UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Guilherme Porto da Silva

PENSANDO NO INFINITO PARA ENTENDER CÁLCULO:
uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no Ensino Médio

Porto Alegre
2013

Guilherme Porto da Silva

PENSANDO NO INFINITO PARA ENTENDER CÁLCULO:
uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lucia Helena Marques Carrasco

Porto Alegre

2013

Guilherme Porto da Silva

PENSANDO NO INFINITO PARA ENTENDER CÁLCULO:

uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lucia Helena Marques Carrasco

Comissão Examinadora

____

Profª. Drª. Andréia Dalcin

Faculdade de Educação – UFRGS

____

Profª. Drª. Luisa Rodrigues Doering

Instituto de Matemática – UFRGS

____

Prof.ª. Drª. Lucia Helena Marques Carrasco – Orientadora

Instituto de Matemática – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família pela formação ética, moral e intelectual que me foi dada dentro de casa e que exerceu papel fundamental na constituição do meu ser e de minhas relações com o mundo. Em especial agradeço à minha mãe, Maria Eugênia Aurélio Porto, que enfrentou sozinha todas as dificuldades que lhe foram apresentadas para me dar a melhor educação que pôde.

À Dra. Professora Lucia Helena Marques Carrasco, que atuou como minha orientadora neste trabalho e que representa um marco no desenvolvimento do caráter crítico de minhas reflexões sobre o papel do professor e da educação na sociedade.

Ao Dr. Professor Vilmar Trevisan pela indicação à bolsa de iniciação científica na UFRGS e ao Dr. Professor Luiz Emílio Allem por ter me orientado durante o período em que atuei nela, bem como pela paciência e apoio de ambos em todos os momentos.

À Dra. Professora Andréia Dalcin e à Dra. Professora Luisa Doering, por participarem da banca examinadora e contribuírem para minha formação.

À minha namorada, Lilian Cavalet, por estar sempre ao meu lado desde o momento em que nos conhecemos e por tornar cada dia mais especial que o anterior.

À amiga Clarissa Vergara pelos momentos de companheirismo e amizade desde as conversas cotidianas mais banais até acaloradas discussões sobre a música e a poesia presentes em nossas vidas.

À amiga Rita de Cássia Inácio por todo auxílio e incentivo nos momentos difíceis e pelo companheirismo nos diversos momentos do curso.

Ao amigo Alexsandro Gomes pelo companheirismo em inúmeras disciplinas, estudos e cafés durante minha formação.

Aos amigos Eduardo Longa, Fábio Casula, Gustavo Jung, Luísa Borsato, Matheus Bohrer, Marcelo Silva e Pietro Duarte, por sempre me acompanharem na fuga da realidade acadêmica em direção ao universo das abstrações matemáticas que tanto nos encanta.

RESUMO

Este trabalho apresenta a identificação e a analise de alguns fatores que geram dificuldades de aprendizagem dos conceitos de função, continuidade e infinito, presentes nas disciplinas de cálculo diferencial e integral. Relacionam-se a essas dificuldades às fragilidades presentes no ensino médio e busca-se uma reconstrução histórica destes conceitos, visando à constituição de uma proposta de ensino que auxilie os alunos a compreenderem concepções tão abstratas, complementando, dessa forma, o atual ensino de funções. Com o objetivo de verificar a aceitação e viabilidade dessa prática, realizam-se entrevistas com três professores, dois do ensino médio e um do ensino superior. Assim, a análise final, centrada nas possibilidades de abordagem no ensino médio de conceitos básicos para a aprendizagem do cálculo diferencial e integral, articula as respostas dos professores ao referencial teórico pesquisado.

Palavras-chave: Infinito. Cálculo. Entrevistas.

ABSTRACT

In this work is proposed the identification and analysis of some factors that generate learning difficulties of function concepts, continuity and infinite, present in the disciplines of differential and integral calculus. Related to this difficulties have the weaknesses present in the high school and by looking up for a historical reconstruction of these concepts, in order to constitute a teaching proposal that can be applied to provide subsidies that help students understand these concepts so abstract, complementing the actual teaching of function. With the proposal of verify the acceptation and viability of this practice, we perform interviews with three professors, two of them work in high school, and the other in college. Then, the final analysis, focused in the possibilities of approach in high school, basics concepts for the differential and integral calculus learning, articulates the teacher answers with the researched theoretical referential.

Keywords: Infinity. Calculus. Interviews.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha formação no ensino básico sempre tive interesse em estabelecer relações lógico-matemáticas e facilidade para aprender os conteúdos abordados na escola, graças a isto pude desenvolver uma forte base de conhecimentos que seriam cobrados no ensino superior. Ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática e, particularmente, ao realizar a disciplina inicial de Cálculo e Geometria Analítica não tive dificuldades de aprendizado e consegui facilmente ser aprovado.

Durante a realização dessa disciplina um fato despertou minha atenção, percebi que com o transcorrer do semestre o número de alunos presentes em sala de aula diminuía abruptamente (inclusive nos dias de avaliação) o que me levou a acreditar que muitas pessoas estavam tendo problemas para compreender o conteúdo. Ao mesmo tempo, enquanto realizava meus estudos relacionados à matéria na biblioteca da PUCRS, interagi com muitos alunos da universidade e pude constatar que também apresentavam dificuldades de aprendizagem.

No semestre seguinte cursei a segunda disciplina de Cálculo e Geometria Analítica, também sem dificuldades e obtendo facilmente a aprovação. Novamente percebi que a quantidade de presentes na aula diminuía conforme o tempo passava e que os alunos que estudavam na biblioteca da PUCRS se mantinham com as mesmas dificuldades.

Percebendo que o número de alunos que apresentam dificuldade e os índices de repetência nas disciplinas de Cálculo são extremamente altos, notei que existia demanda por professores voltados ao ensino dessa matéria e resolvi ministrar aulas particulares.

Comecei a realizar minhas atividades com aulas particulares de cálculo diferencial e integral nas bibliotecas e salas disponíveis da UFRGS e PUCRS, trabalhando com alunos dessas instituições. No entanto, para minha surpresa, a procura pelas aulas cresceu tão rapidamente que me limitei a atuar na PUCRS, devido à proximidade com minha residência, a maior oferta de alunos e a maior quantidade de espaços disponíveis para realização das aulas. Devido à existência de salas de aula equipadas com quadro negro, disponibilizadas para os alunos estudarem mediante a reserva, passei a organizar grupos de estudos para atender a uma quantidade maior de pessoas.

Em minhas primeiras práticas de aula limitava-me a explicar, de maneira simplificada e resumida, a matéria que estava presente nos livros e que era exibida em sala de aula, enfatizando os tópicos de maior interesse dos alunos, nos quais apresentavam maior dificuldade, bem como a realização de uma grande quantidade de exercícios que eram muito semelhantes. Em suma, as aulas se baseavam na repetição massiva de explicações já vistas e em aplicações de métodos para resolução de exercícios que levavam mais à memorização da matéria por parte do aluno do que à compreensão propriamente dita. Por algumas vezes tentei aplicar aulas com uma metodologia mais construtiva, baseada no questionamento sobre certos problemas e na estruturação das respostas por meio de palpites e aproximações ou baseadas em aplicações mais visuais que despertassem a curiosidade, no entanto não obtive boa receptividade do público, que dava preferência ao método inicial.

Neste mesmo semestre estava cursando a disciplina de Análise Matemática A, na qual estudei alguns dos principais fundamentos lógicos do cálculo e algumas das principais ideias e concepções necessárias para sua compreensão. No decorrer do curso percebi que muitos dos pensamentos e reflexões necessárias para o surgimento e entendimento do cálculo eram justamente o que faltava a meus alunos, faltava-lhes a maneira correta de pensar e enxergar o cálculo, no entanto não estavam dispostos a isso neste momento, pois visavam a obtenção do resultado nas provas e para isso tinham de acertar exercícios.

Baseando-me nos eventos e fatos relatados acima percebi que o que gerava dificuldades de aprendizagem em cálculo era a falta de familiaridade com a maneira como ele deveria ser interpretado, entretanto isso dificilmente poderia ser ensinado durante o curso da disciplina devido a enorme quantidade de conteúdos que devem ser trabalhados e devido às estratégias de avaliação, que exigem que o aluno se submeta ao processo de repetição dos métodos para resolução de exercícios. Logo comecei a me questionar quanto a novas maneiras de ensinar. Motivado por esta indagação comecei a desenvolver este trabalho.

Uma vez que a primeira disciplina de Cálculo e Geometria Analítica é cursada no primeiro semestre da maioria dos cursos de ciências exatas, acredito que o momento mais apropriado para iniciar a construção do pensamento necessário para compreensão da matéria de cálculo seria no ensino médio, de modo que se opere um processo de transição para o ensino superior. Para realizar essa abordagem proponho um resgate histórico que contextualize o ambiente e as principais ideias que permearam o surgimento do cálculo diferencial e Integral, mostrando quais foram as reflexões que motivaram seu desenvolvimento.

Neste trabalho busco investigar a viabilidade de desenvolver, por meio de uma abordagem histórica, concepções que auxiliem na estruturação do pensamento necessário para lidar com a disciplina de cálculo em turmas de ensino médio. Para proceder com essa pesquisa realizei entrevistas com alguns professores ligados ao ensino médio e ao ensino superior, ressaltando suas opiniões, experiências e conhecimentos sobre este tema. Por meio da análise das informações obtidas durante as conversas traço conclusões sobre a possibilidade de inserção de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio.

No segundo capítulo apresento um panorama sobre as condições atuais do ensino de cálculo no Brasil e no mundo, mostrando dados estatísticos que confirmam os altos índices de repetência existentes e, consequentemente, que os alunos apresentam dificuldade para aprender a matéria.

No terceiro capítulo trago um pouco da história do infinito, tópico vital para se começar a pensar cálculo. Acredito que uma abordagem histórica desse assunto seria muito proveitosa para começar a construção de um pensamento voltado à compreensão do conteúdo que será visto no ensino superior.

No quarto capítulo apresento a metodologia de pesquisa utilizada, baseada na história oral temática, a estrutura das entrevistas que serão realizadas e o roteiro a ser seguido durante elas. Também realizo a textualização das informações obtidas.

No quinto capítulo defino as unidades de análise a partir das quais expresso minhas conclusões e reflexões. Nessa discussão incluo sugestões de atividades a serem desenvolvidas com alunos de ensino médio, baseadas nas informações obtidas com os professores e tendo por objetivo a introdução ao cálculo por meio da história das reflexões que levaram à concepção do infinito.

No capítulo seis apresento minhas considerações finais, obtidas após essa pesquisa.

2 O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

O cálculo diferencial e integral desempenha um papel fundamental no desenvolvimento científico e tecnológico da sociedade, sendo utilizado nas mais diversas áreas de pesquisas das ciências exatas e inclusive em algumas ciências sociais. Devido a tantas aplicabilidades seus conteúdos tornam-se fundamentais para integração do aluno na sociedade e para a complementação dos estudos a nível superior, além de justificar o intenso debate que existe sobre a disciplina.

> O cálculo Diferencial e Integral permite, nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sociais, Ciências da Terra, etc, a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico dos diversos países do mundo. (LOPES, 1999, p. 125).

2.1 Por que Inserir o Cálculo no Ensino Médio?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) nos trazem que o currículo deve ser construído de maneira que possibilite ao aluno complementar e desenvolver os conteúdos vistos no ensino fundamental e integrá-los a outras áreas do conhecimento, visando preparar o aluno para integrar-se à sociedade, continuar seus estudos em um curso de nível superior e estar apto a ingressar no mercado de trabalho.

A matemática constitui-se numa disciplina vital para tal processo, no entanto resultados de avaliações como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) mostram que grande parte dos alunos termina o ensino médio apresentando dificuldades em conceitos básicos e fundamentais, como operações envolvendo números reais, por exemplo. Entre os conteúdos que mais apresentam dificuldades está a compreensão das funções de variáveis reais. (CASTRO, 2009).

Um curso inicial de cálculo diferencial e integral utiliza massivamente a compreensão de funções reais e está presente na maioria dos cursos de nível superior envolvendo ciências exatas, sempre apresentando altos índices de reprovação, segundo diversas pesquisas. Cury (2002) afirma que cerca de dois terços dos trabalhos sobre disciplinas matemáticas apresentados no COBENGE (Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia) entre 1992 e 2001 falam sobre as dificuldades existentes em cursos de cálculo e apresentam novas propostas de abordagem dos conteúdos.

A Sociedade Brasileira de Matemática também se mostrou preocupada com o atual panorama do ensino cálculo no país ao publicar em um de seus boletins informativos do ano de 1995 uma nota falando sobre a preocupação com os altos índices de repetência.

> O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina. (BARRETO, 2005 *apud* REIS, 2001, p. 4).

Visando superar o fracasso no processo de ensino-aprendizagem em disciplinas de cálculo, muitas universidades brasileiras estão criando disciplinas especiais voltadas para suprir as deficiências de conteúdos apresentadas pelos que estão ingressando no ensino superior. Tais disciplinas têm como principal objetivo preparar o aluno para a disciplina de Cálculo.

Na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) os professores acreditam que parte da dificuldade apresentada no curso de cálculo se deve às deficiências em matemática provenientes do ensino médio. Visando alterar essa situação, a UFRGS oferece o curso de Pré-Cálculo, que auxilia os alunos no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos necessários para o início da disciplina e durante ela. O Pré-Cálculo é oferecido semestralmente em período anterior ao início das aulas de cálculo e é essencialmente destinado a apresentar e desenvolver os conceitos básicos necessários para o início da disciplina de Cálculo I. (DOERING, 2004).

Com o mesmo intuito, também é realizado o Programa de Apoio à Graduação (PAG-Cálculo), que é oferecido durante o curso da disciplina de cálculo, para alunos com dificuldades e repetentes. Nas aulas são realizadas revisões dos conteúdos trabalhados e resoluções de exercícios, visando promover a familiaridade com a aplicação da teoria.

O problema com ensino-aprendizagem ocorre em escala mundial e as medidas adotadas também são semelhantes. Em nível internacional podemos citar o movimento “Calculus Reform” que tem como uma de suas principais características a defesa da inserção de programas educacionais no ensino de cálculo, sendo usados tanto para o aprendizado formal como para a aplicabilidade em situações práticas, através da exploração de problemas com diversas abordagens, como geométrica, numérica e analítica.

Para que o aluno possa compreender os diversos métodos ensinados no curso de cálculo são necessários alguns conhecimentos matemáticos básicos que devem ser adquiridos antes do início da disciplina, normalmente durante o curso do ensino médio. A atual estrutura de educação básica nacional organiza o ensino de matemática em camadas que, conforme o aluno vai avançando entre as diversas etapas e séries, vão sobrepondo conhecimentos anteriores e os desenvolvendo cada vez mais, de maneira a obter uma maior capacidade de compreender conceitos mais complexos. Lopes (1990) coloca que talvez esse sistema de empilhamento de conhecimentos seja uma das principais razões da existência de tantas reprovações de cálculo no ensino superior e também levanta fortemente a hipótese de que se fossem abordados ainda no ensino médio tópicos iniciais de cálculo poderiam diminuir as deficiências de aprendizagem encontradas na universidade. (LOPES, 1990).

Em Santos e Neto (1995) são destacadas as seguintes possíveis causas dessas dificuldades: falta de conhecimentos básicos de Matemática por parte do aluno ao ingressar na Universidade, pouca motivação do aluno para o estudo e incapacidade cognitiva do aluno para aprender os conteúdos do Cálculo. Destacam ainda que o problema pode ser de ordem social e pedagógica, entre outras.

> [...] estudos sobre desempenho acadêmico demonstram que a sua origem é bem mais abrangente e aí estão incluídos fatores de ordem socioeconômica (origem de classe, renda familiar, nível instrucional dos pais, custos com educação); e de ordem pedagógica (metodologia utilizada pelo professor, tipo de relação professor-aluno que se desenvolve em sala, postura do professor em relação as dificuldades de aprendizagem do aluno) e fatores

> relativos as condições institucionais (composição das turmas com alunos de diferentes cursos, bibliotecas com um número insuficiente de livros para atender a demanda dos alunos, salas de aulas sem as mínimas condições físicas para desenvolver a prática docente, inadequação de currículos). (SANTOS; NETO, 1995, p. 1).

Neste trabalho não pretendo me fixar em fatores socioeconômicos para analisar as dificuldades apresentadas nas disciplinas de cálculo, visto que os professores praticamente nada podem fazer neste âmbito no atual cenário social. Pretendo seguir a linha de pesquisadores como Ávila (1996) e Duclos (1992) que defendem uma mudança na estrutura organizacional e pedagógica dos conteúdos das instituições de ensino médio e superior, de maneira que seja realizada uma abordagem a tópicos iniciais de cálculo ainda no ensino médio, possibilitando ao aluno ingressar no ensino superior mais bem preparado para esse desafio e, consequentemente, com maiores possibilidades de obter aprovação na disciplina.

2.2 Altos Índices de Reprovação

A seguir apresento algumas das pesquisas encontradas na literatura que confirmam os altos índices de abandono e repetência presentes nas disciplinas de cálculo diferencial e integral. Muitas dessas pesquisas realizam análises numéricas e estatísticas sobre a estrutura das turmas e dos resultados obtidos pelos alunos, visando investigar quais são as principais causas que levam à deficiência existente no processo de ensino-aprendizagem desses conteúdos. Baseando-se nas informações obtidas oferecem propostas para mudanças nessa estrutura pedagógica no intuito de obter melhores resultados.

Dados apresentados no volume 98 do American Mathematical Monthly (1991) afirmam que nos EUA, a cada ano, cerca de 600 mil pessoas se matriculam em cursos de cálculo diferencial e integral em alguma universidade, ainda, cerca de 300 mil desses alunos adentram em um curso de cálculo no modelo dos fornecidos para engenharias e, destes, aproximadamente 140 mil obtém aprovação ao final da disciplina. Note que ainda temos uma quantidade menor que a metade dos alunos. Para compararmos esses dados com dados brasileiros devemos destacar que grande parte dos alunos do EUA tem contato com o cálculo ainda no ensino médio, enquanto no Brasil essa quantidade é praticamente nula. (LOPES, 1990).

Apresentando dados da pesquisa de Santos e Neto (1995) temos que, segundo a Pró-Reitora de Graduação da UFC (Universidade Federal do Ceará), nos períodos de 1989.1 a 1991.1 as taxas de desistência (reprovados por falta mais os trancamentos de matrículas) e de reprovação estão bastante elevadas para os padrões do ensino de terceiro grau. Do total de alunos matriculados nesta disciplina, nos cinco períodos pesquisados, apenas 29,3% conseguiram concluí-la com êxito, os demais 70,7% fracassaram.

Os dados apresentados mostram que existem falhas no processo de ensino-aprendizagem de cálculo dentro das universidades, portanto se torna necessário descobrirmos onde estão ocorrendo essas falhas. Como citado acima, Santos e Neto (1995) defendem que essas dificuldades provem de fatores relativos ao professor e suas práticas pedagógicas, à predisposição do aluno ao estudo e às condições institucionais as quais os alunos e professores estão submetidos.

Mesmo sendo inferior a metade dos alunos matriculados, as taxas de aprovação das disciplinas de cálculo nas universidades dos EUA ainda são superiores às taxas nas universidades nacionais e existe uma possibilidade de isso ocorrer pelo fato de os alunos ingressarem na universidade americana com um pré-conhecimento da matéria, obtido ainda no ensino médio.

Artur Lopes (1999), visando encontrar sugestões para aumentar os índices de aprovação nos cursos de cálculo da UFRGS, realiza uma análise detalhada do panorama em que a disciplina está inserida para encontrar onde ocorre a causa das dificuldades existentes. Um dos tópicos mais interessantes dessa pesquisa é a análise estatística sobre o processo seletivo da universidade e o desenvolvimento de uma discussão objetiva sobre a efetividade do mesmo. Apesar de a pesquisa realizar um estudo das características da disciplina na UFRGS o autor destaca que acredita ocorrerem problemas semelhantes em outras universidades no país.

Lopes (1999) apresenta dados que mostram que muitos alunos ingressam na UFRGS com notas inferiores a 10% na prova de matemática do vestibular e também é apresentada uma análise do processo seletivo de 1997 da qual destaco que “[...] sobre o Vestibular de 1997 da UFRGS indicam que, se fosse exigida a nota 6,0 (sobre 10,0) na prova de Matemática do Vestibular da UFRGS, seriam aprovados apenas 22% dos alunos que entraram em 1997.” (LOPES, 1999, p. 127).

Como a nota mínima exigida para aprovação na universidade é 6,0 podemos considerar que os alunos provenientes do ensino médio ingressam no ensino superior com domínio de conhecimento inferior ao que seria esperado e por isso têm tantas dificuldades. (LOPES, 1999).

A tabela abaixo foi utilizada para análise dos altos índices de reprovação da disciplina de Cálculo II e de suas causas no segundo semestre de 1997. Eram, no total de 10 turmas, em média 52,5 estudantes cada, no entanto cerca de 15% dos estudantes nunca apareceram ou abandonaram a disciplina após a primeira semana. Logo, efetivamente, havia uma média de 44 alunos por sala. A tabela apresenta o desempenho dos estudantes em cálculo versus o seu desempenho na prova de matemática no vestibular, os dados correspondem apenas aos estudantes que entraram a partir de 1995, não se tem informações relativas aos vestibulares de anos anteriores. (LOPES, 1999).

	9-10	%	11-15	%	16-20	%	21-25	%	26-30	%	31-35	%
A	0	0	6	7.1	10	6.9	23	18.9	16	30.2	9	60.0
B	1	12.5	14	16.5	31	21.4	24	19.7	17	32.1	4	26.7
C	1	12.5	21	24.7	43	29.7	30	24.6	13	24.5	2	13.3
D	3	37.5	33	38.8	40	27.6	25	20.5	6	11.3	0	0
FF	3	37.5	11	12.9	21	14.5	20	16.4	1	1.9	0	0

	9-11	%	11-15	%	16-20	%	21-25	%	26-30	%	31-35	%
Ap.	2	25	41	48.2	84	57.9	77	63.1	46	86.8	15	100
Rp.	6	75	44	51.8	61	42.1	45	36.9	7	13.2	0	0
Tt.	8	100	85	100	145	100	122	100	53	100	15	100

	9-11	%	11-15	%	16-20	%	21-25	%	26-30	%	31-35	%
Tt.	8	2	85	20	145	34	122	29	53	12	15	4

Tabela 1: Estudantes de Cálculo II da UFRGS no segundo semestre de 1997 que ingressaram na UFRGS em 1995 ou depois; acertos na prova de Matemática no Vestibular versus conceito em Cálculo II (LOPES, 1999, p. 128).

Baseando-se nos dados apresentados na tabela acima o autor realiza sua análise.

> a) alunos com nota entre 31 e 35 acertos no Vestibular tem probabilidade nula de rodar e 60% de chance de tirar A. Note que esta porcentagem de tirar A é maior do que a de qualquer outro grupo.
> b) alunos com nota entre 9 e 10 acertos no Vestibular tem 75% de chance de rodar e probabilidade nula de tirar A.
> c) alunos com nota entre 11 e 15 acertos no Vestibular tem 51% de chance de rodar e 7% de chance de tirar A. Note que a porcentagem dos que obtém conceitos D e FF é maior no grupo de 9 a 20 acertos do que nos outros grupos.

> d) Ressaltamos que o conceito FF (reprovação por falta de frequência ou até por não comparecer a nenhuma aula) tem a sua maior incidência nos estudantes que obtiveram menos de 15 acertos no Vestibular. Note que os estudantes obtiveram as notas nos cursos de Cálculo II de maneira bastante semelhante ao seu desempenho na prova de Matemática do Vestibular (ver Tabela 1). Em termos estatísticos, a faixa de 31 a 35 acertos no Vestibular corresponde ao A em Cálculo II, de 26 a 30 corresponde ao A ou B, de 21 a 25 corresponde ao B ou C, de 11 a 20 corresponde ao C ou D e de 9 a 10 ao D ou FF. Os estudantes com menos de 15 acertos na prova de Matemática do Vestibular tem mais de 50 por cento de chances de não serem aprovados. (LOPES, 1999, 129).

Observando os resultados obtidos por Lopes (1999) em sua análise dos dados da Tabela 1 podemos perceber que, resumidamente, quanto maior a nota obtida pelo aluno na prova de Matemática do Vestibular maior é a probabilidade do aluno ser aprovado na disciplina de Cálculo II. Note que a prova aplicada no processo seletivo tem por finalidade testar os conhecimentos desenvolvidos e fixados durante o curso do ensino médio o que indica que eles são claramente necessários para a obtenção de um bom desempenho nas disciplinas presentes no ensino superior.

Lopes (1999, p. 129) ainda coloca que “O conhecimento matemático é em camadas que se sobrepõem.”, desse modo se não houver uma boa fundamentação dos conteúdos iniciais não será possível desenvolver os mais avançados. Tal colocação reforça o fato de que seria benéfico para o desempenho do aluno no ensino superior se o ensino médio abordasse tópicos iniciais de cálculo, pois assim ele poderia iniciar a construção das camadas de conhecimentos necessárias para essa matéria mais cedo e já estariam fortemente constituídas ao adentrar na universidade e quando forem requisitadas durante o curso das disciplinas.

Tais estudos e relatos mostram que o ingresso aos cursos de ensino superior que apresentam a disciplina de cálculo diferencial e integral está sendo realizado com deficiência e, portanto, seria vantajoso iniciar a preparação para esta disciplina ainda no ensino médio. Com esses argumentos fica evidente que de fato existem falhas no processo de ensino-aprendizagem de cálculo que podem ter suas causas enraizadas nos alunos, no professor ou ainda na estrutura organizacional do currículo matemático e da escola atual. É necessário que reconheçamos tais fragilidades e busquemos soluções para sanar tais problemas como a introdução de tópicos de cálculo ainda no ensino médio, em conjunto com o ensino de funções. Destacamos ainda que essa é apenas uma das ações possíveis e, também, não podemos deixar de considerar que a universidade deve assumir parte da responsabilidade por essa situação.

2.3 Inserção do Cálculo no Ensino Médio

O professor Geraldo Ávila apresenta o seguinte questionamento:

> Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA, 1996, p.1).

No passado uma introdução a tópicos básicos de cálculo diferencial e integral já fez parte do ensino básico brasileiro, isto ocorreu em dois momentos: o primeiro, introduzido com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República (1890). A reforma de Benjamin Constant foi elaborada segundo os ideais de Augusto Comte e tinha como um de seus objetivos fazer mudanças significativas na educação brasileira por meio da substituição da formação literária da época pela formação científica. Nesta proposta foram contemplados diferentes tópicos de matemática, entre eles a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no terceiro ano do ensino médio, no entanto este estudo não era relacionado com outras áreas do conhecimento e acabava por perder seu sentido ao permanecer como uma ciência isolada puramente formal. Esta postura acabaria por sua retirada do programa escolar no ano de 1900. (CARVALHO, 1996).

O segundo momento iniciou-se com a Reforma Francisco Campos (1931), que foi a primeira tentativa de estruturação e padronização de um curso secundário nacional. Com isto as disciplinas de geometria, aritmética e álgebra se unificaram sobre o nome da disciplina de matemática que tinha seu próprio programa que propunha a divisão de várias áreas a serem estudadas, entre elas a introdução do conceito de função e noções de Cálculo Infinitesimal. No entanto ocorreu forte resistência para a implementação dessa reforma por parte dos professores, que se diziam inseguros para trabalhar com mudanças tão drásticas no ensino e pela inexistência de material didático adequado para a realização dos estudos. (CARVALHO, 1996).

As discussões sobre o cálculo no ensino de matemática encerram-se em 1941 com a Reforma Capanema, durante o governo Vargas, na qual o ensino secundário foi reformulado e os conteúdos referentes ao cálculo continuaram no programa, mas de forma mais sintética, e permaneceram até 1961 nos currículos. Nas décadas de 60 e 70 o ensino de matemática no Brasil foi influenciado pelo movimento da Matemática Moderna, acarretando na exclusão de alguns conteúdos considerados inapropriados dos antigos currículos, entre eles o cálculo. (CARVALHO, 1996).

Alguns livros didáticos, mais antigos, possuem tópicos relativos à introdução do cálculo, apresentando conteúdos como limites e derivadas relacionadas a taxas de variação de forma mais intuitiva e dando ênfase aos significados práticos do conteúdo, no entanto esses temas nunca são abordados pelos professores, pois são considerados muito difíceis, inapropriados para tal fase do desenvolvimento intelectual do aluno, ou simplesmente pela ausência de tempo no calendário acadêmico, consequência da existência de muitos outros conteúdos que também devem ser trabalhados.

Note que o aluno que está terminando o ensino médio é o mesmo que estará cursando a disciplina de cálculo no ensino superior alguns meses depois. Será mesmo que o desenvolvimento intelectual e a capacidade de compreender conceitos de um aluno podem aumentar tanto em tão pouco tempo a ponto de que ele já esteja apto a estudar o conteúdo de cálculo? Acredito que o período de transição entre o ensino médio e o superior é muito curto para que haja algum desenvolvimento intelectual realmente significativo que possa qualificar o aluno para aprender um novo conteúdo. Portanto, como o cálculo é trabalhado no ensino superior podemos concluir que é perfeitamente viável abordá-lo no final do ensino médio, no entanto Ávila (1996) vai mais além, afirmando que “[...] o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções [...]” (ÁVILA, 1996).

> Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA 1991, p. 7).

Ainda no mesmo artigo Ávila cita que “[...] a ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados.” (ÁVILA, 1991, p.6). Duclos (1992) relata suas experiências profissionais na abordagem de tópicos iniciais do cálculo no ensino médio e defende que, sendo apresentado de maneira apropriada, o conteúdo deixa de ser difícil e passa a ser vantajoso pelo poder de alcance dos métodos desenvolvidos. Introduzir tópicos de limites e derivadas não torna o ensino relativo a funções mais longo, pois podem ser integrados ao estudo de polinômios e outros tópicos matemáticos. A introdução dessa matéria também traz vantagens para outras aplicações científicas, como o estudo da pressão, densidade de massa, movimento e de outros presentes na disciplina de física.

Existem diversos argumentos que mostram a vantagem de se realizar o ensino de conceitos iniciais de cálculo ainda no ensino médio. As relações existentes entre seus tópicos mais simples, como limites e derivadas, com o conteúdo de funções proporciona uma nova gama de abordagens e significados que traz um novo sentido e valor ao que se está estudando. A interpretação da derivada tem grande aplicabilidade no estudo de variação de funções, no estudo da cinemática, na disciplina de Física, e em outras disciplinas, logo o ensino de tal conceito pode auxiliar na elaboração de explicações para diversos conteúdos e facilitar muito no processo de aprendizagem do aluno. (ÁVILA, 2006; DUCLOS, 1992).

Essas relações de interdisciplinaridade que são desenvolvidas com as abordagens de tópicos de cálculo tornam mais simples a compreensão da teoria, ao mesmo tempo em que a associa com a prática, atividade que ocorre com frequência durante o curso do ensino superior e que gera muitos problemas no processo de aprendizagem do aluno pela falta de familiaridade com essa situação e pelas dificuldades de interpretação de problemas aplicados, que fogem ao escopo das tradicionais aulas de matemática ministradas no ensino médio. (ÁVILA, 2006; DUCLOS, 1992).

Vimos argumentos de professores que apontam como causa dos altos índices de reprovação em cálculo a necessidade de o aluno construir uma melhor fundamentação dos conceitos vistos no ensino fundamental e médio para compreender a matéria vista no ensino superior.

Ávila coloca que os professores insistem em cumprir os programas curriculares que são extensos e fragmentam os conteúdos de maneira que percam seus significados como um todo, em particular no ensino de funções perde-se muito tempo com o estabelecimento de nomenclaturas e a construção de resultados que não são práticos nem úteis. Ele defende que o ensino de noções básicas de cálculo aliado a sua vasta aplicabilidade pode ser articulado com o ensino de funções e de outros conteúdos permitindo uma contextualização mais integrada entre eles e com as outras disciplinas do currículo.

Creio que apresentamos argumentos suficientes para justificar a inserção de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio. Mostramos que isto já foi feito em dois momentos no passado, o que mostra a necessidade desses conteúdos para a comunidade científico-tecnológica e para a sociedade em geral. Apesar das práticas naquela época não obterem muito sucesso a importância não diminuiu, pelo contrário, a evolução da tecnologia e do mercado de trabalho fez com que fosse necessário evoluirmos no tratamento do cálculo no ensino médio.

Mostramos que existem motivos para essa modificação no curso de ensino médio uma vez que a transição entre ele o ensino superior está apresentando muitas falhas que se manifestam por meio dos altos índices de reprovação das disciplinas de cálculos e que, portanto, é necessário sanar essa deficiência.

Citamos também diversos pesquisadores em educação que defendem a inserção de conceitos iniciais de cálculo no programa de conteúdos do ensino médio, mostrando que isto poderia ser uma alternativa para amenizar o problema da repetência em cálculo existente nas universidades. São apresentados argumentos mostrando que é possível realizar essa modificação na estrutura curricular da escola. Logo é completamente viável e vantajoso para evolução da educação realizar a abordagem desse assunto anteriormente ao egresso no ensino superior.

Defendemos que essa introdução de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio pode ser realizada de forma intuitiva, visando desenvolver uma maneira de pensar que torne mais familiar os conteúdos que serão vistos no ensino superior. Para estruturar essa nova lógica acreditamos que poderiam ser desenvolvidos exercícios reflexivos sobre a história do infinito, devido a sua influência no surgimento do cálculo e toda sua riqueza de significados e interpretações.

3 HISTÓRIA DO INFINITO

Para abordar a história do infinito vamos adotar uma via cronológica, iniciando na Grécia, berço da busca pela verdade e da fomentação do raciocínio lógico necessário para pensarmos o infinito, e passando pela Idade Média, período em que as relações entre o infinito e a matemática foram enfraquecidas, assim como todas as relações com a ciência[1]. Abordamos o Renascimento, fase de redescoberta e revalorização das referências culturais da antiguidade clássica e época do surgimento do Cálculo Infinitesimal, uma das principais ferramentas para o desenvolvimento da temática do infinito. Em seguida apresentamos alguns dos principais matemáticos e pensadores do século XVII e XVIII e as descobertas que realizaram para o tratamento do infinito. Na sequência adentramos ao século XIX e apresentamos o trabalho de Cantor, com ênfase em sua teoria de conjuntos. Terminamos falando sobre alguns dos problemas encontrados no século XX e sobre algumas questões do infinito matemático discutidas na atualidade.

Destacamos que a história pode assumir múltiplas perspectivas em sua aplicação pedagógica e, portanto, indicaremos quais serão as mais utilizadas e defendidas durante a cronologia do infinito construída aqui. Utilizamos fortemente o caráter motivacional que muitos eventos e fatos interessantes podem exercer sobre os alunos, de modo a modificar o tratamento que dão à matemática. Sob esse foco, a história exerce papel meramente factual de relatar acontecimentos. No entanto a utilização da história apenas com esse caráter não seria suficiente para uma prática pedagógica realmente efetiva, como destaca Miguel (1997):

> Parece-nos que o argumento ao mesmo tempo mais simples e mais trivial que se contrapõe à existência desse suposto potencial motivador da história manifesta-se na consideração de que, se fosse esse o caso, o ensino da própria história seria automotivador. Não é isso, porém, o que atestaria a maioria dos professores de história os quais se defrontam em seu cotidiano não apenas com o desinteresse de seus alunos por esse campo do saber, como também com a enorme dificuldade de fazer com que eles

[1] Estamos nos referindo ao desenvolvimento da matemática e de outras ciências na Europa, uma vez que é o principal foco do referencial teórico utilizado. No entanto reconhecemos que no Oriente Médio e na Ásia havia uma vasta produção significativa.

> compreendam a sua importância, a sua natureza, os seus objetivos e os métodos. (MIGUEL, 1997, pg. 76).

Utilizamos também diversos fatos e problemas históricos como uma fonte de objetivos para a matemática ser ensinada, dentre eles podemos destacar "[...] as necessidade práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas [...]" (MIGUEL, 1997, pg. 77). Momentos históricos apropriados permitem a realização de um exercício crítico e reflexivo sobre a necessidade de se pensar determinados conceitos e a maneira como eles foram tratados.

Podemos nos basear na história de modo a encontrarmos métodos adequados para o ensino, utilizando como base a reprodução de problemas que foram relevantes para construção do pensamento matemático. Para isso apresentamos a história de um modo que possibilite recriar vertentes que foram traçadas em momentos anteriores por matemáticos e outros pensadores que se dedicaram a tentar compreender, interpretar e definir o infinito e não apenas ao caráter fatídico que a história pode assumir, como o relato de momentos relevantes ao desenvolvimento da humanidade. Assim,

> [...] a dimensão pedagógica da história aparece-lhe vinculada à questão da seleção de métodos adequados de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Além disso, o modo como tenta superar a dissonância entre método histórico de produção de conhecimento e métodos de ensino-aprendizagem consiste em atribuir ao primeiro a qualidade de método natural e verdadeiramente científico de instrução [...] Apenas o método histórico seria potencialmente adequado para se atingir o ideal pedagógico de levar a juventude a pensar cientificamente, ideal este que, para ele, deveria constituir o objeto e o objetivo de toda a educação verdadeiramente científica. (MIGUEL, 1997, pg. 80).

A noção de infinito fascinou poetas, filósofos, físicos, matemáticos e profissionais de diversas outras áreas, devido a sua complexidade e dificuldade de abstração. Muitos viraram noites questionando a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade e remoendo os paradoxos de Zenão de Eléia. A incompreensão destes temas originou diversos problemas inexplicáveis, disseminando o infinito pela matemática.

Citando Hilbert (1926, p. 236), "[...] a questão do infinito agitou sempre as emoções da humanidade mais profundamente do que qualquer outra [...]". Aristóteles foi um dos primeiros a refletir sobre as distinções da natureza de tal agitação, estudando o *infinito potencial* e o *infinito atual*[2], que foram retomados por Cantor em sua teoria de conjuntos. O infinito atual só foi aceito como objeto de estudo pela matemática quando foram explicados os paradoxos em que ele estava inserido. Para Bolzano ainda era necessária a criação de um novo conceito de infinito, devido à existência de vários paradoxos gerados pela falta de precisão das ideias e termos daquele momento. No ano de 1869 os trabalhos de Cantor provocaram mudanças e controvérsias com relação à concepção do infinito, fazendo com que até hoje os matemáticos se mantenham divididos com relação a esse tema. (BOYER, 1998; STRUIK, 1997).

3.1 Zenão e os Paradoxos do Infinito

Por volta do século VII A.C. a cultura grega começa a refletir sobre o lugar do homem no universo e toma consciência de que o mundo deve ser compreendido por meio do pensamento racional, abandonando o misticismo que existia. Usando como arma o raciocínio lógico os filósofos partem em busca do conhecimento que fundamentasse as verdades que colocariam ordem ao caos do desconhecido, para isso abordam a matemática como um conhecimento e não mais por sua utilidade prática (BOYER, 1998).

No século V A.C. Atenas passa a implementar a democracia em sua civilização, desenvolvendo um cenário repleto de brigas políticas e contestações sociais, mas também propício ao desenvolvimento intelectual e cultural. Em torno de 450 A.C surgem as primeiras reflexões significativas sobre o infinito por meio dos paradoxos do filósofo Zenão de Eléia, que argumentavam sobre a fragilidade dos conceitos de multiplicidade e de divisibilidade existentes. Foram criados quatro paradoxos: *Aquiles, Seta, Dicotomia e Estádio.* Abordavam conceitos relativos ao movimento e ao tempo, que levaram às primeiras preocupações sobre a definição

[2] Destaco que na literatura existem muitas concepções sobre a natureza do infinito além destas duas, como exemplo podemos citar o infinito real, o infinito completo, o infinito absoluto entre outros. Por muitas vezes tais definições se confundem e se misturam. Trabalharemos apenas estas suas naturezas seguindo as definições presentes nas referências bibliográficas deste trabalho.

do infinito e às discussões sobre o *infinito potencial* e o *infinito atual.* (BOYER, 1998).

Zenão de Eléia nasceu em Eléia, atual Itália. Era um apaixonado pela filosofia de seu mestre Parmênides, da qual decorria sua inclinação para a elaboração de paradoxos que eram usados para mostrar os absurdos das teses que combatia, sem refutá-las diretamente. (HEATH, 1981).

Os paradoxos de Zenão iam contra ideias antigas relativas ao infinitamente pequeno e o infinitamente grande, por meio da elaboração de argumentos que provavam a fragilidade de conceitos como a multiplicidade e a divisibilidade. O principal objetivo dos paradoxos era mostrar a fragilidade da matemática da época, mostrando que o que existia até o momento não era suficiente para explicar com clareza certos fenômenos.

Citando Boyer (1998, p. 52), temos que “A *Dicotomia* e o *Aquiles* argumentam que o movimento é impossível sob a hipótese de subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo [...]”. Os paradoxos da Dicotomia e de Aquiles apresentam argumentos de que se o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis o movimento seria impossível.

A Dicotomia pode ser expressa pensando que um objeto que quer percorrer determinada distância tem primeiro que percorrer metade dessa distância, mas antes disso, tem de percorrer um quarto. Isto continua indefinidamente, até uma infinidade de subdivisões. Segue-se, então, que o movimento não pode chegar sequer a começar.

> Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento e assim por diante, *ad infinitum.* Segue-se então que o movimento jamais começará. (EVES, 2004, p. 418).

Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direção ao longo de uma linha reta. Se Aquiles der alguma vantagem à tartaruga, nunca conseguirá alcançá-la, pois, quando ele atingir a posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado e se encontrará noutro local adiante dele, e quando ele chegar a essa nova posição a tartaruga já terá realizado novo avanço, e assim sucessivamente.

> Além da ausência do primeiro e do último elemento do caminho, deparamos com outra particularidade do infinito atual. Em toda a extensão da competição de Aquiles com a tartaruga o número de segmentos elementares percorridos por Aquiles coincide com o número de segmentos percorridos pela tartaruga, pois a cada elemento do caminho percorrido por Aquiles corresponde um elemento do caminho percorrido pela tartaruga. Mas Aquiles percorre um caminho maior que aquele que percorre a tartaruga. Sendo assim, segmentos desiguais contêm o mesmo número de elementos. (KOUZNETSOV, 1974, p. 58-59).

Por meio dos paradoxos da *Flecha* e do *Estádio* são apresentados argumentos contrários aos utilizados nos paradoxos acima, ou seja, considerando que o tempo e o espaço são compostos de partes indivisíveis, então o movimento é impossível. Citando Boyer (1998, p. 52), "[...] a *Flecha* e o *Estádio*, de outro lado, argumentam que também é impossível, sob a hipótese contrária – de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço termina em indivisíveis.".

Uma flecha lançada para o alvo está, na verdade, parada. Com efeito, em cada instante, a flecha ocupa uma posição fixa, ou seja, em cada instante a flecha está parada. Segue-se então, que a seta jamais se move, ou seja:

> Um objeto em voo sempre ocupa espaço igual a si mesmo; mas aquilo que ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Logo a flecha que voa está sempre parada, portanto seu movimento é uma ilusão. (BOYER, 1998, p. 52).

O paradoxo do estádio pode ser expresso da seguinte maneira: sejam três filas paralelas de atletas num estádio, uma imóvel e as outras correndo em sentidos opostos. Passado um único instante de tempo, cada um dos atletas em corrida passará por um dos atletas em repouso, então um corredor de uma fila terá de ter passado por dois corredores da outra fila em movimento. Ou seja, um corredor de uma fila passa por um corredor da outra fila em metade desse tempo, portanto, o instante de tempo é igual ao seu dobro.

Perceba que as questões apresentadas por Zenão em seus paradoxos são de fácil compreensão e razoável abstração para fazer com que seus argumentos tivessem mais força, consequentemente a elaboração de uma resposta para tais problemas se tornou muito complexa e nunca foi apresentada na antiguidade, fazendo com que os gregos desenvolvessem o que foi chamado de "Horror ao Infinito". (CARAÇA, 1954).

> Conclui-se pela exclusão do conceito quantitativo de infinito dos raciocínios matemáticos – a matemática grega toma uma feição cada vez mais finitista: invade-a o horror do infinito. Conclui-se pelo abandono das concepções dinâmicas, sempre que tal fosse possível – a matemática grega é invadida pelo horror do movimento. (CARAÇA, 1954, p. 78).

As questões propostas por Zenão foram estudadas inclusive por Aristóteles (384-322 A.C.), que buscou compreender o conceito de infinito e chegou a negar a existência do *infinito atual,* afirmando que tal concepção exigia a existência de entidades de dimensão não finita, por outro lado defendeu a existência do *infinito potencial,* que tinha utilidade na resolução de problemas que envolviam grandezas continuas infinitamente grandes ou pequenas. (ORTIZ, 1994).

> Aristóteles tratou de enfrentar o problema do infinito através de duas representações, duas concepções complementares e cuja interação dialética influenciou no próprio desenvolvimento da matemática. No terceiro livro de sua obra Física, Aristóteles distingue dois tipos de infinito; o infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final e o infinito como uma totalidade completa. (ORTIZ, 1994, p.61).

3.2 Infinito Potencial e Infinito Atual

O primeiro a distinguir estas duas formas diferentes de conceber o infinito foi Aristóteles. Em sua obra “Phisis”, palavra grega que significa realidade e deu origem ao termo física, ele fala do infinito como sendo fruto de um processo crescente e sem final, descartando o infinito como algo pronto ou alcançável. Na visão aristotélica, nada é infinito de fato. O infinito é puramente um processo e foi precisamente esta concepção que impediu os gregos de avançarem em suas especulações. (IFRAH,1994).

Apresentamos uma história que ilustra o significado do *infinito potencial* e nos auxilia a compreender melhor porque tal conceito impediu os gregos de avançarem em suas especulações.

> Meu pai e eu chegamos à Academia quando o presidente Maust iniciava a chamada dos participantes na prova mundial de matemática […]. “Um, dois, três,…”.
>
> Na sala ouvia-se apenas a voz dos concorrentes. Por volta das dezessete, tinham ultrapassado o vigésimo milhar […]. Às vinte, os sobreviventes eram sete “…, 36747, 36748, 36749, 36750, …”. Às vinte e uma, Pombo acendeu os candeeiros “…40719, 40720, 40721,…”.

> Às vinte e duas exatas, registrou-se o primeiro golpe de teatro: o algebrista Pull concluiu: “Um bilhão”. Um oh de assombro coroou a saída inesperada; ficaram com o alento suspenso. Um italiano Binacchi acudiu com prontidão: “Um bilhão de bilhões de bilhões”.
> Explodiram aplausos na sala, imediatamente secundados pelo presidente. Meu pai olhou em volta com superioridade […] e principiou: “Um bilhão de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões…”. A multidão delirava:
> “Viva, viva…”. “… de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões…”. O presidente Maust, muito pálido, murmurava a meu pai, puxando-o pelas abas do Gabão: “Basta, vai fazer-lhe mal”. Mas meu pai prosseguia febrilmente: “…de bilhões de bilhões de bilhões de bilhões!” A sua voz atenuou-se a pouco e pouco e o último sopro de bilhões brotou-lhe dos lábios como um suspiro, após o qual se deixou cair na cadeira, exausto. O príncipe Otão aproximou-se, e preparava-se para lhe colocar a medalha no peito, quando Gianni Binacchi bradou: “Mais um!”.
> A multidão precipitou-se no hemiciclo e ergueu este último em triunfo. Quando regressamos a casa, minha mãe aguardava-nos, ansiosa, à entrada. Chovia. Meu pai, mal desceu a carruagem, lançou-se-lhe nos braços, soluçando: “Se tivesse dito mais dois, ganhava eu”. (ZAVATTINI, Césare, 1931).

A história acima apresenta uma competição entre matemáticos, na qual o ganhador é aquele que pronunciar o “número mais alto”, no entanto observe que na realidade esta competição nunca teria um vencedor, pois mesmo que o pai apresentado no texto acima tivesse dito “mais dois” sempre seria possível proferir “mais um” e obter um novo vencedor. Com isto podemos concluir que um número, mesmo que extremamente grande, nunca será o maior que de todos pelo fato de sempre ser possível adicionar uma unidade a ele para formar um maior ainda, logo não existe um número mais alto que de a seu locutor a vitória da competição.

Podemos observar pelos axiomas propostos pelo matemático Alessandro Di Peano na construção dos números naturais que sua sequência não possui fim, ou seja, é infinita, pois se fixarmos um número natural qualquer sempre será possível tomarmos seu sucessor, que será maior que ele. Com isto estabelecemos o conceito de *infinito potencial*, que tem como principal argumento a capacidade de sempre avançarmos na ordem crescente dos elementos, sem que haja um último.

Foi São Tomás de Aquino (1225 – 1274) que, fazendo uso declarado das ideias aristotélicas, classificou o infinito potencial como sendo um processo interminável e o infinito atual como sendo algo acabado. (IFRAH, 1994).

Para apresentarmos o conceito de *infinito atual* construiremos uma comparação entre ele e o conceito de *infinito potencial* para então mostrarmos as diferenças existentes entre essas definições e desenvolvermos uma ideia mais clara sobre seu significado.

Segundo Mometti (2007), podemos entender estas duas ideias em matemática tomando como exemplo a dízima periódica 0,9999.... Se pensarmos que é sempre possível acrescentar mais um algarismo, o 9, e que este processo nunca termina, estamos pensando no infinito potencial; já se aceitarmos que 0,9999... é igual a 1, estamos falando de infinito atual[3]. Seria como se transformássemos a dízima periódica infinita num “objeto” finito, isto é, o número 1.

Desse modo obtemos uma infinidade que pode ser realizada e não apenas uma infinidade que não pode ser completada como era o caso do *infinito potencial*, chamamos tal conceito de *infinito atual*, sendo que a primeira é

> [...] uma quantidade finita variável e aproximando-se à medida que se fazem aproximações, todas elas finitas, enquanto que o segundo é uma quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas. Trata-se do infinito enquanto totalidade. (CANTOR *apud* MUIR, 1995, p. 237).

Para exemplificar tais conceitos considere o seguinte problema: dada uma circunferência de raio 1 (um) podemos inscrever nela um polígono (não necessariamente regular) com qualquer quantidade de vértices colocados sobre a circunferência, note que a área do polígono inscrito ocupará parte da área da circunferência. Sendo assim, o que acontecerá com a área do polígono se inscrevermos na circunferência polígonos com cada vez mais vértices? Em algum momento a área do polígono inscrito e da circunferência serão iguais?

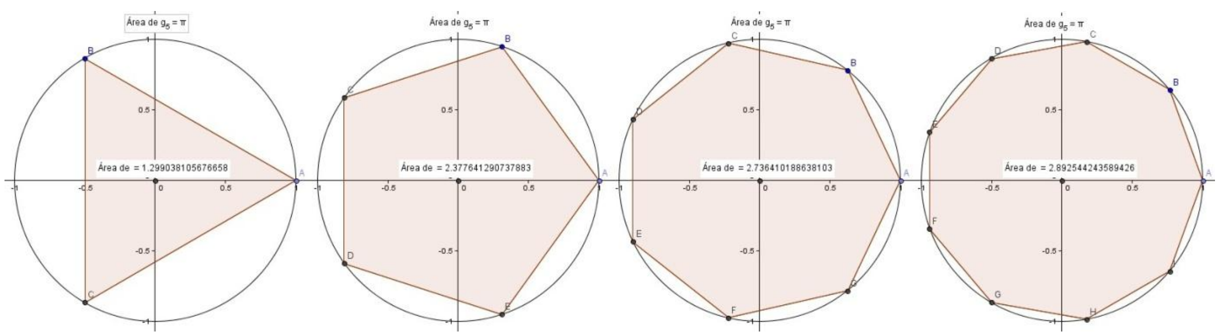

Figura 1: Sucessão de Polígonos.

---

[3] Destacamos que o infinito atual é apenas uma das diversas concepções assumidas pelo infinito e que auxiliaram na construção do conceito de limite infinito.

> O infinito potencial consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos; o infinito atual não é um processo, é ele o resultado final desse processo. A circunferência, por exemplo, pode ser pensada como um polígono com infinitos lados, cada um deles infinitamente pequeno. Os resultados e demonstrações obtidos ao recorrer-se ao uso do infinito atual possuem um caráter apenas existencial, sem que se possa construir explicitamente o objeto ao qual elas se referem. (JEANRENAUD; MARTINS, 2010, pg. 2).

Observe que de fato sempre é possível adicionarmos mais vértices de um polígono sobre a circunferência, pois tal número é uma quantidade discreta, em particular uma quantidade que pode ser representada por um número natural igual ou maior que três. Logo, o número de vértice se enquadra no conceito de *infinito potencial* e, consequentemente, não importando quantos já estejam sobre a circunferência, pois sempre poderemos colocar mais.

Note pela Figura 1 que, quanto mais vértices adicionamos ao polígono, maior é sua área e mais ela se aproxima da área da circunferência, de fato podemos aproximar o quanto desejarmos. Conhecemos pela geometria euclidiana que a circunferência de raio 1 (um) possui área π e que as áreas dos polígonos inscritos possuem diversos valores que se aproximam da área da circunferência sem nunca chegar a ela de fato. Considerando o resultado final da sucessão dos valores das áreas, sob a concepção do *infinito atual,* obteremos como resultado que a área do polígono com infinitos vértices e lados infinitamente pequeno terá a mesma área da circunferência, neste caso será igual a π.

Uma versão semelhante deste problema foi inicialmente trazida por Arquimedes ao tentar calcular a área de uma circunferência. A determinação de áreas de figuras planas fazia-se, na matemática grega, por comparação com áreas conhecidas como, por exemplo, a área do quadrado. *Quadratura* era o nome que se dava a essa determinação. Medir uma figura geométrica, para os geômetras gregos, não era encontrar um número, mas sim uma figura conhecida com o mesmo comprimento, área ou volume da primeira. Nessa perspectiva, calcular a medida de uma área era um falso problema. O que interessava aos Gregos, no quadro das suas matemáticas, era determinar a relação entre duas áreas. A quadratura do círculo insere-se nessa preocupação. Este problema ficou famoso porque a sua solução, que destacamos não existir, obcecou não só os Gregos como também matemáticos de todos os tempos. Só em 1882, quando Ferdinand von Lindemann

(1852-1939) demonstrou que π é um número transcendente, ficou provado que a quadratura do círculo é impossível. (CARAÇA, 1954; IFRAH, 1994; BOYER, 1998).

Arquimedes (287-212 AC), em vez de procurar fazer a quadratura do círculo por construção com régua e compasso, tentou medir a sua área e encontrou uma solução aproximada. O seu resultado é equivalente a determinar um valor, também aproximado, de π. O método por ele usado, método da exaustão, inventado por Eudoxo, permite encontrar aproximações sucessivas de uma dada área, por comparação com áreas conhecidas. (CARAÇA, 1954; IFRAH, 1994).

Para calcular a área do círculo, Arquimedes considera polígonos inscritos de número de lados 6, 12,...96. Faz o mesmo com polígonos circunscritos e consegue assim mostrar que a área do círculo está entre dois valores determinados, ou seja, é menor que a dos polígonos circunscritos e maior que a dos polígonos inscritos. Note que neste processo consideramos os valores das áreas dos polígonos inscritos, que são menores que a área da circunferência e formam uma sequencia crescente de números reais, como também a dos polígonos circunscritos que são maiores e forma uma sequencia decrescente de números reais, logo o limite (que seria dado por π) é ultrapassado infinitas vezes, mas ainda assim podemos observar que os valores das áreas se aproximam cada vez mais de π e que tal valor pode ser aproximada tal quanto se queira mediante a inserção de mais vértices aos polígonos inscritos e circunscritos. (CARAÇA, 1954; IFRAH, 1994).

O método da exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. No entanto, enquanto que no cálculo se soma um número infinito de parcelas (no caso do círculo teríamos um polígono com um número infinito de lados), Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir a soma de uma série infinita será necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam. Assim, não considero correto tratar o método de Arquimedes como um processo geométrico de passagem ao limite. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito, que esteve sempre excluído da matemática grega, mesmo em Arquimedes. Mas, no entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das ideias de limite e de infinito. De fato, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do século XVII, tendo essa desempenhado um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal. (CARAÇA, 1954; IFRAH, 1994; BOYER, 1998).

> Ligada com a existência do limite de uma sucessão, está a *operação de passagem ao limite* – considerada a sucessão $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ *fazemos tender* n para o infinito (isto é, consideramos sucessivamente termos com índices arbitrariamente grandes) e *passamos ao limite* (isto é, determinados o resultado da interdependência dessa infinidade de termos).
> Estas maneiras de dizer são essencialmente *dinâmicas – fazemos tender, passamos* – indicativas duma atitude de espírito muito diferente da simples consideração *estática* dos termos da sucessão. Entre estas duas atitudes de espírito medeiam na História da Ciência 2000 anos e, ao longo desses vinte séculos, arrasta-se o calvário duma ideia – a ideia de infinito! Ideia perante a qual os gregos recuaram e que é retomada e utilizada agora, como elemento ativo desta operação.(CARAÇA, 1951, p. 234).

Destacamos que as naturezas da concepção do infinito apresentadas aqui retratam antecedentes preciosos necessários para a atual formalização do conceito de limite, que já se fazia implicitamente presente na criação dos paradoxos que demonstravam a impossibilidade do movimento e a fragilidade da matemática existente na época. O infinito pode ser visto como um limite que nunca se atinge, de um número infinito de números. Isto é, os números 1, 2, 3, 4, 5 ... podem continuar indefinidamente, mas nunca atingirão o último, no infinito. Visto desta maneira, cada número da sequência é apenas um passo de um processo infinito. No entanto, o limite nunca atingido pode ser visto como um número em si mesmo, um número transfinito. Este número transfinito é infinitamente atualizado, é o limite para o qual se tende, mas que nunca se atinge, é aquilo que Cantor considera a “quantidade fixa constante, para além de todas as quantidades finitas”. (CARAÇA, 1954; IFRAH, 1994; BOYER, 1998).

Da mesma forma, os números irracionais podem ser vistos como o limite de uma sequência infinita de números. Uma sequência de números que tem o infinito como limite é fácil de visualizar, por exemplo, a sequência dos inteiros, 1, 2, 3, 4, 5, ..., ou pode ser qualquer sequência gerada a partir desta, como por exemplo 1, 2, 4, 8, 16, ..., em que cada número da sequência é o dobro do antecessor. Estas sequências têm o mesmo “tamanho”, $\aleph_0$, o primeiro número da sequência dos números transfinitos, que abordaremos a seguir. Nos deparamos agora com o problema de como representar as sequências infinitas que têm números irracionais como limite. Cantor resolveu o problema de uma forma simples, que expressaremos por meio de um exemplo: o número irracional $\sqrt{2}$ pode escrever-se na forma de dízima infinita não periódica, 1,414214... Esta dízima pode ser representada por uma sequência infinita de números racionais que se aproximam crescentemente de $\sqrt{2}$ mas que nunca ultrapassem o seu valor. Destacamos aqui que pode se construir também uma dízima representada por uma sequência infinita de números racionais que se aproximam decrescentemente de $\sqrt{2}$ mas que nunca ultrapassem o seu valor e que $\sqrt{2}$ estaria sempre entre estas duas dízimas. Note portanto que uma variação entre essas dízimas representa uma sequência infinita de números racionais que se aproximam de $\sqrt{2}$ tanto crescente como decrescentemente. (CARAÇA, 1954).

Isso pode ser feito de forma muito simples: considere a sequência 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414214, ... Cada número desta sequência é apenas um passo do processo infinito de geração do número irracional $\sqrt{2}$. Assim, $\sqrt{2}$ é o limite de um processo infinito e, tal como o limite da sucessão dos inteiros pode ser visto como um número, o número transfinito $\aleph_0$, também o limite da sequência racional 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414214, ... pode ser visto como um número, o número irracional $\sqrt{2}$. Este número irracional fica assim definido apenas em termos de números racionais. (CARAÇA, 1954).

Ao longo da história o conceito de limite foi definido e modificado diversas vezes pelos matemáticos e pensadores, sempre se adaptando a consistência da matemática da época e as muitas concepções de infinito. Para fornecermos a definição atual de limite infinito considere uma sequência (x_n) de números reais, dizemos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a$, com $a \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ com $n > M$ temos que $|x_n - a| < \varepsilon$. Isto significa que dada qualquer aproximação que se deseje entre os elementos da sequência e seu limite podemos encontrar um termo da sequência suficientemente próximo do limite tal que todos os termos após ele também estarão tão pertos do limite, ou seja, sempre podemos encontrar um termo da sequência tão perto quanto se queira de seu limite. (CARAÇA, 1954).

Continuamos nosso relato no século V A.C., matemáticos discípulos de Pitágoras de Samos (580-500 A.C), também conhecidos como pitagóricos, descobriram a impossibilidade de os números racionais representarem a razão do lado de um quadrado por sua diagonal. Como os números irracionais ainda não eram conhecidos, tais medidas eram consideradas grandezas ao invés de números e eram chamadas de incomensuráveis. Foi por meio das grandezas incomensuráveis que os números irracionais foram reconhecidos. (HEATH, 1981).

Este reconhecimento causou grandes incômodos aos matemáticos da época, fazendo com que desenvolvessem raciocínios extremamente complexos em suas teorias para evitar o contato com aqueles “monstros numéricos”. A escola platônica chegou a desenvolver um método indireto e deveras rigoroso em suas demonstrações sobre o cálculo de áreas e volumes, no qual utilizavam unicamente a lógica formal, tal método foi batizado por Grègoire de Saint-Vicent (1584-1667) como método da exaustão. Devido a casos como esse os gregos eliminaram o infinito de suas teorias matemáticas. (HEATH, 1981; BOYER, 1998).

O matemático Demócrito de Abdera desenvolveu sua matemática interessado na teoria física do atomismo, ficando particularmente interessado nos problema que necessitavam de tratamento infinitesimal com relação à matéria, ao tempo e ao espaço levando à noção de quantidade infinitesimal. Infelizmente sua escola sofreu resistência, devido às descobertas de Zenão e dos pitagóricos.

Euclides de Alexandria foi responsável por uma das maiores obras da matemática grega, *Elementos*, na qual reuniu em treze livros as grandes descobertas já realizadas. Entre essas estava o método das proporções desenvolvido por Eudoxo de Cnido (408-355 A.C.) e utilizado para o cálculo de áreas. O método consistia na realização de aproximações sucessivas da área por meio de somas de infinitas parcelas e, apesar de os gregos não reconhecerem o infinito, esse método foi muito utilizado. A teoria desenvolvida para o método das proporções permitiu a Eudoxo resolver o problema das grandezas incomensuráveis exposta no livro V dos *Elementos.* (HEATH,1981).

Os questionamentos sobre o infinito foram iniciados pelos gregos, no entanto sua negação a ele impediu o desenvolvimento de concepções mais completas, deixando muito a ser trabalhado.

3.3 A Época dos Gênios[4]

Durante toda a idade média a ciência esteve estagnada e o pensamento medieval nunca se aproximou da genialidade presente nas ideias dos filósofos gregos, no entanto alguns pensadores da época também refletiram sobre a questão do infinito, dentre os quais se destaca São Tomás de Aquino (1225-1274), que defendeu a existência do *infinito atual* (BOYER, 1998). Os filósofos escolásticos frequentemente abordavam o conceito de infinito, seus pensamentos acabaram por reviver o assunto e os problemas que ele trazia, auxiliando para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal no século XVII.

Conhecido como século dos gênios, neste período foram desenvolvidos o cálculo e a geometria analítica, de modo que se tornou uma das épocas mais produtivas para a matemática. Em 1558, Federigo Comandino (1509-1575) realiza a tradução das obras de Arquimedes, permitindo o acesso a descobertas feitas pelos gregos, como o método de integração que será o ponto de partida para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Johann Kepler (1571-1630) utilizou deste método considerando somas infinitas em seus trabalhos com astronomia. Citando Struik (1997, p.160), "[...] nos trabalhos de Johann Kepler é particularmente evidente a influência estimulante da nova astronomia em problemas que envolviam longos cálculos, bem como considerações infinitesimais.". O método da exaustão desenvolvido na escola platônica foi uma das principais bases para os métodos infinitesimais desenvolvidos no renascimento para resolver problemas de áreas e volumes, além disso, foi utilizado em estudos de movimento e mecânica celeste. (BOYER, 1998; STRUIK, 1997).

O primeiro a desenvolver uma relação entre conjuntos infinitos foi Galileu Galilei (1584-1642), publicando uma obra[5] na qual realiza uma correspondência de um para um entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos, sem conseguir perceber que a cardinalidade dos conjuntos era a mesma, no entanto percebe que os termos "*igual a*", "*menor que*", "*maior que*" não devem ser

[4] Foi a época do surgimento de nomes que têm sido postos em destaque dentro da matemática acadêmica, por estarem ligados a uma vasta e significativa produção em diversas áreas.

[5] Diálogos Relativos a Duas Novas Ciências, de 1638 (STRUIK, 1997).

utilizados para comparações entre quantidades infinitas e conclui que nem a quantidade de quadrados é menor que a dos números naturais, nem o último é maior do que o primeiro.

> Salviati: (…): Por consciência, se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e os não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira não é?
> Simplicío: Certamente.
> Salviati: Se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, em nos enganarmos, que há tantos quantas raízes quadradas correspondentes, atendendo a que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, que um quadrado não tem mais que uma raiz, nem uma raiz mais que um quadrado.
> Simplicí: Exatamente.
> Salviati: Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado; assim sendo, será portanto preciso dizer que há tantos números quadrados como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números; e no entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números são quadrados.
> Sagredo: Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?
> Salviati: Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas. (GALILEI, 1989)

Nesta obra é apresentada uma conversa entre *Salviati*, um sábio que transmite as ideias de Galileu, *Sagredo*, um leigo inteligente, e *Simplícius*, um homem que defende as concepções Aristotélicas. Pela voz de *Salviati*, Galileu utiliza o infinitamente pequeno diversas vezes, sem entrar nos detalhes de seu significado, mas fazendo a ressalva de que o conceito de infinito transcende ao conhecimento da época e também apresenta o paradoxo da cardinalidade dos números naturais e seus quadrados. (BOYER, 1998; STRUIK, 1997).

O professor Bonaventura Cavalieri (1597-1647) realizou a publicação de um livro[6] contendo as principais ideias de Galilei e Kepler. Tal obra ajudou a difundir entre os matemáticos os problemas relacionados aos infinitesimais, resultando em um grande passo para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. John Wallis publica uma obra[7] (1642-1703), na qual, pela primeira vez, foi utilizado o símbolo ∞

[6] *Geometria Indivisibilius Continuorum*, de 1635 (BOYER, 1998).
[7] *Arithmetica Infinitorum*, de 1655 (BOYER, 1998).

para representar 1/0, utilizou-se também de expoentes negativos, fracionários e imaginários, introduziu o estudo de séries infinitas que auxiliou Isaac Newton (1642-1727) a escrever sua *teoria das fluxões* em 1665, nela os infinitesimais representavam os *momentos de fluxões*. Nesta obra Newton introduz a primeira noção de limite, mas de maneira extremamente imprecisa, será apenas em *Principia Mathematica*, no ano de 1687, que ele atingirá seu apogeu. (BOYER, 1998; BOYER, 1959).

Gottfried Leibniz (1646-1716) trabalhou com um novo cálculo que possuía base geométrica, entre 1673 e 1676, enquanto a abordagem de Newton era puramente cinemática. As nomenclaturas *calculus differentialis* e *calculus integralis* foram dadas por Leibniz e são utilizadas até hoje, assim como boa parte da notação matemática utilizada no cálculo, por exemplo, a utilização do símbolo *dx* para a diferença menor possível (diferencial) em *x.* (BOYER, 1959).

Leibniz publica sua primeira obra[8] sobre o cálculo diferencial e integral, apresentando um método para encontrar tangentes e quadraturas.

Em 1693 Leibniz elogia Grégoire de Saint Vicent por ter resolvido o paradoxo de Aquiles encontrando o local onde ocorreria o encontro com a tartaruga e aceitando a existência do *infinito atual*. Grégory utiliza, no desenvolvimento de sua solução, métodos para realizar a soma de um número infinito de grandezas que, posteriormente, serão considerações valorosas para a construção do cálculo integral, tornando-se de uso corrente na matemática da época. Devemos frisar que Leibniz, por sua vez, só concebia o infinito e o infinitesimal para facilitar o cálculo, de modo que o resultado sempre poderia ser expresso em termos de quantidades finitas. (BOYER, 1959).

A *Teoria das fluxões* de Newton se aproxima bastante do cálculo atual, no entanto a eficácia das notações de Leibniz foi mais bem aceita, tendo maior divulgação. (BOYER, 1959).

Século de Leonhard Euler (1707-1783), autor de 560 trabalhos em vida e muitos outros póstumos, sendo considerado um dos matemáticos mais produtivos da história. Citando Struik (1997, p.196-197), "[...] o grande prestígio dos seus textos

[8] *Nova methodus pró maximis et minimis, itemque tangentibus qua nec irrationales quantitates moratur* de 1684 (BOYER, 1959).

resolveu para sempre muitas questões controversas sobre a notação na álgebra e no cálculo infinitesimal [...]".

Euler foi responsável por desenvolver a maior parte da notação e da linguagem matemática utilizada até hoje. A ele é atribuída a notação de *f(x)* para representar uma função que depende da variável x e símbolos como e, π e i. Escreve uma obra[9] voltada para o estudo dos processos infinitos. Segundo Boyer (1998, p. 306), "[...] pode ser dito com justiça que Euler fez pela análise de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teaetetus, ou o que Viète fizera pela álgebra de al-Khowarizmi e Cardano.".

Euler se correspondia frequentemente com o matemático Jean Le Round d'Alembert (1717-1783), que defendia a construção do cálculo fundamentado na ideia de limite, substituindo a razão de quantidades infinitesimais pela concepção do limite, no entanto essa ideia não foi aceita pelos matemáticos da época. D'Alembert desenvolvia o cálculo baseado em grandezas geométricas e por isso não aceitava a ideia do *infinito atual* e utilizava sempre a forma *potencial,* chegando a afirmar que uma quantidade ou representava algo ou não era nada. (BOYER, 1998; BOYER, 1959).

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) foi um matemático que rejeitou a teoria dos limites de Newton e Leibniz e se dedicou ao estudo do cálculo pela álgebra, publicando uma obra[10] onde utiliza a notação $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$ para indicar derivadas de várias ordens. Pensou ter conseguido eliminar o uso de limites, mas posteriormente seu argumentou se mostrou falho. (BOYER, 1959).

3.4 Surgimento dos Conceitos Atuais

O século XIX é marcado pelo surgimento de muitos novos matemáticos de mentes abertas e inspiradas por novas concepções que visam revolucionar a ciência. A matemática deixa de ser considerada uma ciência que auxilia outras como a mecânica e a astronomia e passa a assumir seu papel como uma ciência própria,

[9]*Introduction in analysin infinitorium*, de 1748 (BOYER, 1998).
[10]*Theorie dês fonctions analytiques*, de 1797 (BOYER. 1959).

sendo necessária uma profunda reflexão de seus fundamentos e significados, o que levantou novamente os debates sobre o *infinito atual*.

Augustin Cauchy (1789-1857) utilizou o cálculo para responder diversos paradoxos existentes desde a Grécia e realizou a fundamentação utilizada até hoje em diversas obras[11]. Utilizou fundamentalmente o conceito de limite utilizado por d'Alembert, o conceito de função, de integral como limite de uma soma e etc. (BOYER, 1959).

Karl Weierstrass (1815-1897), segundo Struik (1997, p. 256), "[...] era a consciência matemática por excelência, metodologia e lógica". Em seu trabalho esclareceu as noções de mínimo de uma função, de convergência uniforme e diversos tópicos sobre o cálculo de limites em geral. Criou fundamentos sólidos para análise, eliminando os erros que ainda existiam no cálculo e tornando rigoroso o tratamento das séries infinitas. (STRUIK, 1997).

O rigor utilizado por Cauchy, Weierstrass e Bernhard Bolzano (1781-1845) na construção dos fundamentos utilizados nos métodos do cálculo infinitesimal levou a sua formalização rigorosa baseada no conceito de limite, que permitiu uma nova abordagem sobre o infinito.

Leopold Kronecker (1823-1891) defendia que a matemática devia ser extremamente rigorosa, baseada nos números, e que todo número devia ser natural, chegando uma vez a afirmar que "Deus fez os números inteiros e os homens fizeram o resto". Logicamente Kronecker refutava o infinito, indo contra as teorias que estavam sendo desenvolvidas por Richard Dedekind (1831-1916) e George Cantor (1845-1918). (BOYER, 1998).

Bolzano defendeu o *infinito atual,* afirmando em seu livro[12] que um conjunto poderia ser caracterizado apenas por suas propriedades, sem a necessidade de enumeração de seus elementos, ou seja, considerava o conjunto como um todo, no qual o todo é maior que as partes, mesmo assim acreditava que tais afirmações não eram tão simples para conjuntos infinitos. Bolzano realizou trabalhos tentando estabelecer critérios de comparação entre conjuntos infinitos e, para isso, estudou o

[11]*Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, de 1821; *Résumé des leçons sur le Calcul infinitesimal*, de 1823 e *Leçons sur le Calcul différentiel* de 1829 (BOYER, 1959).

[12] *Paradoxien des unendlichen*, de 1851.

paradoxo dos números naturais e seus quadrados, proposto por Galileu, chegando a concluir que as relações entre um conjunto infinito e um de seus subconjuntos próprios são comuns a todos os conjuntos infinitos. Apesar disso, não achava suficiente a existência de uma bijeção entre esses conjuntos para afirmar que possuíam mesma cardinalidade. Bolzano elaborou diversos paradoxos para mostrar que as concepções atuais do infinito eram imprecisas e se dedicou a buscar uma nova conceituação para ele.

> Quando dois conjuntos são infinitos, pode haver uma relação tal que, por um lado é possível associar cada elemento do primeiro conjunto com algum elemento do segundo de tal forma que nenhum elemento dos dois conjuntos fique sem associação e também que nenhum dos elementos tenha mais que uma associação, e por outro lado é possível que um conjunto possa conter o outro como uma parte de si. (Bolzano, 1991, p. 64).
> É insuficiente que se possam equiparar os elementos de dois conjuntos [infinitos]… Só se pode concluir uma igualdade destas multiplicidades se ambos os conjuntos forem determinados de modo idêntico. (Bolzano, 1991, p. 67).

Por muito tempo os matemáticos buscaram um método de comparação entre conjuntos infinitos e, finalmente no século XIX, foi aceito que, se existisse uma bijeção entre os elementos de dois conjuntos, então eles teriam mesma cardinalidade, inclusive se fossem infinitos. Tal questão foi inicialmente respondida por Cantor, cujas investigações se baseavam na busca de resposta para a seguinte questão: “Como comparar conjuntos se não é possível contar seus elementos?”.

Cantor desenvolveu em seus trabalhos a teoria dos conjuntos e a teoria das multiplicidades. Defendeu o *infinito atual* e desenvolveu a teoria dos números cardinais transfinitos, que explica os diversos conjuntos infinitos baseando-se num rigoroso tratamento matemático do *infinito atual*. Como os números cardinais não podem representar a quantidade de elementos de um conjunto infinito foi criado o número transfinito, que está situado após o infinito.

Para realizar seus estudos em análise foi necessário fazer uma construção dos números reais fundamentada rigorosamente na aritmética e, para isso, teve que desenvolver avançou muito em seus estudos sobre a teoria de conjuntos e diversos conceitos relacionados a séries, em particular estudou séries trigonométricas e conjuntos de pontos específicos ligados à convergência de séries. (DAUBEN, 1990; BOYER, 1959).

Buscando resposta para tal, Para responder sua questão inicial Cantor enunciou a teoria de equivalência de conjuntos.

> Se eu puder corresponder, elemento por elemento, dois conjuntos bem definidos M e N por uma operação unívoca (e, quando se pode fazê-lo duma maneira, pode-se fazê-lo também de muitas outras) [...] digo que estes conjuntos têm a mesma potência, ou ainda que eles são equivalentes. (Cantor, 1883 [1887]).

Richard Dedekind desenvolveu uma rigorosa teoria sobre os números irracionais, eliminando os "buracos" existentes na reta e criando os números reais, seu trabalho tem como principal inspiração a teoria das proporções de Eudoxo. Desenvolveu os primeiros estudos sistemáticos do infinito, estabeleceu uma relação biunívoca entre os pontos da reta e os números reais, estabeleceu uma bijeção entre dois conjuntos infinitos fazendo a transição entre o *infinito potencial* e o *atual*. Com isso, em 1888, enunciou[13] que um conjunto é infinito se é possível estabelecer uma relação biunívoca (bijeção) entre ele e um subconjunto próprio seu e esse permanece sendo o conceito de infinito mais aceito e utilizado até hoje. Posteriormente expos de maneira completa suas descobertas em uma de suas obras[14]. (DAUBEN, 1990; BOYER, 1998; BOYER, 1959).

Cantor também mostrou que existem diversos "tamanhos" de infinitos, podendo ainda que dois infinitos sejam iguais ou diferentes. Em 1874 Cantor publicou[15] a demonstração da impossibilidade da existência de uma bijeção entre os números naturais e os números reais e, com isso, ficou provado que os subconjuntos infinitos dos naturais têm mesma cardinalidade, que o conjunto dos números racionais é enumerável e que o conjunto dos reais é não enumerável. (DAUBEN, 1990).

Entre outras pesquisas Cantor buscou encontrar infinitos entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ e infinitos maiores que $\mathbb{R}$, chegando a mostrar que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ possuem mesma cardinalidade para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. Em sua obra *Argumento Diagonal* mostrou que o conjunto das partes de um conjunto possui cardinalidade maior que ele, logo $\wp(\mathbb{R})$ (conjunto das partes dos reais) possui cardinalidade maior do que $\mathbb{R}$. Formulou a hipótese do contínuo (1878), na qual afirma, sem provar, que não existe um infinito

[13] *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, de 1872 (BOYER, 1998; BOYER, 1959).
[14] *Was sind und was sollen die Zahlen?* (BOYER, 1998; BOYER, 1959).
[15] *Über eine Eigenschaft des Ingegriffes aller reelen algebraischen Zahlen*, de 1874 (DAUBEN, 1990).

intermediário entre o infinito potencial e o contínuo (a cardinalidade do contínuo seria a mesma cardinalidade dos números reais). (DAUBEN, 1990; IFRAH, 1994).

A hipótese do continuo é uma conjectura proposta por Cantor da seguinte maneira: "Não existe nenhum conjunto com mais elementos do que o conjunto dos números naturais e menos elementos do que o conjunto dos números reais." (IFRAH, 1994)[16].

As teorias de Cantor para a teoria de conjuntos revolucionaram a matemática da época, fazendo com que os paradoxos iniciais sobre o infinito finalmente fossem esclarecidos, no entanto, aos poucos foram surgindo novas contradições presentes em sua teoria, que foram solucionados no século XX.

3.5 Século XX e Sua Influência nos Tempos Atuais[17]

No segundo Congresso internacional de Matemática (1900) o matemático David Hilbert (1862-1943) apresentou uma lista de 23 problemas Matemáticos que precisavam de respostas, sendo que o primeiro abordava a estrutura de continuidade dos números reais e a hipótese do contínuo. Sobre o problema do contínuo, que fala da potência ou cardinalidade do contínuo, Hilbert questiona se $\aleph_0$ é ou não a potência do enumerável. (BOYER, 1998; HILBERT, 1990).

> Problema do Senhor Cantor relativo à potência do contínuo.
> Todo o sistema infinito de números reais, isto é, todo o conjunto de números (ou pontos), ou é equivalente ao conjunto dos números naturais 1, 2, 3, …, ou ao conjunto de todos os números reais, e por consequência ao contínuo, isto é, aos pontos de um segmento; de um ponto de vista equivalente, não há mais que dois conjuntos de números: os numeráveis e o contínuo.
> A partir deste teorema podemos concluir igualmente que o contínuo apresenta o número cardinal imediatamente a seguir ao do conjunto numerável.
> […] O conjunto de todos os números não poderá ser ordenado de uma outra forma tal que todos os conjuntos parciais tenham um primeiro elemento? Dito de outra forma, será que o contínuo poderá ser considerado um conjunto bem ordenado? (Hilbert, 1990, p. 13-14).

---

[16] Destacamos que nesse capítulo desejamos apenas apresentar um panorama geral do que estava sendo desenvolvido na época, sem entrar em detalhes específicos referentes ao Aleph ($\aleph$) e a hipótese do contínuo.

[17] Destacamos que nesta seção desejamos apenas apresentar superficialmente alguns tópicos atuais e sofisticados utilizados no tratamento do infinito sem explorar em todos os seus detalhes e significados.

Ernst Zermelo (1871-1956) propôs[18] o *axioma da escolha*, que afirma que dada uma família de conjuntos $\{C_\alpha\}_{\alpha \in J}$ disjuntos e não vazios, existe uma função $\phi: \{C_\alpha\}_{\alpha \in J} \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in J} C_\alpha$ tal que $\phi: (C_\alpha) \in C_\alpha$, e, ao utilizá-lo na teoria de conjuntos, mostrou que é possível eliminar as contradições existentes, no entanto por ser um axioma não foi muito aceito pelos matemáticos. Hilbert chegou a colocar que "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós" e tentou provar de maneira mecânica a consistência desse "paraíso". (BOYER, 1990; DAUBEN, 1990; IFRAH, 1994).

> A Análise matemática constitui, por si mesma, uma sinfonia do infinito.
> […] Mas a Análise, por si só, não nos dá ainda a visão mais aprofundada da natureza do infinito. Para obtê-la servimo-nos de uma disciplina que se aproxima da especulação filosófica geral e que estava destinada a dar nova luz a todos os complexos problemas que se referem ao infinito. Esta disciplina é a teoria dos conjuntos que foi criada por Georg Cantor. […]
> Esta parece-me a mais maravilhosa florescência do espírito matemático e, sem dúvida, uma das mais altas realizações da atividade racional humana pura. (Hilbert, 1926, p. 239-240).

Observe que um sistema axiomático deve satisfazer três condições:

- Ser consistente, ou seja, se não há contradição, isto é, não possui capacidade de derivar a afirmação e negação de uma mesma sentença;
- Ser completo, ou seja, para toda sentença, sua afirmação , ou sua negação é derivável;
- Cada axioma deve ser independente dos demais, ou seja, nenhum axioma pode ser derivado através dos outros axiomas do sistema.

Em 1930 o trabalho *Teoremas da Incompletude* de Gödel-Russel afetou os fundamentos matemáticos da época e em 1931 Kürt Gödel (1906-1978) realizou a demonstração de que o método axiomático apresenta limitações, ou seja, que existem verdades matemáticas impossíveis de serem demonstradas por via lógica. (BOYER, 1950; BOYER, 1990; COHEN, 1966).

A descoberta de Gödel "[...] implica que a consistência de um sistema matemático não pode ser demonstrada exceto utilizando métodos mais poderosos do que os métodos de demonstração do próprio sistema [...]" (Cohen, 1966, p. 7).

[18] *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, de 1908.

Em 1936 Gödel mostrou que a hipótese do contínuo é compatível com o axioma da escolha e em 1963 Cohen mostrou que a negação da hipótese do contínuo também é compatível com o axioma da escolha, ou seja, mostraram que a formulação não poderia ser demonstrada ou refutada utilizando apenas os axiomas básicos da teoria de conjuntos. (BOYER, 1950; BOYER, 1990; COHEN, 1966).

4 CAMINHOS METODOLÓGICOS

Tendo em vista que a inserção de tópicos iniciais de cálculo e tópicos relacionados à concepção do infinito nos programas curriculares do ensino básico representa uma prática diferente da usual, resolvemos investigar a opinião de professores de ensino médio e superior com relação a esse tema. Selecionamos profissionais que apresentam uma relação direta com as esferas de ensino que mais lidam com este assunto e que mais seriam afetadas por estas mudanças, de maneira que os próprios professores também seriam atingidos pelas decorrentes alterações.

Para este processo de investigação realizamos com os professores entrevistas previamente estruturadas, no entanto para que essa prática não se limite a simples obtenção e arquivamento de informações, visamos realizar uma análise contextualizada dos dados obtidos, com o apoio de referenciais teóricos que têm como suporte a história oral.

4.1 História Oral Temática

Ao falarmos de história oral é comum pensarmos imediatamente em relações com as histórias de vida dos entrevistados e de fato esse processo confere atenção especial à narrativa dos colaboradores. Apesar disso, é preciso considerar a existência de diferentes gêneros em história oral, o que implica na adoção de procedimentos específicos. Os gêneros em história oral, de acordo com MEIHY & RIBEIRO (2011) são: história oral de vida, temática, testemunhal e tradição oral. Considerando que neste trabalho partimos de um assunto específico e preestabelecido, temos que a metodologia se enquadra na história oral temática, pois ela "[...] se compromete com o esclarecimento ou opinião do entrevistado sobre algum evento definido." (MEIHY, 1998, p. 51), neste caso a introdução de tópicos de cálculo no ensino médio.

A história oral temática, por sua maior proximidade com soluções encontradas em outras áreas do conhecimento, exige maior clareza em seus procedimentos específicos. Além disso, é este o gênero que mais atende às demandas de grande número de projetos, desde aqueles desenvolvidos academicamente até os que têm ganhado espaço em instituições e comunidades. Para a preparação e condução de suas entrevistas faz uso de recursos como roteiros e questionários, que delimitam os temas a serem abordados durante a entrevista e têm maior interferência do entrevistador. Esse direciona os temas de interesse, não significando a existência de interrupções bruscas na fala do entrevistado, nem tampouco falta de respeito por sua subjetividade. (MEIHY, 1998).

Decidimos utilizar a história oral uma vez que, por meio dela, podemos tomar consciência das diversas relações e vivências que nossos entrevistados tiveram com o tema, durante o desenvolvimento de suas carreiras profissionais, sob uma perspectiva particular, o que acreditamos ser um elemento essencial para conseguirmos compreender a situação e o contexto prático em que nosso problema está inserido, nos levando, posteriormente, à realização de uma análise mais significativa. (GARNICA, 2005).

> [...] se ganha muito ao misturar métodos de pesquisa social, em lugar de ficar preso a um único método [...] não acho uma boa ideia simplesmente praticar história oral como forma de pesquisa qualitativa, pesquisa em profundidade, sem qualquer conexão com o trabalho quantitativo. Se quisermos utiliza-la com eficácia, nas ciências históricas e sociais, precisamos nos valer dos dois recursos, porque eles têm necessidade um do outro. (THOMPSON, 2006, pg. 22).

Mesmo que o material obtido com a realização das entrevistas seja rico em significados, não devemos desprestigiar o valor dos dados “oficiais” e estatísticos apresentados anteriormente, uma vez que esses constituem uma ferramenta rápida e acessível para conhecermos (ainda que de maneira superficial) a realidade em momentos e locais diferentes dos que estamos situados. Essa dinâmica constitui outra forma de revisar o passado, buscando compreender o presente e propiciar mudanças para o futuro e fazendo empréstimos de recursos de outras áreas.

Uma vez obtidos os dados, provenientes tanto das conversas com os colaboradores quanto das pesquisas quantitativas realizadas, elaboraremos unidades de análise para cada tópico interessante que encontrarmos no decorrer de nossa pesquisa. Realizaremos a análise buscando interpretar todas as situações presentes na prática da entrevista (não apenas no discurso), procurando os múltiplos significados presentes nas falas e gestos e contextualizando as situações com o meio ao qual estamos submetidos, destacando que esse influencia diretamente na prática, uma vez que o discurso utilizado no processo não pode ser considerado como imparcial e atemporal, mas sempre está vinculado a certa subjetividade e inserido em um determinado regime de verdades.

> Trata-se de investigar o dito e o não-dito – e, muitas vezes, tangenciar o indizível – e seus motivos; trata-se de investigar os regimes de verdade que cada uma dessas versões cria e faz valer, com o que se torna possível transcodificar – e, portanto, redimensionar – registro e práticas. (GARNICA, 2005, p. 155).

Por meio destes procedimentos podemos realizar uma investigação satisfatória, utilizando tanto elementos de pesquisas em ciência sociais quanto dados quantitativos, de maneira a obtermos informações suficientes para traçarmos conclusões significantes para nossa pesquisa.

4.2 Estrutura de Uma Entrevista

A realização de entrevistas visando à obtenção de dados e informações particulares, advindas dos conhecimentos e experiências de um entrevistado, é uma ferramenta amplamente utilizada para pesquisa em diversas áreas das ciências humanas, em particular na educação. Visando utilizar esse método, passamos a nos questionar sobre o real significado de uma entrevista e todas as peculiaridades envolvidas na realização dessa prática.

Muitas vezes a entrevista é tomada como uma técnica simples de ser aplicada, na qual basta elaborar perguntas sobre um determinado tema e aplicar a alguém qualificado para respondê-las e, depois, realizar a análise das respostas de acordo com o que se tem interesse em investigar. No entanto, visando obter um melhor aproveitamento desta valiosa ferramenta de pesquisa, passamos a estudar como seria a maneira mais indicada de estruturar uma entrevista, de modo a obtermos não apenas uma grande quantidade de dados, mas também informações valiosas e significativas para o desenvolvimento de nosso trabalho. Desta forma, apresentaremos as justificativas e os embasamentos teóricos que nos auxiliaram nessa elaboração.

Entre os principais tópicos presentes no processo de entrevista que foram estudados para elaboração dessa metodologia estão, tendo por referência Silveira (2002), a concepção de linguagem e perspectiva, a estrutura e os objetivos da prática e as relações existente entre a díade entrevistador e entrevistado.

A linguagem é, sem dúvida alguma, um ente de extrema importância para a estruturação de uma entrevista, visto que é por meio dela que são elaboradas as perguntas e respostas que constituem o processo de coleta de dados e também por meio dela que estas ganham sentido para serem analisadas. Castilho (1998) postula haver três grandes modelos teóricos de interpretação da língua humana: a língua como atividade mental (linguagem como expressão de pensamento), a língua como estrutura (linguagem como instrumento de comunicação), a língua como atividade social (linguagem como meio/forma de interação). Para nossa análise nos deteremos apenas nos dois últimos modelos.

Na linguagem como instrumento de comunicação, a língua é vista atemporalmente, como um código, capaz de transmitir uma mensagem de um emissor a um receptor, isolada de uma utilização, completamente desvinculada de qualquer subjetividade com relação a seus significados e desprovida de múltiplas interpretações. (CASTILHO, 1998).

Observamos que uma prática de pesquisa que utiliza o processo de entrevista baseada na concepção de linguagem exposta acima visa à obtenção de uma grande quantidade de informações de maneira a tornar o trabalho mais detalhado e preciso, descartando a interpretação e subjetividade presente nelas e toda a riqueza que pode ser extraída ao considerarmos o jogo de significados intrínsecos, presentes no contexto em que a conversa se desenvolve. Entendemos que essa atitude faz com que a obtenção de dados se reduza a um mero levantamento "estatístico", que busca a aproximação da autenticidade de verdades que devem estar presentes nos mais diversos contextos (independente de suas peculiaridades) e com isso perdemos a riqueza que a diversidade de concepções pode fornecer, sendo assim defendemos que essa não é a postura mais indicada para proceder.

Conceber a linguagem como forma de interação significa entendê-la como um trabalho coletivo onde os significados são construídos baseados na contextualização do ser com o meio em que ele está inserido, portanto em sua natureza sócio-histórica e, então, "[...] como uma ação orientada para uma finalidade específica [...] que se realiza nas práticas sociais existentes, nos diferentes grupos sociais, nos distintos momentos da história." (BRASIL, 1998, p. 20).

A linguagem, nesse contexto, é o local das relações sociais em que falantes atuam como sujeitos que possuem discursos carregados de subjetividade. O diálogo (e a maneira como ele é compreendido), assim, de forma ampla, é tomado como caracterizador da linguagem.

O processo de entrevista é repleto de significados ocultos, devido às múltiplas concepções representacionais da linguagem existentes. Segundo Silveira (2002, p. 120), a linguagem "[...] não é mais vista como "espelho" variavelmente translúcido de uma verdade anterior, mas como constituidora de verdades, como atravessada por vozes anteriores [...]", sendo assim não podemos tomar como simples o fato de realizar perguntas e interpretar respostas compostas por verdades ditas discursivas e recheadas de significados polivalentes.

> [...] eventos discursivos complexos, forjados não só pela dupla entrevistador/entrevistado, mas também pelas imagens, representações, expectativas, que circular – de parte a parte – no momento e situação de realização das mesmas e, posteriormente, de sua escuta e análise. (SILVEIRA 2002, pg. 120).

Observando a definição de entrevista apresentada acima podemos ver que ela transcende a mera obtenção de informações através do discurso e adentra a um campo subjetivo e contextualizado com diversos saberes e diversas esferas sociais, permitindo a realização de múltiplas interpretações pela díade entrevistador/ entrevistado. Sendo assim, proceder dessa maneira torna a prática de entrevista muito mais rica e recomendada para utilização em nossa metodologia de pesquisa.

Acreditamos que a validade da entrevista como instrumento de pesquisa pode ser garantida se ela for tratada numa perspectiva "interacionista", em que se reconheça todo o processo de diálogo entre dois sujeitos com papéis distintos e não numa perspectiva "fatista", em que a preocupação se restringe à veracidade dos dados coletados. O importante é o reconhecimento da díade entrevistador/

entrevistado como sujeitos culturalmente constituídos, circunstancialmente situados e, devido a isso, todos os eventos presentes na entrevista podem ser vistos como objetos a passarem por um processo de análise. (SILVEIRA, 2002).

Encarando a entrevista como sendo uma comunicação verbal que possui uma interação com objetivos específicos e que visa à compreensão de como certos sujeitos percebem determinado tema, temos que um ponto fundamental a ser considerado em sua estruturação é a determinação dos papéis a serem desempenhados pelos participantes.

Reconhecemos o par entrevistador/entrevistado como seres diferenciados e com funções diferentes, de um lado o entrevistador, com o direito de fazer perguntas, visando obter o melhor material de análise possível para a produção de seu trabalho e de outro, o entrevistado, com direito a responder as perguntas da maneira que acreditar ser mais correta, podendo auferir às respostas seu ponto de vista e toda sua subjetividade. Devido à existência dessa diferença defendemos que quanto mais próxima for a relação entre o par, mais fácil será para um compreender a perspectiva do outro, ou seja, o entrevistado conseguirá ter uma consciência maior dos objetivos por trás das perguntas realizadas, enquanto o entrevistador poderá realizar um interpretação mais significativa e valorosa das respostas obtidas.

Fazendo uso dessa concepção, Fontana e Frey (2000) consideram que a entrevista leva à produção de um “texto negociado”, que é o resultado de um processo interativo e cooperativo que envolve ambos os membros da díade na produção de conhecimento. Nota-se que a expressão “texto negociado” mostra que o resultado da pesquisa (que se apoia nas entrevistas) é decorrente das trocas verbais e não verbais realizadas e das relações estabelecidas entre ambos os entes durante a conversa que pode tomar um rumo diferente do planejado inicialmente, visando à obtenção de informações mais significativas e fazendo com que o entrevistador se alie à elaboração das ideias apresentadas e facilite o transcorrer da prática.

Baseando-se nos argumentos apresentados acima concluímos que entrevistador e entrevistado devem se relacionar respeitando o contexto social em que estão inseridos e as funções que possuem devido aos papéis que assumem durante a entrevista. Somente por meio desse respeito poderão desenvolver a capacidade de compreender o ponto de vista do outro e de colaborar de maneira mais efetiva durante as conversas, visando, por ambos os caminhos, à produção de um valoroso “texto negociado”. No entanto devemos estar cientes de que o diálogo pode não transcorrer da melhor maneira possível e estamos sujeitos a encarar a falta de interesse por parte do entrevistado, levando à fuga do tema e ao silêncio com relação aos questionamentos apresentados. Para lidar com isto é necessário que se desenvolvam técnicas que contornem esses problemas, para que a entrevista esteja preparada para qualquer situação ou resposta que possa aparecer.

Uma vez estabelecido como lidar com algumas das principais questões subjetivas que surgem ao realizarmos uma entrevista passamos a discutir como será sua estrutura e a delinear seus objetivos. Em nosso trabalho tivemos preferência pela modalidade de entrevista face a face, onde entrevistador e entrevistado se encontram um diante do outro, ficando sujeitos às influências verbais (com relação ao que é perguntado e ao que é respondido), às não-verbais (como as pausas, silêncios, movimentos corporais e tom de voz), e às decorrentes da visualização das reações faciais do interlocutor. Acreditamos que essas características fornecem uma relação mais próxima entre os entes da conversa, fornecendo um material mais significativo para análise.

Estruturamos nosso roteiro de entrevistas privilegiando a utilização de questões abertas, de maneira a deixar nosso enfoque mais vago (deixando mais ampla as possibilidades de exploração do tema), para ser definido durante a própria prática, ou seja, à medida que o entrevistado vai se posicionando, trazendo suas opiniões e significados, novos aspectos interessantes sobre o tema vão se revelando, fazendo com que o entrevistador redefina o roteiro para integrá-los, de modo a obter mais informações e ampliar sua compreensão. Dessa forma, visamos ampliar o papel do entrevistado, fazendo com que ele adote uma postura propícia ao processo de interação e se expresse com maior liberdade.

Gaskell (2002) relata que é uma prática comum a elaboração de um roteiro apresentado sob a forma de tópicos (tópico-guia) que oriente a condução da entrevista, mas que de modo algum impeça o aprofundamento de aspectos que possam ser relevantes ao entendimento do objeto ou do tema em estudo. Para a elaboração dos tópicos, é importante que o pesquisador avalie seus interesses de investigação e proceda a uma crítica da literatura sobre o tema. Além de ser um instrumento orientador para a entrevista, o tópico guia pode ser útil para a elaboração e antecipação de categorias de análise dos resultados.

Nossa entrevista tem como finalidade atender aos objetivos da pesquisa e, para isso, desejamos compreender os significados e as vivências dos entrevistados no que tange a determinadas situações e eventos, para depois fazermos uso dessas informações como orientação no desenvolvimento de propostas relacionadas ao tema, bem como para servir de referência à formulação de hipóteses e de teorias que poderão vir a ser testadas no futuro.

4.3 Roteiro da Entrevista

Durante a prática da entrevista podemos enfrentar as mais diversas situações, desde o interesse excessivo por parte do entrevistado a um determinado tópico que prende toda sua atenção, fazendo com que as informações sobre ele sejam extremamente valorosas, mas deixando de lado os outros pontos que deviam ser abordados, até o desinteresse completo do entrevistado pelo que está sendo apresentado, fazendo com que ele se desiluda com a experiência, levando à fuga do tema e à falta de contribuições significativas.

Para nos prepararmos de maneira adequada devemos estruturar bem nossa prática por meio da elaboração de um roteiro de entrevista que atuará como um norteador de toda a atividade, auxiliando no controle dos diálogos durante o decorrer do processo e visando a obtenção de informações úteis para conclusão dos objetivos propostos.

Acreditamos que para realizarmos uma boa entrevista ela deve ocorrer em um local isolado, com pouco ou nenhum fluxo de pessoas, silencioso e longe de possíveis interrupções. Iniciamos a prática com as devidas apresentações pessoais e explicações sobre o tema a ser abordado e então passamos às perguntas.

Resolvemos começar as entrevistas interrogando sobre a situação atual do ensino de cálculo para depois apresentarmos as circunstâncias que nos motivaram a iniciar esta pesquisa, ou seja, um panorama referente aos altos índices de reprovação existentes nas disciplinas de cálculo diferencial e integral nas universidades de todo mundo. Para contextualizar essa situação exploramos algumas pesquisas de estudiosos da área, bem como suas sugestões sobre as causas e possíveis soluções dessas dificuldades existentes, juntamente com os respaldos para suas aplicações (provenientes de outros estudiosos) e as medidas que já estão sendo tomadas. Acreditávamos que o fornecimento de tais afirmações auxiliaria o entrevistado a ter uma noção mais precisa acerca do tema em estudo, possibilitando uma interação mais produtiva. Além disso, pretendíamos questionar o entrevistado com relação às sugestões apresentadas pelos pesquisadores, ou seja, se teriam chance de dar certo e se eram viáveis no contexto educacional atual.

Pergunta: Gostaríamos de saber sua opinião sobre o atual panorama de ensino nas disciplinas de cálculo nas universidades.

Pergunta: Pesquisas como as de Artur Oscar Costa Lopes (1999), Raimundo Morais Santos e Hermínio Borges Neto (1995) e Maria Helena Cury (2002) mostram que as disciplinas de cálculo das universidades brasileiras apresentam altos índices de reprovação. Gostaríamos de saber sua opinião sobre as possíveis causas desse fenômeno?

Pergunta: As mesmas pesquisas apontam como umas das possíveis causas para isso uma deficiência na transição do ensino médio para o superior. Visando sanar esse problema as universidades criaram cursos para preparar o aluno para a disciplina, como o Pré-cálculo e o Cálculo Zero, que realizam o reforço de alguns conteúdos do ensino médio. Qual a sua opinião sobre a existência dessa deficiência? Você acredita que estas medidas tomadas pelas universidades são suficientes para sanar o problema dos altos índices de reprovação?

Pergunta: Junto a isto, trabalhos de professores como Geraldo Ávila e Roberto Costallat Duclos defendem a possibilidade do ensino de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio. Gostaríamos de perguntar se você acredita que a inserção de tópicos iniciais de cálculo no currículo do ensino médio poderia auxiliar na resolução do problema do ensino de cálculo no ensino superior? Acredita que os alunos do ensino médio conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo?

Para a continuação destacamos a importância do uso de história na educação matemática e sua funcionalidade para recriar contextos e ambientes passados, surgiram questões e reflexões que propiciaram o surgimento de certas ideias e concepções. Então, questionamos o entrevistado acerca de suas experiências com a utilização desse meio para ensino e se ele acredita que é possível fazer uso dessa relação entre história e matemática de modo a retomar esses contextos com os alunos, visando desenvolver outra forma de se pensar certas questões e assuntos e analisar como reagiriam a uma proposta desse tipo, que foge ao escopo clássico das aulas pautadas em definições, teoremas e exercícios.

Pergunta: Sabemos que a utilização da história apropriada pode ser uma ferramenta valiosa no ensino da matemática e que por meio dela podemos contextualizar a época e o ambiente em que muitas das grandes ideias e concepções da matemática surgiram, bem como as teorias, pensamentos e a maneira de pensar de seus descobridores. Gostaríamos de saber se você já desenvolveu alguma atividade em sala de aula mesclando história e matemática? Como foi essa experiência? Os resultados obtidos foram satisfatórios?

Pergunta: Gostaríamos de saber se você acredita que podemos unir história e matemática de modo a ensinarmos aos alunos maneiras diferentes de analisar certos conceitos e teorias, bem como o contexto no qual eles surgiram? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem?

Introduzimos na próxima pergunta nossa intenção de desenvolver um resgate histórico do infinito como uma maneira de introduzir cálculo no ensino médio. Relembrando que as reflexões, pensamentos e processos que levaram a concepções de infinito têm um papel fundamental nos conceitos de cálculo existentes hoje em dia.

Pergunta: Levando em consideração tudo o que foi pensado sobre o infinito antes do surgimento do cálculo, gostaríamos de saber se você acredita que a estruturação do conceito de infinito influenciou o desenvolvimento do cálculo? Você acha que as concepções relacionadas ao infinito são proveitosas para começar a pensar o cálculo?

Pergunta: A história nos mostra que os pensamentos e ideias que levaram à estruturação do conceito de infinito influenciaram muito no desenvolvimento do cálculo. Gostaríamos de saber se você acredita que uma atividade de reconstrução histórica do infinito em sala de aula pode fornecer uma maneira alternativa de se estruturar as conexões lógicas e raciocínios necessários para se começar a pensar cálculo? Como acha que os alunos reagiriam a essa forma de abordagem?

Retomando os argumentos apresentados sobre os altos índices de reprovação em cálculo nas universidades brasileiras, a inserção de tópicos iniciais de cálculo no currículo do ensino médio, a utilização da história da matemática e a influência que o infinito exerce sobre o desenvolvimento do cálculo, em conjunto, para o ensino de maneiras alternativas de desenvolver o pensamento, questionamos o entrevistado sobre a utilização dessa abordagem histórica para a introdução ao pensamento do cálculo como um conteúdo a ser desenvolvido na disciplina de matemática durante o cursar do ensino médio e se isso poderá ajuda na solução dos problemas enfrentados nas universidades.

Pergunta: Relembrando as observações feitas anteriormente, referentes aos altos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades brasileiras, a viabilidade da inclusão de tópicos iniciais de cálculo nos programas do ensino médio, a utilização da história no ensino de maneiras alternativas de conceber certas ideias e a influência que o infinito exerce sobre o desenvolvimento do cálculo, gostaríamos de saber se você acredita ser viável utilizarmos uma abordagem histórica, com foco na história do infinito, para o desenvolvimento de uma atividade de introdução ao pensamento do cálculo? Qual sua opinião sobre a possibilidade disso ser colocado em prática no ensino médio? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem? Acredita que isso poderá auxiliar na diminuição dos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades?

Após a realização destas perguntas solicitamos ao entrevistado que acrescentasse mais alguma coisa para complementar suas opiniões sobre o tema em questão. Após a resposta consideramos encerrada a entrevista.

Por meio destas perguntas obtemos uma visão particular da realidade do problema a ser investigado, advinda de um autor (o professor) que está diretamente vinculado ao tema de pesquisa. As informações obtidas, que pertencem a essa realidade, passaram posteriormente por um processo de análise que conduziu à conclusão deste trabalho de pesquisa.

4.4 Textualização da Entrevista Com a Professora Maria Dalpozzo

Eu, Maria Dalpozzo, graduada em Licenciatura em Matemática pela Faculdade Porto Alegrense (FAPA) e mestre em Educação matemática pela Universidade do Vale dos Sinos (Unisinos) atuo a 22 anos como docente. Atualmente educo na instituição Colégio estadual Inácio Montanha. Tendo em vista que concluí o curso de matemática há 25 anos e desde então não tive mais contato com a disciplina, prefiro não opinar acerca do ensino da mesma nas universidades. Vejo muitos colegas falando que os alunos vão muito mal e que não conseguem aprender, por isso sei que deve continuar sendo muito difícil e que muitos alunos devem rodar.

Com relação aos altos índices de reprovação nas disciplinas de cálculo observo que o conteúdo programático do ensino médio teria, a priori, que preparar o jovem para continuar os estudos de matemática no ensino superior, porém a realidade é outra. Os jovens estudam o suficiente para serem aprovados, pois o diploma é fundamental para concorrerem a vagas de trabalho. Assim, a falta de interesse em aprender resulta na baixa quantidade de conteúdo adquirido ao fim das séries escolares e, por isso, acabam tendo dificuldades na universidade e nos empregos.

Sobre a deficiência na transição do ensino médio para o superior e as soluções encontradas para sanar esses problemas, ressalto que o estudo da matemática é conhecido como um tabu para a maioria da população, desde o momento em que se depara com as quatro operações até o cálculo de derivadas e integrais na universidade. Não é só na passagem do ensino médio para a universidade que ocorrem problemas, mas na transição de todas as fases de estudo, desde o ensino fundamental até o superior. Apesar de aplicar-se a mesma didática, ressalto que poucos têm facilidade em aprender matemática. Os alunos deveriam ser separados em dois grupos: os que têm facilidade para o raciocínio lógico, com os quais se deveria trabalhar o conteúdo, a fim de prepará-los para o estudo superior nas áreas exatas; e aqueles com mais dificuldade de raciocínio lógico, que poderiam trabalhar menos conteúdos para que pudessem ter mais tempo para o estudo. Acredito ser válido o reforço acadêmico que a universidade propõe, pois permite sanar lacunas do ensino fundamental e médio, porém, só será realmente aproveitado por alunos que tenham facilidade com a matemática e demonstrem mais interesse. Sendo assim, a inserção de tópicos iniciais de cálculo nos currículos escolares poderia auxiliar os estudantes, desde que esses estudantes tenham facilidade com a matemática.

Há quinze anos desenvolvo atividades utilizando história aliada à matemática e sempre obtive sucesso nesse tipo de experiência. Percebi que os alunos ficam muito surpresos ao ver que podem relacionar as duas disciplinas e, principalmente, que a matemática pode ir além dos números. A união entre história e matemática propicia ao aluno conhecer a origem do conteúdo trabalhado e desenvolver maneiras apropriadas de pensar certas ideias, mas destaco, mais uma vez, que essa atividade só pode funcionar com alunos que possuem mais facilidade para aprender e aptidão com raciocínio lógico.

Com relação ao desenvolvimento do cálculo e o conceito de infinito, este é tão importante quanto à geometria ou outras áreas da matemática, porque temos que pensar que nenhum conteúdo pode ser visto isoladamente, só como cálculo, por exemplo.

Como muitos pensamentos e ideias que levaram à estruturação do conceito de infinito influenciaram o desenvolvimento do cálculo, atividades que trabalhem com reconstrução histórica do infinito só seriam úteis com os alunos que tenham raciocínio lógico, também aqueles com facilidade de aprender e interesse nas disciplinas. Atividades assim auxiliariam na compreensão dos conceitos de cálculo. Porém, os alunos que não possuem essa facilidade não estarão motivados com esse tipo de atividade, pois não enxergam aplicabilidade na vida cotidiana.

Retomando os assuntos já tratados, como os altos índices de reprovação nas disciplinas de cálculo, entre outros, é necessário aumentar a carga horário da disciplina de matemática na escola, tanto no ensino fundamental quanto no médio. Depois de realizado isso, poderíamos pensar na inclusão de tópicos inicias de cálculo, assim como uma abordagem histórica que foque na história do infinito para o desenvolvimento de uma introdução ao pensamento do cálculo. Porém, volto a frisar, essas atividades seriam ideais para alunos com facilidade na matemática. Para concluir, andam diminuindo a carga horária de matemática no ensino médio, o que resulta em menos projetos e atividades. Assim, é necessário que as universidades se preparem para receber alunos com conteúdo abaixo do esperado.

4.5 Textualização da Entrevista com o Professor Antônio Esperança

Eu, professor Antônio César dos Santos Esperança, graduado pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e mestre pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), atuo como professor há 12 anos. Atualmente sou discente no Colégio Estadual Julio de Castilhos e Escola de E. M. Maria Imaculada. Acerca do atual panorama de ensino nas disciplinas de cálculo, nas universidades, afirmo que esta é uma disciplina muito difícil, pois está colocada nas primeiras séries, sendo dura, até mesmo para os alunos que gostam de matemática, devido ao fato de não saírem do ensino médio com o devido preparo. Porém, não vejo que seja um problema da disciplina e sim do enfoque que é dado para a matemática no ensino médio, pois a responsabilidade matemática exigida dos alunos no primeiro ano do ensino superior, desses cursos que têm cálculo, não é a mesma exigida no ensino médio, fazendo com que os alunos que recém entraram na faculdade sejam pegos de surpresa.

De fato, há uma transição muito abrupta entre o ensino médio e a universidade, a qual exige muita responsabilidade de um aluno que recém saiu do ensino médio, sendo raros os colégios que estão em níveis equiparáveis de exigência de aprendizado, rotina de estudos e aprofundamento de conceitos como os requisitados pelas universidades. Devo lembrar que hoje em dia, principalmente nas escolas públicas, a matemática está mais voltada à sua aplicação no dia-a-dia, do que em sua estruturação fundamental. A matemática no ensino médio não está formalmente definida sobre as bases sólidas de demonstrações e conceitos, mas estes pré-requisitos são exigidos nas disciplinas de cálculo. Sendo estes os fatores que ocasionam os altos índices de reprovação.

Mesmo que as universidades invistam em programas que preparem o aluno para a disciplina, eu acredito que esta é uma medida emergencial, pois eles deveriam estar vendo isso no ensino médio; quando deveria ser desenvolvido o compromisso com o estudo, valorização da linguagem matemática como um todo, aprofundamento em tópicos fundamentais como o conceito de funções, resolução de equações, propriedades básicas de fatoração, pontos críticos de uma função, entre outros conceitos vistos no ensino médio, às vezes até no fundamental, mas que os alunos não têm na ponta da língua. É isto que os prejudica, não são os conceitos do cálculo propriamente dito, o que assusta o aluno é a quantidade de informação já vista, cobrada pelos professores universitários, dos quais sempre se ouve: “Isso vocês já viram”.

Sendo assim, acredito que a introdução da história da matemática, em qualquer tópico, até mesmo no cálculo, é interessante, pois torna o ensino mais agradável, para o professor e para o aluno. Eu, particularmente gosto de trazer para os alunos fatos impressionantes e curiosidades matemáticas, durante as aulas para torná-las mais interessantes, mais expositivas, não me mantendo na mesmice de exemplos e exercícios.

Sempre que se contextualiza o tópico a ser tratado; sempre que damos uma breve introdução à técnica que será posteriormente trabalhada os alunos se agradam, é claro que a maneira que introduziremos a história por detrás do conteúdo deve ser clara e acessível, não podemos esperar dos alunos grandes pensamentos e ideias; como foi esperado de mim durante o curso de História da Matemática. Mesmo que este tenha ocorrido no meu curso superior, foi esperado que eu e meus colegas conseguíssemos destrinchar o livro do Boyer em um semestre; sendo aquele um livro duro, que até hoje não o conheço todo. Esperar o pensamento de certos conceitos por alunos de ensino médio não há como, mas motivá-los a partir da história acho muito válido.

Quando falamos da história da matemática, sabemos que existem vários campos a serem abordados, mas eu acho que a história do infinito é uma parte muito rica, o pensar de algo que não se pode tocar, buscar saber se as regras aplicadas a questões finitas podem ser estendidas aos conceitos infinitos, é muito legal; principalmente se formos trabalhar com o período de Leibniz e Newton, e a formulação do cálculo. Mas devo ressaltar que no ensino médio temos que ir muito devagar, pois eles têm a ideia, caso falarmos sobre infinito, sequências, como, por exemplo, soma dos termos de uma progressão com infinitos termos, dizendo que a soma está convergindo para um valor e que esta não vai passar do mesmo, mas estará a cada termo mais próxima, é válido, de fato os alunos assimilam muito bem este tipo de abordagem.

Posso citar aqui outra prática comum em sala de aula; trata-se de questionar meus alunos da seguinte maneira: "Quantos passos são necessários para eu chegar até a parede, se eu sempre vou caminhar metade da distância entre a parede e eu?" e, assim, revelar que nunca chegarei à parede os deixa chocados, esse conceito de infinito é legal, eles entendem, mas se forçar muito, colocar uma teoria mais pesada, não é conveniente, pois na minha opinião existem certos tópicos da matemática que exigem uma maturidade que o aluno do ensino médio ainda não tem.

Apesar de concordar que sejam utilizados, em aula, trechos da história da matemática para introduzir e motivar os alunos aos conceitos exigidos no ensino médio eu não acho possível uma atividade que envolva uma construção que foi feita naquele período, pois os problemas que eles tinham naquela época não são problemas mais hoje, as visualizações que eles tinham, só na mente, naquela época, hoje em dia foram substituídas por ferramentas gráficas, assim acredito que seria muito complicado fazer com que o aluno pense como alguém que pensou lá naquela época. Acho válido usar como pensamento de ensino "vamos tentar entender como eles pensavam", ao invés de "eu quero que vocês pensem como eles".

Concluindo minha visão sobre a relação da história da matemática, mais precisamente a história do infinito e sua aplicabilidade no ensino-aprendizagem dos alunos de ensino médio, volto a reforçar que acho viável e de grande ajuda a introdução de conceitos como distâncias inatingíveis. Sou a favor de tudo que aproxime o cálculo deles, não o tornando uma surpresa no ingresso da faculdade; tudo que os motive: desde levar curiosidades e fatos históricos à sala de aula, como atividades mais abstratas e lúdicas, como pensar em uma flecha que se aproxima de seu alvo, mas nunca o encontra.

4.6 Textualização da Entrevista com a Professora Elisabete Búrigo

Eu, Elisabete Zardo Búrigo, graduada em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), mestre em Educação pela mesma universidade e doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP), atuo como professora há 31 anos. Atualmente leciono na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sobre o atual panorama de ensino nas disciplinas de cálculo nas universidades, faço uma observação: esse problema da transição do ensino médio para o ensino de cálculo da universidade não é um problema brasileiro, mas sim mundial, nos EUA, na China, em vários países Europeus, na Coréia. Em todas as universidades existe esse problema de repetência no cálculo.

Os altos índices de reprovação podem ter várias explicações. Uma delas está relacionada com a mudança muito grande no contrato didático que acontece no Ensino Médio para o Ensino Superior. Por exemplo, o aluno aprende na escola básica a simplificar, chegar sempre na resposta mais simples, então ele vai simplificando e cortando. No cálculo, ele aprende a usar técnicas algébricas em que, ao invés de simplificar, vai acrescentar elementos. Então, por exemplo, vai pegar o 1 e vai transformar esse número em $sen^2 x + cos^2 x$. O jeito de pensar sobre a escrita matemática também muda. Uma das coisas que explica a dificuldade dos alunos é que muito do que se faz de matemática na escola básica é voltado para a repetição de exercícios. No cálculo, muitas vezes os problemas são da mesma natureza, mas a aparência deles não é a mesma, então os alunos têm dificuldade de identificar.

Outro fator comum no Ensino Médio: os alunos aprendem que tipo de problema é pelo enunciado da questão. Fala-se em triângulo retângulo, eles vão lá e aplicam Pitágoras. E, de fato, no cálculo, você faz uma pergunta sobre valor máximo, os alunos já sabem que têm que derivar e achar derivada zero, mas que, além disso, têm que resolver outras coisas. Em geral, os problemas de cálculos exigem uma estratégia e várias escolhas e algumas antecipações. Essa ideia da antecipação é uma experiência que os alunos não tiveram no ensino médio.

Acredito que as medidas tomadas pelas universidades são suficientes para sanar o problema dos altos índices de reprovação, pois ajudam porque simplesmente sensibilizam os alunos de que eles têm que mudar de atitude. No Ensino Médio, na maioria das vezes, as definições não eram importantes, já aqui o aluno tem que aprender a estudar pelo livro. Caso um aluno não entenda algo que o professor disse na aula, terá que correr atrás, pois esse conteúdo pode ser um pré-requisito para outra ideia mais complicada. Logo, considero o pré-calculo uma sensibilização para uma mudança de atitude do aluno.

Quanto à questão de inserção de tópicos iniciais de cálculo no currículo do Ensino Médio acredito que isso pode ser favorável, mas depende de como. Por exemplo, o cálculo já foi ensinado em dois momentos na história do Brasil. Naquela época, muitos não aprendiam, mas considerava-se isso “normal”. Nos dias de hoje isso não é considerado razoável, logo o desafio é ir incluindo o cálculo no Ensino Médio com compreensão. Fernando Rodrigues propôs algo interessante em seu TCC. Escolheu justamente construir uma proposta inicial de abordagem do cálculo sem todas as dificuldades de linguagem envolvidas na notação de limites e outras. Assim, é possível pensar em uma abordagem de cálculo no Ensino Médio que não seja exatamente sem produzir isso que se fala na universidade.

As ideias do calculo são ideias muito intuitivas, são ideias geométricas. Ideia da tangente, ideia da área, que são ideias fundamentais. Um problema central do aprendizado de cálculo é a ideia de variável e função. Pois lá no ensino médio os alunos aprendem função por fórmulas e substituindo valores, então não fica claro que aquele x implica numa mudança daquele f(x) e isso faz falta no cálculo. Seria necessário desde o ensino médio desenvolver o pensamento variacional. E os gráficos também não ajudam, pois eles têm que pensar muito o movimento que envolve ali.

Referente a mesclar o ensino de história e matemática, já utilizei este método de várias maneiras. Acredito que é interesse dos professores se apropriarem da história. Pode até não ser tão relevante para os alunos, mas sim para os professores, para darem conta que aqueles conceitos que estão sendo trabalhados não são naturais. Na disciplina de Fundamentos I, temos que fazer de conta que não conhecemos os números reais. Como se estivesse fazendo um percurso histórico, você fica parado nos gregos 200 a.C. e tem que imaginar que só aceita os números racionais e imaginar o que você pode fazer com eles. Você pode fazer uma porção de coisas, porém, algumas você não consegue e isso se torna um problema. Os gregos resolvem esses problemas enfrentando geometricamente.

Nessa mesma disciplina, estávamos construindo os números reias e passamos para a construção das operações definidas neles, em particular da divisão, temos interesse em construir o inverso de um número real. Eu consigo definir os números reais absolutos, estendo para os relativos, e assim tenho o conjunto dos números reias, eu associo cada número real a uma medida e desse modo posso concluir que todo número real absoluto é a medida de um segmento. Mas ainda não consigo operar com ele de maneira a definir qual medida de um segmento representa seu inverso, então vou me perguntar o seguinte “será que todo numero real tem um inverso?”.

O que me deixou muito feliz da ultima vez que eu dei fundamentos foi que eu não apresentei a construção do inverso de um número real, já tínhamos usado uma construção parecida em outra situação e quando a gente começou a fazer essa discussão à construção do inverso veio de um aluno. E, ao usar essa construção, ele mostrou que poderia concluir muitas coisas sobre os números reais a partir da ideia que eles podem sempre expressar uma medida de segmento. Pois sempre posso apelar para o raciocínio geométrico e posso tirar conclusões a partir do raciocínio geométrico. Porém hoje, esse raciocínio não é o mais valorizado, porque hoje em dias temos várias ferramentas tecnológicas que sugerem que é mais fácil que trabalhemos com o campo numérico, mas a história nos traz esse tipo de recurso.

Em se tratando da união da história com a matemática há um livro, Developmente of Calculus, em que Newton se dedicou principalmente a todos os problemas que os gregos não sabiam responder. O autor partiu das mesmas curvas, espiral, cicloides, para conseguir chegar ao teorema fundamental do cálculo. Só será possível fazer a reconstrução em sala de aula se o professor tiver uma proposta diferente, caso contrário tomaria muito tempo.

Em relação a pensar o conceito de infinito e o desenvolvimento do cálculo, acredito que é muito difícil elencar como um influenciou o outro, mas atento ao fato de que a ideia chave para se compreender cálculo não está necessariamente na ideia de infinito, pois o infinito está presente em 0, 1, 2, 3 ... e assim segue. Já na disciplina de cálculo se aborda uma concepção diferente, se fala do infinitamente pequeno.

Creio que uma ideia mais importante seja a de convergência. Na época dos séculos XVII e XVIII matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz faziam massivo uso do raciocínio numérico por meio de cálculos que levavam em consideração até 10 casas decimais, para obterem conclusões genéricas relativas à convergência de séries e funções. Defendo que esse tratamento numérico mais sofisticado deveria ser abordado dentro da universidade e do ensino médio.

Para mostrar que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, o livro Cálculo – Volume I de Howard Anton (utilizado na disciplina de cálculo da UFRGS) desenvolve esse raciocínio de maneira intuitiva. Seria proveitoso desenvolver esse assunto, mas o cálculo já tem muito a ser trabalhado e, por isso, conceitos como o de convergência acabam por ser abordados de maneira superficial e rápida, apesar de sua importância para construção do resto do conteúdo.

Quanto à atividade de reconstrução história do infinito e se isso pode fornecer uma maneira alternativa de se estruturar as conexões lógicas e raciocínios necessários para se pensar cálculo estou em dúvida, gostaria de saber como será feita a proposta. Mas só saberemos depois que experimentarmos.

Para concluir, em todos os exemplos acima citados, como uma abordagem histórica ou o desenvolvimento de uma atividade de introdução ao pensamento do cálculo, reforço o fato de que teria que apresentar a proposta e o resultado seria apenas um palpite, pois só se saberá um resultado experimentando.

5 ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

A análise de dados obtidos por meio de uma entrevista é caracterizada por um processo pessoal de interpretação de significados presentes nas respostas dos entrevistados, tendo como foco a fidelidade ao universo da vida cotidiana dos sujeitos e contextualizado com o ambiente em que se situam as falas e com o tema da pesquisa. Segundo André (1983), a entrevista visa apreender o caráter multidimensional dos fenômenos em sua manifestação natural, bem como captar os diferentes significados de uma experiência vivida, auxiliando a compreensão do indivíduo no seu contexto. Assim,

> [..] tratar o material é codificá-lo. A codificação corresponde a uma transformação dos dados em bruto texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo, ou da sua expressão; susceptível de esclarecer o analista acerca das características do texto. (BORDIN, 2009, p. 32).

Em nossa pesquisa realizamos três entrevistas. A primeira com a professora Maria Dalpozzo da Escola Estadual Inácio Montanha, a segunda com o professor Antônio César dos Santos Esperança do Colégio Estadual Júlio de Castilhos e a terceira com a Dra. Professora Elizabete Zardo Búrigo da Universidade Federal do Rio Grande Do Sul (UFRGS).

As entrevistas foram todas realizadas nas instituições onde os entrevistados atuam, em caráter presencial e individual, seguindo o roteiro anteriormente apresentado. Tiveram duração aproximada entre 25 e 30 minutos e foram gravadas para termos mais clareza na posterior transcrição, textualização e análise das mesmas.

Organizamos os dados obtidos com as entrevistas em quatro unidades de análise. São elas: O Panorama do Ensino de Cálculo, Introdução do Cálculo no Ensino Médio, A História no Ensino de Matemática e História do Infinito como Uma Introdução ao Cálculo. A seguir apresentaremos as observações e conclusões realizadas em função das informações levantadas pelas entrevistas, segundo as categorias levantadas.

5.1 O Panorama do Ensino de Cálculo

Nas primeiras perguntas de nossa entrevista visamos identificar como os professores enxergam o atual panorama do ensino de cálculo no Brasil e no mundo, se reconhecem que os altos índices de repetência constituem um problema nas universidades, quais as possíveis causas desse fenômeno, como avaliam as medidas tomadas para aumentar a taxa de aprovados e, por último, se concordam com nossa hipótese de que a inserção de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio poderia ajudar a alavancar a média de aprovados na disciplina.

Todos os entrevistados colocam que as disciplinas de cálculo da universidade são muito difíceis para quem está iniciando o ensino superior e reconhecem a existência de altos índices de reprovação, chegando a destacar que isso não acontece unicamente no Brasil, mas em todo o mundo.

A professora Maria admite não estar muito a par da situação atual, uma vez que já terminou o ensino superior a muito tempo, no entanto afirma que o assunto surge frequentemente em reuniões de professores. Segundo suas próprias palavras,

> [...] concluí o curso de matemática há 25 anos e desde então não tive mais contato com a disciplina, prefiro não opinar acerca do ensino da mesma nas universidades. Vejo muitos colegas falando que os alunos vão muito mal e que não conseguem aprender, por isso sei que deve continuar sendo muito difícil e que muitos alunos devem rodar. (Maria Dalpozzo).

O professor Antônio apresenta que a matéria é colocada logo nas primeiras etapas dos cursos de graduação e chega a frustrar até mesmo os jovens que mais gostam de matemática, devido a sua dificuldade. Destaca também que talvez os alunos não saiam do ensino médio devidamente preparados e que se não se anteciparem realizando um estudo dos conceitos básicos do ensino médio, provavelmente obterão resultados insuficientes para aprovação nas disciplinas.

A professora Elisabete destaca que o problema dos altos índices de repetência e os estudos sobre eles não é um problema exclusivo das universidades brasileiras e que esse tema é debatido em qualquer universidade, de qualquer país, destacando inclusive alguns países da Europa e Ásia, nos quais isso ocorre.

Para justificar os problemas existentes nas disciplinas de cálculo são apontados diversos motivos, dentre os quais se destaca as mudanças muito drásticas que ocorrem na transição do ensino médio para o ensino superior, dificultando a adaptação do aluno e, consequentemente, gerando diversas dificuldades durante o curso.

A professora Maria coloca ainda que as deficiências de transição não se dão apenas do ensino médio para o superior, mas na transição de cada série para a próxima, uma vez que os alunos, em sua grande maioria, se interessam apenas em aprender o mínimo para serem aprovados e obterem o diploma de ensino médio e não se preocupam em compreender o conteúdo por completo, logo permanecem com dificuldades em conteúdos básicos ao adentrarem no ensino superior.

A. Professora Elisabete coloca que um dos motivos para as dificuldades existentes corresponde às grandes mudanças que o contrato didático sofre na transição do ensino médio para o superior e fornece exemplos dessas alterações.

> [...] o aluno aprende na escola básica a simplificar, chegar sempre na resposta mais simples, então ele vai simplificando e cortando. No cálculo, ele aprende a usar técnicas algébricas em que, ao invés de simplificar, vai acrescentar elementos. Então, por exemplo, vai pegar o 1 e vai transformar esse número em $sen^2x + cos^2 x$. O jeito de pensar sobre a escrita matemática também muda. Uma das coisas que explica a dificuldade dos alunos é que muito do que se faz de matemática na escola básica é voltado para a repetição de exercícios. No cálculo, muitas vezes os problemas são da mesma natureza, mas a aparência deles não é a mesma, então os alunos têm dificuldade de identificar. (Elisabete Zardo Búrigo).

Tais argumentos reforçam que realmente existe uma deficiência na transição do ensino médio para o superior que acaba gerando dificuldades no aprendizado de cálculo e, portanto, saná-la é um passo fundamental para elevação dos índices de aprovação nas disciplinas iniciais na universidade.

Baseando-se nas falas anteriores acreditamos que é necessário encontrar um meio de despertar mais intensamente o interesse dos alunos pela matéria, de modo que a entendam por inteiro e a transição entre as séries aconteça de maneira mais satisfatória. Do mesmo modo, o contrato didático presente no ensino médio e no ensino superior devem se aproximar, seja por uma maior exigência do primeiro ou por uma facilitação do segundo, desse modo a transição entre eles será mais contínua e de mais fácil adaptação para quem está ingressando na universidade.

Uma maneira de realizar este processo de aproximação entre os contratos didáticos é por meio da abordagem introdutória de tópicos universitários ainda no ensino médio, tema da próxima unidade de análise.

5.2 Introdução do Cálculo no Ensino Médio

Durante a entrevista realizamos algumas perguntas visando investigar a posição dos professores com relação à introdução do cálculo no ensino médio. De certa forma, buscamos descobrir se acreditavam na aproximação entre os contratos didáticos que operam nos níveis médio e superior de ensino, através da abordagem, no nível médio, de conceitos básicos para a aprendizagem de cálculo diferencial e integral em cursos de nível superior.

Todos os entrevistados colocaram que a inserção de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio pode ajudar na diminuição dos problemas existentes com a disciplina dentro da universidade, no entanto destacam que o problema está em como realizar esse processo de maneira apropriada para obtenção de resultados satisfatórios.

> Poderia sim, desde que os estudantes tenham facilidade em matemática como eu disse na pergunta anterior. [...] Também se observa que poucos têm maior facilidade em aprenderem matemática que outros quando aplicada a mesma didática. Acho que para melhorar o entendimento da matemática deveria se separar os alunos em dois grupos: os que têm facilidade com o raciocínio lógico e trabalhar com eles o conteúdo para prepará-los para o estudo superior nas áreas exatas e, os que têm dificuldade de raciocínio lógico poderiam trabalhar menos conteúdo para que tenham mais tempo para o estudo. (Maria Dalpozzo).

> Depende de como. Por exemplo, o calculo já foi ensinado em dois momentos na história do Brasil. Naquela época, muitos não aprendiam, mas considerava-se isso “normal”. Nos dias de hoje isso não é considerado razoável, logo o desafio é ir incluindo o calculo no ensino médio com compreensão. Tem uma proposta muito interessante no TCC do Fernando Rodrigues Oliveira. Ele justamente construiu uma proposta inicial de abordagem do calculo sem todas as dificuldades de linguagem envolvidas na notação de limites e outras. Então é possível pensar em uma abordagem de calculo no ensino médio que não seja exatamente sem produzir isso que se fala na universidade. (Elizabete Zardo Búrigo).

A professora Elisabete coloca que no passado o cálculo já foi ensinado no ensino médio, mas que devido a sua complexidade era considerado normal não aprendê-lo. No entanto, hoje em dia isto não é mais aceito, resultando no empenho cada vez maior de pesquisadores para encontrar maneiras de ensinar o conteúdo de forma significativa, que possa ser compreendida pelo aluno. Destaca ainda a proposta de um aluno, na qual o cálculo é abordado de maneira simplificada, não fazendo uso de toda sua pesada notação.

Creio que propostas que abandonem o rigor presente nas notações e nomenclaturas existentes podem favorecer o exercício do raciocínio lógico e a compreensão prática dos conceitos existentes por trás dos símbolos. Como modelo para isso apresentamos a atividade abaixo, como proposta para a introdução ao cálculo no ensino médio. Reproduz-se o Paradoxo de Zenão com auxílio de um software de fácil manuseio, que pode ser utilizado em sala de aula para trabalhar matemática com os alunos.

<u>Atividade (Paradoxo de Zenão):</u> Imagine que um arqueiro dispara uma flecha em um alvo que está em uma posição diferente dele. Observe que para chegar ao alvo inicialmente a flecha deve percorrer metade da distância entre o alvo e o arqueiro. Uma vez percorrida essa distância a flecha deve percorrer metade da distância entre sua posição e o alvo e assim sucessivamente, como a imagem abaixo.

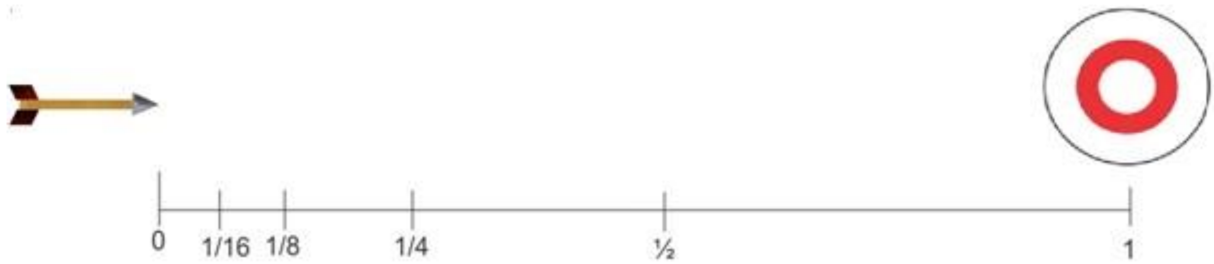

Figura 2: Paradoxo de Zenão.

Observe que a distância entre a flecha e o alvo é uma aplicação da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, na qual x é o número de vezes que contamos a metade do trajeto entre a flecha e o alvo. Utilizando a ferramenta digital de aprendizagem que modela o Paradoxo de Zenão, responda as seguintes perguntas.

a) A flecha chega até o alvo? Por quê?

b) Podemos relacionar essa questão com progressões geométricas? Como fazemos isso?

A ferramenta digital de aprendizagem permite a reprodução do paradoxo de Zenão, de modo que para cada x podemos tomar o comprimento do x-ésimo ponto médio até o alvo. Nosso objetivo é que o aluno perceba que não importa quão grande ele tome o x, tal valor nunca será zero, mas irá se aproximar dele cada vez mais.

Nesta questão esperamos que alguns alunos deixem de considerar a lógica apresentada por Zenão em seu paradoxo e, tomando a ferramenta de trabalho fornecida, simplesmente afirmem que a flecha chega até o alvo. No entanto, uma vez que optarem por esse caminho terão grande dificuldade para justificar sua resposta, ao contrário daqueles que tentarem construir seus resultados baseados nos conhecimentos que lhes serão expostos.

A partir desse ponto já esperamos que muitos alunos comecem a ter sérias dificuldades de abstração e tenhamos de repetir muitas vezes os argumentos, de muitas maneiras diferentes e com mais detalhes para buscar uma maior compreensão.

Ao final apresentaremos a solução e como ela está relacionada com o conceito de infinito, inclui toda a linguagem mais simbólica e algébrica existente no cálculo.

Evidentemente quanto maior o valor de x menor a distância da flecha ao alvo, no entanto não existe um x tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. Observa-se que $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ representa uma progressão geométrica e tomando a soma dos infinitos termos dessa progressão geométrica temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Logo, repetindo o processo infinitas vezes temos que a flecha chegará ao alvo, pois mesmo que não consigamos achar um x tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ (distância da flecha ao alvo seja 0) conseguimos mostrar que a distância percorrida pela flecha é exatamente a distância entre a posição inicial da flecha e o alvo.

Ao apresentarmos esta solução esperamos encontrar questionamentos e dúvidas provenientes dos alunos tais como: O que é o infinito? Como repetir um processo infinitas vezes? Usaremos tais questionamentos para introduzir o conceito de infinito, de modo a sanar a curiosidade dos alunos e a obter diversas maneiras de continuarmos nossa prática.

Destacamos aqui que a representação computacional pode auxiliar na visualização e interpretação do problema, possibilitando assim a realização de um exercício reflexivo sobre a situação, que auxilie na construção de um modo de pensar para entender o que realmente acontece. No entanto, cabe frisar, que apenas o recurso digital não reforça a destreza algébrica necessária para se desenvolver o cálculo e que essa é uma das causas apontadas para os altos índices de repetência na disciplina.

A professora Maria acredita que propostas de introdução do cálculo no ensino médio deveriam ser trabalhadas unicamente com alunos que tenham mais facilidade em compreender a matemática, chegando a propor a separação destes dos que têm dificuldade em lidar com a matéria.

Deste modo apenas os jovens mais interessados (e que provavelmente são os que têm mais chance de ingressar no ensino superior) conhecerão o conteúdo e, provavelmente, irão aprendê-lo, assim poderão se acostumar gradualmente às cobranças universitárias e à mudança de contrato que será realizada durante a transição entre os níveis. No entanto, os alunos com mais dificuldade terão essas acentuadas, uma vez que não estudarão tantos conteúdos quanto os outros e, portanto, estarão em desvantagem para garantir uma vaga no ensino superior.

Um sistema como esse, ao mesmo tempo em que promove uma competição entre os alunos por melhores condições de ensino também viola o direito de acesso a uma educação pública de qualidade e gratuita, que deve ser garantida para todo cidadão, independente de suas particularidades e de seus fatores sociais, uma vez que estes certamente interferem diretamente no desempenho escolar.

O professor Antônio coloca que a inserção de tópicos de cálculo no ensino médio é uma proposta válida, mas que só isto não basta, pois não é esta ausência que mais causa dificuldade ao aluno. Ele aponta como problema a irresponsabilidade do jovem que não tem comprometimento com o estudo, de modo que o conteúdo, quando é exigido no nível superior, não é lembrado. Isso ocorre em especial nas disciplinas de cálculo, por exigirem uma miscelânea de todos os conhecimentos que deveriam ter sido adquiridos no ensino médio. Assim, os alunos enfrentam dificuldades com

> [...] o conceito de funções, resolução de equações, propriedades básicas de fatoração, pontos críticos de uma função, entre outros conceitos vistos no ensino médio, às vezes até no fundamental, mas que [...] não têm na ponta da língua. É isto que os prejudica, não são os conceitos do cálculo propriamente dito, o que assusta o aluno é a quantidade de informação já vista, cobrada pelos professores universitários, dos quais sempre se ouve: "Isso vocês já viram". (Antônio Esperança).

Podemos observar que a fala do professor Antônio vai de encontro ao contexto exposto pela professora Maria sobre a deficiência existente na transição entre as séries do ensino fundamental e médio, ocorrendo, muitas vezes, o avanço entre elas, sem que se tenha dominado todo o conteúdo. Acredito também que a ausência dos saberes provenientes do ensino médio é uma causa importante para os problemas existentes no processo de ensino-aprendizagem de cálculo, mas que não se limitam a isso, uma vez que novos conteúdos são desenvolvidos durante a disciplina e sua compreensão é tão vital quanto a de seus pré-requisitos.

Podemos observar que, apesar dos professores defenderem diversas abordagens para introdução do cálculo no ensino médio, cada uma com suas particularidades, todos argumentam que essa inserção seria proveitosa, mas que ainda existe muito a ser debatido para se encontrar a maneira apropriada de realizá-la.

5.3 A História no Ensino de Matemática [19]

Outro tópico importante abordado durante nossa entrevista foi a utilização da história como um método alternativo para o ensino de matemática, principalmente para reproduzir, em sala de aula, ambientes e contextos, nos quais importantes ideias foram concebidas. Buscamos descobrir a opinião dos entrevistados sobre a realização desse tipo de prática, se alguma vez já realizaram alguma atividade que mesclasse história e matemática, quais haviam sido os resultados obtidos e como os alunos reagiram.

[19] Utilizamos uma perspectiva de história da matemática que permita a interação do aluno com um problema histórico.

Todos os entrevistados aprovam a utilização da história como ferramenta para o ensino de matemática e já realizaram atividades desse tipo com seus alunos, obtendo resultados positivos e significativos para o processo de ensino-aprendizagem da matéria. Mas defendem que o professor deve saber usar a história como um instrumento, tornando-a acessível para os jovens ao mesmo tempo em que a contextualiza com o que se deseja trabalhar.

O professor Antônio coloca que a história da matemática pode ser usada para resgatar qualquer aspecto e qualquer tópico de todo conteúdo matemático e que torna seu ensino muito mais interessante e agradável, tanto para o professor, que pode fazer uso de uma série de fatos e momentos para elaborar sua aula, quanto para o aluno, que tem a oportunidade de fugir um pouco das técnicas algébricas e algoritmos de resolução de problemas aos quais estão acostumados, podendo obter o conhecimento por uma nova perspectiva.

> [...] isso é novo para a história da matemática, e isso é interessante. Torna o ensino de cálculo mais agradável, para o professor e para o aluno. Como professor gosto de trazer para os alunos fatos impressionantes e curiosidades durante a aula e busco eles em muitos livros de história, isso me ajuda a fazer a aula mais interessante para eles e eles gostam porque não ficam só nas contas e exercícios, não fica só na técnica, eles podem ver de outra maneira a matemática, como ela foi construída, na origem, e como as coisas surgiram. (Antônio Esperança).

Corroborando com a opinião do professor, destaco que a história da matemática, além de ser usada para o resgate de importantes tópicos, apresentação de fatos interessantes e de curiosidades, também pode ser usada para recriar o ambiente, o contexto e as perguntas que instigavam os pensadores da época e favoreceram o surgimento de importantes ideias relacionadas à matemática. Transportar o pensamento do aluno para situações tão propícias para o desenvolvimento da matemática pode fazer com que ele tenha facilidade para compreender os conceitos, desde os mais simples até os mais abstratos e ocultos de qualquer conteúdo.

Para exemplificar, proponho a construção dos conceitos de infinito atual e infinito potencial através do seguinte problema: dada uma circunferência de raio um podemos inscrever nela um polígono regular com qualquer quantidade de vértices colocados sobre a circunferência. Note que a área do polígono inscrito ocupará parte da área da circunferência. Sendo assim, o que acontecerá com a área do polígono se inscrevermos na circunferência polígonos com cada vez mais vértices? Em algum momento a área do polígono inscrito e da circunferência serão iguais?

Para responder essas questões propomos a atividade abaixo.

Atividade: Utilizando uma ferramenta de ensino que modela a situação, permitindo a adição e remoção do número de vértices de um polígono inscrito numa circunferência de raio um, propomos que se tente responder as seguintes perguntas:

O que acontece com a área do polígono conforme aumentamos o número de lados?

Qual a relação entre o número de lados do polígono e sua área?

Qual a relação entre o número de lados do polígono e a área da circunferência em que eles estão inscritos?

O que acontece com a área do polígono quando seu número de lados vai para infinito?

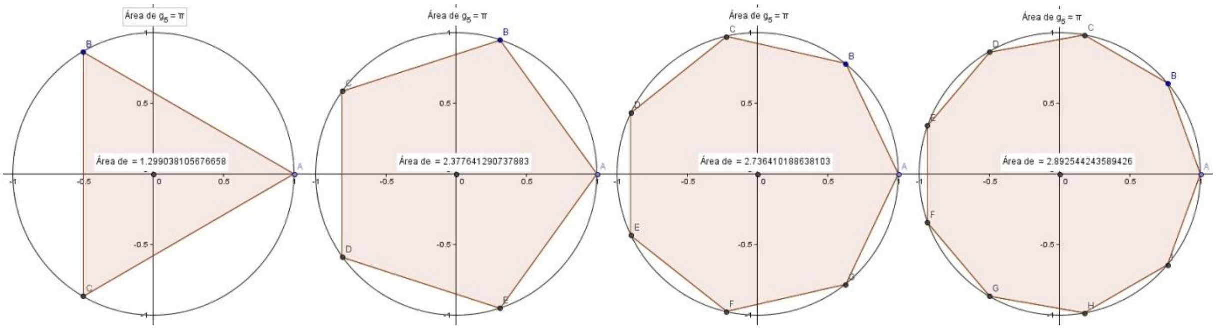

Figura 1: Sucessão de Polígonos.

Nosso objetivo é fazer com que os alunos percebam que podemos colocar qualquer quantidade finita de vértices para o polígono e que a área dele aumenta sem nunca ultrapassar a área da circunferência em que está inscrito, mas sempre se aproximando. No entanto, para que o polígono tenha a mesma área da circunferência seria necessário considerar infinitos vértices.

Devido à ferramenta oferecer uma boa visualização do problema, acreditamos que a maioria dos alunos terão facilidade para responder as duas primeiras perguntas, no entanto a última pergunta é mais específica sobre o infinito e exige um maior poder de abstração, portanto é provável que os jovens precisem ser auxiliados na elaboração desta solução.

Acreditamos que a repetição de atividades semelhantes a essa pode fazer com que os alunos se habituem melhor ao conceito de infinito.

A professora Maria afirma que as atividades que realizou, mesclando história e matemática, foram um sucesso e que os alunos se surpreenderam ao ver que a matemática não era composta unicamente por cálculos, mas que poderia ser relacionada com as mais distintas matérias, de fato não sabiam nem que existiam livros sobre este tema.

Com relação ao ato de usar a história para recriar ambientes propícios ao desenvolvimento da matemática, a professora afirma que muitos alunos podem achar interessante a proposta por terem a possibilidade de se afastar da repetição de cálculos aos quais estão acostumados, mas nem todos conseguirão compreender a atividade, apenas aqueles que têm mais facilidade de entender a matemática se adequarão de maneira apropriada à novidade.

Acredito que, assim como a introdução do cálculo ao ensino médio, a prática de utilizar a história para desenvolver uma atmosfera mais propícia para construção de conhecimentos matemáticos em parceria com o aluno tem como principal problema o modo como será conduzida a atividade. O desafio em aplicar esta metodologia está em realizá-la de maneira que todos consigam atingir o objetivo de compreender o conteúdo com mais clareza.

A professora Elisabete coloca que a apropriação do conhecimento histórico pode ser mais interessante para os professores do que para os alunos, uma vez esses costumam ser mais atraídos pelo cotidiano moderno em que vivem. A professora narra uma prática que realizou com seus alunos durante a disciplina de Fundamentos de Matemática I-A, na qual construiu os números reais por meio das técnicas geométricas utilizadas pelos gregos na época. Destaca ainda que ficou muito feliz ao ver que um de seus alunos conseguiu realizar a construção do inverso dos números reais sozinho, a partir de uma montagem semelhante que já havia sido exposta em aula.

A professora expõe que a história pode ser útil para mostrarmos aos alunos que os conceitos e conteúdos que trabalhamos não são tão naturais e que por trás deles existe todo um contexto que influenciou a sua concepção, como, no exemplo acima, o modo como os gregos relacionavam a construção dos números com a geometria. A atividade da professora mostra que a reconstituição desse ambiente em sala de aula desenvolve o pensamento crítico do aluno sobre o tema e proporciona a obtenção de resultados satisfatórios, como a autonomia em desenvolver suas próprias construções.

Todos os professores entrevistados já desenvolveram atividades utilizando história para o ensino de matemática, mas cada qual com suas particularidades e preferências. As falas também apontam indícios de que a reconstrução de ambientes propícios ao desenvolvimento do pensamento matemático por meio da utilização da história pode ser útil no processo de ensino-aprendizagem para muitos alunos, ajudando-os a conceber ideias que podem contribuir na aplicação de técnicas de resolução de problemas. Assim, agregamos mais argumentos a favor da viabilidade dessa metodologia No entanto, apesar dos inúmeros pontos positivos e das variadas abordagens, ainda persiste a questão sobre como realizá-la de maneira a maximizar a compreensão do aluno.

5.4 História do Infinito como Uma Introdução ao Cálculo

Durante as entrevistas abordamos tópicos relacionados à história do infinito, enfatizando sua utilização dentro da sala de aula do ensino médio como uma atividade de introdução ao cálculo e reconhecendo as influências das concepções de infinito para o desenvolvimento do cálculo. Buscamos descobrir se os entrevistados acreditam que conhecer a história do infinito e entender suas ideias poderia atuar no aprendizado de cálculo como um facilitador e se uma abordagem desse tipo poderia ser realizada no ensino médio de maneira proveitosa.

Todos os entrevistados reconhecem a importância das ponderações relativas ao infinito para o desenvolvimento do cálculo, mas também destacam muitos outros tópicos históricos de grande relevância para o ensino de matemática e para o ensino de cálculo.

A professora Maria coloca que o infinito tem tanta importância como as áreas de álgebra, geometria e outras, uma vez que é equivocado se pensar no cálculo apenas a partir de uma perspectiva. Ela destaca que, devido a sua grande complexidade, temos que lidar com diversos entes matemáticos e estabelecer múltiplas relações, inclusive interdisciplinares.

De fato acreditamos que o cálculo se constitui em uma disciplina que cobra como pré-requisito praticamente todos os conhecimentos que são apresentados durante o ensino médio, sendo este inclusive um dos pontos que o torna tão difícil de ser dominado. Portanto, assumimos que todas as áreas da matemática (e de outras ciências também) possuem papel fundamental no desenvolvimento de seus conceitos e adotamos, em particular, que o infinito apenas fornece um modo de introduzir uma maneira alternativa de pensar tal assunto devido à vasta quantidade de exercícios reflexivos que podem ser realizados.

O professor Antônio enfatiza que o assunto é muito rico dentro da história da matemática e muito interessante, devido à maneira como pensavam algo que não podia ser atingido, como trabalhavam com este conceito e como reconheciam as diferenças entre as regras que podiam ser consideradas para questões finitas e para questões infinitas. Destaca também a utilização que Newton e Leibniz fizeram do conceito do infinito para começar a estruturar os conhecimentos que são aceitos hoje em dia.

Nossa pretensão de utilização da historia do infinito é, justamente, focada na maneira como ele era pensado em suas diversas abstrações e complexidades. Acreditamos que a influência que o infinito teve sobre o cálculo se deu, principalmente, na maneira como ele deveria ser pensado para possibilitar o seu desenvolvimento.

Mostremos uma maneira prática e reflexiva de se pensar em conceitos abstratos relativos às concepções do infinito que podem ter influência no cálculo. Podemos introduzir a noção de infinito apresentando o paradoxo dos números quadrados e dos números naturais de Galileu (citado anteriormente).

Atividade: Utilizando recursos computacionais podemos criar uma ferramenta que nos permite tomar intervalos da reta real e marcarmos apenas os pontos naturais nesse intervalo e os pontos naturais respectivos a estes na imagem desse intervalo. Sendo assim solicitaremos que o aluno observe o gráfico da função $f(x) = x^2$ e destaque os pontos naturais em um intervalo da parte positiva do domínio e que destaque os pontos naturais no contradomínio desse intervalo. Com base nas observações ele deverá responder as seguintes questões:

Neste intervalo existem mais pontos naturais no domínio ou no contradomínio?

Se aumentarmos o intervalo do domínio o que acontece com a quantidade de pontos naturais no domínio? E no contradomínio?

Se tomarmos toda a reta positiva, ou seja, tomando infinitos pontos no domínio teremos mais pontos naturais no domínio ou no contradomínio? Por quê?

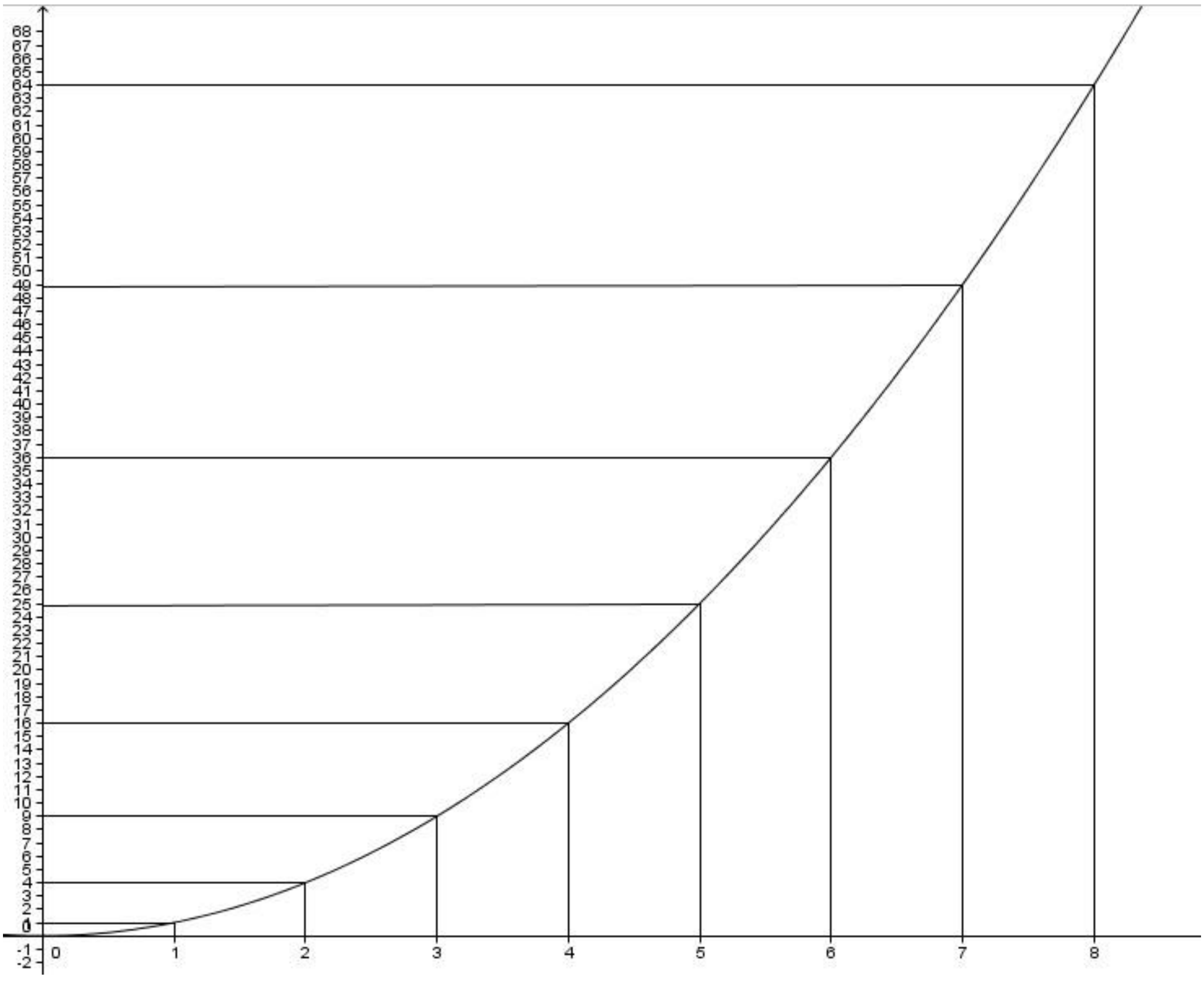

Figura 3: Paradoxo dos Números Quadrados.

Nosso objetivo com essa ferramenta é que o aluno consiga perceber que no intervalo do domínio os naturais marcados são consecutivos e na imagem do intervalo os naturais demarcados não são consecutivos, portanto teremos muito mais naturais nele. No entanto ao tomarmos toda reta pegaremos infinitos pontos em ambos os intervalos.

Mostremos uma aplicação do paradoxo apresentado envolvendo o fenômeno de dilatação térmica para exemplificar a utilidade prática do cálculo.

Atividade: Imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente porque está sendo aquecida. Se x é o comprimento do lado, a área da placa é dada por $A = x^2$.

Utilizando uma ferramenta computacional que permite a construção de um quadrado com sua área calculada e que permite a manipulação do comprimento do lado verifique que para cada valor que o lado da placa (ponto do domínio) assumir obtém-se uma área do quadrado (ponto da imagem) que é maior ou igual que o lado em si. Destacamos que aqui o lado mínimo que a placa pode assumir é uma unidade de comprimento.

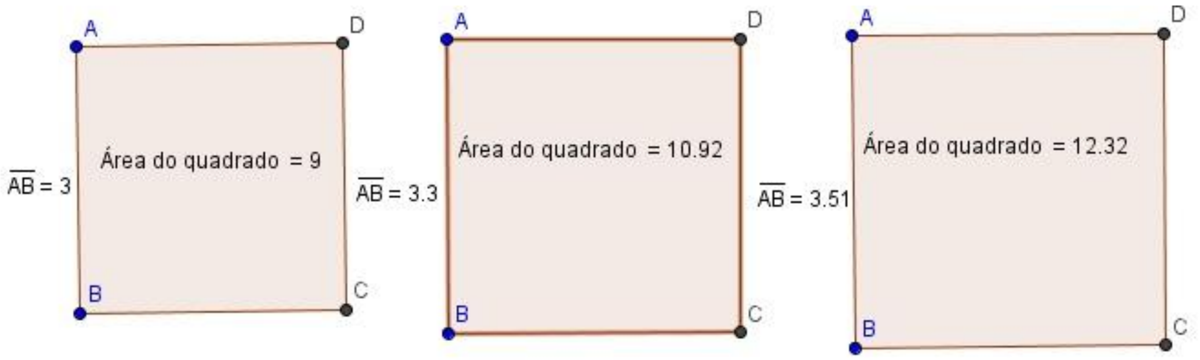

Figura 4: Placa Metálica.

A professora Elisabete destaca que este tópico é realmente difícil de ser pensado, mas coloca que o infinito não é necessariamente a ideia chave para o desenvolvimento do cálculo, mas sim a ideia de convergência, que é vista de maneira superficial devido a grande quantidade de assuntos que devem ser trabalhados durante a disciplina. Coloca também que Newton e Leibniz realizavam muitas experimentações numéricas para obtenção de conclusões relativas à convergência e que seria proveitoso trazer isso tanto para universidade quanto para o ensino médio.

Relacionando as opiniões da professora Elisabete com a fala da professora Maria, Dalpozzo destacamos que todos os tópicos citados anteriormente são importantes para um desenvolvimento completo do cálculo e que se complementam mutuamente de acordo com a complexidade que abordamos a matéria. Acreditamos que o tratamento numérico tem fundamental importância para o cálculo e, principalmente, para suas aplicações e também reconhecemos que ele constitui uma deficiência presente nos alunos de todos os níveis e, consequentemente, seria vantajoso reforçá-lo com a realização de uma atividade específica.

Com relação à importância do infinito para o desenvolvimento do cálculo, acreditamos que todos os professores a reconhecem, no entanto por motivos diferentes. Devido a isso suspeitamos que as influências exercidas se realizaram de maneiras diferentes, de modo que dificilmente todas poderão sem contempladas por uma mesma ótica, mas nem por isso se tornam menos relevantes.

A utilização das influências que o infinito exerceu no desenvolvimento do cálculo, por meio de uma abordagem que faça uso da história, no sentido de reconstruir o ambiente que favoreceu o surgimento de concepções tão abstratas e de se aproveitar desse contexto para estimular o aluno a pensar o cálculo ainda no ensino médio divide as opiniões dos professores entrevistados. Neste ponto centrou-se, sem dúvida, as maiores diferenças entres as falas, que apresentaram desde sugestões de como a atividade veria ser desenvolvida até incentivos para colocá-la em prática visando obter resultados mais aplicados.

A professora Maria destaca que para a atividade ter sucesso é fundamental que o aluno tenha um bom raciocínio lógico, facilidade para aprender e interesse pela matéria, mas que aqueles que não possuem tais características não conseguirão realizar a atividade e se deterão a questionar qual a utilidade prática do conteúdo em seu cotidiano. Apesar de ser possivelmente necessária uma seleção de público a professora coloca que a atividade seria boa para auxiliar na constituição de uma maneira alternativa de se pensar cálculo ainda no ensino médio e poderia auxiliar na resolução dos problemas enfrentados na disciplina, uma vez que nenhuma escola realiza um trabalho como este.

Acreditamos que o argumento acima está fortemente relacionado à colocação de que os alunos deveriam ser divididos entre aqueles que compreendem com facilidade a matemática e aqueles que possuem dificuldade em sua cognição e que, portanto, a atividade só poderia ser realizada com os primeiros enquanto os outros se limitariam a estudar conteúdos mais simples. Certamente a dificuldade de aplicação de uma proposta de introdução de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio está em torná-la compreensível para todo o público à qual ela é submetida, logo não seria significante sua aplicação apenas a uma pequena parcela, além das outras causas citadas anteriormente, relacionadas à separação dos alunos por condição de compreensão.

A professora ainda faz uma crítica a atual distribuição de horários para as disciplinas nas escolas públicas de ensino médio e fundamental. Ela comenta que um dos principais entraves para se ensinar matemática está no pouco tempo que se tem para trabalhar e que para se considerar uma atividade que provoque o pensar em cálculo no ensino médio é primeiramente necessário aumentar a carga horária disponível para a matéria.

Coloca também que antigamente mais projetos e trabalhos eram desenvolvidos na escola, mas com a diminuição da carga horária para a disciplina de matemática isso não é mais possível, consequentemente isso acarreta em estudantes indo do ensino médio para o superior com uma formação mais deficiente e que as universidades devem se preparar para encarar essa situação.

Sem dúvida alguma, quanto mais tempo disponível melhor será para desenvolver um conteúdo, no entanto não acreditamos que seja necessário um aumento da carga horária direcionada à matemática para se introduzir o cálculo no ensino médio, pois uma vez que ele esteja inserido poderá se fazer uso dele para explicar diversos outros assuntos, agilizando o processo de ensino-aprendizagem.

O Professor Antônio acredita que nem mesmo com a utilização da história para reconstrução de um momento passado, caracterizado por fornecer um ambiente propício ao exercício do raciocínio lógico adequado para o desenvolvimento da matemática, pode ser possível que o aluno reproduza um pensamento semelhante ao daquela época, que facilite na compreensão do cálculo.

Segundo ele os problemas que geraram questionamentos no passado são muito diferentes dos que geram questionamentos hoje em dia, visualizações que antes eram realizadas apenas na mente perderam espaço na geração atual, que é muito fixada em gráficos, logo é muito complicado fazer com que o aluno consiga reproduzir esse tipo de pensamento.

A longa experiência profissional do professor Antônio faz com que tenha um conhecimento muito preciso das realidades vivenciadas em sala de aula e da situação das capacidades cognitivas dos atuais alunos do ensino médio. Assim, fazendo uso das informações fornecidas podemos repensar nossa proposta de maneira a adaptá-la para a realidade vigente no ensino médio e de maneira a promover questionamentos adequados às mentes da geração atual.

O professor ainda destaca que uma proposta de introdução ao pensamento do cálculo no ensino médio por meio da utilização da história do infinito é algo surpreendente (mesmo que ainda esteja por ser pensado como será a proposta) e que poderia ser aplicada como um projeto de pesquisa ou como uma curiosidade a ser apresentada em aula. Sugere que o principal seria reforçar a utilidade da matemática por meio de uma matéria tão útil e extensa como cálculo, pois desse modo poderia despertar o interesse do aluno.

Assim como colocado pela professora Maria, uma atividade desse tipo não existe no ensino médio e por isso surpreende. Acreditamos que uma possível adaptação da proposta poderia ser sua aplicação em caráter de projeto de pesquisa, dando o destaque recomendado pelo professor a sua utilidade e fazendo uso da extensa gama de conteúdos presentes no cálculo.

A professora Elisabete coloca que para avaliar a viabilidade de execução da proposta seria necessário tê-la em mãos e que mesmo assim só poderia dar um palpite sobre a situação, destacando que seria necessário realizar uma experimentação para obter resultados mais precisos. Destaca também que o período de pesquisa para a elaboração do TCC seria um bom momento para se aplicar uma atividade desse tipo.

Temos certeza de que quanto mais detalhes forem fornecidos mais precisa será a avaliação da viabilidade de uma atividade, no entanto consideramos que a experiência profissional de um professor o capacita e o autoriza a estimar os resultados de uma proposta de ensino. Destacamos ainda que a aplicação das ideias aqui apresentadas enriqueceria muito este trabalho, entretanto existem problemas como a disponibilidade de local (escola e turma) e horários para a realização de uma aula dessas (itens contemplados na fala da professora Maria).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciei este trabalho exibindo meus anseios por investigar uma maneira alternativa de tratamento para desenvolver a capacidade necessária para interpretação dos conceitos mais abstratos de cálculo. Não foi difícil ver que esse é um problema que desperta curiosidade não apenas a mim, mas também a muitos outros pesquisadores do campo de educação em matemática, uma vez que encontrei uma extensa quantidade de referenciais teóricos referentes às dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de cálculo.

Com a realização de alguns estudos percebi que existem muitos momentos em que um trabalho para o desenvolvimento de uma maneira alternativa de pensar o cálculo poderia ser realizado, mas o que mais me interessou foi o ensino médio, devido ao seu caráter de preparar o aluno para o mercado de trabalho, já que o cálculo possui muitas aplicações e novas maneiras de tratá-lo sempre podem ser úteis, e para o ingresso na universidade, lugar em que o conteúdo será desenvolvido por completo, portanto será benéfico ao aluno ter familiaridade com o raciocínio que será aprofundado ao longo da disciplina.

No decorrer de minha graduação deparei-me com muitos métodos para a abordagem inicial e avançada do cálculo e com muitas práticas para o desenvolvimento de seus conteúdos, seja por meio da leitura de textos e artigos ou por relatos de experiências de colegas e professores. Tantas perspectivas diferentes me colocaram em dúvida no momento de escolher o método que mais se adequaria à minha investigação sobre a possibilidade de construir um raciocínio alternativo para se interpretar o cálculo, mas, mesmo com muitos dilemas, optei por utilizar fortemente a história da matemática com foco em alguns problemas históricos.

A história da matemática sempre me permitiu desbravar a gênese dos mais diversos tópicos, para compreendê-los de maneira mais clara, e durante esse processo de redescoberta tive a possibilidade de realizar muitos exercícios reflexivos sobre as concepções, indagações e questionamentos que povoavam a mente dos estudiosos da época. Acredito que reproduzir esse tipo de atividade reflexiva e, até mesmo, um pouco crítica (no sentido de questionar os porquês presentes na matemática que é vista em sala de aula) com os alunos seria proveitoso para elucidar uma nova perspectiva de se pensar a matemática, em particular o cálculo.

O cálculo é uma das disciplinas que mais estabelece relações com outros entes da matemática e, mesmo com toda essa diversidade, optei por tentar pensá-lo por meio da história do infinito, uma vez que esse foi, e ainda é, um dos temas que mais me proporciona exercícios de reflexão acerca de concepções e construções ao longo dos tempos e que esteve intimamente relacionado ao desenvolvimento do cálculo. Uma vez definido que exploraria a história do infinito me lancei a pesquisas históricas sobre o assunto, dando enfoque a suas relações com o cálculo e, nos momentos mais propícios, ao exercício do pensamento reflexivo que poderia ser reproduzido com os alunos. No entanto, nem todos os momentos históricos foram utilizados para o desenvolvimento de atividades, visto que seria necessário um detalhamento de algumas delas, o que ultrapassaria os limites deste trabalho.

Para investigar a viabilidade de uma proposta de introdução ao pensamento do cálculo no ensino médio através do uso da história do infinito fui conversar diretamente com as pessoas mais inseridas na escola e principais envolvidos com o assunto, os professores, pois afinal eles são os responsáveis pela aplicação das aulas e, portanto, são os que melhor conhecem a realidade atual das turmas de ensino médio. Realizei três entrevistas com professores do ensino médio e superior, buscando conhecer suas opiniões e experiências pessoais sobre assuntos que vão desde o atual panorama sobre o ensino de cálculo nas universidades até o questionamento acerca da viabilidade da proposta e de como ela poderia auxiliar na resolução dos problemas de ensino-aprendizagem existentes na disciplina de cálculo.

Com as análises das entrevistas pude confirmar que todos os professores reconhecem que existe um problema no processo de ensino-aprendizagem que faz com que a disciplina apresente altos índices de reprovação e que muitas são as possíveis causas para isso, dentre elas a presença de uma deficiência na transição do ensino médio para o superior. Os professores ainda acrescentam que existem muitas propostas para reduzir essa deficiência, chegam até mesmo a apresentar as suas. Uma possibilidade seria a inserção de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio, no entanto todos colocam restrições sobre como essa atividade deveria ser desenvolvida para que realmente pudesse ser viável.

Todos os professores se mostraram favoráveis à utilização da história como ferramenta para o ensino de matemática e, inclusive, já a utilizaram em alguma atividade durante suas aulas. Destaco que existem diversas maneiras de se mesclar história e matemática, entre elas proponho a reconstrução de ambientes do passado propícios ao desenvolvimento do conteúdo, de modo a desencadear maneiras diferentes e provocativas de os alunos conceberem certas ideias e reconhecerem o contexto no qual elas surgiram. Com relação a essa metodologia, os professores colocaram que ela seria muito proveitosa, mas expressaram que seria necessário estudar a maneira mais apropriada para que ela fosse realizada.

Os professores se mostraram divergentes com relação à viabilidade de uma atividade que realizasse a introdução do pensamento ao cálculo no ensino médio por meio de reflexões sobre a história do infinito e da elaboração de suas construções e concepções, mas como ponto positivo destaco que todos forneceram conselhos para qualificar a proposta, destacando como ela deve ser desenvolvida e, inclusive, enfatizando a importância de que ela seja aplicada, para que eu possa obter dados mais relevantes para avaliação.

Através das entrevistas pude confirmar que as bases relativas às dificuldades existentes no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos das disciplinas de cálculo realmente existem e que, entre muitos motivos, isso pode ser causado por deficiências existentes na transição do ensino médio para o superior. No entanto, as causas reais dessas dificuldades dependem de muitos fatores, de modo que é impossível determinar precisamente seus motivos.

Ficou colocado que a introdução ao pensamento do cálculo no ensino médio pode auxiliar no processo de transição entre os níveis, mas também que são muitas as variáveis a serem analisadas para garantir a superação do problema ou, ainda, para determinar uma atividade (e qual seria?) que possa fazê-lo.

Ao final, destaco que para se avaliar de uma maneira mais apropriada se o infinito realmente pode auxiliar numa introdução ao pensamento do cálculo no ensino seria necessária a estruturação mais sólida de uma proposta, bem como a aplicação da mesma a uma turma disposta a realizar essa discussão.

7 REFERÊNCIAS

ALBERTI, Verena. **Ouvir Contar Textos em História Oral.** Rio de Janeiro: Editora FGV, 2004.

ANDRÉ, M. E. D. A. (1983). Texto, contexto e significado: algumas questões na análise de dados qualitativos. **Cadernos de Pesquisa,** (45): 66-71.

ÁVILA, Geraldo. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. **Revista do Professor de Matemática**, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), p.1-9, 1996.

________. Derivadas e Cinemática. **Revista do Professor de Matemática**, n.61, SBM, p. 25–30, 2006.

________. Limites de derivadas no ensino médio? **Revista do Professor de Matemática**, n. 60, SBM, p. 30–38, 2006.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BOLZANO, Bernard. **Las paradojas del infinito,** 1991 [1851].

BORDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa: Portugal, 2009**.**

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 1998.

________. **The History of Calculus and its Conceptual Development**. New York, Dover, 1959.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: língua portuguesa: terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

________. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (PCN-EM). Brasília: MEC/SEMTEC – Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002.

________. **ENEM**: Arquivos relativos ao resultado do Exame Nacional do Ensino Médio, 2007. Disponível em http://mediasenem.inep.gov.br/resultado.php.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**, 1951.

CARVALHO, J. P. de. O cálculo na Escola Secundária: algumas considerações históricas. **Caderno CEDES**. Campinas: Papirus, n. 40, 1996.

CASTILHO, Ataliba. **A Língua Falada no Ensino de Português**. São Paulo: Contexto, 1998.

CASTRO, M.H.G. **Sistemas de avaliação da educação no Brasil: avanços e novos desafios**. São Paulo em Perspectiva, São Paulo, Fundação Seade, v. 23, n. 1, p. 5-18, jan./jun. 2009. Disponível em: <http://www.seade.gov.br>; <www.scielo.br>.

COHEN, Paul. A teoria de conjuntos e a hipótese do contínuo. In: GÖDEL, Kurt. **O teorema de Gödel e a hipótese do contínuo**, 1979.

CURY, H. N. Cobenge e ensino de disciplinas matemáticas nas engenharias: um retrospecto dos últimos dez anos. In: **Anais do Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia**, Piracicaba, 2002.

DAUBEN, J. W. **Abraham Robinson**: The Creation of Nonstandard Analysis, A Personal and Mathematical Odyssey, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1998.

________. **Georg Cantor**: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Cambridge, Mass, 1990.

DOERING, Claus I; NÁCUL, Liana B; DOERING, Luisa R. O programa Pró-Cálculo da UFRGS. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

DUCLOS, R.C. Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues, 2. ed., Campinas: UNICAMP, 2004.

FONTANA, A. & FREY, J.H. The Interview: fromstructured questions to negotiated text. In: N. Denzin & Y.S. Lincoln (orgs.). **Handbook of Qualitative Research**. London: Sage Publications Inc, 2000, P. 645-672.

GALILEI, G., **Duas Novas Ciências**, São Paulo: Nova Stella, 1988.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. (Re)Traçando Trajetórias, (Re)Coletando Influências e Perspectivas: uma proposta em história oral e educação matemática. In: BICUDO, Maria A. V.; BORBA, Marcelo de C. (org.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005, P.151-16.

GASKELL, G. Entrevistas individuais e de grupos. In: M.W. Bauer & G. Gaskell (orgs.), **Pesquisa Qualitativa com Texto, Imagem e Som***:* um manual prático, Petrópolis: Vozes, pp.64-89, 2002.

HEATH, Thomas Litle. **A History of Greek Mathematics***.* New York, Dover, Vol. I, 1981.

HILBERT, David (1926). Sobre o infinito. Mathematische Annalen, vol. XCV. In: HILBERT, David. **Fundamentos da Geometria**, 2003 [1898-99].

________. **Future Problems of mathematics**. (Cambridge, Mass), 1990 [1902].

IFRAH, G. **Os Números**: A História de uma grande invenção, 7 ed. São Paulo: Editora Globo S.A, 1994.

JEANRENAUD, Maria de Lourdes Rocha de Assis; MARTINS, Daniel Felipe Neves. **A Questão do Infinito em Hilbert**. Rio De Janeiro: UFRJ, 2010.

KOUZNETSOV, B. **História da Filosofia para Físicos e Matemáticos,** Moscou: Naúka, 1974.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. **Matemática Universitária**, n. 26/27, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1999, p.123-146.

MEIHY, José Carlos Sebe Bom; RIBEIRO, Suzana Lopes Salgado. **Guia Prático de História Oral.** São Paulo: Editora Contexto, 2011.

MEIHY,José Carlos Sebe Bom. **Manual de História Oral**. São Paulo: Edições Loyola,1998.

MIGUEL, Antonio. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: Argumentos Reforçadores e Questionadores. **Zetetiké**, Vol. 5, n. 8. Campinas, UNICAMP, 1997, p. 73-89.

MOMETTI, A. L. **O Infinito e as Metáforas no Ensino de Cálculo**. 2007. 272p. Tese de Doutorado em Educação Matemática - PUC, São Paulo, 2007.

MUIR, Jane. **Of Men and Numbers**: The Story of the Great Mathematicians. New York: Dover Publications, 1996.

MUNDY, Hoan F.; GRAHAM, Karen Geuther. An overview of the calculus curriculum reform effort: issues for learning, teaching, and curriculum development. **American Mathematical Monthly**, Vol. 98, p.627-635, 1991.

NEWTON, Isaac. **O método das fluxões e das séries infinitas**. Associação de Professores de Matemática e Editorial Prometeu, 2004 [1742].

ORTIZ, J. R. El Concepto de Infinito. **Boletín**, Venezuela, v1, n. 2, 1994.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

SANTO AGOSTINGO. **A cidade de Deus (contra os pagãos)**. 3. ed. Petrópolis: Editora Vozes. Parte II, 1999. P. 413-427.

SANTOS, R. M.; NETO, H. B. **Avaliação do Desempenho no Processo de Ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I**.

SILVEIRA, Rosa Maria Hessel. A entrevista na pesquisa em educação: uma arena de significados. In: COSTA, Marisa Vorraber; VEIGA-NETO, Alfredo (org.). **Caminhos Investigativos II**: outros modos de pensar e fazer pesquisa em educação. Rio De Janeiro: DP&A, 2002.

STRUIK, Dirk. **História Concisa das Matemáticas**. 3. ed, 1997.

THOMPSON, Paul. História oral: patrimônio do passado e espírito do futuro. In: WORCMAN, Karen; PEREIRA, Jesus Vasquez (orgs.). **História Falada**: memória, rede e mudança social. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo/Museu da pessoa/SESC-SP, 2006.

WALDEG, G.,Bolzano´s Approach to the Paradoxes of Infinity: Implications for Teaching, **Science & Education**, 2005.

ZAVATTINI, Césare. **Parliamo tanto di me**. 1931.

APÊNDICES

Apêndice A: Roteiro da Entrevista

<u>Apresentação:</u>

Nome do Entrevistado:

Instituição em que atua:

Tempo de docência:

Formação:

<u>Questionamento Sobre o Cálculo:</u>

Pergunta: Gostaríamos de saber sua opinião sobre o atual panorama de ensino nas disciplinas de cálculo nas universidades?

Pergunta: Pesquisas como as de Artur Oscar Costa Lopes (1999), Raimundo Morais Santos e Hermínio Borges Neto (1995), e Maria Helena Cury (2002) mostram que as disciplinas de cálculo das universidades brasileiras apresentam altos índices de reprovação. Gostaríamos de saber sua opinião sobre as possíveis causas desse fenômeno?

Pergunta: As mesmo pesquisas apontam como umas das possíveis causas para isso uma deficiência na transição do ensino médio para o superior. Visando sanar esse problema as universidades criaram cursos para preparar o aluno para a disciplina, como o Pré-cálculo e o Cálculo Zero, que realizam o reforço de alguns conteúdos do 2º grau. Qual a sua opinião sobre a existência dessa deficiência? Você acredita que estas medidas tomadas pelas universidades são suficientes para sanar o problema dos altos índices de reprovação?

Pergunta: Junto a isto trabalhos de professores como Geraldo Ávila e Roberto Costallat Duclos defendem a possibilidade do ensino de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio. Gostaríamos de perguntar se você acredita que a inserção de tópicos iniciais de cálculo no currículo do ensino médio poderia auxiliar na resolução do problema do ensino de cálculo? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo?

<u>História como ferramenta de Ensino:</u>

Pergunta: Sabemos que a utilização da história pode ser uma ferramenta valiosa no ensino da matemática e que por meio dela podemos contextualizar a época e o ambiente em que muitas das grande ideias e concepções da matemática surgiram, bem como as teorias, pensamentos e a maneira de pensar de seus descobridores.Gostaríamos de saber se você já desenvolveu alguma atividade em sala de aula mesclando história e matemática? Como foi esta experiência? Os resultados obtidos foram satisfatórios?

Pergunta: Gostaríamos de saber se você acredita que podemos unir história e matemática de modo a ensinarmos aos alunos maneiras apropriadas de pensar para concepção de certas ideias, bem como o contexto onde estas surgem? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem?

A Influência do Infinito no Cálculo:

Pergunta: Levando em consideração tudo o que foi pensado sobre o infinito antes do surgimento do cálculo. Gostaríamos de saber como você acredita que a estruturação do conceito de infinito influenciou o desenvolvimento do cálculo? Você acha que as concepções relacionadas ao infinito são proveitosas para começar a pensar o cálculo?

Pergunta: A história nos mostra que os pensamentos e ideias que levaram a estruturação do conceito de infinito influenciaram muito o desenvolvimento do cálculo. Gostaríamos de saber se você acredita que uma atividade de reconstrução histórica do infinito em sala de aula pode fornecer uma maneira alternativa de se estruturar as conexões lógicas e raciocínios necessários para se começar a pensar cálculo? Como acha que os alunos reagiriam a essa forma de abordagem?

Finalizando:

Pergunta: Relembrando as observações feitas anteriormente referentes aos altos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades brasileiras, a viabilidade da inclusão de tópicos iniciais de cálculo nos programas do ensino médio, a utilização da história no ensino de maneiras alternativas de conceber certas ideias e a influência que o infinito exerce sobre o desenvolvimento do cálculo, gostaríamos de saber se você acredita ser viável utilizarmos uma abordagem histórica, com foco na história do infinito, para o desenvolvimento de uma atividade de introdução ao pensamento do cálculo? Qual sua opinião sobre a possibilidade disso ser colocado em prática no ensino médio? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem? Acredita que isso poderá auxiliar na diminuição dos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades?

Pergunta: Gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

Apêndice B: Termo de Consentimento Informado

Eu, ________________________________, R.G. ____________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada "PENSANDO NO INFINITO PARA ENTENDER CÁLCULO: uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no Ensino Médio", desenvolvida pelo pesquisador Guilherme Porto Da Silva. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela Prof.ª Dr. ª Lucia Helena Marques Carrasco, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail luciahmc@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Conhecer a opinião dos professores sobre a realidade vivenciada pelos cursos de cálculo.

- Conhecer a opinião dos professores sobre a viabilidade da inserção de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio por meio da história do infinito.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas por mim será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas por meu nome e demais informações relativas à minha pessoa.

A minha colaboração se fará por meio de uma entrevista, em data a ser marcada, sobre o tema "Uma visão de professores sobre a introdução ao cálculo no Ensino Médio". Posteriormente, o pesquisador fará a transcrição das minhas respostas e submeterá tal texto à minha avaliação. A utilização dos dados da entrevista se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no e-mail paipptn@hotmail.com.

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, 12 de novembro de 2013.

Assinatura do (a) entrevistado: ______________________________________

Assinatura do pesquisador: ____

Assinatura da orientadora da pesquisa: _________________________________

ANEXOS

Anexo A: Transcrição da Entrevista com a Professora Maria Dalpozzo

Apresentação:

Nome do Entrevistado: Maria Dalpozzo.

Instituição em que atua: Colégio Estadual Inácio Montanha.

Tempo de docência: 22 anos.

Formação: Graduação em Licenciatura em Matemática na Faculdade Porto Alegrense (FAPA), Mestrado em Educação matemática na Universidade Do Vale do Rio Dos Sinos (Unisinos).

Questionamento Sobre o Cálculo:

Pergunta: Gostaríamos de saber sua opinião sobre o atual panorama de ensino nas disciplinas de cálculo nas universidades?

Resposta: Conclui a faculdade de matemática há 25 anos e desde então não tive mais contato com a disciplina, por isso não sei opinar. Vejo muitos colegas falando às vezes que os alunos vão muito mal e que não conseguem aprender por isso sei que deve continuar sendo muito difícil e muitos alunos devem rodar.

Pergunta: Pesquisas como as de Artur Oscar Costa Lopes (1999), Raimundo Morais Santos e Hermínio Borges Neto (1995), e Maria Helena Cury (2002) mostram que as disciplinas de cálculo das universidades brasileiras apresentam altos índices de reprovação. Gostaríamos de saber sua opinião sobre as possíveis causas desse fenômeno?

Resposta: Se observarmos o conteúdo programático do ensino médio teria a priori o jovem estar preparado para continuar os estudos de matemática no ensino superior, porém a realidade é outra. Os jovens de hoje, pelo menos os meus alunos, estudam o mínimo para serem aprovados, pois o diploma é fundamental para concorrerem a vagas de trabalho. Por isso a falta de interesse deles em aprender faz eles ficarem com falta de conteúdo quando se formam e por isso eles acabam tendo dificuldades na universidade e nos empregos também, porque não lembram mais o que viram no segundo grau.

Pergunta: As mesmas pesquisas apontam como umas das possíveis causas para isso uma deficiência na transição do ensino médio para o superior. Visando sanar esse problema as universidades criaram cursos para preparar o aluno para a disciplina, como o Pré-cálculo e o Cálculo Zero, que realizam o reforço de alguns conteúdos do 2º grau. Qual a sua opinião sobre a existência dessa deficiência? Você acredita que estas medidas tomadas pelas universidades são suficientes para sanar o problema dos altos índices de reprovação?

Resposta: O estudo da matemática é conhecido como um tabu para a maioria da população, desde o momento em que se deparam com as quatro operações até o cálculo de derivadas e integrais na universidade. Por isso não é só na passagem no ensino médio para a universidade que ocorrem problemas, mas na transição de todas as fases do estudo, desde o ensino fundamental até o superior.

Também se observa que poucos têm maior facilidade em aprenderem matemática que outros quando aplicada a mesma didática. Acho que para melhorar o entendimento da matemática deveria se separar os alunos em dois grupos: os que têm facilidade com o raciocínio lógico e trabalhar com eles o conteúdo para prepará-los para o estudo superior nas áreas exatas e, os que têm dificuldade de raciocínio lógico poderiam trabalhar menos conteúdo para que tenham mais tempo para o estudo. Quanto o reforço que a universidade propõe, é valido pois permite sanar lacunas no ensino fundamental e médio, mas acho que só serão realmente aproveitados por alunos que tenham facilidade com a matemática e são mais interessados.

Pergunta: Junto a isto trabalhos de professores como Geraldo Ávila e Roberto Costallat Duclos defendem a possibilidade do ensino de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio. Gostaríamos de perguntar se você acredita que a inserção de tópicos iniciais de cálculo no currículo do ensino médio poderia auxiliar na resolução do problema do ensino de cálculo? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo?

Resposta: Poderia sim, desde que os estudantes tenham facilidade em matemática como eu disse na pergunta anterior.

<u>História como ferramenta de Ensino:</u>

Pergunta: Sabemos que a utilização da história pode ser uma ferramenta valiosa no ensino da matemática e que por meio dela podemos contextualizar a época e o ambiente em que muitas das grandes ideias e concepções da matemática surgiram, bem como as teorias, pensamentos e a maneira de pensar de seus descobridores. Gostaríamos de saber se você já desenvolveu alguma atividade em sala de aula mesclando história e matemática? Como foi esta experiência? Os resultados obtidos foram satisfatórios?

Resposta: Comecei a desenvolver atividades como essa há 15 anos, quando ainda ensinava matemática no ensino fundamental. Na semana das olimpíadas escolares o professor tinha que desenvolver uma atividade diferenciada para os alunos e eu fiz atividades de pesquisas sobre a história da matemática em relação aos conteúdos que estavam sendo trabalhados em cada turma. Fou um sucesso assim, eu percebi que os estudantes se surpreenderam em relacionar história com as matérias da matemática. Todos imaginavam que matemática era só números e não tinha história de matemática e nem livros que a descrevessem.

É fundamental conhecer a história do conteúdo estudado resumidamente para correlacionar com sua aplicação.

Pergunta: Gostaríamos de saber se você acredita que podemos unir história e matemática de modo a ensinarmos aos alunos maneiras apropriadas de pensar para concepção de certas ideias, bem como o contexto onde estas surgem? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem?

Resposta: A maioria acharão interessante, principalmente quando uso autores que são de épocas muito antigos, antes de cristo. Mas nem todos vão conseguir compreender a ideia da atividade, só os que têm mais facilidade com a matemática e com o raciocínio lógico. A maioria gostará por ser diferentes das contas que estão acostumados, mas não vão se interessar por acharem que não é uma aula e essa falta de interesse vai fazer com que eles não levem a sério a matéria e por isso eles não vão aprender.

A Influência do Infinito no Cálculo:

Pergunta: Levando em consideração tudo o que foi pensado sobre o infinito antes do surgimento do cálculo. Gostaríamos de saber como você acredita que a estruturação do conceito de infinito influenciou o desenvolvimento do cálculo? Você acha que as concepções relacionadas ao infinito são proveitosas para começar a pensar o cálculo?

Resposta: O conceito de infinito é tão importante quanto a geometria, a álgebra e as outras áreas da matemática porque todos nós temos que pensar que nenhum conteúdo pode ser visto só como cálculo, ou só como geometria ou como qualquer outra coisa. Isso aprendemos ainda na escola, no estudo da matemática com outras disciplinas relacionadas.

Pergunta: A história nos mostra que os pensamentos e ideias que levaram a estruturação do conceito de infinito influenciaram muito o desenvolvimento do cálculo. Gostaríamos de saber se você acredita que uma atividade de reconstrução histórica do infinito em sala de aula pode fornecer uma maneira alternativa de se estruturar as conexões lógicas e raciocínios necessários para se começar a pensar cálculo? Como acha que os alunos reagiriam a essa forma de abordagem?

Resposta: Os alunos que tem um bom raciocínio lógico, facilidade de aprender e interesse nas matérias vão se interessar também por uma atividade dessa maneira e com certeza ela vai poder ajudar eles a pensar melhor na disciplina de cálculo. Porque um trabalho desse tipo praticamente não existe dentro da escola e com o início dela com certeza vai ser mais fácil depois entender os conceitos mais difíceis do cálculo. Os alunos que não tem essa facilidade não vão se interessar e vão perguntar "aonde vou aplicar na minha vida saber este conteúdo de matemática?", geralmente estes são alunos que não querem continuar os estudos e querem se formar só para ter o diploma e ingressar no mercado de trabalho.

Finalizando:

Pergunta: Relembrando as observações feitas anteriormente referentes aos altos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades brasileiras, a viabilidade da inclusão de tópicos iniciais de cálculo nos programas do ensino médio, a utilização da história no ensino de maneiras alternativas de conceber certas ideias e a influência que o infinito exerce sobre o desenvolvimento do cálculo, gostaríamos de saber se você acredita ser viável utilizarmos uma abordagem histórica, com foco na história do infinito, para o desenvolvimento de uma atividade de introdução ao pensamento do cálculo? Qual sua opinião sobre a possibilidade disso ser colocado em prática no ensino médio? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem? Acredita que isso poderá auxiliar na diminuição dos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades?

Resposta: A maior barreira de se ensinar matemática é o pouco tempo que temos para as aulas. Em primeiro lugar é necessário aumentar a carga horária de matemática na escola, no ensino fundamental e no médio. Só depois disso é que poderíamos pensar em ensinar tópicos iniciais de cálculo. Se isso for feito teríamos como ensinar essa tua proposta, mas mesmo assim acho que só os alunos com facilidade iriam se interessar e entender o que seria proposto. Como comentei na pergunta anterior não existe uma atividade dessa na escola e com certeza ao ajudar no pensamento de cálculo e ia ajudar os alunos a passarem na disciplina.

Pergunta: Gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

Resposta: Andam diminuindo a carga horária de matemática no ensino médio, por isso cada vez realizamos menos projetos e atividade. Por causa disso as universidades devem se preparar para que os estudantes que venham do ensino médio saibam menos matemática que o recomendado como conteúdo mínimo.

Anexo B: Transcrição da Entrevista com o Professor Antônio Esperança

Apresentação:

Nome do Entrevistado: Antônio César dos Santos Esperança.

Instituição em que atua: Colégio Estadual Julio de Castilhos e Escola de E. M. Maria Imaculada

Tempo de docência: 12 anos

Formação: Graduação na Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Mestrado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Questionamento Sobre o Cálculo:

Pergunta: Gostaríamos de saber sua opinião sobre o atual panorama de ensino nas disciplinas de cálculo nas universidades?

Resposta: É uma disciplina muito difícil para quem entra na universidade ela está colocada logo nas primeiras séries, e que é muito até às vezes frustrante para os alunos mesmo para aqueles que gostam de matemática e se deparam com disciplinas de cálculo que são muito duras, e que talvez eles não saiam do ensino médio com o devido preparo, e assim são pegos de surpresa com as disciplinas de cálculo. Se não é alguém precavido, que já se antecipa, em estudos e de conteúdos básicos do ensino médio é pego de surpresa e vai muito mal nas avaliações. Então, mas é que eu não vejo que seja um problema da disciplina e sim do enfoque que é dado no ensino médio para a matemática; a matemática não têm, na verdade a responsabilidade matemática exigida dos alunos no primeiro ano do ensino superior, desses cursos que têm cálculo, essa responsabilidade ela não é exigida no ensino médio, então eles se deparam com essa necessidade muito instantânea.

Pergunta: Pesquisas como as de Artur Oscar Costa Lopes (1999), Raimundo Morais Santos e Hermínio Borges Neto (1995), e Maria Helena Cury (2002) mostram que as disciplinas de cálculo das universidades brasileiras apresentam altos índices de reprovação. Gostaríamos de saber sua opinião sobre as possíveis causas desse fenômeno?

Resposta: É uma transição muito abrupta, que exige muita responsabilidade de um aluno que sai do ensino médio onde ele é muito pouco exigido, são raros os colégios que têm uma exigência de rotina de estudo, de aprofundamento, de entender realmente os conceitos, porque o ensino médio hoje em dia, principalmente nas escolas públicas é, excetuando o Colégio Militar, mas a matemática ela tá muito voltada para coisas do dia-a-dia, e até menosprezando, de certo modo, o conceito, demonstrações, prova, coisas que são exigidas nas disciplinas de cálculo e os alunos são pegos de surpresa ali, tendo que reconhecer a linguagem matemática de uma maneira mais formal, coisa que no ensino médio não se faz mais. O choque se dá nesse sentido.

Pergunta: As mesmas pesquisas apontam como umas das possíveis causas para isso uma deficiência na transição do ensino médio para o superior. Visando sanar esse problema as universidades criaram cursos para preparar o aluno para a disciplina, como o Pré-cálculo e o Cálculo Zero, que realizam o reforço de alguns conteúdos do 2º grau. Qual a sua opinião sobre a existência dessa deficiência? Você acredita que estas medidas tomadas pelas universidades são suficientes para sanar o problema dos altos índices de reprovação?

Resposta: Eu acho que é uma medida emergencial (está falando sobre os programas tipo pré-cálculo), na verdade eles deveriam estar vendo isso no ensino médio, então o que acontece é eles passam estudando matemática do ensino médio, mas quando entram numa faculdade num curso que exige a matemática do ensino médio de verdade eles não têm, então é preciso que eles tenham isso, mas principalmente é preciso desenvolver neles a responsabilidade, que eles acabam não tendo, o compromisso com o estudo e valorizar a linguagem matemática como um todo, não só os resultados da matemática e sim a sua escrita, os seus conceitos isso nos cursos de ensino médio, olha, são raros os colégios que ainda trabalham esses tipos de ideia.

Pergunta: Junto a isto trabalhos de professores como Geraldo Ávila e Roberto Costallat Duclos defendem a possibilidade do ensino de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio. Gostaríamos de perguntar se você acredita que a inserção de tópicos iniciais de cálculo no currículo do ensino médio poderia auxiliar na resolução do problema do ensino de cálculo? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo?

Resposta: É válido, mas não é isso que incomoda o estudante que entra no curso superior e que se vê na dificuldade, ele se vê na dificuldade no conceito de funções, na resolução de equações, porque o cálculo é uma disciplina que é uma fusão de tudo que se vê em matemática no ensino médio se concentra no cálculo, então para tu resolver um problema de cálculo tu precisa conhecer propriedades bem básicas de fatoração, resolução de equações, como se resolvem equações, os pontos críticos de uma função, isso tá no ensino médio, até no ensino fundamental, mas o aluno quando chega na universidade ele não têm isso na ponta da língua, por isso ele têm que rever, não são os conceitos do cálculo mesmo, de analisar o crescimento, decrescimento de uma função, não é isso que assusta ele, o que assusta ele é a quantidade de informação necessária, que ele precisa ter, que ele viu, e que os professores da universidade dizem: “Isso vocês já viram”, mas é isso o que assusta; porque sim eu vi, mas eu não me lembro, ou eu não vi com esse rigor, nesse ponto é que eles perdem.

História como ferramenta de Ensino:

Pergunta: Sabemos que a utilização da história pode ser uma ferramenta valiosa no ensino da matemática e que por meio dela podemos contextualizar a época e o ambiente em que muitas das grandes ideias e concepções da matemática surgiram, bem como as teorias, pensamentos e a maneira de pensar de seus descobridores. Gostaríamos de saber se você já desenvolveu alguma atividade em sala de aula mesclando história e matemática? Como foi esta experiência? Os resultados obtidos foram satisfatórios?

Resposta: A história da matemática, em qualquer aspecto, assim, em qualquer tópico que tu conseguir resgatar, e principalmente no cálculo, tu resgatar como o cálculo foi criado, tem até um livro muito interessante que é “A Guerra do Cálculo”, que fala do Leibniz e do Newton, aquela disputa para ver quem era o autor da nova ideia matemática, que é um conhecimento recente lá do século XVII, isso é novo para a história da matemática, e isso é interessante. Torna o ensino de cálculo mais agradável, para o professor e para o aluno. Como professor gosto de trazer para os alunos fatos impressionantes e curiosidade durante a aula e busco eles em muitos livros de história, isso me ajuda a fazer a aula mais interessante apara eles e eles gostam porque não ficam só nas contas e exercícios, não fica só na técnica, eles podem ver de outra maneira a matemática, como ela foi construída, na origem, e como as coisas surgiram.

Pergunta: Gostaríamos de saber se você acredita que podemos unir história e matemática de modo a ensinarmos aos alunos maneiras apropriadas de pensar para concepção de certas ideias, bem como o contexto onde estas surgem? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem?

Resposta: Sim, tem. Eles sempre que se contextualiza, sempre que tu deixa um pouco de lado a técnica em si e passa para a história daquele conhecimento eles se agradam. É claro que tem que ser colocado de uma maneira que seja acessível, que se não acaba ficando distante. Que nem quando eu vi história da matemática já no curso superior de matemática, não foi bom assim, me afastou um pouco da história da matemática, porque era pegar o livro aquele do Boyer e destrinchar ele, e aquele é um livro duro, é um livro que até hoje, eu com o tempo todo de matemática que eu tenho, eu ainda não conheço ele todo, eu vou muito devagar. Eu tive uma professora que queria atravessar aquele livro em um semestre, mas não dá.

A Influência do Infinito no Cálculo:

Pergunta: Levando em consideração tudo o que foi pensado sobre o infinito antes do surgimento do cálculo. Gostaríamos de saber como você acredita que a estruturação do conceito de infinito influenciou o desenvolvimento do cálculo? Você acha que as concepções relacionadas ao infinito são proveitosas para começar a pensar o cálculo?

Resposta: Eu acho que é uma parte muito rica da história da matemática, o como se pensava em algo que não se podia tocar. Entende o infinito é isso, tu começar a trabalhar, considerar o infinito sem poder, as regras que naturalmente se usa em questões finitas, será que são aplicadas em questões infinitas? É muito legal; e pegar, exatamente, este período de transição e, principalmente com Leibniz e com o Newton, que eles que formularam isso de verdade, não que não se tivesse conhecimento disso antes, se tinha, mas não se tinha uma teoria toda formulada em relação ao infinito, assim das possibilidades que se abriram de se estudar funções, funções que têm um domínio infinito, e acho que é isso.

No ensino médio tem que ir muito devagar; eles têm ideia; começa a falar sobre infinito sobre sequencias e, eles assimilam muito bem; ali quando tu trabalha soma dos termos de uma progressão, mesmo que ela tenha infinitos termos, e tu dizer que aquela soma tá convergindo para um valor, que não vai passar desse valor, vai cada vez mais se aproximar de um valor, mas nunca vai passar, isso é legal de estar trabalhando com eles. Dizer para eles que tu vai te aproximar dessa parede andando sempre a metade do caminho que falta e dizer que tu não vai chegar nunca, na verdade tu pergunta para eles “Quantos passos são necessários, se eu sempre vou caminhar metade?” e eles ficam chocados de saber que eles não vão chagar nunca, que eles sempre que caminhar a metade, esse conceito de infinito é legal, eles entendem, mas se forçar muito, já colocar uma teoria exagerada ali tu perde o (eu falo como elementos de análise e ele responde) ai eu acho que não é, têm coisas da matemática, que na minha opinião exige uma maturidade que o aluno do ensino médio ainda não tem.

Pergunta: A história nos mostra que os pensamentos e ideias que levaram a estruturação do conceito de infinito influenciaram muito o desenvolvimento do cálculo. Gostaríamos de saber se você acredita que uma atividade de reconstrução histórica do infinito em sala de aula pode fornecer uma maneira alternativa de se estruturar as conexões lógicas e raciocínios necessários para se começar a pensar cálculo? Como acha que os alunos reagiriam a essa forma de abordagem?

Resposta: Eu não acho possível, assim isso não impede que se tente, mas eu acho que tentar reconstruir uma construção que foi feita naquele período, pro nosso jovem; problemas que eles tinham naquela época não são problemas mais hoje; visualizações que eles tinham só na mente, naquela época, hoje em dia não, hoje em dia, essa geração ela é muito gráfica, então fazer essa reconstrução como um projeto de pesquisa, sim, mas tu querer que ele pense como alguém que pensou lá naquela época, eu acho muito complicado. A cabeça do jovem de hoje, ela tem um jeito de pensar que é muito diferente de uma geração para trás. E querer levar eles, num espaço-tempo, lá para o período da Guerra do Cálculo, eu acho complicado assim como técnica de ensino; como um experimento, assim: “vamos tentar entender como eles pensavam”, ai sim. Mas “eu quero que vocês pensem como eles” eu acho que não dá.

<u>Finalizando:</u>

Pergunta: Relembrando as observações feitas anteriormente referentes aos altos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades brasileiras, a viabilidade da inclusão de tópicos iniciais de cálculo nos programas do ensino médio, a utilização da história no ensino de maneiras alternativas de conceber certas ideias e a influência que o infinito exerce sobre o desenvolvimento do cálculo, gostaríamos de saber se você acredita ser viável utilizarmos uma abordagem histórica, com foco na história do infinito, para o desenvolvimento de uma atividade de introdução ao pensamento do cálculo? Qual sua opinião sobre a possibilidade disso ser colocado em prática no ensino médio? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem? Acredita que isso poderá auxiliar na diminuição dos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades?

Resposta: Práticas como essa de chegar a distâncias inatingíveis, que é surpreendente, então é viável e é legal.

É, mas principalmente reforçar na ideia de que a utilidade da matemática ela aparece quando tu não procura por ela, e na verdade, esse conceito é que faz com que a gente tenha o que a gente tem hoje de avanços, essa é a ideia. Na verdade as grandes descobertas da matemática, quem descobriu não conseguiu nem ver a aplicabilidade daquilo. John Nash, quando ele criou a teoria dele, e ai quando ele soube que tinham aplicado, inclusive, na teoria da evolução, ele disse nunca pensaria nisso, mas ele criou aquilo, a teoria dele ganhou vida, então ninguém precisou dizer para ele olha isso vai ser usado na teoria da evolução, não, ele criou aquilo, deixou ali, como tem muitas coisas que estão postas, mas alguém foi lá e aplicou na teoria da evolução.

Sim. É, tudo que aproxime mais o cálculo deles, que não faça com que não seja uma surpresa para eles o cálculo, porque, atualmente, o cálculo é uma surpresa; eles são pegos de surpresa, então tudo que for feito nesse sentido eu acho que vai ajudar.

Pergunta: Gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

Resposta: Acho que é isso mesmo, ficou uma ideia bem boa do que eu penso.

Anexo C: Transcrição da Entrevista com a Professora Elizabete Búrigo

<u>Apresentação:</u>

Nome do Entrevistado: Elisabete Zardo Búrigo.

Instituição em que atua: UFRGS.

Tempo de docência: 31 anos.

Formação: Graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul (UFRGS), Mestrado em Educação na Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul (UFRGS) e Doutorado em Educação na Universidade de São Paulo (USP).

<u>Questionamento Sobre o Cálculo:</u>

Pergunta: Gostaríamos de saber sua opinião sobre o atual panorama de ensino nas disciplinas de cálculo nas universidades?

Resposta: Primeira observação é a seguinte, esse problema da transição do ensino médio para o ensino de cálculo da universidade ele não é um problema brasileiro. Em qualquer evento internacional você irá encontrar o mesmo problema, nos EUA, na China, em vários países Europeus, na Coréia. Em todas as universidades existe esse problema CE repetência no cálculo.

Pergunta: Pesquisas como as de Artur Oscar Costa Lopes (1999), Raimundo Morais Santos e Hermínio Borges Neto (1995), e Maria Helena Cury (2002) mostram que as disciplinas de cálculo das universidades brasileiras apresentam altos índices de reprovação. Gostaríamos de saber sua opinião sobre as possíveis causas desse fenômeno?

Resposta: Tem várias explicações para esse problema. Uma delas, tem haver não tanto com o conteúdo, por isso gostaria de te mostrar um artigo que está na biblioteca que a gente escreveu, os franceses chamam de contrato didático. Uma das explicações para tantas reprovações, tem haver com a mudança muito grande no contrato didático que acontece do Ensino Médio para o Ensino Superior, e lá no artigo está mais detalho.

Vou só te dar um exemplo, uma das coisas que o aluno aprende na escola básica é simplificar, chegar sempre na resposta mais simples, então ele vai simplificando e cortando. No cálculo, ele aprende a usar técnicas algébricas onde ao invés de simplificar, vai acrescentar elementos. Então por exemplo, vai pegar o 1 e vai transformar esse número em $sen^2x + cos^2 x$. O jeito de pensar sobre a escrita matemática também muda. Uma das coisas que explica a dificuldade dos alunos é que muito do que se faz de matemática na escola básica é voltado para a repetição de exercícios, então os professores resolvem um problema e pedem para os alunos resolverem vários exercícios, onde só pede para eles substituírem os valores. No cálculo, muitas vezes o problema são da mesma natureza, mas a aparência deles não é a mesma, então os alunos tem dificuldade de identificar.

Outra coisa que é comum no ensino médio. Os alunos aprendem que tipo de problema é pelo enunciado da questão. Se citam sobre triangulo retângulo, eles vão lá e aplicam Pitágoras. E de fato, no cálculo, você faz uma pergunta sobre valor máximo, os alunos já sabem que tem que derivar e achar uma derivada zero, mas que além disso tem que resolver outras coisas. Em geral, os problemas de cálculos exigem uma estratégia, e várias escolhas e algumas antecipações. Ou seja, se eu vou integrar, qual é a melhor técnica de antecipação? Eu não vou experimentando uma por uma até descobrir qual a melhor, tenho que ter uma ideia que se eu utilizar “essa” para onde ela vai me levar... Então essa ideia da antecipação é uma experiência que os alunos não tiveram no ensino médio. O problema da articulação da álgebra e da geométrica que também estão bem separadas no ensino médio, no cálculo exige que o aluno junte os dois raciocínios.

Pergunta: As mesmas pesquisas apontam como umas das possíveis causas para isso uma deficiência na transição do ensino médio para o superior. Visando sanar esse problema as universidades criaram cursos para preparar o aluno para a disciplina, como o Pré-cálculo e o Cálculo Zero, que realizam o reforço de alguns conteúdos do 2º grau. Qual a sua opinião sobre a existência dessa deficiência? Você acredita que estas medidas tomadas pelas universidades são suficientes para sanar o problema dos altos índices de reprovação?

Resposta: Eu acho que sim, eles ajudam porque eles simplesmente sensibilizam os alunos de que eles têm que mudar de atitude. Por exemplo, o livro de calculo não é só para consultar um exercício, e sim para “puxa, o que é mesmo o limite?”. Lá no Ensino Médio, na maioria das vezes as definições não eram importantes, já aqui ele tem que aprender a estudar pelo livro. Então, o pré-calculo é o momento de sensibilização para isso.

Outra coisa, caso um aluno não entenda algo que o professor disse na aula, terá que correr atrás, pois essa coisa pode ser um pré-requisito para uma outra ideia mais complicada. Logo, considero o pré calculo uma sensibilização para uma mudança de atitude do aluno.

Pergunta: Junto a isto trabalhos de professores como Geraldo Ávila e Roberto Costallat Duclos defendem a possibilidade do ensino de tópicos iniciais de cálculo no ensino médio. Gostaríamos de perguntar se você acredita que a inserção de tópicos iniciais de cálculo no currículo do ensino médio poderia auxiliar na resolução do problema do ensino de cálculo? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo?

Resposta: Depende de como. Por exemplo, o calculo já foi ensinado em dois momentos na história do Brasil. Naquela época, muitos não aprendiam, mas considerava-se isso “normal”. Nos dias de hoje isso não é considerado razoável, logo o desafio é ir incluindo o calculo no ensino médio com compreensão. Tem uma proposta muito interessante no TCC do Fernando Rodrigues Oliveira. Ele justamente construiu uma proposta inicial de abordagem do calculo sem todas as dificuldades de linguagem envolvidas na notação de limites e outras. Então é possível pensar em uma abordagem de calculo no ensino médio que não seja exatamente sem produzir isso que se fala na universidade.

As ideias do calculo são ideias muito intuitivas, são ideias geométricas. Ideia da tangente, ideia da área, que são ideias fundamentais. Um problema central do aprendizado de calculo é a ideia de variável e função. Pois lá no ensino médio os alunos aprendem função por fórmulas e substituindo valores, então não fica claro que aquele x implica numa mudança daquele f(x) e isso faz falta no calculo. Seria necessário desde o ensino médio desenvolver o pensamento variacional. E os gráficos também não ajudam, pois eles tem que pensar muito o movimento que envolve ali.

<u>História como ferramenta de Ensino:</u>

Pergunta: Sabemos que a utilização da história pode ser uma ferramenta valiosa no ensino da matemática e que por meio dela podemos contextualizar a época e o ambiente em que muitas das grandes ideias e concepções da matemática surgiram, bem como as teorias, pensamentos e a maneira de pensar de seus descobridores. Gostaríamos de saber se você já desenvolveu alguma atividade em sala de aula mesclando história e matemática? Como foi esta experiência? Os resultados obtidos foram satisfatórios?

Resposta: Sim, de várias maneiras. Eu acho que na história é principalmente interessante os professores se apropriarem da história. Talvez não seja tão relevante para os alunos, mas para os professores sim, para eles se darem conta que aqueles conceitos que estão sendo trabalhados não são naturais.

Vou te dar um exemplo recente. Lá no Fundamentos I, a gente tem que fazer de conta que não conhece os números reais. É como se estivesse fazendo o percurso histórico, onde você fica parado lá nos gregos 200 a.C. e tu tem que imaginar que tu só aceita os números racionais e imaginar o que você pode fazer com eles. Então você pode fazer uma porção de coisas, mas algumas você não consegue e isso é um problema. Como os gregos resolvem esses problemas? Enfrentam geometricamente.

Lá em fundamentos, por exemplo, estávamos construindo os números reais e passamos para a construção das operações. Aí vem a pergunta simples: Eu consegui definir os números reais absolutos, estendo para os relativos, então tem o conjunto dos numero reais, eu associo um número real a uma medida. Então posso concluir que todo o numero real absoluto é uma medida de um segmento. Mas ainda não consigo operar com ele, então vou me perguntar o seguinte "será que todo numero real tem um inverso?". Se eu quiser resolver isso a partir dos intervalos encaixantes, ou seja, a partir da ideia da represervação da lista, a ideia é mais difícil por que a pergunta é se para cada lista infinita, eu consigo outro lista infinita, de tal modo que quando eu fizer a multiplicação dos extremos... né? Porque eu defino a multiplicação de números reais usando os extremos dos intervalos né? Bom, então a pergunta é "será que eu sempre vou ter pra essa lista uma outra lista de tal modo que ao multiplicar os extremos eu chego em 1 e 1?" Ou "intervalos encaixantes cuja intersecção é 1?" Essa é a pergunta, ela é difícil, agora como os gregos resolviam? Resolviam de um jeito muito simples (nesse momento a professora mostra em uma folha de papel como construir o número geometricamente por meio de relações métricas num triângulo, ocultamos os detalhes desta parte da conversa por estarem relacionados a uma explicação visual).

O que me deixou muito feliz da ultima vez que eu dei fundamentos? Eu não apresentei essa construção, a gente já tinha usado uma construção parecida em outra situação e quando a gente começou a fazer essa discussão essa construção veio de um aluno, ta? E ao usar essa construção, ele mostrou que poderia concluir muitas coias sobre os números reais se apartir da ideia que eles podem sempre expressar uma medida de segmento. Pois sempre pode apelar para o raciocínio geométrico e posso tirar conclusões apartir do raciocínio geométrico.. Porém hoje, esse raciocínio não é o mais valorizado, porque hoje em dias temos várias ferramentas tecnológicas que sugerem que é mais fácil que trabalhemos com o campo numérico, mas a história nos traz esse tipo de recurso.

Pergunta: Gostaríamos de saber se você acredita que podemos unir história e matemática de modo a ensinarmos aos alunos maneiras apropriadas de pensar para concepção de certas ideias, bem como o contexto onde estas surgem? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem?

Resposta:

Mas a apresentada isso aqui (construção apresentada acima) é uma maneira de pensar. Tem um livro que esta biblioteca, Development of Calculus, onde o Newton se dedicou principalmente a todos os problemas que os gregos não sabiam responder. Então ele partiu das mesmas curvas, espiral, cicloides para conseguir chegar ao teorema fundamental do calculo. Se você for fazer em sala de aula toda a reconstrução dele, você demorará muito tempo. A não ser que você tenha uma proposta diferente.

A Influência do Infinito no Cálculo:

Pergunta: Levando em consideração tudo o que foi pensado sobre o infinito antes do surgimento do cálculo. Gostaríamos de saber como você acredita que a estruturação do conceito de infinito influenciou o desenvolvimento do cálculo? Você acha que as concepções relacionadas ao infinito são proveitosas para começar a pensar o cálculo?

Resposta: Ai que pergunta difícil. Olha, eu acho que a ideia chave não é necessariamente a ideia de infinito, pois o infinito está presente em 0, 1, 2, 3, aqui está o infinito, e no cálculo tu ta falando de um infinito diferente, o infinitamente pequeno. Eu acho que o mais chave é a ideia de convergência, e outra coisa interessante é que quando tu olha para trás, lá pelo século XVII, XVIII, o Newton e o Leibniz usavam muito o raciocínio numérico, então tem um historiador francês, me foge o nome agora, que diz que o Newton e outros grandes matemáticos da época faziam contas usando 8, 10 casas decimais, faziam essas contas a mão para concluir algo sobre a convergência de uma série, faziam muitas experimentações numéricas para depois chegarem a uma conclusão mais genérica, então eu acho que isso também falta, tanto no ensino médio como na universidade, lidar mais com números.

Para mostrar que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge o Anton até desenvolve esse raciocínio, ele indica intuitivamente que vai convergir mostrando que algumas casas depois da vírgula vão se fixando aos poucos, esse é um assunto muito bom para se trabalhar, mas como o cálculo tem muito para se trabalhar, em geral isto é visto muito rápido e essa ideia de convergência meio que desaparece e no fundo ela é importante pra todo desenvolvimento.

Pergunta: A história nos mostra que os pensamentos e ideias que levaram a estruturação do conceito de infinito influenciaram muito o desenvolvimento do cálculo. Gostaríamos de saber se você acredita que uma atividade de reconstrução histórica do infinito em sala de aula pode fornecer uma maneira alternativa de se estruturar as conexões lógicas e raciocínios necessários para se começar a pensar cálculo? Como acha que os alunos reagiriam a essa forma de abordagem?

Resposta: Não sei, a não que você me diga como será feita a proposta. E na verdade, mesmo que você me diga, será um palpite, pois só saberá depois que experimentar.

Acho que o TCC é um momento importante para se experimentar esse tipo de prática, porque no estágio tu fica preso ao conteúdo da escola, mas se tu conseguir um grupo de alunos que tope fazer essa discussão seria bom.

Finalizando:

Pergunta: Relembrando as observações feitas anteriormente referentes aos altos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades brasileiras, a viabilidade da inclusão de tópicos iniciais de cálculo nos programas do ensino médio, a utilização da história no ensino de maneiras alternativas de conceber certas ideias e a influência que o infinito exerce sobre o desenvolvimento do cálculo, gostaríamos de saber se você acredita ser viável utilizarmos uma abordagem histórica, com foco na história do infinito, para o desenvolvimento de uma atividade de introdução ao pensamento do cálculo? Qual sua opinião sobre a possibilidade disso ser colocado em prática no ensino médio? Acredita que os alunos conseguiriam assimilar de maneira satisfatória o conteúdo? Como acha que os alunos reagiriam a essa nova forma de abordagem? Acredita que isso poderá auxiliar na diminuição dos índices de reprovação das disciplinas de cálculo nas universidades?

Resposta: Reforço que teria que em apresentar a proposta e que isso ainda seria apenas um palpite, porque só vai poder saber o resultado experimentando.

Pergunta: Gostaria de acrescentar mais alguma coisa?

Resposta: Nada mais, se precisar de alguma coisa tu pode me procurar.