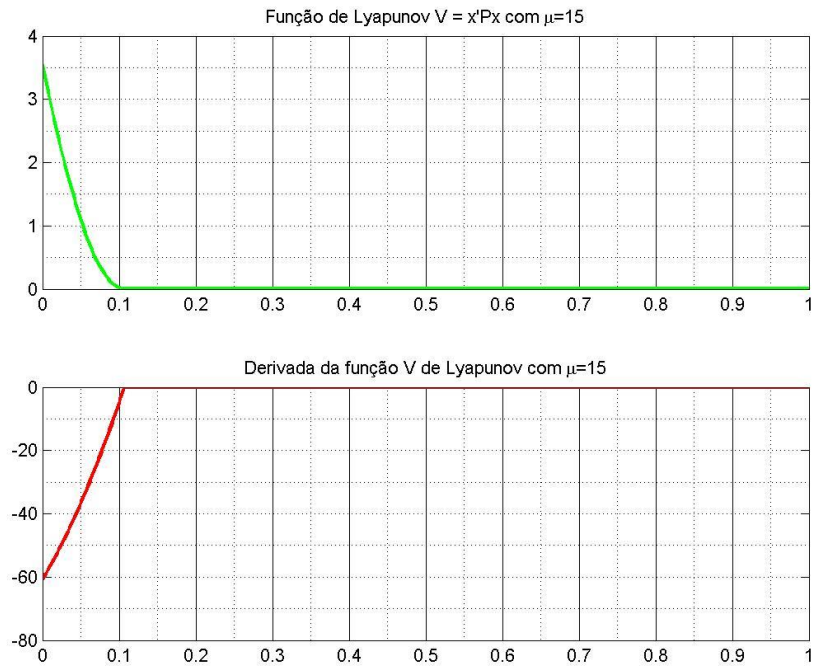
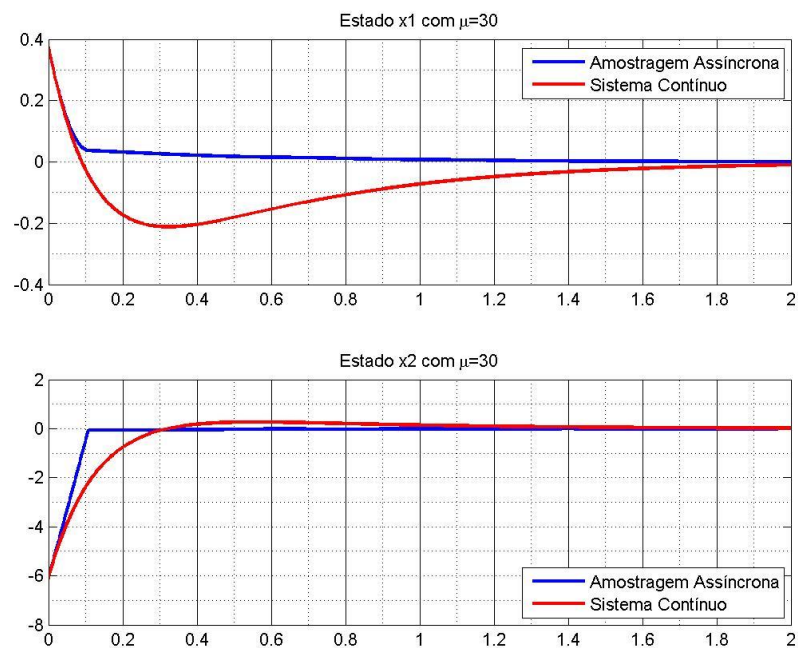


Figura 18: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$ 

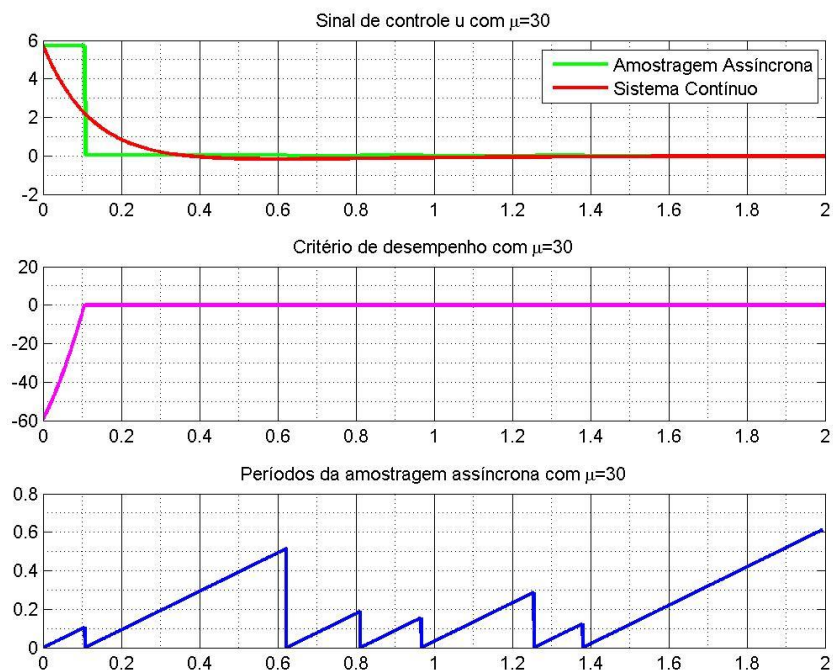
Para uma última simulação sem alteração nas matrizes do sistema, as figuras a seguir exemplificam o que ocorre com o aumento ainda maior de $\hat{\mu}$, escolhendo-o como:

$$\hat{\mu} = 30 \quad (109)$$

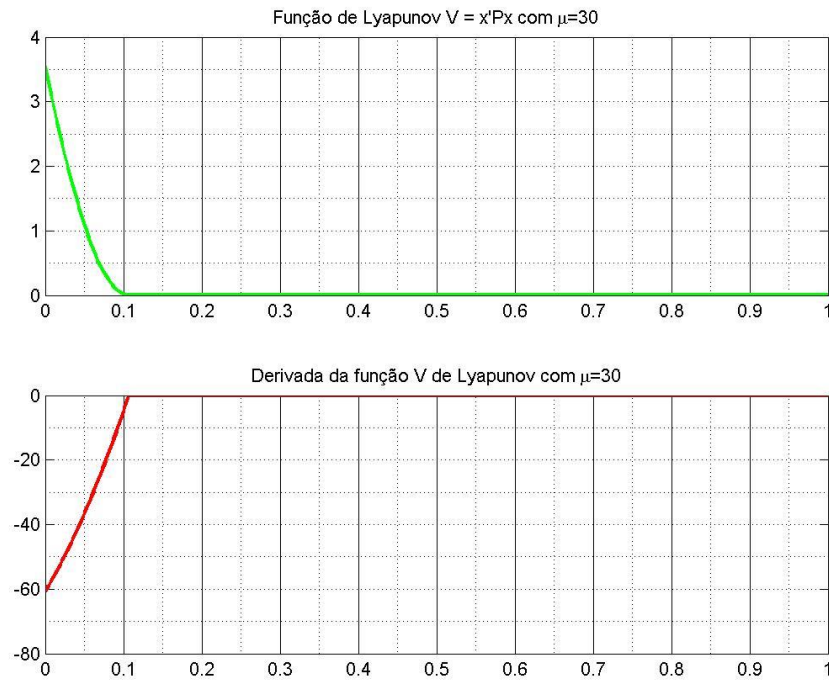
Figura 19: Comparação dos sinais amostrado e simulado dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 com $\hat{\mu} = 30$ 

Nota-se que após um determinado valor de $\hat{\mu}$, a curva de amostragem assíncrona dos estados já não sofre variações relevantes, como pode ser visto comparando-se a Figura 16 com a Figura 19. O mesmo pode ser verificado para uma comparação entre a Figura 17 e a Figura 20, onde são praticamente imperceptíveis as variações nas curvas de amostragem assíncrona do controle. Isto ocorre porque o valor escolhido para $\hat{\mu}$ está diretamente relacionado com a amplitude do conjunto de *flow* (\mathcal{F}_E), como mencionado anteriormente. Quanto maior for o valor de $\hat{\mu}$, maior será também o conjunto de *flow*, o que implicará em uma menor frequência de atualizações do sinal de controle (SEURET, PRIEUR, *et al.*, 2012).

Figura 20: Sinal de controle e evolução do critério de degradação com $\hat{\mu} = 30$



Note que apesar de o valor de $\hat{\mu}$ ser elevado, a Figura 21 prova, através da função de Lyapunov, que o sistema é assintoticamente estável. Este valor de $\hat{\mu}$, ao ser incrementado, expande o conjunto de *flow*, diminuindo cada vez mais a quantidade de vezes que o controle será atualizado.

Figura 21: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 30$ 

5.4.2 Simulação com $R = 2$

Para esta nova simulação, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} do sistema permanecerão as mesmas enquanto que o valor da matriz \mathbf{R} , que está relacionada à energia do controle, será alterado e manter-se-á constante a matriz \mathbf{Q} , relacionada à energia dos estados. Logo, tem-se:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = 2 \quad (110)$$

Com as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} e \mathbf{R} definidas, o resultado da simulação das LMIs retorna os valores ótimos como segue:

$$\mathbf{P}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} 01,6271 & 0,2701 \\ 0,2701 & 0,2844 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{\text{opt}} = [0,1584 \quad -0,4598] \quad (111)$$

Estes valores ótimos de \mathbf{P}_{opt} e \mathbf{K}_{opt} provam que o sistema é estável dado que:

$$\text{autovalores}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_{\text{opt}}) = \begin{bmatrix} -2,3490 + j1,7025 \\ -2,3490 - j1,7025 \end{bmatrix} \quad (112)$$

Agora, escolhendo um valor de $\hat{\mu}$ como:

$$\hat{\mu} = 1 \quad (113)$$

Encontram-se as respostas exibidas nos gráficos das Figura 22, Figura 23 e Figura 24 a seguir. A partir da Figura 22 percebe-se que a amostragem assíncrona apresentou uma

melhoria para a resposta de ambos os estados x_1 e x_2 , sendo que para o estado x_1 a mudança na resposta foi ainda maior para a amostragem assíncrona se comparada ao sistema contínuo. Ou seja, houve uma redução consideravelmente maior o esforço realizado por parte dos estados. Por outro lado, enquanto o balanço da energia nos estados apresenta-se menor para a nova técnica de amostragem, a Figura 23 demonstra que o mesmo não ocorre para o sinal de controle. Neste caso, a diferença da energia gasta entre as duas técnicas de amostragem é menos discrepante, podendo até ser desconsiderada, visto que as áreas abaixo das duas curvas são aproximadamente iguais. Há, porém, uma redução na quantidade de atualizações do sinal de controle, caracterizando um controle mais agressivo de forma a levar o sistema mais rapidamente a sua estabilidade e também, por diminuir o número de atualizações, diminui-se a quantidade de dados trafegando na rede.

Observando a Figura 24 é possível ver que o sistema é estável pela convergência da função de Lyapunov para zero quando $t \rightarrow \infty$. Em geral, o resultado para este caso apresenta um desempenho inferior ao apresentado na seção 5.4.1 com $R = 0,5$.

Figura 22: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo contínuo com $\hat{\mu} = 1$ e $R = 2$

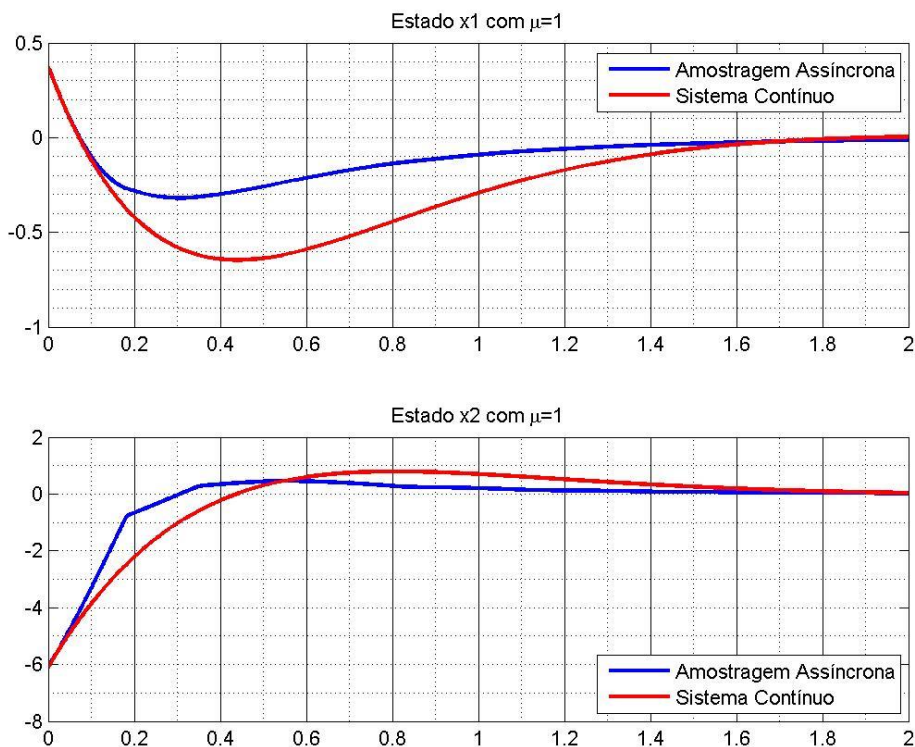


Figura 23: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$

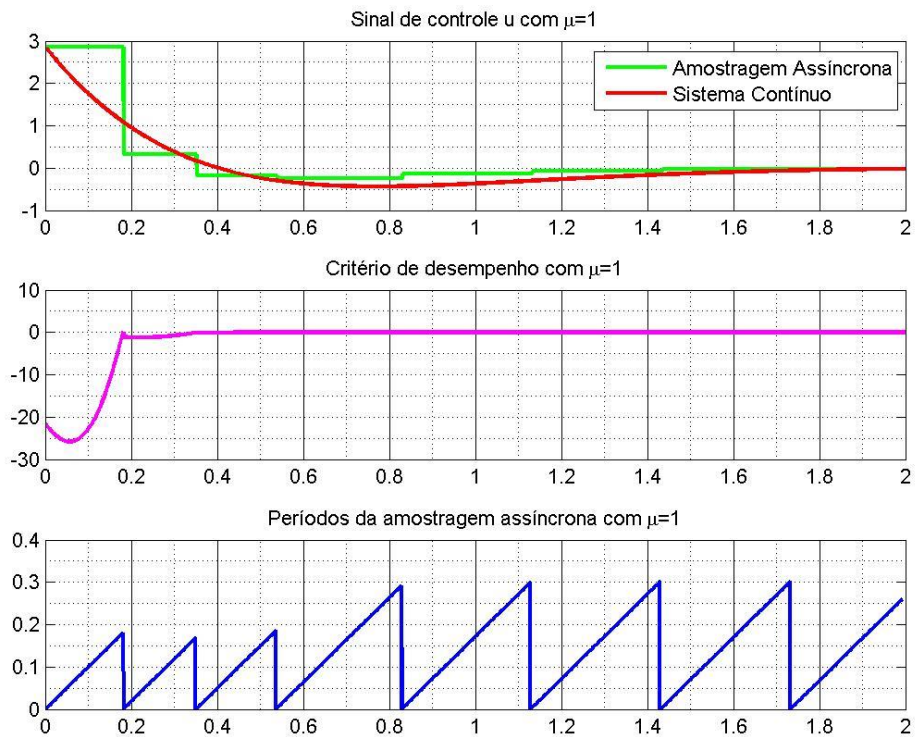
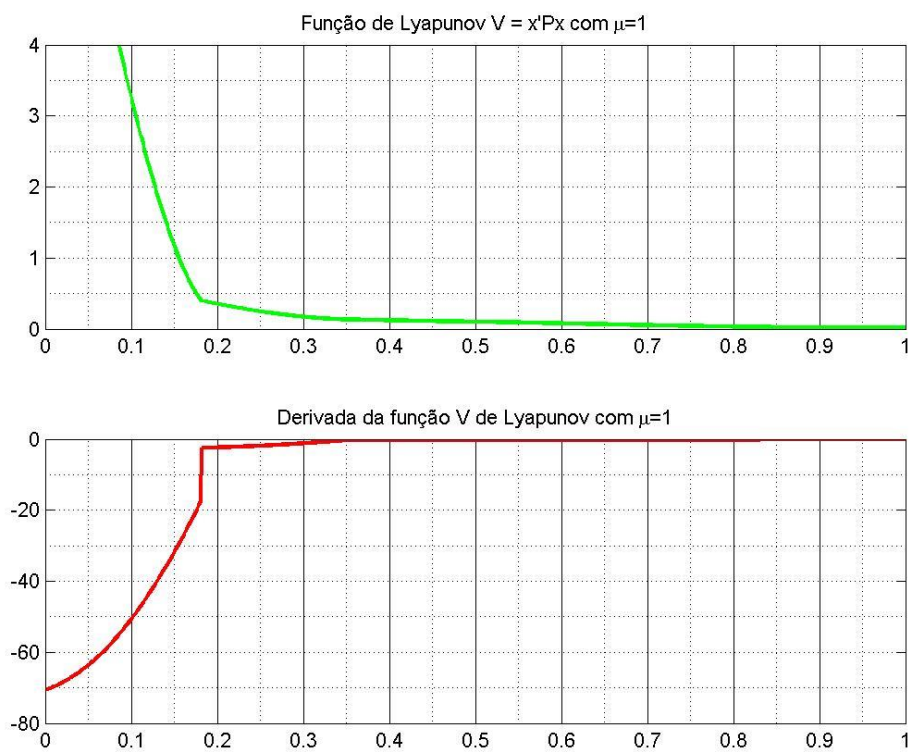


Figura 24: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$



Da mesma forma que foi feito para $\mathbf{R} = 0,5$, escolhe-se diferentes valores de $\hat{\mu}$ para justificar a utilização da amostragem assíncrona. Toma-se agora:

$$\hat{\mu} = 5 \quad (114)$$

Os resultados exibidos na Figura 25, e Figura 27 são semelhantes aos resultados encontrados na seção 5.4.1. As curvas dos estados apresentam uma melhor resposta quando utilizada a técnica de amostragem assíncrona, mostrando que a energia consumida neste caso é menor, enquanto que o sinal de controle não apresenta variações importantes na energia gasta ao mesmo tempo que começa a diminuir o número de atualizações efetuadas. Ainda, a função de Lyapunov e sua derivada na apresentam um ótimo desempenho, convergindo para zero em aproximadamente 0,2 segundos.

Figura 25: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo contínuo com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$

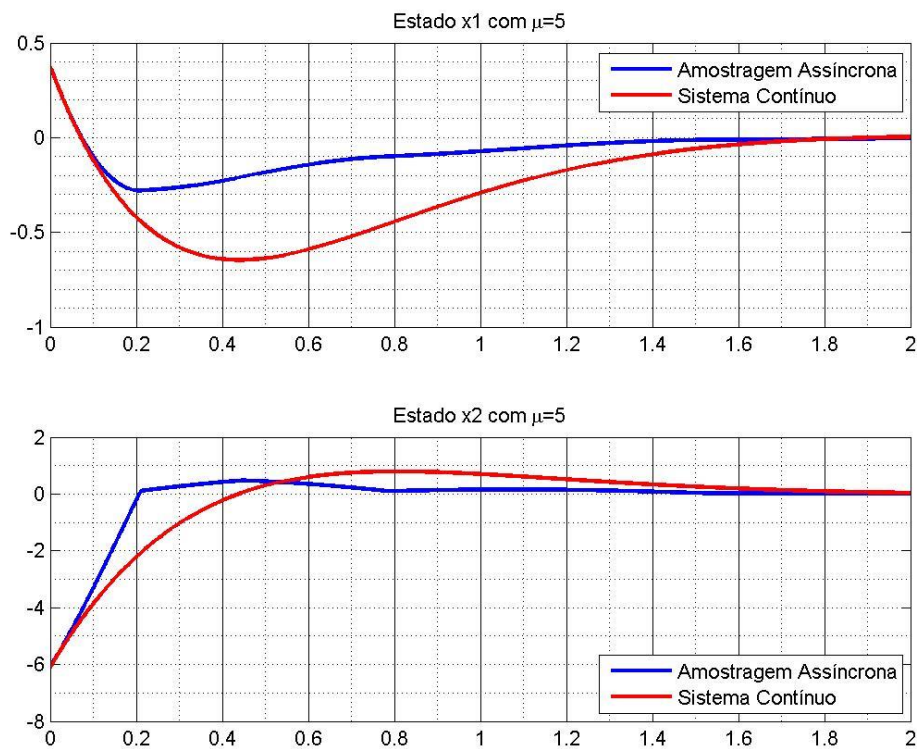


Figura 26: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = \mathbf{2}$

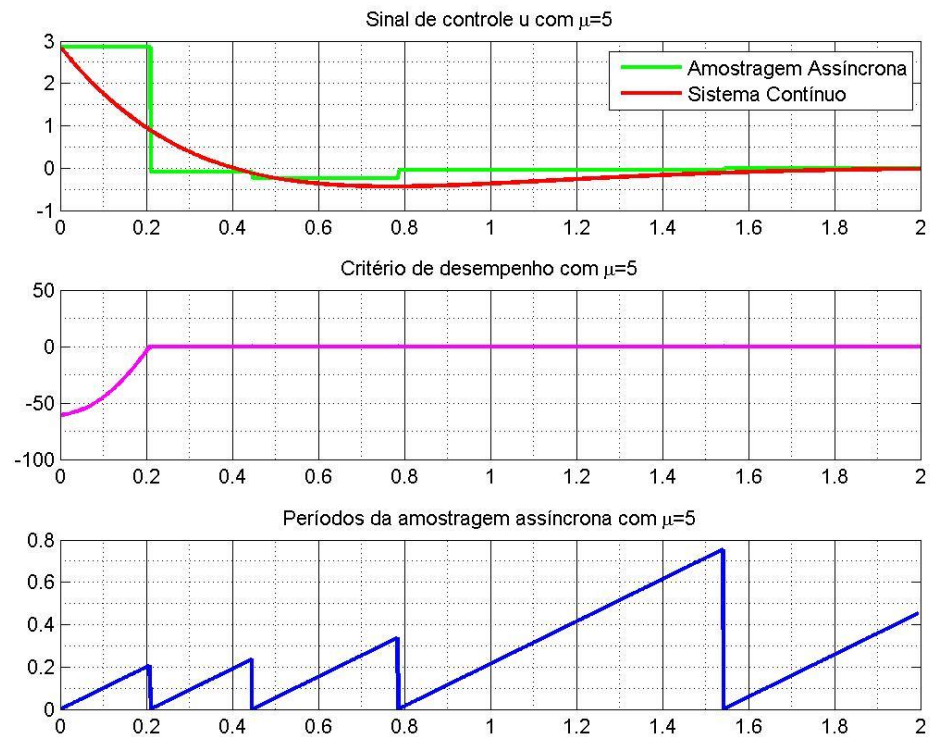
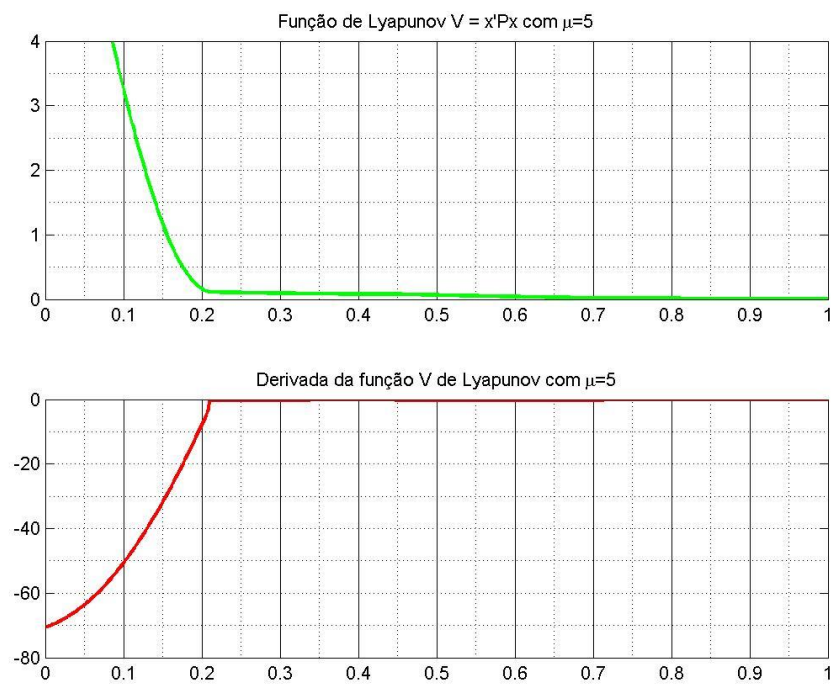


Figura 27: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = \mathbf{2}$



Por último, a Figura 28, Figura 29 e Figura 30 apresentam as simulações realizadas com o seguinte critério:

$$\hat{\mu} = 15 \quad (115)$$

Figura 28: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo contínuo com $\hat{\mu} = 15$ e $R = 2$

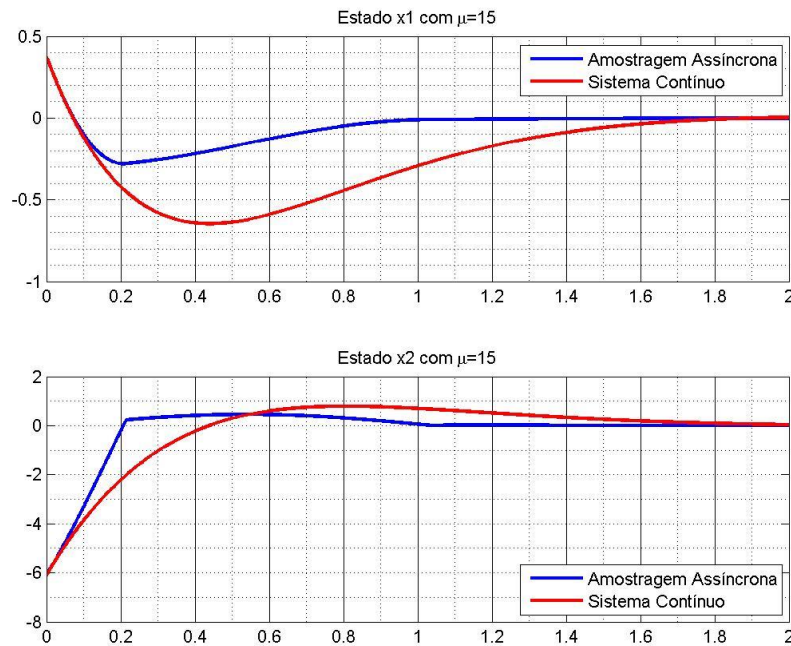


Figura 29: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 15$ e $R = 2$

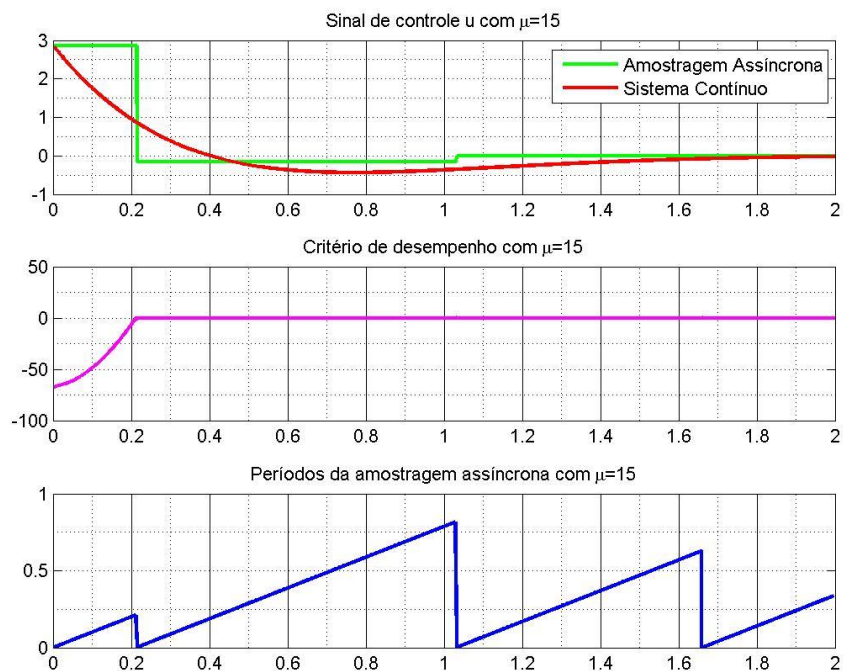
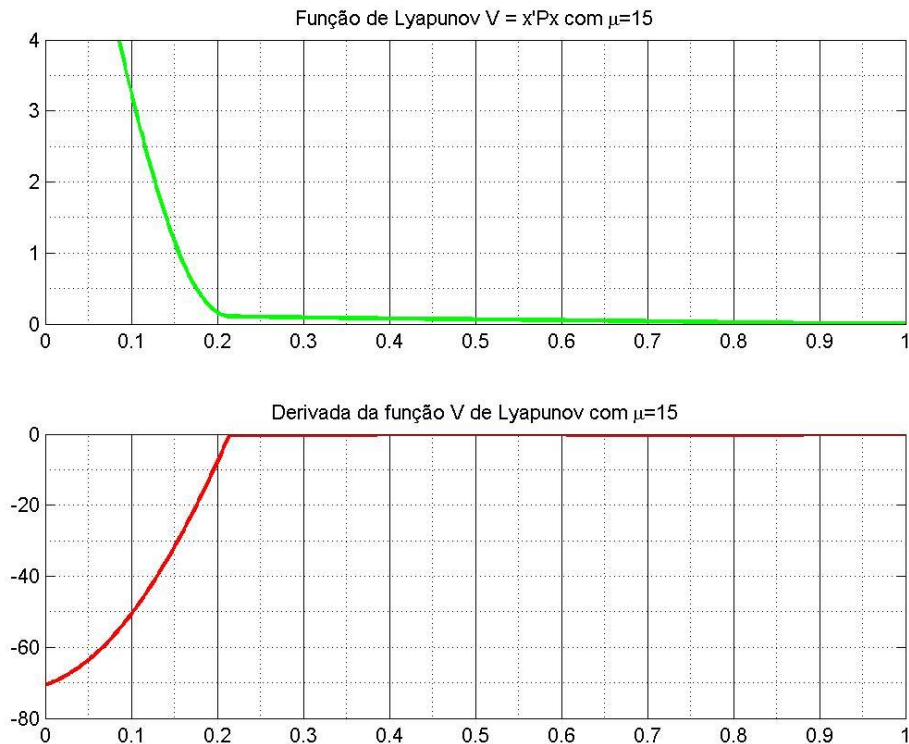


Figura 30: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$ 

Neste último caso, a resposta do sistema melhorou em termos do tempo de convergência como pode ser notado na Figura 30, porém, como esperado, para um valor crescente de $\hat{\mu}$ o sistema está apresentando desempenho inferior por expandir o conjunto de *flow*. Ou seja, o sistema não terá atualizações frequentes e pode não conseguir corrigir a ação de perturbações externas ou variações não esperadas da referência, fazendo com que o sistema tenha uma perda de desempenho ou instabilize-se.

Como foi determinado na seção 2.6, o escalar \mathbf{R} é responsável por atuar no esforço realizado pelo sinal de controle. Ao aumentar este escalar, o mesmo exerce um peso ainda maior sobre o controle e o aumento de quatro vezes em seu valor levou o sistema a penalizar mais o controle do que os estados no resultado da amostragem assíncrona, fazendo com que o controle sofresse uma redução mais agressiva na quantidade de atualizações realizadas.

5.5 Resultados da Simulação em Tempo Discreto

Como foi feito para o tempo contínuo na seção anterior, o parâmetro do critério de desempenho $\hat{\mu}$ será alterado gradativamente para duas situações de variação do parâmetro escalar \mathbf{R} .

5.5.1 Simulação com $R = 0,5$

Para a simulação em tempo discreto, utilizam-se as mesmas matrizes empregadas na simulação de tempo contínuo baseadas no exemplo presente em SEURET *et al* (2012). As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} e \mathbf{R} são como apresentadas em (101) e (102). Já as condições iniciais para $\mathbf{x}(0)$ e $u(0)$ são idênticas às definidas em (103).

Adotando um período de amostragem $T_s = 0,01s$, as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d discretizadas através de um retentor de ordem zero são:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0,9995 & 0,01 \\ -0,0999 & 0,9985 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0,0005 \\ 0,0999 \end{bmatrix} \quad (116)$$

Com estas matrizes definidas, resolve-se o problema de minimização (80) obtendo-se as variáveis otimizadas \mathbf{P}_{opt} e \mathbf{K}_{opt} como:

$$\mathbf{P}_{opt} = \begin{bmatrix} 73,0342 & 8,3033 \\ 8,3033 & 9,2287 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{opt} = [-1,3042 \quad -1,5745] \quad (117)$$

Essas variáveis são a solução ótima do problema apresentado em (80) pois elas minimizam o problema de consumo elevado de energia e não instabilizam o sistema, ou seja:

$$\text{autovalores}(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}_{opt}) = \begin{bmatrix} 0,9840 \\ 0,8560 \end{bmatrix} \quad (118)$$

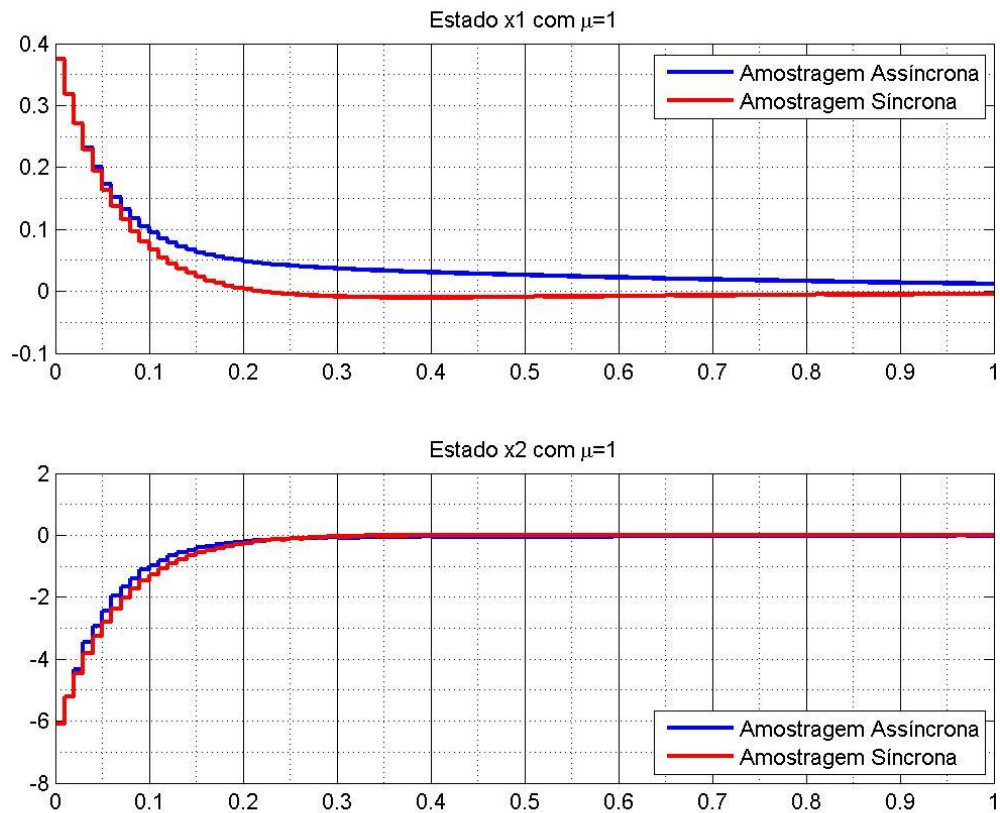
Nota-se que os autovalores atendem ao requisito de estabilidade para sistemas discretos no qual estes devem estar contidos dentro do círculo de raio unitário.

Adotando um valor do critério de desempenho $\hat{\mu}$ como:

$$\hat{\mu} = 1 \quad (119)$$

Então se aplicam as matrizes (116) para a simulação através do critério de degradação do controle apresentado em (95), obtêm-se as figuras exibidas na sequência. A partir da Figura 31 percebe-se que a utilização desta técnica de amostragem assíncrona para o caso discreto, ao contrário do ocorrido no caso contínuo, não proporcionou uma redução no consumo de energia por parte dos estados, e sim aumentou o consumo de energia na amostragem dos sinais. Em especial, o estado \mathbf{x}_1 piorou o seu desempenho enquanto o estado \mathbf{x}_2 não apresentou variação significativa. Seguindo os resultados anteriormente apresentados, não espera-se que o desempenho apresente melhores resultados conforme aumente-se o valor de $\hat{\mu}$.

Figura 31: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 1$



Por outro lado, olhando agora para a Figura 32, nota-se que o sinal de controle sofre uma quantidade significativa de amostragens até que o sistema atinja sua estabilidade. Apesar de ocorrer um grande número de atualizações do sinal com a amostragem assíncrona, a utilização desta técnica torna-se mais vantajosa, pois este número é significativamente inferior à quantidade de amostras coletadas pela amostragem assíncrona. Portanto entende-se que há, de fato, uma redução no tráfego de dados da rede, diminuindo o número de transmissões realizadas sem necessidade.

No entanto, do ponto de vista da energia gasta pelo controle, esta é praticamente idêntica em ambas as técnicas de amostragem. No balanço final de energia – soma da energia gasta nos estados com a energia gasta no controle – percebe-se que o sistema apresentou um consumo de energia superior, mostrando que, para este caso em particular, não torna-se vantajoso utilizar a amostragem assíncrona no caso discreto. Na Figura 33, percebe-se, claramente, que o sistema ainda é estável, pois a função de Lyapunov é sempre positiva e converge para zero quando $t \rightarrow \infty$ e ainda sua derivada é negativa para todos os instantes de tempo.

Figura 32: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 1$

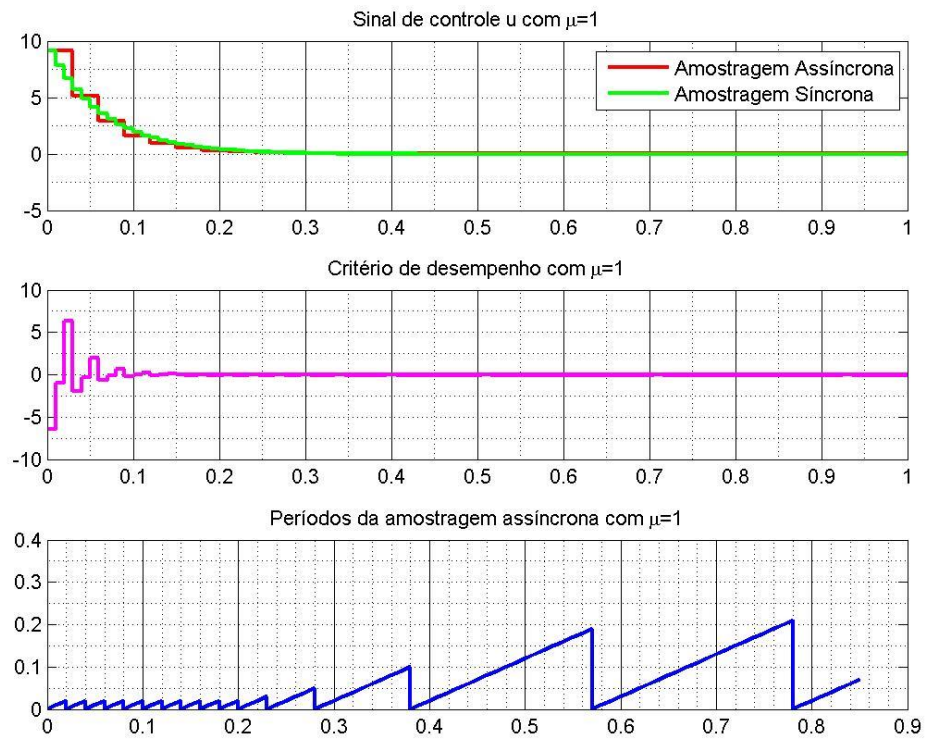
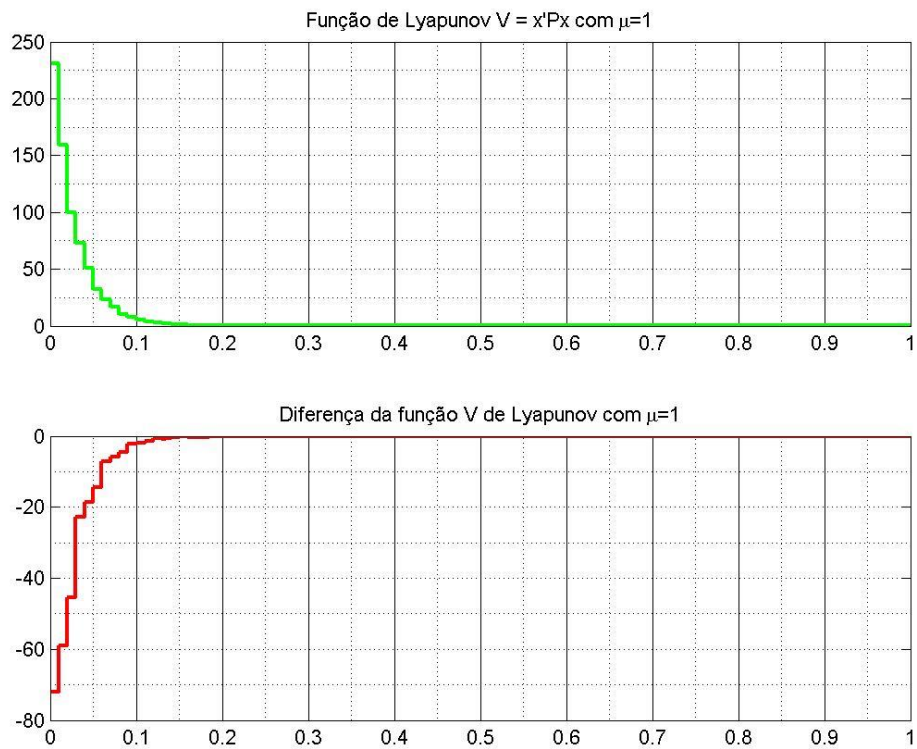


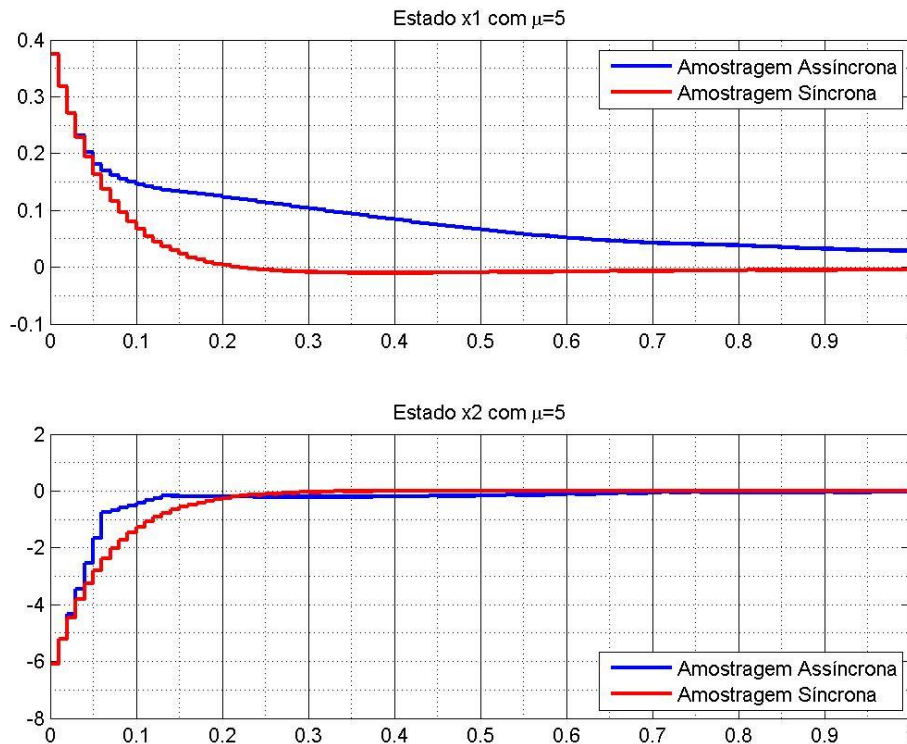
Figura 33: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$



Para demonstrar os efeitos ocorridos para diversos critérios de desempenho, adota-se agora um valor de $\hat{\mu}$, tal que:

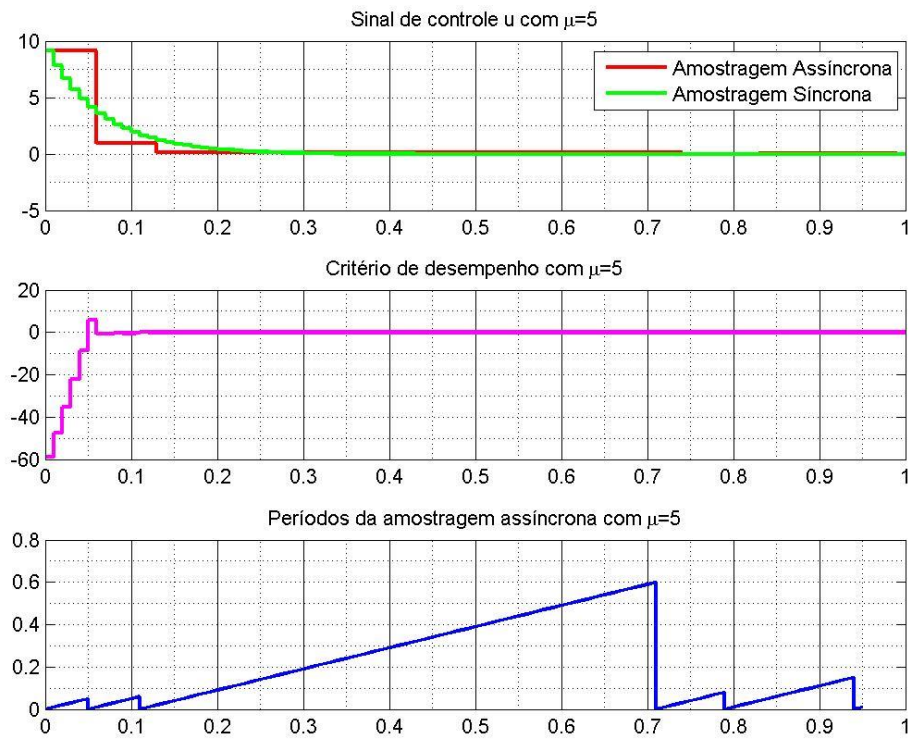
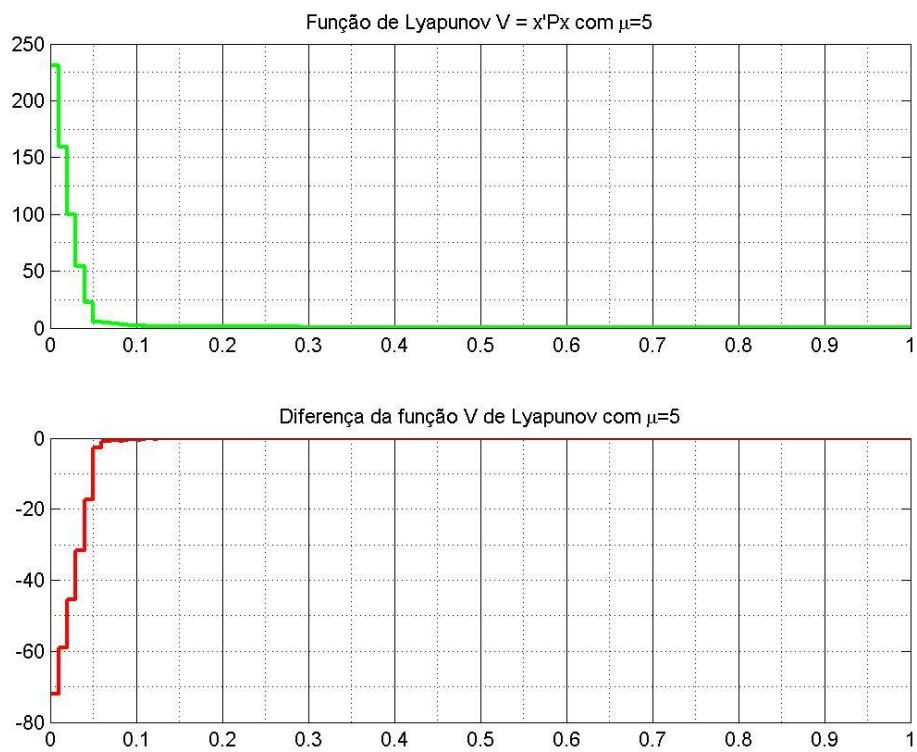
$$\hat{\mu} = 5 \quad (120)$$

Figura 34: Simulação dos estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 5$



Como esperado, visto o resultado na Figura 31, na Figura 34 nota-se que o aumento do valor de $\hat{\mu}$ no sistema torna o desempenho deste ainda pior, além de fazer com que leve mais tempo para o estado convergir a zero. Dado o tempo de resposta do estado \mathbf{x}_1 , ainda há o problema da energia desperdiçada utilizando a amostragem assíncrona. O estado \mathbf{x}_1 consome uma quantidade de energia superior ao utilizar-se da amostragem assíncrona enquanto que o estado \mathbf{x}_2 apresentou uma melhora ao utilizar esta técnica.

Olhando agora o gráfico do sinal de controle na Figura 35 percebe-se que a energia consumida em ambas as técnicas de amostragem são bastante próximas. Sendo assim, do ponto de vista da energia consumida, a técnica de amostragem assíncrona não é vantajosa, porém, nota-se que houve uma redução na quantidade de amostragens realizadas, o que implica em um menor tráfego de dados na rede, diminuindo assim as chances de congestionamento da rede e problemas na comunicação entre sensor, atuador e planta.

Figura 35: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 5$ Figura 36: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$ 

Mais duas simulações serão realizadas para este caso e os resultados serão apresentados na Figura 37, Figura 38 e Figura 39. Para tanto, define-se:

$$\hat{\mu} = 15 \quad (121)$$

Figura 37: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 15$

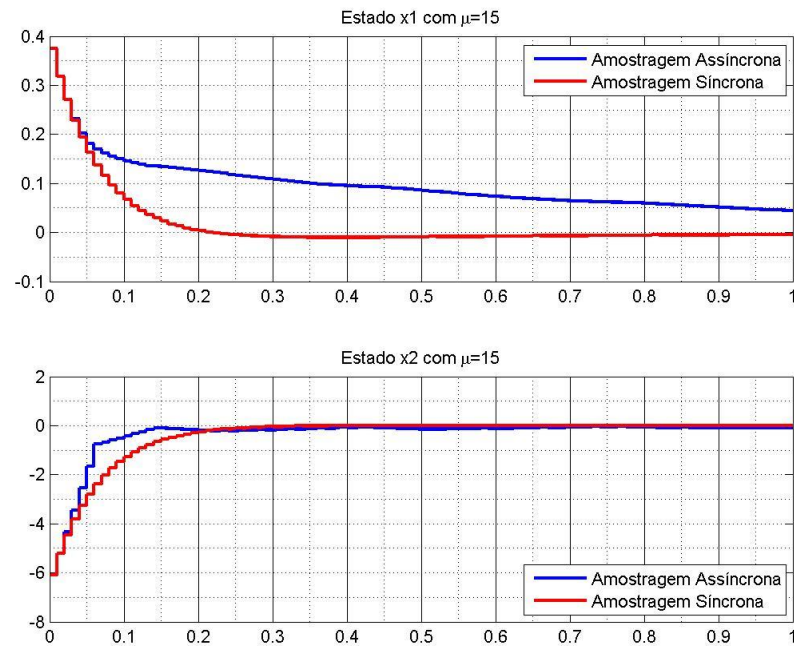


Figura 38: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 15$

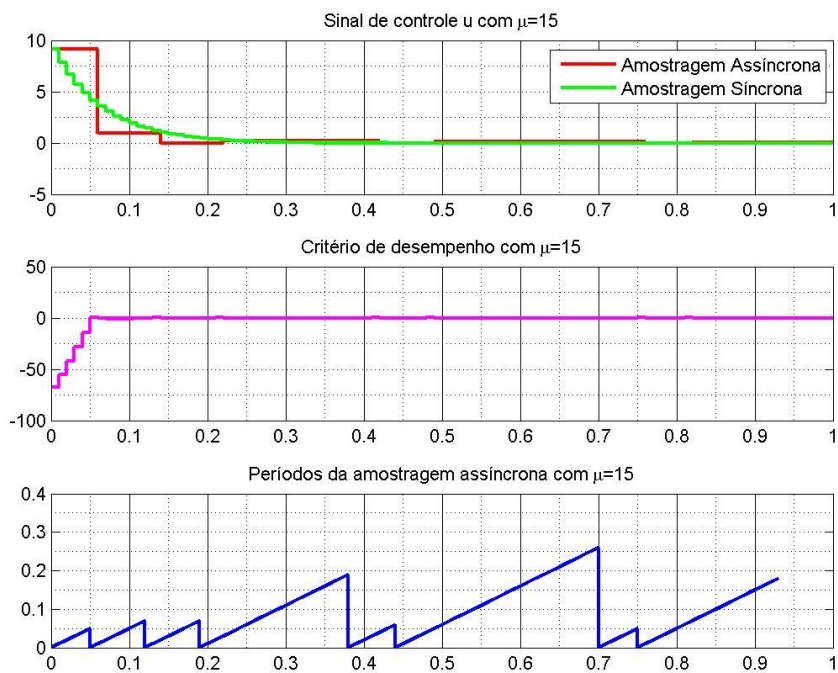
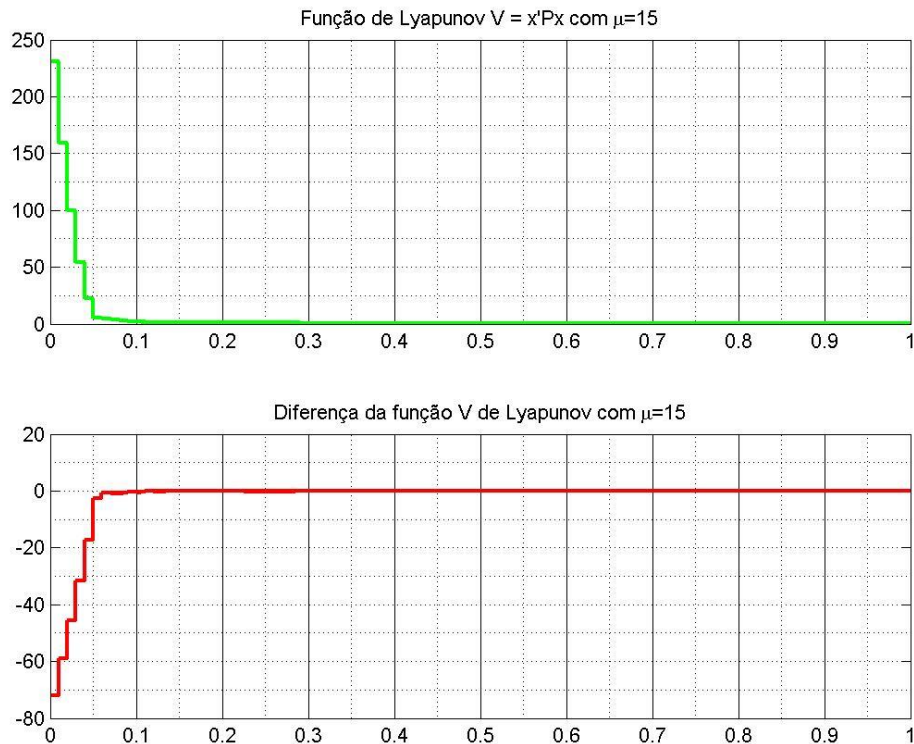


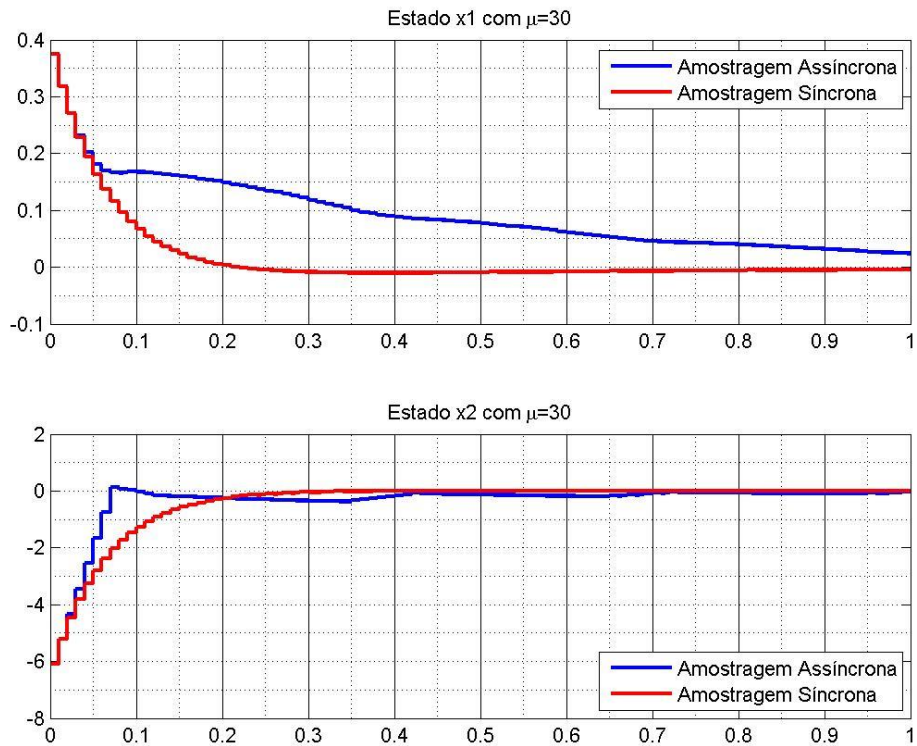
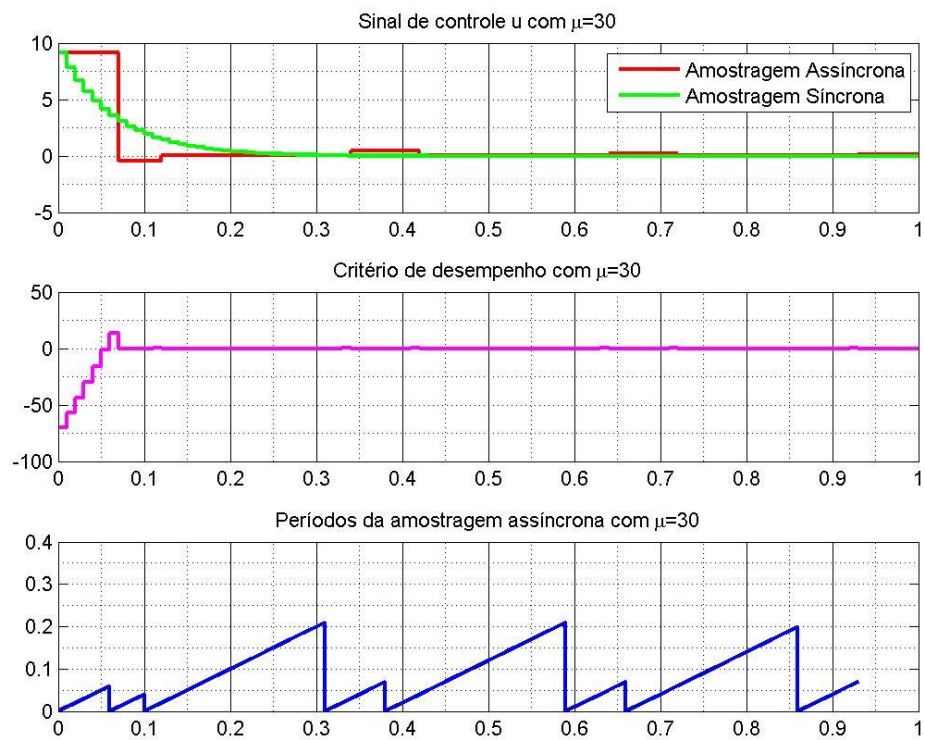
Figura 39: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$ 

Como previsto, seguindo a ideia do ocorrido em todas as simulações do caso discreto até então, a amostragem assíncrona mostra-se como uma técnica vantajosa por reduzir o número de amostragens realizadas, diminuindo assim o tráfego de mensagens na rede. As simulações permaneceram muito próximas nos casos de $\hat{\mu} = 5$ e $\hat{\mu} = 15$, apenas nota-se que o estado \mathbf{x}_1 apresentou um desempenho inferior ao observado anteriormente como é visto na Figura 37. Enquanto isso, o sinal de controle permanece praticamente o mesmo, mantendo a energia quase idêntica em ambas as técnicas de amostragem. De qualquer forma, devido ao comportamento do estado \mathbf{x}_1 , no balanço final, o sistema piorou seu desempenho e tornou-se mais dispendioso em termos de energia.

Por fim, realizou-se uma última simulação utilizando o seguinte critério:

$$\hat{\mu} = 30 \quad (122)$$

E ainda utilizando $\mathbf{R} = 0,5$. Neste caso, como nos anteriores, houve uma piora do desempenho, porém, o estado \mathbf{x}_1 apresentou um comportamento ainda mais insatisfatório, tornando a diferença de energia gasta entre as duas técnicas bastante discrepante enquanto o estado \mathbf{x}_2 melhorou seu comportamento em relação ao que vinha sendo observado. O caso acima mencionado está exibido na Figura 40.

Figura 40: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 30$ Figura 41: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 30$ 

Da mesma forma que para os outros valores de $\hat{\mu}$, o sinal de controle na Figura 41 permanece apresentando a mesma área sob as curvas de amostragem síncrona e assíncrona, porém, apresenta cada vez menos atualizações do controle, deixando o sistema suscetível à perturbações sem que possa corrigir a saída a tempo.

5.5.2 Simulação com $R = 2$

Da mesma forma que a seção 5.4.2 simulou o caso contínuo alterando a matriz \mathbf{R} , nesta seção o mesmo será realizado para o caso discreto. A matriz \mathbf{Q} será mantida constante enquanto a matriz \mathbf{R} será alterada como segue:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = 2 \quad (123)$$

As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} utilizadas são idênticas às que vêm sendo utilizadas ao longo deste capítulo e mantendo o período de amostragem do retentor de ordem zero em $T = 0,01s$, as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{B}_d permanecem iguais às apresentadas em (116). Com estas matrizes definidas e as condições iniciais inalteradas, resolve-se o mesmo problema de minimização do caso discreto em (75) e encontram-se as matrizes \mathbf{P}_{opt} e \mathbf{K}_{opt} como seguem:

$$\mathbf{P}_{opt} = \begin{bmatrix} 118,9393 & 10,4016 \\ 10,4016 & 017,2330 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{opt} = [-0,4262 \quad -0,7988] \quad (124)$$

Como era esperado, as variáveis ótimas encontradas pela resolução das LMIs devem minimizar a energia gasta sem tornar o sistema instável, ou seja, manter os autovalores dentro do círculo de raio unitário.

$$\text{autovalores}(\mathbf{A}_d + \mathbf{B}_d \mathbf{K}_{opt}) = \begin{bmatrix} 0,9750 \\ 0,9429 \end{bmatrix} \quad (125)$$

Seguindo a rotina de simulação desenvolvida até agora, o mesmo sistema será simulado para alguns valores de $\hat{\mu}$ que, primeiramente, será definido como:

$$\hat{\mu} = 1 \quad (126)$$

Ao contrário do ocorrido nas simulações do caso discreto quando $\mathbf{R} = 0,5$, para $\mathbf{R} = 2$ a amostragem assíncrona apresentou uma tímida melhora no desempenho do estado \mathbf{x}_1 .

Figura 42: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$

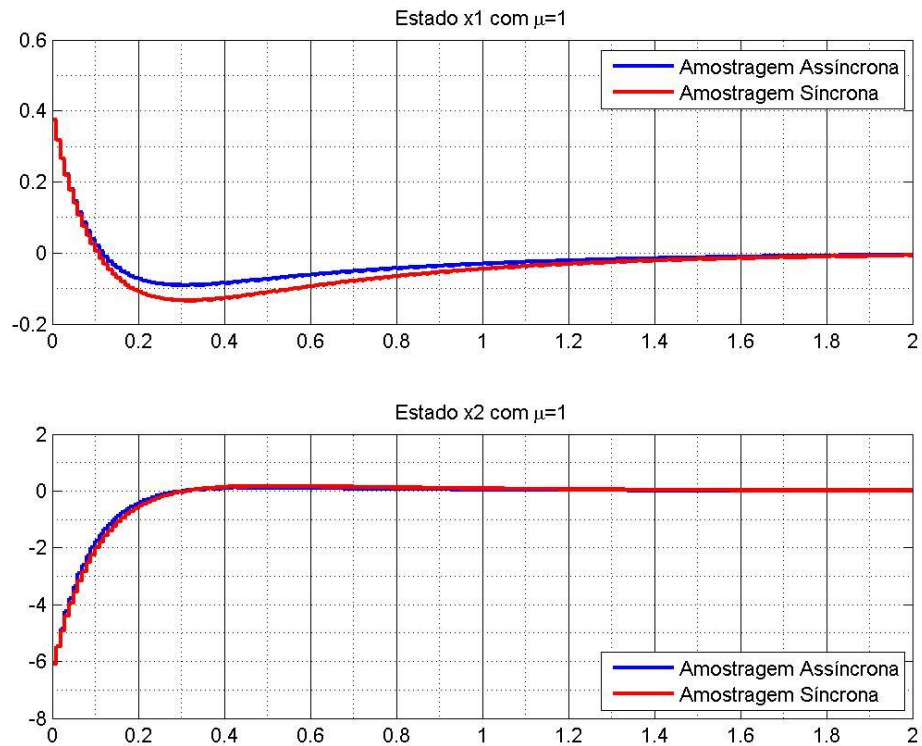


Figura 43: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$

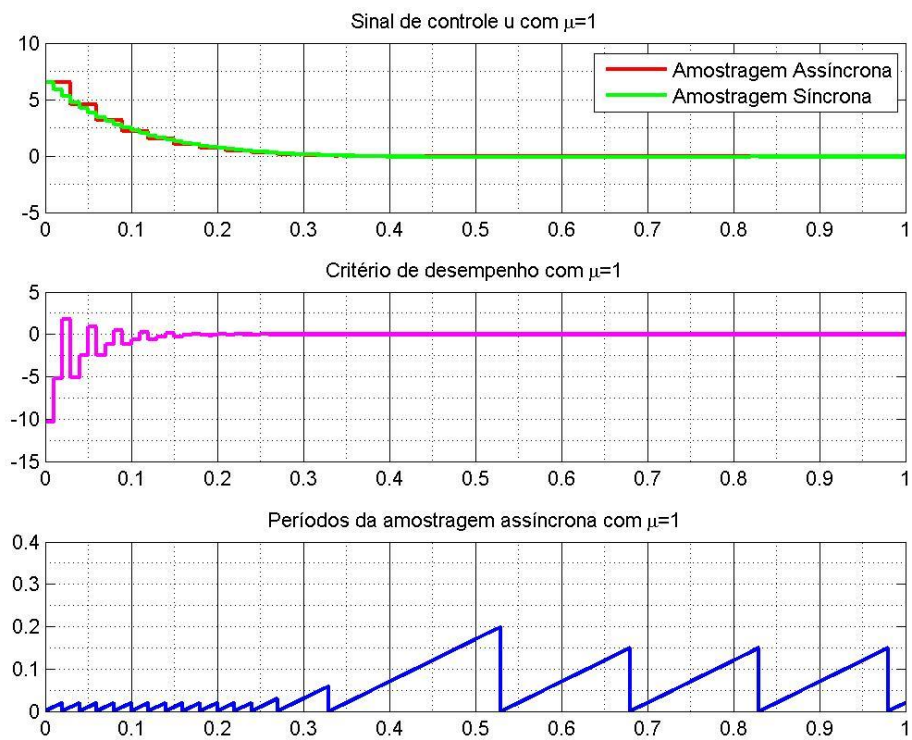
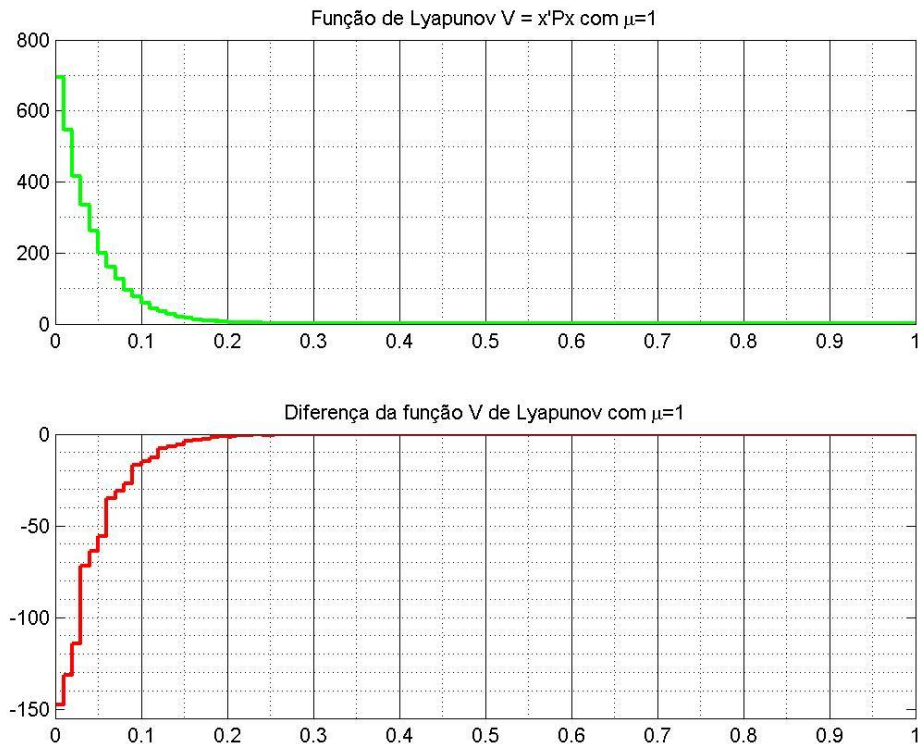


Figura 44: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 1$ e $\mathbf{R} = 2$ 

Através do primeiro gráfico apresentado na Figura 43, nota-se que o sinal de controle recebe um grande número de atualizações até que o sistema atinja sua estabilidade em aproximadamente 0,2 segundos. Mesmo com este grande número de atualizações, a amostragem assíncrona apresenta um menor número de amostras do que no caso da amostragem síncrona, o que implica na redução do número de transmissões e no tráfego de mensagens na rede. Entretanto, não há uma redução na quantidade de energia utilizada por parte do controle visto que as curvas estão praticamente sobrepostas, porém, no geral, há uma tímida economia na energia consumida.

Para analisar ainda melhor a vantagem de se utilizar a amostragem assíncrona em termos do número de amostras para que os estados converjam para zero, toma-se:

$$\hat{\mu} = 5 \quad (127)$$

Na simulação apresentada na Figura 45, percebe-se como o estado \mathbf{x}_2 apresenta uma melhora bastante significativa se comparado ao seu comportamento na simulação anterior. O mesmo vale para o estado \mathbf{x}_1 , que também apresenta um desempenho ainda melhor, convergindo mais rapidamente e, por consequência, provocando uma diminuição na energia utilizada.

Figura 45: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$

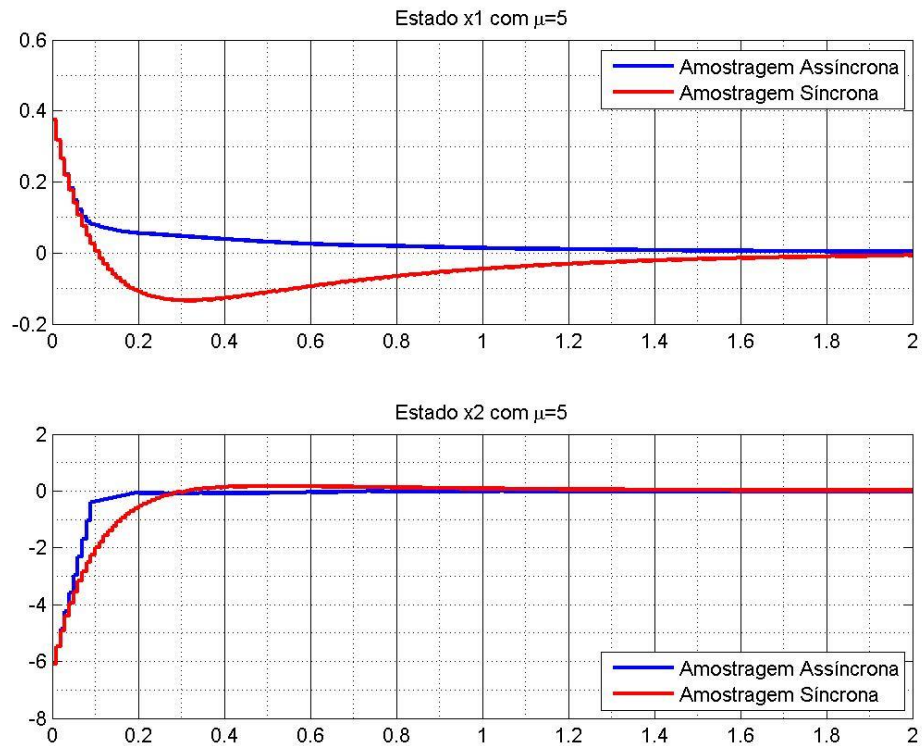


Figura 46: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$

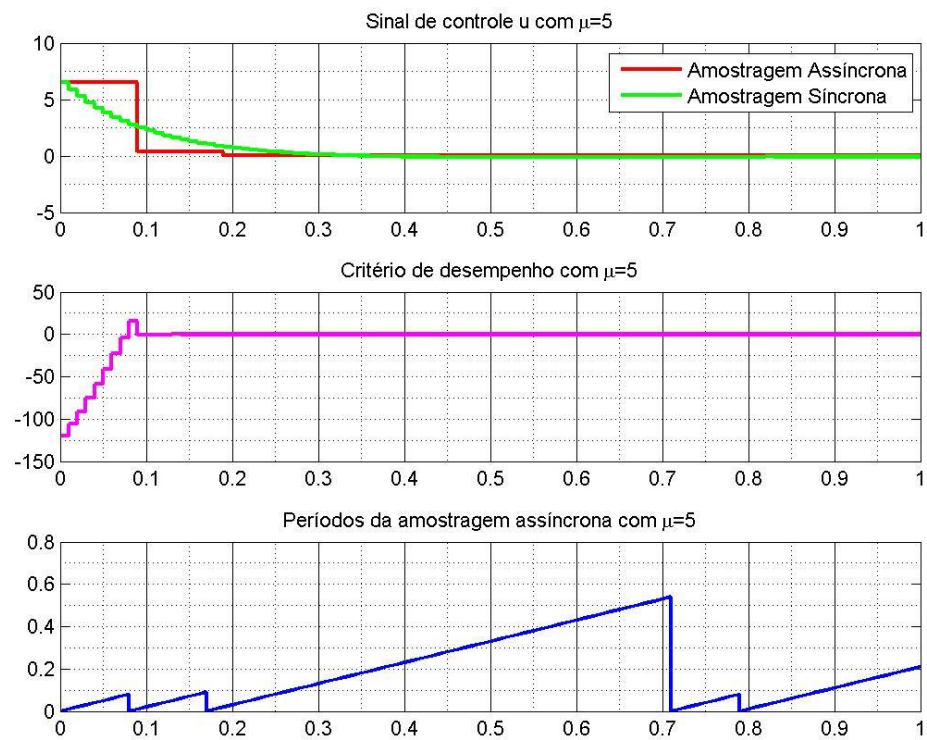
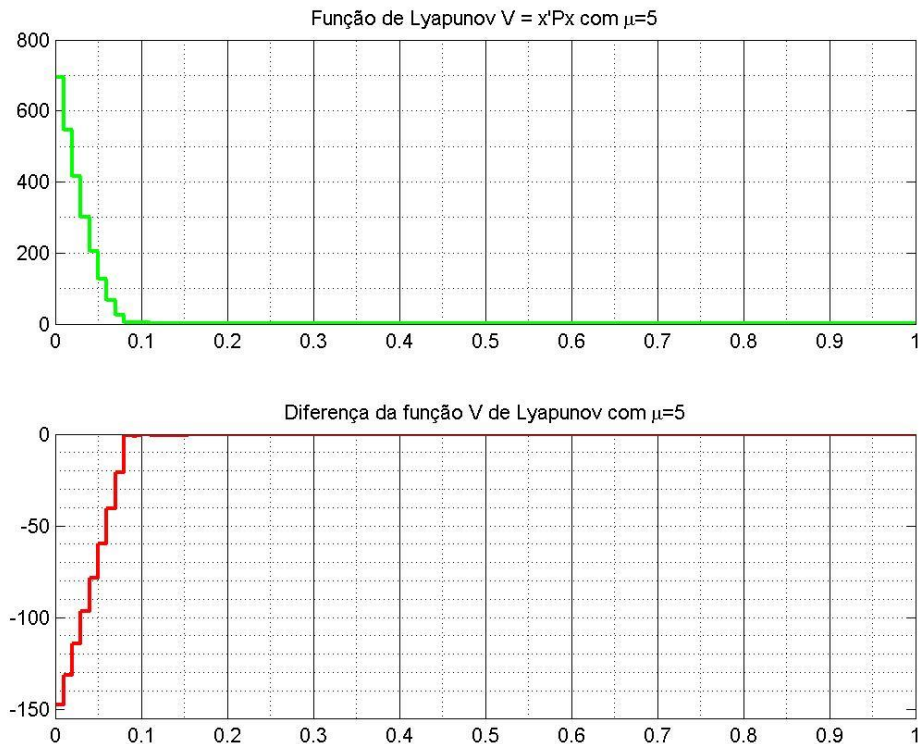


Figura 47: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 5$ e $\mathbf{R} = 2$ 

Assim como tem ocorrido anteriormente com o sinal de controle, neste caso não é diferente e a Figura 46 demonstra como isto ocorre. O controle recebe cada vez menos atualizações conforme se toma um valor de $\hat{\mu}$ crescente a cada simulação. Por outro lado, a energia de controle utilizada com ambas as técnicas permanece a mesma, fazendo com que no balanço de energia do sistema, os responsáveis pela diminuição desta sejam os estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , como mencionado.

Para a última simulação do caso discreto com $\mathbf{R} = 2$, define-se $\hat{\mu}$, tal que:

$$\hat{\mu} = 15 \quad (128)$$

Como resultado da simulação, a Figura 48 demonstra que os estados \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 estão apresentando um desempenho ainda melhor se for considerado apenas o consumo de energia e o tempo de resposta. Porém, a Figura 49 mostra que o sinal de controle sofre poucas atualizações, característica de um controle mais agressivo, por convergir para zero mais rapidamente e ainda diminuir o número de atualizações, reduzindo assim a quantidade de dados transmitidos através da rede. Isto ocorre pois o conjunto de *flow* é expandido enquanto que o de *jump* é estreitado de forma que tornam-se menos frequente as amostragens do sinal.

Figura 48: Simulação dos estados x_1 e x_2 no tempo discreto com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$

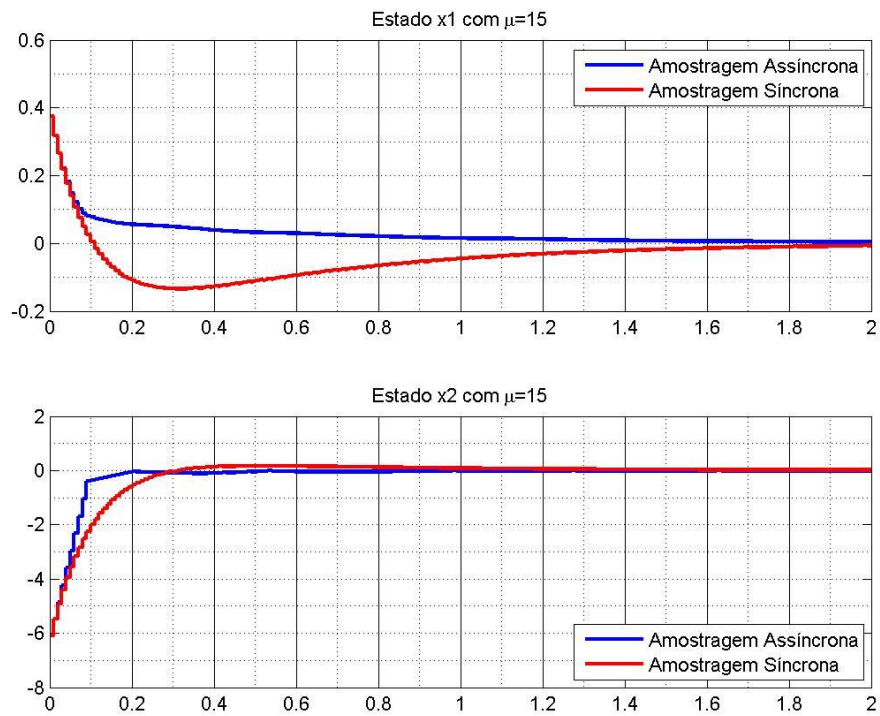


Figura 49: Sinal de controle u e critério de degradação ξ com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$

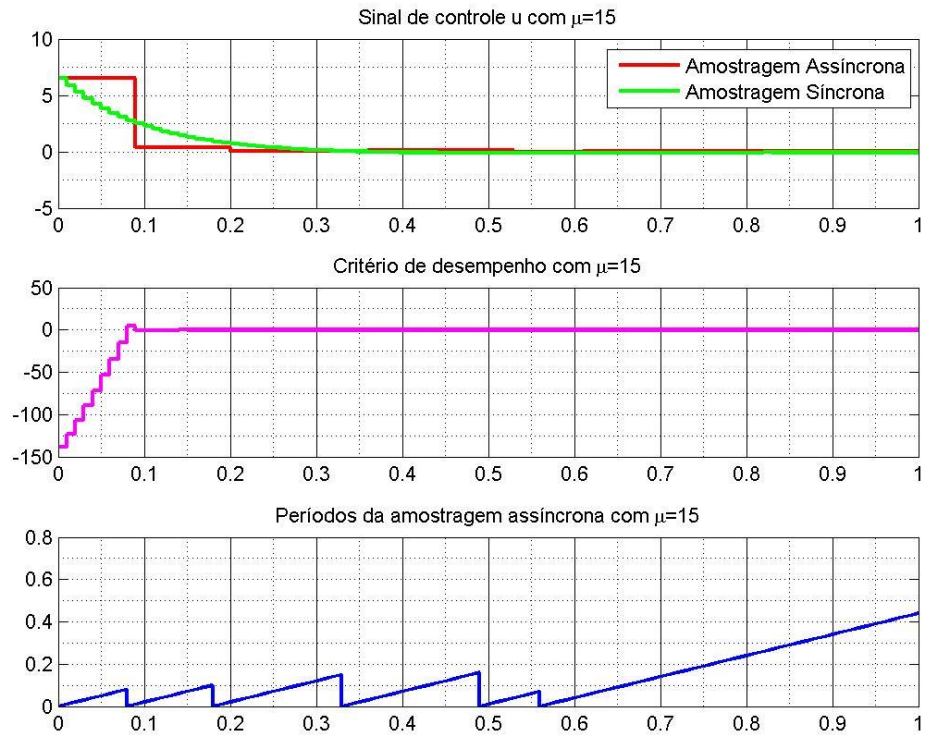
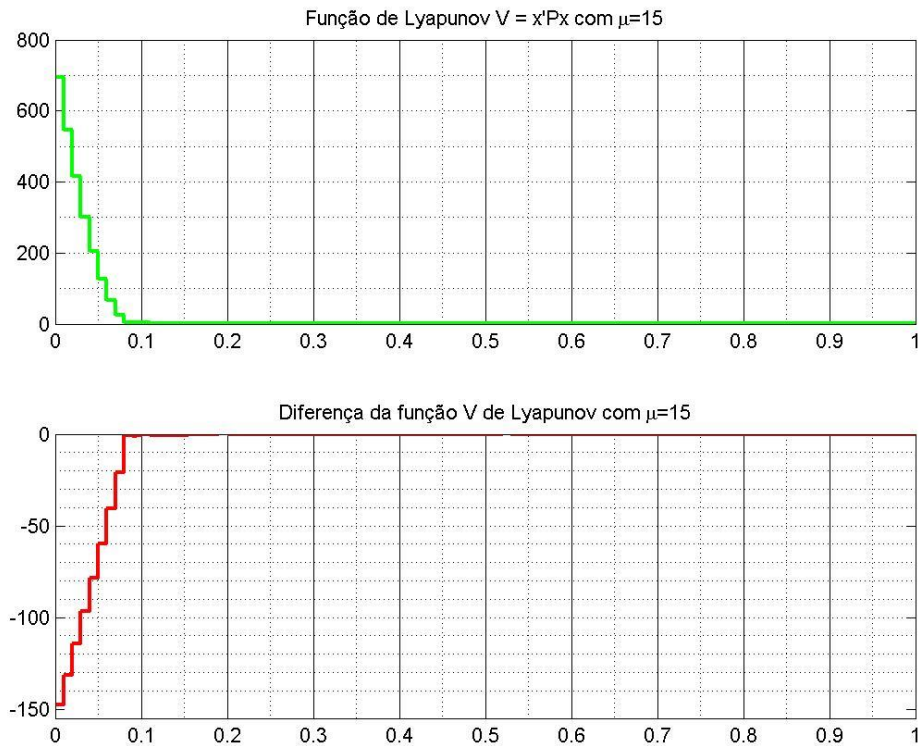


Figura 50: Função de Lyapunov e sua derivada com $\hat{\mu} = 15$ e $\mathbf{R} = 2$ 

Apesar de tudo, a partir da Figura 50, tem-se, por meio da função de Lyapunov, que o sistema permanece estável e atinge a convergência em zero em pouco menos de 0,1 segundos. A derivada da função de Lyapunov confirma que o sistema é estável por apresentar-se negativa para todos os instantes de $t > 0$.

5.6 Comparativo das Atualizações do Sinal de Controle

De forma a demonstrar as melhorias apresentadas através da implementação da técnica de amostragem assíncrona por meio do controle baseado em eventos, a Tabela 1 a seguir exibe, de forma quantizada, os resultados obtidos a partir das simulações realizadas tratando-se do número de atualizações realizadas (número de amostragens) para diferentes valores de $\hat{\mu}$ dentro de cada simulação com \mathbf{R} variando. Prova-se então, a eficiência de utilizar tal técnica, pois fica evidente a redução significativa do número de amostras do sinal de controle para cada caso do sistema até que este atinja a estabilidade, ou seja, até que os estados converjam para zero.

Tabela 1: Comparativo da quantidade de atualizações do sinal de controle

CASO	R	$\hat{\mu}$	Nº de Atualizações
CONTÍNUO	0,5	1	4
		5	2
		10	2
		15	2
		20	1
		30	1
	2	1	7
		5	4
		10	2
		15	2
		20	2
		30	2
DISCRETO	0,5	1	9
		5	2
		10	2
		15	2
		20	1
		30	1
	2	1	8
		5	3
		10	2
		15	2
		20	2
		30	1

6 CONCLUSÃO

Os problemas abordados ao longo do trabalho de consumo de energia e, principalmente, da frequência em que dados são amostrados e transmitidos através da rede são, atualmente, uma das maiores preocupações da indústria e esta questão vem sendo intensamente estudada na área de sistemas de controle por conta do surgimento de novos equipamentos apresentando requisitos cada vez mais exigentes. Uma das áreas de concentração de maior preocupação no qual esta questão vem sendo tratada é nos sistemas de controle em rede, especialmente nas tecnologias que fazem uso de redes sem fio (WSNs) por terem sua alimentação fornecida por baterias.

Com a evolução da tecnologia, indústrias trabalham com enormes investimentos em pesquisa e desenvolvimento para projetar novas técnicas que fornecerão um controle mais robusto, confiável e econômico para a sua planta. Tendo em vista estes requisitos de projeto e a necessidade das indústrias em utilizar sistemas de controle em rede, por exigir que seus equipamentos estejam interligados por meio de uma rede de comunicação em uma mesma planta fabril. Devido aos sistemas estarem conectados a uma rede, espera-se que estes apresentem uma grande confiabilidade. Para tanto, é necessário que a rede a qual estes sistemas estão conectados não esteja congestionada com excesso de transmissão de dados, pois isto acarretaria em perdas de pacotes, atrasos e retransmissões de dados, fatos estes que levariam o sistema a perder confiabilidade e, em um pior caso, estabilidade.

As técnicas desenvolvidas e implementadas neste trabalho demandaram o domínio de ferramentas matemáticas específicas para sistemas de controle e também o conhecimento da teoria de controle. Todos os exemplos desenvolvidos e simulados foram baseados no sistema apresentado em SEURET *et al* (2012).

O problema de controle ótimo através do método LQ foi desenvolvido com base em GOMES DA SILVA JR. *et al* (2013), e na utilização das ferramentas matemáticas apresentadas, equacionando LMIs possíveis de solução para ambos os casos de tempo contínuo e discreto, sendo estas LMIs as condições principais do problema de minimização proposto. A partir do problema de otimização, foi testada a técnica de amostragem assíncrona visando melhorar o desempenho do sistema e reduzir a transmissão de dados na rede.

Para o caso contínuo, os resultados foram bastante satisfatórios, demonstrando que, mesmo para um sistema simples, a técnica de amostragem assíncrona utilizada baseada no *event-triggered control*, apresentou características de desempenho e redução do número de

amostras em relação ao que vinha sendo observado com o uso da amostragem síncrona clássica. Para validar os modelos e os resultados obtidos, alterou-se o parâmetro escalar \mathbf{R} , além do critério de desempenho $\hat{\mu}$, para demonstrar que a técnica ainda era válida para otimizar os requisitos pretendidos.

Nas simulações do caso discreto, os resultados foram diferentes do esperado para um determinado valor do parâmetro escalar \mathbf{R} , associado à energia do sinal de controle. Inicialmente, os resultados mostraram-se insatisfatórios para o caso discreto simulado, pois houve uma redução do desempenho do sistema que o levou a aumentar o esforço realizado pelos estados. Por outro lado, pelo sinal de controle no caso discreto, mostrou-se que este teve o número de amostragens realizadas reduzido satisfatoriamente, o que leva a concluir que, de fato, esta técnica é útil para evitar um congestionamento na rede com a redução da transmissão de dados, pois um alto tráfego na rede levaria o sistema a uma maior perda de desempenho.

No entanto, na segunda etapa da simulação do caso discreto, efetuando uma alteração propícia no parâmetro escalar \mathbf{R} , que induz o controlador a penalizar ainda mais o sinal de controle, percebe-se que, ao contrário do ocorrido na primeira parte da simulação em tempo discreto, a amostragem assíncrona é uma técnica vantajosa para a minimização do consumo de energia relacionado à amostragem de um sistema, pois neste caso o desempenho geral do sistema melhorou, provocando uma redução no consumo de energia por parte dos estados do sistema e também uma grande redução no número de atualizações feitas. Tal fato reduziria ainda mais o número de transmissões efetuadas através da rede, melhorando a confiabilidade do sistema.

Entretanto, apesar de o sistema apresentado durante as simulações ter alcançado resultados satisfatórios em ambos os casos discreto e contínuo, é evidente que é preciso projetar alguns parâmetros do sistema para que este apresente uma maior eficiência no seu desempenho, como foi demonstrado com alterações do parâmetro relacionado à energia do controle. Além disso, para fins de projeto, o critério de desempenho também deve ser levado em conta, pois, como foi evidenciado durante as simulações, a sua variação crescente acarreta em uma perda de desempenho, por diminuir a frequência de atualizações do sinal de controle, tornando o sistema vulnerável a perturbações externas e variações da referência.

Logo, o projeto do sistema de controle e do critério de desempenho deve ser desenvolvido de forma a atender, da melhor maneira possível, os requisitos do sistema final, ou seja, da planta em que este sistema será inserido na indústria.

REFERÊNCIAS

- BOYD, S., & VANDENBERGHE, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge.
- BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., & BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia.
- FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., & EMANI-NAEINI, A. (1994). *Feedback Control of Dynamic Systems* (3rd ed., Vol. 3rd). Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.
- GALLIER, J. (2010). *The Schur Complement and Symmetric Positive Semidefinite (and Definite) Matrices*.
- GODOY, E. P. (2011). *Desenvolvimento de Sistemas de Controle via Rede (NCSs) para Aplicações em Redes com Protocolo CAN*. Universidade de São Paulo, São Carlos.
- GOMES DA SILVA JR., J., LAGES, W. F., & SBARBARO, D. (2013). Event-triggered PI control Design. *19th IFAC World Congress*.
- HAYKIN, S., & VAN VEEN, B. (2001). *Sinais e Sistemas*.
- HESPANHA, J. P., NAGHSHTABRIZY, P., & XU, Y. (2007). A Survey of Recent Results in Networked Control Systems. *Proceedings of the IEEE*, 95.
- LAGES, W. (2011). *Aproximações Discretas para Funções de Transferência Contínuas*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- LEHMANN, D., & JOHANSSON, K. H. (2012). Event-Triggered PI control subject to actuator saturation. *IFAC Conference on Advances in PID Control*.
- LIBERZON, D. (2009). The Linear Quadratic Regulator. In: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*.
- PEREIRA, L. (2009). *Introdução ao Controle Digital*. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- SEURET, A., & GOMES DA SILVA JR., J. M. (2012). Taking into account period variations and actuator saturation in sampled-data systems. *System & Control Letters*.

SEURET, A., PRIEUR, C., TARBOURIECH, S., & ZACCARIAN, L. (2012). Event-triggered control with LQ optimality guarantees for saturated linear systems.

TIBERI, U., LINDBERG, C. F., & ISAKSSON, A. J. (2012). Dead-band self-triggered PI control for processes with dead-time. *Advances in PID Control*.

ZHANG, W., BRANICKY, M. S., & PHILLIPS, S. M. (2001). Stability of Networked Control Systems. *IEEE Control Systems Magazine*.

APÊNDICE A – CÓDIGO DE RESOLUÇÃO DAS LMIs EM TEMPO CONTÍNUO

```

%UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
%DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
%PROJETO DE DIPLOMAÇÃO
%ALUNO: Everton Spader - MATRÍCULA: 180171

%AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA EM SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE: EVENT-
TRIGGERED
%CONTROL
%DATA DA APRESENTAÇÃO: 06/12/2013

%Rotina de otimização das variáveis através da resolução de
LMIs para o
%caso discreto
%BASEADO NO ARTIGO:
%"Event-triggered control with LQ optimality guarantees for
saturated
%linear systems"

%Definição dos parâmetros
a = 1;
m = 0.1;
f = 0.01;
u0 = 1;

%Definição das matrizes do sistema
A = [0 1; -a/m -f/m];
B = [0; 1/m];

%Definição das matrizes do critério de desempenho quadrático
V'+J(x,u)
Q = [2 1; 1 1];
Q1 = inv(Q);
R = 0.5;
R1 = inv(R);

%Descrição das LMIs:
setlmis([]);

W = lmivar(1,[2 1]);
Y = lmivar(2,[1 2]);

N = lmivar(1,[2 1]);

%Descrição da LMI#1
lmiterm([1 1 1 W],1,A','s'); % LMI #1: W*A'+A*W

```

```

lmiterm([1 1 1 Y],B,1,'s');           % LMI #1: B*Y+Y'*B
lmiterm([1 2 1 Y],1,1);               % LMI #1: Y
lmiterm([1 3 1 W],1,1);               % LMI #1: W
lmiterm([1 2 2 0],-u0*R1);           % LMI #1: -u*R^-1
lmiterm([1 3 1 0],zeros(2,1));        % LMI #1: 0
lmiterm([1 3 3 0],-u0*Q1);           % LMI #1: -u*Q^-1

%Descrição da LMI#2
lmiterm([-2 1 1 N],1,1);              % LMI #2: N
lmiterm([-2 1 2 0],eye(2));           % LMI #2: W
lmiterm([-2 2 2 W],1,1);              % LMI #2: W

LMIs = getlmis;
n = decnbr(LMIs);                      %número de variáveis de decisão nas
LMIs.
c = zeros(n,1);                        %preenche o vetor c com zeros.

for j=1:n,
    [Wj,Yj,Nj] = defcx(LMIs,j,W,Y,N);
    c(j) = trace(Nj);
end

options = [1e5,0,0,0,0];
[~,nopt] = mincx(LMIs,c,options);
%copt = c'*nopt

%Variáveis da LMI#1
Wopt = dec2mat(LMIs,nopt,W);
Yopt = dec2mat(LMIs,nopt,Y);

%Variável da LMI#2 - auxiliar no traço
Nopt = dec2mat(LMIs,nopt,N);

K = Yopt*inv(Wopt);

%Montar a matriz da LMI
M = [Wopt*A'+A*Wopt+B*Yopt+Yopt'*B'   Wopt*K'   Wopt; K*Wopt   -
u0*R1   zeros(1,2); Wopt   zeros(2,1)   -u0*Q1];

%Verificar se todos os autovalores de M são negativos
L = eig(M);

%Autovalores de (A+B*K) para testar estabilidade
L1 = eig(A+B*K)

P = inv(Wopt);

```

APÊNDICE B – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO DO SISTEMA REALIMENTADO EM TEMPO CONTÍNUO

```

%UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
%DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
%PROJETO DE DIPLOMAÇÃO
%ALUNO: Everton Spader - MATRÍCULA: 180171

%AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA EM SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE
%DATA DA APRESENTAÇÃO: 06/12/2013

%Rotina de simulação do sistema realimentado em tempo
contínuo.

clear all;
clc;

%Executa a rotina para resolução das LMIs
LMI_minN_continuo

%Descrição do sistema em malha fechada
% $x'(t) = Ax + Bu$  /  $u = Kx$ 

T = 0.001;           %Passo de integração
n = 2000;           %Número de iterações
t = 0:T:T*(n-1);   %Tempo de execução
x = [0.375; -6.1]; %Condições iniciais de x
u = K*x;           %Condições iniciais de u

h = 1;             %Valor de \mu

hc = num2str(h);   %Conversão de \mu para string

X = [];           %Conjunto dos estados
U = [];           %Conjunto de controle
E = [];           %Conjunto do critério de degradação

Xsim = [];        %X simulado em amostragem síncrona
Usim = [];        %U simulado em amostragem síncrona
xsim = x;         %Condição inicial de x
usim = u;         %Condição inicial de u

V = [];           %Função V de Lyapunov
dV = [];          %Derivada da Função V de Lyapunov

tempo_x = 0;
TEMPO_X = [];     %Conjunto dos tempos de amostragem eixo X
tempo_y = 0;

```

```

TEMPO_Y = [];           %Conjunto dos tempos de amostragem eixo Y
atu = 0;               %Número de atualizações

for k = 1:n

    X = [X x];
    U = [U u];

    %Atualização dos estados
    x = T*A*x + x + T*B*u;

    %Atualização da função de Lyapunov
    v = x'*P*x;
    V = [V v];

    %Atualização da derivada de Lyapunov
    dv = x'*P*(A*x+B*u) + (A*x+B*u) '*P*x;
    dV = [dV dv];

    %Atualização do instante de tempo da amostragem assíncrona
    TEMPO_X = [TEMPO_X tempo_x];
    TEMPO_Y = [TEMPO_Y tempo_y];

    Xsim = [Xsim xsim];
    Usim = [Usim usim];
    %Atualização dos estados em amostragem síncrona
    xsim = T*A*xsim + xsim + T*B*usim;
    usim = K*xsim;

    %Teste da degradação do desempenho quadrático - Critério
    da amostragem (E)
    e = x'*P*(A*x+B*u) + (A*x+B*u) '*P*x + x'*(Q/h)*x +
    u'*(R/h)*u;
    E = [E e];

    %Teste para determinar a atualização do controle
    if e > 0
        u = K*x;

        tempo_x = TEMPO_X(1,k);
        tempo_y = 0;
    else
        tempo_y = T + tempo_y;
        tempo_x = T + tempo_x;
    end
end

%Plotagem dos gráficos
%FIGURA 1: Gráfico dos estados x1 e x2

```

```

figure(1)

subplot(2,1,1)
plot(t,X(1,:), '-b',t,Xsim(1,:), '-r', 'LineWidth',2);
legend('Amostragem Assíncrona', 'Sistema
Contínuo', 'Location', 'NorthEast');
namela = strcat('Estado x1 com \mu=',hc);
title(namela);
grid minor;

subplot(2,1,2)
plot(t,X(2,:), '-b',t,Xsim(2,:), '-r', 'LineWidth',2);
legend('Amostragem Assíncrona', 'Sistema
Contínuo', 'Location', 'SouthEast');
namelb = strcat('Estado x2 com \mu=',hc);
title(namelb);
grid minor;

name1 = strcat('imagem1_ESTADOS_continuo_',hc, '.jpg');
saveas(gcf, ['C:\Users\Everton\Desktop\ENG. ELÉTRICA\10°
SEMESTRE\TCC\LMIs\Caso Contínuo\' name1])

%FIGURA 2: Gráfico dos sinais de controle e critério de
desempenho
figure(2)

subplot(3,1,1)
plot(t,U, '-g',t,Usim(1,:), '-r', 'LineWidth',2);
legend('Amostragem Assíncrona', 'Sistema
Contínuo', 'Location', 'NorthEast');
name2a = strcat('Sinal de controle u com \mu=',hc);
title(name2a);
grid minor;

subplot(3,1,2)
plot(t,E, '-m', 'LineWidth',2);
name2b = strcat('Critério de desempenho com \mu=',hc);
title(name2b);
grid minor;

subplot(3,1,3)
plot(TEMPO_X,TEMPO_Y, '-b', 'LineWidth',2);
name2c = strcat('Períodos da amostragem assíncrona com
\mu=',hc);
title(name2c);
grid minor;

name2 = strcat('imagem2_CONTROLE_continuo_',hc, '.jpg');
saveas(gcf, ['C:\Users\Everton\Desktop\ENG. ELÉTRICA\10°
SEMESTRE\TCC\LMIs\Caso Contínuo\' name2])

```



```
%FIGURA 3: Gráfico da função V de Lyapunov e sua derivada
figure(3)

subplot(2,1,1)
plot(t,V,'-g','LineWidth',2);
axis([0 1 0 4]);
name3a = strcat('Função de Lyapunov V = x''Px com \mu=',hc);
title(name3a);
grid minor;

subplot(2,1,2)
plot(t,dV,'-r','LineWidth',2);
axis([0 1.5 -80 0]);
name3b = strcat('Derivada da função V de Lyapunov com
\mu=',hc);
title(name3b);
grid minor;
```

APÊNDICE C – CÓDIGO DE RESOLUÇÃO DAS LMIs EM TEMPO DISCRETO

```

%UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
%DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
%PROJETO DE DIPLOMAÇÃO
%ALUNO: Everton Spader - MATRÍCULA: 180171

%%AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA EM SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE:
EVENT-TRIGGERED
%CONTROL
%DATA DA APRESENTAÇÃO: 06/12/2013

%Rotina de otimização das variáveis através da resolução de
LMIs para o
%caso discreto
%BASEADO NO ARTIGO:
%"Event-triggered control with LQ optimality guarantees for
saturated
%linear systems"

%Definição dos parâmetros
a = 1;
m = 0.1;
f = 0.01;
u0 = 1;

%Definição das matrizes do sistema
A = [0 1; -a/m -f/m];
B = [0; 1/m];

% Discretização do sistam
%Período de amostragem do sistema discreto
Ts = 0.01;

sys = ss(A,B,[],[]);
sysd = c2d(sys,Ts,'zoh');

Ad = sysd.a;
Bd = sysd.b;

%Definição das matrizes do critério de desempenho quadrático
V'+J(x,u)
Q = [4 2; 2 2];
Q1 = inv(Q);
R = 0,5;
R1 = inv(R);

```

```

%Descrição das LMIs:
setlmis([]);

W = lmivar(1,[2 1]);
Y = lmivar(2,[1 2]);

N = lmivar(1,[2 1]);

%Descrição da LMI#1
lmiterm([1 1 1 W],-1,1);           % LMI #1: -W
lmiterm([1 2 1 W],Ad,1);          % LMI #1: Ad*W
lmiterm([1 2 1 Y],Bd,1);          % LMI #1: Bd*Y
lmiterm([1 3 1 Y],1,1);           % LMI #1: Y
lmiterm([1 4 1 W],1,1);           % LMI #1: W
lmiterm([1 2 2 W],-1,1);          % LMI #1: W
lmiterm([1 3 2 0],zeros(2,2));    % LMI #1: 0
lmiterm([1 4 2 0],zeros(2,2));    % LMI #1: 0
lmiterm([1 4 3 0],zeros(2,2));    % LMI #1: 0
lmiterm([1 3 3 0],-u0*R1);        % LMI #1: -u*R^-1
lmiterm([1 4 4 0],-u0*Q1);        % LMI #1: -u*Q^-1

%Descrição da LMI#2
lmiterm([-2 1 1 N],1,1);           % LMI #2: N
lmiterm([-2 1 2 0],eye(2));        % LMI #2: W
lmiterm([-2 2 2 W],1,1);           % LMI #2: W

LMIs = getlmis;

n = decnbr(LMIs);                   %número de variáveis de decisão nas
LMIs.
c = zeros(n,1);                     %preenche o vetor c com zeros.

for j=1:n,
    [Wj,Yj,Nj] = defcx(LMIs,j,W,Y,N);
    c(j) = trace(Nj);
end

options = [1e5,0,0,0,0];
[~,nopt] = mincx(LMIs,c,options);

%Variáveis da LMI#1
Wopt = dec2mat(LMIs,nopt,W);
Yopt = dec2mat(LMIs,nopt,Y);

%Variável da LMI#2 - auxiliar no traço
Nopt = dec2mat(LMIs,nopt,N);

K = Yopt*inv(Wopt);

%Montar a matriz da LMI

```

```
M11 = [-Wopt  Wopt*Ad'+Yopt'*Bd'; Ad*Wopt+Bd*Yopt -Wopt'];  
M12 = [Yopt' Wopt; zeros(2,1) zeros(2,2)];  
M21 = [Yopt zeros(1,2); Wopt zeros(2,2)];  
M22 = [-u0*R1 zeros(1,2); zeros(2,1) -u0*Q1];  
  
M = [M11 M12; M21 M22];  
  
%Verificar se todos os autovalores de M são negativos  
L = eig(M);  
  
%Autovalores de (Ad+Bd*K) para testar estabilidade  
L1 = eig(Ad+Bd*K)  
  
P = inv(Wopt);
```

APÊNDICE D – CÓDIGO DE SIMULAÇÃO DO SISTEMA REALIMENTADO EM TEMPO DISCRETO

```

%UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
%DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
%PROJETO DE DIPLOMAÇÃO
%ALUNO: Everton Spader - MATRÍCULA: 180171

%AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA EM SISTEMAS DE CONTROLE EM REDE
%DATA DA APRESENTAÇÃO: 06/12/2013

%Rotina de simulação do sistema realimentado em tempo
discreto.

clear all;
clc;

%Executa a rotina para resolução das LMIs
LMI_minN_discreto

%Descrição do sistema em malha fechada
% $x'(t) = A dx + B du / u = Kx$ 

ns = 3/Ts;           %Número de iterações
ts = 0:Ts:Ts*ns;    %Tempo de execução
x = [0.375; -6.1];   %Condições iniciais de x
u = K*x;            %Condições iniciais de u

h = 15;             %Valor de  $\mu$ 

hd = num2str(h);    %Conversão de  $\mu$  para string

X = [];             %Conjunto dos estados
U = [];             %Conjunto de controle
E = [];             %Conjunto do critério de degradação

Xsim = [];          %X simulado em amostragem síncrona
Usim = [];          %U simulado em amostragem síncrona
xsim = x;           %Condição inicial de x
usim = u;           %Condição inicial de u

V = [];             %Função V de Lyapunov
dV = [];            %Derivada da Função V de Lyapunov

tempo_x = 0;
TEMPO_X = [];       %Conjunto dos tempos de amostragem eixo X
tempo_y = 0;
TEMPO_Y = [];       %Conjunto dos tempos de amostragem eixo Y

```

```

for k = 1:ns+1

    X = [X x];
    U = [U u];

    %Atualização dos estados
    x = Ad*x + Bd*u;

    %Atualização da função de Lyapunov
    v = x'*P*x;
    V = [V v];

    %Atualização da derivada da função de Lyapunov
    dv = (Ad*x+Bd*u)'*P*(Ad*x+Bd*u) - x'*P*x;
    dV = [dV dv];

    %Atualização do instante de tempo da amostragem assíncrona
    TEMPO_X = [TEMPO_X tempo_x];
    TEMPO_Y = [TEMPO_Y tempo_y];

    Xsim = [Xsim xsim];
    Usim = [Usim usim];
    %Atualização dos estados em amostragem síncrona
    xsim = Ad*xsim + Bd*usim;
    usim = K*xsim;

    %Teste da degradação do desempenho quadrático - Critério
da amostragem (E)
    e = (Ad*x+Bd*u)'*P*(Ad*x+Bd*u) - x'*P*x + x'*(Q/h)*x +
u'*(R/h)*u;
    E = [E e];

    %Teste para determinar a atualização do controle
    if e > 0
        u = K*x;

        tempo_x = TEMPO_X(1,k);
        tempo_y = 0;
    else
        tempo_y = Ts + tempo_y;
        tempo_x = Ts + tempo_x;
    end
end

%Plotagem dos gráficos
%FIGURA 1: Gráfico dos estados x1 e x2
figure(1)

subplot(2,1,1)

```

```

stairs(ts,X(1,:), '-b', 'LineWidth', 2);
hold on;
stairs(ts,Xsim(1,:), '-r', 'LineWidth', 2);
legend('Amostragem Assíncrona', 'Amostragem
Síncrona', 'Location', 'NorthEast');
namela = strcat('Estado x1 com \mu=', hd);
title(namela);
grid minor;

subplot(2,1,2)
stairs(ts,X(2,:), '-b', 'LineWidth', 2);
hold on;
stairs(ts,Xsim(2,:), '-r', 'LineWidth', 2);
legend('Amostragem Assíncrona', 'Amostragem
Síncrona', 'Location', 'SouthEast');
name1b = strcat('Estado x2 com \mu=', hd);
title(name1b);
grid minor;

name1 = strcat('imagem1_ESTADOS_discreto_', hd, '.jpg');
saveas(gcf, ['C:\Users\Everton\Desktop\ENG. ELÉTRICA\10°
SEMESTRE\TCC\LMIs\Caso Discreto\' name1])

%FIGURA 2: Gráfico dos sinais de controle e critério de
desempenho
figure(2)

subplot(3,1,1)
stairs(ts,U(1,:), '-r', 'LineWidth', 2);
hold on;
stairs(ts,Usim, '-g', 'LineWidth', 2);
legend('Amostragem Assíncrona', 'Amostragem
Síncrona', 'Location', 'NorthEast');
name2a = strcat('Sinal de controle u com \mu=', hd);
title(name2a);
grid minor;

subplot(3,1,2)
stairs(ts,E, '-m', 'LineWidth', 2);
name2b = strcat('Critério de desempenho com \mu=', hd);
title(name2b);
grid minor;

subplot(3,1,3)
plot(TEMPO_X, TEMPO_Y, '-b', 'LineWidth', 2);
name2c = strcat('Períodos da amostragem assíncrona com
\mu=', hd);
title(name2c);
grid minor;

```

```
name2 = strcat('imagem2_CONTROLE_discreto_',hd, '.jpg');
saveas(gcf, ['C:\Users\Everton\Desktop\ENG.          ELÉTRICA\10°
SEMESTRE\TCC\LMIs\Caso Discreto\' name2])

%FIGURA 3: Gráfico da função V de Lyapunov e sua derivada
discreta (/V)
figure(3)

subplot(2,1,1)
stairs(ts,V, '-g', 'LineWidth', 2);
name3a = strcat('Função de Lyapunov V = x''Px com \mu=',hd);
title(name3a);
grid minor;

subplot(2,1,2)
stairs(ts,dV, '-r', 'LineWidth', 2);
name3b = strcat('Diferença da função V de Lyapunov com
\mu=',hd);
title(name3b);
grid minor;
```